Практичне заняття 14
(підсумкове)
Диференціальні рівняння і ряди.

Розв'язування д. р. 1 порядку
Різні типи д. р. 1 порядку.

1.151.
$$1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0.$$

$$e^x-e^{2y}y'=-\frac{1+x}{1+x^2}.$$

$$y'e^{2y}=e^x+\frac{1+x}{1+x^2}$$ з відокр. змінними

$$e^{2y}dy=\left(e^x+\frac{1+x}{1+x^2}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y}=e^x+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C.$$

1.156. $(x^2+y^2+1)dy+xy\,dx=0.$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x^2+y^2+1}{xy}$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=-\frac{y^2+1}{xy}.$$ Бернулі.

$x=u(y)\cdot v(y)$ (відносно $x(y)$)

$$u'v+uv'+\frac{uv}{y}=-\frac{y^2+1}{uvy}.$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = -\frac{y^2+1}{uvy}.$$

$$v:\quad v' + \frac{v}{y} = 0 \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \qquad \boxed{v = \frac{1}{y}}\,!$$

$$u \cdot u' = -\frac{y^2+1}{\frac{1}{y}} \quad \left(= -y^3 - y\right).$$

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + C.$$

$$x^2(y) = \frac{1}{y^2}\left(-\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + C\right) = -\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}.$$

1.161. $y' = \dfrac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$ ($= f(x,y)$ однорідна 0 го порядку)

$$f(x,y) = 1 + \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \left(= \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$y = t(x) \cdot x.$$

$$t'x + t = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

$$\frac{dt}{dx}x + t = \frac{t^2 + t - 1}{t^2}$$

$$\frac{dt\, x}{dx} = \frac{t^2 + t - 1 - t^3}{t^2}.$$

$$\frac{t^2\, dt}{(t^2-1)(1-t)} = \frac{dx}{x}.$$

$$y = -\int \frac{t^2 dt}{(t-1)^2(t+1)} = \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1}\right) dt$$

$$-t^2 = A(t^2-1) + B(t+1) + C(t-1)^2.$$

$t=1$ $\quad -1 = 2B \quad B = -\frac{1}{2}.$

$t=-1$ $\quad -1 = 4C \quad C = -\frac{1}{4}.$

t^2 $\quad -1 = A + C. \quad A = -\frac{3}{4}.$

$$y = -\frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| + const.$$

$$\ln|xC| = -\frac{3}{4}\ln\left|\frac{y-x}{x}\right| + \frac{x}{2(y-x)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+x}{x}\right|.$$

1.175

$$0 = \left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y\,dx + \left(x\cos\frac{y}{x} - y\sin\frac{y}{x}\right)x\,dy$$

не розділяються відмінні

не є однорідними.

лінійним

у повних диференціалах?

$$\underline{(xy\,dx + x^2dy)}\cos\frac{y}{x} + (y\,dx^2 - yx\,dy)\sin\frac{y}{x} = 0.$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \frac{xy\,dx + x^2dy}{yx\,dy - y^2dx} \Bigg| = \frac{\frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^2}}.$$

$\frac{y}{x} = t(x)$

$$tg\,t = \frac{t + t'x + t}{t(t'x + t) - t^2} \quad \left(= \frac{2t + t'x}{t \cdot t' x} \right)$$

$$t \cdot tg\,t \cdot t' \cdot x = 2t + t'x$$

$$t'x(t \cdot tg\,t - 1) = 2t$$

$$\frac{(t \cdot tg\,t - 1)}{t} \cdot dt = 2\frac{dx}{x}$$

$$-\ln\cos t - \ln t = 2\ln x\, c_1$$

$$\frac{1}{t\cos t} = x^2 c \quad \frac{x}{y\cos\frac{y}{x}} = x^2 c$$

$$xy\,c\cos\frac{y}{x} = C$$

1.176. $y' = \frac{x}{\cos y} - tg\,y$

$dy\cos y = (x - \sin y)\,dx$

$d\sin y = (x - \sin y)\,dx$

$\sin y = z(x)$

$\frac{dz}{dx} = -z + x$ відносно z лінійне

$z = u \cdot v$

$u'v + uv' + uv = x \quad v' + v = 0 \quad \frac{dv}{dx} = -v$

$-\ln v = x \quad v = e^{-x}$

$u' = xe^x$

$u = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$\sin y = (x-1)e^x + C.$

1.168. $xdy + ydx + y^2(xdy - ydx) = 0.$

$\underline{xdy} + ydx + y^2 \underline{(xdy - ydx)}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 3y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$

не є рівнянням у п.д.

$x(1+y^2)dy = (y^3 - y)dx$

з відокрем. змінними.

$\frac{1+y^2}{y^3-y} dy = \frac{dx}{x}.$

$\frac{1+y^2}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1}.$

$y^2+1 = A(y^2-1) + By(y+1) + Cy(y-1).$

$y=0 \quad 1 = -A.$

$y=1 \quad 2 = 2B. \quad B = 1$

$y=-1 \quad 2 = 2C \quad C = 1.$

$-\ln|y| + \ln|y-1| + \ln|y+1| = \ln xC$

$\frac{y^2-1}{y} = xC.$

1.167. $$y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$$

1. $y_1 = y + 1$. $\quad y_1' = \dfrac{y_1^2}{x y_1 - x^2}$.

однорідне

$y_1 = tx$.

$$t'x + t = \frac{t^2}{t-1}.$$

$$t'x = \frac{\cancel{t^2} - \cancel{t^2} + t}{t-1}.$$

$$\frac{(t-1)\,dt}{t} = \frac{dx}{x} \qquad t - \ln t = \ln xc.$$

$$\frac{y+1}{x} - \ln\frac{y+1}{x} = \ln xc.$$

$$\frac{y+1}{x} = \ln (y+1)c$$

2. $$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y+1} - \frac{x^2}{(y+1)^2}$$

Бернуллі.

$x = u(y)v(y)$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y+1} = -\frac{u^2v^2}{(y+1)^2}.$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y+1}\right) = -\frac{u^2v^2}{(y+1)^2}.$$

$$v: \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y+1} \qquad v = y+1.$$

$$u' = -u^2 \frac{\cancel{(y+1)}}{(y+1)^{\cancel{2}}}. \qquad -\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{y+1}.$$

$$\frac{1}{u} = \ln c(y+1)$$

$$u = \frac{1}{\ln c(y+1)}.$$

$$x = \frac{y+1}{\ln c(y+1)}.$$

1.183. $\underbrace{(3x^2 + 2xy - y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^2 - 2xy - 3y^2)}_{Q}dy = 0.$

1) $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$

У повних диференціалах!

$$3x^2dx - 3y^2dy + (2xydx + x^2dy) - (y^2dx + 2xydy) = 0$$

$$d(x^3 - y^3 + yx^2 - xy^2) = 0.$$

$$x^3 - y^3 + yx^2 - xy^2 = c.$$

2) $y'_x = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{2xy + 3y^2 - x^2}$ однорідне.

$$y = t(x) \cdot x.$$

$$t'x + t = \frac{3+2t-t^2}{2t+3t^2-1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3+2t-t^2 - t(3t^2+2t-1)}{3t^2+2t-1}$$

$$\int \frac{3t^2+2t-1}{-3t^3-3t^2+3t+3}\,dt = \int \frac{3t^2+2t-1}{3(t+1)(1-t^2)}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t+1}{3(1-t^2)}\,dt = \int \frac{t}{1-t^2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$\underline{t=-1\ ?}$ $\quad y=-x$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t^2-1| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{y^2-x^2}{x^2} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right| + C = x.$$

Д.р. вищих порядків, в яких можна пониження порядок

1.209. $xy''' = 2x+3$

$$y''' = \frac{2x+3}{x} \quad \left(= 2 + \frac{3}{x}\right)$$

$$y'' = 2x + 3\ln x + C$$

$$y' = x^2 + Cx + 3\int \ln x\,dx =$$

$$= x^2 + C\cdot x + 3(x\cdot\ln x - x) + C_1.$$

$$y = \frac{x^3}{3} + C\frac{x^2}{2} + C_1x - \frac{3}{2}x^2 + 3\underbrace{\int x\ln x\,dx}_{''\ y_0}$$

$$y_0 = \int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \int x^2\frac{dx}{x}\right| = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$

1.210 $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ $\quad f(y, y', y'') = 0.$

$$y' = p(y);\ y'' = p'\cdot p.$$

$$p'p = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad \int p\,dp = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + C;\quad p = \sqrt{4\sqrt{y} + \underset{2C}{C_1}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}} = dx \quad \sqrt{y} = z \quad \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{4z + C_1}} = J$$

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt{4z+C_1}} = \left|4z+C_1 = u^2\right| = \int \frac{\frac{u^2-C_1}{4}\cdot\frac{2u\,du}{4}}{u} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{16}\,8}\int (u^2-C_1)\,du = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}u^3 - C_1 u + C_2\right).$$

$$u = \sqrt{4z+C_1} = \sqrt{4\sqrt{y}+C_1}.$$

$$\frac{1}{24}\left(4\sqrt{y}+C_1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{C_1}{8}\sqrt{4\sqrt{y}+C_1} + C_2 = x.$$

1.240. $y \cdot y'' = y'^2 - y'^3 \qquad y(1)=1,\ y'(1)=-1.$

$y\cdot p' p = p^2 - p^3. \qquad \cancel{p=0}$ не подход.
$(y'(1)=-1)$

$y\cdot p' = p - p^2 \qquad \dfrac{dp}{p-p^2} = \dfrac{dy}{y}.$

$\int\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{1-p}\right)dp = \ln yc.$

$\ln\dfrac{p}{p-1} = \ln yc. \qquad \dfrac{p}{p-1} = yc;\ \dfrac{-1}{-2} = c.$

$\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{y}{2} \qquad \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{2}{y} \qquad 1-\dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{y}.$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{y-2}{y} \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-2} \qquad \dfrac{(y-2)\,dy}{y} = dx$

$y - 2\ln|y| + C_1 = x. \qquad 1 + C_1 = 1. \quad C_1 = 0.$

$y - \ln y^2 = x.$

1.222.

$y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0 \qquad f(y, y', y'') = 0.$

$p' p + \frac{2}{1-y} p^2 = 0. \qquad p = 0 \quad \boxed{y = c}$

$p' + \frac{2}{1-y} p = 0. \qquad \frac{dp}{p} = \frac{2}{y-1} dy.$

$\ln p c_1 = 2 \ln |y-1|$

$\frac{dy}{dx} \cdot c_1 = (y-1)^2. \qquad \frac{dy}{(y-1)^2} = \frac{dx}{c_1}.$

$-\frac{1}{y-1} = \frac{x}{c_1} + c_2$

1.230. $xy'' - y' = e^x x^2. \qquad f(x, y', y'') = 0.$

$y' = z.$

! $\frac{xz' - z}{x^2} = e^x \qquad \left(\frac{z}{x}\right)' = e^x \qquad \frac{z}{x} = e^x + c.$

$z = x(e^x + c) \qquad y = \int x(e^x + c)\,dx =$

$= \int x\, d(e^x + cx) = x(e^x + c) - \int (e^x + c)\,dx =$

$= x(e^x + c) - e^x - cx + c_1.$

Лінійні неоднорідні д.р. $L[y]=f(x)$.

1.259. $4y''-8y'+5y=\cos x$.

$L[y]=0 \Rightarrow 4k^2-8k+5=0$.

$k=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{4}=1\pm\frac{i}{2}$.

$y_{зо}=C_1e^{x}\cos\frac{x}{2}+C_2e^{x}\sin\frac{x}{2}$.

$f(x)=\cos x$ $\alpha=0, \beta=1$. $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння.

$\underline{r=0}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & y_{чн}=x^0(A\cos x+B\sin x). \\ -8 & y_{чн}'=-A\sin x+B\cos x \\ 4. & y_{чн}''=-A\cos x-B\sin x \end{array}$$

$(9A-8B)\cos x+(B+8A)\sin x=\cos x$

$9A-8B=1$ $73A=1$.

$8A+B=0$ $-73B=8$

Відповідь: $C_1e^{x}\cos\frac{x}{2}+C_2e^{x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{73}\cos x-\frac{8}{73}\sin x$.

$y''' + 4y' = 4x\sin x$

$k^3 + 4k = 0, \quad k_1 = 0, \; k_2 = 2i, \; k_3 = -2i$

$y_{зо} = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x.$

$f(x) = 4x\sin x. \quad \alpha + \beta i = i \neq k_1, k_2, k_3. \; \boxed{r = 0}$

$y_{чн} = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$

$4 \mid y_ч' = \underline{A\cos x} - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x$

$y_ч'' = -2A\sin x - (Ax+B)\cos x + 2C\cos x - (Cx+D)\sin x.$

$1 \mid y_ч''' = \underline{-3A\cos x} + (Ax+B)\sin x - 3C\sin x - (Cx+D)\cos x$

$A\cos x - 3(Ax+B)\sin x + C\sin x + 3(Cx+D)\cos x = 4x\sin x.$

$$\begin{array}{l|l}
\cos x & A + 3D = 0. \quad D = \frac{4}{9} \\
\sin x & -3B + C = 0 \\
x\cos x & 3C = 0. \quad C = 0, \; B = 0. \\
x\sin x & -3A = 4. \quad A = -\frac{4}{3}
\end{array}$$

$y_{зн} = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + \left(-\frac{4}{3}x\right)\cos x + \frac{4}{9}x\sin x.$

$y''' - 2y'' = 3 + xe^{2x}$

$k^3 - 2k^2 = 0 \qquad k_1 = k_2 = 0 \quad k_3 = 2.$

$y_{зо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$

$f_1 = 3, \quad \alpha + \beta i = 0 = k_1 = k_2 \qquad r = 2.$

$y_{r1} = Ax^2.$

$y_{r1}' = 2Ax$

$-2 \mid y_{r1}'' = 2A$

$1 \mid y_{r1}''' = 0.$

$-4A = 3$

$A = -\frac{3}{4} \qquad y_{r1} = -\frac{3}{4}x^2$

$f_2 = xe^{2x} \qquad \alpha + \beta i = 2 = k_3, \quad r = 1.$

$y_{r2} = x^1(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$

$y_{r2}' = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)2e^{2x}$

$-2 \mid y_{r2}'' = 2Ae^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)4e^{2x}$

$y_{r2}''' = 12Ae^{2x} + 16(2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)8e^{2x}.$

$8Ae^{2x} + 8(2Ax + B)e^{2x} - (Ax^2 + Bx) \cdot 0 e^{2x} = xe^{2x}.$

$$\begin{array}{l|l} e^{2x} & 8A + 8B = 0. \\ xe^{2x} & 16A = 1 \end{array} \qquad A = \frac{1}{16}, \quad B = -\frac{1}{16}$$

$y_{зн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \left(-\frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{2x}.$

Числові ряди

1. $u_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$, знакододатний ряд.

$u_n \sim \frac{\frac{1}{4}}{n^2}$, $p=2$, збігається, $p>1$,

2. $u_n = \cos\frac{\pi}{n^3}$, $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n^3} = 1 \neq 0$,

достатня умова розбіжності.

3. $u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$, $u_n < \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$, збігається

бо $\underline{p>1}$

$\ln n < n^{\alpha}$, $\alpha>0$!!

тобто заданий також збігається

4. $u_n = \frac{(3n+1)!}{8^n \cdot n^2}$

Д: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+4)!\ 8^n n^2}{8^{n+1}(n+1)^2\ (3n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{8} = \infty$, розбігається.

5. $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

$$D: \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

розбігається

6. $u_n = (n^2+2) \ln \dfrac{n^2+3}{n^2} = (n^2+2)\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right) \sim$

$\sim n^2 \dfrac{3}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3 \neq 0$ достатня умова розбіжності.

7. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{2/3}} > \dfrac{1}{n^{2/3}} \leftarrow$ розбігається; тобто $\sum u_n$ також

8. $u_n = \dfrac{2^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$ $\quad \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \dfrac{2}{e} < 1.$ збігається.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ знакочередний. $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$ розбігається.

Нема абс. збіжності, але $\sum u_n$ збігається за теоремою Лейбніца.

10. $\sum \left(\frac{2+i}{3}\right)^n \quad u_n = \left(\frac{2+i}{3}\right)^n$

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \left|\frac{2+i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

збігається абсолютно!

Функціональні ряди.

11. $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

Необхідна умова: $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = 0$

$|x| < 1 \quad u_n(x) \sim x^n \quad |u_n(x)| \sim |x|^n \Rightarrow \underline{\underline{K}}$

$\sqrt[n]{|x|^n} = |x|$ за ознакою Коші збігает.

$|x| > 1. \quad |u_n(x)| \sim \frac{1}{|x|^n}$ Розглянемо ознаку Коші.

$$\lim \frac{\frac{1}{|x|^{n+1}}}{\frac{1}{|x|^n}} = \lim \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} < 1 \ (\text{бо } |x|>1$$

$|x| = 1.$ розбіжні ряди.

Відповідь: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

12. $u_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

Д: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \dfrac{|x-2|}{2} < 1$. має бути

$-2 < x-2 < 2$ $\quad 0 < x < 4$

$x_1 = 0 \qquad u_n(0) = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ абсол. збіжний

$x_2 = 4 \qquad u_n(4) = \dfrac{1}{n^2}$ збіжний $\underline{\underline{n>1}}$

знайти суми рядів:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ збігається $(-1+, 1)$ $\quad [-1+\delta, 1-\delta]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = S(x)$ $\quad S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$.

$S'(x) =$ $\quad S(x) = \int \dfrac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| \cancel{+} C =$

$= x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + C$.

$\underline{\underline{x=0}}$. $C = 0$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = S(x)$.

$(-1, 1)$!! ознака Д.

$\int S(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ $\quad \int\left(\int S(x)\,dx\right)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \dfrac{x^2}{1-x}$.

$\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k = \dfrac{1}{1-t}, \ |t|<1}$

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)'' = \left(\frac{\quad}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{\quad}{(1-x)^2}\right)'$$

$$= \frac{(2-2x)(1-x)^{\cancel{2}} + 2\cancel{(1-x)}(2x-x^2)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2-\cancel{2x}-\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-\cancel{2x^2}}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \dots = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Знайти суму

15. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Bigg|_{x=\frac{1}{3}} = S\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

$$S(x) = -\ln(1-x) + C \qquad x = 0 \Rightarrow 0 = -0 + C. \quad C = 0.$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{3}{2}.$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \ |x|<1.$$

$$S(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots.$$

$$x = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

17. Розкласти за степенями $x+2$

$$f(x) = \frac{1}{4+3x} = \frac{1}{3(x+2)-2} = \left| x+2=t \right| =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}t} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}t\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{2^{k+1}}(x+2)^k$$

$$\boxed{q=\frac{3}{2}t}$$

18. $f(x)$ за степенями $x+1$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{(x+1)-1} = \frac{-1}{1-(x+1)} =$$

$$= -1\sum_{k=0}^{\infty}(x+1)^k \qquad f(x) = -g'(x) = \sum_{\boxed{k=1}}^{\infty} k(x+1)^{k-1}$$

Знайти границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x-x^3\cos x}{x^5} \quad \cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)-\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}-\ldots\right)-x^3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\right)}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^5\left(\frac{2}{5!}-\frac{32}{5!}+\frac{1}{2!}\right)}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

Розв'язати рівняння у вигляді ряду:

$$y'' = x^2 + y^2 \qquad y(-1) = 0, \; y'(-1) = 0$$

$$y(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + \dots$$

$$= 0 + 0\cdot(x+1) + \frac{1}{2!}(x+1)^2 - \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{2}{4!}(x+1)^4 + \dots$$

$$a_2 = \frac{y''(-1)}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$y''' = 2x + 2y\cdot y'\Big|_{-1} = -2 + 0 \qquad a_3 = \frac{-2}{3!}$$

$$y^{(IV)} = 2 + 2y'^2 + 2y\cdot y''\Big|_{-1} = 2 + 0 + 0$$