

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Курський Юрій Сергійович

УДК 530.182:53.087.45

ДИСЕРТАЦІЯ
ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМІРЮВАНЬ
В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

01.04.01 — фізика приладів, елементів і систем
105 — прикладна фізика та наноматеріали

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Ю. С. Курський

Науковий консультант Мачехін Юрій Павлович, доктор технічних наук,
професор.

Харків — 2019

АНОТАЦІЯ

Курський Ю. С. Теоретична модель вимірювань в нелінійних динамічних системах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.01 «Фізика приладів, елементів і систем». — Харківський національний університет радіоелектроніки МОН України, Харків, 2019.

Дослідження нелінійних динамічних систем (НДС), до яких відноситься велика кількість фізичних і біофізичних систем (лазери, оптичні системи конфіденційного зв'язку, оптичні дисипативні солітони, океан, клімат, біопопуляції та живі організми), є актуальним завданням сучасної науки. Внаслідок таких властивостей, як дисипативність, нелінійність, хаотизація, самоорганізація та еволюція, НДС є одними із найскладніших об'єктів для дослідження, математичного опису та керування. Численні публікації з цього напрямку свідчать про важливість розвитку нових теорій, моделей, методів і методик досліджень НДС для лазерної фізики, нелінійної оптики, радіофізики, телекомунікацій та інших галузей прикладної та теоретичної науки.

Серед фахівців із лазерної інженерії спостерігається стійкий інтерес до хаотичної динаміки в лазерах. При цьому виділяють два напрямки досліджень. Перший спрямований на боротьбу із хаотичними режимами, оскільки хаотизація є причиною зниження стабільності характеристик випромінювання, що неприйнятно для лазерів, які застосовуються в вимірювальних, медичних та інформаційних задачах. Другий напрямок спрямований на заплановану генерацію хаотичного випромінювання для реалізації хаотичних інформаційних систем. Для цього забезпечується генерація лазерних імпульсів із керованим рівнем стабільності частоти випромінювання, частоти проходження, амплітуди, частоти несучої і т.д. Із цією метою досліджуються механізми руйнування режиму синхронізації мод та інші процеси, що призводять до хаотизації. Окремо слід означити сучасне завдання створення лазерів із хаотичним зворотнім зв'язком.

Кліматичні, океанологічні та біологічні дослідження з позицій НДС розглядаються науковцями як умова забезпечення точності оцінювання їх стану та прогнозування динаміки та значень параметрів. Дослідження людини, як біофізичної НДС, дозволить розробляти прилади, системи діагностики та лікування.

Успішна реалізація описаних завдань залежить від коректності застосованих теорій та методів досліджень. Ключовим методом досліджень є вимірювання. У випадку дисипативних НДС спостерігається складна, хаотична динаміка, сильна кореляція між незначною зміною початкових умов або появою шумів та суттєвими змінами значень величин, що характеризують процеси. Тому при дослідженні НДС вимірювання слід розглядати як ключову складову комплексного дослідження. До недавнього часу не існувало єдиної теорії, яка б об'єднувала завдання досліджень і вимірювань в НДС, та містила б теоретичні та експериментальні моделі вимірювання та дослідження НДС. Тому метою дисертаційної роботи є розроблення принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювань в НДС. При цьому моделі вимірювань мають ґрунтуватися на фізико-математичний базис, що максимально відповідає процесам в НДС. Моделі класичної теорії вимірювань, у своїй більшості, побудовані на принципах класичної фізики, та спрямовані на дослідження лінійних або лінеаризованих процесів.

Для досягнення мети були поставлені та вирішені такі завдання: систематизувати властивості та процеси в НДС, які впливають на процес і результат вимірювань; розробити фізико-математичні основи вимірювань в НДС; розробити теоретичну модель вимірювань в НДС. розвинути теорію невизначеності вимірювань в НДС. розробити експериментальні моделі дослідження фізичних і біофізичних систем на основі моделі вимірювань в НДС.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є процеси в нелінійних динамічних системах, а предметом дослідження — модель вимірювання величин, що характеризують процеси в нелінійних динамічних системах.

В процесі дослідницької роботи вперше були отримані наступні наукові результати.

Систематизовані процеси і властивості НДС, які впливають на процес і результат вимірювань, для аналізу результатів вимірювань запропоновано використовувати якісні та кількісні методи та інструменти теорій складних систем.

В якості умов створення теоретичної моделі вимірювань в НДС виділені: інтервальність значень вимірюваних величин, їх нелінійна, хаотична динаміка, сильна залежність від початкових умов і шумів, еволюція та самоорганізація. В якості математичних інструментів аналізу результатів вимірювань вперше запропоновано використовувати разом: фазовий портрет та портрет вимірювання. фрактальну розмірність, ентропію Шеннона, час передбачення.

Виконано аналіз відповідності фізико-математичних основ класичної теорії вимірювань процесам в НДС. Встановлено, що класична теорія та створені в її межах моделі вимірювань побудовані на принципах, що обмежують їх застосування під час досліджень та вимірювань в НДС: існування єдиного істинного значення вимірюваної величини, справедливості ергодичної гіпотези та детерміністичні уявлення.

Розроблено фізико-математичні основи вимірювань величин із складною, хаотичною динамікою. Обґрунтовано, що теоретична модель вимірювань в НДС повинна враховувати наступні умови: величина, яка вимірюється, характеризується не єдиним істинним (дійсним) значенням, а інтервалом значень; гіпотеза ергодичності підтверджується не завжди; динаміка вимірюваних величин може мати нелінійний, стохастичні або хаотичний характер, що веде до стохастичності та хаотичності результатів вимірювання; часові ряди результатів вимірювань можуть характеризуватися, як немарківські та мати гаусдорфову розмірність; незначна зміна початкових умов спричиняє суттєві зміни результатів вимірювань; результат вимірювань повинен бути оцінений за допомогою невизначеності.

На основі розроблених фізико-математичних основ вимірювань в НДС вперше розроблено адаптивну теоретичну модель, яка забезпечує вимірювання та дослідження НДС. У моделі вперше спільно використані: інтервали значень вимірюваних величин, фрактальний та ентропійний аналіз, час передбачення. Вперше, для вимірювання в умовах хаосу, запропонований новий інструмент аналізу — портрет вимірювань. Модель дозволяє виконувати вимірювання та оцінювання результатів вимірювань в умовах як стійкої, так і хаотичної динаміки.

Сформульовано принципи складання рівняння вимірювань в НДС: класичне рівняння доповнено функціональною залежністю від часу вхідних величин, шумів і вихідної величини, а також початковими значеннями вхідних величин, функціями їх еволюції та часом передбачення. Для випадку, коли математичний опис процесів неможливо, запропоновано використовувати портрет вимірювання. Для відновлення фазового портрету НДС запропоновано удосконалений метод Такенса, що враховує невизначеності результатів вимірювань.

Отримала подальший розвиток теорія невизначеності вимірювань в НДС. Вперше розроблені принципи оцінювання та подання результатів вимірювань величин із хаотичною динамікою. Результат вимірювань в НДС запропоновано представляти в наступній формі: виміряна величина представляється інтервалом значень з урахуванням невизначеностей вимірювання їх кордонів; значення динамічних змінних всередині інтервалу відображаються у вигляді гістограми; наводяться найбільш і найменш вірогідні значення динамічних змінних з їх невизначеностями і ймовірності появи; наводяться фрактальна розмірність, ентропія Шеннона, час передбачення.

Запропоновано використовувати ентропійний підхід до оцінювання невизначеності вимірювань, що дозволяє уникнути необхідності призначати значення довірчої ймовірності. Вперше отримано вираз зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності, який дозволяє виконувати аналіз причин, що впливають на значення невизначеності.

На основі результатів досліджень вперше розроблено експериментальні моделі дослідження фізичних та біофізичних НДС. Розроблено: модель

дослідження параметрів випромінювання лазера, модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок, топологічна модель ідентифікації оптичних приладів, модель дослідження стану біофізичної системи. Моделі дозволяють досліджувати системи та вимірювати параметри в умовах хаотичної динаміки.

Модель дослідження параметрів випромінювання лазера як НДС. призначена для вимірювань та досліджень стаціонарних і хаотичних режимів лазерного випромінювання. Модель передбачає вимірювання інтервалів значень параметрів випромінювання в різних режимах, значень їх стабільності та часу передбачення. Класифікація динаміки системи виконується за допомогою фрактальної розмірності. В роботі вперше отримано вираз залежності стабільності параметра випромінювання від фрактальної розмірності, застосування якого дозволяє контролювати ступінь хаотизації випромінювання.

Досліджено задачу застосування нанолазерів в інформаційно-вимірювальних технологіях. На сьогодні теорія керування та стабілізація параметрів випромінювання нанолазерів відсутня. Розроблена модель дослідження параметрів лазера на основі моделі вимірювань в НДС розвиває цей напрямок. Розглянуто ідею застосування режиму надвипромінювання для збільшення відстані передачі сигналу нанолазера по оптичному волокну. При цьому стабілізацію частоти пропонується здійснювати по лінії поглинання йоду в дефекті фотонного кристала. Аналіз параметрів випромінювання та їх динаміки виконується за допомогою розробленої автором моделі дослідження параметрів випромінювання лазера на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС.

Розроблено модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок. Застосування запропонованих автором інформаційно-ентропійного підходу та ентропійних шкал дозволяє контролювати процес та оцінювати температуру ансамблю частинок в процесі охолодження в будь-який момент часу.

Розроблена топологічна модель ідентифікація оптичних систем заснована на гіпотезі про фрактальну структуру оптичного сигналу, відзеркаленого від покриття оптичних приладів, що просвітлює, та визначенні фрактальної

розмірності розподілу інтенсивності в площині перетину відбитого від цілі лазерного променя.

Розроблено модель дослідження біофізичної системи як НДС. В рамках моделі проводяться вимірювання динамічних змінних системи в стаціонарному та збудженому станах. Результатом вимірювання є інтервали значень динамічних змінних, фрактальна розмірність, ентропія Шеннона і час передбачення динаміки. Для оцінювання еволюційних процесів в модель введені ентропійні та часові шкали. В якості кількісної характеристики стану системи використовується час її повернення в стаціонарний стан після припинення нормованого зовнішнього впливу. Запропоновано ентропійний метод оцінювання нормованого впливу.

Розроблені теоретичні та експериментальні моделі можуть бути застосовані для вирішення комплексної задачі створення, дослідження, прогнозування та управління складними системами із нелінійною, хаотичною динамікою, такими як лазери із хаотичними характеристиками випромінювання та медичні системи вимірювання величин із хаотичною динамікою.

Результати досліджень розвивають теоретичні, модельні та експериментальні методи і методики досліджень фізичних явищ в системах, апаратах і приладах. Вони мають значення для дослідження фізики процесів самоорганізації та динаміки ієрархічних систем, для створення нової та вдосконалення існуючої техніки та інформаційно-керуючих систем. Практичне використання результатів дозволить підвищити характеристики і ефективність застосування лазерної та оптоелектронної техніки, систем конфіденційного зв'язку.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, хаос, лазер, біофізична система, модель вимірювання, модель дослідження, ентропія Шеннона, фрактальна розмірність.

ANNOTATION

Kurskoy Yu. S. Theoretical Measurement Model for Nonlinear Dynamical Systems. — Qualifying scientific work on the manuscript rights.

Dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences degree on the specialty 01.04.01 «Physics of devices, elements and systems». — Kharkov National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkov, 2019.

The research of nonlinear dynamical systems (NDS) is one of the important tasks of modern science. This class of systems contains a large number of physical and biophysical objects such as lasers, optical confidential communication systems, optical dissipative solitons, ocean, climate, biopopulations and organisms. Because of such properties as dissipativity, nonlinearity, chaotic, self-organization, and evolution NDSs are one of the most difficult objects for research, mathematical description and management. A number of publications says about importance of the new theories, models, methods and techniques for study of NDS. It is important for laser physics, nonlinear optics, radiophysics, telecommunications, and other fields of applied and theoretical science.

There is a steady interest in the chaotic laser dynamic. There are two areas of these research. The first one is aimed at neutralization the chaotic modes. A chaos causes a decrease of the lasers radiation characteristics stability. It is unacceptable for lasers that are used for measuring, medical and information tasks. The second area is directed to the planned generation of chaotic radiation. Such lasers are used for implementation of chaotic information systems. This task asks the generation of laser pulses with a controlled level of stability of the radiation frequency, frequency of passage, amplitude, carrier frequency etc. For this purpose they investigate the mechanisms of synchronization modes destruction and other processes that cause a laser chaos.

The word scientists consider the studies of the climatic, oceanic and biological systems from the NDS standpoints as a condition for successful assessment and forecasting. Researching a human, as a biophysical NDS, will allow develop the diagnostics and treatment medical devices and systems.

A success of the research, space-time modeling, forecasting and management of NDS depends on the correctness of applied research theories and methods. A key research method is a measurement. In the NDS case a measurement should be considered as a key research component. So here is a task to develop a new common NDS theory that can combine the research and measurement tasks. This theory should have the universal principals, theoretical and experimental models for research and measurement of NDS parameters. Therefore, the dissertation purpose is development of the basic principles of NDS research theory based on nonlinear dynamical systems measurements models.

To achieve the dissertation purpose the following tasks were set and solved: to systematize the NDS properties and processes that influence to the measurements process and results; to develop physical and mathematical bases of NDS measurements; to develop a theoretical model of measurement in NDS; to develop the measurement uncertainty theory for NDS case; to develop the experimental models of physical and biophysical systems research on the theoretical model of measurements in NDS basis.

The object of dissertation research is the processes in nonlinear dynamical systems, and the object of research is the model of measurement the quantities that characterized the processes in nonlinear dynamical systems.

The following scientific results were gotten for the first time in this work.

The NDS processes and properties that influence to the measurement process and result were systematized. It is proposed to use for measurement results analyze the qualitative and quantitative methods and tools of complex systems theories.

For creating the NDS theoretical measurement model the next NDS properties were selected. The measured quantities have interval values and demonstrate the nonlinear, chaotic dynamics. There is a strong communication between the quantities values and the initial conditions or noise. The NDSs demonstrate the evolution and self-organization functions. For the first time, as the mathematical tools for measurement results analysis it is proposed to use together the phase portrait and measurement portrait. fractal dimension, Shannon entropy and forecast time.

The physical and mathematical foundations of classical measurement theory were analyzed. It is established that the classical theory and its' measurement models are based on the principles that limit their application for research and measurement of NDS parameters and dynamics. The classical measurement theory uses the deterministic representations and says about existence of a single true value of measured quantity and about validity of ergodic hypothesis.

Physical and mathematical foundations for measurement of quantities with complex, chaotic dynamics are developed. It is substantiated that NDS measurements model should take into account the following conditions. The measured values can't be characterized by a single true (true) value but by an values interval. The ergodic hypothesis is not confirmed always. The dynamics of measured values can be nonlinear, stochastic or chaotic that causes the stochastic or chaotic dynamics of measurement results. Time series of measurement results can be characterized as non-Markov processes and have a Gaussdorff dimension. A slight change of the initial conditions causes a significant change of the measurement results. The measurement result should be estimated by measurement uncertainty.

The adaptive theoretical model for measurement and investigation of NDS in the case of deterministic, stochastic or chaotic dynamics was developed. In the frame of measurement model the next mathematical instruments are used commonly for the first time: measured values intervals. fractal and entropy analysis, forecasting time. The measurement portrait was proposed as a new instrument for analysis in chaos conditions. The model can be used for measurement in the case of stable or chaotic NDS dynamics.

The principles for creation of NDS measurement equation were made too. Classical measurement equation is formulated with the functional time dependence of input quantities, noise and output value, as well as the initial values of the input quantities, functions of their evolution and prediction time. For cases where mathematical description of the processes is not possible, it is suggested to use a measurement portrait. For the restoration of the NDS phase portrait an advanced

Takens method was proposed that takes into account the measurement results uncertainties.

The theory of measurement uncertainty in nonlinear dynamic systems was further developed. The principles of estimation and presentation of measurement results of quantities with chaotic dynamics were developed at the first time. The NDS measurement results are proposed to present in the next special form. The measured dynamic variable is represented by an interval of values with the uncertainties of their boundary values. The dynamic variables within the intervals are displayed as histograms. The most and least probable values of dynamic variables with their uncertainties and probability of occurrence are presented too. The information about measured result contents the fractal dimension, Shannon entropy and forecasting time.

It is proposed to use an entropy approach to count the measurement uncertainty. Application of this approach allows not use a confidence probability. For the first time, the formula that connects the Shannon entropy and the fractal dimension is obtained. It allows analyze the measurement uncertainty reasons.

On the research results basis, the next experimental models for physical and biophysical NDSs research were developed: laser radiation parameters research model, laser cooling research model, topological identification of optical systems model, and biophysical system state research model. Models allow us to study systems and measure their parameters in a case of stable and chaotic dynamics.

The laser radiation parameters research model is developed for measurement and study of stationary and chaotic modes of laser radiation. The model provides the measuring of the radiation parameters values intervals in different modes, values of their stability and forecasting time. Classification of system dynamics is made using a fractal dimension. It was obtained the new expression that describes the radiation parameter stability dependence on the process fractal dimension. It can be approached to control the chaotic dynamics degree.

In terms of the NDS laser research model a problem of using nanolasers in information-measuring technologies was investigated. Today, the theory of nanolaser parameter control is only evolving. The laser research model can be an important

element of the new nanolaser theory. Frequency stabilization is suggested to be carried out along the line of absorption of iodine that is located in the photonic crystal defect. It is proposed to use the over-radiation mode to increase the nanolaser signal transmission distance. The analysis of radiation parameters and their dynamics is provided by the physical principals and mathematical tools of the NDS laser research model that based on the NDS measurement model.

The laser cooling research model was developed to control the group of cooled particles (atoms, ions, molecules), An application of the entropy approach and entropy scales, that NDS measurement model contains, allows to control the cooling process and estimate the particles ensemble temperature at any time of the laser cooling process.

The topological model for identification of hiding optical systems was developed also. The model was designed to find, calculate a coordinate, and classify the hidden optical surveillance devices. The model is based on the hypothesis of the fractal structure of the optical signal, reflected from the illuminating coverage of the optical devices. If the signal fractal dimension value tends to one, the model classifies the reflecting surface as a signal that reflected from the optical devices coverages.

The biophysical system state research model is based on the NDS measurement model. Within the model, measurements of dynamic system variables in equilibrium and excited states are made. The model offers the next measurement results: dynamical variable intervals, fractal dimension, Shannon entropy, and dynamics forecasting time. Entropy and time scales are introduced into the model to evaluate the evolutionary processes. The time of system's return to equilibrium state after stop of the normalized external influence is used as a quantitative characteristic of the system state or health. An entropy method for normalized external influence estimating is proposed. The research model is used to study the physical condition of a person that do the sports exercises during a long time.

The described research results develop the theoretical, model and experimental methods and techniques for the study of physical phenomena in systems, apparatus and devices. They are important for the study of the self-organization processes physics and

dynamics of hierarchical systems, for the creation of new and improvement of exist technology and information-control systems.

The practical application of results will improve the characteristics and efficiency of laser and optoelectronic technology, confidential communication systems. The developed theoretical and experimental models can be applied to solve the complex problem of creation, research, prediction and control of complex systems with nonlinear, chaotic dynamics, such as lasers with chaotic radiation characteristics and medical systems for measuring biological quantities with chaotic dynamics.

Keywords: Nonlinear Dynamical System, Laser, Chaos, Measurement Model, Research Model. Shannon Entropy, Fractal Dimension,

Список публікацій здобувача

Монографія

1. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Основы нелинейной метрологии. Новый подход в теории измерений: монография. LAP, 2014. 168 с.

Статті

2. Grechko L. G., Pinchuk A. O., Kurskoy Yu. S., Lesjo A. On a Problem of Anomalous Absorption of Far-Infrared Radiation by Small Metallic Particles. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2000. Vol. 2, № 1. С. 95—99.

3. Мачехин Ю., Курской Ю.. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем. *Системы обробки інформації*. 2012. № 1. С. 169—175.

4. Мачехин Ю., Курской Ю. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Системы обробки інформації*. 2012. № 7. С. 117—122.

5. Мачехин Ю., Курской Ю. Энтропийный анализ динамических переменных. *Системы обробки інформації*. 2013. № 1. С. 100—104.

6. Курской Ю. С. Особенности измерений в реальных динамических системах. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2013. № 4. С. 64—71.

7. Курской Ю. Энтропийная шкала оценки результата измерений. *Системы обработки информации*. 2013. № 9. С. 169—175.

8. Курской Ю. С. Фрактальный анализ результатов электрических измерений. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2014. № 1. С. 52—57.
9. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Features of entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Метрологія та прилади*. 2013. № 6. С. 17—21.
10. Курской Ю. Здоровье как объект измерения. *Системи обробки інформації*. 2014. № 3. С. 124—126.
11. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Фрактально-энтропийный анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Измерительная техника*. 2014. № 6. С. 18—21.
12. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Measuring technique*. 2014. Vol. 57, № 6. P. 609—704.
13. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Модель измерения здоровья человека. Метрологический подход. *Метрологія та прилади*. 2014. № 2. С. 40—44.
14. Мачехин Ю., Курской Ю. Норма энтропии как реперная точка шкалы измерения здоровья. *Метрологія та прилади*. 2014. № 6. С. 56—60.
15. Курской Ю. Применение интервального анализа для оценки неопределенности измерений в сложных системах. *Системи обробки інформації*. 2015. № 2. С. 146—148.
16. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление уравнения измерения энтропии Шеннона нелинейных динамических систем с использованием методов интервального анализа. *Приборы и методы измерений*. 2015. Т. 6, № 2. С. 257—263.
17. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Development of Nonlinear Metrology Methods. *Стандартизація, сертифікація, якість*. 2015. № 4. С. 61—65.
18. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Evaluation of Cooled Particles Parameters by Instruments of Nonlinear Metrology. *Метрологія та прилади*. 2015. № 6. С. 50—53.
19. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Метрологія и приборостроение*. 2016. № 6. С. 18—21.

20. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. The measurement portrait of dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2016. № 5. С. 48—51.
21. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. A human as a research object for metrology of nonlinear dynamic systems. *Метрологія та прилади*. 2017. № 1. С. 63—66.
22. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Український метрологічний журнал*. 2017. № 1. С. 8—10.
23. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Expression of uncertainty in measurement of nonlinear dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2017. № 3. С. 49—51.
24. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление модели измерения в нелинейных динамических системах. *Метрологія та прилади*. 2018. № 1. С. 58—62.
25. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Физико-математические основы измерений в нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 192. С. 102—105.
26. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P, Providing mode locking in fiber ring lasers. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 2. P. 02033.
27. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Ткаченко В. А. Сверхизлучение нанолазеров в информационно-измерительных процедурах. *Радіофізика та електроніка*. 2018. Т. 23, № 2. С. 61—68.
28. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Vasianovych A. V. Ring fiber lasers for telecommunication systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, №. 6. P. 541—548.
29. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Энтропийная оценка процесса лазерного охлаждения. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 10. P. 02033.
30. Kurskoy Yu. S., Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S. Topological methods in measurement and research of nonlinear dynamical systems. *Вісник ХНУ. Серія «Фізика»*. 2018. № 29. С. 22—28.
31. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Принципы моделирования измерений в оптических нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 194. С. 29—33.

32. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Photonic Crystal Nanolasers As Optical Frequency Standards. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 13. P. 1169–1177.
33. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S., Tkachenko V. A. Nanolaser Superradiation In Information And Measuring Procedures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. ol. 77, № 13. P. 1179–1186
34. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Laser Anemometry Method For Particle Velocity Measurement In The Bose-Einstein Condensate. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 17. P. 1555–1563.
35. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S. Physical and mathematical foundations of measurements in nonlinear dynamic systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 18. P. 1631–1637
36. Курской Ю. С. Модель измерения для систем с функцией самоорганизации. *Бионика интеллекта*. 2018. Вып. 91. №2. С. 94–98.
37. Курской Ю. С. *Топологическая идентификация оптических систем*. *Радиотехника*. 2019. Вып. 196. С. 51–54.
38. Курской Ю. С. Теоретическая модель измерения параметров лазерного излучения. *Радиотехника*. 2019. Вып. 197. С. 86–92.

Тези докладів на конференціях

39. Kurskoy Yu., Gnatenko O., Neofitnyi M., Machekhin Yu. Topological Model of Laser Emission Parameters Research. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6-8 sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 280–283.
40. Kurskoy Yu. S. Usage of the nonlinear metrology instruments for research the laser cooling process. *Functional Basis of Nanoelectronics: 2019* : proceedings of inter. scient. conf, 16-21 sept. 2019. Kharkov-Odessa, 2019. P. 136–140.
41. Nikolaiev S., Pozhar V., Dzyubenko M., Nikolaiev K., Kurskoy Yu. Laser Emission of Dye Solutions Co-doped with Silver Nanoparticles. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6-8 sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 284–287.

42. Gulak S., Cherkashyn A., Balashov I., Zarytskyi V., Kurskoy Yu., Zhdanova Yu. Laser Marking System for Plastic Products. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6-8 sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 361–364.
43. Таровский Д. М., Курской Ю. С. Аппаратное обеспечение лазерного охлаждения частиц. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20-22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 187–188.
44. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С., Применение лазерного излучения для управления движением атомов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20-22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2011. С. 189–190.
45. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С. Перспективы использования охлаждённых молекул йода. *Функциональная база наноэлектроники: 2015 г.* : матер. VIII межд. науч. конф. 28 сент. – 2 окт. 2015 г. Одесса, 2015. С. 91–94
46. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2016 г.* : матер. XIII межд. науч.-тех. сем. 13–14 апр. 2016 г. Минск, 2016. С. 86–89.
47. Курской Ю. С. Нелинейная метрология как универсальный инструмент исследования сложных систем. *Физика, электроника и электротехника: 2016 г.* : мат. межд. конф. 18–22 апр. 2016 г. Сумы, 2016. С. 23.
48. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Метрологія та вимірювальна техніка: 2016 р.* : матер. X міжнар. наук.-практ. конферен. 5–7 жовт. 2016 р. Харків: ННЦ «ІМ», 2016 р. С. 22.
49. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Неопределённость измерения величин с нелинейной динамикой. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.* : матер. XIV межд. науч.-тех. семин. 8 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2017 г. С. 86–89.

50. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Информационно-измерительные процедуры с использованием сверхизлучения нанолазеров. *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 135–137
51. Мачехин Ю. П., Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Пуляев Ю. С. Керування параметрами нанолазерів. *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 128–130
52. Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Сивни В. Б., Крапельні лазери *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 131–134
53. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Сивни В. Б., Ткаченко В. В. Принципы построения модели измерения в нелинейных динамических системах. *Метрологія, інформ.-вимір. технології та системи: 2017 р.:* матер. VI міжнар. наук.-техн. конф. 24–25 жовт. 2017 р. Харків: ННЦ «ІМ». 2017. С. 95.
54. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.:* матер. XV междунар. науч.-тех. семин. 10 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2018 г. С. 24.
55. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии *Метрологія та вимірювальна техніка: 2018 р.:* матер. XI міжнар. наук.-практ. конфер. 5–7 жовт. 2018 р. Харків: ННЦ «ІМ», 2018 р. С. 187.
56. Ткаченко В. А., Курський Ю. С. Дослідження параметрів лазерного випромінювання. *Радіoeлектроніка та молодь у XXI столітті: 2019 р.:* матер. міжнар. молод. фор. 16–18 квіт 2019 р. Харків: ХНУРЕ. 2019. С. 264–265.

ЗМІСТ

	Стор.
ПЕРЕІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СИМВОЛІВ	25
ВСТУП	27
РОЗДІЛ 1 НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕНЬ	41
1.1 Визначення та класифікація нелінійних динамічних систем	41
1.2 Принципи досліджень нелінійних динамічних систем	45
1.3 Фазовий простір нелінійних динамічних систем	46
1.3.1 Фазовий портрет	46
1.3.2 Дивний аттрактор	51
1.4 Топологія та інші характеристики нелінійних динамічних систем	53
1.4.1 Об'єм аттрактора	54
1.4.2 Показники Ляпунова	55
1.4.3 Ентропія	56
1.4.4 Самоподібність і фрактальна розмірність	59
1.4.5 Час передбачення	63
1.5 Види динаміки нелінійних динамічних систем	66
1.5.1 Детермінізм, випадковість, хаотичність	66
1.5.2 Теорія хаосу як ступень до пізнання реальних процесів і систем	69
1.6 Умови виникнення та критерії хаотичної динаміки	71
1.6.1 Глобальна стійкість, як умова виникнення хаотичної динаміки	71
1.6.2 Критерії хаотичності динаміки	76
1.7 Еволюція відкритих систем	79
1.7.1 Критерій «S-теорема»	80
1.7.2 Самоорганізація і «норма хаотичності»	82
1.8 Завдання вимірювань і досліджень нелінійних динамічних систем	83
1.8.1 Фізичні, біологічні та нелінійні динамічні системи іншої природи	84

1.8.2 Лазер як нелінійна динамічна система	85
1.8.3 Хаотична динаміка лазерів	87
1.8.4 Людина як нелінійна динамічна система	92
1.9 Процеси і властивості нелінійних динамічних систем, які впливають на вимірювання	94
Висновки до Розділу 1	96
РОЗДІЛ 2 ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ВИМІРЮВАНЬ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ	98
2.1 Фізико-математичні основи класичної теорії вимірювань	99
2.2 Вимірювані величини	99
2.2.1 Істинні та дійсні значення фізичних величин	99
2.2.2 Вимірювана величина в нелінійних динамічних системах: визначення та умови існування	102
2.3 Ергодична гіпотеза	104
2.3.1 Ергодичність випадкових процесів	104
2.3.2 Ергодичність хаотичних процесів	106
2.4 Детермінізм та хаотичність в теорії вимірювань	107
2.4.1 Детермінізм процесів та систем	107
2.4.2 Хаотичність в детермінованих системах	110
2.5 Опис шумів та флуктуацій при аналізі результатів вимірювань	112
2.5.1 Вплив шумів на результати вимірювань	112
2.5.2 Застосування теорії марківських процесів в статистичних завданнях	112
2.6 Вплив динаміки системи на результат вимірювання	115
2.6.1 Властивості хаотичної динаміки як основний фактор впливу на результат вимірювання	116
2.6.2 Підхід до вимірювань із позицій гаусдорфових множин	117
2.7 Математичний аналіз впливу динаміки системи на результат вимірювань.	118
2.7.1 Диференційний аналіз впливу динаміки системи	118

2.7.2 Фрактальний аналіз динаміки системи	123
2.8 Фрактальний аналіз результатів фізичного експерименту	129
2.8.1 Фрактальний аналіз дослідження стабільності частоти лазерів	129
2.8.2 Фрактальний аналіз дослідження електричних величин	132
2.9 Оцінювання невизначеності результатів вимірювань	135
2.9.1 Невизначеність результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах	135
2.9.2 Положення GUM і властивості нелінійних динамічних систем	136
2.10 Фізико-математичні основи вимірювань і побудови теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах	139
2.10.1 Умови вимірювань в нелінійних динамічних системах	139
2.10.2 Вхідні та вихідні величини	141
2.10.3 Вимірювання динамічних змінних як різновид динамічних вимірювань	141
2.10.4 Принципи оброблення результатів вимірювань	143
2.10.5 Топологічні методи аналізу результатів вимірювань	145
2.10.6 Аналіз результатів вимірювань в умовах аттрактора	148
2.10.7 Основні принципи та положення вимірювань в нелінійних динамічних системах	157
Висновки до Розділу 2	159
РОЗДІЛ 3 ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМІРЮВАНЬ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ	161
3.1 Теоретична модель вимірювань в нелінійних динамічних системах	161
3.1.1 Умови створення теоретичної моделі вимірювань	162
3.1.2 Схема вимірювального експерименту	163
3.1.3 Необхідна і достатня кількість інформації про систему	165
3.1.4 Оцінювання результатів вимірювань	166
3.2. Аналізування результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах із хаотичною динамікою.	169

3.2.1 Рівняння вимірювання та стійкість нелінійних динамічних систем	169
3.2.2 Класифікація динаміки системи методом фрактального аналізу результатів вимірювань	172
3.2.3 Визначення розмірності вкладення аттрактора	173
3.2.4 Відновлення фазового портрета	173
3.2.5 Визначення локальних і загальних характеристик систем	175
3.3 Інформаційний підхід до аналізу результатів вимірювань	179
3.3.1 Елементи ймовірнісної теорії інформації	179
3.3.2 Застосування ентропії Шеннона при аналізі результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах	182
3.3.3 Умовна ентропія Шеннона.	182
3.4 Фрактальні та ентропійні шкали як інструменти аналізу результатів вимірювань.	187
3.4.1 Нормована ентропійна шкала оцінювання динаміки системи	188
3.4.2 Фрактально-ентропійний аналіз результатів вимірювань	190
3.5 Застосування інтервального аналізу для оцінювання результатів вимірювань	191
3.5.1 Переваги інтервального аналізу	191
3.5.2 Застосування інтервального аналізу для оцінювання невизначеності та розрахунку ентропії	192
3.6 Рівняння вимірювань в нелінійних динамічних системах	195
3.6.1 Принципи побудови рівняння вимірювання в нелінійних динамічних системах	196
3.6.2 Портрет вимірювань	198
3.7 Оцінювання та подання результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах	200
3.7.1 Невизначеність вимірювань при хаотичній динаміці	200
3.7.2 Подання результатів вимірювань динамічних змінних із хаотичною динамікою	202

3.8 Основні положення теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах.	205
Висновки до Розділу 3	207
РОЗДІЛ 4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕНЬ ФІЗИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	209
4.1 Експериментальна модель дослідження параметрів випромінювання лазера	209
4.1.1 Схема експеримента	211
4.1.2 Класичний підхід до вимірювань параметрів лазера	212
4.1.3 Аналізування та подання результатів дослідження.	214
4.1.4 Основні висновки про модель дослідження параметрів лазерного випромінювання як нелінійної динамічної системи	216
4.2 Дослідження параметрів випромінювання нанолазерів	217
4.2.1 Практичне застосування нанолазерів	217
4.2.2 Формування режиму надвипромінювання	219
4.2.3 Генерація імпульсного надвипромінювання у нанолазерах	220
4.2.4 Особливості випромінювання нанолазерів, що забезпечують інформаційно-вимірвальні процедури	222
4.2.5 Застосування моделі досліджень параметрів випромінювання лазера для дослідження характеристик випромінювання нанолазерів	225
4.3 Модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок	225
4.3.1 Взаємодія двох систем	229
4.3.2 Оцінювання параметрів охолоджених часток	231
4.3.3 Висновки по моделі дослідження процесу лазерного охолодження	234
4.4 Топологічна модель ідентифікація оптичних систем	235
4.4.1 Принципи ідентифікації	236
4.4.2 Висновки про топологічну модель ідентифікація оптичних систем	239

Висновки до Розділу 4	240
РОЗДІЛ 5 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ БІОФІЗИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	242
5.1 Модель дослідження біофізичних нелінійних динамічних систем	242
5.1.1 Людина як біофізична нелінійна динамічна система	244
5.1.2 Час як ключова кількісна оцінка	245
5.1.3 Вимірювання здоров'я людини	247
5.1.4 Самоорганізація біофізичної системи	250
5.1.5 Норма ентропії	251
5.1.6 Нормований вплив	252
5.2 Практичне застосування моделі дослідження біофізичних систем.	254
5.2.1 Проведення експерименту	255
5.2.2 Оцінювання результатів експерименту	255
5.3 Висновки щодо моделі дослідження біофізичних нелінійних динамічних систем	259
Висновки до Розділу 5	260
ВИСНОВКИ	261
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	268
ДОДАТОК А Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	293

ПЕРЕІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СИМВОЛІВ

НДС — нелінійна динамічна система.

ДЗ — динамічна змінна.

ФП — фазовий портрет.

ВСО — вектор стану організму.

ЗВТ — засіб вимірювальної техніки.

МВ — модель вимірювання.

РВ — рівняння вимірювання.

ПВ — портрет вимірювання.

ЛОС — лазерна оптоелектронна система.

ОПС — оптичний прилад спостереження.

X_i — істинне (дійсне) значення i -ї динамічної змінної.

$F(X_i, t)$ — функція еволюції динамічної змінної X_i .

$\vec{X}(t)$ — вектор стану системи

t — час.

x_i — значення результату вимірювання стану динамічної змінної X_i

y_i — результат оцінювання вимірювання стану динамічної змінної X_i

Y_i — значення вихідної величини при вимірюванні динамічної змінної X_i .

u_i — невизначеність результату вимірювання стану динамічної змінної X_i

U_i — розширена невизначеність вимірювання динамічної змінної X_i

\bar{x} — середнє значення величин x .

σ — дисперсія.

S — середнє квадратичне відхилення.

M — математичне очікування.

$p(x)$ — функція щільності ймовірностей.

λ_i — показник Ляпунова.

H — ентропія Шеннона.

$\|H\|$ — нормована ентропія Шеннона.

K — ентропія Колмогорова-Сіная.

M_{in} — розмірність вкладення аттрактора.

D_H — фрактальна розмірність.

H_R — показник Херста.

V_A — об'єм аттрактора.

T_{for} — час передбачення.

μ — керуючий параметр.

I — кількість інформації.

R_r — коефіцієнт відзеркалення.

f — частота випромінювання.

Δf — ширина спектральної лінії.

q — добротність резонатора.

T — температура.

R_R — універсальна газова постійна.

$I(x)$ — розподіл інтенсивності випромінювання вздовж вісі x .

Q — нормований зовнішній вплив.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Дослідження нелінійних динамічних систем (НДС) відноситься до ряду актуальних завдань сучасної науки. Такі системи об'єднують велику кількість фізичних і біофізичних об'єктів і процесів: лазери, оптичні системи конфіденційного зв'язку, океан, клімат, біопопуляції та організми. Внаслідок прояви таких властивостей, як дисипативність, нелінійність, хаотизація та самоорганізація, НДС є одними з найскладніших для вивчення, математичного опису та управління об'єктів.

Фізико-математичні основи досліджень НДС закладені в роботах А. Н. Колмогорова, Е. Лоренца, Дж. Йорка, С. Смейла, І. Пригожина, Г. Хакена, Ю. Л. Клімонтовіча та ін. В. Л. Гінзбург в списку «особливо важливих і цікавих проблем» зазначав: нелінійну фізику, турбулентність, солітони, хаос, дивні атрактори.

Численні сучасні дослідження хаотизації та самоорганізації НДС свідчать, що розвиток нових теорій, моделей, методів і методик дослідження таких систем мають важливе значення для нелінійної оптики, радіофізики, оптоінформатики, телекомунікацій та ін. Спостерігається високий інтерес до складної динаміці в лазерній фізиці — досліджуються механізми та процеси, що спричиняють хаотизацію лазерного випромінювання. При цьому виділяють два напрямки досліджень. Перше спрямоване на боротьбу з хаотичними режимами, хаотизація веде до зниження стабільності параметрів випромінювання, що неприйнятно для лазерів, які застосовуються в вимірювальних, медичних та інформаційних технологіях. Друге спрямоване на генерацію та управління хаотичним випромінюванням для використання в хаотичних інформаційних системах. У зв'язку з цим є актуальною задача генерації лазерних імпульсів із керованим рівнем стабільності частоти випромінювання, частоти проходження, амплітуди, частоти несучої та т.д.

Вивчення клімату, океану та біосистем, як НДС, розглядається як умова забезпечення точності оцінювання їх стану та прогнозу. Дослідження людини, як

біофізичної НДС, дозволить розробляти прилади та системи діагностики та лікування, складати індивідуальні програми лікування пацієнтів та тренування спортсменів, раціонально використовувати індивідуальні здібності.

Формулювання проблеми.

Успішна реалізація завдань дослідження, просторово-часового моделювання, прогнозування та управління НДС залежить від коректності теорій і методів досліджень. Ключовим методом експериментальних досліджень є вимірювання. Незважаючи на інтерес до досліджень НДС, теорія та практика вимірювань в НДС тривалий час були не мали розвитку. При цьому класична теорія вимірювань та створені в її рамках моделі вимірювань побудовані на принципах і фізико-математичних основах, які не враховують такі властивості НДС як: інтервальність значень вимірюваних величин, можливість розвитку детермінованих, стохастичних та хаотичних режимів, сильна залежність від початкових умов і шумів, еволюція та самоорганізація. Невідповідність основ класичної теорії вимірювань процесам в НДС негативно впливає на достовірність досліджень таких систем і можливість управління.

Зазначені обставини дозволяють вважати створення теорії дослідження нелінійних динамічних систем, заснованої на моделях вимірювань в НДС, актуальною теоретико-прикладною задачею, що має важливе значення для розвитку нових методів та методик експериментальних досліджень в галузі фізики, зокрема, при дослідженні процесів в приладах та системах, процесів самоорганізації та динаміки ієрархічних систем, а також для розроблення та експлуатації лазерів із хаотичними характеристиками випромінювання та медичних приладів і систем вимірювання та діагностичі стану організму.

Ступінь розробленості проблеми.

Дослідженням і вимірюванням параметрів складних систем присвячені роботи В. А. Грановського, В. В. Лечнева, В. Т. Кондратова, Ю. В. Бакшієвої, Р. Е. Тайманова, В. П. Фішера, А. Гуейра та ін. Однак, незважаючи на актуальність теми, єдиної універсальної теорії, яка об'єднує теоретичні та експериментальні завдання досліджень і вимірювань в НДС різної природи, до

недавнього часу не існувало. Системно до питання вимірювань і дослідження НДС підійшов проф. Ю. П. Мачехін. У роботах з дослідження параметрів лазерного випромінювання він звернув увагу на необхідність створення нової теорії, що об'єднує завдання досліджень та вимірювань в НДС. Ідеї, висловлені проф. Ю. П. Мачехіним, потребували системному розвитку та практичної реалізації.

Таким чином, комплексна задача моделювання, створення, вивчення, прогнозування та управління складними системами вимагає розроблення теорії дослідження НДС на основі принципів і моделей вимірювань в НДС. Вирішенню цього актуального теоретико-прикладного завдання присвячена дисертаційна робота.

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розроблення принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювань в нелінійних динамічних системах. Для досягнення мети були поставлені та вирішені такі основні завдання:

1. Систематизувати властивості та процеси в нелінійних динамічних системах, які впливають на процес і результат вимірювань.
2. Розробити фізико-математичні основи вимірювань в нелінійних динамічних системах.
3. Розробити теоретичну модель вимірювань в нелінійних динамічних системах.
4. Розвинути теорію невизначеності вимірювань в нелінійних динамічних системах.
5. Розробити експериментальні моделі дослідження фізичних і біофізичних систем на основі моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах.

Об'єкт дослідження.

Об'єкт дослідження дисертаційної роботи — процеси в нелінійних динамічних системах.

Предмет дослідження.

Предмет дослідження дисертаційної роботи — модель вимірювання величин, що характеризують процеси в нелінійних динамічних системах.

Методи досліджень.

У роботі використовуються розрахунково-теоретичні та чисельні методи досліджень, які були адаптовані для вирішення поставлених у дисертаційній роботі завдань.

При систематизації властивостей та характеристик НДС використані кількісні та якісні методи теорії динамічних систем, теорії динамічного хаосу та синергетики. Для розроблення фізико-математичних основ вимірювань в НДС використані методи теорії вимірювань, математичної статистики, теорії відкритих систем. При розробленні теоретичної моделі вимірювань використані методи якісної теорії динамічних систем, теорії інформації, фрактального аналізу та математичного моделювання, лінійної та інтервальної алгебри, топології. Принципи оцінювання та методика представлення результатів вимірювань розроблені з використанням методів теорії ймовірностей, концепції вираження невизначеності результатів вимірювання та методів теорій динамічних систем. Експериментальні моделі досліджень НДС розроблені з використанням методів комп'ютерного аналізу та моделювання, теорії лазерів, лазерного охолодження, топології, методів синергетичної теорії та інших теорій дослідження складних систем.

Наукова новизна.

У дисертаційній роботі вперше отримані наступні результати, які виносяться на захист:

1. Систематизовані процеси і властивості нелінійних динамічних систем, які впливають на процес і результат вимірювань, для аналізу результатів вимірювань запропоновано використовувати якісні та кількісні методи і інструменти теорій складних систем.

2. Розроблено фізико-математичні основи вимірювань величин із складною, хаотичною динамікою, що характеризують нелінійні динамічні системи з функцією самоорганізації, які еволюціонують.

3. Вперше розроблено адаптивну теоретичну модель, яка забезпечує вимірювання та дослідження нелінійних динамічних систем у випадку детермінованої, стохастичної та хаотичної динаміки.

4. Отримала подальший розвиток теорія невизначеності вимірювань в нелінійних динамічних системах, вперше розроблені принципи оцінювання та подання результатів вимірювань величин із хаотичною динамікою.

5. На основі результатів досліджень вперше розроблено експериментальні моделі дослідження параметрів випромінювання лазера, процесу лазерного охолодження, стану біофізичної системи, які дозволяють досліджувати нелінійні динамічні системи та керувати процесами в умовах хаотичної динаміки.

Всі наукові результати, що виносяться на захист, отримані або автором особисто, або за його вирішальним внеском.

Практична цінність і реалізація результатів досліджень.

Результати досліджень роблять значний внесок в розвиток основ теорії дослідження нелінійних динамічних систем. Вони забезпечують вирішення важливої теоретичного та прикладного завдання загальнолюдського значення — дослідження, моделювання, прогнозування та управління НДС. Отримані результати цінні для теоретичних, модельних і експериментальних досліджень фізичних явищ в системах, апаратах і приладах, сприяють створенню нових інформаційно-керуючих систем, методів і методик дослідження, створення нової та вдосконалення існуючої техніки, розвитку фізики процесів самоорганізації та динаміки ієрархічних систем. Практичне використання принципів, моделей вимірювань і дослідження НДС дозволить підвищити характеристики та ефективність застосування лазерної та оптоелектронної техніки, систем конфіденційного зв'язку, підвищити якість оцінювання екологічного стану планети, виконувати кількісне оцінювання біофізичних систем. Запропоновані рішення можуть служити універсальною основою для дослідження об'єктів і

процесів, що відносяться до класу НДС. Розвиток моделей вимірювання та дослідження сприяє створенню математичних і часово-просторових моделей складних процесів і систем. Результати досліджень важливі для розроблення та експлуатації лазерів із хаотичними характеристиками випромінювання, а також для конструювання медичних приладів і систем, призначених для діагностики і вимірювання параметрів організму.

Робота представляє нову методологію наукового знання, пропонує як теоретичні основи, так і практичні приклади використання отриманих результатів.

Зв'язок роботи з науковими темами.

Дисертаційні дослідження пов'язані з виконанням держбюджетної науково-дослідної роботи з фундаментальних проблем «Розвиток нових оптичних стандартів частоти з використанням фотонних кристалів» (номер державної реєстрації 0115U002434), відповідальним виконавцем якої був здобувач, держбюджетної науково-дослідної роботи під шифром «Промінь» і роботи за державним замовленням «Розроблення конструкторської документації та дослідного зразка лазерної системи реєстрації оптики у відкритому просторі» (номер державної реєстрації 38-2018). Її результати використовуються при підготовці магістрів ХНУРЕ спеціалізацій: фотоніка та оптоінформатика, лазерна і оптоелектронна техніка.

Особистий внесок здобувача.

Основні теоретичні положення і обробка результатів експериментальних досліджень дисертації виконані здобувачем самостійно. Результати роботи відображені в монографії [1], статтях [2] – [38] та тезах доповідей [39] – [56]. Автором розглянуті НДС, процеси із складною динамікою та нелінійні явища, як об'єкти дослідження. та труднощі, які виникають під час досліджень [2], [3], [6], [10]. У роботах [6], [30] систематизовані, необхідні для вимірювань і аналізу результатів вимірювань, властивості нелінійних динамічних систем: дисипативність, сильна залежність від початкових умов і шумів, еволюція та самоорганізація, короткий час прогнозу, хаотична динаміка, інтервальні значення параметрів. У роботах [4], [7] виконано аналіз відповідності фізичних моделей

теорії вимірювання властивостей реальних динамічних систем і доведено необхідність створення принципів, моделей вимірювання і аналізу результатів вимірювання динамічних змінних нелінійних динамічних систем. У роботах [4], [8], [9] створена теоретична фізико-математична модель вимірювання і аналізу результатів вимірювання параметрів НДС. Модель містить принципи вимірювань, складання рівняння вимірювання та інструменти аналізу результатів вимірювання систем. У роботах [11], [12], [14], [15], [17] розроблено підходи до оцінки невизначеності вимірювання та представлення результатів вимірювання параметрів, засновані на властивостях НДС. Вимірюється величина оцінюється невизначеністю вимірювання, інтервалом значень, фрактальної розмірністю і ентропією Шеннона. Роботу [16] присвячено питанню складання рівняння вимірювання. У роботі [20], як інструмент аналізу, введено «портрет вимірювання». Роботи [13], [18]–[29], [31]–[38] містять результати розвитку та практичного застосування моделей вимірювання та експериментальних моделей дослідження фізичних та біофізичних НДС. Досліджено питання застосування розробленої моделі для вирішення завдання лазерного охолодження частинок [18], [29], [34]. У роботах [25], [31], [35] отримано результати щодо досліджень та вимірювань в оптичних системах. У роботах [26] – [28], [32], [33] наведено результати досліджень параметрів лазерного випромінювання волоконних та нано-розмірних лазерів. У роботі [37] здобувачем запропоновано топологічний метод дослідження лазерного випромінювання, а у роботі [38] розроблено комплексну модель дослідження параметрів лазерів з метою отримання заданого рівня стабільності або хаотичності випромінювання. Результати дослідження питання експериментальних досліджень біофізичних об'єктів, як НДС, присвячені роботи [13], [14], [21], [36], у яких автором запропоновано модель дослідження [13], [36], спосіб оцінювання норми ентропії [14] та наведено результати експерименту [21]. У роботі. [21] експеримент проведений О. Присич. У роботі [1] Ю. Мачехіним виконаний експеримент і оцінка фрактальної розмірності частоти випромінювання лазера. У роботах [26], [27] О. Гнатенко виконав моделювання процесу поляризації лазерного випромінювання. У цих

статтях здобувачем виконано моделювання фізики процесу та розглянуто питання застосування теоретичної моделі вимірювань.

Апробація роботи.

Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наступних конференціях і симпозиумах: III і IV Міжнародні науково-практичні конференції «Якість технологій - якість життя» (Харків, 2011 р.; Судак, 2012 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Наука і соціальні проблеми суспільства: інформатизація та інформаційні технології» (Харків, 2011 р.); XI—XV Міжнародні науково-технічні семінари «Невизначеність вимірювань: наукові, законодавчі, методичні та прикладні аспекти» (Москва, Росія, 2014; Софія, Болгарія, 2015 р.; Мінськ, Білорусь, 2016 р.; Созополь, Болгарія 2017 і 2018 р.р.); VIII—X Міжнародні конференції «Функціональна база наноелектроніки» (Одеса, 2015, 2017, 2019 р.р.); Міжнародна конференція «Фізика, електроніка і електротехніка» (Суми, 2016 р.); VI Міжнародна науково-практична конференція "Метрологія, інформаційно-вимірювальні технології та системи". (Харків, 2018 р.); XI Міжнародна науково-практична конференція «Метрологія та вимірювальна техніка» (Харків, 2018 р.), VIII Міжнародна конференція з прикладної оптоелектроніки та лазерів «CAOL 2019» (Созополь, Болгарія 2019 р.) та інших [39] — [56].

Публікації.

Всього за результатами виконаних досліджень опубліковані 56 робіт, в тому числі одна монографія, 37 статей в журналах з Переліку провідних рецензованих наукових видань для опублікування основних результатів дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора і кандидата наук; з них 11 опубліковані у виданнях, що індексуються в базах даних Scopus і Web of Science, з цього числа 8 опубліковані в зарубіжних виданнях. Із загальної кількості публікацій 18 - публікації в матеріалах і збірниках праць міжнародних конференцій,

Структура і обсяг роботи.

Дисертаційна робота складається з вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел з 277 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 299

сторінок, включаючи 34 рисунка, 2 таблиці та 1 додатка. Нумерація формул, таблиць і рисунків в межах кожного розділу самостійна.

У першому розділі обґрунтовано необхідність розробки принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювань в НДС. Для створення теоретичної моделі вимірювань і експериментальних моделей дослідження розглянуто системи різної природи та їх динаміка, виконана класифікація систем, систематизовано процеси в НДС, що впливають на процес і результат вимірювань, систематизовано фізико-математичні положення теорій дослідження систем, проведено аналіз підходів і математичних інструментів дослідження складних систем.

Аналіз результатів опублікованих досліджень показав, що більшість із систем реального світу — це дисипативні НДС, які демонструють наступні основні властивості: стан систем в окремий момент часу характеризується n -мірним вектором (вектор стану); динаміка динамічних змінних (ДЗ) носить складний, нелінійний характер; системи обмінюються енергією та інформацією з навколишнім середовищем; процеси та ДЗ таких систем демонструють сильну залежність від зміни початкових умов, схильні до впливу зовнішніх факторів та шумів; фазовий портрет НДС в стані хаосу являє собою дивний аттрактор; системи еволюціонують, деякі системи мають функцію самоорганізації.

Проаналізовано методи та інструменти дослідження НДС, серед яких найефективнішими є: топологічне дослідження фазового портрета; ентропійний та фрактальний аналіз часових рядів результатів вимірювання; оцінювання еволюційних змін з використанням критерію «S-теорема» та ін.

Розглянуто приклади НДС фізичного, біологічного та хімічного походження, а також завдання дослідження та управління хаотичною динамікою таких систем. Доведено, що для досліджень в НДС у хаотичному стані повинні бути створені спеціальні адаптовані моделі вимірювання та дослідження фізичних та біофізичних систем.

Таким чином, у розділі обґрунтовано актуальність мети та завдань дисертаційного дослідження. Вперше для створення моделі вимірювань в НДС

систематизовано процеси та основні властивості НДС, які впливають на процес вимірювань, систематизовано фізико-математичні положення теорій дослідження систем. В якості умов створення моделі вимірювання означено: інтервальність значень вимірюваних величин, їх нелінійна, хаотична динаміка, сильна залежність від початкових умов та шумів, еволюція та самоорганізація системи. Як інструменти аналізу результатів вимірювань вперше запропоновано разом використовувати: фазовий портрет, фрактальну розмірність, ентропію Шеннона, час передбачення.

У другому розділі розроблено фізико-математичні основи вимірювань величин із складною, хаотичною динамікою, що характеризують нелінійну динамічну систему з функцією самоорганізації, яка еволюціонує.

Виконано аналіз відповідності властивостям НДС класичної теорії вимірювань, яка постулює умови про існування єдиного істинного значення вимірюваної величини, випадковості та ергодичності розкиду результатів вимірювань. Обґрунтовано, що теоретична модель вимірювань в НДС повинна бути побудована на принципах і фізико-математичних основах, які враховують наступні характеристики НДС: інтервальність значень вимірюваних величин, нелінійну та хаотичну динаміку ДЗ, сильну залежність від початкових умов і шумів, процеси еволюції та самоорганізації.

Вперше розроблено фізико-математичні основи вимірювань в НДС. Обґрунтовано, що при вимірюваннях в НДС повинні бути враховані такі фактори: відсутність єдиного істинного (дійсного) значення вимірюваної величини; значення ДЗ знаходяться в певному інтервалі; неергодичність значень результатів вимірювання та невиконання центральної граничної теореми; стохастичність та хаотичність динаміки ДЗ НДС веде до стохастичності та хаотичності результатів вимірювання; часовий ряд результатів вимірювання може представляти собою немарківський процес, мати гаусдорфову розмірність; результат вимірювання можна трактувати, як фрактал (у випадку хаотичної динаміки — дивний атрактор); «незначна» зміна початкових умов веде до значних змін результатів

вимірювання ДЗ; результат вимірювання ДЗ НДС повинен бути оцінений за допомогою невизначеності.

Для класифікації динаміки НДС в моделі пропонується використовувати фрактальний аналіз рядів результатів вимірювань. Наведено результати фрактальних досліджень динаміки стабільності частоти випромінювання лазера та напруги в електричній мережі. Отримані результати підтвердили припущення про ефективність використання фрактального аналізу для класифікації динаміки НДС.

У третьому розділі вперше розроблено адаптивну теоретичну модель, яка забезпечує вимірювання та дослідження нелінійних динамічних систем в разі детермінованої, стохастичної або хаотичної динаміки. Отримала подальший розвиток теорія невизначеності вимірювань в НДС. Вперше розроблено принципи оцінювання та подання результатів вимірювань величин із хаотичною динамікою.

У розділі описано ключові елементи розробленої моделі, якими є: схема вимірювального експерименту; спосіб оцінювання необхідної та достатньої кількості інформації; спосіб класифікації процесу та вибору математичного апарату оброблення результатів вимірювання; спосіб оцінювання та подання результатів вимірювань.

Були обрані математичні інструменти аналізу динаміки НДС за результатами вимірювань, а саме: фрактальна розмірність, значення якої дозволяє класифікувати динаміку процесу; ентропія Шеннона, значення якої дозволяє оцінити невизначеність вимірювання та розкид значень ДЗ: фазовий портрет НДС, що дозволяє визначити показники Ляпунова та час передбачення динаміки системи. Вперше отримано вирази зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності, а також вирази, що дозволяють використовувати ентропію для оцінювання невизначеності результатів вимірювання ДЗ НДС.

Для складання виразу щільності розподілу ДЗ, запропоновано використовувати методи інтервального математичного аналізу, зокрема метод гістограмного розподілу. Описано принципи та вирази для проведення розрахунків ентропії та ентропійного інтервалу невизначеності результатів вимірювання.

Сформульовано підходи до створення рівняння вимірювання в НДС. Принципи та рекомендації із розроблення рівняння, що пропонує класична теорія вимірювань, були доповнені рекомендаціями щодо врахування залежності вхідних величин, шумів і вихідної величини від часу, а також врахування початкових значень вхідних величин, введення функцій їх еволюції і часом передбачення. Для випадку, коли математичний опис процесів в дисипативних системах виконати неможливо, наприклад за умов хаотичної динаміки, запропоновано використовувати портрет вимірювання, який представляє собою графічне та чисельне відображення результатів вимірювання і який є об'єктом аналізу та отримання даних про систему та результати вимірювання.

У розділі отримала розвиток теорія невизначеності вимірювань в НДС. Представлено методику оцінювання невизначеності результатів вимірювання та оформлення результатів вимірювання ДЗ НДС. Результат вимірювання являє собою ряд інтервальних значень. Кожен інтервал представляється мінімальним і максимальним значеннями ДЗ із урахуванням невизначеностей їх вимірювання. Значення ДЗ всередині інтервалу відображаються у вигляді гістограми значень результатів вимірювання. Наводяться найбільш і найменш вірогідні значення ДЗ із їх невизначеностями та ймовірності появи. Для надання максимально можливого обсягу інформації про ДЗ НДС вирази невизначеності результатів вимірювання доповнюються значеннями фрактальної розмірності, ентропії та часу передбачення.

У четвертому розділі на основі результатів досліджень, проведених в попередніх розділах, вперше розроблено експериментальні моделі дослідження фізичних НДС, а саме: параметрів випромінювання лазера, процесу лазерного охолодження та топологічна модель ідентифікації оптичних приладів. Моделі побудовані на основі теоретичної моделі вимірювання в НДС та дозволяють досліджувати системи та керувати процесами в умовах нелінійної, хаотичної динаміки.

Модель дослідження параметрів випромінювання лазера як НДС із функцією самоорганізації побудована на припущенні про можливість хаотичної динаміки

його параметрів. Модель призначена для вирішення завдання оцінювання та забезпечення стабільності параметрів лазерного випромінювання лазерів, що використовуються як оптичні стандарти частоти, а також для забезпечення запланованої генерації хаотичного випромінювання лазерів, що використовують у системах хаотичного зв'язку.

Особливість моделі полягає в її системному підході та придатності для вимірювань і досліджень стаціонарних і хаотичних режимів. Модель передбачає вимірювання інтервалів значень параметрів випромінювання в різних режимах, значень їх стабільності та часу прогнозування. Класифікація динаміки системи виконується за допомогою фрактальної розмірності.

У розділі представлена топологічна модель ідентифікації оптичних систем спостереження. Модель може бачь застосована для пошуку та ідентифікації прихованих оптичних систем спостереження. Модель заснована на фрактальних уявленнях про структуру оптичного сигналу та визначенні фрактальної розмірності розподілу інтенсивності віддзеркаленого від цілі лазерного променя.

У розділі автором запропоновано вирішення завдання застосування нанолазерів в інформаційних системах. Для досягнення потужності випромінювання, прийнятної для використання нанолазерів в інформаційно-вимірювальних процедурах, автором пропонується використання режиму надвипромінювання. Запропоновано схему нанолазера зі стабілізацією частоти по лінії поглинання йоду в дефекті фотонного кристала. Аналіз параметрів випромінювання та їх динаміки виконується за допомогою експериментальної моделі дослідження параметрів випромінювання лазера та адаптивної теоретичної моделі вимірювань в НДС.

У розділі запропонована модель оцінювання температури ансамблю частинок в процесі лазерного охолодження. На практиці температуру визначають балістичним методом по завершенні процесу охолодження. У дисертації пропонується модель, що дозволяє оцінити температуру в процесі охолодження із використанням інформаційної ентропії Шеннона. Застосування інформаційно-ентропійного підходу та ентропійної шкали, що запропоновані в моделі, дозволяє

оцінювати температуру ансамблю частинок в процесі лазерного охолодження в будь-який момент часу.

У п'ятому розділі вперше розроблено експериментальну модель дослідження біофізичної системи, яка дозволяє досліджувати системи та керувати процесами в умовах нелінійної, хаотичної динаміки. Як приклад біофізичної, ієрархічної, НДС із функцією самоорганізації, яка еволюціонує, розглядається організм людини.

У моделі розглядаються стійкий та збуджений стани НДС, які характеризуються: інтервалами значень ДЗ; ентропією; часом предсказання. Вимірювання стану системи виражається в вимірюванні низки обраних ДЗ та часу повернення ДЗ та в межі стійкого стану після припинення нормованого впливу.

Для аналізу еволюційних процесів системи в моделі використовується критерій «S-теорема» Ю. Клімантовіча з нормованою ентропією. У розділі сформульовані умови та принципи визначення норми ентропії біофізичних НДС: Також у моделі автором вирішена задача визначення нормованого впливу. Його значення має бути таким, щоб система, вийшовши зі стійкого стану, могла самостійно в нього повернутися.

Таким чином, в розділі вперше розроблено експериментальну модель дослідження біофізичної системи на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС, що дозволяє досліджувати системи з хаотичною динамікою. Модель може бути застосована для проведення медичних досліджень, а також для конструювання медичних приладів і систем вимірювання величин із можливою хаотичною динамікою.

РОЗДІЛ 1

НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕНЬ

Метою розділу є обґрунтування необхідності розроблення принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювання в нелінійних динамічних системах. У розділі вирішено завдання систематизації властивостей та процесів в нелінійних динамічних системах, що впливають на процес і результат вимірювань. Проведено дослідження основних властивостей та характеристик динамічних систем різної природи та їх динаміки. Буде продемонстровано, що більшість із систем навколишнього світу — це дисипативні нелінійні динамічні системи. Будуть досліджені основні характеристики та властивості таких систем. У розділі проаналізовано методи і інструменти дослідження складних систем, розглянуто їх приклади. Проаналізовано нові глобальні наукові завдання та обґрунтовано необхідність розроблення теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі нових принципів і моделей вимірювання. Основні результати досліджень, проведених в розділі, відображені в роботах [1], [2], [30].

1.1 Визначення та класифікація нелінійних динамічних систем

Для досягнення мети роботи — розроблення принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем (НДС) на основі моделей вимірювань в НДС повинні бути досліджені і систематизувати властивості та процеси в НДС, необхідні для створення теоретичної моделі вимірювання та експериментальних моделей дослідження фізичних та біофізичних НДС.

Нелінійні динамічні системи є найскладнішими для дослідження динамічними системами. Дамо визначення та окреслимо властивості НДС, що розглядаються в рамках дисертаційної роботи.

Під динамічною системою (ДС) розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану, як сукупності значень деяких величин (динамічних змінних (ДЗ)) $[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ в певний момент часу t , і заданий закон, $F(X_i, t)$, який описує еволюцію початкового стану $[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)]$ із плином часу:

$$F[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)] \rightarrow [X_1(t), \dots, X_n(t)] \quad (1.1)$$

Динамічна система може бути описана диференціальним рівнянням виду:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = F[X_1(t), \dots, X_n(t)]. \quad (1.2)$$

Простір всіх можливих станів системи, що описуються виразом (1.1), формує фазовий простір системи. Розмірність фазового простору, як і самої системи, визначається кількістю n величин $X_i(t)$ — динамічних змінних (ДЗ).

До класу динамічних систем можна віднести системи будь-якої природи: фізичні та біологічні об'єкти, хімічні процеси, соціуми та біопопуляції, екосистеми та фінансові ринки, обчислювальні процеси і процеси перетворення інформації [57]. Аналіз літератури, присвяченої дослідженням складних систем, показав, що єдиної системи класифікації ДС немає, але класифікацію можна виконати, виходячи з природи походження і основних властивостей систем.

За природою походження динамічні системи можна розділити на: фізичні, біологічні (біофізичні), хімічні, екологічні, інформаційні, соціальні та інші.

Спираючись на основні властивості, класифікацію ДС можна виконати за такими ознаками:

- за характером динаміки — детерміновані та стохастичні, лінійні та нелінійні;
- за взаємодією із зовнішнім середовищем — відкриті та закриті:

- за можливістю перетворення енергії в тепло — дисипативні та консервативні;
- за характером зміни стану — безперервні та дискретні;
- за можливістю самоорганізації — ті, що еволюціонують та ті, що ні;
- за структурою — ієрархічні та прості.

Розглянемо основні риси наведених систем. Так, детермінованими називаються системи, ДЗ яких змінюються з плином часу за суворо визначеним законом $F(X_i, t)$. Стохастичні системи характеризуються випадковим характером динаміки ДЗ, значення яких можуть бути описані математичним апаратом теорії ймовірності. Лінійні системи — це системи з лінійним або лінеаризованим законом еволюції $F(X_i, t)$

Нелінійна динамічна система — це динамічна система, закон еволюції $F(X_i, t)$ якої не може бути описаний лінійним або лінеаризованим рівнянням. Тобто значення її ДЗ змінюються з плином часу нелінійним чином. При цьому закон еволюції $F(X_i, t)$ реальних НДС описати аналітично вдається вкрай рідко, що робить, за рідкісним винятком, нездійсненним завдання прогнозування їх стану [58]. Зауважимо, що лінійна система є детермінованою, в той час як нелінійну систему, в силу складної динаміки, не може бути однозначно віднесено ні до детермінованої, ні до стохастичної системи.

Відкриті системи, згідно з визначення І. Пригожина, це системи через які можуть протікати потоки енергії та ентропії [59]. При досить великих потоках в таких системах можуть проходити процеси нелінійної самоорганізації (еволюції). Закриті системи, відповідно, демонструють властивості, протилежні властивостями відкритих систем.

Дисипативні системи — це відкриті системи, які оперують далеко від термодинамічної рівноваги та характеризуються можливістю дисипації (розсіювання) енергії, що надходить ззовні. Такі системи часто демонструють еволюційні процеси та характеризуються спонтанною появою складної, часто хаотичної структури. Консервативні або гамільтонові системи в науковій

літературі розглядаються як окремий випадок динамічних систем, які описують фізичні процеси без дисипації.

Безперервні та дискретні системи відрізняються безперервним та дискретним відповідно характером зміни значень ДЗ. Зауважимо, що у випадку дискретних вимірювань навіть системи із безперервним характером ДЗ вважаються дискретними.

Системи, що еволюціонують, — це системи, здатні до еволюції та самоорганізації, що виражається в зменшенні ентропії та збільшенні впорядкованості.

Ієрархічні системи — це системи, в яких спостерігається домінуюча дія одного чинника або ДЗ на інші, що проявляється в еволюційних змінах і поверненні системи в стійкий стан після припинення зовнішнього збудження. Прості системи такої особливості позбавлені.

Наведена класифікація є неповною. У ряді джерел можна зустріти такі види систем як зосереджені та розподілені, автономні та неавтономні; автоколивальні. Динамічні системи, що розглядаються в рамках роботи — це відкриті дисипативні НДС, які можуть мати властивості, притаманні системам, наведеним в класифікації, наприклад, хаотичністю та самоорганізацією. Це складні, ієрархічні системи. Прикладами таких систем можуть служити: лазер, системи зв'язку, наприклад хаотичні оптичні системи, біологічний організм, наприклад людина, екологічні системи та інші об'єкти дослідження.

Усі перераховані об'єкти представляють великий інтерес для дослідників і соціуму. При цьому дослідження хаотичних процесів в дисипативних НДС це одне з фундаментальних завдань сучасного природознавства. Динамічні змінні таких систем повинні бути коректно виміряні з застосуванням моделей вимірювання та підходів в максимальному ступені відповідних властивостям та процесам в НДС. Коректне вимірювання значень ДЗ таких НДС служить не тільки умовою оцінювання їх поточного стану, але дозволить робити прогнози та здійснювати управляти системами.

1.2 Принципи досліджень нелінійних динамічних систем

У процесі досліджень реальних НДС (не змодельованих математично) у другій половині ХХ століття було створено низку теорій, найяскравішими з яких є: теорія динамічного хаосу [60], синергетика [61], теорія динамічних систем [62]. Ці теорії вже стали міждисциплінарними та сформувалися на стику декількох наук: фізики, хімії, біології, екології, соціології і т. д. В центрі їх уваги знаходяться об'єкти, які можуть бути представлені як НДС, і їх властивості. Вони вирішують завдання дослідження, моделювання та прогнозування динаміки реальних НДС. Їх методи широко використовуються в прикладних задачах найширшого спрямування — від оброблення інформації та фінансового аналізу до аритміялогії та нейродинамиці. Аналіз основних положень та інструментів цих теорій дозволить розробити модель вимірювань в НДС.

Для дослідження НДС використовують два методи, що відрізняються типом математичної моделі системи (1.1) [57]. Перший метод заснований на математичному моделюванні системи і пошуці функції еволюції $F(X_i, t)$ (1.2). Значення $[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ і функція еволюції $F(X_i, t)$ визначають стан системи в певний момент часу, який являє собою точку в фазовому просторі системи. Зміні стану системи відповідає рух точки, яка «зображує», в фазовому просторі. При цьому ця точка описує фазову траєкторію. Сукупність фазових траєкторій складають фазовий портрет системи. Фазовий портрет і функція еволюції складають математичну модель системи. Фазовий портрет служить об'єктом дослідження характеру поведінки системи. Знання функції еволюції дозволяє прогнозувати динаміку та значення ДЗ системи в будь-який момент часу.

Наріжним каменем описаного методу є вирішення найскладнішої математичної задачі пошуку функції еволюції. Цієї необхідності позбавлений другий метод, орієнтований на дослідження функціонального боку системи. Він не дозволяє досліджувати всі тонкощі внутрішньої структури системи. Система інтерпретується як «чорний ящик» із вхідними та вихідними значеннями динамічних змінних. При цьому «чорний ящик» грає роль функції еволюції,

перетворюючи вхідні $[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)]$ на вихідні $[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ величини а математична модель визначається просторами входів і виходів.

Перший із викладених методів надає вичерпно повну інформацію про систему, але на практиці може бути реалізований лише в рідкісних випадках. Другий, більш «грубий», метод не дозволяє досліджувати всі тонкощі системи, але дозволяє визначити значення ДЗ в окремі проміжки часу та побудувати неповний, дискретний фазовий портрет. Надалі, обидва описаних метода будуть застосовані для складання моделі вимірювання та для аналізу результатів вимірювання ДЗ та дослідження НДС.

1.3 Фазовий простір нелінійних динамічних систем

Методи дослідження НДС часто є якісними. Для цієї мети була розроблена якісна теорія динамічних систем [63]. Її ключовий елемент — фазовий простір. Фазовий простір і фазовий портрет, який формується в ньому, є найбільш поширеними інструментами аналізу НДС і наочного уявлення процесів, що відбуваються в них складних системах. Дослідження фазового портрета дозволяє визначити:

- тип динаміки системи (детермінована, стохастична, хаотична),
- показники Ляпунова,
- час передбачення,
- розмірність вкладення,
- точки біфуркації та ін. [60].

1.3.1 Фазовий портрет

На фазовому портреті відображаються точки положення рівноваги, які допомагають, не вирішуючи диференціальних рівнянь (1.2), передбачити поведінку динамічної системи. Ці точки рівноваги можуть бути стійкими або

нестійкими. Якщо система знаходиться в околиці стійкої точки, то малі обурення не порушать стійкості системи. Якщо точка рівноваги нестійка, то обурення будуть прогресувати, що може привести до якісної перебудови системи.

Матриця станів (1.1) розмірності $n \times m$, де n — кількість ДЗ, а m — кількість вимірювань у часі кожної ДЗ, може бути представлена у вигляді:

$$\begin{pmatrix} X_1(t_0) & \dots & X_n(t_0) \\ \dots & & \dots \\ X_1(t_i) & \dots & X_n(t_i) \\ \dots & & \dots \\ X_1(t_m) & \dots & X_n(t_m) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Залежно від властивостей системи фазовий портрет може бути обмеженим або необмеженим у просторі. Він може збільшуватися або зменшуватися. У консервативних системах фазовий об'єм залишається незмінним, в дисипативних — змінюється з часом [64].

Особливий вид фазового портрета це аттрактор. Існує ряд визначень цього терміна. Наприклад, геометричне визначення, аттрактор — це компактна підмножина фазового простору динамічної системи, усі траєкторії з деякої околиці якого прагнуть до неї з часом, який прагне до нескінченності. Або, фізичне визначення, згідно якого аттрактор — це стан динамічної системи, до якого вона прагне в процесі свого руху (розвитку). У разі аперіодичних процесів аттрактор стійкої динамічної системи в фазовому просторі зображується точкою, а в разі періодичних процесів — граничним циклом. Існує кілька видів аттракторів: регулярні (прості), випадкові та хаотичні, квазіаттрактори (квазіаттрактор це стійка гранична множина фазового простору динамічної системи, що містить нетривіальну гіперболічну підмножину та стійкі періодичні рухи дуже малої міри грубості) (рис. 1.1). Наявність аттрактора свідчить про «особливу» динаміку системи.

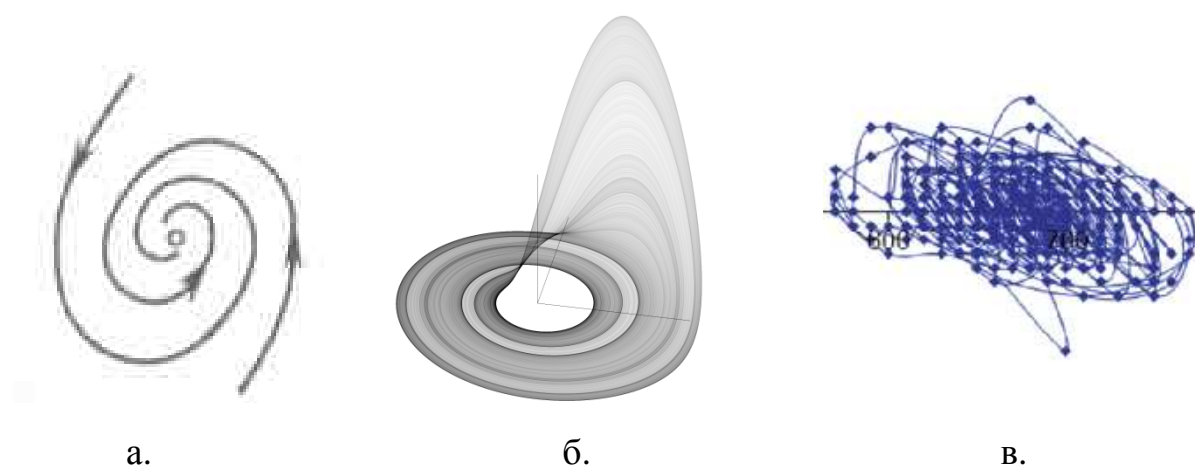


Рис. 1.1. Приклади аттракторів:

- а. – регулярний аттрактор «стійкий фокус»;
 б. – дивний аттрактор Ресслера; в. – квазіаттрактор

Аналіз фазового портрета набуває все більшої популярності як якісний метод аналізу складних систем. Все частіше його застосовують в медичних дослідженнях. Так у роботах [65] — [72] описано застосування аналізу квазіаттрактора для діагностики фізичного стану людини. Людина може служити яскравим прикладом біофізичної НДС із функцією саморегуляції з n числом ДЗ.

Важливою властивістю ієрархічних, саморегулюючих біологічних динамічних систем, в тому числі й людини, є збереження динамічно стійкого гомеостазу для забезпечення стійкості організму до факторів зовнішнього середовища та спрямованого на підтримку всіх життєвих функцій організму, як в нормі, так і при патології [69].

У статті [65] виконано аналіз параметрів квазіаттрактора вектора стану організму людини (ВСО). Протягом тижня, цілодобово, виконувалися обстеження 73 машиністів залізничного транспорту. Дослідження проводилися стандартними методами варіаційної пульсометрії із визначенням частоти серцевих скорочень, індексу Баєвського, ступеню насичення гемоглобіну киснем і спектральними характеристиками серцевого ритму й ін. – усього 11 параметрів (ДЗ). Індекс Баєвського (вегетативний індекс або індекс напруги) — це параметр, що показує, вегетативна нервова система якого типу переважає у людини: симпатична або

парасимпатична. Розраховується за електрокардіограмою за допомогою спеціальної формули [68].

Зауважимо, що значення одних ДЗ були визначені прямим вимірюванням, а інших — непрямим. За результатами вимірювання та розрахунку ДЗ склалися 11-мірні ВСО із компонентами $[X_1(t), \dots, X_{11}(t)]$ (1.1), які формують в фазовому просторі портрет, у даному випадку — квазіаттрактор. Дослідження параметрів аттракторів динаміки поведінки ВСО здійснювалися за допомогою методу, який дозволяє визначити об'єм n -мірного квазіаттрактора V_A та координати його геометричного центру X_{ic} , також обчислювалося відстань між хаотичним X_{ic}^h і стохастичним X_{ic}^s центрами фазового портрета (показник асиметрії) $\Delta R(X)$ за формулою:

$$\Delta R(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{ic}^h - X_{ic}^s)^2}. \quad (1.4)$$

Дослідження проводилися перед рейсом і після його закінчення. Результати розрахунків свідчать про збільшення хаотичності динаміки ДЗ. Об'єм квазіаттрактора ВСО V_A збільшувався більш ніж на порядок, показник асиметрії $\Delta R(X)$ збільшився в десятки разів. Розширення меж аттрактора сигналізує про те, що деякі випробовувані ДЗ входять в область патології, яка цілком поки не виявляється. Однак показники кардіореспіраторної системи вже сигналізують про низьку адаптацію до важких умов праці.

У роботі [66] відображені результати аналогічного дослідження. При цьому, його метою було вивчення впливу занять гімнастикою тайцзи-цюань на показники кардіо-респіраторної системи людини. Показники вимірювалися до та після занять гімнастикою. За результатами вимірювань будувалися фазові портрети та вимірювався об'єм квазіаттрактора V_A . Дослідження показали значне зменшення об'єму V_A , що може бути витлумачено як зменшення ступеня хаотичності організму. Тобто дослідження підтвердили лікувальний ефект гімнастики.

Автори роботи [67] виконали дослідження хаотичної динаміки параметрів квазіаттракторів пацієнтів, хворих на виразкову хворобу дванадцятипалої кишки, що знаходяться в умовах медикаментозного та фізіотерапевтичного впливу. Описано метод ідентифікації параметрів квазіаттракторів стану різних кластерів біосистем в багатовимірному фазовому просторі. Метод дозволяє відстежувати динаміку досліджуваних ДЗ, знаходити параметри порядку в хаотичному просторі, аналізувати досліджувані квазіаттрактори, а також керувати ними з метою досягнення необхідних результатів. При цьому мова йде не тільки про діагностику стану організму, але і про управління окремими ДЗ і всією НДС із метою лікування людини.

У дослідженні брали участь пацієнти (досліджувана група) і здорові люди (контрольна група). За результатами дослідження 27 ДЗ були побудовані 27-мірні квазіаттрактори, досліджені їх параметри з плином часу. Автори підкреслюють, що зміна стану людини може не відобразитися на зміні об'єму аттрактора V_A , але може виражатися в зміні його форми та зміщенні центра. Мірою хаотичності організму служить відстань між центрами хаотичних (аттрактори ВСО пацієнтів) і стохастичних (аттрактори ВСО здорових людей) квазіаттракторів $\Delta R(X)$ (1.4). Аналізування параметрів квазіаттракторів до і після лікування призначеними препаратами виявив значне зменшення асиметрії аттракторів і зниження об'єму квазіаттрактора пацієнтів, що свідчить про виражену позитивну динаміку в стабілізації вегетативного гомеостазу.

Використання описаних біоінформаційних методів, які прийшли в медицину з теорії динамічного хаосу та синергетики, при оцінюванні стану людини дозволяє описати роботу його організму як функціонування НДС, в якій окремі елементи не є об'єктом дослідження. Такий підхід лежить в основі сучасної інтегративної медицини, яка не може розвиватися без нових методів вимірювань і досліджень НДС [70].

Незважаючи на позитивні відгуки авторів, дані методи мають очевидні ускладнення, які полягають в необхідності порівнювати між собою аттрактори досліджуваної та контрольної груп. При цьому визначити збільшення або

зменшення хаотичного режиму НДС можна за допомогою фрактального та ентропійного аналізу динаміки НДС, які будуть застосовані в теоретичній моделі вимірювань в НДС [11].

1.3.2 Дивний аттрактор

Піонером у використанні аттрактора, як об'єкта аналізу при дослідженні реальних НДС, був американський вчений-метеоролог Едвард Лоренц [60]. Лоренц був захоплений популярною у 60-і роки ідеєю складання довгострокових прогнозів та працював над математичним моделюванням погоди. Його роботи були серед тих, що поклали край ідеям детермінізму в наукових поглядах на дослідження реальних НДС. Вже в ті роки дослідники прийшли до думки, що погоду можна описати за допомогою середніх значень вимірюваних величин.

Так, досліджуючи динаміку ДЗ, які характеризують погоду, Лоренц, трохи змінивши початкові умови (четвертий знак після коми), помітив, що починаючись однаково, з плином часу значення ДЗ сильно розходяться. Результати моделювання, зберігаючи загальну тенденцію, ніколи не повторювалися. На рис. 1.2 наведено графік, отриманий Лоренцом, який відображає два сценарії для динаміки однієї ДЗ із незначними відрізняються розбіжностями початкових умов [74].

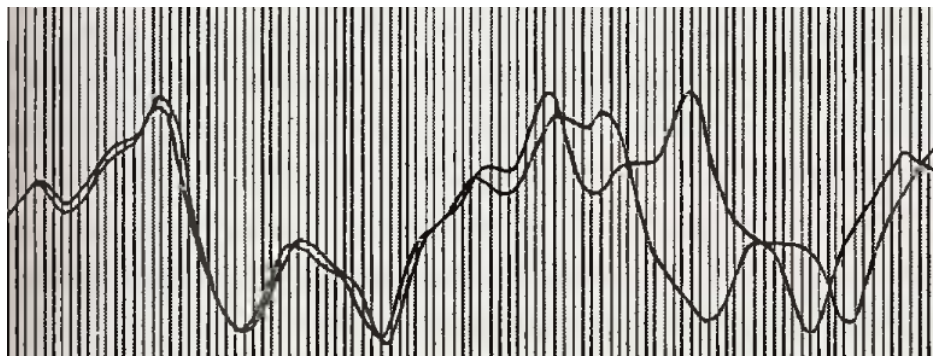


Рис. 1.2. Розбіжність значень ДЗ і відмінними початковими умовами.

З цього був виведений ключовий для НДС принцип сильної залежності ДЗ від початкових умов і слабких впливів, відомий як «ефект метелика». Е. Лоренц

першим зрозумів, що довгострокове прогнозування погоди неможливе. У 1968 році він опублікував статтю «Детермінована неперіодична течія». Робота була присвячена дослідженню моделі нелінійної системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку (1.2), яка представляла собою спрощену модель конвекції підігрітого шару рідини:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= \sigma(X_2 - X_1), \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= rX_1 - X_2 - X_1X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} &= -bX_3 + X_1X_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

де: X_1, X_2, X_3 — ДЗ, які характеризують швидкість обертання конвекційних шарів, розподіл температури по горизонталі та вертикалі відповідно; σ, r, b . — безрозмірні параметри.

Модель Лоренца (1.5) являє собою НДС із тривимірним фазовим простором. Її миттєвий стан в момент часу t характеризується набором ДЗ, $[X_1(t), X_2(t), X_3(t)]$, а функція еволюції $F(X_i, t)$ (1.1) визначається конкретним видом рівнянь (1.5). Згідно з припущенням Лоренца фазові траєкторії з певного моменту часу повинні були або розташуватися паралельно осям координат, що означало б досягнення системою стійкості при стабілізації температури та швидкості, або формувати повторювану петлю, яка б означала перехід системи до періодичного руху. Однак результат був іншим. Комп'ютерне моделювання моделі Лоренца дозволило отримати фазовий портрет виду (рис. 1.3) [74].

Заплутані траєкторії фазового портрета (рис. 1.3.), що локалізовані в певній області у вигляді подвійної спіралі або «метелика», говорять про повну неупорядкованість динаміки НДС. Фазовий портрет такого типу називається «дивним аттрактором». На відміну від передбачуваних класичних аттракторів (точок або граничних циклів), дивні, або хаотичні аттрактори, описують

непередбачувані рухи та мають більш складну форму. Відмінною особливістю дивного аттрактора є експоненціальна нестійкість, що виражається в експоненційній розбіжності траєкторій фазового портрета і у фрактальній (дробовій) розмірності [73]. Саме завдяки таким «незвичайним» властивостями описаний аттрактор в роботі Ф. Таккенса «Про природу турбулентності» отримав назву «дивний» [75].

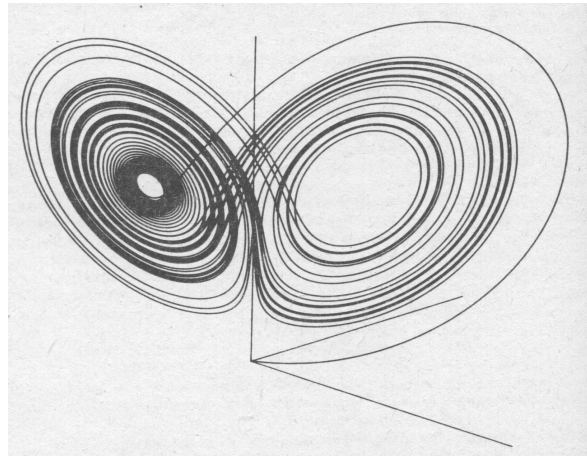


Рис.1.3. Дивний аттрактор Лоренца.

Подальші дослідження НДС підтвердили справедливість ідей Лоренца та його моделі (1.5) і для НДС іншої природи. За аналогією з конієктивною моделлю (1.5) Г. Хаккен пізніше запропонував модель лазера та довів принципову можливість розвитку динамічного хаосу в одномодових лазерах [61]. Теоретичні та експериментальні дослідження довели можливість утворення дивних аттракторів в фізичних, біологічних та інших НДС, наявність дивного аттрактора говорить про хаотичну динаміку НДС, в той час як зворотне твердження вірне не завжди.

1.4 Топологія та інші характеристики нелінійних динамічних систем

Зрозуміти НДС — означає відобразити її диферентіальними рівняннями (1.2), які описують динаміку системи. Альтернативою складанню та дослідженню нелінійних диференціальних рівнянь стали ідеї, запропоновані

С. Смейлом, який зв'язав топологію фазового простору та динаміку НДС [76], Раніше А. Пуанкаре заклав основи топології, як теорії, здатної геометричними методами описати фізичні системи [77]. В результаті ми отримали можливість досліджувати якусь форму для наочного уявлення всього різноманіття динаміки НДС.

С. Смейл відмовився від ідеї спостереження за окремою траєкторією, що реалізується рішенням рівняння (1.2). Замість цього він запропонував дослідити цілісний фазовий простір НДС, концентруючи увагу на його геометричній суті. Дослідження показали, що топологічні трансформації фазового простору є відображенням фізичних процесів. Так, розсіювання та втрата енергії системою виражалися в стисненні фазового портрета. Було доказано, що приблизно однакові фазові портрети говорять про подібну динаміку систем. Таким чином, народилася ідея про те, що якщо форма фазового портрета доступна візуалізації, то систему можна вирішити.

Геометричне дослідження фазових портретів дозволяє отримати такі дані про НДС як то: характер динаміки, час прогнозу значень ДЗ, їх граничні значення. При цьому можуть бути визначені: об'єм аттрактора, показники Ляпунова, ентропія Шеннона, розмірність аттрактора та інші величини. Розглянемо ті з них, які використовуються для вимірювання та аналізу результатів вимірювань ДЗ НДС і будуть використані в теоретичній моделі вимірювань в НДС [3], [4].

1.4.1 Об'єм аттрактора

У розглянутих публікаціях [65] — [71] та в ряді інших робіт, присвячених застосуванню методів дослідження НДС, використовується параметр зміни об'єму аттрактора організму ΔV_A як індикатор зміни ступеня хаотичності системи. При цьому аттрактор апроксимується до багатовимірною паралелепіпеда з розмірами сторін $\Delta X_i = X_i^{\max} - X_i^{\min}$. Однак згідно з [64] аттрактор може мати дробову розмірність. Тобто, розмірність фазового портрета, укладеного в 3-х мірний простір, може бути менше 3 [78]. При цьому інтервали ΔX_i видаються відрізками із, можливо, різною фрактальною розмірністю. Тому, для визначення

об'єму аттрактора повинні бути застосовані спеціальні способи визначення об'єму фрактальних фігур.

1.4.2 Показники Ляпунова

Показники Ляпунова використовують для дослідження динаміки НДС в околиці довільній траєкторії фазового портрета. Вони характеризують ступінь розтягування та стиснення фазового портрета вздовж обраних траєкторій. Якщо дві близьких фазових траєкторій системи $x_i(t)$ і $x_{i+1}(t)$ (1.2) обрати так що $x_{i+1}(t) = x_i(t) + \xi(t)$, а $\xi(0) = \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то функція виду:

$$\Xi[\xi(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\xi(t)}{\xi(0)} \right] \quad (1.6)$$

приймає кінцевий ряд значень $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ці значення і є показниками Ляпунова, сукупність яких формує ляпуновський спектр [64]. Кількість показників Ляпунова Λ відповідає розмірності НДС. Сума всіх показників Ляпунова дорівнює середньому уздовж траєкторії значенню дивергенції векторного поля:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \dot{\xi}(t) dt. \quad (1.7)$$

Сумарний показник Ляпунова Λ може розглядатися як показник стійкості динаміки системи. Так при $\Lambda = 0$ система Гамільтонова, має стійку динаміку, процеси, що відбуваються в ній, можуть розглядатися як детерміновані, об'єм фазового портрета незмінний; $\Delta V_A = \text{const}$; при $\Lambda > 0$ об'єм фазового портрета зростає $\Delta V_A \uparrow$, динаміка НДС має хаотичний характер; при $\Lambda < 0$ об'єм фазового портрета зменшується $\Delta V_A \downarrow$, що характерно для дисипативних систем.

Показники Ляпунова також містять інформацію про розмірність аттрактора D_A , яка може бути дробовою

:

$$D_A = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{i+1}|}, \quad (1.8)$$

де j — розмірність Ляпунова, визначається з виразів:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{j+1} < 0.$$

Значення D_A дає оцінку розмірності аттрактора зверху.

1.4.3 Ентропія

Будь-яка динамічна система може бути охарактеризована ентропією. При цьому використовуються S -ентропія Больцмана, K -ентропія Колмогорова-Сіная (або Крилова-Колмогорова), H -ентропія Шеннона та інші. Якщо больцманівська ентропія застосовується в термодинаміці, то K - і H -ентропія можуть бути використані для аналізу топології фазового портрета НДС. Ентропійний підхід дозволив по-новому підійти до дослідження складних систем.

Ентропія є мірою впорядкованості або невпорядкованості системи. H -ентропія (або інформаційна ентропія) є одним із ключових понять теорії інформації [79] – [81]. Для систем, які можуть перебувати в станах X із щільністю розподілу ймовірності $p = p(X)$, ентропія Шеннона визначається виразом:

$$H = -\sum_{i=1}^N p(X_i) \ln p(X_i), \quad (1.9)$$

або у формі математичного очікування:

$$H = M[-\ln p(X)].$$

Згідно (1.9) ентропія Шеннона приймає тим більші значення, чим менші значення приймає щільність розподілу $p = p(X)$. Якщо ряд значень ДЗ обмежений X , то ентропія максимальна для рівномірного закону розподілу $H \rightarrow \ln N$ при $p(X) \rightarrow 1/N$. Ентропія мінімальна при нормальному законі розподілу та $H \rightarrow 0$ при $p(X) \rightarrow 1$. Ентропія дивного аттрактора вище ентропії регулярного аттрактора. Ентропія хаотичної та випадкової динаміки вище ентропії упорядкованого руху. Зміна значення H -ентропії свідчить про зміну динаміки НДС.

Введення в практику дослідження НДС ентропії Колмогорова-Сіная (або метричної ентропії) дозволило ввести строгий критерій хаотичності системи як нестійкого за Ляпуновим руху із позитивною метричною ентропією $K > 0$ [64]. Аналізуючи фазовий портрет системи, K -ентропія визначається як:

$$K = \lim_{\substack{d(0) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\ln[d(t) / d(0)]}{t}, \quad (1.10)$$

де, $d(0)$, $d(t)$ — відстань між двома сусідніми траєкторіями в початковий та спостережуваний момент часу відповідно: $d(t) = |x_2(t) - x_1(t)|$.

Із виразу (1.10) випливає, що K -ентропія характеризує ступінь розходження траєкторій, а значить, і ступінь хаотичності динаміки системи. Вона пов'язана з показниками Ляпунова (1.7) виразом:

$$K = \int \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i(x) d\mu. \quad (1.11)$$

Із виразу (1.11) випливає твердження, що в разі хаотичності системи її ентропія $K > 0$.

Застосування ентропії для оцінювання стану систем і часових рядів є відкритим питанням, що викликало інтерес таких вчених, таких як І. Пригожин [59], Ю. Я. Климонтович [83] та ін.

У роботі «Ентропія невизначеності» [84] І. І. Горбань, автор теорії гіпервипадкових явищ [85], проаналізував найбільш часто використовувані в теорії обробки сигналів види ентропії. Зокрема поняття «шеннонівська інформаційна ентропія» було поширене на невизначені величини, що не мають імовірнісної міри, запропонована методика розрахунку ентропії гіпервипадкових та інтервальних величин. Зауважимо, що ДЗ розглянутих НДС є інтервальними величинами.

У роботі [84] запропоновано вирази для ентропії Шеннона інтервальних ДЗ. У разі рівномірного розподілу ДЗ X в інтервалі $[X_{\min}; X_{\max}]$ H -ентропія може бути визначена через математичні очікування, $M_{X_{\min}}$, $M_{X_{\max}}$ її меж виразом:

$$H = \ln \left[\frac{\sqrt{3}(M_{X_{\max}} - M_{X_{\min}})}{k} \right]. \quad (1.12)$$

Зауважимо, що вираз (1.12) та інші вирази для ентропії, наведені в [84] коректні тільки в разі канонічних розподілів значень ДЗ НДС — нормального, рівномірного та інших. У разі реальних систем вираз (1.12) може розглядатися як результат оцінювання ентропії зверху.

Таким чином, як ентропія Шеннона, так і ентропія Колмогорова-Сіная, є характеристиками ступеня впорядкованості системи. При цьому K -ентропія є виключно топологічною характеристикою НДС, проте H -ентропія може бути використана, та широко використовуються, для аналізу динаміки системи за результатами аналізу часового ряду результатів вимірювання ДЗ.

1.4.4 Самоподібність і фрактальна розмірність

Наскільки б складними не були процеси, що протікають в НДС, багато які з них демонструють властивість самоподібності або скейлінга — інваріантності при мультиплікативних змінах масштабу. Самоподібність може бути суворою або наближеною. Самоподібний об'єкт або процес виглядає незмінним при збільшенні або зменшенні масштабу. До таких об'єктів і процесів відносяться броунівський рух частинки, турбулентні потоки, дивні аттрактори, часові ряди [86].

Найбільш яскравою властивістю самоподібності об'єктів є їх надзвичайно тонка структура. Такі унікальні об'єкти Б. Мандельброт назвав фракталами [78] (рис. 1.4).

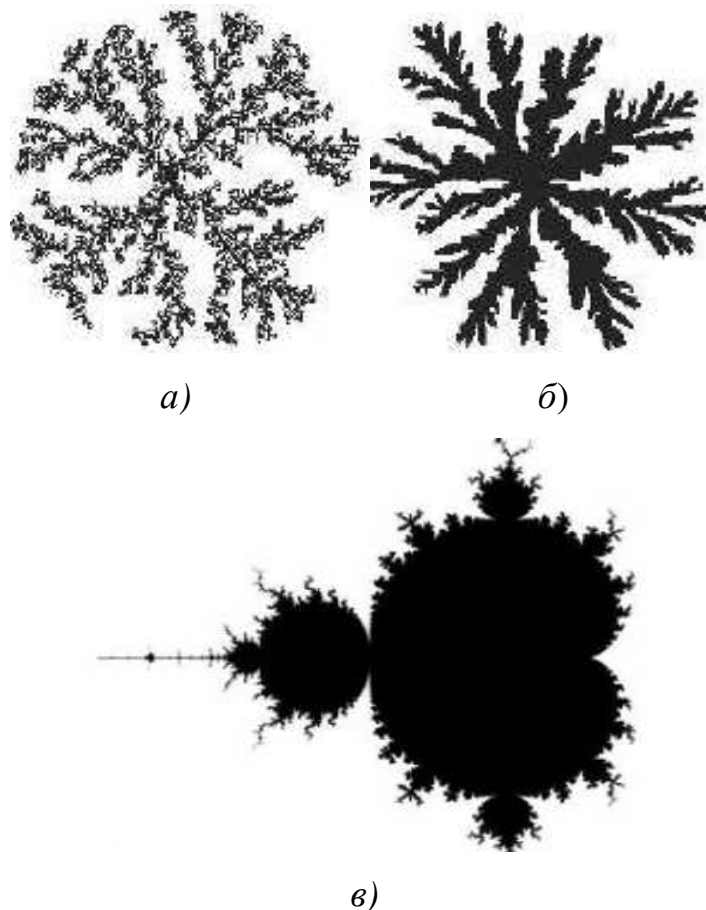


Рис. 1.4. Приклади фракталів:

a, б — реальні фрактали «в'язкі пальці», отримані в ячійці Хелі-Шоу, в випадку рідини, що змочується, та рідини, що не змочується відповідно;

в - змодельований фрактал Мандельброта [97]

Важливість фракталів полягає в тому, що вони здатні моделювати величезну кількість об'єктів, явищ і процесів реального світу, реальних НДС. Підкреслюючи важливість фракталів для науки, М. Шредер сказав, що Б. Мандельброт «Поодинокі врятував найбільш тендітні функції теорії множин і найбільш «пилові» множини від майже повного забуття, помістивши їх в самий центр нашого повсякденного досвіду та уявлень» [74].

Фрактали характеризуються гаусдорфовою (або фрактальною) розмірністю, яка відноситься до топологічних характеристик фазового простору НДС. Поняття гаусдорфівської розмірності було запропоновано одним із засновників сучасної топології німецьким математиком Ф. Гаудорфом, а її практичне застосування було розвинене Б. Мандельбротом [58].

Фрактальна розмірність D_H є інформативним параметром, який характеризує складність поверхні, Вона приймає дробові значення в інтервалі $0 < D_H \leq 3$ і характеризує цілий ряд геометричних фігур, а також фізичні, біологічні та інші об'єкти та процеси, що мають властивість самоподібності [86]. Для фрактальної кривої значення розмірності D_H знаходиться в діапазоні $1 < D_H < 2$, а для поверхні в діапазоні $2 < D_H < 3$. Точка має розмірність $D_H = 0$, суцільна лінія $D_H = 1$. Фрактальна розмірність використовується в різних практичних додатках для ідентифікації об'єктів і процесів. Наприклад, для розв'язання задачі ідентифікації або розпізнання зображень, ідентифікації об'єктів при радіолокації, при аналізі фінансових ринків та ін [87].

Особливий інтерес представляє використання фрактальної розмірності для аналізу фазових портретів НДС і часових рядів результатів вимірювання ДЗ $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Фрактальний аналіз часового ряду є дієвим методом оцінювання динаміки процесу, який дозволяє зробити висновок про випадковість, регулярність або хаотичність процесів [88].

Для визначення D_H часового ряду використовується статистичний метод нормованого розмаху (R/S -аналіз), виведений емпіричним шляхом П. Херстом [87]. Аналізування часового ряду методом Херста дозволяє отримати

однойменний показник H_R , який пов'язаний із фрактальною розмірністю D_H виразом:

$$D_H = 2 - H_R \quad (1.13)$$

Показник Херста H_R визначається через величину R/S , де R – розмах між максимальним і мінімальним значеннями функції приросту $x(i, n)$, величина S — середнє квадратичне відхилення:

$$\left. \begin{aligned} R(i) &= \max_{1 \leq i \leq n} x(i, n) - \min_{1 \leq i \leq n} x(i, n); \\ x(i, n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \end{aligned} \right\}, \quad (1.14)$$

де \bar{x}_i — середнє арифметичне значень $x(t_1), \dots, x(t_n)$.

Співвідношення R/S пов'язано із параметром H_R виразом:

$$R/S = (n/2)^{H_R}, \quad (1.15)$$

$$\text{де } S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - x_N)^2}.$$

Із виразів (1.13) – (1.15) можна отримати значення фрактальної розмірності як усього інтервалу спостережень, так і його окремих ділянок, визначити характер динаміки вимірюваної ДЗ як на окремих часових інтервалах, так і у період спостереження в цілому.

У роботах [1] та [38] фрактальний аналіз був використаний для аналізу динаміки частоти випромінювання лазера. Із точки зору фізики динамічних систем лазер являє собою відкриту НДС із функцією самоорганізації, а його частота, поряд з потужністю та поляризацією, формують низку ДЗ. Автором була запропонована фрактальна шкала оцінювання результатів вимірювань із

реперними точками $D_H = 1$, $D_H = 1,5$, $D_H = 2$., що розділяють різні характери динаміки.

При $D_H = 1$, результат вимірювання трактується як строго детермінована поведінка системи. При $D_H = 2$ система веде себе регулярним чином, але розкид вимірюваних значень дуже великий, що не дозволяє використовувати методи обробки результатів вимірювань. При $D_H = 1,5$ фазовий портрет системи являє собою класичний аттрактор (рис. 1.1), властивий звичайному броунівському руху, що не виявляє персистентності з незалежними (марківськими) приростами. Процес є випадковим. Для аналізу значень характеристик таких систем застосовуються статистичні методи.

У разі якщо $1 < D_H < 1,5$ або $1,5 < D_H < 2$ досліджуваний процес є немарківським, хаотичним. Якщо $1 < D_H < 1,5$ процес представляється персистентним і наближається до детермінованого. Персистентність поширюється на нескінченно довгий термін, а її мірою служить параметр Херста. При $1,5 < D_H < 2$ процес представляється антиперсистентним і має випадковий (шумовий) розкид, що перевищує величину повільних змін. Антиперсистентність характеризується прагненням повернення до вихідної точки.

Знання однієї характеристики часового ряду результату вимірювання (фрактальної розмірності) дозволяє оцінити характер поведінки об'єкта дослідження та обрати відповідний математичних апарат обробки результатів вимірювання.

Значення результатів робіт [1] і [38], виконаних автором дисертації із колегами, полягає в тому, що в ній був запропонований новий підхід до стабілізації параметрів лазера. Лазер був розглянутий як відкрита НДС, динаміка його ДЗ (частоти) досліджувалася за допомогою фрактального аналізу. Такий підхід дозволяє класифікувати динаміку ДЗ і обрати найбільш приємний спосіб стабілізації ДЗ, що є актуальним науковим завданням.

1.4.5 Час передбачення

Однією з основних і найстаріших задач аналізу систем і часових рядів результатів вимірювання ДЗ є завдання прогнозу їх динаміки. Це завдання з'явилося задовго до народження теорії динамічних систем як спроба вирішення проблеми передбачення в теорії випадкових процесів. Її мета — за даними спостереження за системою передбачити майбутні значення вимірюваних ДЗ, тобто прогнозування стану системи на певному відрізку часу.

Існуючі методи прогнозу можна розділити на дві групи: глобальні та локальні. Класифікація методів виконується за областю визначення параметрів апроксимуючої функції f , яка рекурентно встановлює наступне значення часового ряду a_n за кількома попередніми $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p}$ [90]:

$$a_n = f(T_{for}, n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p}), \quad (1.16)$$

де n, p — цілі числа.

У глобальних методах на основі статистичного аналізу передбачалося використовувати авторегресії, ковзне середнє та ін. До локальних методів належать: сингулярний спектральний аналіз (ССА), локальна апроксимація (ЛА) та їх комбінація (ССА + ЛА). Метод ССА використовується для визначення основних складових часового ряду та подавлення шуму, на його основі розроблено оригінальні алгоритми прогнозу. Метод ЛА, який застосовується при прогнозуванні нерегулярних рядів, не вимагає апріорної інформації про систему, яка породила часовий ряд, і не вимагає побудови моделі динаміки досліджуваного ряду. Дослідження НДС показали, що для реалізації завдання прогнозу довжина часового ряду повинна бути досить великою, а шумова складова має прагнути до нульових значень. Комбінований ССА + ЛА метод дозволяє подолати ці труднощі та досліджувати зашумлені ряди кінцевої тривалості [64].

Прогнозування динаміки НДС є складним завданням. У деяких випадках метою прогнозу є не значення окремої ДЗ в певний момент часу, а сама динаміка

ДЗ, її тренд. Для цього застосовуються описані вище фрактальний аналіз (1.13)–(1.15) та фрактальні шкали.

У роботі [91] М. Борн зазначив, що довгострокова непередбачуваність органічно властива не тільки квантовій, але й класичній механіці, хоча і має іншу, ніж квантову природу, пов'язану з неминучими похибками вимірювань. Відрізок часу, на якому можливо коректне прогнозування динаміки системи називається часом або горизонтом передбачення (або часом прогнозування) T_{for} .

Час передбачення залежить від ступеня детермінування динаміки НДС, (найтриваліший для детермінованої системи і прагне до нуля для випадкових і хаотичних систем), а також експериментальних, вимірювальних і обчислювальних можливостей. Можна виділити три причини, які обмежують час передбачення спостережуваного процесу:

- перша — спостережуваний процес завжди відрізняється від реального процесу, так як показання вимірювальних приладів завжди вносять нелінійні, частотні та шумові спотворення;
- друга — реальні процеси завжди схильні до різних впливів, які мають, як флуктуаційні компоненти і можуть бути описані статистичними чином, так і всілякі невраховані та невідомі впливи, які, можливо, можуть бути описані як детерміновані. Фактично це означає, що такі компоненти зовнішніх впливів можуть бути переведені в компоненти моделі;
- третя —, це неточність самого модельного оператора (1.2) (математичного опису спостережуваного процесу). Ця неточність може виражатися як в апіорній невизначеності параметрів (параметрична невизначеність), так і в структурі самого модельного рівняння (структурна невизначеність). Зазначені похибки неминуче супроводжують будь-якій схемі ідеалізованого опису реальних процесів. У науковій літературі похибки такого роду іноді називають «шумами незнання» [93].

Головна риса хаотичних НДС полягає в тому, що мале обурення початкових умов для динамічної змінної або ж мала зміна параметрів динамічної системи призводить до непередбачуваності результуючого руху за кінцевий час, яке

Дж. Лайтхілла [91] вдало назвав «горизонтом передбачення». Прогноз значень НДС обмежений в часі. Час передбачення T_{for} пов'язаний із K -ентропією Колмогорова-Сіная (1.10) виразом:

$$T_{for}(K) \sim \frac{1}{K} \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad (1.17)$$

де ε — відносна похибка даних про значення ДЗ.

Також час передбачення T_{for} пов'язаний із показником Ляпунова λ (1.7) як:

$$T_{for}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad (1.18)$$

де λ_{\max} — максимальний показник Ляпунова.

На практиці значення часу передбачення (1.17), (1.18) часто розраховують за спрощеними формулами через ентропію Колмогорова (1.10) і максимальний показник Ляпунова (1.8):

$$T_{for}(K) \sim \frac{1}{K}, \quad T_{for}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda_{\max}}. \quad (1.19)$$

Поняття «час передбачення» має важливе значення для складання рівняння вимірювання (модельного рівняння) ДЗ НДС. В рамках теоретичної моделі вимірювань в НДС час передбачення розглядається як критерій коректності рівняння вимірювання. Крім того, в експериментальних моделях дослідження фізичних та біофізичних НДС цей показник пропонується використовувати як критерій дискретизації часу вимірювання значень ДЗ лазерів [56] та організму [54].

1.5 Види динаміки нелінійних динамічних систем

Дисипативні НДС мають ряд особливих властивостей, які слід проаналізувати для розроблення принципів вимірювання та дослідження, побудови теоретичної моделі вимірювань в НДС. До таких властивостей, відповідно до робіт О. Лоскутова [97] та ін., можна віднести:

- нестійкість фазових траєкторій до малих збурень;
- чутливість значень ДЗ до зміни початкових умов;
- ергодичність розподілу значень ДЗ;
- фрактальність фазового портрета та часових рядів значень ДЗ;
- формування в фазовому просторі дивного аттрактора.

Всі ці властивості є проявом хаотичності динаміки НДС та мають бути враховані під час проведення вимірювання величин із хаотичною динамікою.

1.5.1 Детермінізм, випадковість, хаотичність

Динаміку будь-якої системи, яка описується виразом (1.2), можна охарактеризувати або як детерміновану, випадкову або хаотичну. Тобто значення ДЗ змінюються детермінованим, випадковим або хаотичним чином. При цьому, якщо детермінізм розглядається як взаємозв'язок та взаємна визначеність всіх явищ і процесів [94], а, отже, мається на увазі можливість однозначного математичного опису минулих та майбутніх станів системи, то єдиної думки про те, чим відрізняються хаотичні процеси від випадкових, немає [85]. У деяких джерелах до сих пір ці поняття ототожнюються. Така ситуація обумовлена тим, що відсутнє канонізоване математичне визначення терміну «хаос». Існуючі визначення носять, скоріше, описовий характер [60], при якому про хаотичність динаміці судять по прояву її властивостей.

Дати визначення хаотичного процесу зручно, порівнюючи його з випадковим процесом. Існує кілька точок зору на випадковість, кожна з яких виступає як свого роду угода між науковцями [94]. У більшості випадків різні уявлення про випадковість якісно узгоджуються одне із одним, але іноді виявляється, що даний

процес (або явище) виглядає випадковим з однієї точки зору та не випадковим із іншого. Таке виявляється можливим тому, що різні угоди розглядають явище як би в різних площинах.

У теоретико-множинному підході, поняття випадковості пов'язується з можливістю наділити цю величину ймовірнісною мірою, а саме — величина називається випадковою, якщо вона задана своїми ймовірнісними розподілами. До цього зводиться визначення випадкової величини, сформульоване мовою σ -алгебр і вимірних функцій. «Відсутність закономірностей» відображується ступенем розкиду даної величини X . Детермінованим величинам відповідають розподіли, що можуть бути описані δ -функціями [95].

Відомий також критерій «суцільного спектра», який протиставляє випадковість, яку трактують як процес із суцільним спектром, періодичним процесам, яким відповідає дискретний спектр.

Однак, крім випадкових і детермінованих величин існують ще й невизначені величини, для яких ймовірнісні міри невідомі або не визначені з достатньою експериментальною надійністю. Тобто дослідники стикалися з процесами, що за властивостями займають проміжне положення між детермінованими та випадковими. Це частково детерміновані, хаотичні процеси. Їх розподіл не описується ні канонічними законами, ні δ -функціями, спектр має фрактальну структуру, фазовий портрет являє собою дивний аттрактор. Це одні з декількох топологічних характеристик хаотичного процесу.

Питанню класифікації процесів приділено чимало публікацій. Особливе місце серед яких займають роботи, присвячені динаміці НДС. Причина полягає в тому, що реальна дисипативна НДС може входити в різні динамічні режими. Детермінізм може переходити в хаос і навпаки. Існує кілька якісних та кількісних способів класифікації процесів. Так, як було показано вище, у роботі [75] пропонується фрактальна шкала класифікації процесів. У роботі [93] запропонований підхід, заснований на оцінюванні часу передбачення (1.19). Для оцінювання динаміки системи вводиться нормована кореляційна функції виду:

$$D(t) = \frac{\langle y(t)z(t) \rangle}{\sqrt{\langle y^2(t) \rangle \langle z^2(t) \rangle}}, \quad (1.29)$$

де $y(t)$, $z(t)$ — результат спостереження (вимірювання) та результат моделювання процесу відповідно.

У рамках запропонованого кореляційного підходу спостережуваний процес виступає як детермінований (передбачуваний) при $|1 - D| \ll 1$; як випадковий (непередбачуваний) при $|D| \ll 1$ і як частково детермінований (частково передбачуваний) або хаотичний процес при $0 < |D| \ll 1$. Час, протягом якого величина D перевищує деяке значення, виступає як час детермінованої поведінки τ_{det} (рис. 1.5). Цей час може бути знайдено з рівняння: $D(\tau_{det}) = 1/2$.

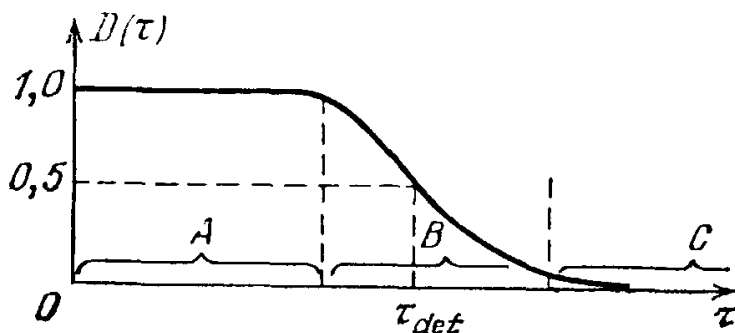


Рис. 1.5. Залежність ступеня детермінованості від часу.

A — область повністю детермінованої поведінки, B — область частково детермінованої поведінки, C — область стохастичної поведінки.

Виконати класифікацію процесу можна, виконавши аналіз фазового портрета системи та визначивши показник Ляпунова. Згідно з (1.19):

- для детермінованого процесу, $\lambda = 0$, час передбачення $T_{for} \rightarrow \infty$;
- для хаотичного (частково детермінованого) процесу $\lambda \neq 0$, час передбачення має обмежене значення $T_{for} \sim 1/\lambda_{max}$;

- для випадкового процесу $\lambda \rightarrow \infty$ час передбачення прагне до нуля $T_{for} \rightarrow 0$ (рис. 1.5).

З розглянутих трьох способів класифікації досліджуваного процесу, на думку автора, найпростішим є фрактальний метод (1.13) — (1.15). Його перевага полягає в тому, що досліджуючи часовий ряд результатів вимірювання окремої ДЗ виду $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ можна зробити висновок про характер динаміки без моделювання процесу, побудови фазового портрету та пошуку показників Ляпунова або кореляційної функції.

1.5.2 Теорія хаосу як ступень до пізнання реальних процесів і систем

У сімдесятих–вісімдесятих роках ХХ століття вчені були приголомшені повідомленнями про те, що в природі можливі події, які демонструють у деякому роді двоїтим характером. З одного боку, ці події (наприклад, динамічні процеси) підкоряються строгим законам, а з іншого боку, вони не чужі випадковості та непередбачуваності. Для позначення абсолютно нової групи явищ було обрано термін «хаос».

Визначимося з термінологією. У літературі, поряд із терміном «хаос», зустрічаються терміни: «динамічний хаос», «математичний хаос» та «детермінований хаос». Іноді ці поняття ототожнюються, але є важливі нюанси. У роботі Г. Хакена [61] дано таке визначення: «хаос — це нерегулярний рух, що описується детермінованими рівняннями». Тобто це явище, при якому поведінка НДС виглядає випадковою, незважаючи на те, що вона визначається детерміністськими законами. Розглядається також «математичний» хаос, тобто — хаос, не схильний до дії шумів, який описується детермінованим рівнянням, у якому немає ні випадкових сил, ні випадкових коефіцієнтів. Саме ця обставина й породила термін «детермінований хаос» [93].

Детермінований хаос є стереотипною поведінкою багатьох НДС. Наприклад, вихори, що виникають при конвекції в рідині, підпадають під дію законів хаотичної динаміки. При певних хімічних реакціях (реакція Білоусова-Жаботинського) виникають просторові або часові макроскопічні структури —

наприклад періодичні переходи від синього кольору до червоного і т. д. Переходи відбуваються через нерівні проміжки часу. Спочатку спостерігаєму нерегулярність переходів помилково було прийнято відносити на рахунок недостатньо ретельно підготовлених реагентів. Але поширення теорії динамічного хаосу дозволило класифікувати такі реакції як хаотичні.

Існують експерименти, які підтверджують можливість турбулентності лазерного світла. Хвильові цуги, що випускаються лазером, абсолютно хаотичні.

Існують популяції комах, чисельність яких із року в рік коливається зовсім нерівномірно. Тепер створено моделі, за допомогою яких ці коливання можна стало обробити математично.

Фізиками, зайнятими вивченням плазми, відкрито понад сотні різних типів нестійкості, наприклад, нестійкості, за яких у плазмі раптово виникають хвилі, або такі нестійкості, при яких утворюються абсолютно нові конфігурації потоків [61].

Професором Каліфорнійського університету Л. Чуа у 1983 році був запропонований найпростіший електричний ланцюг (ланцюг Чуа), що демонструє режими хаотичних коливань. Ланцюг складається з двох конденсаторів, однієї котушки індуктивності, лінійного резистора та нелінійного резистора з негативним опором (діод Чуа).

Свідченням того, що хаос є не результатом зовнішніх впливів на НДС, а природою системи є приклади народження хаосу в ідеальних умовах математичного змодельованих систем. Ще в кінці XIX століття Ж. А. Пуанкаре, займаючись обчисленнями в області небесної механіки, відкрив можливість хаотичного руху [77]. Вивчаючи модель зоряної системи, що має два сонця та всього одну планету (задача про взаємодію трьох тіл), Пуанкаре виявив, що така планета може рухатися по немислимо складній траєкторії, в чомусь схожою з траєкторією футбольного м'яча, прискореного від випадкових ударів. Рух планети відбувається згідно як не можна більш суворим законам механіки, проте виглядає при цьому абсолютно хаотичним, що є проявом динамічного хаосу. І таких

прикладів безліч, від кліматичних та соціальних процесів до процесів, що відбуваються в організмі людини та на фінансових ринках.

Таким чином, теорія хаосу, як математичний і філософський апарат, що описує властивості та процеси в НДС, схильні, при певних умовах, до явища, відомого як «хаос», є міждисциплінарною теорією, що дозволяє наблизитися до розкриття причинно-наслідкових зв'язків складних явищ, що відбуваються в реальних НДС.

1.6 Умови виникнення та критерії хаотичної динаміки

Розглянемо умови виникнення хаотичної динаміки і основні властивості хаосу. Умови виникнення хаосу:

- система повинна бути нелінійною з кількістю ДЗ $n \geq 3$;
- система повинна бути глобально стійкою, але мати хоча б одну нестійку точку рівноваги.

Динаміку НДС можна класифікувати як хаотичну, якщо вона має такі властивості як:

- чутливість до початкових умов;
- топологічне змішування;
- щільне розташування періодичних орбіт в фазовому просторі;
- спектр має фрактальну структуру;
- фазовий портрет являє собою дивний аттрактор.

1.6.1 Глобальна стійкість, як умова виникнення хаотичної динаміки.

Розглянемо умови виникнення хаосу. Слід розділяти безперервні та дискретні НДС. Лінійні системи ніколи не бувають хаотичними. Для того, щоб динамічна система була хаотичною, вона повинна бути нелінійною. Це положення є наслідком теореми Пуанкаре-Бендіксона [77], яка описує можливі типи граничної поведінки траєкторії векторного поля на площині або сфері. Теорема стверджує, що гранична поведінка траєкторій в цьому випадку регулярна, і не

може бути хаотичною (неможлива наявність усюди щільних орбіт). Тому безперервна динамічна система на площині не може бути хаотичною. Серед безперервних систем хаотичну поведінку мають тільки неплоскі просторові системи. Однак дискретна динамічна система на якійсь стадії може проявити хаотичну поведінку навіть в одновимірному або двовимірному просторі. Ці рухи являють каскади дискретних відображень і описуються нелінійними різницевиими рівняннями першого і більш високих порядків [96].

Другим умова виникнення хаосу це глобальна стійкість і наявність нестійких точок. Розглянемо питання стійкості НДС. Термін «стійкість» має безліч визначень. У широкому сенсі слова під стійкістю розуміють здатність системи зберігати поточний стан всупереч впливу зовнішніх впливів [106]. У механіці стійкість характеризується відповіддю на збудження системи, що знаходиться в рівновазі. Її відповідь спрямована на протидію збудження з метою збереження рівноваги (принцип Ле-Шательє) [107]. Таким чином демонструється функція самоорганізації системи.

До відкриття детермінованого хаосу було відомо три стійких стани динамічної системи: стан рівноваги (аттрактор — точка), стійкий періодичний рух (аттрактор — граничний цикл) і стійкий квазіперіодичний рух (аттрактор — n -мірний тор). При цьому показник Ляпунова (1.19) або дорівнює нулю, або негативний. Із дослідженням хаосу було відкрито четвертий стійкий стан НДС, що характеризується дивним аттрактором.

Відомі кілька визначень стійкості. Для того, що б коректно описати НДС за допомогою диференціальних рівнянь (1.3) система повинна бути стійка за визначенням Ляпунова. Якщо дві, довільно обрані, траєкторії фазового портрета системи залишаються близькими в будь-який інший час після цього часу, то траєкторії стійкі за Ляпуновим: для будь-яких точок $y_i(t)$ та $y_{i+1}(t)$ двох близьких траєкторій фазового простору в будь-який момент часу виконується умова:

$$|y_i(t) - y_{i+1}(t)| \leq \varepsilon, \quad (1.30)$$

де ε — обране мале значення [108].

У цьому випадку НДС може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь виду (1.3), коректність яких забезпечена в будь-який момент часу.

Виникає питання про стійкість за Ляпуновим дисипативних НДС, які демонструють хаотичну динаміку. Одна з яскравих властивостей хаосу — експоненціальне розбігання фазових траєкторій (рис. 1.6), внаслідок чого в певний момент часу умова постійної їх близькості (1.30) порушується. Система стає нестійкою за Ляпуновим.

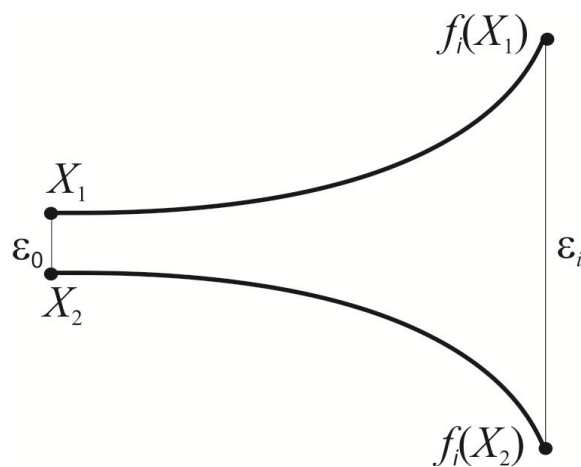


Рис. 1.6. Експоненціальне розбігання близьких траєкторій:

ϵ_0, ϵ_i — відстані між точками X_1, X_2 близьких траєкторій в моменти часу t_0 і t_i відповідно; $f_i(X_1), f_i(X_2)$ — відображення точок X_1, X_2 відповідно в момент часу t_i .

У теоріях динамічних систем, поряд із стійкістю за Ляпуновим, виділяють стійкість за Лагранжем [109], яка вимагає, щоб всі значення y_i вимірюваної ДЗ X не виходили за межі певної області. При цьому мова йде про стійку поведінку однієї з ДЗ X_i НДС (1.1). Якщо фазовий портрет, що описує динаміку ДЗ, X_i розташовується в обмеженій області простору, то кажуть, що система стійка за Лагранжем по ДЗ X_i . У разі хаотичної дисипативної НДС її фазовий портрет є дивний (хаотичний) аттрактор — множина, до якої притягуються траєкторії з

деякої околиці цієї множини (басейну аттрактора). Наявність дивного аттрактора дозволяє говорити про стійкість НДС за Лагранжем.

Дисипативна НДС може мати найрізноманітнішу динаміку. Якщо НДС залежить від параметра (температура, число Рейнольдса), то його зміна призводить до плавної зміни динаміки НДС. При переході параметра через деяке критичне значення динаміка системи може змінюватися різко. Наприклад, періодичне рух може стати квазіперіодичним. Значення параметра при якому відбувається якісна перебудова динаміки називається біфуркаційним значенням [109].

Спочатку стійка НДС, в процесі своєї еволюції, досягає критичного стану, що відповідає порогу стійкості структури, починає осилювати, а флуктуації, які виникають в ній, призводять до самоорганізації нової, більш стійкою структури на даному ієрархічному рівні еволюції. Наявність нестійкої точки (точки біфуркації) є умовою переходу до хаосу.

Як приклад виникнення хаосу в НДС можна навести динаміку популяції в замкнутому середовищі. Модель запропонована бельгійським математиком П. Ферхюльстом у 1845 р. Відносна (нормована) чисельність особин X в $(n + 1)$ -й рік пропорційна чисельності в попередній рік, а також вільної частини життєвого простору, яка пропорційна $(1 - x_n)$:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.31)$$

де r — позитивний параметр, що характеризує швидкість розмноження популяції (залежить від плодючості, реальної площі для життя і т. д.) [95].

Крім фазового простору НДС може бути описана за допомогою простору параметрів (1.31). Таке відображення дозволяє візуалізувати точки біфуркації. На рис. 1.7 наведено зони детермінованої, випадкової та хаотичної динаміки, а також нестійкі точки рівноваги НДС. Кожен вертикальний сектор показує аттрактор певного значення r (1.31). Діаграма відображає подвоєння періоду, коли r збільшується, що в кінцевому підсумку спричиняє хаос.

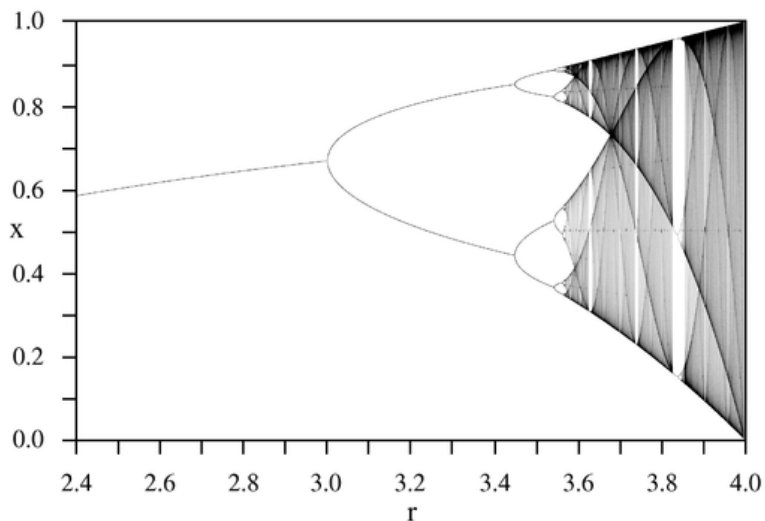


Рис. 1.7. Біфуркаційна діаграма динаміки еволюції НДС [92].

На рис. 1.8 наведено приклад переходу до хаотичної динаміці через послідовність біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу в системі Ресслера (сценарій Фейгенбаума), яка описує динаміку абстрактної хімічної реакції [99] виду:

$$\left. \begin{aligned} x' &= -(y + z), \\ y' &= x + \frac{y}{5}, \\ z' &= \frac{1}{5} + z(x - r) \end{aligned} \right\}. \quad (1.32)$$

де x, y, z — абстрактні змінні абстрактної хімічної реакції.

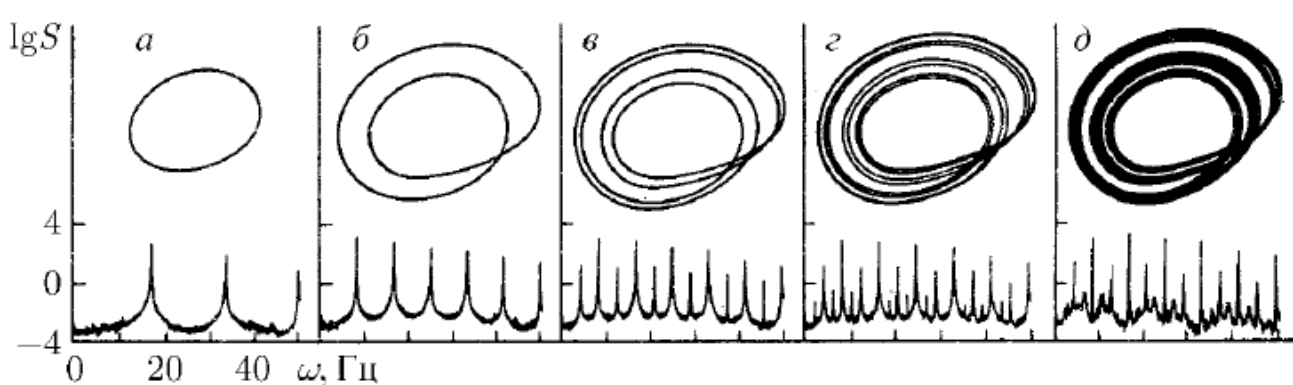


Рис. 1.8. Перехід системи Ресслера до хаотичної динаміці через послідовність

біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу,

a — $r=2,6$; $б$ — $r=3,5$; $в$ — $r=4,1$; $г$ — $r=4,18$; $д$ — $r=4,23$.

При значеннях параметра $2,6 \leq r \leq 4,2$ рівняння Ресслера (1.32) мають стійкі граничні цикли. При цих значеннях параметрів період і форма граничного циклу здійснюють послідовність подвоєння періоду. Відразу ж за точкою $r = 4,2$ виникає явище хаотичного аттрактора. Чітко визначені лінії граничних циклів розпливаються та заповнюють фазовий простір безліччю нескінченних траєкторій, що демонструє властивості фрактала. Система переходить в режим хаотичної динаміки.

1.6.2 Критерії хаотичності динаміки

Як уже згадувалося, на сьогоднішній день відсутня чітке математичне визначення хаосу. Але, існує ряд критеріїв хаотичності динаміки дисипативних НДС. До таких характеристик слід віднести:

- чутливість до початкових умов;
- топологічний змішування;
- щільне розташування періодичних траєкторій та ін.

Чутливість НДС до початкових умов означає, що всі точки траєкторій в фазовому просторі, спочатку близькі, в майбутньому значно віддаляються одна від одної. Таким чином, навіть невелика зміна поточної траєкторії може призвести до значної зміни в її майбутній поведінці (рис. 1.2, рис. 1.7). Ця властивість, відома як «ефект метелика», має на увазі чутливість до первинних умов.

Топологічне змішування (або властивість транзитивності) при хаотичній динаміці означає таку схему розширення системи, за якій одна її область на якійсь стадії розширення накладається на будь-яку іншу область. Згідно [100] відображення f називається транзитивним, якщо для будь-яких двох відкритих множин U та V знайдеться таке ціле число n , що $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ (рис. 1.9).

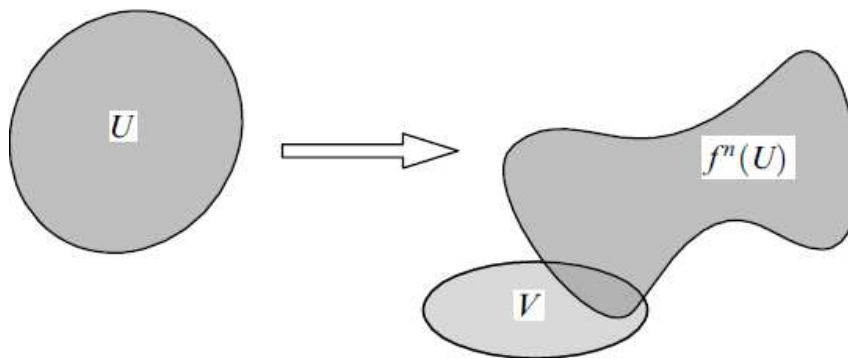


Рис. 1.9. Топологічне змішування.

Властивість щільності періодичних траєкторій означає, що в околицях будь-якої точки метричного простору існує, принаймні, одна (отже, нескінченно багато) періодичних траєкторій системи.

До перелічених трьох властивостей хаосу можна додати четверту — перетин Пуанкаре (площина, яка перетинає фазовий портрет НДС) являє собою сукупність точок, розташованих хаотично. На рис. 1.10 а зображено перетин Пуанкаре для регулярної динаміки (в околиці граничного циклу), а на рис. 1.10 б — перетин Пуанкаре хаотичної динаміки [64].

Зауважимо, що для класифікації динамічного хаосу за даними (топологічним) ознаками необхідні побудова та дослідження фазового портрета НДС. Раніше були описані й інші способи, наприклад, класифікація за показником Ляпунова (1.8), ентропією (1.11), фрактальної розмірністю (1.13) або часом передбачення (1.29).

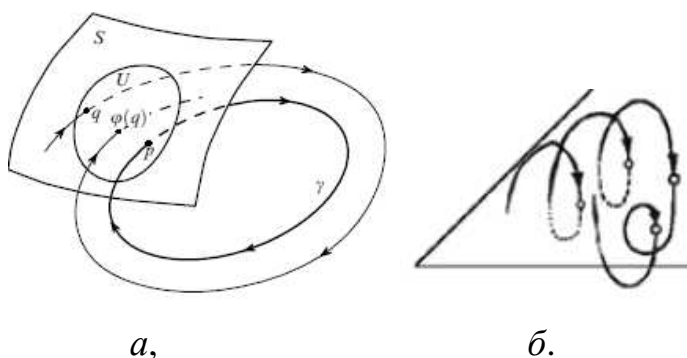


Рис. 1.10. Перетин Пуанкаре.

Для дослідження властивостей НДС широко використовується підхід, заснований на аналізі сигналів системи. Такий підхід особливо актуальний у випадку, коли математично описати досліджувані процеси практично неможливо, але ДЗ доступні для вимірювання та дослідження. Подібна ситуація відноситься до дисипативних НДС, описати які математично практично неможливо.

Аналіз результатів вимірювань ДЗ дозволяє виділити ще три критерії хаотичності динаміки:

- автокореляційна функція швидко спадає;
- в спектрі потужності спостерігається широкосмуговий шум на низьких частотах;
- сигнал окремої ДЗ «виглядає випадковим».

Автокореляційна функція $g(\tau)$ є ефективною характеристикою динаміки системи. За періодичної або квазіперіодичної динаміці ДЗ, $X(t)$ функція $g(\tau)$ буде періодичною або квазіперіодичною відповідно. За хаотичною динамікою ДЗ $g(\tau) \rightarrow 0$.

Якщо при вимірюванні значень ДЗ $X(t)$ протягом інтервалу часу $T \rightarrow \infty$ з кроком $\Delta t = \tau$ отриманий часовий ряд, $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ то автокореляційна функція $g(\tau)$ визначається виразом:

$$g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt. \quad (1.33)$$

Характер спектра потужності (спектральної щільності) є одним із найпростіших, але надійних, критеріїв аналізу динаміки. Вимірявши або розрахувавши спектральну щільність, можна визначити характер динаміки. Якщо НДС демонструє періодичну динаміку з періодом T_0 , то спектр вимірюваних значень буде дискретним, складатися з вузьких ліній, які відповідають частоті $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Якщо динаміка НДС квазіперіодична з непомірними частотами $\omega_1, \dots, \omega_k$, то спектр складається з k ліній, які відповідають цим частотам і

кратним їм гармонікам. У разі хаотичної динаміки спектр суцільний. Приклади спектра в разі періодичної, квазіперіодичної та хаотичної динаміки ДЗ яскраво продемонстровано на рис. 1.8. Вираз для спектральної щільності $S(\omega)$ виглядає так:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (1.34)$$

Умова, коли сигнал окремої ДЗ «виглядає випадковим» може бути продемонстрована на діаграмі результатів вимірювання ДЗ. На рис. 1.11 наведено приклад сигналу (а) та спектральної щільності (б) реакції Білоусова-Жаботинського в хаотичному режимі [97].

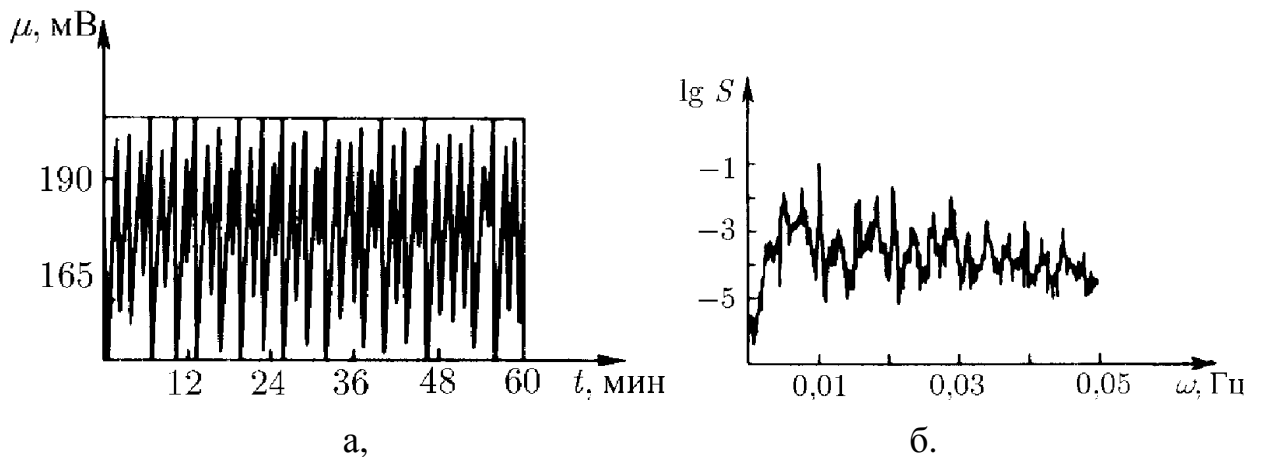


Рис 1.11. Хаотична динаміка реакції Білоусова-Жаботинського.

1.7 Еволюція відкритих систем

Розглянуті в роботі фізичні та біофізичні НДС мають функцію еволюції. Розглянемо визначення цього терміна та види еволюційних процесів.

Еволюція — це процес зміни, розвитку в природі та суспільстві. Явище еволюції зустрічається і в НДС. В фізичних замкнених системах еволюція в часі

призводить до рівноважного стану, якому відповідає максимальне значення ентропії і максимальний ступінь хаотичності.

У відкритих системах виділяють два класи еволюційних процесів:

- часова еволюція до нерівноважного стаціонарного стану;
- еволюція через послідовність нерівноважних стаціонарних станів внаслідок зміни керуючих параметрів [102].

При цьому еволюція системи може являти собою самоорганізацію, з появою більш складних і досконалих станів, а може проявлятися як деградація, яка веде до руйнування системи.

При дослідженні НДС часто потрібно відповісти на питання про те, яким шляхом йде еволюція НДС (деградація або самоорганізація). Відповідь є складним завданням. Традиційно вважається, що самоорганізація, яка призводить до зменшення ентропії, розглядається зі знаком «плюс», а деградація, яка веде до її зростання, зі знаком «мінус». Але далеко не завжди зменшення ступеня хаотичності означає самоорганізацію, а її збільшення — деградацію. Реальні НДС, наприклад біологічні організми, існують тільки при деякій нормі хаотичності. Для отримання обґрунтованих даних про еволюцію систем, повинні бути встановлені «норми хаотичності» та відхилення від норми під впливом зовнішніх впливів. Для цих цілей був запропонований критерій «S-теорема» [104].

1.7.1 Критерій «S-теорема»

У роботі [103] Ю. Л. Клімонтович запропонував універсальний критерій оцінювання хаотичної динаміки ШДС — «S-теорема». Цей критерій отримав назву за аналогією з «H-теоремою» термодинаміки. Основним законом термодинаміки є закон зростання ентропії. При еволюції ізольованої системи до рівноважного стану ентропія монотонно зростає та залишається незмінною при досягненні рівноважного стану. Цей результат, було встановлено Л. Больцманом на прикладі розрідженого газу. Він носить назву «H-теореми».

Ю. Л. Клімонтович показав, що для процесів самоорганізації діє закон зменшення ентропії (S-теорема Клімонтовіча). Суть закону зводиться до

наступного: якщо за початок відліку ступеня хаотичності прийняти «рівноважний стан», що відповідає нульовим значенням керуючих параметрів, то в міру віддалення від рівноважного стану внаслідок зміни керуючого параметра значення ентропії, відносні до заданого значення середньої енергії, зменшуються. Теорема була запропонована для оцінювання відносної міри впорядкованості за експериментальними даними про часову еволюцію відкритих систем. Літера «S» в назві означає «selforganization» (самоорганізація).

Розглянемо відкриту НДС, що еволюціонує. При зміні керуючого параметра r система приймає стаціонарний стан (I) при $r=r_0$ або стаціонарний стан (II) при $r=r_1$. Більш хаотичний з двох станів назвемо «стан фізичного хаосу». Він, як правило, нерівноважний та більш впорядкований, ніж рівноважний стан. Нехай: X — вимірювана ДЗ; $f_0, f_1: S_0, S_1$ — функції розподілу та ентропії відповідно виділених станів; H_{eff} — ефективна функція Гамільтона (ефективна енергія) $H_{eff} = -\ln f_0$.

Згідно S-теоремі за умови рівності середньої функції Гамільтона, тобто для станів $\langle H_{eff} \rangle = const$ (I) і (II) справедлива нерівність:

$$S_0 - S_1 = -\int \ln [f_1(X) / f_0(X)] dX \geq 0. \quad (1.35)$$

Формула (1.35) дає кількісну оцінку відносної міри впорядкованості виділених станів. Із виразу (1.35) випливає, що ступінь самоорганізації складних НДС далека від стану рівноваги та її залежність від керуючих параметрів визначається значенням ентропії, обчисленої адекватно властивостям і кінетиці цих систем. Ентропія при самоорганізації таких систем завжди зменшується [104].

S-теорема використовується для дослідження та діагностики НДС, наприклад біологічних, є інструментом діагностики стану пацієнтів [110].

1.7.2 Самоорганізація і «норма хаотичності»

Згідно з виразом (1.35) самоорганізація, це процес, що супроводжується зменшенням ентропії системи. Як приклади самоорганізації НДС можна привести генератор Ван дер Поля, в якому в міру збільшення зворотного зв'язку відбувається перехід в режим розвиненої генерації та процес переходу від ламінарної течії в трубі до турбулентної зі збільшенням перепаду тиску. У першому прикладі в якості початку процесу самоорганізації розглядається рівноважний стан, який характеризується тепловими коливаннями в електричному контурі при відсутності зворотного зв'язку. У другому прикладі за початок відліку приймається рівноважний стан рідини при нульовому перепаді тиску. В цьому випадку гідродинамічний тиск відсутній та має місце тільки хаотичний рух молекул. Як у в першому, так і у другому прикладі початковий стан є найбільш хаотичним у порівнянні з наступним. Згідно S-теоремі відбувається процес самоорганізації.

Однак не для всіх НДС перехід від більш хаотичного до менш хаотичного стану є самоорганізацією. Для деяких систем це — деградація. Це твердження справедливе для широкого кола біологічних НДС. Для живих організмів та біопопуляцій ні стан чистого хаосу (термодинамічна рівновага), ні стан повного порядку неможливі. Для таких систем вводиться поняття «норми хаотичності». У роботі [104] це поняття ототожнюється із поняттям «здоров'я». Норма хаотичності визначається в цьому випадку емпіричним шляхом.

У випадку біологічних НДС значення «норми хаотичності» індивідуальне для кожної окремої системи (організму). Дослідження, виконані В. С. Аніщенко [110], показали, що відгук систем на однакові зовнішні обурення різні. Так, зовнішній вплив (стрес) спричиняє збільшенню ступеня хаотичності параметрів організму жінок, але є причиною впорядкованості динаміки показників чоловіків.

Таким чином, для біологічних НДС поняття «самоорганізація» та «деградація» не мають однозначного зв'язку зі збільшенням або зменшенням ступеня хаотичності. Тому особливе, фундаментальне значення приймає термін

«норма хаотичності», яке для біологічних НДС може встановлюватися за емпіричними даними на основі критерію «S-теорема» (1.35).

Питання самоорганізації НДС є одним із складних питань теорій систем. Єдиної відповіді на питання про те, що це таке, немає. Так, спираючись на термін «дисипативні структури», введений І. Пригожиним, самоорганізація являє собою мимовільне виникнення структур в дисипативних відкритих НДС. У роботі Г. Хакена [61] самоорганізація розглядається як процес виникнення структур при колективних взаємодіях (синергетичний ефект). При цьому базовими рівняннями синергетики, що описують процес самоорганізації, є нелінійні дисипативні рівняння, наприклад, часові рівняння Гінебурга-Ландау [111]. У роботі [104] Ю. Л. Климонтович запропонував вважати процес самоорганізації як процес повернення системи до своєї «норми хаотичності».

Таким чином, відмінності в процесах самоорганізації для біологічних, фізичних і хімічних НДС свідчать про обґрунтованість існування, як мінімум, двох визначень терміна «самоорганізації».

1.8 Завдання вимірювань і досліджень нелінійних динамічних систем

У роботі [112] нобелівський лауреат, академік В. Л. Гінзбург, в списку «особливо важливих і цікавих проблем», зазначив нелінійну фізику, включаючи турбулентність, солітони, хаос і дивні аттрактори. Він писав: «...Увага до нелінійної фізики все посилюється та посилюється. Значною мірою це пов'язано з тим, що використання сучасної обчислювальної техніки дозволяє аналізувати завдання, про дослідження яких раніше можна було тільки мріяти».

При цьому всі з перерахованих об'єктів дослідження мають практичне застосування сьогодні або матимуть у найближчому майбутньому. Це означає, що при дослідженні та роботі з ними виникає задача вимірювання їх параметрів. При цьому методи та моделі вимірювання та дослідження нелінійних процесів повинні в максимальній мірі відповідати самим процесам. Тому поряд із розвитком

нелінійної фізики повинні розвиватися теорія і інструменти вимірювання та дослідження нелінійних динамічних систем.

Розглянемо приклади реальних НДС фізичної, хімічної, біологічної та соціальної природи зі складною, нелінійною динамікою ДЗ. Продемонструємо, що для вимірювання та аналізу значень ДЗ повинні бути використані нові підходи і моделі.

1.8.1 Фізичні, біологічні та нелінійні динамічні системи іншої природи

Аналіз наукової періодики показує, що все більше об'єктів навколишнього світу при дослідженні розглядаються як НДС. Їх динаміка демонструє загальні властивості, такі як самоорганізація та хаотичність і до їх досліджень застосовуються загальні, універсальні методи та інструменти.

У роботі [113], присвяченій синергетичним ефектам в різних дисипативних НДС, проводиться аналогія між динамікою ДЗ процесів, що відбуваються в лазерах, гідродинаміці, нелінійній оптиці, моделях хімічних реакцій, біологічних організмах і в біопопуляціях та соціумі. При цьому НДС розглядаються як безперервно розподілені системи з флуктуаціями. ДЗ, що характеризують процеси позначимо як $X_i(t)$. При цьому:

- у випадку лазера, $X_i(t)$ може характеризувати напруженість електромагнітного поля, потужність випромінювання або частоту;
- в гідродинаміці $X_i(t)$ може характеризувати компоненти поля швидкостей, щільність і температуру;
- в нелінійній оптиці $X_i(t)$ відповідає амплітудам декількох взаємодіючих мод або діелектричній проникності середовища;
- в моделях хімічних реакцій $X_i(t)$ позначає число молекул, що приймають участь в хімічних реакціях;
- в кліматології та океанології $X_i(t)$ може бути температурою, тиском, рівнем солоності води та ін.:

- в біології $X_i(t)$ може характеризувати такі ДЗ організму як артеріальний тиск, частота пульсу, температура та ін. Або такі характеристики популяцій, як кількість особин.

У всіх перерахованих випадках $X_i(t)$ можна описати модельним рівнянням виду:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = G_i(\nabla, X_i) + D_i \nabla^2 X_i + F_i(t), \quad (1.36)$$

де G_i — нелінійна функція $X_i(t)$ і градієнта ∇X ; D_i — коефіцієнт, що описує дифузію (дійсна величина) або поширення хвиль (уявна величина); $F_i(t)$ — флюктуючі сили, обумовлені взаємодією з зовнішніми факторами та дисипацією.

Із рівняння (1.36) виводяться рівняння для незатухаючих мод НДС, зростаючих до макроскопічних значень та визначають динаміку системи в околицях точок нестійкості. Ці моди описують зародження просторово-часової структури [61].

1.8.2 Лазер як нелінійна динамічна система

У випадку лазера за схемою рівняння (1.36) може бути виведено польове рівняння, яке описує часову еволюцію амплітуди моди, що знаходиться під дією двох сил — змушуючої та стохастичної; також рівняння для атомних дипольних моментів і рівняння для інверсії населеності атомних рівнів, що описує зворотну дію поля на атоми. При цьому польове рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = -(i\omega + \chi)E_m - i \sum_j g_j \alpha_j + F(t), \quad (1.37)$$

де E_m — амплітуда; ω — частота моди; χ — постійна загасання; g_j — постійна взаємодії між модою та атомом;

В силу широкого застосування та розвиненої теорії лазери являють собою вдалий приклад для дослідження та демонстрації властивостей НДС. У роботі [114] вивчено питання виникнення та поширення оптичних дисипативних солітонів у волоконних лазерах. У волоконних лазерах із синхронізацією мод, використовуваних для генерації надкоротких високоенергетичних імпульсів фемтосекундної тривалості спостерігається сильна нелінійна динаміка на одному обході. У подібних системах виникають нові структури — дисипативні оптичні солітони. Для дослідження динаміки амплітуди (1.37) та фази випромінювання запропоновано інструменти теорії відкритих систем, зокрема, рівняння Гінзбурга-Ландау та відображення Пуанкаре. Дослідження показали, що дисипативні солітони є аттракторами НДС (лазера), що забезпечує їх формування з широкого класу початкових розподілів оптичного поля, включаючи повністю випадкові, шумові розподіли. Цей процес можна ототожнити з еволюцією системи.

Прагнення до практичного застосування солітонів обумовлено їх унікальними властивостями, такими як дискретність спектра основних параметрів і стійкість параметрів до флуктуацій. Але розвиток теорії оптичних солітонів вимагає спільного зусилля фахівців різних напрямків, в тому числі, для створення теорії дослідження НДС на основі спеціальних моделей вимірювання.

Робота [115] також присвячена дослідженню та моделюванню нелінійних процесів в лазерах. Розглянуто явище просторово-часової динаміки надпотужних ультракоротких світлових імпульсів. Таке явище виникає внаслідок балансу між дисперсією та нелінійністю.

Аналіз лазерних процесів показує, що фазові переходи в лазері демонструють властивості, характерні для звичайних фазових переходів, в тому числі критичні флуктуації та порушення симетрії. Стан впорядкованості в лазері підтримується за рахунок процесів самоорганізації, що протікають завдяки притоку додаткової енергії ззовні (система накачування).

Лазер, як і біологічні системи, система відкрита. Очевидна аналогія з біологічними системами при розгляді хімічних лазерів, де відбувається обмін речовин. Хімічний лазер потребує водень і фтор; ці речовини активно вступають в

реакцію один з одним. В результаті генерується лазерне світло. Енергія створюється в ході хімічних реакцій. Хімічна енергія, що вивільняється у вигляді тепла, перетворюється в строго впорядковану енергію синхронного руху хвиль лазерного світла. При цьому низкорівнева енергія горіння перетворюється в високорівневу енергію лазерного світла. Подібна трансформація мікроскопічних енергій в макроскопічну енергію з меншим числом ступенів свободи виявляється одним із основних принципів протікання біологічних процесів [113].

1.8.3 Хаотична динаміка лазерів

Хаотична динаміка є невід'ємною властивістю широкого класу систем, що демонструє їх перехід в стани, у яких можна знайти як детерміновану динаміку, так і непередбачуваність.

Розвиток квантової техніки став причиною відкриття складної динаміки в електронних і квантових пристроях. А. З. Грасюком і А. Н. Ораєвським за допомогою ідентичної (1.5) системи рівнянь була встановлена принципова можливість режиму з неперіодичної автомодуляцією випромінювання в квантовому генераторі [116].

З моменту створення лазер став розглядатися, як яскравий приклад НДС. Якщо модель лазера не враховує квантові ефекти, вважається, що значення його параметрів через певний проміжок часу приймають стаціонарні значення, які залишаються незмінні протягом тривалого проміжку часу. Тобто лазер демонструє детерміновану динаміку [117]. Однак, навіть опис за допомогою детермінованих рівнянь допускає квазіперіодичну та хаотичну динаміку [118].

Г. Хакен передбачив можливість появи хаосу в лазерному випромінюванні. На прикладі лазера вдалося встановити аналогію між фазовими переходами в системах, далеких від теплової рівноваги, і в рівноважних системах. Це дозволило встановити загальні закономірності в процесах, що протікають в фізичних, хімічних, біологічних та гуманітарних системах. У лазерної моделі Хакена-Лоренца присутня математична аналогія між одномодовим лазером і моделлю

Лоренца (1.5), яка описує турбулентність конвекційних потоків в атмосфері. Г. Хакен описав лазер системою рівнянь виду [119]:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \hat{E} &= \chi \hat{P}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) \hat{P} &= \gamma \hat{E} \hat{D}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\Pi} \right) \hat{D} &= \gamma_{\Pi} (\Lambda + 1) - \gamma_{\Pi} \Lambda \hat{E} \hat{P}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

де \hat{E} , \hat{P} , \hat{D} — нормовані на відповідні стаціонарні рішення, напруженість електричного поля, поляризація та щільність інверсії відповідно; χ — константа загасання резонатора; γ_{Π} — константа поздовжньої релаксації; Λ — нормований параметр накачування; γ — атомна ширина лінії.

Лінійний аналіз системи рівнянь (1.38) показує, що:

- при $\Lambda < 0$ лазерна генерація відсутня;
- при $\Lambda \geq 0$ встановлюється лазерна генерація зі стійкими значеннями \hat{E} , \hat{P} , \hat{D} , що не залежать від часу;
- при

$$\chi > (\gamma + \gamma_{\Pi}) \quad (1.39)$$

та при

$$\Lambda > (\gamma + \gamma_{\Pi} + \chi)(\gamma + \chi) / \gamma(\chi - \gamma - \gamma_{\Pi}) \quad (1.40)$$

виникає нестійкість, яка призводить до нерегулярної динаміці ДЗ.

Нерівність (1.39) говорить про те, що швидкість загасання поля в резонаторі повинна перевищувати атомні загасання (високі втрати). Нерівність (1.40) встановлює нижню межу рівня накачування (висока потужність накачування). Тобто нестійка динаміка у одномодовому лазері можлива у випадку низької добротності резонатора q .

Було доведено наявність нестійкості, яка призводить до нерегулярного руху у фазовому просторі при високій потужності накачування. Пізні, ніж [119], практичні дослідження показали можливість виникнення хаотичних режимів при низькій потужності накачування, але при модуляційному ефекті, наприклад при часовій модуляції втрат резонатора, часовій модуляції інверсії, інжекції модульованого когерентного електромагнітного поля.

До розвитку хаосу може привести й подвоєння періоду генерованого випромінювання [119]. У роботі [120] був описаний експеримент із отримання хаосу внаслідок подвоєння періоду в одномодовому кільцевому NH_3 -лазері з високим коефіцієнтом посилення.

Перші практичні спроби отримання синхронних лазерних імпульсів, як на основі газорозрядних, так і твердотільних лазерів, зіткнулися з проблемою вузької зони синхронізації — $10^{-4} \dots 10^{-6}$ від міжмодової частоти. Відповідно існують жорсткі вимоги на тепловий дрейф резонатора та на стабільність частоти радіочастотного генератора, що викликає модуляцію втрат в резонаторі. Однак, механізми руйнування режиму вимушеної синхронізації мод, що призводять до хаотизації амплітуди та тривалості імпульсів, а також їх послідовності, в чисельному та натурному експериментах знаходяться на стадії дослідження.

Велику кількість публікацій присвячено дослідженню динаміки газових лазерів. Інтерес до режимам випромінювання He-Ne-лазерів обумовлений тим, що цей тип лазерів використовується як оптичні стандарти частоти, до яких висуваються високі вимоги щодо стабільності та повторюваності характеристик випромінювання. У роботах Ю. П. Мачехіна експериментально досліджувалися процеси розвитку іонізаційних хвиль у низькотемпературній плазмі в капілярах активних елементів газорозрядних лазерів. Були отримані моделі розвитку хаотичного режиму, показано, що процес хаотизації іонізаційних хвиль може бути описаний нелінійним параболічних рівнянням [121].

Наведені приклади стосуються запланованого отримання хаотичних режимів. На практиці хаос виникає і внаслідок недосконалості конструкцій лазерів, зовнішніх впливів і конкуренції мод. Найбільш часто стикаються з такими

явищами в багатомодових лазерах. В роботі [122] описаний аномальний сценарій виникнення хаосу в багатомодових лазерних діодах. Було показано, що із зростанням струму інжекції, внаслідок конкуренції мод (спочатку більше 10) відбувається часткове придушення слабких мод. При досягненні певного рівня перевищення посилення над втратами реалізується режим збудження чотирьох мод, який характеризується появою динамічного хаосу, який виражається в нерегулярних амплітудних пульсаціях мод, розширенні спектру та зниженні когерентності.

У роботі [123] було проведено дослідження лазера на вільних електронах із фотонним кристалом. Було показано, що такий лазер є хаотичною НДС, хаотичність якого проявляється в сильній чутливості параметрів до початкових умов і флуктуації.

Опубліковано результати десятків досліджень, спрямованих на управління хаосом в лазерах і в оптичних пристроях. Усуненню хаотичної динаміки лазерів присвячена одна з перших публікацій щодо застосування хаотичних системам [124]. У ній описано метод зменшення хаосу за допомогою зворотного зв'язку, що дозволяє на порядок підвищити потужність випромінювання лазера за рахунок збільшення потужності накачування.

Дослідження останнього часу присвячені, в основному, методу разомкнутого управління (управління без зворотного зв'язку) і методу запізненого зворотного зв'язку (метод Пірагаса) [125]. Дослідження впливу запізненого зворотного зв'язку на динаміку лазера з модуляцією втрат проведено в роботі [126]. Експериментальне усунення нестійкості лоренцевського типу зворотним зв'язком із запізненням в амонійних лазерах описано в роботі [127]. Порівняння методів разомкнутого управління та управління з запізненим зворотним зв'язком для CO₂-лазерів з модуляцією втрат, а також Nd-легованого волоконного лазера виконано в роботі [128]. У ній кількісно передбачено розширення області стійкості (зрушення біфуркації подвоєння періоду) при управлінні на основі моделей з двома ступенями свободи.

Великий інтерес викликає завдання генерації волоконними лазерами дисипативних солітонів, їх моделювання з урахуванням шумів і можливою зміною динаміки лазерів [129]. Аналізування нелінійної динаміки потужних надкоротких імпульсів і явищ їх формування є аналогічним завданням моделювання фізичної НДС з кількома мільярдами ступенів свободи [130]. Дослідження та вимірювання параметрів солітонов, як НДС, важливі для практичної реалізації ідеї солітонної зв'язку.

У ряді публікацій виникнення хаотичного режиму розглядається, як запланований процес, застосований, наприклад, в системах зв'язку, для кодування сигналів. У цьому випадку мова йде про управління хаосом і синхронізацію прийомних і передавальних пристроїв оптичного зв'язку. Створено експериментальні установки для передачі інформації на основі двох синхронізованих хаотичних лазерів [131].

Незважаючи на високий інтерес до описаних систем питання вимірювань, як методу досліджень НДС, довгий час залишався невирішеним. Основоположні ідеї про принципи вимірювань в НДС запропоновані Ю. П. Мачехінін. Роботи зі створення оптичних стандартів частоти на основі газових лазерів привели до висновку про невідповідність класичної теорії вимірювання процесам в НДС. Ю. П. Мачехін було наголошено на необхідності створення спеціальних фізико-математичних основ для дослідження та вимірювання параметрів лазерів, як НДС.

Таким чином, пошук керуючих параметрів (факторів, що впливають на отримання хаотичного режиму) та режимів, вимірювання параметрів лазерного випромінювання в стаціонарному та хаотичному режимах необхідні, як для забезпечення високої стабільності випромінювання, так і для отримання та управління хаотичною динамікою ДЗ лазера. Для забезпечення коректних вимірювань в подібних дослідженнях необхідно створити спеціальну модель вимірювань в НДС, що об'єднує схему вимірювального експерименту та процедури обробки даних. Фізико-математичний базис моделі повинен відповідати фізиці процесів в лазерах і відповідати як стаціонарним, так і хаотичним режимам.

1.8.4 Людина як нелінійна динамічна система

Як приклад біологічних або біофізичних НДС можна розглянути популяцію тварин або рослин, живий організм або орган. Особливий інтерес викликає людина. Розглянемо основні риси людини, як НДС:

- найперше, стан організму може бути охарактеризоване за допомогою низки ДЗ, динаміка яких має складний, нелінійний, іноді хаотичний, характер;
- друге, людина — відкрита, дисипативна система, що обмінюється енергією з навколишнім середовищем та іншими системами;
- третє людський організм і його ДЗ схильні до впливу зовнішніх факторів, як енергетичних, так і інформаційних. Вплив деяких з них носить критичний для системи характер, здатний змінити динаміку ДЗ;
- четверте, деякі з низки ДЗ організму можна вважати керуючими параметрами, зміна яких до певних значень веде до фазових переходів. До таких параметрів можна віднести температуру тіла або частоту серцевого ритму;
- п'яте, фазовий портрет організму являє собою просторово-часову структуру — квазіаттрактор;
- шосте, в ході фазових переходів ДЗ можуть змінювати динаміку з випадкової на регулярну, хаотичну, або навпаки;
- сьоме, людський організм має функцію самоорганізації (гомеостаз), яка проявляється в прагненні системи повернутися в стан, що характеризується «нормою хаотичності».

Підхід до людини з позицій теорій відкритих систем дозволяє по-новому поглянути на задачу діагностики стану здоров'я та створити індивідуальний підхід до його лікування.

У роботі [103] наведені результати практичного використання критерію «S-теорема» (1.35) для оцінювання стану здоров'я пацієнтів. Об'єктом дослідження були тахограми пацієнтів і здорових людей. При цьому в якості «норми ентропії» було вибрано значення ентропії S_0 людей з контрольної, «здорової» групи. Була визначена ентропія S групи людей із захворюванням, а в якості контрольованого параметра — відносна ентропія:

$$\Delta S = S - S_0. \quad (1.41)$$

Величина ΔS характеризує відносну ступінь хаотичності здоров'я пацієнта по відношенню до ступеня хаотичності здорової людини. Дослідження показало наявність двох груп хворих людей: зі збільшеним та зменшеним ступенем хаотичності. В процесі лікування цей параметр спостерігався. Прагнення $\Delta S \rightarrow 0$ означає процес одужання.

Подібні методи досліджень стають все більш популярними останнім часом. Як було показано раніше, в роботах [65] — [67] наведені результати дослідження стану здоров'я людей, виконані за результатами аналізу квазіаттракторів. Відмінність цих досліджень від описаних у [103] полягає в тому, що об'єктом дослідження були більш десяти ДЗ.

У роботах [133], [134], що відображають застосування методів дослідження НДС при лікуванні серцево-судинних захворювання наведені альтернативні способи контролю та усуненню хаосу спіральних хвиль в моделі серцевого м'яза, застосування ентропійного аналізу ритму серця у здорових молодих людей і у осіб зі змінами нейровегетативної регуляції кардіодінаміки.

Аналіз наведених та ряду інших публікацій [133] – [142] свідчить про широке застосування методів та інструментів дослідження НДС до аналізування стану здоров'я людини. Широко використовують: ентропію Шеннона, критерій «S-теорема», показник Херста та фрактальну розмірність, аттрактори і вектор стану ДЗ НДС.

Як інші приклади НДС, актуальні для дослідницьких і практичних завдань можна привести погоду, сейсмічну активність, клімат, океан, фондові ринки і соціуми. Результати їх досліджень, як НДС, наведені в роботах [143]–[163] та ін.

1.9 Процеси і властивості нелінійних динамічних систем, які впливають на вимірювання

Виконаний аналіз публікацій зарубіжних і вітчизняних вчених [58] – [163] дозволяє виявити світовий тренд, який виражається в загальному підході до дослідження об'єктів і процесів зі змінними в часі характеристиками, як до дисипативним НДС, із застосуванням відповідних методів та інструментів. У багатьох з описаних публікаціях автори говорять про необхідність створення теорії досліджень та вимірювань в НДС. Для цього повинні бути запропоновані принципи, моделі та інструменти вимірювання та аналізу їх результатів, відповідних процесів, що протікають в НДС.

Резюмуємо загальні процеси і властивості дисипативних НДС:

1. стан НДС в момент часу t характеризується n -мірним вектором стану $X [X_1(t), \dots, X_n(t)]$, де $X_i(t)$ — i -а ДЗ;
2. з плином часу значення $X_i(t)$ змінюються, але знаходяться в інтервалі $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$. Цей інтервал обумовлений можливостями функціонування системи;
3. динаміка ДЗ $X_i(t)$ має складний, нелінійний, у деяких випадках хаотичний, характер;
4. у систем є нестійкі стани рівноваги;
5. системи обмінюються енергією та інформацією з навколишнім середовищем та іншими системами, схильні до впливу зовнішніх факторів. Деяких з них носять критичний для системи характер, здатний змінити динаміку ДЗ;
6. деякі з ДЗ $X_i(t)$ є керуючими параметрами, зміна яких до певних значень веде до фазових переходів;
7. в ході фазових переходів ДЗ можуть змінювати динаміку з випадкової на регулярну, хаотичну, та навпаки;

8. фазовий портрет НДС в стані хаосу являє собою просторово-часову структуру — дивний аттрактор;

9. системи можуть еволюціонувати, деякі системи мають функцію самоорганізації:

10. системи можуть розглядатися як ієрархічні.

Виходячи з основних властивостей і характеристик НДС, завдання вимірювань значень ДЗ і оброблення їх результатів можна охарактеризувати, як багатофакторний експеримент. Згідно з [164] «...оброблення результатів вимірювань, одержуваних при багатофакторному експерименті, має на меті одержання основоположних наукових даних у вигляді невідомих раніше математичних моделей і їх інтерпретацію, а аж ніяк не зводиться до простого обчислення середнього \bar{x} , або СКВ S »

Для отримання максимальної інформації про значення параметрів та динаміку НДС повинен бути отриманий максимальний обсяг корисної інформації носіями яких можуть бути: результати вимірювання ДЗ і їх невизначеності, фазовий портрет НДС, ентропія, фрактальна розмірність, час прогнозування.

Метою досліджень НДС є не лише дослідження параметрів та властивостей систем. Вони охоплюють моделювання, конструювання та застосування складних, ієрархічних фізичних систем, а також контролювання та прогнозування стану біофізичних систем. Прикладами таких систем є хаотичні лазери, призначені для хаотичних систем зв'язку, солітонні системи оптичного зв'язку або медичні пристрої та системи, призначені для діагностики стану здоров'я людини. Ці завдання потребують створення нової теорії дослідження нелінійних динамічних систем. Розвиток цього напрямку є складним завданням, вирішення якого потребує об'єднання зусиль багатьох науковців. У дисертаційній роботі розроблено принципові положення такої теорії, засновані та нових принципах та моделях вимірювань та дослідження НДС. Для досягнення мети роботи у подальших розділах автором поставлено та вирішено низку теоретичних та прикладних завдань. Основними з яких є:

- аналізування відповідності фізико-математичних основ класичної теорії вимірювань процесам та властивостям НДС;
- розробляння фізико-математичних основ вимірювань в НДС;
- розробляння теоретичної моделі вимірювань в НДС;
- розвиток теорії невизначеності вимірювань в НДС;
- розробляння експериментальних моделей дослідження фізичних і біофізичних систем на основі моделі вимірювань в НДС.

Висновки до Розділу 1

У розділі обґрунтовано актуальність обраної мети та завдань дисертаційного дослідження. Для цього виконаний аналіз наукових публікацій, який показав, що до актуальних завдань світової науки відносяться завдання моделювання, конструювання, застосування та керування складними, ієрархічними фізичними та біофізичними системами. Прикладами таких систем є лазери, призначені для хаотичних систем зв'язку, солітонні оптичні системи, медичні пристрої та системи діагностування стану здоров'я людини.

Наведені в якості прикладів об'єкти відносяться до класу дисипативних нелінійних динамічних системи (НДС), яким притаманні наступні властивості: їх стан характеризується низкою інтервальних динамічних змінних, що формують багатомірний вектор стану; поведінка динамічних змінних носить складний, нелінійний, часто хаотичний характер; системи обмінюються енергією та інформацією з навколишнім середовищем та іншими системами, схильні до впливу зовнішніх факторів, деякі з яких мають критичний для системи характер, здатний змінити динаміку на хаотичну; системи еволюціонують, деякі мають функцію самоорганізації.

Вивчення та створення таких систем потребують розроблення нової теорії дослідження НДС. При цьому вимірювання розглядається як ключовий метод експериментальних досліджень. У розділі обґрунтована необхідність розробляння

принципово нових моделей та інструментів вимірювання та обробки результатів вимірювання в НДС.

Досліджено процеси та основні властивості НДС, які впливають на вимірювання та мають бути враховані у процесі створення моделей вимірювань і досліджень НДС. В якості умов створення моделей виділено: інтервальність значень вимірюваних величин, їх хаотична динаміка, сильна залежність від початкових умов і шумів, еволюція і самоорганізація.

Проаналізовано методи та інструменти дослідження НДС, найпоширенішими та ефективними з яких є: топологічні дослідження фазового портрета; ентропійний та фрактальний аналіз часових рядів; критерій «S-теорема» і ін. Ці якісні та кількісні методи та інструменти теорій складних систем вперше запропоновано використовувати при створенні моделі вимірювання. Як математичні інструменти аналізу моделі вимірювань вперше запропоновано використовувати: фазовий портрет. фрактальну розмірність, ентропію Шеннона, час передбачення.

Для досягнення мети дисертаційного дослідження (розробка принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювань в НДС) поставлені завдання, які вирішені в наступних розділах, а саме: виконати аналіз відповідності фізико-математичних основ теорії вимірів процесам в НДС. розробити фізико-математичні основи вимірювань в НДС; розробити теоретичну модель вимірювань в НДС. розвинути теорію невизначеності вимірювань в НДС. розробити експериментальні моделі дослідження фізичних і біофізичних НДС.

РОЗДІЛ 2

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ВИМІРЮВАНЬ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Основний принцип вимірювань в НДС може бути сформульований наступним чином — дослідник повинен «слідувати» за об'єктом дослідження (системою), допускаючи можливість зміни характеру динаміки процесів із детермінованої на стохастичну або хаотичну. При цьому, математичний апарат оброблення та подання результатів вимірювань обирається після класифікації динаміки системи. Такий підхід істотно відрізняється від підходу, пропонованого класичною теорією вимірювання, яка заздалегідь постулює ряд умов протікання експерименту. Сформульований принцип вимагає вироблення фізико-математичних основ вимірювань в НДС із хаотичною динамікою — ключових фізичних принципів і математичних положень, застосування яких дозволить коректно виконати вимірювальний експеримент, класифікувати та чисельно описати об'єкт дослідження та процеси, які відбуваються в ньому.

Метою розділу є розроблення фізико-математичних основ вимірювань величин із складною, хаотичною динамікою, що характеризують НДС із функцією самоорганізації та еволюцією. Для цього виконано аналіз відповідності фізико-математичних основ класичної теорії вимірювань властивостям та процесам в НДС. Обґрунтовано, що теоретична модель вимірювань повинна бути побудована на принципах і фізико-математичних основах, які враховують: інтервальність значень вимірюваних величин, нелінійну та хаотичну динаміку, сильну залежність від початкових умов і шумів, процеси еволюції і самоорганізації.

У розділі наведено результати експериментальних досліджень динаміки фізичних НДС. Основні результати досліджень, що наведені у розділі, відображені автором у роботах [1], [6], [8], [16], [19].

2.1 Фізико-математичні основи класичної теорії вимірювань

Сучасна класична теорія вимірювань заснована на ряді фізичних і математичних положень, які постулюються при створенні моделей вимірювання, а також процедур оброблення та подання результатів вимірювального експерименту [147]. Побудова моделей вимірювань в НДС вимагає аналізу відповідності цих положень фізиці процесів, що розвиваються в нелінійних системах.

Перше положення класичної теорії встановлює, що будь-яка фізична величина, яка вимірюється, має єдине істинне значення. Друге положення дозволяє розглядати розкид результатів вимірювань як прояв випадкового, ергодичного процесу. Третє положення — процес вимірювання розглядається як детермінований. Ці положення, теоретично, дозволяють уточнювати результати вимірювань у міру уточнення умов проведення експерименту та вдосконалення математичних методів оброблення результатів вимірювань.

При обробці результатів вимірювання вважається, що числові ряди результатів вимірювань є марківськими процесами. Тому в якості математичної основи застосовується теорія ймовірності випадкових величин. На основі цих умов будуються процедури оцінювання результатів вимірювань за допомогою похибки або невизначеності результатів вимірювань. Дослідимо відповідність описаних положень процесам в НДС

2.2 Вимірювані величини

2.2.1 Істинні та дійсні значення фізичних величин

У загальному випадку вимірювана величина визначається в результаті непрямих вимірювань і може бути описана рівнянням:

$$X = f(Z), \quad (2.1)$$

де Z — вхідна, безпосередньо вимірювана величина,

Вираз (2.1) є рівнянням вимірювання [164]. Сам процес визначення значення X можна описати виразом:

$$X = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(m)}(Z_i^{(m)}), \quad (2.2)$$

де $Z_i^{(m)}$ — результат i -го спостереження при m -их початкових умов.

Обчислення межі (2.2) за умови $m \rightarrow \infty$ передбачає послідовне уточнення початкових умов. В результаті цієї процедури зменшується похибка або невизначеність вимірювання шуканої величини X .

Початкові умови для будь-якої фізичної детермінованої системи можуть бути встановлені з малою, завжди кінцевою, невизначеністю. Тобто індекс m в (2.2), який вказує на точність встановлення початкових умов, завжди має фізично обгрунтоване кінцеве значення. Цій умові відповідають вимірювальні завдання, які формулюються в рамках класичної механіки, але при цьому початкові умови задаються у вигляді інтервалів можливих значень вихідних величин.

Така постановка задачі відповідає реальним фізичним ситуаціям і є практичним підтвердженням введеного в [165] поняття «фізично виправданого детермінізму». Перехід від класичного детермінізму до фізично виправданого детермінізму в постановці вимірювальних завдань фактично був здійснений відразу, як тільки стали використовувати вірогідну форму опису початкового стану об'єктів вимірювань і, відповідно, результатів вимірювань.

Фундаментальність зв'язку основних понять класичної теорії вимірювань, з одного боку, і понять класичного детермінізму, з іншого боку, полягає в єдиному підході до визначення значення фізичної величини, спираючись на точність початкових умов $[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)]$ стану досліджуваної системи (1.1). Чим точніше можуть бути задані початкові умови, тим точніше можна визначити значення фізичної величини (2.2).

У реальному фізичному експерименті здійснити математичну межу виду (2.2) неможливо (хоча б у силу кінцівки часу, відведеного на експеримент). Тому, за

результатами вимірювань, навіть багаточисленних, визначається не істинне, а дійсне значення фізичної величини [166].

Основним міжнародним документом із проведення вимірювань та аналізу їх результатів є Керівництво із вираження невизначеності вимірювання (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)) [164]. Його впровадження призвело до широкого обговорення понять і галузей застосування таких характеристик результатів вимірювань як «невизначеність» і «похибка», а також до аналізу вихідних фізичних і математичних положень, на основі яких формуються моделі вимірювань і методи обробки їх результатів.

Одним із ключових моментів став аналіз застосовності такого поняття, як «істинне значення вимірюваної величини», яке є основою для визначення похибки вимірювання [147], але в GUM [164], не застосовується. У зв'язку з цим, одними з питань, що обговорюються в рамках розроблюваної в дисертаційній роботі теорії дослідження НДС на основі моделей вимірювань, є питання про те, що являє собою вимірювана величина X і що є результатом вимірювання Y . Згідно з основними висновками, отриманими в попередньому розділі, величина яка вимірюється, у випадку НДС — це ДЗ $X_i(t)$, значення якої змінюється з плином часу, але знаходиться в інтервалі $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$.

Якщо йти за визначенням, що істинне значення представляє результат нескінченного процесу вимірювань із нескінченим вдосконаленням методів і засобів вимірювань (2.2), то можна вважати, що математична операція граничного переходу має не тільки математичний сенс, але може бути фізично реалізована [147]. Те, що це не так, впливає з умови неможливості здійснення граничного переходу в реальному фізичному процесі вимірювань, хоча б внаслідок обмеження часу, відведеного на вимірювання.

З іншого боку, в реальних вимірюваннях істинне значення замінюється дійсним, тому концепція невизначеності спирається на дійсне значення [164].

Однак, незважаючи на ідеалізацію фізичних умов, за яких визначається істинне значення фізичної величини (2.2), застосування цього поняття можливо і

доцільно в тому випадку, коли об'єктом дослідження є фізичні константи та умовно незмінні фізичні величини.

2.2.2 Вимірювана величина в нелінійних динамічних системах: визначення та умови існування

Питання про вимірювану величину в існуючих методах аналізу результатів вимірювань вирішується тривіально. У GUM [164] зазначено, що «... керівництво ... розглядає вираз невизначеності вимірювання добре визначеної фізичної величини, що характеризується єдиним значенням». При цьому, вимірювана величина може бути або константою, або величиною, що змінюється за встановленим детермінованим законом.

Відповідно до наведеного опису вимірюваної фізичної величини, її чисельне значення може бути будь-яким. Однак, вже на етапі побудови рівняння вимірювань (2.1) для визначення чисельного значення вимірюваної фізичної величини завжди відбувається обмеження точності, оскільки відсутня принципова можливість в одному рівнянні врахувати всі фізичні ефекти, що впливають на результат визначення значення фізичної величини.

Математична модель, що адекватно описує процес вимірювання фізичної величини, як правило, не обмежує точність, а використовувані наближені математичні методи обчислення значення фізичної величини вносять додаткову невизначеність в її визначення. Але реальне (дійсне) значення фізичної величини може бути отримано за умови, що під ним буде розумітися рішення рівняння вимірювань (2.1) в реальних фізичних умовах, які накладають вимоги кінцевої точності. Таким чином, незалежно від наявності зовнішніх шумів, що впливають на вимірювану величину, істинне значення може бути відомо тільки з кінцевою точністю.

У разі, коли фізична система знаходиться в динамічному режимі та її параметри змінюються в часі $X_i(t)$, можлива не детермінована — стохастична або хаотична поведінка системи. Існування режиму нерегулярної динаміки призводить до ситуації, при якій не існує вимірюваного значення в

загальноприйнятому розумінні, а існує область значень $X^{\min} \leq X \leq X^{\max}$, в межах якої можуть змінюватися значення фізичної величини. Це типова для реальних НДС ситуація.

Зауважимо, що в сучасній теорії вимірювань присутня тенденція до розвитку вчення про фізичну величиною в напрямку розширення цього поняття. У багатьох галузях (техніці, природних і соціально-економічних науках) необхідно кількісно оцінювати величини в узагальненому сенсі — параметри, які в строгому сенсі не є фізичними величинами. Зауважимо, що в дослідницькій практиці при вимірюваннях використовують терміни «фізичні» [140] і «нефізичні» [167] вимірювані величини. При цьому нефізичні величини можна розділити на хімічні, біологічні, інформаційні та інші.

Традиційне для класичних фізичних величин введення одиниці вимірювання величини неможливо. Основним поняттям стає «шкала величини». Це призвело до перебудови класичного вчення про фізичну величиною з використанням репрезентаційної теорії вимірювання. Поняття та методи репрезентаційної теорії застосовуються для вирішення деяких вимірювальних завдань, в тому числі для кількісного оцінювання нефізичних величин [168].

Класичні моделі вимірювань (моделі, побудовані на уявленнях і поняттях класичної теорії вимірювань) спрямовані на вивчення стабільних станів і процесів. Саме для таких випадків побудовані і теорія похибки [147], і концепція невизначеностей [164]. Однак, все більше розширюються галузі вимірювань в виробничих процесах, науці та медицині, які спрямовані на аналіз нестабільних процесів із метою оперативної підготовки вимірювальної інформації для контролю стану НДС. Тому, потрібно визначати значення ДЗ НДС навіть тоді, коли вони мають нерегулярну поведінку.

Таким чином, при дослідженнях і вимірюваннях в НДС вимірювані величини мають інтервальний характер, умова про існування єдиного істинного значення вимірюваної величини не застосовується, величина, яка вимірюється, повинна бути представлена інтервалом дійсних значень $X^{\min} \leq X \leq X^{\max}$ із урахуванням невизначеності їх вимірювання.

2.3 Ергодична гіпотеза

2.3.1 Ергодичність випадкових процесів

Друга фундаментальна умова класичної теорії вимірювань пов'язана із ергодичною гіпотезою. При розгляді випадкового розкиду результатів вимірювань враховується, що базовим описом є ергодичної випадковий процес.

Математичний опис ергодичності випадкового процесу може ґрунтуватися на різних характеристиках, однак основна з них, що представляє інтерес для вимірювань, це еквівалентність усереднення за часом випадкового процесу та усереднення за ансамблем всіх можливих станів, що реалізуються випадковим процесом при часі спостереження за системою $t \rightarrow \infty$. Це означає, що якщо середнє за часом будь-якої функції $f(t)$ визначається як:

$$\overline{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n, \tau), \quad (2.3)$$

де N — кількість спостережень; t — час між спостереженнями,

а середнє за ансамблем можливих реалізацій:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) P(z) dz, \quad (2.4)$$

де $P(z)$ — функція щільності ймовірності,

то ергодичність процесу $f(t)$ означає, що існує рішення ергодичного рівняння:

$$\langle f \rangle = \overline{f}. \quad (2.5)$$

В результаті рішення рівняння (2.5) встановлюється дійсне значення вимірюваної величини.

Результат часового усереднення значень ергодичного процесу прагне до деякої постійної величини, яка дорівнює середньому статистичному значенню. Ця обставина в разі ергодичності досліджуваного процесу значно спрощує обчислення статистичних середніх, оскільки замість громіздкого масового опиту, що складається в усередненні за великою кількістю реалізацій випадкового процесу, виявляється достатнім усереднення однієї, але досить довгої, часової реалізації результатів вимірювань.

При нескінченно тривалому спостереженні за системою, коли вона встигає побувати в кожній точці фазового простору станів, рішення рівняння (2.5) являє собою постійну величину, не залежну від часу та рівну найбільш ймовірному значенню, яке можна розглядати як істинне. Реальний процес вимірювань обмежений в часі, та, відповідно, рівняння (2.5) виконується наближено. В цьому випадку, рішення рівняння представляє не істинне, а дійсне значення вимірюваної величини.

Також, як і в разі визначення істинного значення через граничний перехід (2.2), рішення ергодичного рівняння (2.5) не має фізичного сенсу, поки не визначені межі підсумовування та інтегрування. Але як тільки будуть введені обмеження на граничні переходи, відразу виникає кінцева область можливих числових значень вимірюваної фізичної величини.

Особлива увага приділяється ергодичності в теорії динамічних систем. Ергодичність розглядається як спеціальна властивість деяких НДС, що полягає у тому, що в процесі еволюції (1.2) майже кожний стан із певною ймовірністю проходить поблизу будь-якого іншого стану системи [169]. Системи, в яких фазові середні збігаються з часовими середніми, називають ергодичними НДС. При достатньому часі спостереження такі системи можна описувати статистичними методами. Для ергодичної систем математичне очікування за часовими рядами повинно збігатися з математичним очікуванням за просторовими рядами [170], [171].

2.3.2 Ергодичність хаотичних процесів

Із точки зору теорії систем процес вважається ергодичним, якщо його траєкторія в якомусь фазовому просторі в межі $t \rightarrow \infty$, відповідно до інваріантної ймовірнісної міри [175] щільно заповнює певний обсяг цього простору. При цьому відносний час Δt перебування траєкторії в будь-якому кінцевому елементі об'єму пропорційно об'єму ΔV цього елемента:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{t} \approx \frac{\Delta V}{V}. \quad (2.6)$$

Цей вираз є фізичною передумовою імовірнісних методів аналізу випадкових процесів. Нормальний закон розподілу щільності ймовірності (гауссовий розподіл) максимально відповідає вимогам ергодичності. Тому всі співвідношення, введені для параметрів нормального закону, впливають із умов ергодичності.

Оскільки ергодичність це властивість, що реалізовується тільки в граничному випадку, тобто при $t \rightarrow \infty$, то обмежений час аналізу призводить до необхідності обмеження або усічення імовірнісного розподілу на заданому рівні (ймовірність $p = 0,95$ або $p = 0,99$), тобто не приймаються до уваги ті події, час можливої появи яких дуже великий, що відповідає умовам проведення вимірювань.

Класична ергодична теорія розглядає також і сильніший механізм стохастизації процесів системи — перемішування траєкторій в фазовому просторі [176]. Це властивість динамічної системи, що виявляється в тому що, початковий фазовий об'єм системи не переміщається по всьому простору, а змінює свою форму, «розмазуючись» по всьому доступному простору. Точно також крапля чорнила постійного об'єму після збовтування в склянці води однорідно перемішується з нею. У роботах А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда та Ю. К. Мозера було доведено, при певних обмеженнях, що такий рух, будучи стохастичним, не є ергодичним [169], [177].

Локальна нестійкість і чутливість до початкових умов, які спостерігаються в хаотичних НДС та призводять до складних заплутаних траєкторій в фазовому просторі системи, є основними механізмами такої властивості як перемешиваність. Оскільки перемешиваність пов'язана із нестійкістю, тобто із експоненціальним розбіганням траєкторій, то вже на такому феноменологічному рівні зрозуміло, що перемешиваність у таких системах призводить до властивостей стохастичного процесу, відмінних від властивості ергодичності. Зауважимо, що перераховані властивості характеризують хаотичний режим динаміки НДС.

Таким чином, до НДС, що еволюціонує і змінює свою динаміку, ергодична гіпотеза не може бути застосована зовсім, або може бути застосована обмежено. Еквівалентність усереднення за часом випадкового процесу та усереднення за ансамблем усіх можливих станів в реальних НДС виконується лише в деяких випадках. В якості ілюстрації цього висновку розглянемо біфуркаційну діаграму динаміки еволюції НДС, подану на рис. 1.7. Аналіз діаграми дозволяє виділити зони детермінованої, випадкової та хаотичної динаміки, а також нестійкі точки рівноваги НДС. Такий процес може вважатися ергодичним лише у випадку розвиненої хаотичної динаміки. В силу нестійкості такої динаміки апріорі вважати процеси в НДС ергодичними не можна.

2.4 Детермінізм та хаотичність в теорії вимірювань

2.4.1 Детермінізм процесів та систем

Класична теорія вимірювань побудована на поняттях, що складають основу класичного детермінізму. Знання початкових умов стану детермінованої системи визначає знання її поведінки в будь-який момент часу, навіть якщо час прямує до нескінченності.

Така «детермінована» теорія вимірювань дозволяє отримати строгий з математичної точки зору, але парадоксальний із фізичної точки зору результат — значення дисперсії при нескінченній кількості вимірювань дорівнює нулю:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow 0,$$

де \bar{x} — середнє значення результатів вимірювань.

Однак в реальних експериментах така межа не можна досягти ніколи.

Детермінізм дозволяє встановити однозначний зв'язок між початковими умовами системи та її станом через час T , навіть за умови $T \rightarrow \infty$. Точність визначення параметрів, що характеризують стан системи в довільний момент часу, однозначно пов'язана з точністю завдання початкових умов. Отже, в загальному випадку фізичні об'єкти вважаються різними, якщо різницю в значеннях фізичних величин можна виявити в n -му знаку після коми, навіть якщо $n \rightarrow \infty$.

Вивчаючи проблеми фізичної постановки завдань в рамках класичного детермінізму М. Борн ввів поняття «фізично виправданого детермінізму» (або «слабкого детермінізму»), і показав, що рішення найпростішої детермінованої задачі необхідно виконувати при початкових умовах, заданих в ймовірнісній формі $P(x, v, t)$, де x — координата, v — швидкість, t — момент часу [92]. Саме така постановка задачі відповідає реальному фізичному експерименту.

Фізично осмислене визначення детермінованості пов'язано з тим, що будь-який стан може бути відомий із малою, але завжди кінцевою неточністю (невизначеністю). Тому початкові умови мають задаватися не числом, а імовірнісним розподілом $P(x_0, v_0, t_0)$. І завдання, яке необхідно вирішити полягає в тому, щоб за початковим розподілом $P(x_0, v_0, t_0)$ обчислити розподіл в більш пізній час $P(x, v, t)$.

Детермінізм (або передбачуваність) при такому підході визначається наступним чином. Обчислюється траєкторія руху системи та кінцева відстань для будь-якого часу t із заданим початковим розподілом. Якщо при стягуванні початкового розсіювання встановлюється вид кінцевого розсіювання при $t \rightarrow \infty$, то за результатом можна зробити висновок передбачувана система чи ні.

Класична механіка необхідної якості не має, за винятком випадку ідеальних гармонійних осциляторів.

Висновок, який можна зробити — передбачуваність в класичній механіці пов'язана із передбачуваністю поведінки вимірювальних систем. Початковою умовою є та точність приладу, яка встановлена в процесі його атестації. Що відбувається з точністю приладу в процесі його експлуатації, залежить від динаміки його поведінки в часі. Час, протягом якого початкова розподіл, а саме встановлена точність, збільшиться та сягне граничного значення, після якого необхідно знову виконувати перевірку та при необхідності ремонт приладу, є часом передбачення динаміки розглянутої системи T_{for} (1.19) [1].

Спираючись на розвиток класичного детермінізму в напрямку застосування імовірнісного опису значень фізичних величин для реальної оцінки стану фізичних систем, можна розвинути методи аналізу результатів вимірювань для НДС.

Оскільки вже на етапі опису реальної фізичної ситуації вимірювального процесу застосування принципів детермінізму наражалося на неможливість їх реалізації в повному обсязі, то в практиці вимірювань застосовувалася спрощена модель детермінізму. Однак якісно ця модель не змінювала підходу до процесу вимірювань і аналізу їх результатів. У підсумку, класична теорія вимірювань та теорія похибки розвивалися, але принципові базові поняття не змінювалися. Тому, із введенням поняття невизначеності результатів вимірювань з'явилася можливість переглянути фізичні основи класичної теорії вимірювань.

Розвиток поняття невизначеності в вимірюваннях пов'язаний із використанням імовірнісного опису всіх параметрів в рівнянні вимірювань [180]. Таким чином, невизначеність результату вимірювань існує завжди, навіть при відсутності випадкового впливу навколишнього середовища на вимірювальний процес, оскільки існує невизначеність в завданні початкових умов для детермінованого рівняння вимірювань. І в цьому сенсі концепцію невизначеності результату вимірювань можна розглядати як розвиток класичної теорії

вимірювань, яка дозволяє більш повно враховувати реальні фізичні ситуації вимірювальних процедур.

Як додаткове підтвердження необхідності використання поняття невизначеності при аналізі результатів вимірювань в НДС можна розглядати можливість існування в динамічних системах нерегулярного, стохастичного та хаотичного руху. Така поведінка призводить до неможливості точно оцінити параметри системи, оскільки таких значень немає.

2.4.2 Хаотичність в детермінованих системах

Аналіз умов виникнення невизначеності результату вимірювань призводить до висновку про те, що вихідні параметри в рівнянні вимірювань (2.1) необхідно представляти в імовірнісному вигляді. При цьому механізм випадкової поведінки фізичних величин не розглядається в припущенні, що він або може бути пов'язаний із впливом навколишнього середовища, або значення цих параметрів визначені, в свою чергу, з деякою невизначеністю.

Яким би не представлялося джерело невизначеності параметрів досліджуваної системи, завдання дослідження цієї системи розглядається як детерміноване із випадковими початковими умовами. Детерміноване рішення, засноване на випадкових початкових умовах, має розкид, обумовлений характером вирішення цього детермінованого рівняння при різних початкових умовах.

Принципово новим у проведенні вимірювань в динамічних системах є існування в НДС режиму динамічного хаосу. Наявність таких режимів обумовлює виконання довільного змінення значень фізичних величин в таких системах і, як наслідок, необхідність враховувати при проведенні вимірювань величини інтервалу їх випадкових варіацій.

При фіксованих початкових умовах рішення детермінованої задачі має випадковий розкид, що перевищує інтервал завдання значень початкових умов. Отже, сам характер поведінки досліджуваної системи вносить невизначеність в оцінку її параметрів.

Оскільки розвиток динамічного хаосу формує свою функцію щільності розподілу, властиву цій системі, аналіз результатів вимірювань необхідно здійснювати після перевірки реалізованого випадкового процесу на ергодичність. Застосування імовірнісних методів для аналізу фізичних величин і результатів їх вимірювань можливо за умови, що досліджувані статистичні процеси є ергодичними. Моделі вимірювання в НДС спиратися на детерміністські уявлення не можуть. Процеси в таких системах розглядаються або як стохастичні, або як частково детерміновані.

Для вирішення завдання передбачення поведінки динамічної системи в реальних фізичних експериментах необхідна не класична математика, побудована на базі класичного детермінізму, а інтервальна математика, що дозволяє оперувати з величинами, що мають кінцеву область можливих значень [172].

Практичні методи інтервальної математики знаходяться на стадії розробки. Так в роботі [16] методи інтервального математики були використані автором для складання рівняння вимірювання ентропії Шеннона H (1.9) ДЗ НДС. Рівняння, складені таким чином, містять точні рішення та надають можливість повного обліку невизначеностей.

Для оцінки результатів реальних експериментів застосовуються моделі, в рамках яких фізичні величини та початкові умови видаються не точкою, а областю, в межах якої можливий імовірнісний опис усіх очікуваних значень фізичної величини [3]. Використовувані моделі вимірювань побудовані на імовірнісному підході уявлення фізичних величин та початкових умов при описі систем. Фізична величина в цьому випадку не може бути представлена одним фіксованим значенням, а тільки областю значень, які можуть бути приписані цієї величини. Точкове подання значення фізичної величини замінюється інтервальним, і, отже, вводиться поняття «невизначеності значення фізичної величини». Із цього випливає, що ще до того, як здійснюється реальний вимірювальний процес, вже є невизначеність знання про значення фізичної величини, яке не залежить від процесу вимірювання. Тобто за будь-яких умов, процес вимірювання ДЗ НДС не може розглядатися як детермінований.

2.5 Опис шумів та флуктуацій при аналізі результатів вимірювань

2.5.1 Вплив шумів на результати вимірювань

Практично всі питання оброблення результатів вимірювань пов'язані з необхідністю обліку та аналізу флуктуаційних ефектів. Причини, які викликають флуктуації, можуть бути різні за своєю фізичною природою (теплові шуми, нестійкості, турбулентності та т.д.), але всі вони призводять до випадкового розкиду значень вимірюваної величини. Оброблення результатів вимірювань повинні здійснюватися з використанням адекватного математичного апарату, тобто фізична природа випадкових відхилень визначає характер математичного опису останніх.

Більшість із відомих практичних завдань розглядає досліджувані системи як лінійні або лінеаризовані і, тому, використовують апарат вивчення впливу зовнішніх шумів на поведінку лінійних систем і, як наслідок, вплив зовнішніх шумів на результати вимірювань. У разі вимірювань в НДС, необхідний облік не тільки зовнішніх шумів, але й впливу динаміки самої досліджуваної системи на результати вимірювань її параметрів. Це пов'язано, в першу чергу, із можливістю виникнення режиму динамічного хаосу та додатковим розкидом результатів вимірювань, викликаним нерегулярною поведінкою системи.

Процес оброблення результатів вимірювань величини із флуктувцією практично збігається з послідовністю аналізу випадкової величини або випадкового процесу. Це пояснюється тим, що така послідовність була розроблена в теорії випадкових процесів, в основу якої покладено фізичні принципи, виведені з правдоподібних модельних ситуацій та відповідних їм математичних теорій.

2.5.2 Застосування теорії марківських процесів в статистичних завданнях

Найбільш ефективним математичним апаратом, що дозволяє вирішувати статистичні завдання, є, створена на основі теорії броунівського руху і процесів дифузійного типу, теорія марківських випадкових процесів [178].

Зауважимо, що марківський процес відповідає поведінці лінійної динамічної системи, що описується звичайними диференціальними рівняннями з гауссовою флуктуацією параметрів. Відзначимо, що спроба розгляду нелінійних систем, що знаходяться під дією зовнішнього шуму, аналогічним чином стикається з труднощами, пов'язаними із тим, що часова еволюція нелінійної системи перестає бути марківською і тому втрачається можливість використовувати методи теорії марківських процесів.

Марківським процесом або процесом без наслідків називається такий процес $z(t)$, що для всіх $t_1 > t_2$ умовна щільність ймовірностей P однозначно визначається значенням z_2 , прийнятим в момент часу t_2 і зовсім не залежить від попередньої історії, тобто:

$$P_n(z_1, t_1; z_2, t_2; \dots; z_m, t_m) = P(z_1, t_1; z_2, t_2). \quad (2.7)$$

Марківські процеси з безперервним часом описуються рівнянням, що випливає із рівняння переходу Смолуховського для щільності ймовірності $P(z, t; z_0, t_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t; z_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} \cdot [B_n(z, t) \cdot P(z, t; z_0, t_0)], \quad (2.8)$$

де $B_n(z, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle \{z(t + \Delta t) - z(t)\}^n; z, t \rangle$.

Важливий окремий випадок марківських процесів — дифузійні процеси, коли всі B_n із $n > 2$ дорівнюють нулю, а $B_2 = \text{const}$ та $B_1 = -B_1 z$. Це гауссове марківський процес із кореляційною функцією:

$$\langle z(t)z(t + \tau) \rangle = \sigma^2(t) \exp\{-B_1(\tau)\}. \quad (2.9)$$

У загальному випадку випадкові величини можна охарактеризувати параметрами, які визначаються за допомогою щільності ймовірності. Функція $P(z)$ задовольняє умовам:

$$P(z) > 0, \int_{-\infty}^{\infty} P(z) dz = 1.$$

Середнє значення довільної функції від випадкової величини можна визначати за допомогою рівності:

$$\langle f(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(z) f(z) dz, \quad (2.10)$$

яка обумовлює наявність одного екстремуму в $P(z)$, в іншому випадку втрачається сенс усереднення.

Якщо для випадкової величини відома ймовірність процесу, то можна визначити всі величини, які характеризують її поведінку, тобто які компоненти флуктуації домінують— високочастотні або низькочастотні, який розкид і яке значення фізичних величин є максимально можливим [179]. При цьому для виконання обробки результатів вимірювань необхідне виконання умови ергодичності випадкової величини. В іншому випадку, усереднення за часом не може замінити усереднення за реалізаціями, що використовується.

Більшість ситуацій, що зустрічаються на практиці, пов'язана із тим, що флуктуації вимірюваної величини являють собою результат сумарної дії багатьох слабо пов'язаних факторів навколишнього середовища, тому відповідно до центральної граничної теореми, флуктуації вимірюваної величини є марківськими і мають гауссов розподіл. Цей розподіл повністю визначається двома не випадковими параметрами \bar{x} — середнім значенням і дисперсією σ , або середнім квадратичним відхиленням s . Цей випадковий процес є основою теорії

обробки результатів вимірювань. Всі відомі результати теорії вимірювань отримані або для гауссова процесу, або для випадків слабого відхилення від нього [147].

Коли розподіл ймовірностей випадкової величини сильно відрізняється від гауссова (наприклад, логнормальний) та убуває на нескінченності повільніше ніж гауссов, то великих відхилень, таких що перевищують 3σ , стає більше, оскільки відхилення формуються не під впливом багатьох незалежних, порівнянних за інтенсивністю причин, а під впливом домінуючого фактору. Тому, коли випадкова похибка вимірювання має відмінний від гауссова розподіл, то застосування при обробці результатів методу найменших квадратів може привести до серйозних помилок.

Зі зменшенням кількості випадкових збурень, функція розподілу буде все більш відрізнятися від гауссової, і все складніше буде застосовувати стандартні методи обробки результатів вимірювань. Така ситуація характерна навіть для НДС із малим числом ступенів свободи (досить трьох), що демонструють випадкову нерегулярну поведінку [1].

2.6 Вплив динаміки системи на результат вимірювання

Важливим моментом у розвитку поняття невизначеності вимірювань стала модель наближеного імовірнісного опису значення фізичної величини. Як правило, механізм імовірнісної поведінки не обмовляється окремо, оскільки передбачається, що існує лише один такий механізм — це випадковий вплив навколишнього середовища. Крім того, розглядається питання динамічно стабільних систем. Якщо системи стабільні в цілому, але є локально нестійкі режими, то це системи, що знаходяться в перехідному стані. Для таких систем відсутня постановка вимірювальної завдання, поки вони не перейдуть в стабільний стан.

В іншому випадку постановка вимірювальної завдання пов'язана з вивченням режиму динамічного хаосу в НДС. Такий випадок представляє цілу область

синергетики і розглядає можливість і умови розвитку нерегулярних нестабільних режимів в динамічних системах [176].

2.6.1 Властивості хаотичної динаміки як основний фактор впливу на результат вимірювання

Розглянемо дві основні причини розвитку хаотичних режимів на прикладі математичної моделі НДС. Перша — це нестійкість рішення. При цьому траєкторії системи в фазовому просторі експоненціально розбігаються [72]. Це властивість самої НДС, без зовнішніх шумів, яка відіграє визначальну роль у формуванні таких якостей НДС, як непередбачуваність поведінки [72], [73]. Для нестійкої системи характерний процес наростання малих збурень у часі.

У лінійній системі нестійкість призводить до наростаючого руху, який в фазовому просторі представляється траєкторією, що йде на нескінченність. У НДС завжди є механізм нелінійного обмеження наростання малих збурень. Якщо система — дисипативна НДС, то її динаміка призводить до стиснення фазового об'єму в часі, а траєкторії прагнуть до деякій обмеженій області, що притягує, тобто до аттрактора. Спостерігається локальна нестійкість в одній частині фазового простору та стійкість в іншій, що характерно для дивного аттрактора.

Друга причина розвитку хаотичного режиму — це чутливість до початкових умов. Якщо вирішується диференціальне рівняння, що описує поведінку НДС (1.2), то повинна виконуватися теорема про існування одного рішення (задача Коши) згідно якої кожному значенню початкових умов НДС відповідає одне єдине рішення [183]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.11)$$

Це рішення визначається лише початковими умовами $x(t_0) = x_0$ і, отже, є цілком передбачуваним. Внаслідок наявності локальної нестійкості в НДС це

рішення може носити складний нерегулярний, заплутаний характер, але, як рішення Коши, воно все одно залишається передбачуваним.

Якщо вирішувати цю ж задачу, але з незначно зміненими початковими умовами, рішення буде іншим. В цьому і проявляється чутливість НДС до початкових умов: малі відхилення початкових умов в початковий момент можуть призводити до великих відхилень в стані системи через час t [184]. При цьому виникає питання про те, що розуміти під точністю завдання початкових умов, якщо існує така чутливість.

Таким чином, фізичні процеси, що супроводжують хаотичний стан НДС слід розглядати як основний фактор впливу на результат вимірювання.

2.6.2 Підхід до вимірювань із позицій гаусдорфових множин

При підході до завдання оброблення результатів вимірювань, як до аналізу властивостей нескінченної множини, заданої в топологічному просторі, можна скористатися апаратом теорії множин [185].

Аналіз множини результатів вимірювань в НДС показав наявність властивості самоподібності, або масштабної інваріантності (скейлінга). Масштабна інваріантність, як правило, описує співвідношення між просторовим або часовим масштабом спостереження та величиною відхилення спостережуваного параметра. Масштабна інваріантність може бути як детермінованою, так і статистичною, тобто визначається за статистичними усередненими характеристиками об'єктів або процесів.

Ці властивості можуть дозволити отримати якусь характеристику, яка оцінює якість вимірювань. Тобто, з'являється можливість використовувати не статистичні методи для оцінювання якості результатів вимірювань, а методи аналізу властивостей множин в топологічному просторі.

Специфіка множин результатів вимірювань, полягає в тому, що вони є гаусдорфові. Топологічний простір X є гаусдорфовим, якщо для кожної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують такі відкриті множини U_1 та U_2 , що $x_1 \in U_1$ та $x_2 \in U_2$, для яких $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. З цього визначення випливає, що якщо елементи

множини відділені один від одного непересічними околицями, то вони складають гаусдорфову множину, для якої існує своя гаусдорфова (неціла) метрика [186].

Як правило, остаточною результатом вимірювань є визначення або оцінювання множини, до якої прагне або може прагнути спочатку отримана множина результатів вимірювань. Це означає, що за отриманою експериментальним шляхом множиною необхідно визначити послідовності множин та їх збіжність до множини зі стабільною структурою, яка є фракталом. Оскільки фрактал — це компактна множина, його лінійні розміри можуть характеризувати невизначеність результату вимірювання у випадку НДС. Гаусдорфова розмірність множини може мати дробове значення: $0 < D_H < 1$, $1 < D_H < 2$, $2 < D_H < 3$. З цього випливає, що якщо розмірність множини дорівнює топологічній розмірності, то поведінка системи підпорядковується детермінованим динамічним закономірностям. Множина результатів вимірювань в такій системі має межу, яка описується конкретною величиною або числом.

Виходячи з припущення про гаусдорфову розмірність множини, яка відображає часові ряди результатів вимірювання в НДС, в теоретичній моделі вимірювання в НДС використовується фрактальна розмірність D_H (1.5) та фрактальні шкали [1], [4].

2.7 Математичний аналіз впливу динаміки системи на результат вимірювань

2.7.1 Диференційний аналіз впливу динаміки системи.

Принципи побудови моделей вимірювань і оцінки їх результатів єдині для різних дослідницьких завдань. Процес розвитку моделей можна розділити на три етапи. Перші два етапи спрямовані на розробку моделей та методів коректного обліку випадкових і систематичних збурень при вимірюванні фізичних величин, що характеризують стійкі статичні та динамічні системи. Третій етап став формуватися на основі результатів теоретичних і експериментальних досліджень хаотичних режимів НДС [1].

На прикладі НДС, які описані логістичним рівнянням, розглянемо, яким чином параметри стохастичного режиму поведінки детермінованої НДС впливають на оцінку результатів вимірювань.

Для дослідження умов, за яких динаміка системи впливає на випадковий розкид результатів вимірювань розглянемо динамічні системи, які описуються диференціальним рівнянням виду [191]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, \mu) \quad (2.12)$$

із початковими умовами $x(t=0) = x_0$ та керуючим параметром μ .

Конкретний вигляд функції $f(x, \mu)$ визначається фізичними властивостями досліджуваної системи. Відомий в літературі окремий випадок рішення рівняння (2.12) в дискретно-різницевої вигляді:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (2.13)$$

описує велику кількість реальних нелінійних систем [192].

У загальному випадку на характер поведінки цього однопараметричного квадратичного відображення рівняння (2.12) впливає чисельне значення керуючого параметра μ . Реальному стану фізичної системи відповідають стійкі точки (2.13). Відповідно й результат вимірювань величини буде залежати від наявності межі $x(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\mu)$.

Залежно від чисельного значення параметра μ , який може набувати значень від 0 до 4 результати відображення можуть якісно відрізнитися один від одного. Для встановлення умов, за яких поведінка системи впливає на результати вимірювань досить розглянути на якісному рівні зміну характеру рішення рівняння (2.13) в залежності від значення керуючого параметра μ [193].

1) при $0 < \mu \leq 1$ рішення являє собою стійку нерухому точку, що притягує, $x = 0$;

2) при $1 < \mu \leq 3$ квадратичне відображення має одну єдину нерухому точку $x^{(1)}$, що притягує, яка характеризується значенням $x^{(1)} = 1 - 1/\mu$. Це значення встановлюється за будь-яких початкових умов і являє собою рівняння вимірювання величини. Результати прямих або непрямих спостережень параметра, повністю забезпечують визначення середнього значення $\overline{x^{(1)}}$ та стандартної невизначеності $u_c(x^{(1)})$:

$$\overline{x^{(1)}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pm (1 - 1/\mu_k), \quad (2.14)$$

$$u_c(x^{(1)}) = 1/\mu^2 u_c(\mu). \quad (2.15)$$

Тобто невизначеність результату вимірювання значення величини $x^{(1)}$ залежить тільки від невизначеності оцінки величини параметра μ ;

3) при $3 < \mu \leq 3,44948$ замість однієї нерухомої точки, в рішенні рівняння (2.13) утворюються дві стійкі нерухомі точки, значення яких визначаються параметром μ .

$$x^{(2),(3)} = \left[\mu + 1 \pm (\mu^2 - 2\mu - 3)^{1/2} \right] / 2\mu. \quad (2.16)$$

Середнє значення стійких точок і невизначеність результату вимірювання цих значень, також як і в попередньому випадку, визначаються результатами вимірювання параметра μ ;

4) при $3,5699 < \mu \leq 4$ інтервал значень параметра μ представляє особливий інтерес. Перетворення (2.13), що реалізовується при знаходженні параметра μ в зазначеному інтервалі значень, призводить до хаотичного зміни значень величин

x_n всередині одиничного квадрата області визначення [194]. Тобто коли $n \rightarrow \infty$, кожна нова ітерація призводить до встановлення значення x_n , яке не збігається з попереднім x_{n-1} . У підсумку, результатом ітерацій розглянутого квадратичного відображення, за будь-яких початкових умов, не стає стійка гранична точка, а область всіх можливих значень x_n . У цій області випадкові значення описуються функцією щільності ймовірностей $p(x_n, \mu)$, яка в свою чергу залежить від параметра μ .

Властивості квадратичного відображення такі, що для кожного значення μ_i формується своя функція щільності ймовірності $p(x_n, \mu)$. Для кожного значення μ_i , середнє значення \bar{x}_i буде визначатися через відповідну функцію щільності ймовірності:

$$\bar{x}_i = \int_0^1 xp_i(x, \mu_i) dx. \quad (2.17)$$

Особливість рівняння (2.17) полягає в тому, що функції p_i в силу експоненційної чутливості відображення до початкових значень μ_i , будуть сильно відрізнятися одна від одної. Малі зміни параметра μ_i призводять до істотної зміни характеру функції $p(x_n, \mu_i)$, що в свою чергу призводить до істотної зміни значення \bar{x}_i . Квадратичне відображення має властивість ергодичності та перемішування з експоненційною розбіжністю близьких траєкторій [195].

Середнє значення результату вимірювання \bar{x}_i визначається як:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m+\infty} \int xp(x, \mu_i) dx, \quad (2.18)$$

а стандартна невизначеність як:

$$u_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2. \quad (2.19)$$

Результат вимірювання \bar{x} буде визначатися тільки динамікою квадратичного відображення, яка істотно залежить від значення керуючого параметра μ . Два близьких значення цього параметра призводять до двох істотно відмінних одне від одного рішень. Це означає, що при нормальному законі розкиду значень параметра розкид значень \bar{x}_i буде аномально великим.

Нехай інтервал між спостереженнями за величиною x_n дорівнює τ , а кількість спостережень дорівнює N . Час T характеризує інтервал між послідовними відображеннями, реалізованими рівнянням (2.12).

Якщо $N\tau \leq T$, то в результаті вимірювання на n -ій ітерації буде встановлено значення з невизначеністю (2.19), яка дорівнює Δx_n та визначається невизначеністю $\Delta \mu$. Однак після чергового відображення буде встановлено інше значення x_{n+1} , вимір якого буде виконано з такою ж невизначеністю $\Delta \mu$. І кожен раз, як тільки відбувається чергове відображення, встановлюється нове, випадковим чином виміряне, значення вимірюваної величини.

Якщо час τ між вимірами величини x більше інтервалу часу Δt , протягом якого реалізується відображення, то в результаті багаторазових спостережень буде зафіксований ряд випадкових значень x_n . При цьому ні випадковий розкид значень початкової умови x_0 , ні випадковий розкид значень параметра μ не впливають на область випадкових змін значень x . Оскільки область хаотичної зміни величини x обмежена, то можна цю область розглядати як стійкий стан, але в даному випадку він буде статистично «розмазати» за рахунок поведінки досліджуваної системи.

Випадкова послідовність значень x_n , обумовлена динамікою поведінки системи, характеризується функцією щільності ймовірності розподілу $p(x_n, \mu)$, властивої тільки даній системі [192].

Зауважимо, що описане диференційне аналізування системи, або процесів, які описані виразом (2.12), якщо це не математично змодельовані, а реальні фізичні системи, край важке, у більшості випадків неможливе завдання. Тому у випадку дослідження НДС із хаотичною поведінкою у теоретичні моделі вимірювання використовуються топологічні інструменти аналізу, серед яких — фрактальний аналіз процесів та систем.

2.7.2 Фрактальний аналіз динаміки систем

Інформаційні властивості фрактальних моделей та фрактальний аналіз показали ефективність свого застосування при вирішенні широкого кола інформаційних завдань. У різних областях науки зібрані пов'язані між собою відомості про широку поширеність в природі ступенних закономірностей. Прикладами є закон Гуттенберга-Ріхтера розподілу землетрусів за магнітудою, закон Зіпфа залежності населення міст від їх рангу, фліккер-шум і ін. [196] – [198]. Такі закономірності є наслідком нелокальності взаємодій в дисипативних НДС, якими є більшість із реальних систем навколишнього світу. Багато з спостережуваних закономірностей можна досліджувати, використовуючи фрактальний аналіз просторових структур, якими є фазові портрети НДС, та часових рядів результатів вимірювання ДЗ НДС.

Для визначення фрактальної розмірності чисельних рядів використовується статистичний метод нормованого розмаху (R/S -аналіз або R/S -метод), виведений емпіричним шляхом П. Херстом (1.13) — (1.15) [87]. За допомогою R/S -методу можна аналітично обчислити розмірність гладкої лінії та площини, що дозволяє оцінювати динаміку процесу за його графічним відображенням.

Поширений й інший метод визначення фрактальної розмірності, який зводиться до побудови в подвійному логарифмічному масштабі графіка залежності R/S від N і визначення тангенса нахилу прямої H_R . Практично побудова графіка для часового ряду довжиною N здійснюється наступним чином. Спочатку обчислюється R/S для всього ряду, потім ряд ділиться навпіл і обчислюється для двох рядів довжиною $N/2$, причому, береться їх середнє

значення. Надалі ряди послідовно діляться навпіл і обчислюється середнє значення, яке ставиться у відповідність довжині ряду $N/2n$.

Задамо пряму лінію рівнянням, де n змінюється в інтервалі від 1 до N . Розмах R і СКВ S (1.14), обчислені для функції збільшення, дорівнюють відповідно:

$$R = \frac{a}{8} \cdot N^2, \quad S = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{N(N+1)}, \quad (2.20)$$

Залежність R/S від N (1.15) має вигляд:

$$\ln(R/S) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \ln(N) + \ln\left(1 - \frac{1}{2N}\right). \quad (2.21)$$

Із (2.21) випливає, що для $N \gg 1$ показник Херста $H_R = 1$. Показник Херста H_R — параметр, який в залежності від фрактальної структури вихідної множини може приймати значення в інтервалі від 0 до 1. Аналогічний результат можна отримати для будь-якої гладкої кривої, наприклад, для параболи, гіперболи або для синусоїди з періодом, порівняним із N .

Таким чином, R/S -метод дозволяє обчислювати топологічну розмірність в тих випадках, коли фрактальна множина вироджується в звичайну евклидову множину. На рис. 2.1 наведено графік залежності $\ln(R/S)$ від $\ln N$ для лінійної та синусоїдальної функцій (пряма 1), отриманої за допомогою чисельних розрахунків. За великих N коефіцієнт нахилу графіка дорівнює 1. Отже, розмірність $D_H = 1$, збігається з топологічною розмірністю гладких ліній. Другий граничний випадок відповідає двовимірному евклидову простору, топологічна розмірність якого $D_H = 2$.

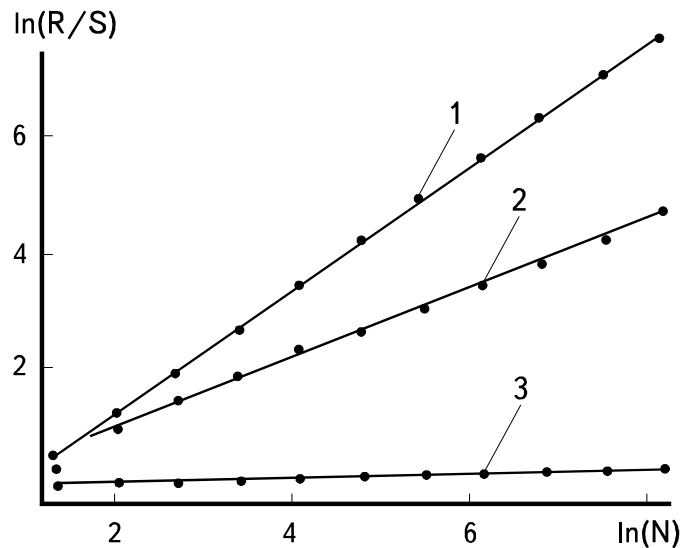


Рис. 2. 1. Залежність $\ln(R/S)$ від $\ln N$:

1 — для лінійної функції, параболи і синусоїди; 2 — для стандартного гауссова процесу; 3 — для двозначної функції.

Скористаємося рядом значень, що чергуються $x_i = a_1, i$ — парні, $x_i = a_2, i$ — непарні. Геометрично цей ряд можна представити як дві паралельні лінії, за допомогою яких задається площа. Для такого ряду розмірність обчислюється аналогічно при цьому $\ln(R/S) = \ln(1 - 1/2N)$. Графік чисельних розрахунків залежності R/S -функції від N для двозначної функції наведено на рис. 2.1, (пряма 3). З нього видно, що для двозначної функції $H_R=0$ і фрактальна розмірність $D_H=2$. Таким чином, якщо вважати, що площа задана двома прямими, то обчислена розмірність дорівнює евклідовій розмірності площини. Звідси випливає, що у всіх інших часових рядів, що мають випадковий розкид значень елементів, фрактальна розмірність буде перебувати в інтервалі $1 < D_H < 2$ [1].

Дослідження характеристик часових рядів, для яких $0 < D_H < 1$, попередньо було проведено з випадковими процесами, які можна чисельно моделювати. В першу чергу були використані стандартні алгоритми, що моделюють гауссів випадковий процес. На рис. 2.1 (пряма 2) представлена залежність для гауссова

процесу. Параметр, визначений за нахилом графіка дорівнює $H_R=0,504$, і, практично, в межах похибки, що не перевищує 0,002, залишається постійним для всіх реалізацій. Таким чином, величина фрактальної розмірності гауссова процесу як самоафінної множини розташовується строго посередині між топологічними розмірностями лінії і площини. Для гауссова процесу з незалежними приростами розмірність $D_H=1,5$ ($H_R=0,5$).

Особливий інтерес представляє визначення фрактальної розмірності D_H випадкових часових рядів, побудованих за результатами чисельного моделювання динамічного хаосу. Системи, які породжують динамічний хаос: система Лоренца, двомірне відображення Хенона та логістичне рівняння — вже добре досліджені, і для них значення D_H відомі. При цьому в роботах із дослідження динамічного хаосу аналізовані множини розглядалися як самоподібні і для них фактично обчислювалася геометрична розмірність в заданому фазовому просторі.

Часові ряди, які отримані в результаті чисельного рішення системи рівнянь, що описують динамічний хаос, представляються як самоафінні, і до них, для обчислення D_H , застосовувався R/S -метод. При цьому отримані значення D_H істотно відрізняються від ємнісний та кореляційної розмірності [200]. Однак, з точки зору уявлення динамічного хаосу, як самоафінного процесу, які можна описати випадковими фракталами, отримані результати добре фізично інтерпретуються.

Використовуючи логістичне рівняння $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ (1.31), можна побудувати, в залежності від значення параметра r , як періодичні, так і випадкові часові ряди. Відомо, що якісна зміна динаміки відображення, що описується цим рівнянням, починається зі значення $r=3$ (рис. 1.8). У міру зміни r від 3 до 3,5699 відбувається чотири біфуркації подвоєння періоду. При подальшому збільшенні r до $r=4$ спостерігається режим динамічного хаосу. Таким чином, змінюючи параметр r , D_H можна визначати як для детермінованих, так і для випадкових процесів. Так, якщо $r \leq 3,5699$, рішеннями цього рівняння є дво-, чотири- і шостизначні періодичні ряди, для яких $D_H=2$ ($H_R=0$). Для стохастичних рядів,

що відповідають значенням $r > 3,58$, D_H зменшується і при $r=4$ $D_H=1,46$ ($H_R=0,54$). Цей результат представляє особливий інтерес, тому що з нього випливає, що можливі ситуації, коли випадкові процеси з абсолютно різними функціями щільності розподілу мають однакові або близькі значення фрактальної розмірності.

Таким чином, параметр Херста H_R або фрактальна розмірність D_H характеризує зовсім інші внутрішні особливості випадкового процесу — самоподобу змін на різних масштабах і характер домінуючого випадкового процесу (випадкові скачки, випадкові дрібномасштабні послідовні зміни і т.д.).

Застосування R/S -методу до змодельованих випадкових процесів, коли є можливість шляхом варіювання величини параметрів r змінювати характер випадкового процесу, показало, що фрактальну розмірність самоафінної множини формально можна обчислювати завжди. Зокрема, використовуючи моделі динамічного хаосу можна створювати випадкові часові ряди, структура яких може бути самоподібною в статистичному сенсі, тобто може бути представлена випадковими фракталами.

Результат $H_R \leq 0,55$ представляє інтерес в тому сенсі, що часові реалізації динамічного хаосу, з точки зору теорії випадкових фракталів, аналогічні реалізації випадкового гауссова процесу. Такий близький збіг значень фрактальної розмірності розглянутих реалізацій хаосу та випадкового гауссова процесу можна пов'язати з такими загальними для них характеристиками, як стаціонарність і ергодичність.

Для природних процесів характерним є збільшення значення H_R до 0,8-0,9 ($D_H=1,1-1,2$) [200]. Поведінку систем із таким значенням D_H було названо персистентною, тобто такою, коли повільні випадкові відхилення домінують над більш високочастотними випадковими збуреннями. Поведінка систем, для яких характерні значення $H_R < 0,5$, називається антиперсистентною, і в часовому ряді спостерігається домінування випадкових стрибків над повільними змінами досліджуваної величини. При цьому персистентним процесам притаманне прояв

прогнозованої тенденції в довгостроковій поведінці, а антиперсистентним — в її відсутності.

Таким чином, якщо в хаотичній поведінці досліджуваної системи домінують передбачувані (в статистичному сенсі) процеси, то, і така поведінка є персистентною. У той же час, якщо в хаотичній поведінці домінують стрибкоподібні зміни досліджуваної величини, то таку поведінку можна представляти як антиперсистентне, для якої $D_H \rightarrow 2$.

Дотримуючись результатів аналізу, можна сформулювати умови граничних випадків персистентної та антиперсистентної поведінки. При $H_R=1$ спостерігається повністю персистентна поведінка, тобто передбачувана детермінована поведінка, яка характеризується евклідовою множиною з топологічної розмірності D_H , рівною 1. Прикладами повністю персистентної множини, як було показано вище, є пряма та синусоїда. При $H_R=0$ поведінку систем можна розглядати як повністю антиперсистентну, тобто в цьому випадку спостерігаються стрибкоподібні збільшення та зменшення значення досліджуваної величини. Прикладом повністю антиперсистентної поведінки є досліджена вище двозначна функція.

При розрахунку D_H необхідно правильно оцінювати існування тренда часових рядів. Його наявність може істотно вплинути на коректність обчислення фрактальної розмірності. Наявність тренда в часовому ряді призводить до зламу графіка залежності R/S від N . При цьому частина графіка, яка відповідає великим інтервалам (тобто великим N), порівняно із характерним часом тренда, має $H_R > 0,5$, а друга частина має $H_R < 0,5$ і описує фрактальну розмірність часового ряду під час відсутності тренда.

Цей результат дозволяє застосовувати R/S -метод для оперативного (без проведення спектрального аналізу) виявлення наявності тренда в експериментальних результатах. З іншого боку, чутливість R/S -методу до наявності слабкої детермінованої компоненти часового ряду ускладнює

оперативне визначення за експериментальними даними та потребує попередньої обробки останніх.

2.8 Фрактальний аналіз результатів фізичного експерименту

2.8.1 Фрактальний аналіз дослідження стабільності частоти лазерів

Прикладом практичного застосування R/S -методу є аналіз експериментальних даних, отриманих при вимірюванні нестабільності частоти He-Ne лазерів [1], [201]. Ці пристрої застосовуються в лазерних вимірювальних інтерферометрах як джерела міри довжини, від стабільності та відтворюваності параметрів яких залежить похибка (невизначеність) лінійних вимірювань, що здійснюються за допомогою інтерферометрів та характеристики еталонів оптичних частот.

У зв'язку з особливим значенням He-Ne лазерів для задач вимірювання важливу роль відіграють методи аналізу його характеристик, в тому числі й таких, які засновані на нових фізичних принципах. Зокрема, становить інтерес використання ідеї фрактальної структури випадкових та хаотичних процесів для аналізу нестабільності частоти та визначення випадкових уходів частоти. З позицій теорії систем стабілізовані за частотою лазери можна розглядати як відкриті ієрархічні НДС із функцією самоорганізації,

Дослідження R/S -методу та умов його використання дозволили застосувати його для аналізу часових рядів вимірювань стабільності частоти He-Ne лазерів. Постановка та проведення експерименту докладно викладені в роботі [201], а аналіз результатів і обговорення представлені в монографії [1].

Для цієї задачі використовується гетеродинний метод, який забезпечує вимірювання стабільності частоти лазера шляхом визначення поведінки різницевої частоти між частотою опорного високостабільного He-Ne лазера та частотою досліджуваного He-Ne лазера. Коли стабільність опорного лазера на два порядки вище стабільності досліджуваного лазера, то всі часові зміни різницевої частоти в радіодіапазоні приписуються досліджуваному лазеру.

При проведенні експерименту час усереднення частотоміра встановлювався 0,1 і 1 с. Кожна серія вимірювань складалася із 4098 вимірювань. Були досліджені стабілізовані за частотою He-Ne лазер №1 та лазер №2 із довжиною хвилі $\lambda=0,63$ мкм. Обидва лазери мають загальну за принципом роботи систему стабілізації частоти випромінювання, засновану на терморегулюванні довжини резонатора лазера в залежності від сигналу розладу.

За часовими рядами вимірної стабільності частоти цих лазерів була обчислена фрактальна розмірність, яка перебувала в інтервалі $D_H=1,05-1,1$. Графіки $\ln(R/S)$ -функції для часових рядів відносних змін частоти лазерів представлені на рис. 2.2.

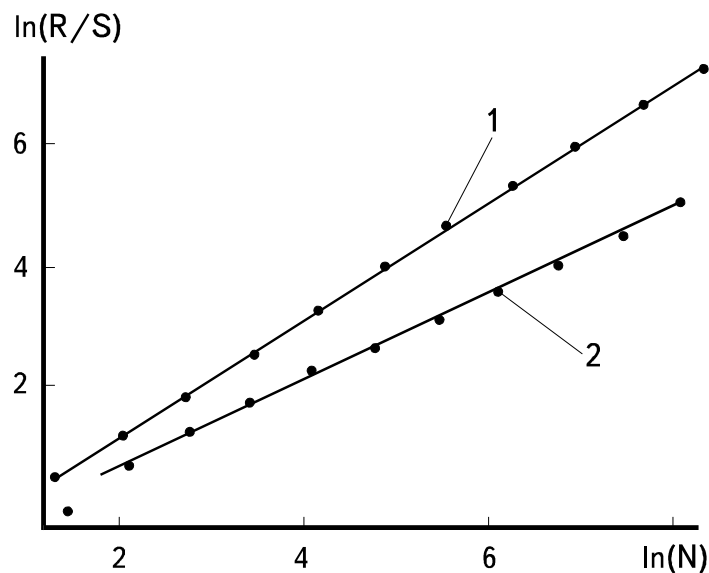


Рис. 2. 2. Залежність $\ln(R/S)$ -функції від $\ln N$

для відносних змін частоти лазерів: 1 — лазер № 1; 2 — лазер №2.

Так як параметр D_H для цих рядів близький до 1, то з цього випливає, що поведінку частоти стабілізованих лазерів описаного типу можна розглядати як фрактальну в досить широкому часовому інтервалі. Величина фрактальної розмірності вказує на те, що лазери відносяться до систем із персистентною поведінкою. Це, в достатній мірі прогнозований результат, якщо врахувати, що система автопідстроювання частоти лазера коригує зміни частоти шляхом

накопичення інформації за попередні інтервали часу. Звідси випливає, що фрактальна розмірність характеризує якість системи стабілізації частоти.

Як показали спостереження, стабільність частоти не можна розглядати як стаціонарний процес, так як від серії до серії вимірювань від функції розподілу може істотно змінюватися. У той же час, фрактальна розмірність, що обчислюється для всіх цих вимірів, залишається постійною та не залежить від функції розподілу. Цей факт дозволяє зробити висновок, що в умовах нестаціонарного процесу, коли традиційні методи обробки випадкових часових рядів застосовувати некоректно, об'єктивною оцінкою або характеристикою випадкового процесу може бути саме D_H .

Стосовно до стабілізованих за частотою лазерів можна розробити критерії якості відтворюваності частоти, що базуються на фрактальній розмірності. Зрозуміло, що якщо $D_H \rightarrow 1$, то спостерігаються випадкові відходи частоти лазера від номінального значення. У той же час, якщо $D_H \rightarrow 2$, то мають місце скачки значень оптичної частоти. Звідси випливає, що відтворюваність частоти лазера, який використовується в складі лазерних інтерферометрів для довготривалих високоточних вимірювань, повинна характеризуватися фрактальною розмірністю поблизу $D_H=1,5$. У цьому випадку на точність вимірювань не впливатимуть ні випадкові відходи, ні різкі стрибкоподібні зміни частоти.

Грунтуючись на можливості представлення випадкових часових рядів у вигляді самоафінних множин, досліджені фрактальні властивості часових рядів вимірювань. З цією метою застосовано R/S -метод, який дозволяє визначати розмірність випадкових фракталів. За допомогою даного методу можна обчислювати топологічну розмірність множин в одновимірних і двовимірних евклідових просторах. Фрактальна розмірність не залежить від функції розподілу випадкових величин, а залежить від співвідношення між двома основними характеристиками випадкових процесів — випадковий дрейф і випадкова стрибкоподібна зміна вимірюваної величини. При цьому, в граничному випадку, коли спостерігається гладка детермінована (лінійна або синусоїдальна) поведінка,

$D_H=1$, а коли спостерігається детермінована розривна (стрибкоподібна) поведінка $D_H=2$. Реальні випадкові процеси мають D_H в інтервалі від 1 до 2. При цьому, не тільки випадковий гауссів процес має $D_H=1,5$, а й цілий ряд випадкових процесів, породжуваних системами з динамічним хаосом, також має розмірність, близьку до 1,5. Таким чином, дослідження стабільності частоти лазерів за допомогою R/S -методу показали, що зміни частоти випромінювання лазерів, у яких є система активної стабілізації частоти, можуть являти собою процеси, описувані випадковими фрактальними множинами.

2.8.2 Фрактальний аналіз дослідження електричних величин

Норми якості електричної енергії в системах електропостачання загального призначення регламентуються міждержавним стандартом ГОСТ 13109-97 «Електрична енергія. Сумісність технічних засобів електромагнітна. Норми якості електричної енергії в системах електропостачання загального призначення» [202]. Якість є інтегральною характеристикою, що відображає відповідність основних характеристик продукції очікуванням споживача та вимогам нормативних документів. Однією з характеристик якості електричного струму в мережі є відповідність значення його напруги нормам.

З позицій теорії систем електричну мережу можна розглядати як відкриту НДС із функцією самоорганізації, а напругу електричного струму в мережі U , як одну із її ДЗ. Така НДС піддана зовнішнім впливам — збільшення або зменшення навантаження. Зовнішні впливи призводять до зміни значення ДЗ стохастичним чином. При зменшенні зовнішнього впливу ДЗ прагне повернутися до свого рівноважного стану. До вимірювання параметрів електричної мережі можуть бути застосовані підходи та моделі вимірювання ДЗ НДС [1] – [56].

У роботах [6], [8] відображені результати дослідження динаміки напруги електричної мережі загального призначення методом фрактального аналізу результатів вимірювання. Як об'єкт дослідження було обрано електричну мережу загального призначення. Мережа характеризується нестабільними значеннями напруги електричного струму у вечірні години та вихідні дні, в період

максимального навантаження. Після закінчення часу максимального навантаження значення напруги стабілізується. Таку мережу можна вважати відкритою НДС із функцією самовідновлення, параметри якої схильні до зовнішніх впливів.

При проведенні дослідження виконувались вимірювання напруги в інтервал часу з 17:15 до 24:00, формувалася часовий ряд результатів вимірювання. Вимірювання проводилися за наступною схемою. Кожні п'ятнадцять хвилин із інтервалом в п'ять секунд виконувався ряд вимірювань ДЗ. Така схема вимірювального експерименту викликана необхідністю оцінити динаміку поведінки НДС на всьому інтервалі спостереження та в окремі проміжки часу. Результати вимірювання представлені на рис. 2.3.

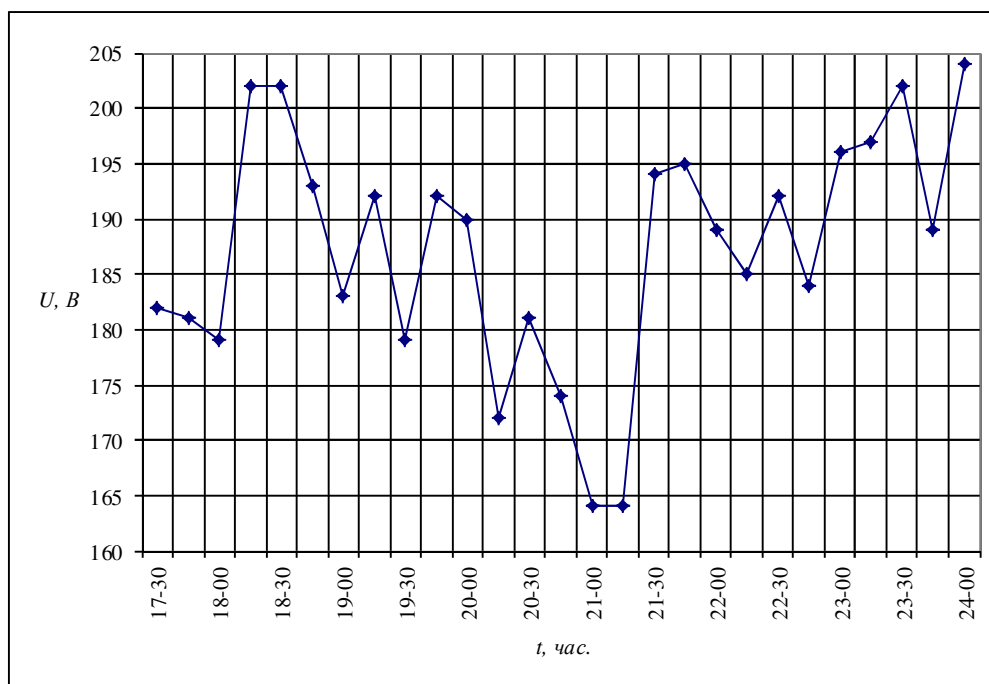


Рис. 2.3. Результати вимірювання напруги в електричній мережі.

Згідно з рис. 2.3 в спостережуваний період напруга проявляла яскраво виражену динаміку. Мали місце нетривалі інтервали стабільності і значних спадів значень ДЗ. Вимірювання показали, що мінімальне значення $U_{\min} = 159$ В спостерігалось о 21:15. Максимальне значення $U_{\max} = 206$ В спостерігалось о момент часу 24:00. Ці значення можна співвіднести з максимальним і

мінімальним рівнями енергоспоживання в мережі. Середнє арифметичне значення напруги склала $\bar{U}=187$ В. Значення $U=220$ В за період спостереження зафіксовано не було (рис.2. 3). Згідно з основними положеннями моделі вимірювання ДЗ НДС [3] отримані значення U_{\min} та U_{\max} є межами аттрактора, що містить всі значення ДЗ за період спостереження: $U_{\min} \leq U(t) \leq U_{\max}$.

Для аналізу результатів вимірювання був досліджений часовий ряд $U(t)$. Розраховано значення показника Херста H_R та фрактальної розмірності D_H для всього інтервалу спостережень і для деяких, характерних інтервалів часу, коли ДЗ $U(t)$ або зберігала свою динаміку поведінки, або змінювала на протилежну (таблиця 2.1).

Таблиця.2.1.

Результати розрахунку параметра Херста та фрактальної розмірності часового ряду результатів вимірювання напруги.

t	17:30	19:15	19:30	19:45	21:00	21:15	21:30	21:45	22:00	22:45	23:00	23:15	23:30	23:45	24:00
H_R	0,7	0,92	0,54	0,7	0,6	0,73	0,95	0,85	0,96	0,83	1	1	0,51	0,7	0,8
D_H	1,3	1,08	1,46	1,3	1,4	1,27	1,05	1,15	1,04	1,17	1	1	1,49	1,3	1,2

Фрактальний аналіз показав, що на всьому інтервалі спостереження динаміка ДЗ $U(t)$ близька до випадкової $D_H=1,47$. Проте, «білий шум» спостерігається при $D_H=1,5$. І такі значення фрактальної розмірності були властиві деяким інтервалам часового ряду $U(t)$, наприклад інтервалу спостережень, початих в 23:30. В інших випадках фрактальна розмірність приймала значення із інтервалу $1 \leq D_H \leq 1,5$. Це означає, що даний процес є персистентним. При цьому ДЗ зберігає тенденцію збільшення або зменшення свого значення та наближається до детермінованого закону. Окремі інтервали характеризуються різним ступенем

персистентності. Так, для інтервалу спостереження, розпочатого в 22:00 $D_H = 1,04$ і процес стає практично детермінованим, а для інтервалу спостереження, розпочатого в 19:30 $D_H = 1,46$ і процес стає практично випадковим. На окремих інтервалах часу, о 23:00, 23:15 ДЗ поводитьсь детермінованим чином $D_H = 1$. Отримані результати дослідження узгоджуються з роботами Херста, в яких він показав, що для багатьох природних процесів $H_R > 0,5$ [196].

Таким чином, результати фрактального аналізу часового ряду результатів вимірювання показали, що на коротких інтервалах спостереження ДЗ поведилася персистентним чином, зберігаючи динаміку поведінки. Згідно з основними положеннями теорії відкритих НДС система здатна зберегти динаміку своєї поведінки на інтервалі часу рівному часу прогнозування T_{for} (1.17). Після проходження цього часу НДС змінює характер своєї поведінки, що видно з результатів дослідження. Саме зміною характеру поведінки пояснюється той факт, що на довгому інтервалі спостереження поведінку спостережуваної НДС близька до випадкової $D_H = 1,47$.

Аналіз показав, що протягом часу спостереження, напруга змінювала характер своєї поведінки від випадкової до персистентної та регулярної. Застосування фрактального аналізу дозволяє оцінити динаміку НДС на всьому інтервалі спостереження та в окремі інтервали, що дозволяє визначити інтервали випадкової, персистентної або регулярної поведінки ДЗ.

2.9 Оцінювання невизначеності результатів вимірювань

2.9.1 Невизначеність результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах

Розглянуті фізичні моделі опису процесу вимірювання фізичної величини дозволяють сформулювати умови застосування таких понять як «похибка» та «невизначеність», і уточнити, в яких випадках доцільно використовувати перше або друге поняття.

Оскільки моделі вимірювань, як у випадку застосування «невизначеності», так і у випадку використання «похибки», спираються на фізично осмислений детермінізм, із цієї причини математичний апарат і результати його застосування в обох випадках дають дуже близькі результати.

Зауважимо, що при будь-якій постановці вимірювального завдання використовується лише наближена форма опису процесу вимірювання. Це випливає з того, що умова ергодичності, яка використовується при аналізі результатів вимірювань, завжди розглядається в наближеному варіанті.

Істотним, новим у фізичній постановці вимірювальних завдань є вимір ДЗ НДС в разі хаотичної динаміки. При цьому з'являється невизначеність результату вимірювання, пов'язана з відсутністю фіксованого значення вимірюваної фізичної величини. Тобто існує не одне значення, яке необхідно виміряти, а інтервал можливих значень фізичної величини, яку слід трактувати як невизначеність значення фізичної величини. У цьому випадку межею, до якої прагне результат вимірювань, є множина кінцевого розміру, яка може мати властивості фрактала. Результат вимірювань буде мати деяку «розмитість», а значить, оцінку якості вимірювання треба розглядати лише з позиції невизначеності (2.19).

Приклад з хаотичним поведінкою НДС може бути нетривіальним, але характерним для розуміння виникнення невизначеності в вимірювальній задачі. І в цьому сенсі, введення в дослідну практику поняття «невизначеності» слід розглядати як етап розвитку теорії досліджень НДС в умовах реальної постановки вимірювального завдання, в тому числі і для динамічних систем з складним, хаотичним поведінкою.

2.9.2 Положення GUM і властивості нелінійних динамічних систем

Як було показано раніше, для складання теоретичної моделі вимірювань в НДС в якості фізико-математичних основ повинні бути вибрані фізичні підходи і математичний апарат, які максимально відповідають фізиці процесів в НДС

Також був обгрунтований вибір «невизначеності вимірювань» в якості критерію оцінювання результатів вимірювань. На наступному етапі необхідно

перевірити можливість застосування прийнятих класичних методик оцінювання невизначеності вимірювань для випадку НДС.

Як було показано вище, основним міжнародно визнаним документом, який регламентує процедуру вимірів, аналізу та подання їх результатів є Керівництво із вираження невизначеності результатів вимірювань (GUM) [164]. В роботі [15] автором виконано аналіз основних положень керівництва GUM [164] і додатків до нього [187] на предмет їх відповідності основним властивостям НДС, які впливають на хід вимірювання та процедуру оцінювання їх результатів.

У керівництві [164] окреслено рамки застосування GUM. Передбачається, що відповідно до рівняння вимірювання $Y = f(X_1, \dots, X_N)$ існує спосіб визначення Y за результатами вимірювання вхідних величин X_i і отримане при цьому значення є єдиним. При цьому в разі НДС результат визначення може характеризуватися низкою значень, що заповнюють складним чином інтервал значень $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$.

Вхідні величини X_i в GUM асоціюються з випадковими величинами. Допускається, що вони (всі або частина з них) можуть бути пов'язані між собою, проте GUM розглядає, переважно, незалежні випадкові величини. Для опису пов'язаних величин керівництво допускає використання спільних розподілів. Вважається, що результати багаторазових вимірювань вхідних величин описуються розподілом Гаусса при оцінці невизначеності за типом А та прямокутним розподілом при оцінці невизначеності за типом В.

При цьому вхідні величини X_i НДС не завжди можуть бути представлені випадковими величинами. Як правило, вони пов'язані між собою та схильні до впливу ззовні навіть слабких флуктуацій. Динаміка ДЗ НДС має складний характер, тому апріорі стверджувати, що вхідні величини та результат вимірювання мають гауссовий або прямокутний розподіл не можна. Ключовий елемент класичної теорії вимірювання — ергодична гіпотеза в разі НДС з хаотичним поведінкою, як було продемонстровано раніше, підтверджується не завжди [1].

Коли застосування GUM дає некоректні результати вимірювання, наприклад, внаслідок складності рівняння вимірювання, для оцінки невизначеності пропонується використовувати метод Монте-Карло, викладений в додатку до GUM [187]. Метод рекомендується використовувати, коли лінеаризація рівняння вимірювання не забезпечує адекватного уявлення про процес, а розподіл вихідної величини не може бути описано нормальним розподілом або масштабованим зміщеним t -розподілом. Перевага даного методу полягає в тому, що запропонована трансформація розподілів вхідних величин дозволяє завжди отримати розподіл ймовірностей вихідної величини на основі розподілів вхідних величин.

Метод Монте-Карло можна застосувати для вираження невизначеності вимірювання добре визначеної фізичної величини, що характеризується єдиним значенням. Він завжди дає коректні результати у випадку лінійного рівняння вимірювання. Функція вимірювання $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ повинна мати безперервну похідну за компонентами вхідних величин X_i в околицях оцінок x_i . Функція розподілу для вихідної величини Y неперервна та строго зростаюча. Щільність розподілу ймовірностей Y має єдиний максимум і ін. При цьому в разі вимірювань в складних динамічних системах із хаотичною динамікою величина, що вимірюється, не може бути визначена єдиним значенням, а щільність розподілу може мати більше одного максимуму.

Таким чином, зіставлення можливостей GUM та методу Монте-Карло [187] з властивостями реальних НДС призводить до висновку про необхідність розвитку теорії не визначення результатів вимірювання для НДС із хаотичною динамікою, створення спеціальних підходів до вимірювання в таких системах і виборі адекватного математичного апарату і складання рівняння вимірювання.

Про необхідність індивідуального підходу до неординарних вимірювальних завдань говорять самі укладачі GUM, декларуючи, що оцінку невизначеності не слід розглядати, як стандартне завдання, що вимагає застосування типових математичних процедур. Успіх вирішення цього завдання залежить від розуміння фізики та критичного аналізу процесів, що протікають [164].

Для оцінювання та подання результатів вимірювання в НДС повинна бути використана така характеристика як «невизначеність», але з урахуванням описаних властивостей НДС.

2.10 Фізико-математичні основи вимірювань і побудови теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах

На початку розділу автором був сформульований ключовий принцип вимірювань в НДС, який говорить, що дослідник повинен «слідувати» за системою, припускаючи можливість зміни характеру її динаміки з детермінованої (в фізично виправданому сенсі) на випадкову та хаотичну.

При цьому, математичний апарат обробки та подання результатів вимірювань повинен бути обраний тільки після класифікації динаміки системи. Такий підхід істотно відрізняється від підходу, пропонованого класичною теорією вимірювання, який заздалегідь постулює ряд умов, яким відповідають об'єкт вимірювань і результати вимірювань.

Сформульований принцип вимірювань в НДС вимагав вироблення фізико-математичних основ вимірювань в НДС — ключових фізичних принципів і математичних положень, застосування яких дозволить виконати вимірювальний експеримент, класифікувати і чисельно описати об'єкт дослідження та процеси, що відбуваються в ньому [1].

2.10.1 Умови вимірювань в нелінійних динамічних системах

Розроблення теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах є ключовою умовою розвитку теорії дослідження НДС, яка крім створення моделі вимірювань, повинна охоплювати цілу низку основоположних питань, важливих для проведення коректних вимірювань.

Перше, повинні бути визначені основні властивості та характеристики вимірюваних величин (ДЗ), загальні для НДС різної природи.

Друге, на підставі цих властивостей повинні бути обрані принципи вимірювань (явища, що лежать в основі вимірювань).

Третє, слід поставити завдання вимірювань. Які ДЗ будуть виміряні та яку інформацію про систему потрібно отримати в ході вимірювального експерименту та подальшої обробки інформації.

Четверте, повинна бути побудована теоретична модель вимірювань і аналізу результатів вимірювань.

П'яте, повинні бути сформульовані підходи до створення рівняння вимірювань.

Шосте, повинні бути обрані математичні інструменти аналізу динаміки НДС.

Сьоме, повинна бути представлена форма оцінювання невизначеності та оформлення результатів вимірювання.

Рішення поставлених завдань при цьому повинні забезпечити виконання основних етапів процедури оцінювання невизначеності вимірювань. Згідно з GUM [164] основні етапи оцінки невизначеності включають в себе формулювання вимірювальної завдання, трансформування розподілів і отримання остаточного результату.

Формулювання вимірювальної завдання включає в себе:

1. завдання вихідної величини Y ;
2. виявлення вхідних величин $\vec{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ від яких залежить вихідна величина Y ;
3. складання рівняння вимірювання, яке визначає взаємозв'язок вихідної величини Y із вхідними X_i ;
4. приписування розподілу ймовірностей вхідним величинам.

Трансформування розподілів передбачає визначення щільності розподілу ймовірностей вихідної величини Y на основі щільності розподілу ймовірностей вхідних величин X_i і рівняння вимірювання.

Отримання остаточного результату припускає використання щільності розподілу ймовірностей вихідної величини Y для визначення:

1. оцінки математичного очікування вихідної величини Y у вигляді оцінки y ;

2. оцінці стандартного відхилення вихідної величини Y у вигляді стандартної невизначеності $u(y)$;
3. інтервал охоплення для величини Y , відповідний заданій ймовірності охоплення.

Основні результати досліджень, що стали основою для створення теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах, відображені в роботах [1] — [35] і ряді інших публікаціях. Ці дослідження були спрямовані на створення теоретичних основ і прикладних методів вимірювань ДЗ НДС. Результати роботи не суперечать основним принципам класичної теорії вимірювань [164], але доповнюють її в області вимірювань в НДС із хаотичною динамікою.

2.10.2 Вхідні та вихідні величини

Відповімо на питання про вхідні та вихідні величини при вимірюваннях в НДС. Вхідними X_i та вихідними Y величинами є ДЗ НДС. Їх загальні властивості були докладно описані в п. 1.9.2. серед яких:

- стан НДС в момент часу характеризується n -мірним вектором стану $X [X_1(t), \dots, X_n(t)]$, де $X_i(t)$ — i -а ДЗ і вихідною величиною $Y(t)$;
- із плином часу значення $X_i(t)$ та $Y(t)$ змінюються, але знаходяться в інтервалах $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$, $Y^{\min} \leq Y \leq Y^{\max}$;
- динаміка ДЗ носить складний, нелінійний характер, може змінюватися з випадкової на регулярну, хаотичну, і навпаки;
- фазовий портрет НДС в стані хаосу являє собою дивний аттрактор.

2.10.3 Вимірювання динамічних змінних як різновид динамічних вимірювань.

Проведемо класифікацію вимірювань ДЗ НДС. Вимірювання ДЗ НДС відносяться до динамічних вимірювань. Це можуть бути прямі вимірювання, за яких об'єктом вимірювання є одна або декілька ДЗ, або непрямі вимірювання, за

яких шукана величина визначається шляхом математичних операцій над безпосередньо вимірюваними величинами.

Так, у разі дослідження лазера, як НДС [38], [39], прямими вимірюваннями можуть бути визначені такі величини (ДЗ) як потужність і частота випромінювання, тривалість і частота проходження імпульсів. Непрямими вимірюваннями визначаються ступінь монохроматичності, стабільність і ентропія випромінювання, час передбачення ДЗ.

Основи класичної теорії динамічних вимірювань викладені в роботі [203]. Там же наведені два визначення цього терміна. Згідно [204] «під динамічними слід розуміти вимірювання, при яких відповідно до поставленим завданням засоби вимірювань застосовуються в динамічному режимі». Динамічний режим при цьому характеризується змінним вихідним сигналом засобів вимірювань. В роботі [205] динамічні вимірювання трактуються як вимірювання фізичної величини в процесі її зміни. Міжнародний словник із метрології [206] цього терміна не містить зовсім.

У [207] динамічні вимірювання розглядаються як сукупні вимірювання фізичної величини, яка цікавить дослідника, і часу. При цьому в [203] розглядаються динамічні характеристики засобів вимірювальної техніки без глибокого вивчення процесу, який описує вимірювані величини: «...на даному рівні спільноти динамічні вимірювання не ставлять перед дослідниками нових завдань, проте зміст і методи вирішення відомих завдань специфічні».

На думку автора. вимірювання ДЗ НДС, слід віднести до класу динамічних вимірювань, та повинні розглядатися як багатофакторний вимірювальний та дослідницький експеримент, Його мета полягає у вимірюванні та оцінюванні результатів вимірювання обраних ДЗ. За результатами вимірювань повинна бути отримана інформація про можливі значення ДЗ і характер динаміки системи, складені прогнози.

2.10.4 Принципи оброблення результатів вимірювань

Принципи оброблення результатів вимірювань ДЗ НДС, побудовані автором на фізико-математичних основах, представлених раніше, охоплюють явища, що лежать в основі вимірювань, які впливають на процес вимірювань і важливі для аналізу результатів. Принципи повинні враховувати динаміку окремих ДЗ НДС та їх кооперативні ефекти.

Облік і аналізування флуктуацій. Практично всі питання оброблення результатів вимірювань пов'язані з необхідністю обліку і аналізування флуктуаційних ефектів. Причини, які викликають флуктуації, можуть бути різні по своїй фізичній природі, але призводять вони до одного — випадкового розкиду значень вимірюваної величини [3].

Обробка результатів вимірювань при впливі флуктуацій на вимірювану величину дозволяє отримувати інформацію про усереднений вплив флуктуацій і здійснювати кількісну оцінку якості вимірювань. Як правило, обробка результатів вимірювань здійснюється з використанням адекватного математичного апарату, тобто фізична природа очікуваних випадкових відхилень визначає характер математичного опису та аналізу останніх.

Розвиток теорії обробки результатів вимірювань ґрунтується на вдосконаленні фізичних моделей впливу флуктуацій та розвитку на їх основі математичного апарату необхідного і достатнього для коректного опису флуктуацій.

Існуючі методи обробки результатів вимірювань засновані на статистичній фізиці, теорії ймовірностей і математичній статистиці, які розроблені і застосовуються лише в лінійних або в лінеаризованих системах. Крім того, завжди вважалося, що всі досліджувані системи, параметри яких вимірюються, повинні бути стійкими незалежно від характеру та величини зовнішнього або внутрішнього випадкового впливу. Тому аналіз результатів вимірювань завжди базувався на умові, що динаміка досліджуваної системи не вносить додаткового випадкового розкиду в результати вимірювань [203].

Вимірювання в динамічних системах завжди здійснювалися в умовах їх стійкого стану. Однак, аналіз результатів вимірювань, отриманих в умовах НДС, пов'язаний з реалізацією однієї з двох фізичних ситуацій. У першій ситуації, може спостерігатися мультиплікативний вплив зовнішнього шуму на НДС. У практиці немає скільки-небудь відпрацьованих методів вирішення цієї нелінійної задачі, крім методу лінеаризації. У другій ситуації поведінка НДС, незалежно від наявності зовнішніх шумів, може носити нерегулярний стохастичний або хаотичний характер і тоді аналіз випадкового розкиду результатів вимірювань необхідно проводити з урахуванням випадкової динаміки НДС.

Якщо перша фізична ситуація може бути вирішена в кожному конкретному випадку за допомогою прийомів лінеаризації системи поблизу точки вимірювання параметрів НДС, то друга вимагає глибокого фізичного аналізу умов проведення вимірювань і обробки їх результатів. Необхідно зрозуміти на рівні постановки завдання, яким чином нелінійна поведінка НДС може вплинути на результати вимірювань і яким чином здійснювати їх обробку. Це особливо важливо, оскільки априорі не ясно, що собою має представляти результат вимірювань в даному, конкретному випадку: або це наближення до єдиного значення фізичної величини, або це якась статистична оцінка по можливим реальним станам системи, які змінюються в часі відповідно до характеру розвитку динамічного хаосу.

Якщо вимірювання, виконані в НДС, то результати вимірювань, можна аналізувати, спираючись не на умови ергодичності випадкових процесів, для якого не вистачає математичних доказів застосування в НДС, а приймаються до уваги перемішувальність та експоненціальний розбіг траєкторій (рис. 1.6) [4].

Розподіл результатів вимірювання. Іншим принципово важливим для аналізу результатів вимірювань є той факт, що випадкові процеси є марківськими (2.7), які в більшості випадків можуть бути гауссовими.

Гауссова функція розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x - M)^2 / 2\sigma^2], \quad (2.22)$$

де M — математичне очікування.

як впливає із центральної граничної теореми [203], формується при впливі великої кількості некорельованих випадкових збурень. Тому, гауссовський марківський процес, будучи основою статистичного аналізу випадкових процесів, служить і базою для побудови методів оброблення результатів вимірювань в лінійних системах.

Якщо розподіл ймовірностей випадкової величини відрізняється від гауссової функції (2.22) (наприклад, логнормальний) і убуває на нескінченності повільніше ніж (2.22), то великих відхилень в результатах вимірювань стає більше, оскільки відхилення починають формуватися не під впливом багатьох незалежних, порівнянних за інтенсивністю флуктуацій, а на перший план виступає кілька найсильніших з них. Тому, в разі зменшення кількості факторів, що обурюють систему, тобто коли їх буде кілька, закономірно поставити питання, що станеться з функцією розподілу і, відповідно, з методами обробки результатів вимірювань? Саме з такою ситуацією стикається обробка результатів вимірювань в НДС з невеликою кількістю ступенів свободи, в яких існують стохастичні і хаотичні режими.

2.10.5 Топологічні методи аналізу результатів вимірювань

Аналіз практики експериментальних та теоретичних досліджень НДС, виконаний у першому розділі, показала ефективність якісних методів, заснованих на уявленні та описі поведінки динамічних систем в фазових просторах [199]. Для аналізу результатів вимірювання в НДС пропонується застосовувати кількісні методи дослідження, які засновані на властивостях множин в топологічних просторах.

У роботах [3] — [8] були сформульовані принципи подання результатів вимірювань в топологічному просторі. Таке уявлення дозволяє аналізувати

результати вимірювань, ґрунтуючись на властивостях множин в обраному метричному просторі із використанням топологічних методів аналізу властивостей цих множин. В [3] було запропоновано аналізувати результати вимірювань в гаусдорфовому топологічному просторі. Було показано, що в цьому випадку можна використовувати гаусдорфову розмірність множини як параметр, що дозволяє кількісно оцінювати досліджувану множину.

Для аналізу результатів вимірювань може бути використана модель фрактального уявлення вихідної множини результатів вимірювань, розмірність якої завжди може бути формально обчислена. Фрактальне уявлення множини вимірювання має низку переваг перед ймовірними методами, для яких в кожному конкретному випадку потрібно доводити придатність вибраних законів розподілу:

- по-перше, фрактальне уявлення множини та розрахунок фрактальної розмірності не пов'язані з ймовірними характеристиками випадкового розкиду результатів вимірювань, і, отже, можуть бути застосовані в будь-яких вимірювальних схемах і для будь-яких об'єктів вимірювань, як це було продемонстровано на прикладі лазера та електричної мережі.

- по-друге, застосування фрактальної розмірності можливо як у випадку динамічного хаосу, так і для випадкових або регулярних процесів, що дозволяє з єдиних позицій проводити аналіз результатів вимірювань в будь-яких, як лінійних, так і нелінійних динамічних системах.

- по-третє, знання фрактальної розмірності множини результатів вимірювань дозволяє здійснити стиснення вимірювальної інформації, щоб отримати достовірну оцінку дійсного значення вимірюваної величини.

Всі використовувані статистичні методи перетворення множин результатів вимірювань, виконуються з метою визначення граничної множини, що характеризує можливі дійсні значення вимірюваної величини. Так, ґрунтуючись на тому, що статистичні характеристики результатів вимірювань z повністю описуються функцією щільності ймовірностей $p(z)$ можна здійснити усереднення $\langle z \rangle$ або стиснення вимірювальної інформації відповідно до обраного інтегрального перетворення:

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz. \quad (2.23)$$

Таким же чином, визначаються діаметри множин, що включають в себе із установленою ймовірністю можливі значення вимірюваної величини. А саме, дисперсію σ , як діаметр цієї множини, обчислюється також шляхом стиснення вихідної множини за іншим законом:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \langle z \rangle)^2 p(z)dz. \quad (2.24)$$

Таким чином, використовувані методи оцінювання середнього значення $\langle z \rangle$, а також дисперсії результатів спостережень σ , є визначенням розміру одновимірних множин, вкладених одне в одне, елементи яких максимально наближаються до дійсного значення. Тобто гранична множина, яка визначається на основі імовірнісних оцінок, являє собою найбільш ймовірну множину значень вимірюваної величини.

Розвиваючи топологічний підхід до аналізу результатів вимірювань, звернемо увагу на два моменти, які також явно виражені в імовірнісних методах перетворення результатів вимірювань:

- по-перше, будь-яка аналізована множина результатів вимірювань завжди стискається за допомогою обраного перетворення;
- по-друге, результатом стиснення множини результатів вимірювань завжди є нерухома точка обраного перетворення. Саме це значення, яке задовольняє умові нерухомої точки перетворення, використовується та розглядається як дійсне значення вимірюваної величини.

Так, якщо впливати на $\langle z \rangle$ (2.23) обраним перетворенням $L[\langle z \rangle]$, буде отримана та ж сама величина, тобто:

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} L[\langle z \rangle] p(z) dz. \quad (2.25)$$

При обробці результатів вимірювань використовуються лише афінні перетворення, які включають в себе лінійні зміщення та зрушення. Всі відомі операції з результатами вимірювань є операціями стиснення, коли діаметр вихідної множини зменшується за певним законом $L[\langle z \rangle]$. Отже, перетворення повинно бути афінним і задовольняти двом умовам: по-перше, перетворення нефрактальних множин, таких як одномірна лінія або двомірна площина, має здійснюватися з коефіцієнтом рівним одиниці, тобто лінія перетворюється в лінію, а площина перетворюється в площину; по-друге, коефіцієнт перетворення фрактальної множини повинен визначатися значенням фрактальної розмірності вихідної множини.

2.10.6 Аналіз результатів вимірювань в умовах аттрактора

Ключовим елементом теорій НДС є аттрактор (простий або дивний), що відображає динаміку системи в фазовому просторі. Як було показано вище (п. 1.3.), Аттрактор розглядається як джерело якісної та кількісної інформації про значення і зв'язках між собою ДЗ і про динаміку НДС. На основі поняття аттрактора в практику досліджень і вимірювань в НДС автором в роботі [20] введений новий інструмент аналізу — «портрет вимірювань». Зауважимо, що вимірювання та аналізування результатів в умовах простих і дивних аттракторів мають принципові відмінності.

Аналіз результатів вимірювань в умовах простого аттрактора.

Відповідно до класичної теорії результати вимірювань в динамічних системах мають сенс лише в умовах простого аттрактора. В цьому випадку невизначеність результату вимірювань буде визначатися як швидкістю повернення системи в стійкий стан, так і впливом внутрішніх і зовнішніх флуктуацій. Оскільки початкові умови динамічної системи задаються деяким

імовірнісним розподілом, то невизначеність початкових умов визначається цими флуктуаціями.

Для забезпечення оцінки якості результатів вимірювань в умовах аттрактора в роботах [208] — [212], а пізніше у роботах [1], [15], [16], [23], були представлені ідеї про розвиток концепції та теорії невизначеності. Було показано, що в якості основних методів оцінки невизначеності вимірювань можуть бути використані ключові елементи якісної теорії диференціальних рівнянь та топології.

Розглядаючи динамічну систему, як мету вимірювального завдання, слід, як рівняння вимірювань, використовувати рішення математичної моделі динамічної системи. Динамічна система, параметри якої планується вимірювати, зазвичай описується n -мірною системою диференціальних рівнянь, що має аналітичне рішення:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{X}) , \quad (2.26)$$

де: $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ — сукупність ДЗ, які характеризують стан динамічної системи; $\vec{f} = (f_1, f_2 \dots f_n)$ — векторна функція, яка зазвичай є гладкою та визначеною в частині фазового простору [213].

Функція \vec{f} породжує потік F^t , який є гладкою функцією. Цей потік переводить систему зі стану, в якому вона перебувала в початковий момент часу, в стан в будь-який інший момент часу. Тоді рішення $\vec{X}(t) = F^t(\vec{X}(0))$ являє собою криву, яка в кожній точці є дотичною до цього векторному полю. В силу існування лише одного рішення (2.26) для кожного початкового стану $\vec{X}(0)$ та будь-якого гладкого векторного поля \vec{f} є єдина фазова траєкторія. В цьому випадку, аналітичне рішення використовується в якості рівняння вимірювань при аналізі результатів динамічних вимірювань.

Динамічні системи можуть досліджуватися в умовах, коли час змінюється дискретним чином. У цьому випадку може бути застосований запис виду

$X_{n+1} = \psi(X_n)$, який задає відображення. Дискретний набір значень, отриманих через фіксований інтервал часу, дозволяє отримати часовий ряд значень $X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$, аналіз якого здійснюється відомими методами.

Вимірювальне завдання в динамічній системі має сенс лише у випадку існування стаціонарних, стійких і притягуючих станів (стійких точок у фазовому просторі). Математичний опис стану динамічної системи поблизу особливих точок, здійснюється за допомогою методу Ляпунова, який дозволяє за знаком реальних частин коренів характеристичного рівняння визначати наявність притягуючих властивостей у особливих точках фазового простору динамічної системи. Рівняння вимірювань мають сенс тільки поблизу притягуючих стійких точок.

Особливість аналізу результатів вимірювань в динамічних системах, що знаходяться поблизу особливих точок, пов'язана з законом за яким відбувається повернення системи в стійкий стан. При цьому необхідно, крім динаміки поведінки системи поблизу стаціонарної притягуючої точки, враховувати обурення системи, обумовлені зовнішнім шумом.

Перетворюючи змінні в вихідному рівнянні (2.26), можна поблизу стійкої точки переписати рівняння, яке описуватиме рух системи поблизу стійкої притягуючої точки $X^{(0)}$ і яке можна використовувати в якості рівняння вимірювань (2.1). Для цього вводиться величина відхилення, за умови, що $\eta = X - X^{(0)} \ll X^{(0)}$. На поведінку динамічної системи поблизу точки $X^{(0)}$ впливає зовнішній адитивний шум.

Найбільш простим рівнянням, що описує динамічну систему поблизу стійкої точки в фазовому просторі, є лінійне рівняння Ланжевена [214]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\lambda \eta + \phi(t), \quad (2.27)$$

де λ — показник Ляпунова (1.9); $\phi(t)$ — випадкове обурення з початковими умовами $\eta(0) = A_0$ і $\phi(0) = \Phi_0$.

В умовах відсутності шумів змінення величини $\eta(t)$ описується виразом:

$$\eta(t) = A_0 \exp(-\lambda t). \quad (2.28)$$

Рівняння, що описує динаміку системи, має вигляд:

$$X = X^{(0)} + A_0 \exp(-\lambda t). \quad (2.29)$$

За час $t = 1/\lambda$ система із обуреного стану повертається в стійкий стан $X = X^{(0)}$. Флуктуація величини η (2.28) під дією випадкових сил $\phi(t)$ описана виразом:

$$\eta(t) = \int_0^t \phi(\tau) \exp\{-\lambda(t - \tau)\} d\tau. \quad (2.30)$$

Знаючи часову реалізацію i , отже, статистичні характеристики $\phi(t)$, можна знайти статистичні характеристики процесу $\eta(t)$. Характер часової динаміки процесу буде також визначатися швидкістю повернення в стійкий стан, тобто величиною і знаком показника Ляпунова λ (1.9).

Спектральні характеристики процесу визначають швидкість і величину відхилення від стійкого стану $\phi(t)$. Якщо розглядати випадкові сили у вигляді послідовності дель-функцій, які виводять систему зі стану стійкої рівноваги, то вираз (2.30) для $\eta(t)$ спроститься:

$$\eta(t) = \int_0^t d\tau \sum_{m=1} \delta(\tau - \tau_m) \exp\{-\lambda(t - \tau)\} = \sum_{m=1} \exp\{-\lambda(t - \tau_m)\} \quad (2.31)$$

Таким чином, якщо поставлено завдання вимірювання величини $X^{(0)}$, то за результатами вимірювання величини X можна встановити область (множину) значень, які можуть бути приписані досліджуваній величині [1].

Аналіз результатів вимірювань в умовах дивного аттрактора.

Постановка завдання вимірювань ДЗ НДС, що знаходиться в стані детермінованого хаосу, має ряд особливостей:

- по-перше, за результатами попередніх досліджень має бути встановлено існування режиму дивного аттрактора. В іншому випадку застосовуються підхід для випадку простого аттрактора (2.26) – (2.31):

- по-друге, всі значення вимірюваної величини відповідають реальному стану системи. Таким чином, постулюється положення про домінуючий вплив на розкид результатів вимірювань динаміки системи;

- по-третє, під невизначеністю результату вимірювання слід розуміти розмір аттрактора системи в фазовому просторі. В цьому випадку аттрактор відображає як динаміку системи, так і процес проведення експерименту.

Експериментальні дослідження хаотичних режимів динамічної системи здійснюються шляхом обробки часових рядів результатів спостережень, зареєстрованих за період часу багато більшому ніж характерний час формування дивного аттрактора. Методи аналізу часових рядів, які використовуються для вивчення хаотичного руху, дозволяють визначати такі характеристики як фрактальна розмірність (1.13), показники Ляпунова (1.7), ентропію Колмогорова (1.11) і розмірність вкладення аттрактора.

Часовий ряд результатів спостережень це послідовність значень $x(t)$, отриманих через часовий інтервал τ :

$$t_i = t_0 + (i-1)\tau, \quad x_i = x(t_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.32)$$

Для дослідження структури дивних аттракторів по часових рядах спостережень Ф. Таккенс математично розробив і обґрунтував апарат на основі

застосування векторів затримки [217]. Цей метод, використовує вираз для кореляційного інтеграла:

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{N^2} \Theta(\varepsilon - |y_i^{(m)} - y_j^{(m)}|), \quad (2.33)$$

де: Θ — функція Хевісайда; ε — відстань між точками множини на аттракторі; $|y_i^{(m)} - y_j^{(m)}|$ — модуль відстані між двома точками i та j множини сформованої за принципом:

$$|y_i^{(m)} - y_j^{(m)}| = \sqrt{\sum_{n=0}^{m-1} (x_{i+n} - x_{j+n})^2}. \quad (2.34)$$

Кореляційний інтеграл (2.33) використовується для кількісної та якісної оцінки хаотичної динаміки системи або зовнішнього білого шуму. Елементи x_i є результатами m вихідних спостережень, за якими в фазовому просторі розмірності формується величина $y^{(m)}$ ($y_i^{(m)} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$).

Аналіз одномірного часового ряду, отриманого як результат послідовної в часі реєстрації значень, імовірно на дивному аттракторі, з використанням (2.31) дозволяє визначити розмірність простору вкладення і фрактальну розмірність D_H . Для дивних аттракторів завжди існує таке максимальне значення ε , перевищення якого не призводить до збільшення значення кореляційного інтеграла (2.33). Використання кореляційного інтеграла дозволяє встановити існування режиму дивного аттрактора, тому першим кроком при оцінюванні невизначеності вимірювань може бути розрахунок кореляційного інтеграла (2.33).

Для вимірювального експерименту важливо, що динаміка досліджуваної НДС така, що якщо в початковий момент часу невизначеність положення фазової точки системи характеризується розміром Ω_ε , то, через досить тривалий проміжок часу, розмір області, в якій фазова точка системи може знаходитися та пересуватися, збільшується до розмірів дивного аттрактора. Щоб здійснити

оцінку розміру області стосовно до спостережуваного параметру необхідно скористатися часовими рядами результатів спостережень.

Зазвичай невизначеність, яка оцінюється за типом А [164], обчислюють із рядів повторних спостережень як стандартне відхилення. Таким чином стандартна невизначеність типу А встановлюється через функцію щільності ймовірності, отриманої з спостережуваного розподілу. В результаті розширена невизначеність встановлює інтервал в межах якого знаходиться велика частина значень, які можуть бути приписані вимірюваній величині.

В області дивного аттрактора випадкова динаміка досліджуваної величини обумовлена нестійкою динамікою самої системи, тому для оцінювання невизначеності вимірювань необхідно ґрунтуватися на математичній моделі, яка описує траєкторію руху. Оскільки побудувати аналітичну модель для НДС в більшості випадків, практично, неможливо, для оцінки невизначеності результатів вимірювань можуть бути використані, або результати чисельного моделювання, або результати експериментальних спостережень x_i . Якщо при розрахунку розширеної невизначеності встановлюється інтервал можливих значень вимірюваної величини, то в випадку дивного аттрактора оцінювання невизначеності виконується за максимальним розмахом спостережуваних величин:

$$u = \max_{i,j=1\dots N} |x_i - x_j|. \quad (2.34)$$

Фактично, максимальний діаметр одновимірної множини результатів спостережень (2.34) можна розглядати як основну оцінку невизначеності результату вимірювань [1].

Головна особливість отриманих результатів вимірювань в умовах дивного аттрактора (2.34), (2.34) полягає в тому, що за їх допомогою можна коректно проводити аналізування результатів вимірювань в будь-яких динамічних системах, які знаходяться як в стані простого, так і дивного аттракторів. Якщо

стійкий стан описується граничним циклом або стійким фокусом, то оцінювання результатів здійснюється з урахуванням властивостей стійких станів, що притягують (2.26) — (2.31). У випадку, коли стійким станом є дивний аттрактор, то аналіз результатів вимірювального експерименту повинен виконуватися з урахуванням розмірів аттрактора. При вимірюванні одного з параметрів НДС, невизначеність визначається величиною проекції перетину множини на вісь досліджуваного параметра (ДЗ).

Переважа подібного підходу до оцінювання результатів вимірювань полягає в тому, що встановлюється інтервал значень, який характеризує поведінку досліджуваної системи в області дивного аттрактора (2.34).

Топологічний аналіз аттрактора як результату вимірювань в НДС.

Умовою застосування для оброблення результатів вимірювань нових методів є фрактальність множини перетину Пуанкаре фазового портрету, сформованого за результатами вимірювань ДЗ НДС.

Фрактальність і фрактальна розмірність, як міра ступеня заповнення траєкторіями руху певного підпростору фазового простору, вказує на специфічність структури відображення динамічного хаосу. Для більш глибокого розуміння фрактальних властивостей дивних аттракторів використовуються метод розтину Пуанкаре (рис. 2.4) [218].



Рис. 2.4. Перетин Пуанкаре дивного аттрактора.

Фрактальна або самоподібна структура перетину Пуанкаре дивного аттрактора є сигналом, який вказує на те, що ергодичними методами усереднення (2.1) — (2.3) користуватися не можна.

У разі, коли траєкторії руху рівномірно заповнюють простір, то в перерізі Пуанкаре також спостерігається рівномірне та всюди щільне заповнення точками перетину траєкторії і площини. Розмірність множини цих точок одно топологічної розмірності площини, а саме $D_H=2$. Т. е., Коли траєкторія руху відповідає ергодичного процесу (2.1) — (2.3), розмірність множини на перетині Пуанкаре повинна бути цілою. У разі, коли аналізується множина на перетині Пуанкаре для дивного аттрактора, то воно має нескінченний набір порожніх інтервалів. Розмірність такої множини повинна бути дробовою (гаусдорфовою) і менше двох $D_H < 2$ (1.13).

Представлені результати з аналізом фізичних особливостей і відмінностей НДС призводять до необхідності розробки методів дослідження фрактальних властивостей множин, які можуть стати основою нових методів кількісної оцінки результатів вимірювань в НДС.

Проблема обробки результатів вимірювань може бути пов'язана з аналізом властивостей множини, заданої в топологічному просторі. З урахуванням досягнень останніх років в області математики, методи обробки результатів вимірювань можуть бути засновані не на імовірнісному підході, а на теоретико-множинному підході.

Тому, створення теоретичної моделі вимірювань характеристик динамічних систем з нелінійною, хаотичною поведінкою є актуальною науковою задачею, рішення якої дозволить підвищити ступінь достовірності результатів вимірювань і досліджень в різних областях науки і техніки.

2.10.7 Основні принципи і положення вимірювань в нелінійних динамічних системах

Резюмуємо розроблені в розділі фізичні принципи і математичні положення, які запропоновані в якості фізико-математичних основ теоретичної моделі вимірювань в НДС:

1. Об'єкт дослідження являє собою дисипативну нелінійну динамічну систему з можливим проявом функції самоорганізації, яка еволюціонує в часі (1.2). У ряді випадків система є ієрархічною:

2. Об'єктом вимірювання є динамічні змінні НДС, що обумовлює відсутність єдиного істинного (дійсного) значення вимірюваної величини. Значення ДЗ $X_i(t)$ знаходяться в інтервалі $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$;

3. Динаміка ДЗ допускає існування детермінованого, стохастичного та хаотичного режимів;

4. Нелінійність, стохастичність і хаотичність динаміки НДС спричиняє стохастичність та хаотичність результатів вимірювання;

5. Метою дослідження НДС є вимірювання значень її ДЗ, дослідження та класифікація процесів, прогнозування стану;

6. Хаотичний режим обумовлює можливість порушення принципу ергодичності та невиконання центральної граничної теореми для результатів вимірювань значень ДЗ;

7. У разі хаотичної динаміки «незначна» зміна початкових умов або флуктуацій спричиняє значних змін вимірюваних величин і результатів вимірювань

8. Класифікація процесу може бути виконана методами фрактального аналізу з застосуванням фрактальних шкал;

9. Виходячи із інтервальності вимірюваних величин методи обробки результатів вимірювань можуть бути засновані не на імовірнісному, а на теоретико-множинному та топологічному підході.

10. Як математичні інструменти аналізу результатів вимірювання пропонується використовувати: фазовий портрет, фрактальну розмірність, ентропію Шеннона, показники Ляпунова та час передбачення;

11. Фазовий портрет, побудований за результатами вимірювань ДЗ НДС, може служити альтернативою рівнянню вимірювань, є об'єктом дослідження та аналізу результатів вимірювань.

12. Внаслідок інтервальності вимірюваних величин, результат вимірювання ДЗ НДС повинен бути оцінений за допомогою невизначеності.

13. Необхідно враховувати не лише зовнішні шуми, але і вплив поведінки самої системи на результати вимірювань її параметрів.

14. Часовий ряд результатів вимірювань може представляти немарківський процес, мати гаусдорфову розмірність, результат вимірювання можна трактувати, як аттрактор (простий або дивний);

15. Режим динамічного хаосу веде до додаткового розкиду результатів вимірювань. З'являється складова невизначеності результату вимірювання, яка трактується як «невизначеність значення фізичної величини».

Ці умови, зокрема, повинні бути враховані при складанні моделі і рівняння вимірювання, оцінюванні невизначеності вимірювання та отриманні іншої інформації про ДЗ НДС. При цьому однією з найважчих завдань є складання рівняння вимірювання недетермінованого, хаотичного процесу.

Зауважимо, що наведені в розділі фізико-математичні основи не є вичерпним переліком властивостей систем, фізичних і математичних принципів і положень, але вони є загальними для дисипативних НДС і, на думку автора, є основними, що впливають на успіх проведення вимірювального експерименту.

Висновки до Розділу 2

У розділі вперше розроблені фізико-математичні основи вимірювань величин із складною, хаотичною динамікою, що характеризують нелінійні динамічні системи з функцією самоорганізації, що еволюціонують.

Вперше виконаний аналіз відповідності фізико-математичних основ теорії вимірювань процесам в НДС. Встановлено, що класична теорія вимірювань та створені в її рамках моделі вимірювань побудовані на принципах, що обмежують їх застосування в НДС.

Показано, що моделі вимірювань класичної теорії побудовані на постулатах про існування єдиного істинного (дійсного) значення вимірюваної величини і справедливості ергодичної гіпотези. Якість вимірювального експерименту обумовлена рівнем зовнішніх шумів і ступенем досконалості методик і засобів вимірювання. Моделі вимірювання, в основному, спираються на детерміністські уявлення. Методи оброблення та подання результатів вимірювання спираються на теорію марківських процесів.

Було виконано зіставлення основ та можливостей методик оцінювання результатів вимірювання (GUM і методу Монте-Карло) з властивостями реальних НДС. Результати порівняння призводять до розуміння необхідності створення спеціальних моделей вимірювання та принципів оцінювання невизначеності.

У розділі обоснована можливість використання фрактального аналізу при оцінюванні результатів вимірювання. Наведені результати практичного застосування фрактального аналізу динаміки фізичних процесів в НДС. Виконано експериментальні дослідження динаміки частоти лазерного випромінювання і напруги в електричній мережі. В ході експерименту було встановлено, що фрактальна розмірність часового ряду результатів вимірювань стабільності частоти випромінювання лазера перебувала в інтервалі 1,05-1,1. з цього випливає, що поведінка частоти стабілізованих лазерів можна розглядати як фрактальне в досить широкому часовому інтервалі. Величина фрактальної розмірності вказує на те, що лазери відносяться до систем з персистентною поведінкою. Система автопідстроювання коригує зміни частоти шляхом накопичення інформації за попередні інтервали часу. Звідси випливає, що фрактальна розмірність може характеризувати якість системи стабілізації частоти лазера, який представляє собою НДС з функцією самоорганізації.

Отримані автором результати досліджень підтвердили припущення про ефективність використання фрактального аналізу для класифікації динаміки НДС.

Вперше розроблено фізико-математичні основи вимірювань в НДС. Обґрунтовано, що теоретична модель вимірювань в НДС повинна враховувати наступні умови: вимірювальна величина характеризується не єдиним істинним (дійсним) значенням, а інтервалом значень; гіпотеза про ергодичності підтверджується не завжди; динаміка вимірюваних величин може мати нелінійний, стохастичні або хаотичний характер, часові ряди результатів вимірювань можуть представляти немарківські процеси, мати гаусдорфу розмірність; результат вимірювань повинен бути оцінений за допомогою невизначеності. Як математичні інструменти аналізу результатів вимірювання пропонується використовувати: фазовий портрет, фрактальну розмірність, ентропію Шеннона, показники Ляпунова та час передбачуваності.

РОЗДІЛ 3

ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМІРЮВАНЬ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

У розділі вперше розроблена адаптивна теоретична модель, яка забезпечує вимірювання динамічних змінних та дослідження нелінійних динамічних систем у випадку детермінованої, стохастичної або хаотичної динаміки. А також отримала подальший розвиток теорія невизначеності вимірювань в нелінійних динамічних системах.

В моделі на основі представлених раніше фізичних і математичних положень опису і дослідження нелінійних динамічних систем запропоновані нові підходи до вимірювання величин із складною, хаотичною динамікою. Запропоновано математичні інструменти аналізу динаміки нелінійних динамічних систем за результатами вимірювань із використанням фрактального та ентропійного аналізу, розроблено принципово новий інструмент аналізу — портрет вимірювання.

У розділі отримала розвиток методика оцінювання невизначеності та подання результатів вимірювань динамічних змінних нелінійних динамічних систем, вперше представлена форма оцінювання та подання результатів вимірювання. Основні результати розділу відображені в роботах [1], [3] — [9], [11], [12], [15] - [17], [19], [20], [22] – [25], [31], [35].

3.1 Теоретична модель вимірювань в нелінійних динамічних системах

Теоретична модель вимірювань в НДС (МВ) — це фізико-математичне подання процесу вимірювання та аналізу результатів вимірювань величин (динамічних змінних), що характеризують НДС. Модель містить фізичні принципи, рекомендації з проведення вимірювань та математичні інструменти аналізу результатів вимірювань.

Розроблення МВ є ключовою умовою розвитку теорії дослідження та вимірювань в НДС. При цьому вимірювання в НДС виходить за рамки тривіального вимірювального завдання. На думку автора, теоретична модель вимірювань в НДС повинна розглядатися, як основа для створення експериментальних моделей дослідження складних систем. Завдання моделі, побудованої на фізико-математичних основах вимірювань в НДС, це забезпечити коректне вимірювання обраних ДЗ, аналіз яких дозволить відповісти на питання про властивості та характеристики досліджуваних систем.

3.1.1 Умови створення теоретичної моделі вимірювань

При побудові теоретичної моделі вимірювань ДЗ НДС [3], [4] передбачалося, що об'єкт дослідження представляє собою відкриту дисипативну систему (1.2), яка демонструє властивості нелінійності динаміки значень ДЗ (стохастичності або хаотичності) та самоорганізації. При цьому не відкидається можливість детермінованої поведінки системи. Не володіючи апріорною вичерпною інформацією про процеси, що протікають в системі, об'єкт дослідження розглядається як «чорний ящик». Оскільки хаотична поведінка є більш складною, ніж випадкова або детермінована, апріорі будемо вважати, що система — це дисипативна НДС із хаотичною динамікою. Такий підхід дозволить створити єдину адаптивну модель вимірювань, від початку орієнтовану на найскладнішу ситуацію, але яка дозволяє на певному етапі ідентифікувати поведінку системи та зробити вибір на користь використання математичного апарату для хаотичного або випадкового процесу.

Ключовими елементами моделі є:

- схема вимірювального експерименту;
- спосіб оцінювання необхідної та достатньої кількості інформації;
- спосіб класифікації процесу та вибір математичного апарату оброблення результатів вимірювання;
- спосіб оцінювання результатів вимірювань.

3.1.2 Схема вимірювального експерименту

Припустимо, що метою вимірювального експерименту є визначення значень m обраних динамічних змінних системи. При цьому значення цих ДЗ повинні вимірюватися синхронно. Такий підхід дозволить сформувати фазовий портрет НДС.

Розглянемо вимір однієї з m ДЗ X , яка з плином часу змінюється по невідомому закону $F(X, t)$ (1.2) і в момент часу t_i приймає значення X_i . Вимірювальний експеримент може вважатися завершеним тільки після збору даних про всі можливі стани X_i обраної ДЗ X , які формують її фазову траєкторію в координатах (X, X', t) (рис. 3.1), де X' – інша ДЗ, значення якої також вимірюються паралельно.

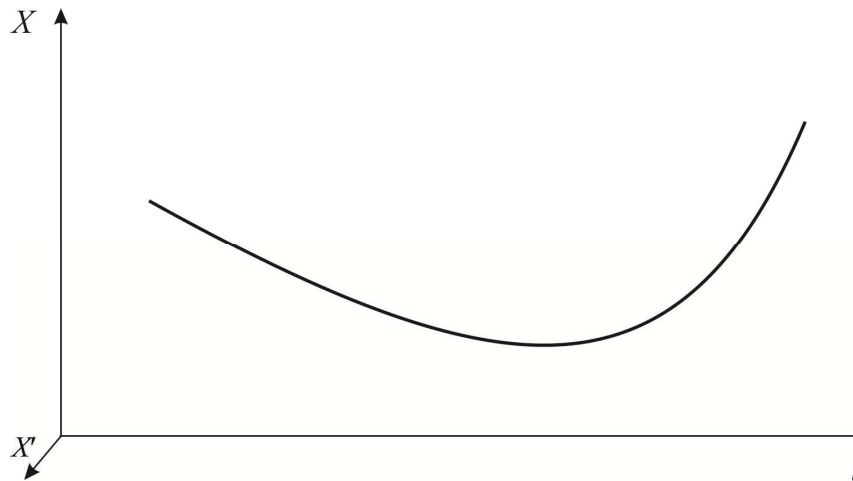


Рис. 3.1. Фрагмент фазової траєкторії НДС.

При проведенні вимірювального експерименту через рівні проміжки часу Δt фіксують значення x_i , які є результатами вимірювання станів X_i ДЗ. Якби в результаті вимірювань було можливо отримати істинне значення ДЗ ($x_i = X_i$), то відображення результатів вимірювань в фазовому просторі представляло б собою портрет дискретного виду (рис. 3.2), кожна точка якого відповідає істинному значенню X_i .

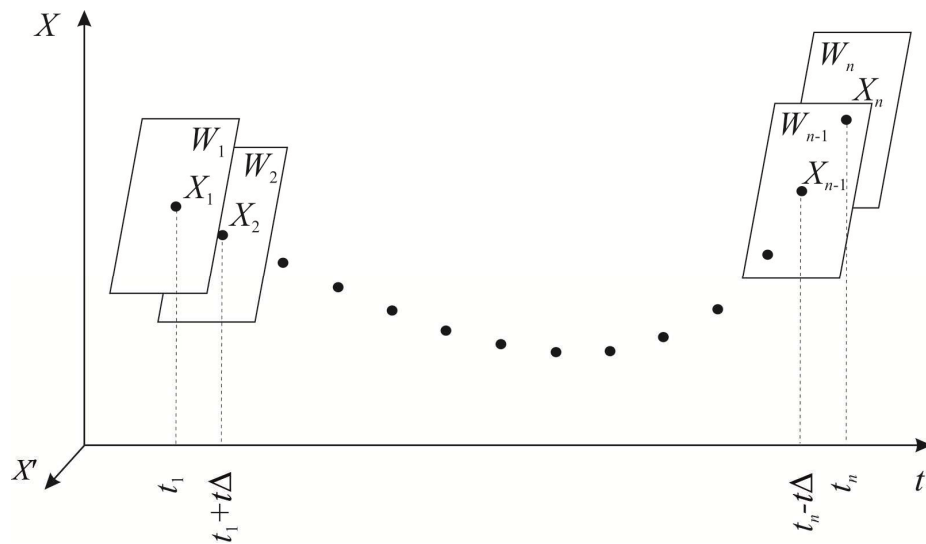


Рис. 3.2. Відображення дискретного фазового портрета НДС на перетинах Пуанкаре.

Таке дискретне відображення фазового портрета містить в собі необхідну і достатню для аналізу інформацію про характеристики і динаміку досліджуваної НДС. Кожен з n результатів спостереження X знаходиться в площині перетину фазового портрета W_i . Перетин фазового портрета площинами W_i може бути представлено у вигляді ансамблю перетинів Пуанкаре [218].

На практиці отримати істинне значення вимірюваного параметра неможливо, але в результаті вимірювання може бути визначений інтервал, який з певною ймовірністю його містить. Цей інтервал характеризує невизначеність результату вимірювання. Тому n точок дискретного відображення фазового портрета досліджуваної НДС (рис. 3.2) перетворюються в n областей u_i , площі яких визначаються значеннями невизначеності результатів вимірювання кожного значення X_i (рис. 3.3).

Дискретне подання результатів вимірювального експерименту дає можливість будувати висновки про стани X_i ДЗ X системи в окремі моменти часу t_i . Але, практичний інтерес представляють не тільки і не стільки значення окремих станів X_i , скільки область $T(X)$ всіх можливих значень ДЗ НДС $X_i \in T(X)$.

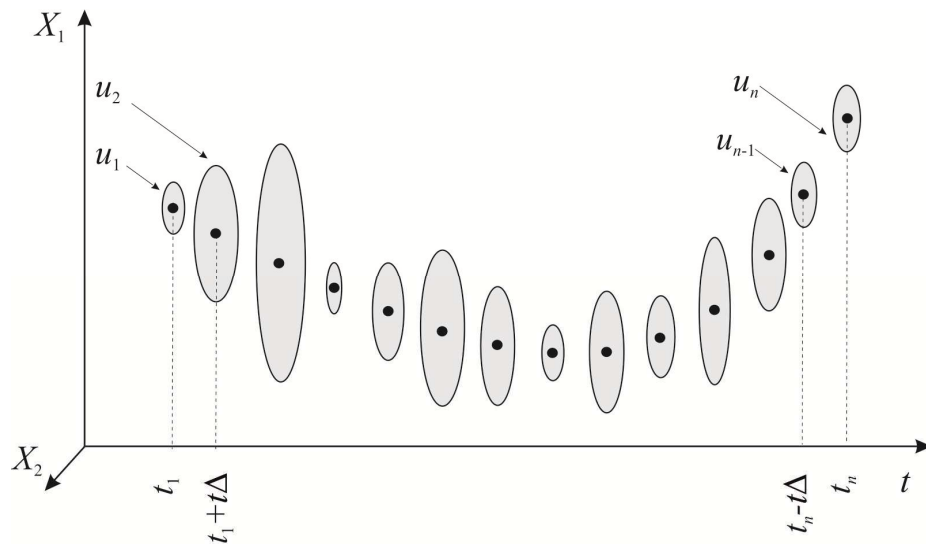


Рис. 3.3. Відображення результатів вимірювань X в моменти часу t_i .

3.1.3 Необхідна і достатня кількість інформації про систему

Ключовим питанням моделі вимірювання є визначення кількості вимірювальних експериментів n , необхідної і достатньої для складання вичерпної картини станів НДС. Сукупність усіх значень $T(X)$ ДЗ НДС, так само як і сукупність всіх результатів вимірювань, в фазовому просторі формують фазовий портрет (аттрактор). Тому спостереження за ДЗ системи (вимірювання значення ДЗ) має тривати настільки довго, щоб результати спостережень змогли сформувати фазовий портрет системи. Мінімальна кількість вимірювальних експериментів n_{\min} , необхідна для формування аттрактора, оцінюється як:

$$n_{\min} \geq 10^{2+0,4D_H} \quad (3.1)$$

де D_H – фрактальна розмірність аттрактора [218].

Виникає необхідність отримати значення фрактальної розмірності аттрактора D_H (1.13) до завершення його побудови. Вирішити цю проблему можна двома способами.

По-перше, вираз (3.1) дає нижню межу кількості експериментів, не обмежуючи його зверху. Тому щоб уникнути втрати у межах моделі інформації

рекомендується виконати максимально можливу кількість вимірювань n_{\min} . Такий підхід призведе до отримання зайвої інформації про систему, але запобіжить її втрату. Згідно з [218] значення фрактальної розмірності D_H можна точно оцінити через показник Херста (1.15), аналізуючи добре визначені набори даних, що складаються приблизно з $n_{\max} = 2500$ вимірів.

По-друге, у разі, якщо умови вимірювального експерименту дозволяють одночасно зі збором вимірювальної інформації проводити аналіз формованого часового ряду, за допомогою методу фрактальних шкал [212] може бути визначена фрактальна розмірність D_H та мінімальна кількість вимірювальних експериментів n_{\min} (3.1). З огляду на фрактальний характер дивного аттрактора, його самоподобу, такий підхід виглядає обґрунтованим — частина часового ряду має ту ж саму розмірність, що і повний ряд. Має місце ситуація, при якій рішення про кількість вимірювальних експериментів приймається в ході вимірювань.

3.1.4 Оцінювання результатів вимірювань

Для складання єдиної картини динаміки ДЗ НДС, необхідно об'єднати результати вимірювань всіх її станів $X_i (i=1, \dots, n)$ (рис. 3.3) в одну інтегральну характеристику $U(X)$, значення якої відповідає висоті фігури, утвореної проєкціями результатів вимірювального експерименту на площину (рис.3.4). При цьому область істинних значень $T(X)$ ДЗ X згідно з положенням (2.34) належить області $U(X)$, $T(X) \in U(X)$.

Для оцінювання невизначеності результатів вимірювань стану X_i ДЗ необхідно виконати $m \geq 3$ вимірювань X_i в момент часу t_i . Результатами вимірювань будуть вихідні величини $x_i^j (j=1, 2 \dots m)$. Володіючи результатами, як мінімум трьох вимірювань кожного стану X_i параметра X , можна розрахувати невизначеність вимірювання u_i [163].

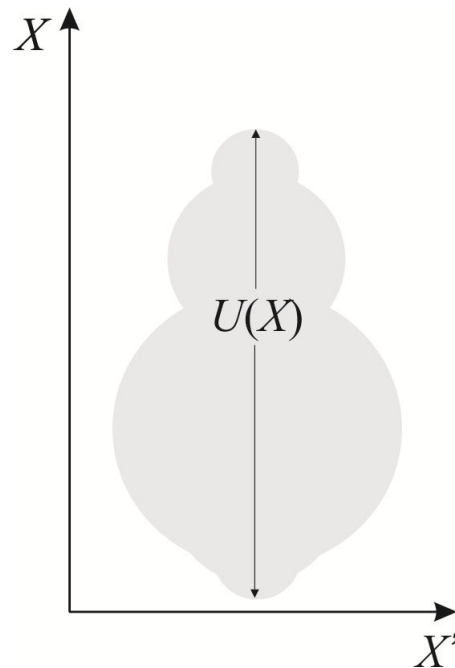


Рис. 3.4. Відображення результатів вимірювання всіх станів ДЗ.

Динамічний характер поведінки параметра X не дозволяє з плином часу провести серію вимірів одного і того ж стану X_i ($X_i \neq X_{i+1}$). Вирішити цю задачу в рамках даної теоретичної моделі пропонується шляхом синхронного вимірювання стану X_i параметра X групою засобів вимірювальної техніки (ЗВТ).

Однак тут необхідно зробити важливу ремарку. Дослідник повинен прийняти рішення про схему експерименту в кожному окремому випадку і відповісти на питання про доцільність виконання одночасних, паралельних вимірювань. У цьому випадку виникають додаткові фактори, що впливають на значення невизначеності кінцевого результату вимірювань. Ці фактори обумовлені, по-перше можливими відмінностями метрологічних характеристик, нехай і однотипних ЗВТ, а по-друге, існує проблема синхронізації ЗВТ для одночасного вимірювання одного стану ДЗ. Якщо в конкретному випадку негативний ефект такого підходу превалює над позитивним ефектом, то слід вибрати метод одноразового вимірювання стану ДЗ.

Для реалізації синхронного виміру необхідна наявність декількох ($m \geq 3$) однакових ЗВТ. Група ЗВТ об'єднується в систему, що забезпечує синхронне

вимірювання станів x_i параметра X в моменти часу t_i . В результаті вимірювального експерименту одночасно формується m часових рядів результатів вимірювань:

$$\left. \begin{array}{c} x_i^1(t_i), \dots, x_n^1(t_n), \\ \dots \\ x_i^m(t_i), \dots, x_n^m(t_i), \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

де $x_i^1(t_i), x_i^m(t_i)$ – результат вимірювання стану X_i ДЗ X в момент часу t_i виконаного ЗВТ №1, № m відповідно.

Результати спостереження описуються за допомогою оцінки вимірювання y_i , з поправками на всі відомі систематичні джерела невизначеності, і стандартної невизначеності u_i типу «А» у вигляді [219]:

$$\left. \begin{array}{c} (y_1 - u_1, y_1 + u_1), \\ \dots \\ (y_n - u_n, y_n + u_n). \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Для формування інтегральної характеристики $U(X)$ із результатів вимірювання (3.3) слід вибрати мінімальний $(y_{\min} - u_{\min}, y_{\min} + u_{\min})$ і максимальний $(y_{\max} - u_{\max}, y_{\max} + u_{\max})$ результати. При цьому всі можливі значення з (3.3) знаходяться в інтервалі значень інтегральної характеристики $U(X)$ всіх станів (2.34) X_i ДЗ X :

$$U(X) = [y_{\min} - u_{\min}, y_{\max} + u_{\max}]. \quad (3.4)$$

Інтервал значень $U(X)$ (3.4) містить всі значення X_i , які може приймати ДЗ з різною ймовірністю $P_i(X_i)$. Для оцінки ймовірності в рамках теоретичної

моделі пропонується використовувати графік розподілу результатів вимірювання (3.4) як функцію $P(x)$. Розподіл значень ДЗ НДС, які перебувають в стані хаосу, як було показано у п. 1.7., відрізняється від нормального та рівномірного розподілу, характерного для випадкових процесів. Значення ДЗ НДС **асимптотично** прагнуть до якихось граничних значень, що належать до сталих в статистичному сенсі режиму НДС [72].

Таким чином, для складання повної та єдиної картини всіх можливих значень X_i ДЗ НДС за підсумками вимірювань пропонується використовувати інтегральну характеристику $U(X)$, що об'єднує всі результати вимірювального експерименту (3.4), і розподіл результатів вимірювання $P(x)$. Застосування запропонованої адаптивної моделі вимірювань дозволяє вивчати будь-які випадкові процеси, що тривають в НДС, з єдиних позицій.

3.2 Аналізування результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах із хаотичною динамікою

В результаті синхронних вимірювань групою з m однакових засобів вимірювальної техніки за схемою п. п. 3.1.2 отримані результати вимірювання у вигляді (3.2) – (3.4). Результати вимірювання та обробки інформації повинні бути перевірені аналітично. Запропонована теоретична модель вимірювань в НДС (3.1) – (3.4) повинна бути доповнена математичними інструментами аналізу результатів вимірювань.

3.2.1 Рівняння вимірювання та стійкість нелінійних динамічних систем

Як інструмент аналізу в класичній теорії вимірювань прийняті рівняння вимірювання (або модель вимірювання згідно з [219]), що застосовуються для перевірки результатів вимірювання та прогнозування подальшої поведінки ДЗ. Рівнянням вимірювання, відновленим за результатами спостереження за ДЗ, є аналітичний вираз, виду:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y), \quad (3.5)$$

Базою для його створення є часовий ряд результатів вимірювань:

$$(y_1 - u_1, y_1 + u_1), \dots, (y_n - u_n, y_n + u_n). \quad (3.6)$$

Аналіз часового ряду (3.6) дозволяє зробити висновок про характер поведінки ДЗ НДС і обрати математичний метод складання рівняння вимірювання. Основне завдання при цьому полягає в пошуку функції $f(y)$ – відновленої функції еволюції F (1.1). Рівняння вважається коректним, якщо дозволяє отримати значення, максимально близькі до результатів вимірювань (3.6).

Якщо правила побудови рівнянь вимірювання в лінійних детермінованих системах відомі і зрозумілі, то для НДС виникає питання про можливість їх складання. Труднощі пов'язані зі складним характером поведінки об'єкта вимірювання, впливом шумів і експоненціальним зростанням початкової невизначеності. Приклади успішного аналітичного опису динаміки НДС в стані хаосу не поодинокі [220] – [222]. Однак, в більшості своїй, вони стосуються ізольованих НДС, не схильних до зовнішніх впливів і шумів. На практиці ж дослідники мають справу з дисипативними неавтономними НДС, описати аналітично які практично неможливо. Дивні аттрактори, що відображають динаміку НДС в стані хаосу, в більшості випадків, не можуть бути описані аналітично, лише чисельно [60].

У зв'язку з цим виникає завдання створення альтернативного рівняння вимірювання інструменту аналізу результатів вимірювання та прогнозування динаміки НДС. Обов'язковою, необхідною для цього умовою є стійкість (грубість) поведінки НДС – здатність системи зберігати свої параметри або динаміку при малих збуреннях [60]. Стійкість системи дозволяє використовувати результати вимірювання (3.6) для подальшого прогнозування процесів.

Відомі кілька визначень стійкості. Для складання рівнянь вимірювання система повинна бути стійка за Ляпуновим. Якщо дві, довільно вибрані, траєкторії фазового портрета системи залишаються близькими в будь-який інший час після цього часу, то траєкторії стійкі за Ляпуновим: $y_i(t)$ і $y_{i+1}(t)$ двох близьких траєкторій в будь-який момент часу виконується умова:

$$|y_i(t) - y_{i+1}(t)| \leq \varepsilon, \quad (3.7)$$

де ε – вибране мале значення.

У цьому випадку система може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь виду (3.6), коректність яких забезпечена в будь-який момент часу.

Виникає питання про стійкість НДС за Ляпуновим. Одне з яскравих властивостей хаосу – експоненціальне розбігання фазових траєкторій (рис. 1.6), внаслідок чого в певний момент часу умова постійної їх близькості (3.7) порушується. Система стає нестійкою за Ляпуновим і класичний підхід до написання рівнянь вимірювання стає непридатним.

У теорії динамічних систем, поряд зі стійкістю за Ляпуновим, виділяють стійкість за Лагранжем, яка вимагає, щоб всі значення y вимірюваної X ДЗ не виходили за межі певної області. При цьому мова йде про стійку поведінку однієї з ДЗ НДС (1.1). Якщо фазовий портрет, що описує поведінку ДЗ, розташовується в обмеженій області простору, то кажуть, що система стійка за Лагранжем за ДЗ. У разі хаотичної дисипативної НДС її фазовий портрет являє собою дивний (хаотичний) аттрактор – множина, до якої притягуються траєкторії з деякої околиці цієї множини (басейну аттрактора). Наявність дивного аттрактора дозволяє говорити про стійкість НДС за Лагранжем, з чого випливає, що її ДЗ в будь-який момент часу приймає значення, обмежені областю $U(X)$ (3.4).

Таким чином, нестійкість за Ляпуновим робить малоімовірною можливість опису реальних НДС за допомогою рівнянь вимірювання (3.6), але стійкість за

Лагранжем дозволяє аналізувати і прогнозувати поведінку системи за допомогою аттрактора та невизначеності вимірювання $U(X)$ всіх станів ДЗ X .

У рамках розроблення принципів і моделі вимірювань в НДС були запропоновані підходи до складання (рівняння вимірювання) (3.5) [16] і запропонована альтернатива для випадку дисипативних систем – «портрет вимірювання» [20], про що мова піде нижче.

3.2.2 Класифікація динаміки системи методом фрактального аналізу результатів вимірювань

Для ідентифікації характеру поведінки системи і вибору математичного апарату обробки результатів вимірювань в моделі пропонується використовувати метод фрактальних шкал [8]. Як було показано вище розрахунок фрактальної розмірності D_H (1.13) часового ряду дозволяє оцінити складність структури множини в топологічному просторі, зробити висновок про випадковість або хаотичність процесу – класифікувати процес.

Визначення фрактальної розмірності D_H виконується за допомогою методу нормованого розмаху або методу Херста (1.13) – (1.15). В результаті буде отримано значення фрактальної розмірності D_H , в інтервалі $0 < D_H \leq 2$ з характеристичними значеннями $D_H = 1$, $D_H = 1,5$, $D_H = 2$.

При $D_H = 1$ результат вимірювання трактується як строго детермінована поведінка системи. При $D_H = 2$ система веде себе регулярним чином, але розкид вимірюваних значень дуже великий, що не дозволяє використовувати методи обробки результатів вимірювань.

При $D_H = 1,5$ фазовий портрет системи являє собою класичний аттрактор, властивий звичайному броунівському руху, що не виявляє персистентності з незалежними (марківськими) приростами. Процес є випадковим. Для аналізу значень характеристик таких систем застосовуються статистичні методи.

Якщо $1 < D_H < 1,5$ або $1,5 < D_H < 2$ досліджуваний процес є немарківським, хаотичним. При $1 < D_H < 1,5$ процес уявляється персистентним і наближається до

детермінованого закону. Персистентність поширюється на нескінченно довгий термін, а її мірою служить параметр Херста. При $1,5 < D_H < 2$ процес уявляється антиперсистентним і має випадковий (шумовий) розкид, що перевищує величину повільних змін. Антиперсистентність характеризується прагненням повернення до вихідної точки [223].

Знання однієї характеристики часового ряду результату вимірювання (фрактальна розмірність D_H) дозволяє класифікувати динаміку об'єкта дослідження та обрати відповідний їй математичний апарат обробки результатів вимірювань.

3.2.3 Визначення розмірності вкладення аттрактора

Як було показано раніше ефективним методом дослідження НДС є вивчення фазового портрета системи. При цьому портрет відновлюється за результатами вимірювань (3.3). Для відновлення фазового портрета НДС визначається його розмірність вкладення M_{in} — найменше число незалежних змінних, однозначно встановлюючи рух вихідної дисипативної системи. З леми вкладення Уїтні випливає, що дивний аттрактор фрактальної розмірності D_H завжди може бути вкладений в фазовий простір розмірності:

$$M_{in} = 2[D_H] + 1, \quad (3.8)$$

де $[D_H]$ – ціла частина від D_H [224].

3.2.4 Відновлення фазового портрета

Метод відновлення фазового портрета НДС (реконструкція аттрактора) був запропонований Ф. Таккенсом [217]. Він полягає в побудові векторів стану системи за значеннями часового ряду результатів вимірювання (2.2). Таким чином, Ф. Таккенс запропонував в якості компонент одного вектора стану використовувати групу результатів вимірювання з часового ряду, віддалених один від одного на проміжок часу τ . Відновлені вектора стану мають вигляд:

$$\bar{x}(t_i) = (x_1(t_i), x_2(t_i - \tau), \dots, x_m(t_i - (M_{in} - 1)\tau)), \quad (3.9)$$

де τ – часовий крок затримки компонент вектора стану.

Метод затримки Таккенса є визнаним і широко використовуваним інструментом відновлення фазового портрета [224]. Однак, із точки зору забезпечення точності вимірювань, слід зауважити, що в якості вихідних даних метод використовує необроблені результати вимірювань, без урахування невизначеності вимірювань. Для коректного відновлення фазового портрета в роботі [4] був запропонований вдосконалений метод, в якому для відновлення фазового портрета використовується часовий ряд оброблених результатів вимірювання (3.3).

Для цього за методом Таккенса (3.9) виконується реконструкція векторів стану (3.9). Виходячи з того, що значення вимірюваної ДЗ X_i знаходиться в інтервалі $y_i - u_i \leq X_i \leq y_i + u_i$, замість одного вектора стану $\bar{x}(t_i)$ (3.9), запровадженого Таккенсом, пропонується використовувати два: $\vec{Y}(y_i - u_i, t_i)$, $\vec{Y}(y_i + u_i, t_i)$, вибравши значення часу затримки рівним інтервалу між двома вимірами $\tau = \Delta t$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{Y}(y_i - u_i, t_i) &= \left[\begin{array}{l} Y_1(y_i - u_i, t_i), Y_2(y_{i-1} - u_{i-1}, t_i - \Delta t), \\ \dots, Y_M(y_{i-M+1} - u_{i-M+1}, t_i - (M-1)\Delta t) \end{array} \right], \\ \vec{Y}(y_i + u_i, t_i) &= \left[\begin{array}{l} Y_1(y_i + u_i, t_i), Y_2(y_{i-1} + u_{i-1}, t_i - \Delta t), \\ \dots, Y_M(y_{i-M+1} + u_{i-M+1}, t_i - (M-1)\Delta t) \end{array} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

де $i = M_{in} + 1, \dots, N$, N – кількість вимірювань x .

Відстань між векторами (3.10) в момент часу t_i виражається формулою:

$$S(u_i, t_i) = \left| 2\sqrt{u_i^2 + u_{i-1}^2 + \dots + u_{i-M+1}^2} \right|. \quad (3.11)$$

Величина $S(u_i, t_i)$ (3.11) характеризує невизначеність значення відновленого вектора вихідної величини $\vec{Y}(t_i)$ стану НДС в момент часу t_i .

Таким чином, за аналогією з істинним або дійсним значенням вимірюваної величини, в вдосконалений метод Такенса розумно ввести поняття «істинного» або «дійсного» вектора стану системи, як вектора в фазовому просторі, компонентами якого є дійсні значення вимірюваних величин. З чого випливає висновок про розбіжність між відновленим і істинним фазовими портретами системи.

Векторне поле, обмежене векторами стану (3.10) в M_{ln} -мірному фазовому просторі з плином часу складає фазовий портрет з урахуванням невизначеності відновленого вектора стану НДС (3.11) (рис. 3.5). Зауважимо, що істинний (дійсний) вектор стану НДС $\vec{X}(t)$ в момент часу t_i знаходиться в векторному полі, обмеженому відновленими векторами стану (3.10). Відновлений фазовий портрет НДС є об'єктом аналізу результатів вимірювання і прогнозування подальшої поведінки НДС.

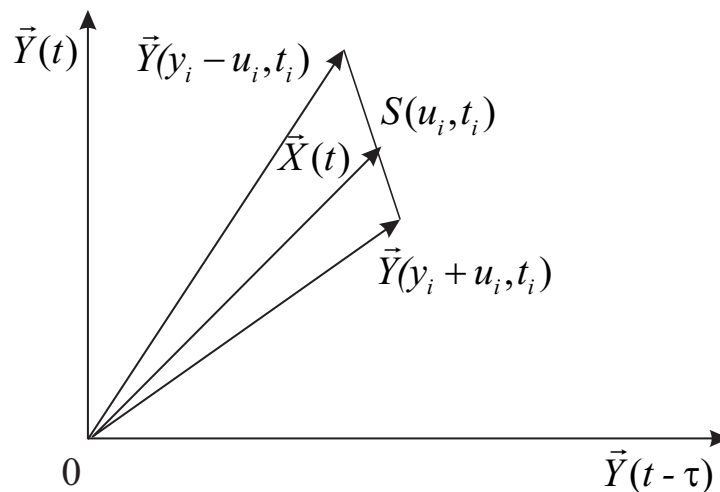


Рис. 3.5. Векторне поле відновлених векторів стану в момент часу t_i для $M_{ln} = 2$.

3.2.5 Визначення локальних і загальних характеристик систем

Аналізуючи відновлений фазовий портрет НДС (рис. 3.5) можна визначити ряд ключових для аналізу характеристик системи. Одні з них є локальними –

показники Ляпунова λ (1.7) і час передбачення T_{for} (1.17); інші – ентропія Колмогорова-Синя K (1.11), зокрема, – є загальними. До локальних характеристик відносяться й, визначені раніше: x_i – результати вимірювання, y_i – оцінки вимірювання, u_i – стандартні невизначеності вимірювань (2.19). До загальних характеристик так само відносяться, визначені раніше: $U(X)$ – невизначеність вимірювання всіх станів ДЗ X (3.5), фрактальна розмірність D_H (1.13) і розмірність вкладення M_{in} (3.8).

Показники Ляпунова використовуються для аналізу динаміки системи в околицях окремої точки. Можуть служити показником стійкості ($\lambda < 0$), або нестійкості ($\lambda > 0$) динаміки НДС, характеризуючи швидкість зближення ($\lambda < 0$), або розбігання ($\lambda > 0$) сусідніх траєкторій фазового простору. При цьому, в межах одного аттрактора можуть чергуватися області хаотичності та регулярності.

Спираючись на запропонований вдосконалений метод Таккенса в теоретичній моделі вимірювань в НДС пропонується розраховувати показники Ляпунова для траєкторій, заданих векторами стану $\vec{Y}(y_i - u_i, t_i)$ і $\vec{Y}(y_i + u_i, t_i)$ (3.10) відповідно:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_l \left[\vec{Y}(y_i - u_i, t_i) \right] &= \sum_{j=0}^{K-1} \ln(\varepsilon'_j / \varepsilon_j) / \sum_{j=0}^K T_j, \\ \lambda_l \left[\vec{Y}(y_i + u_i, t_i) \right] &= \sum_{j=0}^{K-1} \ln(\mu'_j / \mu_j) / \sum_{j=0}^K T_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

де $\varepsilon'_j, \varepsilon_j$ – відстані між точками близьких траєкторій, зображених вектором $\vec{Y}(y_i - u_i, t_i)$, в моменти часу t і t_0 ; μ'_j, μ_j – відстані між точками близьких траєкторій, зображених вектором $\vec{Y}(y_i + u_i, t_i)$, в моменти часу t і t_0 .

Значення показників Ляпунова (3.12) обмежуються інтервалом невизначеності з урахуванням (3.10):

$$\left[\lambda_l \left[\bar{Y}(y_i - u_i, t_i) \right], \lambda_l \left[\bar{Y}(y_i + u_i, t_i) \right] \right] \quad (3.13)$$

За показниками Ляпунова λ_l може бути розраховано час передбачення системи T_{for} , протягом якого можна прогнозувати поведінку ДЗ всередині аттрактора. Чим більше значення показника Ляпунова, тим менше час передбачення поведінки системи. Час передбачення T_{for} з урахуванням (3.12), може бути розрахований за формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_{for}(\bar{Y}(y_i - u_i, t_i)) &= \frac{1}{\lambda_l \left[\bar{Y}(y_i - u_i, t_i) \right]} \ln \frac{1}{\lambda_l \left[\bar{Y}(y_i - u_i, t_i) \right]}, \\ T_{for}(\bar{Y}(y_i + u_i, t_i)) &= \frac{1}{\lambda_l \left[\bar{Y}(y_i + u_i, t_i) \right]} \ln \frac{1}{\lambda_l \left[\bar{Y}(y_i + u_i, t_i) \right]}, \end{aligned} \right\} \text{при } \lambda_l > 0 \quad (3.14)$$

Значення часу передбачення (3.14) обмежено інтервалом невизначеності його вимірювання з урахуванням (3.12):

$$\left[T_{for}(\bar{Y}(y_i - u_i, t_i)), T_{for}(\bar{Y}(y_i + u_i, t_i)) \right]. \quad (3.15)$$

Як показники Ляпунова, так і час передбачення придатні для аналізу ДЗ НДС в околицях окремих точок фазового портрета системи. Найважливішою загальною характеристикою НДС є ентропія Колмогорова-Синяя K , яка характеризує ступінь неупорядкованості системи, в цілому, і пропорційна швидкості втрати інформації про систему [233]. Тільки ентропія має сукупність властивостей, що дозволяють використовувати її в якості міри невизначеності при статистичному описі [104].

Для одновимірних відображень ентропія Колмогорова-Синяя K дорівнює показнику Ляпунова. Для систем більшої розмірності значення ентропії K дорівнює сумі показників Ляпунова (1.11):

$$\left. \begin{aligned} K(y_i - u_i, t_i) &= \sum_{j=1}^M \lambda_j [\bar{Y}(y_i - u_i, t_i)], \\ K(y_i + u_i, t_i) &= \sum_{j=1}^M \lambda_j [\bar{Y}(y_i + u_i, t_i)], \end{aligned} \right\} \text{при } \lambda_l > 0 \quad (3.16)$$

Значення ентропії Колмогорова-Синя (3.16) обмежені, з урахуванням (3.10), інтервалом невизначеності:

$$[K(y_i - u_i, t_i), K(y_i + u_i, t_i)]. \quad (3.17)$$

Таким чином, запропонований підхід може служити аналітичним інструментом аналізу результатів вимірювання ДЗ НДС. Запропоновані вирази для визначення локальних і загальних характеристик НДС враховують не тільки динаміку поведінки ДЗ, а й невизначеність її вимірювання.

Теоретична модель вимірювань ДЗ НДС доповнена принципами аналізу результатів вимірювань. Для вирішення цього завдання вивчена можливість використання рівнянь вимірювань, прийнятих у класичній теорії вимірювання для аналізу результатів вимірювання в НДС. Доведено, що їх використання для випадку НДС із хаотичною динамікою практично неможливо. Обґрунтовано необхідність застосування принципово нових інструментів аналізу.

Розглянуто стійкість динамічних змінних НДС, як обов'язкова умова використання результатів вимірювання для прогнозування поведінки системи. Відзначено, що нестійкість за Ляпуновим робить малоімовірною можливість опису реальних систем за допомогою рівнянь вимірювання, але стійкість за Лагранжем дозволяє аналізувати і прогнозувати поведінку системи.

Запропонована модель аналізу результатів вимірювань ДЗ НДС, що передбачає обчислення і аналіз ключових характеристик системи: показників Ляпунова, часу передбачення, невизначеності вимірювання всіх станів динамічної змінної, фрактальної розмірності і розмірності вкладення, ентропії Колмогорова-Синя.

Отримано вирази для визначення локальних і загальних характеристик НДС з урахуванням невизначеності вимірювання ДЗ [4].

3.3 Інформаційний підхід до аналізу результатів вимірювань

Важливою характеристикою оцінки результатів вимірювань є довірча ймовірність P_D , значення якої вибирають виходячи із закону розподілу:

- для рівномірного закону розподілу $P_D = 1$;
- для нормального закону розподілу $P_D = 0,95$;
- для розподілу Лапласа $P_D = 0,9$;
- для розподілу Коші $P_D = 0,8$.

Чим більш складним чином поводитьься вимірюваний параметр, тим менше значення призначається для P_D [187].

При **хаотичній поведінці** ДЗ НДС вольове призначення довірчого значення P_D , як це практикується для випадкових процесів, неприйнятно. Обійти цю ситуацію дозволяє використання ймовірнісної теорії інформації для опису невизначеності вимірювання [187]. У зв'язку з цим **в межах теорії досліджень і вимірювань в НДС застосовані елементи ймовірнісної теорії інформації для оцінювання результатів вимірювання ДЗ НДС [5].**

3.3.1 Елементи ймовірнісної теорії інформації

Основоположним поняттям ймовірнісної теорії інформації та інформаційного підходу в теорії вимірювань служить ентропія Шеннона H . Вона є функцією стану системи, її величина характеризує якість вимірювального експерименту та міру невизначеності $U(X)$ значення X ДЗ. Для систем, які можуть перебувати в станах X з щільністю розподілу ймовірності $p = p(X)$, ентропія Шеннона визначається виразом (1.9) $H = -\sum_i p(X_i) \ln p(X_i)$ або у формі математичного очікування – $H = M[-\ln p(X)]$. Згідно з (1.9) ентропія Шеннона

приймає тим більші значення, ніж менші значення приймає щільність розподілу $p = p(X)$, при $p(X) \rightarrow 1$ $H \rightarrow 0$.

У поняттях теорії інформації сенс вимірювання полягає у зменшенні інтервалу невизначеності знання про вимірювану величину X (рис. 3.6).

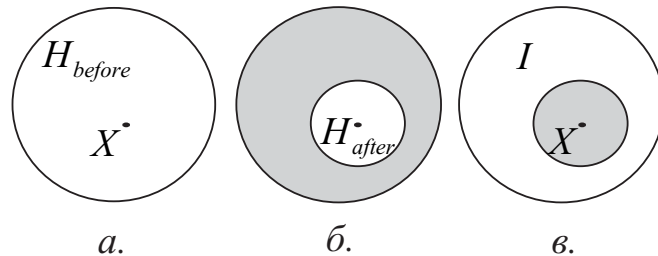


Рис. 3.6. Візуалізація інформаційного сенсу вимірювання:

- а. – область невизначеності до вимірювання (виділена білим кольором);
- б. – область невизначеності після вимірювання (виділена білим кольором);
- в. – область відсутності невизначеності, що дорівнює отриманій інформації (виділена білим кольором).

Кількість інформації, отриманої в результаті вимірів, визначається виразом:

$$I = H_{before} - H_{after}, \quad (3.18)$$

де: H_{before} – ентропія вимірюваної величини X до вимірювання; H_{after} – ентропія вимірюваної величини X після вимірювання.

Ентропія вимірюваної величини X до вимірювання H_{before} визначається діапазоном вимірювання ЗВТ $[X_{min}, X_{max}]$:

$$H_{before} = \ln(X_{max} - X_{min}), \quad (3.19)$$

а ентропія після вимірювання H_{after} – ентропійним інтервалом невизначеності u_H , пов'язаним з щільністю розподілу виразом:

$$u_H = 1 / p(X). \quad (3.20)$$

Згідно з (3.18) сенс вимірювання полягає в звуженні інтервалу невизначеності від $[X_{\max} - X_{\min}]$ до u_H .

Формальним визначенням ентропії значення випадкової величини є вираз:

$$H_{after} = \ln u_H. \quad (3.21)$$

Ентропійне значення невизначеності u_H пов'язано зі середньоквадратичним відхиленням σ виразом $k = u_H / 2\sigma$, з якого, знаючи σ , можна визначити значення для u_H і H_{after} :

$$u_H = 2k\sigma, \quad H_{after} = \ln 2k\sigma \quad \text{або} \quad u_H = 2ku_A, \quad H_{after} = \ln 2ku_A, \quad (3.22)$$

де k – ентропійний коефіцієнт розподілу, різний для різноманітних законів розподілу; u_A – стандартна невизначеність вимірювання по типу «А».

Розмір ентропійного інтервалу невизначеності u_H може бути обчислений строго математично, без необхідності призначення довірчої ймовірності P_D , що підвищує довіру до результатів вимірювання. Згідно з виразами (1.9) і (3.22) невизначеність результату вимірювання випадкової величини за типом «А» u_A може бути описана виразом:

$$u_A = \sigma \frac{\exp H_{after}}{2k} = \sigma \frac{1}{2k} \exp \left(- \sum_i p(X_i) \ln p(X_i) \right). \quad (3.23)$$

Вираз для кількості інформації (3.18) з урахуванням (3.22), (3.23) набуде вигляду:

$$I = \ln(X_{\max} - X_{\min}) - \ln 2ku_A = \ln \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2ku_A}. \quad (3.24)$$

3.3.2 Застосування ентропії Шеннона при аналізі результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах.

Переваги застосування ентропії Шеннона H для аналізу результатів вимірювання випадкових величин підводять до задачі про її використання в більш складних випадках вимірювань в НДС.

Розглянемо результати вимірювання ДЗ НДС, отримані з використанням теоретичної моделі вимірювань [3], [4]. Нехай, при вимірах ДЗ отримані n значень невизначеності u_i вимірювання стану X_i параметра X . Невизначеності вимірювання окремих станів у фазовому просторі перетворюються в n областей u_i , площі яких визначаються значеннями невизначеності результатів вимірювання кожного значення X_i (рис. 3.2).

Дискретне подання результату вимірювального експерименту дає можливість міркувати про стани X_i параметра X системи в окремі моменти часу t_i . Для кожного окремого стану може бути визначена ентропія Шеннона і за її допомогою зроблено оцінку результатів вимірювання окремого стану. Але, практичний інтерес представляють не тільки і не стільки значення окремих станів X_i параметра НДС X , скільки область $T(X)$ всіх можливих істинних значень системи $X_i \in T(X)$ і ентропія Шеннона результату вимірювання всіх станів (рис. 3.4).

3.3.3 Умовна ентропія Шеннона

Для ієрархічних систем, що складаються з ряду, пов'язаних між собою підсистем, вводиться поняття умовної ентропії Шеннона H [225]. У зв'язку з цим розглянемо деяку НДС як сукупність пов'язаних між собою N підсистем (рис. 3.4). Кожна така підсистема характеризується станом ДЗ X_i , щільністю

ймовірності $p(X_i)$, ентропією $H(X_i)$ і невизначеністю вимірювання ДЗ $u(X_i)$ (рис. 3.7).

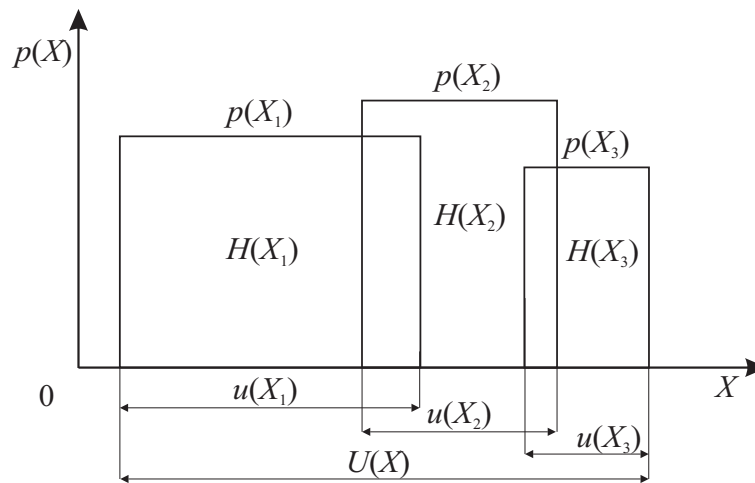


Рис. 3.7. Умовна ентропія значень ДЗ НДС для випадку $n = 3$.

Число підсистем відповідає кількості вимірювальних експериментів n . Якщо окремі стани X_i пов'язані між собою, є **немарківськими**, то підсистеми можна вважати пов'язаними. Згідно з теоремою про ентропію складної системи умовна ентропія Шеннона для такої НДС може бути визначена за формулою:

$$H(X_1, \dots, X_N) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_1, X_2) + \dots + H(X_N | X_1, X_2, \dots, X_{N-1}). \quad (3.25)$$

Ентропія кожної наступної системи $H(X_i)$ обчислюється виходячи з того, що відома ентропія попередньої [187].

Важливу роль при розрахунку ентропії Шеннона для НДС відіграє співвідношення часу прогнозу поведінки НДС T_{for} (1.18) і інтервалу часу Δt , що розділяє вимірювальні експерименти. Якщо протягом часу прогнозу поведінки системи T_{for} виконується m вимірювань ДЗ, то будемо вважати, що є m , пов'язаних підсистем. У разі, коли $T_{for} = m\Delta t$ (де m – певне ціле число) з виразу

(3.25) можна виключити зв'язку між подіями, що відстоять у часі на величину, більшу $m\Delta t$. Так, для $m = 1$ вираження (3.25) набуде вигляду:

$$H(X_1, \dots, X_N) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \dots + H(X_3|X_2) + \dots + H(X_N|X_{N-1}) \quad (3.26)$$

Умовна ентропія Шеннона для двох об'єднаних підсистем може бути виражена через щільність ймовірності формулою:

$$H(X_i|X_{i-1}) = -\sum_{i-1} \sum_i p_{i-1} p(X_i|X_{i-1}) \ln p(X_i|X_{i-1}), \quad (3.27)$$

де p_{i-1} – щільність ймовірності стану X_{i-1} ; $p(X_i|X_{i-1})$ – щільність ймовірності події X_i за умови відомої щільності ймовірності стану X_{i-1} , або у формі математичного очікування:

$$H(X_i|X_{i-1}) = M[-\ln p(X_i|X_{i-1})]. \quad (3.28)$$

У разі, якщо $T_{for} < \Delta t$ підсистеми, що характеризуються значеннями ДЗ X_i НДС в окремі моменти часу t_i , можна вважати не пов'язаними між собою, і вираз (3.25) для них набуде вигляду:

$$H(X_1, \dots, X_N) = H(X_1) + H(X_2) + H(X_3) + \dots + H(X_N). \quad (3.29)$$

Так-як умовна ентропія Шеннона $H(X_i|X_{i-1})$ не може перевершувати безумовну $H(X_i)$ $H(X_i|X_{i-1}) \leq H(X_i)$, а за умови $H(X_{i-1}|X_i) \neq 0$ виконується суворі нерівність $H(X_i|X_{i-1}) < H(X_i)$, умовна ентропія НДС в стані хаосу H_{chaos} , розрахована відповідно до (3.26) менше безумовної ентропії динамічної системи з випадковою поведінкою $H_{stohast}$, розрахованої згідно з (3.29) $H_{chaos} < H_{stohast}$.

Тому, відповідно до виразу (3.18) інформація, отримана при вимірюванні ДЗ НДС в стані хаосу перевищує інформацію, отриману при вимірюванні ДЗ, із випадковою динамікою, при рівності інших умов $I_{chaos} > I_{stohast}$.

Крім того, якщо система складається з пов'язаних підсистем, то з двох сусідніх підсистем, що визначаються станами X_{i-1} і X_i , підсистема X_i є підлеглою підсистемі X_{i-1} . Ентропія підпорядкованої системи менше ентропії незалежної підсистеми. З цього випливає, що з проведенням вимірів ентропія кожного наступного вимірювання буде менше ентропії попереднього.

Сумарна ентропія всіх результатів вимірювання буде зменшуватися (рис. 3.8) до якогось мінімального значення H_{min} . Мінімальне значення ентропії Шеннона в разі вимірювання відносно стабільних фізичних величин визначається досконалістю методів і засобів вимірювання, а також урахуванням випадкових і систематичних факторів, що впливають на процес вимірювання. В результаті багаторазових вимірювань таких величин з кожним новим вимірюванням значення ентропії Шеннона зменшується, її мінімальне значення прямує до нуля $H_{min} \rightarrow 0$, а результат вимірювання x наближається до істинного значення фізичної величини $x \rightarrow X$:

$$H_{after} = \lim_{x \rightarrow X} H(x) = H_{min} \rightarrow 0.$$

Згідно з інформаційною теорією вимірювання (рис. 3.6) буде отримано максимально можливу кількість інформації про вимірювану величину, а область невизначеності (рис. 3.6. б) буде прагнути до точки (рис. 3.6. в), що відповідає істинному значенню вимірюваної величини X .

При вимірюванні ДЗ НДС ситуація виглядає інакше. Багаторазові вимірювання ДЗ також приведуть до зменшення значення ентропії Шеннона $H_{before} > H_{after}$. Довготривалі вимірювання і облік всіх факторів, що впливають на результат вимірювання, зменшать значення ентропії до якогось мінімального

значення $H_{after} \rightarrow H_{min}$. Однак, мінімальне значення ентропії Шеннона не прагнучиме до нуля $H_{min} \neq 0$:

$$H_{after} = \lim_{x \rightarrow X} H(X) = H_{min} \neq 0$$

Кількість отриманої інформації обмежується певною областю невизначеності (рис. 3.7. б.). Збільшення кількості вимірювальних експериментів і часу спостереження за системою також не дозволить зменшити цю область. Причина полягає в тому, що на значення невизначеності, в разі НДС, впливають не тільки фактори, що спричиняють виникнення невизначеностей за типом «А» і «В», які можуть бути враховані або виключені, але і характер поведінки самої ДЗ НДС. У підсумку, після обробки результатів вимірювання ДЗ НДС будуть отримані значення невизначеності вимірювання всіх станів X_i ДЗ X $U(X) = (y_{min} - u_{min}, y_{max} + u_{max})$ і ентропія ДЗ НДС після вимірювання, з урахуванням $H_{after} \rightarrow H_{min}$ і (3.22):

$$H_{min} = \ln[2kU(X)] \quad (3.30)$$

Області значень, які характеризуються виразами (3.30), (3.22), містять в собі всі можливі дійсні значення ДЗ X НДС (рис. 3.7. в).

Таким чином, запропонована теоретична модель вимірювань і аналізу результатів вимірювання ДЗ НДС доповнена принципами та правилами ентропійного аналізу результатів вимірювання. Розглянуто переваги застосування ймовірнісної теорії інформації для оцінки результатів вимірювання. Розглянуто її ключові елементи – кількість інформації і ентропія Шеннона, як величини, що характеризують невизначеність вимірювання.

Запропоновані вирази для опису невизначеності вимірювання динамічних змінних, як функції ентропії Шеннона, а також вираження ентропії Шеннона для нелінійних динамічних систем.

Доведено, що кількість інформації, отриманої при вимірюванні динамічних параметрів хаотичних нелінійних динамічних систем, перевищує кількість інформації, отриманої при вимірюванні динамічних параметрів, мінливих випадковим чином, при рівності інших умов.

Багаторазові вимірювання стабільних фізичних величин і вдосконалення вимірювального експерименту ведуть до зменшення значення ентропії Шеннона, яке, в ідеалі, прагне до нуля.

У разі вимірювання динамічної змінної нелінійної динамічної системи неможливо забезпечити близьке до нуля значення ентропії Шеннона. На значення ентропії, в цьому випадку, впливають не тільки фактори, що спричиняють виникнення невизначеностей за типом «А» і «В», а й характер поведінки самої динамічної змінної. В результаті будуть отримані області значень, які містять в собі всі можливі дійсні значення динамічної змінної нелінійної динамічної системи.

3.4 Фрактальні та ентропійні шкали як інструменти аналізу результатів вимірювань

Так як основним об'єктом дослідження є дисипативні НДС, які можуть еволюціонувати в часі, то при вимірюванні значень ДЗ таких систем в ряді випадків необхідно відповісти на питання про те, чи є вимірюваний стан нормою для системи, або є ознакою її еволюції або деградації.

Якщо в якості НДС розглядається біофізична система, наприклад людина, то можливо застосовувати наступний підхід. У певний момент часу вимірюються характеристик його організму, які в термінах моделі вимірювань є ДЗ, Сукупність усіх обраних для вимірювання ДЗ формують вектор стану. За результатами вимірювань розраховується ентропія Шеннона. Отримане значення, якщо на час дослідження людина була здоровою, приймається за норму ентропії. У подальшому, за результатом аналогічних досліджень також розраховується значення ентропії, яке порівнюється із першим.

Описаний підхід може бути застосований для оцінювання еволюційних процесів як в біофізичних, так і фізичних НДС. Але необхідно відповісти на питання, якою є «норма» ентропії для обраного об'єкта досліджень.

Поняття «норми ентропії» було введено Ю. Клімантовичем та разом із критерієм «S-теорема» (1.35) може бути застосована в теоретичній моделі вимірювань в НДС для оцінювання відхилення системи від свого стійкого стану [103].

При розвитку теоретичної моделі вимірювань автором розроблені принципи застосування фрактальних і ентропійних шкал для класифікації динаміки і стану НДС [7] – [9], [11], [12].

3.4.1 Нормована ентропійна шкала оцінювання динаміки системи

Кожен із динамічних режимів НДС характеризується своїм значенням ентропії (3.29). Для спостереження за НДС, здатної змінювати характер динаміки, зручно ввести інструмент кількісної оцінки її стану. Таким інструментом може стати нормована ентропійна шкала результатів вимірювання, що містить значення ентропії від нуля до одиниці. Нульове значення ентропії відповідає регулярному, детермінованому процесу, при якому значення ДЗ НДС визначено однозначно, а невизначеність дорівнює нулю. Ентропія, що дорівнює одиниці відповідає випадковому розкиду значень ДЗ НДС за умови рівномірного розподілу. Як перший, так і другий стан НДС є ідеальним. Значення ентропії реальних НДС знаходиться між крайніми значеннями. Для розрахунку ентропійної шкали застосовується вираз:

$$H(X_1, \dots, X_n) = - \sum_i p_{i-1} p(X_i | X_{i-1}, \dots, X_{i-n}) \ln p(X_i | X_{i-1}, \dots, X_{i-n}). \quad (3.31)$$

Однак, відповідно до виразу для умовної ентропії об'єднаної системи (3.27) значення ентропії Шеннона може перевищувати одиницю. В якості нормувального коефіцієнта введемо величину зворотну максимальному

значенню ентропії $1/H_{\max}$. Так як максимальне значення ентропії відповідає випадку рівномірного розподілу значень результатів вимірювання ДЗ, то воно може бути відображено виразом виду:

$$H_{\max} = \ln[(x_{\max} + u_{\max}) - (x_{\min} - u_{\min})], \quad (3.32)$$

де x_{\max} , u_{\max} – максимальне значення результату вимірювання ДЗ X та її невизначеність; x_{\min} , u_{\min} – мінімальне значення результату вимірювання ДЗ X та її невизначеність; $(x_{\max} + u_{\max}) \leq X \leq (x_{\min} - u_{\min})$.

Вираз для нормованої ентропії, з урахуванням (3.31) і (3.32) набуде вигляду:

$$\|H\| = \frac{-\sum_i p_{i-1} p(X_i | X_{i-1}, \dots, X_{i-n}) \ln p(X_i | X_{i-1}, \dots, X_{i-n})}{\ln[(x_{\max} + u_{\max}) - (x_{\min} - u_{\min})]}. \quad (3.33)$$

Згідно з (3.33) значення ентропії визначається ступенем зв'язку станів X_i ДЗ один з одним та інтервалом всіх можливих значень X . У детермінованому випадку їхні стани X_i послідовно пов'язані один з одним. Така система «пам'ятає» всі свої статки та має мінімальну ентропією, $\|H\| \rightarrow 0$. Умовна ентропія декількох станів $H(X_i | X_{i-1})$ не може перевищувати безумовну ентропію $H(X_i)$ — $H(X_i | X_{i-1}) \leq H(X_i)$, а за умови $H(X_{i-1} | X_i) \neq 0$ виконується суворі нерівність $H(X_i | X_{i-1}) < H(X_i)$. З цього випливає, що ентропія (3.32) тим більше, чим менше ряд, пов'язаних між собою станів X_i . У разі динамічного хаосу система зберігає зв'язок станів тільки на протязі короткого проміжку часу. Якщо за цей час вдалося провести вимірювання двох наступних станів X_{i-1} і X_i , то вираз для ентропії (3.31) набуде вигляду:

$$H(X_i | X_{i-1}) = -\sum_i p_{i-1} p(X_i | X_{i-1}) \ln p(X_i | X_{i-1}). \quad (3.34)$$

Ентропія зростає з втратою зв'язку між станами X_i . У разі **марківських** процесів вираз для ентропії набуде вигляду (3.29). При рівномірному розподілі значень ДЗ нормована ентропія досягне максимального значення (3.32), $\|H\| \rightarrow 1$.

Запропонована шкала нормованої ентропії результатів вимірювання (3.33) може бути використана для якісної та кількісної оцінки стану НДС. У роботах [13], [14], [36] ентропійна шкала є частиною моделі дослідження стану здоров'я людини, як біофізичної НДС.

3.4.2 Фрактально-ентропійний аналіз результатів вимірювань

У роботі [11] для оцінювання результатів вимірювання в динамічних системах запропоновано використовувати, вперше розроблений автором, вираз зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності часового ряду результатів вимірювань.

Для проведення фрактально-ентропійного аналізу результатів вимірювання ДЗ НДС необхідно пов'язати ентропію Шеннона H з фрактальною розмірністю D_H . Для цього скористаємося виразом зв'язку ентропії Шеннона і середнього квадратичного відхилення σ результатів вимірювання (3.22) $H = \ln 2k\sigma$.

Фрактальна D_H розмірність також пов'язана з середньоквадратичним відхиленням σ через показник Херста H_R виразом (1.15) $R/S = (n/2)^{H_R}$. З виразів (1.13) $D_H = 2 - H_R$, (3.26) і (1.15) отримаємо вираз зв'язку ентропії і фрактальної розмірності в вигляді:

$$H = \ln \left[2kR(n/2)^{D_H-2} \right] \quad (3.35)$$

Відповідно до виразу (3.35) ентропія Шеннона результатів вимірювання ДЗ НДС залежить від виду функції розподілу k , значення розмаху Херста R , кількості вимірювань ДЗ n і фрактальної розмірності D_H часового ряду

$x(t_1), \dots, x(t_n)$: $H = H(k, R, n, D_H)$. Із цього можна зробити висновок, що в значення ентропії вносять вклад як ість вимірювального експерименту та різноманітність значень ДЗ НДС. При цьому внесок властивостей НДС та її динаміки є визначальним [85].

Відповідно до виразу (3.35) ентропія приймає максимальне значення в разі нормального розподілу результатів вимірювання, при цьому $k = 2,06$; ентропія приймає мінімальне значення в разі **арксінусоїдального** розподілу, при цьому $k = 1,11$.

Значення ентропії зростає зі збільшенням значення розмаху R . Значення R обумовлено інтервалом всіх можливих значень ДЗ НДС $U(X) = [X_{\min}, X_{\max}]$, розмірами **аттрактора** НДС.

На значення ентропії впливає число станів ДЗ НДС n . Чим більшу кількість станів може приймати ДЗ НДС, тим вище значення ентропії. Якщо всі стани ДЗ рівноймовірні, то ентропія монотонно зростає зі збільшенням кількості n .

Зв'язок фрактальної розмірності D_H зі значенням ентропії Шеннона виглядає наступним чином: ентропія максимальна для випадку $D_P = 2$, при цьому ДЗ НДС поводить ся регулярним чином, але розкид вимірюваних значень дуже великий; ентропія мінімальна для випадку $D_H = 1$, при цьому поведінка ДЗ НДС строго детермінована і може бути описана рівнянням.

Таким чином, різноманітність станів ДЗ НДС є основним фактором впливу на значення ентропії. Вираз ентропії Шеннона як функції фрактальної розмірності (3.35) отримано вперше і може бути використаний в теоретичних та експериментальних моделях вимірювання та досліджень в НДС.

3.5 Застосування інтервального аналізу для оцінювання результатів вимірювань

3.5.1 Переваги інтервального аналізу

Для дослідження структур із дробовим порядком, до яких відносяться результати вимірювання ДЗ НДС, крім фрактального та ентропійного аналізу

можуть бути ефективно застосовані методи інтервального аналізу. Його основна ідея полягає в заміні арифметичних операцій та дійсних функцій інтервальними операціями та функціями, які перетворюють інтервали, що містять ці числа. Цінність інтервальних рішень полягає в тому, що вони містять точні рішення вихідних завдань [226]. Методи інтервального аналізу були застосовані автором для оцінювання невизначеності вимірювань ДЗ та складання рівняння вимірювання (3.5) ентропії Шеннона (1.9) НДС [15], [16].

3.5.2 Застосування інтервального аналізу для оцінювання невизначеності та розрахунку ентропії

Ключовим поняттям для оцінки результатів вимірювання є довірча ймовірність, значення якої призначають виходячи із закону розподілу. Чим складніша динаміка об'єкта вимірювання, тим менше значення призначається для довірчої ймовірності. При вимірюваннях в складних системах з невідомим законом розподілу ДЗ вольове призначення довірчої ймовірності неприйнятно. Для оцінки невизначеності вимірювання в таких системах, як було показано вище, може бути застосований інформаційний підхід [147]. Основоположним поняттям теорії інформації та інформаційного підходу є ентропія Шеннона H . Вона не просто є функцією стану системи, її величина характеризує якість вимірювального експерименту і міру невизначеності значення X ДЗ.

Для систем, які можуть перебувати в станах X із щільністю розподілу ймовірності $p = p(X)$, ентропія Шеннона визначається виразом (1.9). З нього випливає, що ентропія Шеннона приймає тим більші значення, ніж менші значення приймає щільність розподілу $p = p(X)$, при $p(X) \rightarrow 1 H \rightarrow 0$.

Згідно з інформаційним підходом завдання вимірювального експерименту зводиться до зменшення значення ентропії, тобто до зменшення невизначеності знання про вимірювану величину.

Формальним визначенням ентропії значення результату вимірювання є вираз: $H = \ln u_H$ (3.21). Звідси отримаємо вираз:

$$u_H = \exp H. \quad (3.36)$$

Ентропійне значення невизначеності пов'язано із дисперсією виразом $k = u_H / 2\sigma$, з якого, знаючи σ , можна визначити значення для u_H і H : $u_H = 2k\sigma, H = \ln 2k\sigma$ або $u_H = 2ku_A, H = \ln 2ku_A$, (3.21), де k – ентропійний коефіцієнт розподілу; u_A – невизначеність вимірювання по типу «А».

Розмір ентропійного інтервалу невизначеності u_H може бути обчислений строго математично, без необхідності призначення довірчої ймовірності, що підвищує довіру до результатів вимірювання. Його визначення вимагає визначення ентропії.

Ентропія Шеннона є інтегральною характеристикою, що містить інформацію про ступінь відхилення НДС від стану рівноваги. Основними труднощами при її визначенні є визначення закону розподілу досліджуваної величини. Для вирішення цього завдання пропонується використовувати підходи інтервального аналізу, а саме гістограмну арифметику [226].

Якщо НДС характеризується набором з N ДЗ X_i , то в результаті вимірів і оцінки результатів вимірювання ДЗ будуть отримані N інтервалів значень $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$, де $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ є інтервал оцінок значень $[X_i^{\min}, X_i^{\max}]$. Значення x_i заповнюють інтервал $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ нерівномірно, складним чином, відмінним від класичних законів розподілу.

Згідно з положеннями інтервальної математики щільність розподілу інтервальних значень x_i може бути задано кусково-постійною функцією $p(x_i)$, результати вимірювань x_i утворюють інтервали постійних значень функції $p(x_i)$. Такі випадкові величини називаються гістограмними числами або гістограмами. Потрібно визначити функцію щільності ймовірності p_X величини x_i із заданою точністю в класі кусково-постійних функцій — гістограм. Використання гістограмного подання ДЗ дозволяє визначити найбільш ймовірні ділянки потрапляння невідомих X_i .

Інтервал значень x_i $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ розіб'ємо на K частин розміром d_k , $k = 1, \dots, K$. Розбиття виконується таким чином, щоб інтервальні значення d_k і d_{k+1} вважалися не пов'язаними між собою. Тоді щільність ймовірності попадання X_i в інтервал $[d_k, d_{k+1}]$ визначається виразом:

$$p_{Xk} = \frac{1}{d_{k+1} - d_k} \int_{d_k}^{d_{k+1}} p(x) dx. \quad (3.37)$$

Сукупність з K значень, отриманих згідно з (3.37) являє собою гістограму щільності ймовірностей різної протяжності по осі X_i .

Для визначення щільності ймовірності на інтервалах d_k (3.37) скористаємося рекомендацією доповнення до GUM [3.68] про те, що при відсутності додаткової інформації про величину, відповідно до принципу максимуму ентропії випадкова величина може бути описана криволінійно-трапецеїдальним розподілом. Якщо значення d_k і d_{k+1} відомі з точністю до інтервалів $(a \pm d)$ і $(b \pm d)$ відповідно, вираз для криволінійно-трапецеїдального розподілу набуде вигляду:

$$p(x) = \frac{1}{4d} \max \left(\ln \frac{w+d}{\max(|x-h|, w-d)}, 0 \right) \quad (3.38)$$

де $h = (a+b)/2$, $w = (b-a)/2$.

Вираз (3.37) може бути використано **для визначення вкладу в значення ентропії окремої ДЗ X_i (окремого інтервалу $[d_k, d_{k+1}]$)** як:

$$H(X_i) = -p_{Xki} \ln p_{Xki} \quad (3.39)$$

Якщо ДЗ системи не пов'язані між собою, виконується принцип адитивності ентропії всієї системи $H = \sum_i^N H(X_i)$, інакше повинна бути визначена спільна щільність розподілу результатів вимірювання і введено поняття умовної ентропії системи.

Скориставшись властивістю адитивності ентропії незалежних величин з урахуванням виразу (3.39), отримаємо вираз для ентропії інтервалу невизначеності вимірювання:

$$u_H = \exp\left(\sum_k^K H_k\right). \quad (3.40)$$

Таким чином, використання методів інтервальної математики дозволяє визначити ентропію Шеннона та ентропійний інтервал невизначеності при обробці результатів вимірювань ДЗ складних систем.

3.6 Рівняння вимірювань в нелінійних динамічних системах

Рівняння вимірювань (РВ) (3.5) є необхідним елементом для розрахунку значення невизначеності результатів вимірювання. Воно також використовується для встановлення точності вимірювання в умовах динамічної нерівноважної системи.

Питання складання РВ є одним із найскладніших питань класичної теорії вимірювань. Дотепер відсутні єдині принципи та рекомендації щодо складання РВ для вирішення традиційних вимірювальних завдань. Складання РВ є творчим завданням дослідників. Міркування щодо принципів складання РВ висловлені у роботах вітчизняних та закордонних науковців та об'єднують практичні завдання вимірювань із фундаментальними питаннями опису багатofакторного впливу на динамічні процеси. Сучасні погляди на вирішення цього питання відображено у роботах [274] – [276] та ін.

Розробляння РВ представляє собою завдання, яке в першу чергу повинне математично встановити зв'язок між вхідними величинами (X_1, X_2, \dots, X_n), серед яких як вимірювані величини, так і константи, і вихідними величинами (величиною) Y [219]:

$$Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.41)$$

Ступінь складності математичного подання РВ (3.41) залежить від динамічних процесів, кількості вхідних величин і їх взаємозв'язку, а також від врахування впливу шумів на результат вимірювання. При цьому до найбільш складних завдань відносяться завдання математичного опису нелінійних процесів.

В ідеалі для побудови РВ конкретної НДС повинна бути виконана її класифікація, як об'єкта вимірювання, виділені її основні властивості, повинні бути вивчені ДЗ, їх взаємодія один з одним, а також шуми, що впливають на систему і процедуру вимірювання. Все це знайшло відображення в принципах побудови РВ (3.41) для випадку НДС, які були представлені в роботах [20] і [22].

3.6.1 Принципи побудови рівняння вимірювання в нелінійних динамічних системах

Першим кроком до розробляння РВ є класифікація та дослідження властивостей модельованих об'єктів і процесів. Класифікація НДС представлена в п. 1.1. дисертації. У загальному вигляді вони можуть бути описані виразами (1.2):

$$F[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)] \rightarrow [X_1(t), \dots, X_n(t)] \quad (1.1.) \quad \text{та} \quad \frac{dX_i(t)}{dt} = F[X_1(t), \dots, X_n(t)].$$

Класифікація систем може бути проведена на основі їх топологічних властивостей: системи можуть мати стійкі стани при деяких значеннях змінних,

можуть характеризуватися нестійкими станами, такими як «сідло», «нестійкий центр» і «нестійкий фокус». Крім цих, добре відомих топологічних особливостей є можливість формування в таких системах хаотичних динамічних режимів.

Кожен клас систем при побудові РВ потребує індивідуального підходу, але зауважимо, що всі НДС можна об'єднати в дві групи консервативних і дисипативних систем. Дисипативні системи мають широкий спектр властивостей. При цьому поняття консервативної та ізольованої системи є в більшості випадків ідеалізованим. Повністю виключити вплив зовнішніх факторів на систему, так само як і обмін інформацією, і енергією, практично неможливо.

Вимірювання ДЗ НДС та оброблення їх результатів можна охарактеризувати, як багатофакторний експеримент. РВ ДЗ НДС повинна розглядатися не тільки як інструмент розрахунку невизначеності вимірювання, а й інструмент аналізу її стану та динаміки, прогнозу значень ДЗ та динаміки. Тому РВ НДС повинне описувати зв'язок вхідних величин з вихідною, як в рівнянні (3.41), та описувати еволюцію величин в часі:

$$Y(t) = f\{F[X_1(t), \dots, X_n(t)], (Z_1, \dots, Z_n), t\} \quad (3.42)$$

До РВ, крім ДЗ $[X_1(t), \dots, X_n(t)]$, введено Z_1, \dots, Z_n – константи та величини, значення яких з часом вимірювань залишаються постійними.

У РВ повинні бути враховані й інші фактори:

1. Оскільки НДС схильні до впливу шумів, то вони, як процес $\psi(t)$, повинні бути включені до РВ;

2. Так як вхідні величини є ДЗ, для них повинні бути знайдені функціональні залежності від часу $X_1(t), \dots, X_n(t)$;

3. Сильна залежність НДС від початкових умов вимагає обліку в РВ початкових умов $[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)]$, $\psi(t_0)$;

4. Хаотична динаміка та експоненціальна розбіжність траєкторій фазового портрета НДС (рис. 1.7) дозволяє стверджувати, що коректність РВ буде обмежена часом передбачення T_{for} (1.18).

В результаті РВ для НДС набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= f \left\{ F \left[X_1(t), \dots, X_N(t), (Z_1, \dots, Z_n), t \right] + \psi(t); \right. \\ &X_1(t), \dots, X_n(t); \\ &[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)], \psi(t_0); \\ &T_{for}. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Із виразу (3.43) найскладнішим завданням є визначення функції еволюції F . Знання F дозволяє прогнозувати значення ДЗ в будь-який момент часу. При цьому закон еволюції реальних недетермінованих НДС описати аналітично вдається вкрай рідко. Якщо ж НДС є консервативною, то для її опису в ряді випадків застосовуються рівняння Гінзбурга-Ландау або Фокера-Планка (1.36), наприклад, для моделювання процесів лазерного випромінювання [61].

Зауважимо, що час передбачення T_{for} (3.14), який внесено до системи (3.43) має ще одне важливе значення для завдання планування експерименту. При виборі інтервалу проведення вимірювання ДЗ, часовий інтервал τ повинен задовольняти нерівності: $\tau \leq T_{for}$. При $\tau \geq T_{for}$ спостерігається розбіжність фазових траєкторій (рис. 1.7) і ряд значень ДЗ залишаються не охопленими вимірами (3.43).

3.6.2 Портрет вимірювань

У випадку, коли математично описати процеси НДС неможливо, що в першу чергу стосується дисипативних НДС, замість РВ в НДС пропонується використовувати «портрет вимірювання» [20].

Як було розглянуто вище у теорії динамічних систем, поряд зі стійкістю за Ляпуновим, виділяють стійкість за Лагранжем [60]. У разі хаотичною

дисипативної НДС її фазовий портрет є дивним ат трактором, наявність якого дозволяє говорити про стійкість за Лагранжем, з чого випливає, що її ДЗ $X_i(t)$ в будь-який момент часу приймає значення, обмежені інтервалом $U_i(X_i)$ всіх можливих значень $X_i(t)$ $U_i(X_i) = [X_i^{\min}, X_i^{\max}]$ (3.4).

Таким чином, нестійкість за Ляпуновим робить малоімовірною можливість опису реальних НДС за допомогою РВ (3.43), але стійкість за Лагранжу дозволяє отримати фазовий портрет системи з урахуванням невизначеності вимірювання $U_i(X_i)$ (3.4) всіх станів ДЗ $X_i(t)$.

Тому, для забезпечення принципу максимальної інформативності результатів вимірювання для випадку НДС повинні бути запропоновані спеціальні інструменти аналізу результатів вимірювання. Для аналізу результатів вимірювання, визначення вихідних величин, прогнозу їх подальших значень, в моделі вимірювань пропонується використовувати портрет вимірювання (ПВ).

Портрет вимірювання – це графічне і чисельне відображення результатів вимірювання ДЗ НДС, що представляє собою розширений фазовий портрет n вимірних ДЗ X_i і n кінетичних портретів $X_i(t)$. При цьому кожне значення X_i відображається за допомогою результату вимірювання $x_i(t)$, з поправками на всі відомі систематичні джерела невизначеності, і стандартної невизначеності $u_i(t_i)$. Графічний трьохвимірний ПВ складається за допомогою вдосконаленого методу Таккенса (рис.3.5).

Зауважимо, що n -мірний ПВ при $n > 3$ реалізується в n -мірному **гільбертовому** просторі і може бути представлений у вигляді матриці значень вхідних величин розмірності $n \times m$, де m – кількість вимірювань ДЗ в різні моменти часу, і матриці розмірності $1 \times n$ вихідної величини $Y(t)$ з урахуванням розширеної невизначеності вимірювання i -го значення $U_i(t)$:

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \pm u_1(t_0) & \dots & x_n(t_0) \pm u_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(t_m) \pm u_1(t_m) & \dots & x_n(t_m) \pm u_n(t_m) \end{pmatrix}, Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \pm U_1(t_0) \\ \dots \\ y_n(t_n) \pm U_n(t_n) \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

Портрет вимірювання доповнює теоретичну модель вимірювань і є об'єктом аналізу результатів вимірювань в НДС. Пропонована візуалізація результатів вимірювання (3.44) дозволяє отримати додаткову інформацію про систему. Аналіз ПВ дозволяє визначити фрактальну розмірність окремої ДЗ X_i . Можливо зробити висновки про характер змін ДЗ X_i і про зв'язок їх значень без знання аналітичних рішень вихідної системи рівнянь. Можуть бути визначені точки біфуркації і показники Ляпунова, які використовуються для аналізу поведінки системи в околицях окремої точки. Може бути визначена розмірність аттрактора і час прогнозу динаміки ДЗ T_{for} та інші дані.

3.7 Оцінювання та подання результатів вимірювань в нелінійних динамічних системах

Логіка розвитку теорії дослідження НДС та її моделей вимагає вироблення принципів оцінювання та подання невизначеності результатів вимірювання ДЗ НДС із хаотичною динамікою. При цьому принципи не повинні суперечити основним вимогам GUM [164] і при переході ДЗ від хаотичного динамічного режиму до **стохастичного** або детермінованого, повністю трансформуватися в класичні принципи та методику, відображені в GUM, тоб-то, мають демонструвати свою адаптивність до зміни динаміки дослідженої системи. .

3.7.1 Невизначеність вимірювань при хаотичній динаміці

Велика кількість додатків у вимірювальній техніці, орієнтована на вимірювання часових характеристик періодичних процесів. Всі вимірювання здійснюються, як правило, коли система знаходиться в стійкому стані – при будь-якому обуренні система за кінцевий час повертається в початковий стан. Результат вимірювання відповідає дійсному значенню величини як завгодно довго.

Другий стан системи, це стан при якому випадкове обурення переводить з одного стану систему в інший, при цьому система може перебувати в новому

стані гранично довго, якщо на систему не вплине нове обурення. У цьому випадку також відомі методи застосовні, більш того, саме з такою ситуацією найчастіше і стикаємося в процесі вимірювань в системах під дією зовнішнього або внутрішнього шуму, коли реальний стан змінюється випадковим чином і в такому стані залишається в ньому досить довго.

Третій можливий стан динамічної системи, це стан коли періодичний регулярний процес поведінки системи змінюється нерегулярним випадковим режимом відхилення від основного стану. При цьому нерегулярність поведінки не пов'язана з наявністю зовнішніх випадкових збурень, а тільки з властивостями самої динамічної системи. В цьому випадку хаотичної динаміки з часом відбувається експоненціальне розбігання фазових траєкторій і вимірювана величина (ДЗ) може приймати будь-яке значення всередині аттрактора НДС.

При цьому якщо в момент вимірювання ДЗ X_i t_0 її дійсне значення знаходилося в інтервалі $[y_i - u_i, y_i + u_i]$ (де y_i, u_i – оцінка і невизначеність вимірювання X_i), то при розвитку динаміки та появі дивного аттрактора (хаотичний режим) значення буде перебувати в межах аттрактора $[y_{\min} - u_{\min}, y_{\max} + u_{\max}]$ (де $y_{\min}, y_{\max}, u_{\min}, u_{\max}$ – оцінки та невизначеності вимірювання мінімальних і максимальних значень X_i) по координаті X_i :

$$[y_i - u_i, y_i + u_i] \in [y_{\min} - u_{\min}, y_{\max} + u_{\max}], \text{ при } t \neq t_0 \quad (3.45)$$

Що в цьому випадку змінюється для завдання обробки результатів вимірювань? Подальше, після моменту часу t_0 , значення ДЗ стає передбачуваним в рамках інтервалу, обумовленого межами аттрактора (3.45). Тому у моделі вимірювання вперше запропонований підхід щодо подання та оцінювання результатів вимірювання із застосуванням аттрактора.

3.7.2 Подання результатів вимірювань динамічних змінних із хаотичною динамікою

Звернемо увагу на той факт, що при вимірюванні ДЗ НДС бюджет невизначеності становлять не тільки невизначеності вимірювання, а й невизначеність, викликана динамікою НДС. При цьому внесок останньої може переважати.

Згідно з [219] X_i є вхідними величинами, результати одночасних вимірювань яких позначимо x_i . Часові ряди m вимірювань n ДЗ представляють собою матрицю вимірювань виду:

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} \dots x_{1,m} \\ \dots \\ x_{n,1} \dots x_{n,m} \end{vmatrix}. \quad (3.46)$$

Вихідні величини Y_i пов'язані з вхідними величинами X_i рівнянням вимірювання (3.41). Зауважимо, що рівняння (3.41) можна застосувати для виконання непрямого вимірювання, до якого можна віднести визначення ентропії Шеннона системи. При прямих вимірюваннях вихідні величини є оцінками вхідних величин $Y_i = f(X_i)$. Вони також є інтервальними величинами із межами $[Y_i^{\min}; Y_i^{\max}]$. При цьому, відповідно до [219]:

$$Y_i = y_i \pm U_i, p, \quad (3.47)$$

де y_i – оцінка вимірювання x_i ; U_i – розширена невизначеність вимірювання; p – рівень довіри.

В результаті матриця (3.45) буде перетворена в матрицю результатів вимірювання виду:

$$\begin{vmatrix} Y_{1,1} \dots Y_{1,m} \\ \dots \\ Y_{n,1} \dots Y_{n,m} \end{vmatrix}. \quad (3.48)$$

Дані (3.48), що представляють часові ряди, є проміжними і використовуються для отримання максимальної інформації про НДС. Визначення фрактальної розмірності з (3.45) дозволяє класифікувати процес як детермінований, випадковий або хаотичний і вибрати спосіб представлення результатів вимірювання.

Якщо процес визначений як випадковий, оцінка невизначеності проводиться за методом визначення невизначеності вимірювання інтервальних величин, запропонований в [84]. Його суть полягає в тому, що якщо інтервальна величина $Y_i \in [Y_i^{\min}; Y_i^{\max}]$ має рівномірний розподіл, то вона видається математичними очікуваннями середини інтервалу m_i^{mid} , меж інтервалу m_i^{\min}, m_i^{\max} та їх дисперсії $\sigma_i^{\text{mid}}, \sigma_i^{\min}, \sigma_i^{\max}$:

$$Y_i = m_i^{\text{mid}} \pm k\sigma_i^{\text{mid}}, \quad (3.49)$$

де

$$m_i^{\text{mid}} = \frac{1}{2} \left[(m_i^{\min} - k\sigma_i^{\min}) + (m_i^{\max} + k\sigma_i^{\max}) \right],$$

$$\sigma_i^{\text{mid}} = \frac{1}{2} \left[(m_i^{\max} + k\sigma_i^{\max}) - (m_i^{\min} - k\sigma_i^{\min}) \right].$$

Зауважимо, що варіант вираження результатів вимірювання (3.49) справедливий в разі випадкової поведінки ДЗ НДС. При оцінюванні результатів вимірювання ДЗ реальних НДС слід врахувати, що вони є інтервальними величинами з невідомим законом розподілу. Тому необхідно вирішити два завдання:

- по-перше, слід визначити мінімальне і максимальне значення ДЗ, обчислити невизначеність їх вимірювання:

$$Y_i^{\min} = y_i^{\min} \pm U_i^{\min}, Y_i^{\max} = y_i^{\max} \pm U_i^{\max}, p. \quad (3.50)$$

- по-друге, слід побудувати гістограми значень Y_i , визначити найбільш Y_i^{oft} і найменш Y_i^{seld} вірогідні значення ДЗ, обчислити невизначеність їх вимірювання U_i^{oft} , U_i^{seld} і ймовірності їх появи $P(Y_i^{oft})$, $P(Y_i^{seld})$:

$$\begin{aligned} Y_i^{oft} &= y_i^{oft} \pm U_i^{oft}, p, P(Y_i^{oft}); \\ Y_i^{seld} &= y_i^{seld} \pm U_i^{seld}, p, P(Y_i^{seld}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Вирази (3.50), (3.51) і гістограми значень Y_i являють собою вираз невизначеності результатів вимірювання ДЗ НДС. Для надання максимально можливого обсягу інформації вирази невизначеності результатів вимірювання (3.50), (3.51) доповнюються значеннями фрактальної розмірності D_H , ентропії H і часу передбачення T_{for} у вигляді:

$$D_i = d_i \pm U_i, p; H_i = h_i \pm U_i, p; T_{fori} = t_{fori} \pm U_i, p, \quad (3.52)$$

де d_i , h_i , t_{fori} – оцінки вимірювань фрактальної розмірності, ентропії і часу передбачення відповідно.

Таким чином, отримані не тільки вирази невизначеності вхідних і вихідних величин, а й вирази невизначеності результатів вимірювання фрактальної розмірності, ентропії і часу передбачення ДЗ.

3.8 Основні положення теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах

Теоретична модель вимірювань в НДС розробляється для вирішення широкого кола завдань, пов'язаних із вимірюванням та аналізом результатів вимірювання фізичних та нефізичних величин (динамічних змінних), що характеризують стан нелінійних динамічних систем різної природи, які демонструють хаотичну динаміку.

Модель є адаптивною, тобто, придатною для вимірювань величин із детермінованою, стохастичною та хаотичною динамікою. Модель заснована на перевірених теоріях динамічного хаосу, динамічних систем, фрактальній теорії, теорії інформації та інших.

Філософія побудови та застосування моделі відповідає основним принципам теорії пізнання:

- об'єктивності розгляду об'єкта;
- необхідності розгляду об'єкта пізнання у всіх його зв'язках і відносинах;
- розгляду об'єкта в його розвитку, зміні;
- діалектичного заперечення;
- сходження від абстрактного до конкретного;
- єдності аналізу та синтезу в процесі пізнання.

Фізико-математичний базис та принципи моделі відповідають принципам теорії вимірювань;

- вимірності конкретних властивостей об'єкта;
- єдності об'єктивного і суб'єктивного в величини;
- обумовленості результату вимірювання експериментальною обстановкою і апріорної інформацією;
- об'єктивного і суб'єктивного в структурі вимірювання;
- невизначеності вимірювальної інформації;
- відносної інваріантності результатів.

Фундаментальне положення моделі полягає в погляді на вимірювану величину, як на динамічну змінну зі складною нелінійною динамікою. Істинне (дійсне) значення цієї величини лежить у можливому для неї інтервалі, який визначається властивостями та станом системи. Величина, що вимірюється, може демонструвати хаотичну динаміку. Внаслідок можливої нестійкості системи значення невизначеності вимірювання, отримане в певний момент часу з плином часу може приймати будь-яке значення, обмежене фазовим портретом системи. При цьому значення **вимірюваної величини** сильно залежать від флуктуаційних змін початкових умов і шумів.

Для оцінювання результатів вимірювання величин з описаними властивостями запропоновано використовувати інструменти якісного аналізу (аналізування фазового портрету), фрактального, ентропійного та інтервального аналізу. При цьому, оцінювання невизначеності виконується у межах аттрактору НДС.

Залежно від вимірювального завдання результат вимірювання **може** містити наступні елементи:

1. N часових рядів результатів вимірювання ДЗ X_i $x_i(t_1), \dots, x_i(t_n)$, де $x_i(t_1)$ – результат вимірювання X_i в момент часу t_1 ;
2. N рядів оцінки вимірювання y_i , з поправками на всі відомі систематичні джерела невизначеності, і стандартної невизначеності u_i $(y_1 - u_1, y_1 + u_1), \dots, (y_n - u_n, y_n + u_n)$.
3. N значень невизначеності вимірювання всіх станів X_i : $U_i(X_i) = (y_{i\min} - u_{i\min}, y_{i\max} + u_{i\max})$, де $y_{i\min}, y_{i\max}$ – оцінки максимального і мінімального результатів вимірювання $x_i(t_1)$, $u_{i\min}, u_{i\max}$ – їх невизначеності.
4. Портрет вимірювання.
5. N значень фрактальної розмірності D_{Hi} ДЗ X_i .
6. $N+1$ значень ентропії Шеннона H_i окремих ДЗ X_i і всієї системи.
7. Показники Ляпунова λ та розмірність вкладення аттрактора M .

8. Час передбачення T_{for} .

При довгостроковому спостереженні за системою, що еволюціонує, результат вимірювання доповнюється часовими і ентропійними шкалами.

Висновки до Розділу 3

У розділі вирішені два основних завдання дисертаційної роботи: вперше розроблено адаптивну теоретичну модель, яка забезпечує вимірювання та дослідження нелінійних динамічних систем у випадку детермінованої, стохастичної та хаотичної динаміки, а також розроблено принципи оцінювання та подання результатів вимірювань величин із хаотичною динамікою, що забезпечує подальший розвиток теорії невизначеності вимірювань в НДС.

Ключовими елементами моделі вимірювання є: схема вимірювального експерименту; спосіб оцінювання необхідної та достатньої кількості інформації; спосіб класифікації процесу та математичний апарат оброблення результатів вимірювання, принципи оцінювання та подання результатів вимірювань.

Розроблена адаптивна модель, яка дозволяє виконувати вимірювання і оцінку результатів в умовах, як стійкої, так і хаотичної динаміки НДС. У моделі вимірювань в якості математичних інструментів аналізу динаміки НДС вперше спільно використані: інтервали значень вимірюваних величин, фрактальний і ентропійний аналіз, часовий горизонт прогнозу, портрет вимірювань. Фрактальна розмірність дозволяє класифікувати динаміку процесу; ентропія Шеннона, дозволяє оцінити невизначеність вимірювання і розкид значень ДЗ; фазовий портрет дозволяє визначити показники Ляпунова та час передбачуваності динаміки системи.

Автором вперше сформульовані принципи створення рівняння вимірювання в НДС. Традиційне рівняння доповнено функціональною залежністю від часу вхідних величин, шумів і вихідної величини, а також початковими значеннями вхідних величин, функціями їх еволюції і часом передбачення. Для випадку, коли математичний опис процесів неможливий, запропоновано використовувати

портрет вимірювання. Для відновлення фазового портрета НДС розроблений удосконалений метод Таккенса, що враховує невизначеності результатів вимірювань.

Отримав розвиток ентропійний метод дослідження процесів в складних ієрархічних системах. Вперше розроблено принципи складання шкали нормованих значень ентропії для оцінки еволюції складних систем. Вперше отримано вираз зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності результатів вимірювань, застосування якого дозволяє зв'язати значення ентропії і значення фрактальної розмірності. Його застосування дозволяє виконувати аналіз причин, що впливають на значення невизначеності вимірювань.

Для складання виразу щільності розподілу величини, мінливої по складному нелінійному закону, запропоновано використовувати методи інтервального математичного аналізу, зокрема метод гістограмного розподілу. Автором **розроблені описані** принципи і вирази для проведення розрахунків ентропії і ентропійного інтервалу невизначеності результатів вимірювання.

Вперше розроблено принципи оцінювання та подання результатів вимірювань, які доповнюють теоретичну модель вимірювань в НДС. Для цього застосовані інструменти інтервальної математики та топології. Вперше результат вимірювань запропоновано представляти у вигляді: інтервала значень з урахуванням невизначеностей вимірювання меж. Значення динамічних змінних всередині інтервалу відображаються у вигляді гістограми. Наводяться найбільш і найменш вірогідні значення динамічних змінних з їх невизначеностями і ймовірності появи, наводяться значення фрактальної розмірності та ентропії Шеннона з урахуванням невизначеностей їх вимірювань.

Розроблена модель вимірювання дозволяє виконувати вимірювання і оцінку результатів в умовах стійкої і хаотичної динаміки НДС та є теоретичною основою для створення експериментальних моделей дослідження НДС.

РОЗДІЛ 4

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕНЬ ФІЗИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У розділі вперше, на основі фізико-математичних положень та адаптованої теоретичної моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах, розроблено експериментальні моделі дослідження фізичних НДС. Розроблено: модель дослідження параметрів випромінювання лазера, модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок і топологічна модель ідентифікації оптичних систем спостереження. Моделі враховують динаміку об'єкта дослідження і містять інструменти аналізу процесів в НДС. Їх застосування дає можливість досліджувати і управляти НДС в умовах хаотичної динаміки. Основні результати досліджень, які увійшли до цього розділу, відображені в роботах [13], [18] — [29], [31] — [38].

4.1 Експериментальна модель дослідження параметрів випромінювання лазера

Дослідження процесів випромінювання волоконних і нано-розмірних лазерів, а також завдання їх практичного застосування та управління режимами випромінювання ([26] — [28], [32], [33]) привели до необхідності розвитку моделі вимірювання параметрів та дослідження лазерного випромінювання в стійкому та хаотичному режимах.

Дослідження та управління режимами випромінювання лазера залишається актуальним завданням із моменту його створення. Теоретично та на практиці була показана можливість хаотизації режимів випромінювання, як багатомодових [227], так і одномодових [228] лазерів, що впливає на значення та стабільність параметрів лазерного випромінювання.

Виділяють два напрямки досліджень хаосу в лазерах. Перший спрямований на боротьбу з хаотичними режимами. Хаотизації веде до погіршення стабільності випромінювання, що неприйнятно для лазерів, які застосовуються в вимірювальних, медичних та інформаційних технологіях [28]. Другий спрямований на забезпечення генерації та керування хаотичними режимами випромінювання для використання в системах оптичного зв'язку [229]. Інформація в таких системах передається у вигляді подвійного повідомлення, захищеного в хаотичному оптичному носії [230]. У зв'язку з цим становить інтерес можливість генерації лазерних імпульсів з керованим рівнем стабільності частоти випромінювання, частоти проходження, амплітуди, частоти несучої і т.д. Для цього досліджуються механізми руйнування режиму синхронізації мод, та інші процеси, що призводять до хаотизації [227].

Успіх описаних досліджень залежить від коректності моделей досліджень. Методики вимірювань параметрів лазерного випромінювання та аналізу їх результатів регламентується стандартами ([231], [232] та ін.) і базуються на класичній теорії вимірювань із постулатами про існування одного істинного значення (2.2), ергодичності (2.5) та виконанні центральної граничної теореми (2.22).

З точки зору теорій дослідження складних систем, лазер являє собою ієрархічну НДС із функцією самоорганізації, а параметри випромінювання є динамічними змінними. У п. 1.8.2. автором було розглянуто питання виникнення хаотичних режимів в лазерах як НДС (1.37) — (1.40). Також раніше було показано, що у випадку НДС, гіпотези класичної теорії вимірювання не підтверджуються.

З метою забезпечення досліджень і управління НДС розроблена адаптивна теоретична модель вимірювань в НДС. Її застосування для дослідження параметрів лазерного випромінювання в стаціонарному та хаотичному режимах сприяє вирішенню як завдання боротьби з хаосом, так отримання й використання хаотичного випромінювання.

На основі теоретичної моделі вимірювань розроблена модель дослідження та вимірювання параметрів випромінювання лазера [37], [38].

4.1.1 Схема експеримента

У якості об'єкта досліджень розглянемо імпульсний лазер і такі параметри випромінювання (ДЗ) $X(t)$: енергію в імпульсі, тривалість і частоту проходження імпульсів, стабільність значень і спектральні характеристики випромінювання [231], [232].

Схема експерименту наведена на рис. 4.1., де 1 — система інжекції, 2 — лазер, 3, 4, 7 — **ділильні** пластинки, 5 — вимірювач енергії імпульсів, 6 — спектр-аналізатор, 8 — блок вимірювання тривалості імпульсів, 9 — блок вимірювання частоти проходження імпульсів, 10 — система управління, синхронізації і запису результатів вимірювань.

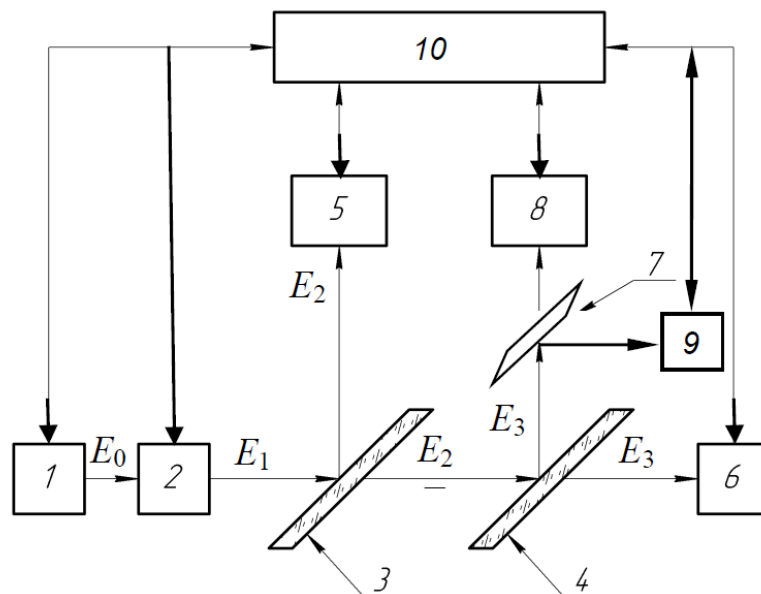


Рис. 4.1. Схема експерименту.

Експеримент виконується в такий спосіб. Випромінювання лазера 2, пройшовши **світлоділильні** пластинки 3, 4, 7, спрямовується на вхід приладів 5, 6, 8, 9. Вважаємо, що пластинки ділять енергію імпульсу в співвідношенні 50/50. Система 10 управляє накачуванням лазера 1, а також синхронно, в задані моменти

часу, фіксує результати вимірів: енергії інжекції E_0 (X_0); енергії імпульсу $E_1 = 2E_2$ (X_1); тривалості τ (X_2) і частоти проходження імпульсів f (X_3); частоти випромінювання ν (X_4); ширини спектральної лінії випромінювання $\Delta\nu$ (X_5); час t_i проведення i -го виміру. ДЗ $X_1—X_5$ формують вектор стану НДС $\vec{X}(X_i)$, $i = 1, \dots, 5$. Із низки ДЗ виключена енергія накачування X_0 , як керуючий параметр. Аналіз отриманих даних дозволяє визначити ступінь монохроматичності випромінювання $\Delta\nu / \nu$ і стабільність ДЗ.

Метою експерименту є вимірювання параметрів випромінювання лазера, дослідження режимів роботи, можливості та умов переходу в хаотичний режим. При цьому вимірюються інтервали значень ДЗ в стаціонарному та хаотичному режимах, класифікується динаміка та визначається час прогнозу значень ДЗ.

В якості керуючого параметра лазера 2 розглядається енергія інжекції X_0 (3), що подається системою 1. Коли її значення дорівнює заданій величині $X_0 = X_0^{norm}$ лазер забезпечує стійку динаміку характеристик випромінювання, яку можна подати як $X_i \in [X_{i_{min}}^{norm}; X_{i_{max}}^{norm}]$. Якщо $X_0 \neq X_0^{norm}$ $X_i \notin [X_{i_{min}}^{norm}; X_{i_{max}}^{norm}]$, можлива зміна характеру динаміки та перехід у хаотичний режим [227]. Після повернення керуючого параметра до значення $X_0 = X_0^{norm}$ лазер повертається в стаціонарний стан. Таке повернення властиве НДС із функцією самоорганізації [233]. Для класифікації динаміки використовується метод фрактальних шкал [11].

4.1.2 Класичний підхід до вимірювань параметрів лазера

Методики вимірювань параметрів лазера та оцінювання результатів вимірювань відображені в стандартах, таких як [231], [232] та ін. Вимірювані величини оцінюються за допомогою:

- середнього значення результатів вимірів:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.1)$$

- стандартного відхилення:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4.2)$$

- стабільності обраної ДЗ :

$$\Delta x = \pm \frac{2s}{\bar{x}}. \quad (4.3)$$

- розширеної відносної невизначеності:

$$u = \sqrt{\Delta x^2 + u_k^2}. \quad (4.4)$$

де u_k — розширена відносна невизначеність коефіцієнта охоплення [231].

Результат вимірювань параметрів представляється у вигляді (3.47) $Y = y \pm u$.

Вирази (4.1)—(4.4) справедливі в рамках класичного підходу до вимірювань і виправдані в разі підтвердження гіпотез про одне значення вимірюваної величини, ергодичність і виконання центральної граничної теореми. Ці умови відповідають стаціонарному стійкому стану лазера. При цьому параметри випромінювання не розглядаються як ДЗ, але допускаються їх флуктуації, що відображає стабільність параметрів Δx (4.2). Прикладом є лазер, який використовується як оптичний стандарт частоти. Це одномодовий He-Ne лазер із стабілізацією частоти парами йода.

У разі нестійкого стану, при хаотичній динаміці, наведені вирази представляють результат вимірювання як такий, що має високу невизначеність, внаслідок зростання значень стандартного відхилення s (4.2) і стабільності Δx (4.3). Також у (4.1) — (4.4) не розглядаються можливі кооперативні ефекти та кореляція ДЗ. Для оцінювання результатів вимірювань параметрів лазера в

нестійкому стані та класифікації його динаміки повинні бути використані спеціальні, систематичні підходи та математичні інструменти.

4.1.3 Аналізування та подання результатів дослідження

Аналізування та подання результатів дослідження виконується відповідно до положень теоретичної моделі вимірювань в НДС. При плануванні експерименту з вимірювання параметрів лазера необхідно визначити кількість вимірювань, яка дозволила б охопити всі можливі значення ДЗ і сформуванати фазовий портрет НДС. Для дисипативних НДС фазовий портрет є аттрактор. У разі хаотичної динаміки це дивний аттрактор. Мінімальна кількість вимірювальних експериментів m_{\min} оцінюється за формулою (3.1). Кількість експериментів можна оцінити зверху, прийнявши значення фрактальної розмірності D_H рівним значенню розмірності вектора стану НДС, тобто рівним числу n вимірюваних ДЗ. Згідно з умовами експерименту (рис. 4.1.) $n=5$, отже $m_{\min} \geq 10^4$.

Результат вимірювання X_i представляється з урахуванням (3.55) інтервалом:

$$Y_i = [y_i^{\min} \pm u_i^{\min}; y_i^{\max} \pm u_i^{\max}], \text{ при } p = a, \quad (4.5)$$

де y_i^{\min} , y_i^{\max} , u_i^{\min} , u_i^{\max} — мінімальне і максимальне значення оцінки результатів вимірювання ДЗ X_i і їх невизначеності відповідно.

Вимірювання інтервалів (4.5) виконуються як в стаціонарному, так і в хаотичному режимі. Сукупність результатів вимірювань значень ДЗ (4.5) формують вектор стану системи розмірності $n=5$ $\vec{Y}(Y_1, \dots, Y_5)$. Сукупність усіх станів \vec{Y} формує портрет вимірювання (3.44). Для візуалізації результатів вимірювання можуть бути складені тривимірні портрети, що представляють собою варіації компонент вектора стану \vec{Y} та параметричні зміни обраної ДЗ у часі при зміні значення керуючого параметра за зарзком рис. 1. 7.

Для класифікації динаміки ДЗ застосовується фрактальний аналіз часових рядів результатів вимірювання ДЗ $\{x_j\}$, $j=1, \dots, m$. Фрактальна розмірність D_H визначається з виразу (1.13). Використовуючи формули (1.13)—(1.15) виконується класифікація динаміки ДЗ.

Фрактальну розмірність D_H (1.13) можна пов'язати з виразом для стабільності ДЗ лазерного випромінювання Δx (4.3) через середнє квадратичне відхилення s формулою виду:

$$\Delta x = \pm \frac{2r}{\bar{x} (m/2)^{2-D_H}} \quad (4.6)$$

Із виразу (4.6) випливає висновок, що абсолютне значення стабільності ДЗ $|\Delta x|$ зменшується з ростом фрактальної розмірності D_H . При $D_H = 1$ $|\Delta x|$ приймає мінімальне значення — детермінована динаміка ДЗ забезпечує найкращу стабільність параметра. Збільшення хаотизації призводить до погіршення стабільності. Для випадку, коли фрактальна розмірність перевищує значення, характерне для випадкового процесу $D_H = 1,5$, стабільність прагне до свого мінімального значення, що пояснюється антиперсистентністю процесу, локальної нестійкості та великим розкидом значень при $D_H \rightarrow 2$. Таким чином фрактальна розмірність може бути використана для оцінювання стабільності ДЗ в разі, коли лазер працює як в стаціонарному, так і хаотичному режимах. Також вираз (4.6) може бути використаний для отримання хаотичних сигналів із заданою стабільністю.

Наступне питання, на яке належить відповісти, це питання часового горизонту прогнозу значень ДЗ. Особливість хаотичних НДС полягає в тому, що мале обурення початкових умов, або мала зміна параметрів самої системи, призводять до непередбачуваності результуючого руху за кінцевий час прогнозування T_{for} визначається по формулі (1.18). На практиці значення часу прогнозування часто розраховують за спрощено формулою [234]:

$$T_{for}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda_{max}}. \quad (4.7)$$

Поняття «час прогнозування» має важливе значення для прогнозування значень ДЗ НДС. Вираз (4.7) разом із виразом стабільності ДЗ (4.6) може бути використано для оцінювання та управління хаотичними режимами випромінювання лазера.

Таким чином, представлена теоретична модель вимірювання параметрів лазерного випромінювання заснована на системному підході до лазера, як до НДС із функцією самоорганізації. Модель призначена для вимірювання та дослідження параметрів лазерного випромінювання в стаціонарному і хаотичному режимах. Запропоновані схеми експерименту (рис. 4.1) і процедура оцінювання результатів вимірювань (4.5)—(4.7) можуть застосовуватися, як для забезпечення високої стабільності параметрів випромінювання, так і для отримання та управління хаотичним випромінюванням лазера. Результати роботи розвивають теорію вимірювань в НДС і, завдяки використанню таких топологічних характеристик, як фрактальна розмірність і показники Ляпунова, сприяють розвитку топологічної фотоніки, розширюючи сферу її інтересів від фотонних кристалів до лазерного випромінювання [235].

4.1.4 Основні висновки про модель дослідження параметрів лазерного випромінювання як нелінійної динамічної системи.

Представлена модель дослідження лазера як НДС з функцією самоорганізації побудована на припущенні про інтервальні значення вимірюваних величин і можливості зміни стаціонарної динаміки на хаотичну. Модель містить схему експерименту та процедуру оцінювання результатів вимірювань. Особливість моделі полягає в її системному підході та придатності для вимірювань, досліджень стаціонарних і хаотичних режимів. Модель передбачає вимірювання інтервалів значень параметрів випромінювання в різних режимах, значень їх стабільності і часу прогнозування. Класифікація динаміки системи виконується за

допомогою фрактальної розмірності. Модель може бути використана як для забезпечення стабільності параметрів випромінювання лазера, так і для отримання та управління хаотичним випромінюванням.

4.2 Дослідження параметрів випромінювання нанолазерів

Описана модель дослідження параметрів лазерного випромінювання, створена з використанням теоретичної моделі вимірювання в НДС, може бути ефективно застосована для вирішення ряду завдань перспективного напрямку застосування нанорозмірних лазерів.

4.2.1 Практичне застосування нанолазерів

Розроблення оптичних нанооб'єктів, і в першу чергу нанолазерів, є одним з перспективних напрямків розвитку фотоніки та лазерних технологій. У нанолазерах, або спазерах (від англ. *Surface Plasmon Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), використовуються локальні процеси збудження плазмонних коливань (плазмонів) на поверхні металевих наночастинок [236].

Існуючі конструкції нанолазерів можна розділити на кілька груп, в яких використовуються різні механізми накачування активного середовища. Перші публікації про створення лазерів нанорозмірів датуються 2007 роком (М. Хіл, Технічний університет Ейндховена, Нідерланди). У статті [237] був описаний перший метало-напівпровідниковий нанолазер із імпульсним режимом випромінювання. Завдяки своїй колоноподібній конструкції лазер Хілла отримав назву *goldfinger*.

У 2011 році С. Дінг із колегами запропонували нанолазер, який працював в постійному режимі випромінювання при кімнатній температурі [238]. Лазер мав розміри $0,34 \times 3,0 \times 1,53$ мкм, електричне накачування, довжину хвилі випромінювання $\lambda = 1554$ нм, ширину лінії випромінювання 4 нм, добротність $Q \sim 400$ і великі енергетичні втрати. У 2012 році авторам вдалося зменшити втрати за рахунок збільшення товщини оболонки з нітриту кремнію до 30 нм

[239]. Новий лазер мав розміри $1,15 \times 1,39 \times 1,7$ мкм і ширину лінії випромінювання 0,54 нм.

В роботі М. Хаявіхана [240] представлений коаксіальний нанолазер із оптичним накачуванням. Група під керівництвом С. Феймана (Університет штату Каліфорнія в Сан-Дієго) розробила дві конструкції: з діаметром ядра і товщиною оболонки 100 нм та з діаметром ядра 175 нм і товщиною оболонки 75 нм. Є публікації про створення і більш «компактних» нанолазерів з товщиною оболонки 22 нм [241].

Відомі конструкції, які засновані на мікродисковому резонаторі, в якому збуджуються моди **шепучої** галереї, а активне середовище заповнює внутрішній простір мікродиски. Ще одна конструкція передбачає застосування лінійних напівпровідникових активних середовищ, в яких частота генерованого випромінювання визначається спектральними властивостями рідкого активного середовища. Звичайно, в кожному з цих варіантів реалізується свій механізм генерації випромінювання.

Однак конструкції майже всіх нанолазерів далекі від завершення по ряду причин. Добротність резонатора у спазерів невелика: $q \sim 15$ — для пристроїв, які забезпечують локалізацію моди в трьох **вимірах**, $q \sim 120$ — при двовимірній локалізації [242], [243]. При цьому добротність резонатора звичайного лазера становить величину порядку 10^5 [244]. Також на сьогоднішній день не встановлено умов формування спектральних і частотних характеристик випромінювання нанолазерів, немає повного розуміння умов їх імпульсного та безперервного випромінювання.

Нанолазери є перспективним напрямком нанофотоніки. Вирішується питання застосування нанолазерів як інструментів медичного призначення, приладів вимірювання часу і в якості нових оптичних стандартів частоти. Нанолазери можуть бути використані для створення елементів квантового комп'ютера. Основним чинником, що гальмує їх широке практичне використання, є невирішене питання стабілізації та управління параметрами випромінювання (монохроматичністю, когерентністю, необхідною потужністю, тривалістю

імпульсу, фокусуванням пучка), а також питання спільної роботи ансамблю нанолазерів, боротьби з шумами і ін. Одним із шляхів вирішення цих завдань є використання режиму надвипромінювання (НВ). У роботі [33] автором дисертації із колегами була обгрунтована можливість використання нанолазерів в режимі НВ та пристроїв на їх основі для вирішення завдань передачі високошвидкісних оптичних інформаційних сигналів.

4.2.2 Формування режиму надвипромінювання

На можливість існування НВ вперше звернув увагу Р. Дике у 1954 році [245], а у 1973 році воно було виявлено експериментально. В основі явища лежать процеси кореляції між фазами випромінювання окремих атомів. Ефект НВ Дике спостерігається в умовах малої відстані між випромінюючими центрами в порівнянні з довжиною хвилі випромінювання і проявляється у виникненні сплесків когерентного випромінювання [246].

У напівпровідникових нанолазерах когерентне випромінювання обумовлено ефектом НВ в активному напівпровідниковому середовищі. Залежність параметрів спектра випромінювання від щільності струму накачування та від температури дозволя. оцінити характерний час колективної взаємодії носіїв заряду, яке становить кілька десятків фемтосекунд [247].

На прикінці 1990-х років дослідники звернули увагу на особливість НВ в напівпровідникових гетероструктурах, припускаючи, що концентрація нерівноважних носіїв заряду в активній області напівпровідникового лазера може флюктувати навколо середнього значення [246]. Наявність **нефлюктуйованого** середнього рівня концентрації носіїв може призводити до утворення доменів із підвищеною концентрацією нерівноважних носіїв.

Вивчення механізмів формування НВ в напівпровідникових гетероструктурах [247] і наногетероструктурах з квантовими точками [248] показало, що сформовані домени мають розміри, багато менші довжини хвилі випромінювання. Тому наноласери, в яких використовуються напівпровідникові матеріали з

гетероструктурами і квантовими точками, представляють собою основу джерел імпульсного НВ.

Активна зона нанолазера є просторовою послідовністю доменів, в яких усі атоми або молекули, що випромінюють, **сфазовані** та забезпечують синхронне випромінювання всіх одиночних випромінювачів, що входять до складу кожного домена. Ще одна умова, яка забезпечує генерацію НВ, заснована на розподіленому зворотному зв'язку в нанолазері, яке обумовлено малим коефіцієнтом зворотного віддзеркалення $R_r \ll 1$ в активному середовищі.

4.2.3 Генерація імпульсного надвипромінювання у нанолазерах

Як було показано в [246], НВ може формуватися у наногетероструктурі з квантовими точками, кожна з яких є ізольованим доменом. Процес формування імпульсу НВ обумовлений спонтанною синхронізацією фаз окремих випромінюючих диполів, що входять до складу домену. Початковий етап наростання потужності випромінювання визначається постійною величиною інкременту. Потужність випромінювання нанолазера зростає за експонентним законом:

$$P = P_0 \exp(yt), \quad (4.8)$$

де P_0 — потужність випромінювання в початковий момент часу; y — інкремент, що залежить від різниці населеності рівнів N_1 та N_2 , тобто:

$$y = v \frac{N_1 - N_2}{N_2}, \quad (4.9)$$

де v — нормувальний коефіцієнт з розмірністю s^{-1} .

Із співвідношень (4.8) та (4.9) при початковому моменті часу $t=0$ випливає, що потужність випромінювання дорівнює рівню спонтанного випромінювання

P_0 . Подальше збільшення потужності випромінювання визначається часовою залежністю $N_1(t)$. У міру збільшення потужності випромінювання зменшується населеність енергетичного рівня та процес наростання сповільнюється, в результаті чого стабілізується рівень потужності випромінювання в певний момент часу, який характеризує максимальний рівень імпульсного випромінювання. При великій різниці заселеності робочих рівнів настає експоненційне зростання потужності випромінювання.

Проведений аналіз умов формування НВ в доменній структурі був заснований на теоретичній моделі опису концентрації нерівноважних носіїв (електронів і дірок) в активній області лазера. Із зростанням концентрації нерівноважних носіїв заряду при досягненні деякого критичного значення (n_0) система розбивається на домени. Таким чином, відбувається нерівноважний фазовий перехід другого роду. Домени є **стійкими утвореннями**, кожне з яких є областю квантової ями, в якій локалізовано випромінювання. Кожен домен являє собою більш щільне оптичне середовище. Можна припускати, що в межах одного домену виникає ефект типу «розподілу зворотнього зв'язку», що приводить до того, що домен випромінює когерентно (все випромінювання всередині домену знаходяться в одній фазі), як єдине ціле. Саме таке спонтанне фазування випромінюючих носіїв, без зовнішнього когерентного впливу на систему, є відмінною рисою НВ Дике [250].

В якості альтернативи вертикально-випромінюючим [251], квантово-каскадним [252], лазерам із мікродисковими резонаторами [253] та волоконним лазерам [254], які застосовуються сьогодні в інформаційних та вимірювальних системах, можуть бути використані нанолазери, що працюють в безперервному або імпульсному режимах. Потужність наведених лазерів для інформаційних завдань однаково невелика, але спектральні та частотні параметри можуть істотно відрізнитися. Застосування нанолазерів може позитивно впливати на часовий режим роботи інформаційних систем. Однак розробок нанолазерів на рівні промислових зразків ще не існує. Тому актуальним залишається завдання серійного використання нанолазерів не тільки в інформаційних мережах, але

також в сучасних вимірювальних і сенсорних пристроях. Досягнення режимів НВ нанолазерів розглядається як одна з умов їх практичного використання.

4.2.4 Особливості випромінювання нанолазерів, що забезпечують інформаційно-вимірювальні процедури

Розвиток інформаційної та вимірювальної лазерної техніки заснований на прецизійних властивостях лазерного випромінювання, до числа яких належить стабільність частоти (4.6), що дозволяє за допомогою частотних або часових вимірювань визначати параметри фізичних величин. Аналогічні вимоги до просторових параметрів випромінювання повинні виконуватися в межах, що забезпечують необхідну точність вимірювань. Важливою умовою є отримання та стабілізація необхідного значення потужності нанолазера. Енергії імпульсу повинно вистачити для проходження дистанції по оптоволокну приладу та реєстрації фотодетектором.

Особливість інформаційних параметрів нанолазерів полягає в характеристиках конструкції резонатора та активного середовища. У кільцевих нанолазерах із плазмонним накачуванням активного середовища не встановлені умови стабільності частоти та не визначені параметри пучка випромінювання. Тому на прикладі таких нанолазерів необхідно встановити умови стабілізації частоти (або довжини хвилі) випромінювання та реалізації стабільної діаграми спрямованості випромінювання.

У роботі [257] приведена оцінка півширини лінії випромінювання нанолазера 0,05...0,07 нм, яка була зафіксована за допомогою монохроматора FHR 1000 та багатоканального охолоджувального фотодетектора з розширенням 0,05 нм [257], хоча наведена оцінка ширини лінії випромінювання обмежена спектральним розширенням використаного приладу і не є остаточною величиною.

Така ситуація цілком можлива в тих випадках, коли для вимірювання лінії випромінювання використовується дифракційний монохроматор, а не гетеродин. Тому необхідний гетеродинний метод вимірювання ширини лінії випромінювання нанолазерів з урахуванням розбіжності лазерного випромінювання. Класична

задача вимірювання ширини лінії випромінювання стосовно нанолазерів є самостійною інженерною задачею, яка повинна бути вирішена в умовах нанорозмірних конструкцій.

Істотну роль в системах зв'язку та інформаційно-вимірювальних системах відіграє тривалість імпульсного випромінювання. Цей параметр порівняно за своєю величиною з тривалістю ультракороткого імпульсу фемтосекундного лазера, і тому для його вимірювання слід використовувати **автокореляційний** метод аналізу тривалості ультракоротких оптичних імпульсів, розроблений для вимірювання імпульсів фемтосекундних лазерів. У роботах [240], [241] були проведені оцінки імпульсів в режимі НВ і показано, що максимальна межа тривалості становить 400 фс. Таким чином, режим НВ нанолазерів дозволяє отримати імпульси фемтосекундної тривалості.

В якості третього параметра випромінювання нанолазерів, важливого для забезпечення інформаційно-вимірювальних процедур, слід розглянути потужність випромінювання.

Виконаємо розрахунки максимальної дистанції поширення по оптоволокну імпульсів нанолазера, що генеруються в звичайному режимі і режимі НВ. Відзначимо, що в оптоволоконних вимірювальних приладах, таких як інтерферометри або гіроскопи, застосовується одномодове волокно зі збереженням поляризації. Коефіцієнт втрат α [дБ / км] в волокні залежить від довжини волокна L , потужності вхідного сигналу P_1 і визначається потужність сигналу на виході P_0 [258]:

$$\alpha = \frac{10}{L} \lg \frac{P_1}{P_0}. \quad (4.10)$$

При проектуванні оптичних вимірювальних та інформаційних систем зв'язку важливою характеристикою фотоприймального пристрою є мінімальна (порогова) зареєстрована потужність оптичного сигналу P_{\min} . Якщо у виразі (4.10) в якості

P_0 взяти мінімальну реєстровану (порогову) потужність оптичного сигналу P_{\min} , то можна отримати вираз дальності його поширення у вигляді:

$$L = \frac{10}{\alpha} \lg \frac{P_1}{P_{\min}}. \quad (4.11)$$

Значення коефіцієнта втрат α одномодового волокна *PANDA* становить 0,5 дБ/км (4.10) на довжині хвилі 1,55 мкм. При швидкості передачі інформації, рівний B імпульсів в секунду ($B \sim 1/\tau$, де τ — тривалість імпульсу), мінімальна зареєстрована потужність оптичного сигналу P_{\min} визначається співвідношенням:

$$P_{\min} = E_{\min} / \tau. \quad (4.12)$$

де E_{\min} — мінімальна енергія випромінювання при реєстрації одного оптичного імпульсу:

$$E_{\min} = 9hf, \quad (4.13)$$

h, f — постійна Планка та частота випромінювання відповідно.

Для випромінювання на довжині хвилі 1,5 мкм ($\nu = 2 \cdot 10^{14}$ Гц), $B = 20$ МГц, використовуючи вирази (4.12), (4.13) $P_{\min} = 10$ мкВт. При потужності випромінювання нанолазера $P_1 = 3,3$ мкВт, тобто такий імпульс фотоприймачем не реєструється. Зауважимо, що в разі нормального процесу спонтанного випромінювання потужність випускаемого випромінювання пропорційна NV , де N, V — критична інверсія та критичний обсяг відповідно.

У режимі НВ (4.9) пікова потужність випускаемого випромінювання пропорційна $(NV)^2$. В цьому випадку потужності випромінювання нанолазера $P_1 = 10,9$ мкВт, сигнал реєструється і, згідно виразу (4.11), дальність передачі

сигналу по одномодовому волокну із описаними характеристиками, складає $L \approx 750$ м.

У роботі [32] автором запропонована схема лазера зі стабілізацією частоти по лінії поглинання йоду в дефекті фотонного кристала, що в майбутньому дасть нові мініатюрні оптичні стандарти частоти, що перевершують за всіма параметрами існуючі.

4.2.5 Застосування моделі досліджень параметрів випромінювання лазера для дослідження характеристик випромінювання нанолазерів

Таким чином, результати проведених досліджень доводять можливість та перспективи використання нанолазерів в режимі надвипромінювання та пристроїв на їх основі для передачі високошвидкісних оптичних інформаційних сигналів. Їх застосування буде сприяти розвитку нанометрології, нанотехніці, інформаційних та інших технологій.

Аналіз параметрів випромінювання нанолазерів та динаміки їх параметрів виконується за допомогою розробленої автором моделі дослідження параметрів випромінювання лазера як НДС.

Схема експерименту представлена на рис. 4.1, процедура оцінки результатів вимірювань описується виразами (4.5) — (4.7). Представлені моделі досліджень і вимірювань можуть застосовуватися, як для забезпечення високої стабільності параметрів випромінювання нанолазерів, так і для отримання та управління хаотичним випромінюванням.

Результати роботи розвивають теорію нанолазерів та теорію дослідження НДС щодо її практичного застосування.

4.3 Модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок

Однією з яскравих завдань фізики останньої чверті ХХ століття стало завдання охолодження газоподібних речовин до температури близької до абсолютного нуля шляхом пригнічення броунівського руху частинок (атомів,

іонів, молекул) лазерним випромінюванням. Успішна реалізація процесів охолодження та утримання частинок має важливе значення для фізики, метрології, електроніки. Охолоджені до зупинки теплового руху частинки можна спостерігати на протязі набагато більшого часу, ніж рухомі, що важливо для спектроскопії високої роздільної здатності та стабілізації частот лазерів. При досягненні температур, близьких до 0 К стає можливим отримання стану надплинності та конденсату Бозе-Ейнштейна.

Розвиток технологій охолодження та утримання охолоджених часток відкриває нові можливості для створення квантової пам'яті, вдосконалення еталонної бази, дозволяє отримати нові реперні точки стандартів частоти, підвищувати точність глобальних навігаційних систем. До перспективних завдань відноситься створення оптичних годинників на охолоджених одиночних іонах в електромагнітних пастках і на атомах, захоплених в оптичні ґрати. Передбачається, що відносна невизначеність частоти в такому годиннику досягне значень 10^{-17} – 10^{-18} [259].

Процес лазерного охолодження заснований на квантово-механічних уявленнях про поглинання та випромінювання енергії частинками. Локалізовані рухомі частинки опромінюються лазерним випромінюванням із частотою, меншою частоти атомного переходу на величину доплерівського зсуву. Частинка, поглинувши фотон, переходить із основного енергетичного стану в збуджений стан. При цьому швидкість її руху змінюється на величину швидкості віддачі частинки. Потім частинка, повертаючись в основний стан, випромінює фотон, але вже з частотою, більшою частоти **поглиненого** фотона. Це призводить до втрати енергії та уповільнення частки і, як наслідок, до зниження температури речовини. Таким чином, імпульс фотона передається частинці при стимульованому поглинанні та подальшому спонтанному випромінюванні фотона. Для наступного циклу «збудження — спонтанне випромінювання фотона» частота лазерного випромінювання зменшується, підлаштовується під швидкість руху частинок. За N циклів частинка втрачає імпульс рівний:

$$\Delta p = N\hbar k, \quad (4.14)$$

де p — вектор імпульсу, \hbar — редуцирована постійна Планка, k — хвильовий вектор.

Кількість циклів і частота охолоджуючого випромінювання визначаються електронною конфігурацією та швидкістю руху частинок (рис. 4. 2) [260].

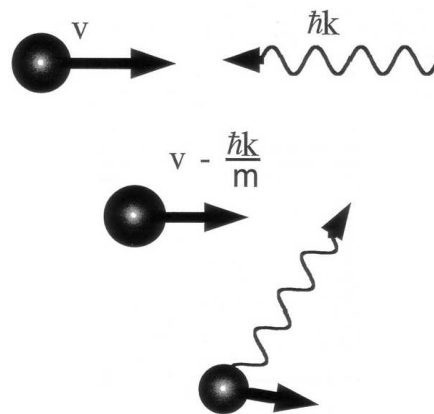


Рис. 4.2. Процес поглинання та **перевипромінювання** фотонів, що веде до гальмування частинки: v — вектор швидкості руху частинки, m — маса частинки.

Це перший етап охолодження — «доплерівське лазерне охолодження». Він дозволяє досягти температури в сотні мкК. Наприклад, після доплерівського охолодження атомів лужних металів їх температура становить близько 100 мкК. Для отримання більш низьких температур застосовуються інші механізми лазерного охолодження: субдоплерівське та охолодження нижче рівня віддачі. Мінімальна температура при субдоплерівському охолодженні атомів становить близько 1 мкК. Лазерне охолодження нижче однофотонного рівня віддачі дозволяє отримати температуру близько 100 нК [261].

Теорія лазерного охолодження та подальшої локалізації частинок була запропонована та розвинена В. С. Летоховим та В. І. Баликіним у 1970-х роках [262]. У 1997 році С. Чу, К. Коен-Таннуджи та У. Філіпс отримали Нобелівську премію за дослідження в області охолодження й уловлювання атомів із використанням лазерних технологій [263].

Практична реалізація лазерного охолодження та утримання охолоджених часток вимагає розробки методів оцінки та контролю їх стану. Швидкість руху частинок, охолоджених до температури, яка дорівнює 10^{-6} К, приймає значення порядку десятків сантиметрів в секунду. Охолоджені до такої температури атоми формують «в'язку» рідину або «оптичну патоку». Виникає питання вимірювання такої низької температури. На практиці температуру ансамблю охолоджених часток визначають балістичним способом, підсвічуючи частки після припинення охолодження (рис. 4.3).

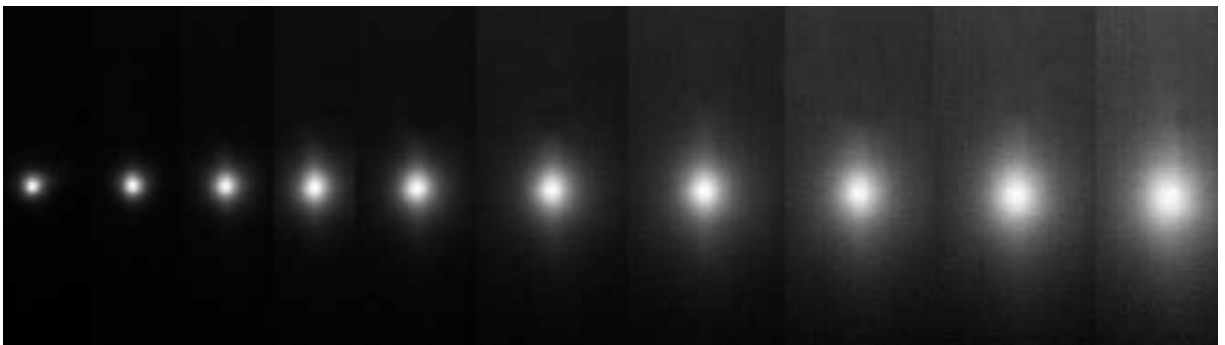


Рис. 4.3. Послідовні фотографії хмари охолоджених частинок після виключення світлових і магнітних полів. Фотографії виконані через інтервали часу $\Delta t = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5$ мс після початку розльоту [259].

При цьому питання про стан частинок на проміжних етапах охолодження залишається відкритим. Для вирішення цього завдання автором у роботі [34] запропонований лазерний анемометричний метод, заснований на вимірюванні доплерівського зсуву частоти внаслідок розсіювання лазерного випромінювання рухомими охолоджуваними частинками. Також в роботі приведені вимоги до технічних характеристик лазерного доплерівського анемометра.

У роботах [18], [29] запропонована принципово нова модель вимірювання параметрів та дослідження процесу доплерівського лазерного охолодження ансамблю частинок (атомів, іонів і молекул). Практична модель створена на основі положень теоретичної моделі вимірювань в НДС. Група охолоджуваних частинок може бути представлена у вигляді відкритої дисипативної НДС.

4.3.1 Взаємодія двох систем

Розглянемо процес доплерівського лазерного охолодження частинок як взаємодію двох систем одна із яких — хаотична, друга — квазідетермінована. Перша система — це ансамбль із N локалізованих молекул однієї речовини — система «атом» (рис. 4.4).

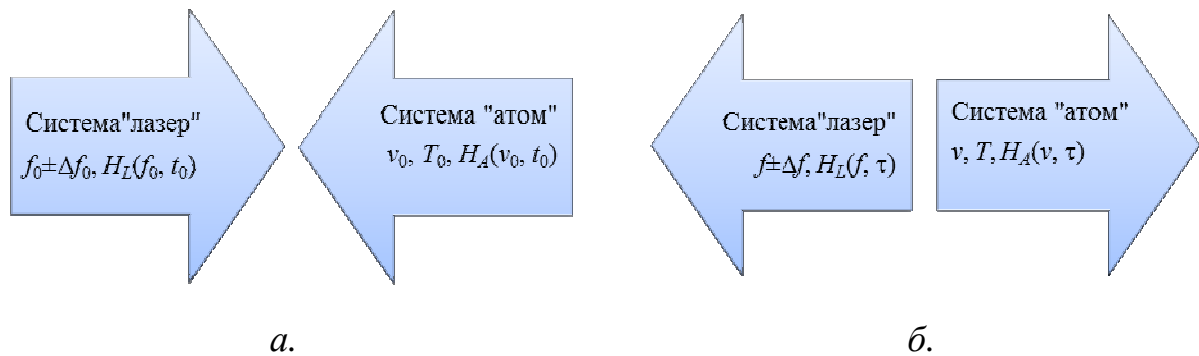


Рис. 4.4. Схема взаємодії системи «лазер» і системи «атом»

а.) системи в момент початку взаємодії $t = t_0$;

б.) системи в момент закінчення взаємодії $t = \tau$

Система характеризується середньою швидкістю руху молекул $\langle v \rangle$ та температурою T , які пов'язані між собою виразом:

$$T = \frac{\pi m}{8R_R} \langle v \rangle^2, \quad (4.15)$$

де: m — молекулярна маса частинок R_R — універсальна газова постійна.

Якщо розглянута система є рівноважною, то розподіл частинок за швидкостями v виражається законом розподілу Максвелла (рис. 4.5) [264].

$$p(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2. \quad (4.16)$$

де: k — постійна Больцмана.

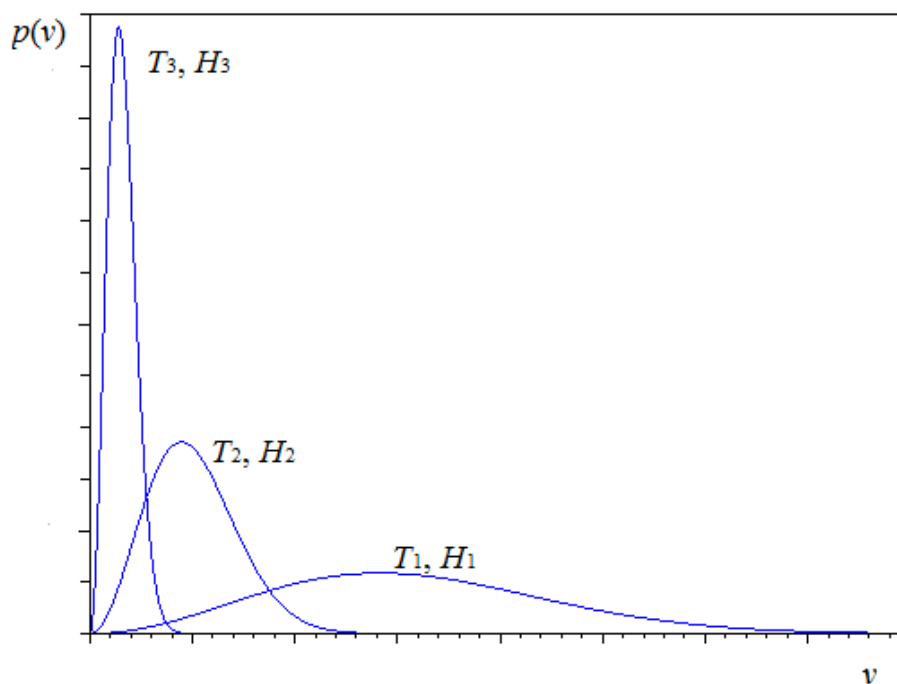


Рис. 4.5. Розподіл охолоджуваних частинок за швидкостями:

$$T_1 > T_2 > T_3, \quad H_1 > H_2 > H_3.$$

Броунівський рух частинок системи «атом», поглинання та випромінювання фотонів в процесі охолодження дозволяє віднести її до відкритих, хаотичних, та дисипативних НДС. Зауважимо, що у деяких публікаціях із теорії хаосу у якості прикладів хаотичної динаміки наводиться саме броунівський рух частинок [60], [67] та ін.

Друга система являє собою лазерне випромінювання, що характеризується частотою випромінювання f_0 і розширенням лінії випромінювання Δf_0 ,— це система «лазер». При цьому розподіл інтенсивності випромінювання за частотами f підпорядковується нормальному закону розподілу Гаусса (3.1), який у випадку опису одномодового лазерного випромінювання може бути представлений у вигляді [265]:

$$p(f) = \frac{1}{\Delta f_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(f - f_0)^2}{2\Delta f_0^2} \right]. \quad (4.17)$$

Стабілізоване за частотою лазерне випромінювання $\Delta x \rightarrow 0$ (4.3) характеризується високим ступенем когерентності:

$$\Delta f_0 / f_0 \ll 1.$$

У наукових лабораторіях отримані на спеціальних лазерних установках ступень когерентності сягає значень $\Delta f_0 / f_0 \sim 10^{-15} - 10^{-17}$. Тому систему «лазер», можна віднести до квазідетермінованих систем, її параметри залишаються в відомих рамках протягом часу спостереження. Лазер працює в імпульсному режимі, тривалість імпульсу визначається часом взаємодії лазерного випромінювання з частинками [260].

4.3.2. Оцінювання параметрів охолоджених часток

Розглянемо взаємодію систем з позицій теоретичної моделі вимірювань в НДС. Для контролю стану систем введемо інформаційну ентропію Шеннона (1.9), пов'язану з щільністю розподілу ймовірності $p(X)$, де X — досліджувана величина, виразом $H = -p(X) \ln p(X)$. Ентропія Шеннона вводиться як міра впорядкованості або, навпаки, хаотичності систем «лазер» та «атом». Найменше значення ентропія приймає в разі нормального розподілу, найбільше значення — в разі рівномірного розподілу величини. Ентропія лазерного випромінювання мала, для ідеального монохроматичного випромінювання, коли розподіл частот (4.17) апроксимується дельта-функцією, значення ентропії дорівнює нулю. Ентропія ансамблю частинок визначається розподілом Максвелла. Її значення займає проміжне місце між значеннями ентропії для нормального та рівномірного розподілів.

У початковий момент часу t_0 система «атом» характеризується середньою швидкістю руху частинок v_0 , температурою T_0 , і ентропією $H_A(v_0, t_0)$. Система «лазер» характеризується частотою випромінювання $f_0 \pm \Delta f_0$, і ентропією $H_L(f_0, t_0)$.

Після припинення взаємодії у момент часу $t = \tau$ параметри систем змінюються. Швидкість руху молекул зменшується, а частота спонтанного випромінювання f в порівнянні із частотою f_0 зростає, розширюється спектральна лінія випромінювання Δf . Система «атом» набуває характеристики: v , T та $H_A(v, t)$; система «лазер» характеристики: $f \pm \Delta f$ та $H_L(f, \tau)$. Така взаємодія триває кількість циклів, необхідних для досягнення заданої температури речовини. Для системи «атом» і системи «лазер» вирази для ентропії Шеннона в моменти часу t_0 та τ мають вигляд;

$$\begin{aligned} H_A(v, t_0) &= -p(v_0) \ln p(v_0), \\ H_L(f, t_0) &= -p(f_0) \ln p(f_0). \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} H_A(v, \tau) &= -p(v) \ln p(v). \\ H_L(f, \tau) &= -p(f) \ln p(f). \end{aligned} \quad (4.19)$$

При цьому: $H_A(v, \tau) < H_A(v, t_0)$ і система «атом» стає більш упорядкованою; $H_L(f, \tau) > H_L(f, t_0)$ система «лазер» стає більш хаотичною. Це пояснюється залежністю ентропії Шеннона від виду щільності розподілу функції та інтервалу значень величин. Так, після випускання частинками фотонів із більшою частотою, ніж частота поглинених фотонів, швидкість руху частинок зменшується, пік функції розподілу Максвелла (4.16) зростає і зміщується в бік зменшення швидкостей (рис. 4.5). Ентропія системи «атом» зменшується. Пік функції розподілу інтенсивності лазерного випромінювання зміщується в бік більш високих частот і відповідає резонансній частоті переходу для даного типу

частинок. При цьому відбувається збільшення значення Δf_0 внаслідок доплерівського розширення, значення розширення лінії випромінювання зростає.

Зміну стану систем можна виразити через інформацію (3.18), яка придбається (інформація про систему «атом» I_A) або втрачається (інформація про систему «лазер» I_L) в процесі взаємодії систем [266]:

$$\begin{aligned} I_A &= H_A(v, t_0) - H_A(v, \tau) = \Delta H_A, \\ I_L &= H_L(f, t_0) - H_L(f, \tau) = \Delta H_L. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Скориставшись законом збереження інформації, згідно з яким «кількість інформації в замкнутій системі залишається незмінною» [266], з виразів (4.20) отримаємо рівність:

$$|\Delta H_A| = |\Delta H_L| \quad (4.21)$$

Згідно з виразом (4.21) зміна ентропії системи «лазер» за модулем дорівнює зміні за модулем ентропії системи «атом». Ця рівність дозволяє, аналізуючи зміни параметрів системи «лазер», оцінювати параметри системи «атом».

Мінімальне значення ентропія системи «атом» приймає за відсутності теплового руху частинок $v = 0$ $H_A(v) = 0$. Вираз (4.21) у будь-який момент часу можна представити у вигляді:

$$|\Delta H_A(\Delta T)| = |\Delta H_L(\Delta f)| \quad (4.22)$$

Рішення виразу (4.22) із урахуванням виразів (4.16), (4.17), (4.19) дозволить визначити зв'язок між зміною ентропії системи «лазер», ентропією та температурою системи «атом»:

$$\Delta T = \Delta T \left[|\Delta H_L(\Delta f)| \right] \quad (4.23)$$

Вирази (4.17)—(4.23) дозволяють визначити зміни ентропії та температури системи «атом» в моменти часу t_0 і τ , а також вираз для різниці ентропії (4.20) ΔH_L :

$$\begin{aligned} H_L(f, t_0) &= \ln(\Delta f_0 \sqrt{2\pi e}), \\ H_L(f, \tau) &= \ln(\Delta f \sqrt{2\pi e}), \\ |\Delta H_L(\Delta f)| &= \left| \ln \frac{\Delta f_0}{\Delta f} \right|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким чином, на значення ентропії системи «лазер» впливає зміна значення ширини лінії випромінювання Δf . Вимірюючи частоту спонтанного випромінювання та оцінюючи зміну його ентропії (4.24), є можливість оцінити зміни ентропії та температури системи охолоджених часток після будь-якої кількості циклів «поглинання – спонтанне випромінювання фотона», що відкриває можливості контролю процесу охолодження та оцінювання температур із малими дискретними значеннями ΔT .

4.3.3. Висновки по моделі дослідження процесу лазерного охолодження

На основі базисних принципів застосування моделі вимірювань в НДС розроблено експериментальну модель дослідження процесу лазерного доплерівського охолодження частинок (атомів, іонів, молекул), що має важливе теоретичне та прикладне значення для сучасної фізики.

Модель створено за умови, що лазерне охолодження являє собою процес взаємодії квазідетермінованою системи лазерного випромінювання з хаотичною динамічною системою частинок.

Для оцінювання параметрів охолоджених часток і контролю процесу охолодження запропоновано використовувати підходи та інструменти теоретичної моделі вимірювання параметрів нелінійних динамічних систем.

Отримано вираз для оцінювання ентропії лазерного випромінювання, як функції його частоти. Результати роботи дають можливість оцінювати зміни ентропії системи охолоджених часток після будь-якої кількості циклів «поглинання — спонтанн-е випромінювання фотонів», що відкриває можливості контролю процесу охолодження і оцінки температур з малими дискретними значеннями.

Розроблена експериментальна модель досліджень робить внесок у розвиток теорії та практики лазерного охолодження.

4.4. Топологічна модель ідентифікація оптичних систем

До широкого кола завдань інформаційної безпеки, збереження комерційної таємниці, відноситься задача захисту від несанкціонованої відео- та фотозйомки. Її реалізація здійснюється за допомогою лазерних оптоелектронних систем (ЛОС), що дозволяють визначити місце розташування прихованих оптичних приладів спостереження (ОПС) — біноклів, відео- та фотокамер.

Принцип дії таких ЛОС заснований на процесі сканування простору лазерним променем (неприворним або імпульсним випромінюванням), подальшому прийомі віддзеркаленого сигналу та визначенні місцезнаходження **відзеркалючої** поверхні, якою служить лінза об'єктива ОПС. Більш складні ЛОС дозволяють не тільки визначити координати прихованих ОПС, а й ідентифікувати та класифікувати їх. Якщо фізика процесу визначення координат ОПС детально відображена в літературі по оптичній локації [267], то питання ідентифікації та класифікації, як правило, становить комерційну таємницю виробника ЛОС.

Класифікація ОПС відноситься до завдань розпізнавання образів. Класична задача розпізнавання образів включає в себе три етапи: отримання інформації про об'єкт; виділення та аналіз характерних природних або штучних ознак (найпростіших характеристик або властивостей); ідентифікація та класифікація об'єкта за результатами аналізу виділеними ознаками. Найбільш популярними

методами є: Фур'є-аналіз і кореляційний аналіз, контурний аналіз, фрактальний аналіз, вейвлет-аналіз, метод перебору та інші [268].

Згаданий фрактальний аналіз відноситься до топологічних методів, що застосовуються для аналізу часових рядів процесів і зображень, в тому числі для класифікації об'єктів при радіолокації [269]. Фрактальний аналіз є ключовим інструментом моделі вимірювань в НДС. На його основі у дисертації розроблено топологічну модель ідентифікації оптичних систем.

4.4.1. Принципи ідентифікації

На основі положень теоретичної моделі вимірювань в НДС та фрактальних уявлень про структуру сигналів може бути запропонована топологічна модель ідентифікації ОПС.

Розглянемо ЛОС, що працює за наступною схемою: лазерний імпульс поширюється у напрямку можливого розташування ОПС, відбиваючись від об'єкта, повертається назад. Завдання ЛОС полягає у визначенні координат **відбиваючої** поверхні та її ідентифікації.

Залишивши за рамками розділу питання визначення координат об'єкту оптичними методами, розглянемо питання про його ідентифікацію. Завдання ідентифікації обумовлена необхідністю пошуку ОПС на тлі можливих «помилкових» цілей з відбиваючими поверхнями.

Характерною особливістю ОПС є те, що на заломлюючі та відбиваючі поверхні оптичних деталей наносять покриття, що представляють собою тонкі плівки різних речовин: металів і їх оксидів, діелектриків, кремній органічних сполук та ін. Це дозволяє змінювати оптичні характеристики деталей та надавати їм нові фізичні властивості. На лінзи біноклів, фото- та відеокамер наносяться просвітлюючі покриття, матеріал і товщина яких вибираються таким чином, що б пропускати випромінювання видимого діапазону. Практично не віддзеркалюються хвилі, для яких виконується умова:

$$\lambda = 4dn, \quad (4.25)$$

де d — товщина плівки, n — її показник заломлення.

У разі багат шарового покриття розглядають діапазон довжин хвиль, $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$, що задовольняють умові (4.25). Випромінювання з довжинами хвиль, що не входять в цей діапазон, відзеркалюються. При цьому, внаслідок накладення випромінювання, відбитого від різних шарів покриття спостерігається інтерференція в відзеркалених променях [270].

Наявність у віддзеркаленому оптичному сигналі слідів його взаємодії з просвітлюючим покриттям призводить до можливості ідентифікації ОПС. Як об'єкт дослідження розглянемо площу перетину лазерного пучка відбитого від поверхні, покритої тонкою плівкою. Аналіз площі перетину пучка виконується за допомогою ПЗЗ-камери з лінійним об'єктивом, що входить до складу ЛОС. Камера дозволяє досліджувати розподілення інтенсивності випромінювання уздовж зворотної вісі на площині (x, y) .

Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині апроксимуємо виразом виду:

$$I_{int}(x) = I_0 \cos^2(kx), \quad (4.26)$$

де I_0 — максимальне значення інтенсивності, k — хвильове число [270].

Функція розподілу інтенсивності $I(x)$ (4.26) є об'єктом фрактального аналізу (1.13) – (1.15). Розглянемо випадок лінійного розподілу інтенсивності: $I(x) = I_0 \times j$, де j — номер вимірювання значення інтенсивності $j = 1 \dots m$. Розмах збільшення R та СКВ S , обчислені для функції, дорівнюють відповідно:

$$R = \frac{I_0}{8} m^2, \quad S = \frac{I_0}{2\sqrt{3}} \sqrt{m(m+1)}. \quad (4.27)$$

Із виразів (1.13)–(1.15) **випливає**:

$$H_R = \frac{\ln(R/S)}{\ln(m/2)}. \quad (4.28)$$

Залежність R/S набуде вигляду:

$$\ln(R/S) = \ln(\sqrt{3}/4) + \ln(m) + \ln(1 - 1/2m). \quad (4.29)$$

Підставляючи (4.29) в (4.28) отримаємо, що для прямої лінії і великих відліків:

$$H_R = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(R/S)}{\ln(m/2)} = 1. \quad (4.30)$$

Отже, значення фрактальної розмірності $D_H = 1$. Аналогічний результат можна отримати для будь-якої гладкої кривої, наприклад, для синусоїди з періодом, порівнянним з m . При аналізуванні реальних сигналів, представлених у вигляді двовимірних графіків $I(x)$, параметр D_H характеризує ступінь **порізаності** графіка $I(x)$: при великих значеннях D_H графік сильно порізаний, а при малих — має плавний, але не гладкий характер.

Вираз (4.26) описує гладку, безперервну криву. Згідно (1.13) — (1.15), (4.27) — (4.30) фрактальна розмірність функції (4.26) дорівнює 1. Однак, в реальних умовах сигнал, внаслідок дії перешкод інтенсивності $I_N(x)$, надійде в об'єктив ПЗС у вигляді, відмінному від (4.26). Припускаючи, що зв'язок сигналу та перешкод носить адитивний характер, уявімо результуючий сигнал $I_{Rez}(x)$ у вигляді:

$$I_{Rez}(x) = I_{Int}(x) + I_N(x). \quad (4.31)$$

Це призведе до збільшення значення фрактальної розмірності на величину ΔD_H . Внаслідок стохастичної природи перешкод, їх фрактальна розмірність вище фрактальної розмірності корисного сигналу. Експерименти показують, що при співвідношенні сигнал/шум $d_0^2 = -3$ дБ приріст фрактальної розмірності ΔD_H становить 0,1–0,3 [269]. Тому, значення фрактальної розмірності сигналу (4.31) можна оцінити, як $1,1 \leq \Delta D_H \leq 1,3$. При віддзеркаленні імпульсу від поверхні без просвітлюючого покриття, в сигналі (4.31) не буде присутня інтерференційна компонента $I_{int}(x)$, і сигнал буде стохастичним, для якого $D_H = 1,5$.

Фрактальна розмірність не єдиний інструмент фрактального аналізу та її значення здатне відповісти на обмежене коло питань, в рамках поставленого завдання — ідентифікація ОПС. Для відповіді на питання про тип ОПС, її недостатньо. Для ідентифікації та класифікації ОПС повинен бути розроблений ансамбль фрактальних ознак конкретних ОПС. Поряд із фрактальною розмірністю, фрактальні ознаки повинні включати: вид фрактальних сигнатур, вид просторового спектра і значення просторових частот, що характеризують структуру сигналу.

4.4.2. Висновки про топологічну модель ідентифікація оптичних систем

Топологічна модель пошуку та ідентифікації прихованих оптичних систем спостереження заснована на фрактальних уявленнях про структуру оптичного сигналу та визначенні фрактальні розмірності розподілу інтенсивності в площині перетину відбитого від цілі лазерного імпульсу.

Оптичний сигнал, що досліджується, розглядається, як дисипативна НДС для дослідження якої застосовується розроблена модель вимірювань та її інструменти, зокрема, фрактальна розмірність. Наближення значення фрактальної розмірності до одиниці є передумовою до ідентифікації цілі, як оптичного приладу спостереження.

Для класифікації типу оптичного приладу, поряд з фрактальною розмірністю, повинен бути розроблений ансамбль фрактальних ознак: вид фрактальних

сигнатур, вид просторового спектра і значення просторових частот, що характеризують структуру сигналу.

Висновки до Розділу 4

У розділі на основі адаптивної моделі вимірювань в НДС розроблено експериментальні моделі досліджень в фізичних НДС. Моделі враховують динаміку об'єкта дослідження та містять інструменти аналізу процесів в НДС. Застосування моделей дає можливість досліджувати та управляти НДС в умовах хаотичної динаміки

Розроблено модель дослідження параметрів випромінювання лазера як ієрархічної НДС із функцією самоорганізації. Модель побудована на припущенні про інтервальність значень вимірюваних величин та можливості зміни стаціонарної динаміки на хаотичну. Модель містить схему експерименту та процедуру оцінювання результатів вимірювань: У моделі розглянуто питання оцінювання стабільності параметрів лазерного випромінювання, розглянуто задачу фрактального оцінювання стабільності частоти випромінювання лазерів, отримано вираз стабільності обраного параметра як функції фрактальної розмірності: Модель може бути використана як для забезпечення стабільності параметрів випромінювання лазера, так і для отримання та управління хаотичним випромінюванням.

Досліджено задачу застосування нанолазерів в інформаційно-вимірювальних технологіях. Результати досліджень показали, що для випромінювання на довжині хвилі 1,5 мкм в режимі надвипромінювання пікова потужність випромінювання становить $P = 10,9$ мкВт, що забезпечує дальність передачі сигналу по одномодовому волокну з коефіцієнтом втрат $\alpha = 0,5$ дБ/км $L \approx 750$ м. При цьому стабілізацію частоти пропонується здійснювати по лінії поглинання йоду в дефекті фотонного кристалу. Аналіз параметрів випромінювання та їх динаміки виконується за допомогою моделі дослідження параметрів випромінювання лазера як НДС.

Розроблено модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок, яка дозволяє оцінювати температуру в процесі охолодження з використанням інформаційної ентропії Шеннона. Модель містить ентропійну шкалу оцінювання температури охолоджуваних частинок. Отримано вираз для оцінювання ентропії лазерного випромінювання, як функції його частоти. Спираючись на вираз щільності розподілу частинок за швидкостями та вираз для ентропії Шеннона складається безперервна двовимірна шкала значень в координатах «температура-ентропія». Застосування інформаційно-ентропійного підходу і ентропійної шкали моделі дозволяє оцінити температуру ансамблю частинок в процесі лазерного охолодження в будь-який момент часу.

У розділі представлено топологічну модель ідентифікація оптичних систем. Модель заснована на гіпотезі про фрактальну структуру оптичного сигналу, відображеної від просвітлюючого покриття оптичних приладів та визначенні фрактальні розмірності розподілу інтенсивності в площині перетину відбитого від цілі лазерного імпульсу. Наближення значення фрактальної розмірності до одиниці є передумовою до ідентифікації цілі, як оптичного приладу спостереження. На думку автора для класифікації типу оптичного приладу, поряд з фрактальною розмірністю, повинен бути розроблений ансамбль фрактальних ознак: вид фрактальних сигнатур, вид просторового спектра і значення просторових частот, що характеризують структуру сигналу.

Таким чином, в розділі вперше запропоновані експериментальні моделі досліджень фізичних систем на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС. Моделі дозволяють досліджувати системи і вимірювати їх параметри в умовах стійких і нестійких (хаотичних) станів НДС.

Результати досліджень, відображених у розділі, розвивають теорію лазерів, лазерного охолодження частинок, нанолазерів та нанофотоніку, а також топологічні методи дослідження сигналів.

РОЗДІЛ 5

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ БІОФІЗИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У розділі на основі виконаних досліджень розроблена експериментальна модель дослідження стану біофізичних нелінійних динамічних систем із функцією самоорганізації, що еволюціонують. Модель побудована на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС, враховує динаміку об'єкта дослідження та містить інструменти аналізу процесів. Застосування моделі дозволяє досліджувати і управляти НДС в умовах хаотичної динаміки. Основні результати досліджень, що передбачено розділом, відображені в роботах [13], [14], [21], [36].

5.1. Модель дослідження біофізичних нелінійних динамічних систем

Перед описом розробленої моделі дамо обґрунтування обрання терміну «біофізична нелінійна динамічна система». Існує кілька підходів до визначення терміна «біофізика». Одні автори розглядають біофізику, як розділ сучасної математичної фізики, що вивчає біологічні об'єкти як різновид складних нелінійних фізичних систем. Інші, виділяють в окрему науку про фізичні процеси, що протікають в біологічних системах різного рівня організації, та про вплив на біологічні об'єкти різних фізичних факторів [270].

Біологічні об'єкти, за винятком найпростіших, мають складну структуру та ієрархію. На **процеси, що протікають в них, впливають багато факторів**, які часто залежать один від одного. Фізика дозволяє створити спрощені моделі біологічного об'єкта, які описуються законами термодинаміки, електродинаміки, квантової та класичної механіки. За допомогою кореляції фізичних даних із біологічними можна отримати більш глибоке розуміння процесів в досліджуваному біологічному об'єкті.

Узагальнено можна сказати, що біофізика вивчає особливості дії фізичних законів на біологічному рівні організації речовини та енергії та покликана виявляти зв'язки між фізичними механізмами, що лежать в основі організації живих об'єктів, і біологічними особливостями їх життєдіяльності.

Згідно з [271] «Найважливіший зміст біофізики становлять: знаходження спільних принципів біологічно значущих взаємодій на молекулярному рівні, розкриття їх природи відповідно до законів сучасної фізики, хімії з використанням новітніх досягнень математики та розробка на основі цього вихідних узагальнених понять, адекватних описуваних біологічним явищам». Таким чином, живий організм, із точки зору фізики взагалі і теорій дослідження складних систем, може бути представлений як ієрархічна біофізична НДС з функцією самоорганізації, що еволюціонує.

Аналіз джерел, виконаний у розділі 1, свідчить про актуальність дослідження біофізичних НДС та динаміки їх параметрів. В рамках дисертаційної роботи було розроблено модель дослідження стану біофізичної системи на основі підходів та інструментів, закладених в теоретичну модель вимірювань в НДС. Як об'єкт дослідження обрано людину, а в якості стану системи — здоров'я організму.

Завдання дослідження та вимірювання фізичного та емоційного стану людини відносяться до найбільш актуальних завдань природознавства. Дослідження людини, як НДС, дозволить розробляти пристрої та системи впливу, лікування та діагностики стану здоров'я, складати індивідуальні програми лікування пацієнтів, програми підготовки спортсменів, раціонально використовувати індивідуальні здібності особи. Розробляння експериментальних моделей дослідження біофізичних НДС необхідне для вивчення питання інформаційного впливу на процеси в живих організмах із метою управління ними [271].

Відомо близько вісімдесяти визначень терміна «здоров'я». Серед інших виділимо два: перше — «здоров'я — це нормальна функція організму на всіх рівнях його організації, нормальний хід біологічних процесів, що сприяють індивідуальному виживанню та відтворенню»; друге — «здоров'я — це динамічна

рівновага організму та його функцій з навколишнім середовищем» [270]. Ці визначення носять якісний, узагальнений характер, які базуються на результатах вимірювань певної кількості людей. При цьому з позицій теорії НДС стан здоров'я людини може бути виміряно, та оцінено індивідуально з використанням моделей та інструментів, описаних в роботах [1] — [56].

Запропоноване формулювання задачі вимірювання здоров'я, ґрунтується на властивостях організму, як динамічної системи, тобто на властивостях його гомеостазу. Вимірювання здоров'я людини можна розглядати як вимірювання основних характеристик організму та часу його повернення в стійкий стан після впливу нормованого обурення. Слідуючи цьому припущенню, розроблена експериментальна модель дослідження та вимірювання здоров'я людини, як часового процесу, що характеризує повернення системи з обуреного стану в стаціонарний, стійкий.

5.1.1 Людина як біофізична нелінійна динамічна система

Для вирішення поставленого завдання необхідно запропонувати фізичну модель, здатну адекватно описати живий організм. Спостереження навколишнього світу свідчать, що більшість реальних систем — фізичних, біологічних, соціальних, економічних — можна віднести до відкритих дисипативних НДС. Стан таких систем характеризуються групою ДЗ:

$$F[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)] \rightarrow [X_1(t), \dots, X_n(t)].$$

Організм людини, як і всі комплексні біологічні відкриті системи, наділений гомеостазом — здатністю зберігати сталість свого внутрішнього стану за допомогою скоординованих реакцій, спрямованих на підтримку динамічної рівноваги [272]. Ця здатність самоорганізації дозволяє організму повернутися в свій рівноважний стан після збурень, викликаних зовнішніми впливами. Таке прагнення відновлювати втрачену рівновагу, долати опір зовнішнього середовища є обов'язковою умовою виживання біологічних систем. Час T , необхідний організму для повернення в рівноважний стан, може служити кількісним

параметром оцінювання стану здоров'я організму. Явища самоорганізації аналогічні гомеостазу спостерігаються і в інших, небіологічних відкритих НДС.

Вивчення відкритих біологічних систем із позицій теорії динамічного хаосу показало, що «природним» станом для таких систем є стан **проміжний** між повним хаосом і повної організацією. Саме такий проміжний стан забезпечує можливість розвитку та гомеостазу системи. Для таких систем вводиться поняття «норми хаотичності» як ступінь впорядкованості, відповідна нормальному функціонуванню системи. Норма хаотичності визначається емпіричним способом із використанням «S-теореми» Ю. Л. Клімонтовича для відкритих систем [233].

Фізичну модель організму людини можна представити у вигляді відкритої дисипативної НДС. ДЗ системи пов'язані між собою та можуть бути описані виразом (1.1), де n динамічних змінних $X_i(t)$ відповідають характеристикам організму (пульсу, артеріального тиску та іншим). Система схильна до зовнішнього впливу, здатного змінювати значення її ДЗ. За відсутності зовнішніх впливів система перебуває в стані рівноваги $X_i(t_0)$ (1.1). Вона має здатність самоорганізації — після припинення зовнішнього впливу у разі переходу ДЗ із збудженого $X_i(t)$ в рівноважний $X_i(t_0)$ стан, $X_i(t) \rightleftharpoons X_i(t_0)$ протягом інтервалу часу T . Значення часу T відновлення рівноважного стану організму після припинення дії нормованого зовнішнього впливу буде використано в якості ключової характеристики кількісної оцінки здоров'я людини.

5.1.2 Час як ключова кількісна оцінка

Раніше в дисертації розглядалося питання оцінювання результатів вимірювань в умовах різноманітної поведінки НДС. Основною умовою, при якій виконуються вимірювання, є стаціонарний стійкий стан динамічної системи, що представляє собою простий аттрактор. Якщо на систему, що знаходиться в стані простого аттрактора впливають зовнішні випадкові флуктуації, то результати багаторазових вимірювань обробляються за допомогою статистичних методів класичної теорії вимірювань.

Інтерес представляє інший випадок, коли система отримує короточасний (імпульсний) нормований вплив Q . Система під впливом цього обурення йде зі стійкого стану. Кожен із стійких станів має область тяжіння, таким чином, що коли система внаслідок зовнішнього впливу залишає стійкий стан, то, залишаючись в зоні тяжіння, вона за кінцевий час повертається назад протягом певного інтервалу часу. Чим швидше система повертається в стійкий стан, тим сильніші відновлювальні функції системи.

Час повернення системи в стійкий стан визначається через показник Ляпунова. Тому, якщо час повернення в стаціонарний стійкий стан змінюється, значить, змінився показник Ляпунова, який в загальному випадку характеризується системою в цілому. Властивість системи повертатися в початковий стан після того, як на неї вплинуло обурення, являє собою процес самоорганізації.

У загальному випадку біофізичний стан людини являє собою аттрактор, на який впливають зовнішні випадкові або періодичні збурення. Якщо прийняти модель, що здоров'я характеризує стійкість організму (хоча може бути й інша модель здоров'я), то для кількісної оцінки здоров'я необхідно виміряти час відновлення стійкого стану.

Грунтуючись на розглянутому методі вимірювання часу відновлення стану динамічної системи, при створенні експериментальної моделі проаналізовано умови вимірювання стійкості біофізичного стану, що характеризується як здоров'я. Не обговорюючи можливість опису стану біологічної системи на основі простого аттрактора, або на основі дивного аттрактора, то для процесу вимірювань становить інтерес швидкість повернення системи в стійкий стан. Тому здоров'я, як характеристика стану людини, пов'язана з динамічним процесом і, отже, може характеризуватися результатом вимірювання часу відновлення початкових значень параметрів, що характеризують стан організму. Якщо вважати, що здоров'я дозволяє відновлювати стійкий стан, то для вимірювання величини здоров'я необхідно забезпечити вплив на систему нормованого впливу, після чого здійснювати вимірювання часу відновлення стійкого стану.

Таким чином, розглянутий в цьому розділі приклад можна узагальнити і сформулювати новий підхід до побудови вимірювальної схеми в умовах НДС. Величини, якими користуються при оцінці якості таких біофізичних систем, як правило, не мають **міри** (здоров'я, почуття і т.д.), тобто проводити прямі вимірювання цих величин неможливо. У цьому випадку слід побудувати таку вимірювальну схему, в якій вимірюється, наприклад, час через який оцінюється шукана величина. Головне завдання — знайти зв'язок між досліджуваними процесами та вимірюваною величиною. Вимірюючи час повернення системи в стійкий стан можна оцінювати здоров'я людини. Складність такого підходу полягає в тому, що в реальних умовах стійким станом може бути дивний аттрактор. У цьому випадку вимірювання часу повернення системи в стійкий стан потребує тривалого часу спостереження.

5.1.3 Вимірювання здоров'я людини.

Для оцінювання стану здоров'я людини як відкритої НДС пропонується використовувати такі характеристики:

- значення низки обраних ДЗ стійкого $X_i(t_0)$ та збудженого $X_i(t)$ станів системи;
- значення ентропії Шеннона стійкого H_0 та збудженого $H(t)$ станів системи;
- час прогнозування T_{for} ;
- час повернення T системи із збудженого в стійкий стан.

З цією метою слід виміряти n ДЗ $X_i(t_0)$ системи в стійкому стані. З огляду на те, що характеристики організму навіть в стійкому стані непостійні (частота пульсу здорової людини в стані спокою коливається від 60 до 80 ударів в хвилину) кожна ДЗ визначається інтервальним значенням $[X_i^{\min}(t_0), X_i^{\max}(t_0)]$. Сукупність з n таких інтервалів формує n -мірний фазовий портрет стану — аттрактор системи. Знаходження всіх n ДЗ $X_i(t)$ в межах аттрактора

$X_i(t) \in [X_i^{\min}(t_0), X_i^{\max}(t_0)]$, $i = 1 \dots n$ свідчить про стійкий стан системи (організму). Вихід $X_i(t_0)$ за рамки інтервалу рівноваги дозволяє говорити про порушення функції, що характеризується даної ДЗ.

Стан ДЗ X_i системи може бути охарактеризований за допомогою ентропії Шеннона H . Для цього пропонується використовувати вираз для нормованої ентропії (3.34):

$$\|H_i\| = \frac{-\sum p(X_{il}) \ln p(X_{il})}{\ln [X_i^{\max} - X_i^{\min}]}$$

Вираз (3.34) справедливий для випадку, коли між вимірами l -го та $l+1$ -го стану ДЗ X_i проходить час $t > T_{fori}$ і зв'язок між станами втрачається. В іншому випадку у виразі (3.34) використовується умовна ентропія (3.29).

Згідно з (3.34) нормована ентропія Шеннона може приймати значення від 0 до 1. Нульове значення відповідає регулярному протіканню процесів в НДС, а 1 — максимальному хаосу. Як перший, так і другий стани несумісні з нормальним існуванням біологічної системи. Визначивши нормовану ентропію Шеннона, для стійкого стану системи (організму) ентропійну шкалу можна доповнити третьою контрольною точкою $\|H_0\|$, при цьому $0 < \|H_{i0}\| < 1$. Завдяки властивості адитивності ентропії Шеннона, скориставшись виразом для ентропії окремої ДЗ (3.34), можна визначити нормовану ентропію всієї системи $\|H\|$.

При порушенні однієї з ДЗ $X_i(t)$ із стійкого стану виходять інші, пов'язані із нею. При цьому інтервал збудженого стану ДЗ $X_i(t) [X_i^{\min}(t), X_i^{\max}(t)]$ відмінний від інтервалу сталого стану $[X_i^{\min}(t_0), X_i^{\max}(t_0)]$, він може бути як більше, так і менше його. Аттрактор може, як розширюватися, так і стискатися. Значення нормованої ентропії Шеннона (3.34) $\|H_i(t)\|$ також буде відмінним від значення ентропії сталого стану $\|H_{i0}\|$.

Після припинення зовнішнього впливу всі ДЗ $X_i(t)$ прагнуть повернутися до свого стійкого стану. Час T_i повернення ДЗ $X_i(t)$ в стійкий стан характеризує стан характеристики організму, позначеної ДЗ $X_i(t)$. Час повернення в сталий стан «здорової» ДЗ позначимо T_{i0} . Набір із n значень часу повернення T_i в сталий стан може бути використаний для складання шкал здоров'я окремих органів і всього організму людини.

В результаті вимірювань та оброблення їх результатів за (3.44) складається числовий портрет стану здоров'я виду:

$$\left. \begin{array}{l} [Y_i^{\min}(t_0), Y_i^{\max}(t_0)], \|H_{i0}\|, T_{fori0} \\ [Y_i^{\min}(t), Y_i^{\max}(t)], \|H_i\|, T_{fori} \\ T_i, i = 1 \dots n. \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Кількісна оцінка стану здоров'я (5.1) виконується за результатами аналізу набору з n ентропійних і **часових** шкал:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \dots \|H_{i0}\| \dots 1, \\ 0 \dots T_{i0} \dots \infty, \\ i = 1 \dots n \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Періодичний контроль ДЗ організму та аналіз даних (5.1), (5.2) дозволяє кількісно оцінити стан здоров'я в цілому або окремих органів, спостерігати динаміку процесів. Ключовим параметром при оцінюванні здоров'я є час повернення до рівноважного стану T після зняття нормованого зовнішнього збудження (час гомеостазу). У разі, коли всі n значень часових інтервалів повернення T_i відповідають часу повернення для здорового організму, можна стверджувати, що людина здорова. Якщо один із інтервалів виходить за рамки, то це свідчить про порушення визначеної функції організму. Існуючі методи та

технічні засоби вимірювання часу дозволяють виконати це завдання з високою точністю.

5.1.4 Самоорганізація біофізичної системи

З позицій теорії складних систем біологічний організм або орган можна розглядати як відкриту, еволюційну НДС із функцією самоорганізації. Далі будемо розглядати окремий орган як відкриту бістабільну НДС з однією ДЗ $X(t)$. Бістабільність означає, що ДЗ $X(t)$ може перебувати в двох станах:

- стійкому стані $X_{Stab}^{min}(t) \leq X(t) \leq X_{Stab}^{max}(t)$ (нормальне функціонування органу);
- збудженому стані $X^{min}(t) \leq X(t) \leq X^{max}(t)$ (рис. 5.1).

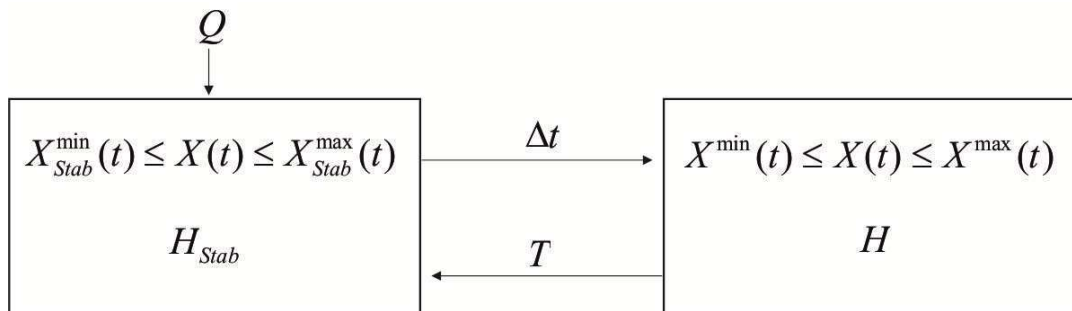


Рис. 5.1. Схема відкритої бістабільної НДС із функцією самоорганізації.

Внаслідок зовнішнього впливу Q ДЗ $X(t)$ за інтервал часу Δt переходить в збуджений стан. Після усунення впливу $X(t)$ повертається в стійкий стан за час T . За відновлення стійкого стану відповідає функція самоорганізації, в біологічній термінології — гомеостаз. У разі збою в функціонуванні органу, час повернення T зростає, або ДЗ $X(t)$ зовсім не може повернутися в рамки стійкого стану самостійно $T \rightarrow \infty$ (5.2).

Для практичного застосування моделі дослідження здоров'я (5.1), (5.2) необхідно визначити, що вважати нормою ентропії H_{Stab} , яка характеризує стійкий стан ДЗ $X(t)$, а також якої величини має бути зовнішній вплив Q на систему для визначення часу повернення T ДЗ $X(t)$ в стійкий стан. Відповіді на ці питання дозволять визначити:

- по-перше, наскільки велике відхилення стану органу від норми;
- по-друге, який вплив (фізичний або фармацевтичний) необхідно прикласти, щоб повернути орган в рамки стійкого стану.

Вирішення цих завдань сприяє виробленню індивідуальних підходів до діагностики та лікування, в тому числі точного індивідуального дозування медичних процедур і фармацевтичних препаратів.

5.1.5 Норма ентропії

Живий організм являє собою еволюційну в часі відкрити НДС із функцією самоорганізації. Ю. Л. Клімантович припустив, що для такого роду систем діє закон зменшення ентропії. А також ввів критерій відносної міри впорядкованості станів подібних систем, відомий як «S-теорема» (1.35), який може бути застосований для порівняння ступеня впорядкованості за експериментальними даними [135].

Будучи характеристикою стану системи, ентропія живих організмів, змінюється з плином часу внаслідок зовнішніх впливів і еволюції самої системи. При цьому її значення може, як зменшуватися, так і збільшуватися. Ентропію реальної НДС можна визначити за результатами вимірювання значення ДЗ $X(t)$ за формулою $H = -\sum_i p(X_i) \ln p(X_i)$ (1.9). Зауважимо, що вираз (1.9) справедливий для **марківського** процесу. В іншому випадку, що нерідко для хаотичного процесу, вводиться поняття умовної ентропії Шеннона (3.29).

Результат вимірювання ентропії, отриманий за (1.9) або (3.29), необхідно порівняти зі значенням норми ентропії H_{Stab} :

$$\Delta H = H - H_{Stab} . \quad (5.3)$$

Значення ΔH (5.3) згідно з критерієм «S-теорема» є показником ступеня хаотичності.

На практиці значення норми ентропії H_{Stab} визначається як усереднене значення результатів вимірювання ентропії ряду подібних НДС. Однак, вразі медичних вимірювань, такий підхід суперечить завданню індивідуального підходу до діагностики стану здоров'я та лікування людини. По-перше, в природі не існує абсолютно ідентичних систем. По-друге, біологічні системи еволюціонують у часі. Для **еволюційної** системи значення норми ентропії змінюється в залежності від етапу еволюції.

Виходячи з цього, можна сформулювати такі принципи та правила визначення норми ентропії органу або функції організму людини:

1. норма ентропії H_{Stab} є індивідуальною характеристикою окремого органу (біофізичної системи);
2. норма ентропії H_{Stab} змінюється при еволюційних змінах у організмі, тому її значення повинно періодично визначатися заново;
3. за експериментальними даними визначається значення ентропії H в момент спостереження;
4. за формулою (3.34) визначаються нормовані значення H і H_{Stab} ;
5. із виразу (4.27) визначається показник ступеня хаотичності ΔH .
6. відповідно до ентропійної шкали (5.2) виконується аналіз зміщення динаміки органу в бік хаотичності або регулярності.

Визначена таким чином норма ентропії H_{Stab} є реперною точкою ентропійної шкали оцінювання стану здоров'я (5.2).

5.1.6 Нормований вплив

Для діагностики стану органу відповідно до моделі орган, що характеризується ДЗ $X(t)$, виводиться зі стійкого стану зовнішнім нормованим впливом Q (рис. 5.1). При нормованому впливі, час T повернення з порушеного в стійкий стан по-різному для здорового та хворого органу.

Визначення нормованого впливу Q є одним з ключових питань моделі дослідження. Значення Q має бути таким, щоб досліджувана система, вийшовши

зі стійкого стану, могла самостійно в нього повернутися. Тобто значення Q не повинно перевищувати якогось критичного значення Q_{\max} , $Q \leq Q_{\max}$.

Для визначення Q_{\max} пов'яжемо величину зовнішнього впливу Q із показником ступеня хаотичності ΔH (5.3). Розглянемо значення ентропії для стійкого стану — норму ентропії H_{Stab} і значення ентропії для збудженого стану, при якому система не може самостійно повернутися в стійкий стан, назвемо її ентропією хвороби H_I . Ці значення пов'язані з інтервалами значень ДЗ $X(t)$ для здорового стану $X_{\text{Stab}}^{\min}(t) \leq X(t) \leq X_{\text{Stab}}^{\max}(t)$ і стану хвороби $X_I^{\min}(t) \leq X(t) \leq X_I^{\max}(t)$ виразами:

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{Stab}} &= -\sum_i p(X_i, X_{\text{Stab}}^{\min}, X_{\text{Stab}}^{\max}) \ln p(X_i, X_{\text{Stab}}^{\min}, X_{\text{Stab}}^{\max}), \\ H_I &= -\sum_i p(X_i, X_I^{\min}, X_I^{\max}) \ln p(X_i, X_I^{\min}, X_I^{\max}) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Із виразів (5.3) і (5.4) визначимо значення показника ступеня хаотичності ΔH_I , відповідного переходу системи в стан хвороби. Зміна ентропії на величину ΔH_{is} відповідає зовнішньому впливу Q_{\max} . Виходячи з виразу (5.4) значення зовнішнього впливу має бути меншим значення Q_{\max} , що викликає приріст ентропії на величину ΔH_I .

Таким чином, в рамках розробленої експериментальної моделі дослідження біофізичної НДС, основою якої є модель вимірювань в НДС, запропановано підходи до вимірювання здоров'я людини як інтегральної характеристики стану організму. Фізична модель організму представлена як відкрита, дисипативна нелінійна динамічна система з функцією самоорганізації.

У моделі використовуються: інтервали значень характеристик організму в стабільному та збудженому станах. В якості основного показника стану здоров'я розглядається час повернення системи в стабільний стан після зняття нормованого зовнішнього збудження.

Для кількісної оцінки стану здоров'я запропонований числовий портрет, ентропійних і **часових** шкал оцінок. Показано, що норма ентропії є індивідуальною характеристикою окремого органу та змінює своє значення з плином часу. Запропоновано спосіб визначення значення норми ентропії, що враховує індивідуальність організму і його еволюційні зміни.

Розв'язана задача оцінки величини зовнішнього нормованого впливу, необхідного для визначення часу повернення системи в стійкий стан.

Результати дослідження можуть бути використані для створення медичних приладів та систем, для розроблення індивідуальних підходів до діагностики та лікування, в тому числі точного індивідуального дозування медичних процедур і фармацевтичних препаратів.

5.2 Практичне застосування моделі дослідження біофізичних систем

Підхід до людини як до складної, відкритої системи з функцією самоорганізації викладено в таких класичних роботах як [273]. Вимірювання характеристик організму людини в стабільному і збуджених станах, відстеження їх динаміки, від моменту народження і протягом усього життя, дозволять запропонувати ефективну індивідуальну програму діагностування та лікування. Тобто мова йде не тільки про лікування, а й про управління здоров'ям людини. При цьому необхідно вирішити складне завдання коректного вимірювання, аналізу і трактування результатів вимірювання характеристик організму як НДС. У роботах [10], [14], [36], на підставі результатів, отриманих в рамках розвитку теорії дослідження нелінійних динамічних систем, автором запропонована модель дослідження і вимірювання стану здоров'я людини. Основними елементами моделі є: інтервали значень вимірюваних ДЗ, фрактальна, ентропійна і **часова** шкали.

5.2.1 Проведення експерименту

Модель дослідження біофізичної системи була застосована на практиці для вимірювання і аналізу результатів вимірювання параметрів людини, яка підвернена регулярним фізичним навантаженням [21].

Як об'єкт дослідження виступила жінка 20 років, яка регулярно займається фізичними вправами під керівництвом і наглядом тренера. Об'єкт перебував під наглядом 21 тиждень. Протягом часу спостереження з періодичністю раз на тиждень виконувалися вимірювання наступних параметрів: нижня частина стегна (X_1); верхня частина стегна (X_2); стегна (X_3); нижня частина живота (X_4); талія (X_5); верхня частина живота (X_6); маса (X_7).

Таким чином, були отримані сім часових рядів результатів вимірювання ДЗ з дискретністю $\Delta t=7$ днів.

5.2.2 Оцінювання результатів експерименту

Результати вимірювання параметрів X_1 — X_6 наведені на двовимірному портреті виміру ДЗ НДС (рис. 5.2). Динаміка змін значення маси (X_7) не наведено. Портрет вимірювання, на відміну від запропонованого в моделі вимірювань (рис. 3.4) має спрощений вигляд, що не відображає вектор стану, але містить невизначеності результатів вимірювань.

З точки зору теорії динамічних систем об'єкт дослідження розглядається як відкрита НДС з функцією самоорганізації. Її характеристики X_i , $i=1\dots 7$ є ДЗ. Вони схильні до впливу з зовні, їх значення корелюють між собою. Характер поведінки ДЗ (детермінований, випадковий або хаотичний) **априорі** невідомий. Їх значення змінюються в відповідних інтервалах $[X_i^{\min}; X_i^{\max}]$. Невизначеність засобу вимірювання ДЗ X_i , $i=1\dots 6$ по типу В складає 0,0025 м, невизначеність засобу вимірювання ДЗ X_7 по типу В складає 0,025 кг. Завдання дослідження полягало у виконанні аналізу результатів вимірювання з використанням принципів і моделей дослідження та вимірювань в НДС [1], зокрема моделі дослідження біофізичної НДС (5.1)—(5.5). Результати дослідження повинні бути максимально інформативні.

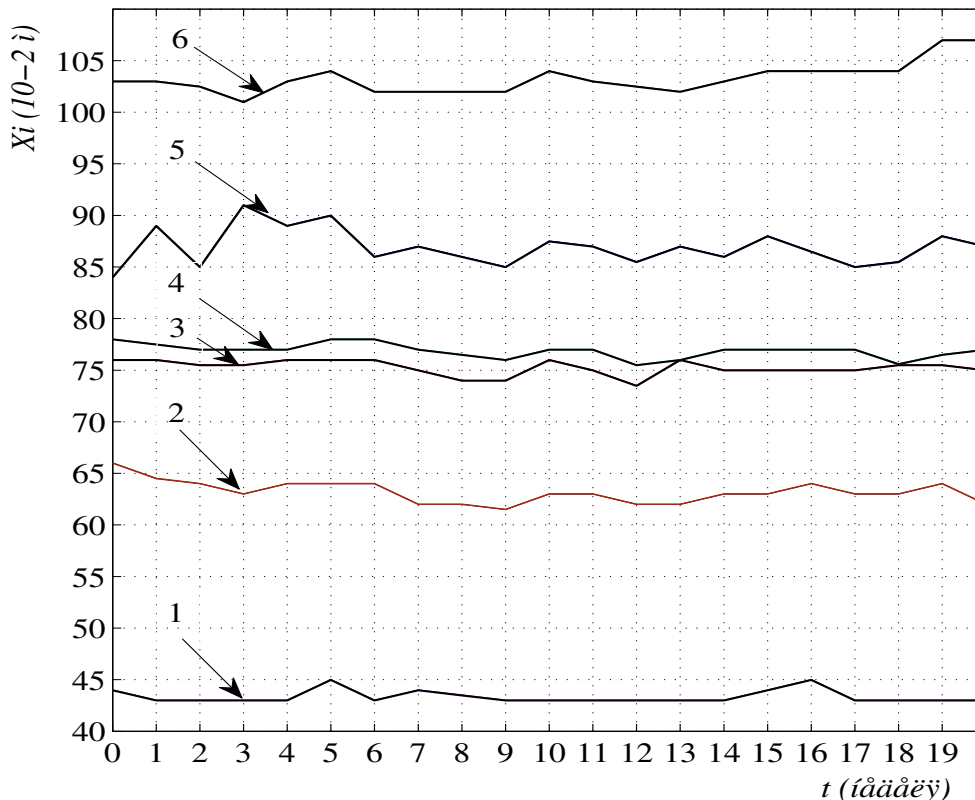


Рисунок 5.2. Портрет вимірювання,
де 1 — X_1 ; 2 — X_2 ; 3 — X_5 ; 4 — X_5 ; 5 — X_4 ; 6 — X_3 .

При аналізі результатів вимірювання повинні бути визначені і отримані:

- результати вимірювання ДЗ Y_i ;
- фрактальна розмірність D_H часового ряду вимірювання ДЗ X_i ;
- ентропія Шеннона H_i часового ряду вимірювань ДЗ X_i ;
- портрет вимірювань.

Виконані вимірювання ДЗ відносяться до прямих, одноразових, динамічних вимірювань, вимірювання фрактальної розмірності та ентропії — непрямі вимірювання. З урахуванням форми запису результатів вимірювань, представленої в GUM, повний результат вимірювання ДЗ X_i може бути приведений у формі:

$$Y_i \in [y_i^{\min} \pm U_i^{\min}; y_i^{\max} \pm U_i^{\max}], p,$$

де y_i^{\min} , y_i^{\max} — оцінки результатів вимірювання мінімального X_i^{\min} і максимального X_i^{\max} значення X_i відповідно; U_i^{\min} , U_i^{\max} — їх розширені невизначеності; p — рівень довіри.

Так як вимірювання були одноразові, то невизначеність вимірювання обмежена невизначеністю по типу В відповідного засоби вимірювальної техніки і вираз результатів вимірювання, при рівні довіри 0,95 і коефіцієнті охоплення $k=1,65$, набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} Y_i &\in [y_i^{\min} \pm U_i(y); y_i^{\max} \pm U_i(y)], p = 0,95, \\ U_i(y) &= ku_{Bi}, k = 1,65. \end{aligned} \right\} \quad (5/5)$$

Результати вимірювання ДЗ в формі (5.5) представлені в таблиці 5.1. Були визначені значення фрактальної розмірності. Зауважимо, що фрактальна розмірність і показник Херста використовуються поруч дослідників для вирішення медичних завдань, наприклад, при аналізі мовних патологій і при дослідженні варіацій періоду скорочень серця людини [274].

З виразів (1.13)—(1.15) можна отримати значення фрактальної розмірності часового ряду, визначити характер динаміки вимірюваної ДЗ (таблиця 5.1).

Стандартна невизначеність результатів вимірювання фрактальної розмірності і розширена невизначеність визначається відповідно виразами [219]:

$$\left. \begin{aligned} u_i(y_i) &= y_i u_{Bi} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}, \\ U_i(y_{iF}) &= ku_i(y_i), k = 1,65 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Таблиця. 5.1

Результати вимірювання ДЗ, $p=0,95$.

ДЗ	$Y_i \in [y_i^{\min} \pm U_i(y); y_i^{\max} \pm U_i(y)]$	$D_{Hi} \pm U_i(D_{Hi})$	$H_i \pm U_i(H_i)$
X_1	[0,430±0.0041; 0,450±0.0041] м	[1,47±0.026]	[0,891±0,016]
X_2	[0,615±0.0041; 0,660±0.0041] м	[1,2±0.020]	[1,117±0,019]
X_3	[1,010±0.0041; 1,070±0.0041] м	[1,2±0.025]	[1,117±0,018]
X_4	[0,840±0.0041; 0,910±0.0041] м	[1,02±0.019]	[2,117±0,039]
X_5	[0,735±0.0041; 0,760±0.0041] м	[1,2±0.026]	[1,417±0.030]
X_6	[0,755±0.0041; 0,780±0.0041] м	[1,00±0.012]	[1.235±0,015]
X_7	[67±0.0041; 70±0.0041] кг	[1,1±0.025]	[0,712±0,016]

Портрет вимірювання (рис. 5.2) крім динаміки вимірюваних величин містить і невизначеність їх вимірювання (5.6). Ентропія Шеннона H_i часового ряду вимірювання ДЗ X_i показує, яка з величин може бути визначена з більшою вірогідністю, яка з величин є більш **варіабільною**. Ентропія ДЗ X_i визначається через щільність ймовірності значень $P(X_i)$ виразом (1.9). Результати розрахунку ентропії Шеннона H_i наведені в таблиці. Розширена невизначеність непрямого вимірювання ентропії $U_i(H_i)$ визначена з виразу (5.6).

Аналіз результатів вимірювання дозволяє стверджувати, що всі ДЗ демонструють практично детерміновану динаміку. Значення фрактальної розмірності всіх ДЗ знаходяться в інтервалі $1 < D_H < 1,5$. При цьому для ДЗ $X_2 \dots X_7$ $D_H \rightarrow 1$, а для X_1 (нижня частина стегна) $D_H \rightarrow 1,5$. Тобто динаміка X_1 близька до випадкового процесу. Аналіз значень ентропії Шеннона говорить про

те, що найбільш **варіабільним** є ДЗ X_4 ($H \approx 2$) та X_5 ($H \approx 1,4$), а найменш варіабельні ДП X_1 ($H \approx 0,9$) та X_7 ($H \approx 0,7$).

Отримані результати є підтвердженням самоорганізації відкритої біофізичної НДС. Зауважимо, що проведені раніше дослідження динаміки напруги в електричній мережі дали протилежні результати [8]. Динаміка напруги носила випадковий характер, значенням фрактальної розмірності, $D_H \approx 1,5$. Результати дослідження, відображені в таблиці даних і портреті вимірювання, можуть бути використані для складання інтервалів значень ДЗ, фрактальної та ентропійної шкал фізичного стану людини. Надалі інтервали значень і шкали можуть бути застосовані для складання індивідуальних планів підготовки атлетів, вибору інтенсивності та періодичності фізичних навантажень.

5.3. Висновки щодо моделі дослідження біофізичних нелінійних динамічних систем

Розроблена модель хозволяє виконувати дослідження та вимірювання параметрів системи із хаотичною динамікою. В рамках моделі вимірювання проводяться вимірювання динамічних змінних системи в стійкому та збудженому станах. Результатом вимірювання є інтервали значень динамічних змінних, фрактальна розмірність, ентропія Шеннона і час передбачення динаміки. Для оцінки еволюційних процесів в модель введені ентропійні і тимчасові шкали. В якості кількісної оцінки стану системи в моделі використовується час її повернення в стан рівноваги після припинення зовнішнього нормованого впливу. Запропоновано ентропійний метод оцінки нормованого зовнішнього впливу.

Таким чином, представлені результати застосування підходів та інструментів метрології нелінійних динамічних систем до вимірювання та аналізу результатів вимірювання динамічних змінних людини, схильного до регулярних фізичних навантажень.

Як інструменти аналізу використані: інтервали значень динамічних змінних, портрет вимірювання, фрактальна розмірність і ентропія Шеннона.

Аналіз результатів вимірювання показав, що динаміка вимірюваних величин близька до детермінованої, що характерно для динамічних систем з функцією самоорганізації.

Результати дослідження можуть бути використані для складання та корекції індивідуальних програм лікування пацієнтів і фізичної підготовки спортсменів

Висновки до Розділу 5

У розділі розроблена експериментальна модель дослідження біофізичної системи на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС. В рамках моделі проводяться вимірювання динамічних змінних системи в рівноважному та збудженому станах. Результатом вимірювання є інтервали значень динамічних змінних, фрактальна розмірність, ентропія Шеннона і час передбачення динаміки. Для оцінки еволюційних процесів в модель введені ентропійні та тимчасові шкали. В якості кількісної оцінки стану системи використовується час її повернення в стан рівноваги після припинення зовнішнього нормованого впливу. Запропоновано ентропійний метод оцінки нормованого зовнішнього впливу. Застосування моделі дозволить розробляти прилади та системи діагностики і лікування, складати індивідуальні програми лікування пацієнтів, підготовки спортсменів, раціонально використовувати індивідуальні здібності.

Наведено результати експериментального застосування моделі для дослідження фізичних параметрів людини. Результати дослідження підтверджують ефективність розроблених моделей вимірювання і досліджень НДС, і обґрунтованості вибору математичних інструментів аналізу експерименту.

Застосування розробленої моделі дозволить розробляти прилади та системи діагностики і лікування, складати індивідуальні програми лікування пацієнтів, підготовки спортсменів, раціонально використовувати індивідуальні здібності.

ВИСНОВКИ

Робота присвячена вирішенню актуальної наукової задачі — розроблянню принципів положень теорії дослідження нелінійних динамічних систем (НДС) на основі принципів і моделей вимірювань в динамічних системах із хаотичною динамікою.

Результати проведених досліджень мають важливе значення для моделювання, розроблянню, дослідження, прогнозування та управління фізичними системами з хаотичною динамікою. До таких систем відносяться лазери, що застосовуються в хаотичних системах зв'язку, а також медичні прилади та системи діагностики та вимірювання параметрів із хаотичною динамікою.

Для досягнення поставленої мети автором були вирішені такі основні завдання:

1. Вперше для розроблянню моделі вимірювань в нелінійних динамічних системах систематизовані процеси та властивості систем, що впливають на процес і результат вимірювань параметрів таких систем.

Розглянуто приклади НДС фізичного, біофізичного, хімічного та інших походжень. Доведено, що більшість з систем реального світу — це дисипативні нелінійні динамічні системи.

В якості умов створення моделей вимірювання виділені загальні для дисипативних НДС різного походження властивості: стан НДС в момент часу характеризується n -мірним вектором стану $X[X_1(t), \dots, X_n(t)]$, де $X_i(t)$ — i -а динамічна змінна (ДЗ); з плином часу значення ДЗ $X_i(t)$ змінюються, але знаходяться в інтервалі $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$. Цей інтервал обумовлений можливостями функціонування системи; динаміка ДЗ носить складний, нелінійний, у ряді випадків хаотичний, характер; у систем є нестійкі стани рівноваги; системи обмінюються енергією та інформацією з навколишнім середовищем та іншими системами, схильні до впливу зовнішніх факторів. Деякі з ДЗ є керуючими параметрами, зміна яких до певних значень веде до фазових

переходів; у ході яких динаміка системи може змінюватись із випадкової на регулярну, хаотичну, та навпаки; фазовий портрет системи в стані хаосу являє собою дивний аттрактор; системи еволюціонують, деякі демонструють функцію самоорганізації.

Обґрунтовано, що комплексна задача моделювання, створення, вивчення, прогнозування та управління складними системами вимагає розробки теорії дослідження на основі нових принципів і моделей вимірювань в НДС.

Проаналізовано якісні та кількісні методи та інструменти дослідження НДС. Найпоширенішими й ефективними з яких є: топологічні дослідження фазового портрета; ентропійний та фрактальний аналіз часових рядів; застосування критерія «S-теорема» та ін. Ці методи та їх інструменти аналізу вперше запропоновано використовувати разом при створенні моделі вимірювання.

2. Вперше розроблені фізико-математичні основи вимірювань величин зі складною, хаотичною динамікою, що характеризують НДС із функцією самоорганізації, які еволюціонують.

Для цього виконано аналіз відповідності фізико-математичних основ класичної теорії вимірювань процесам в НДС. Встановлено, що класична теорія та створені в її рамках моделі вимірювань побудовані на принципах, що обмежують їх застосування в НДС із хаотичною динамікою: існування єдиного істинного значення вимірюваної величини, справедливості ергодичної гіпотези та детермінованих уявленнях.

Вперше обґрунтовано, що теоретична модель вимірювань в НДС повинна враховувати наступні умови:

- величина, яка вимірюється, характеризується не єдиним істинним (дійсним) значенням, а інтервалом значень;
- гіпотеза ергодичності підтверджується не завжди;
- динаміка вимірюваних величин може мати нелінійний, стохастичний або хаотичний характер, що спричиняє стохастичності та хаотичності результатів вимірювання;

- часовий ряд результатів вимірювань може представляти немарківський процес, мати гаусдорфову розмірність;
- незначна зміна початкових умов спричиняє суттєві зміни результатів вимірювань;
- результат вимірювань трактується як аттрактор та повинен бути оцінений за допомогою невизначеності.

Для дослідження та класифікації динаміки в теоретичній моделі вимірювання автором запропоновано використовувати фрактальний аналіз. Наведено результати застосування фрактального аналізу при дослідженні динаміки стабільності частоти лазерного випромінювання та напруги електричного струму.

Дослідження показало, що фрактальна розмірність результатів вимірювань стабільності лазера перебувала в інтервалі значень $D_H=1,05-1,1$, що вказує на те, що лазери відносяться до систем із функцією самоорганізації та персистентною динамікою. Система стабілізації лазера, який застосовується як стандарт частоти, наближає процеси і такому лазері до рівня, близького к детермінованому .

Аналізування результатів вимірювання напруги електричного струму продемонстрував зміну фрактальної розмірності від $D_H = 1 - 1,04$ (процес детермінований), до $D_H = 1,46$ (процес випадковий). Досліджувану систему також можна розглядати як НДС із функцією самоорганізації, проте велика кількість зовнішніх впливів і шумів перешкоджає цьому процесу. Результати досліджень підтвердили припущення про ефективність використання фрактального аналізу для класифікації динаміки фізичних НДС.

3. Вперше розроблена адаптивна теоретична модель, яка забезпечує вимірювання та дослідження нелінійних динамічних систем в разі детермінованої, стохастичної та хаотичної динаміки.

В моделі вимірювань, вперше, в якості математичних інструментів аналізу результатів вимірювання ДЗ та динаміки НДС спільно використані: інтервали значень вимірюваних величин, фрактальний і ентропійний аналіз, часовий горизонт прогнозу, портрет вимірювань.

Фрактальна розмірність дозволяє класифікувати динаміку процесу; ентропія Шеннона, дозволяє оцінити невизначеність вимірювання і розкид значень ДЗ: фазовий портрет дозволяє визначити показники Ляпунова та час передбачення динаміки системи.

Автором вперше сформульовані принципи створення рівняння вимірювання в НДС. Традиційне рівняння доповнено функціональною залежністю від часу вхідних величин, шумів і вихідної величини, а також початковими значеннями вхідних величин, функціями їх еволюції і часом передбачення.

Для випадку, коли математичний опис процесів неможливий, запропоновано використовувати портрет вимірювання. Для відновлення фазового портрета НДС розроблений удосконалений метод Такенса, що враховує невизначеності результатів вимірювань.

Отримав розвиток ентропійний метод дослідження процесів в складних ієрархічних системах. Вперше розроблено принципи складання шкали нормованих значень ентропії для оцінки еволюції складних систем. Вперше отримано вираз зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності результатів вимірювань, застосування якого дозволяє зв'язати значення ентропії і значення фрактальної розмірності. Його застосування дозволяє виконувати аналіз причин, що впливають на значення невизначеності вимірювань.

Розроблена модель вимірювання дозволяє виконувати вимірювання і оцінку результатів в умовах стійкої і хаотичної динаміки НДС та є теоретичною основою для створення експериментальних моделей дослідження фізичних і біофізичних систем.

4. Отримала подальший розвиток теорія невизначеності вимірювань в НДС. Вперше розроблено принципи оцінювання та подання результатів вимірювань величин із хаотичною динамікою. Виміряні величини НДС із хаотичною динамікою представляються у вигляді ат трактора. Вперше результат вимірювань в НДС запропоновано представляти в наступній формі. Виміряна величина представляється інтервалом значень з урахуванням невизначеностей вимірювання їх кордонів. Значення динамічних змінних всередині інтервалу відображаються у

вигляді гістограми. Наводяться найбільш і найменш вірогідні значення динамічних змінних з їх невизначеностями і ймовірності появи. Наводяться фрактальна розмірність і ентропія Шеннона, час передбачення.

Запропоновано використовувати ентропійному підхід до оцінювання невизначеності вимірювань, що дозволяє уникнути необхідності призначати значення довірчої ймовірності. Вперше отримано вираз зв'язку ентропії Шеннона та фрактальної розмірності, яка дозволяє виконувати аналіз причин, що впливають на значення невизначеності вимірювань.

5. На основі результатів досліджень вперше розроблені експериментальні моделі дослідження параметрів фізичних і біофізичних систем.

Розроблено:

- модель дослідження параметрів випромінювання лазера;
- модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок;
- топологічну модель ідентифікації оптичних систем;
- модель дослідження стану біофізичних систем.

Моделі дозволяють досліджувати системи та вимірювати їх параметри в умовах стійкої і хаотичної динаміки НДС.

Модель дослідження параметрів випромінювання лазера. призначена для вимірювань і досліджень стаціонарних і хаотичних режимів лазерного випромінювання. Модель передбачає вимірювання інтервалів значень параметрів випромінювання в різних режимах, значень їх стабільності та часу прогнозування. Класифікація динаміки випромінювання виконується за допомогою фрактальної розмірності. Вперше отримано вираз залежності стабільності параметра випромінювання від фрактальної розмірності, застосування якого дозволяє контролювати ступінь хаотизації динаміки.

Досліджено задачу застосування нанолазерів в інформаційно-вимірювальних технологіях. Для цього розглянуто генерації над випромінювання. Результати досліджень показали, що у режимі надвипромінювання на довжині хвилі 1,5 мкм пікова потужність випромінювання становить $P = 10,9$ мкВт, що забезпечує дальність передачі сигналу по одномодовому волокну з коефіцієнтом втрат

$\alpha=0,5$ дБ/км $L \approx 750$ м. При цьому стабілізацію частоти пропонується здійснювати по лінії поглинання йоду в дефекті фотонного кристала. Аналіз параметрів випромінювання та їх динаміки виконується за допомогою розробленої автором моделі дослідження параметрів випромінювання лазера як НДС теоретичної моделі вимірювань в НДС.

Розроблено модель дослідження процесу лазерного охолодження частинок, яка дозволяє оцінювати температуру в процесі охолодження з використанням інформаційної ентропії Шеннона. Модель містить ентропійну шкалу оцінювання температури охолоджуваних частинок. Отримано вираз для оцінювання ентропії лазерного випромінювання, як функції його частоти. Спираючись на вираз щільності розподілу частинок за швидкостями та вираз для ентропії Шеннона складається безперервна двовимірною шкала значень в координатах «температура-ентропія». Застосування інформаційно-ентропійного підходу та ентропійної шкали дозволяє оцінити температуру ансамблю частинок в процесі лазерного охолодження в будь-який момент часу.

Розроблено топологічну модель ідентифікації оптичних систем. Модель заснована на гіпотезі про фрактальну структуру оптичного сигналу, відображеної від просвітлюючого покриття оптичних приладів та визначенні фрактальні розмірності розподілу інтенсивності в площині перетину відбитого від цілі лазерного імпульсу. Наближення значення фрактальної розмірності до одиниці є передумовою до ідентифікації цілі, як оптичного приладу спостереження. На думку автора для класифікації типу оптичного приладу, поряд з фрактальною розмірністю, повинен бути розроблений ансамбль фрактальних ознак: вид фрактальних сигнатур, вид просторового спектра і значення просторових частот, що характеризують структуру сигналу.

Розроблена експериментальна модель дослідження біофізичної системи на основі теоретичної моделі вимірювань в НДС. В рамках моделі проводяться вимірювання динамічних змінних системи в рівноважному та збудженому станах. Результатом вимірювання є інтервали значень динамічних змінних, фрактальна розмірність, ентропія Шеннона і час передбачення динаміки. Для оцінки

еволюційних процесів в модель введені ентропійні та тимчасові шкали. В якості кількісної оцінки стану системи використовується час її повернення в стан рівноваги після припинення зовнішнього нормованого впливу. Запропоновано ентропійний метод оцінки нормованого зовнішнього впливу. Застосування моделі дозволить розробляти прилади та системи діагностики і лікування, складати індивідуальні програми лікування пацієнтів, підготовки спортсменів, раціонально використовувати індивідуальні здібності.

Наведено результати експериментального застосування моделі для дослідження фізичних параметрів людини. Результати дослідження підтверджують ефективність розроблених моделей вимірювання і досліджень НДС, і обґрунтованості вибору математичних інструментів аналізу експерименту.

Результати дисертаційного дослідження містять принципові положення теорії дослідження нелінійних динамічних систем на основі моделей вимірювань в НДС. Розроблені автором теоретичні та експериментальні моделі вимірювань і досліджень можуть бути застосовані для вирішення комплексної задачі створення, вивчення, прогнозування та управління складними системами різної природи з нелінійної, хаотичної динамікою, такими як лазери з хаотичними характеристиками випромінювання, і медичні системи вимірювання величин з хаотичною динамікою.

Результати виконаних досліджень розвивають практичні та теоретичні методи та методика досліджень теорії відкритих систем, інформації лазерів та нанолазерів, нанофотоніки, теорії сигналів.

До перспективних напрямків подальших досліджень відносяться: застосування результатів досліджень для розвитку теорії і практики управління параметрами випромінювання нанолазерів, генерації та практичного використання дисипативних оптичних солітонів, практична розробка лазерної та медичної техніки, розробка комп'ютерних програм обробки і подання результатів дослідження НДС.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Основы нелинейной метрологии. Новый подход в теории измерений: монография. LAP Lambert Acad. Publ., 2014. 168 с.
2. Grechko L. G., Pinchuk A. O., Kurskoy Yu. S., Lesjo A. On a Problem of Anomalous Absorption of Far-Infrared Radiation by Small Metallic Particles. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2000. Vol. 2, № 1. С. 95–99.
3. Мачехин Ю., Курской Ю.. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем. *Системи обробки інформації*. 2012. № 1. С. 169–175.
4. Мачехин Ю., Курской Ю. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Системи обробки інформації*. 2012. № 7. С. 117–122.
5. Мачехин Ю., Курской Ю. Энтропийный анализ динамических переменных. *Системи обробки інформації*. 2013. № 1. С. 100–104.
6. Курской Ю. С. Особенности измерений в реальных динамических системах. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2013. № 4. С. 64–71.
7. Курской Ю. Энтропийная шкала оценки результата измерений. *Системи обробки інформації*. 2013. № 9. С. 169–175.
8. Курской Ю. С. Фрактальный анализ результатов электрических измерений. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2014. № 1. С. 52–57.
9. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Features of entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Метрологія та прилади*. 2013. № 6. С. 17–21.
10. Курской Ю. Здоровье как объект измерения. *Системи обробки інформації*. 2014. № 3. С. 124–126.
11. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Фрактально-энтропийный анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Измерительная техника*. 2014. № 6. С. 18–21.
12. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Measuring technique*. 2014. Vol. 57, № 6. P. 609–704.

13. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Модель измерения здоровья человека. Метрологический подход. *Метрологія та прилади*. 2014. № 2. С. 40–44.
14. Мачехин Ю., Курской Ю. Норма энтропии как реперная точка шкалы измерения здоровья. *Метрологія та прилади*. 2014. № 6. С. 56–60.
15. Курской Ю. Применение интервального анализа для оценки неопределенности измерений в сложных системах. *Системи обробки інформації*. 2015. № 2. С. 146–148.
16. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление уравнения измерения энтропии Шеннона нелинейных динамических систем с использованием методов интервального анализа. *Приборы и методы измерений*. 2015. Т. 6, № 2. С. 257–263.
17. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Development of Nonlinear Metrology Methods. *Стандартизація, сертифікація, якість*. 2015. № 4. С. 61–65.
18. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Evaluation of Cooled Particles Parameters by Instruments of Nonlinear Metrology. *Метрологія та прилади*. 2015 № 6. С. 50–53.
19. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Приборы и методы измерений*. 2016. № 6. С. 18–21.
20. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. The measurement portrait of dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2016. № 5. С. 48–51.
21. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. A human as a research object for metrology of nonlinear dynamic systems. *Метрологія та прилади*. 2017. № 1. С. 63–66.
22. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Український метрологічний журнал*. 2017. № 1. С. 8–10.
23. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Expression of uncertainty in measurement of nonlinear dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2017. № 3. С. 49–51.

24. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление модели измерения в нелинейных динамических системах. *Метрологія та прилади*. 2018. № 1. С. 58–62.
25. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Физико-математические основы измерений в нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 192. С. 102–105.
26. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Providing mode locking in fiber ring lasers. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 2. P. 02033.
27. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Ткаченко В. А. Сверхизлучение нанолазеров в информационно-измерительных процедурах. *Радіофізика та електроніка*. 2018. Т. 23, № 2. С. 61–68.
28. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Vasianovych A. V. Ring fiber lasers for telecommunication systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, №. 6. P. 541–548.
29. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Энтропийная оценка процесса лазерного охлаждения. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 10. P. 02033.
30. Kurskoy Yu. S., Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S. Topological methods in measurement and research of nonlinear dynamical systems. *Вісник ХНУ. Серія «Фізика»*. 2018. № 29. С. 22–28.
31. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Принципы моделирования измерений в оптических нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 194. С. 29–33.
32. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Photonic Crystal Nanolasers As Optical Frequency Standards. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 13. P. 1169–1177.
33. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S., Tkachenko V. A. Nanolaser Superradiation In Information And Measuring Procedures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. ol. 77, № 13. P. 1179–1186
34. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Laser Anemometry Method For Particle Velocity Measurement In The Bose-Einstein Condensate. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 17. P. 1555–1563.

35. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S. Physical and mathematical foundations of measurements in nonlinear dynamic systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 18. P. 1631–1637
36. Курской Ю. С. Модель измерения для систем с функцией самоорганизации. *Бионика интеллекта*. 2018. Вып. 91. №2. С. 94–98.
37. Курской Ю. С. *Топологическая идентификация оптических систем*. *Радиотехника*. 2019. Вып. 196. С. 51–54.
38. Курской Ю. С. Теоретическая модель измерения параметров лазерного излучения. *Радиотехника*. 2019. Вып. 197. С. 86–92.
39. Kurskoy Yu., Hnatenko O., Neofitnyi M., Yu. Machekhin. Topological Model of Laser Emission Parameters Research. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 280–283.
40. Kurskoy Yu. S. Usage of the nonlinear metrology instruments for research the laser cooling process. *Functional Basis of Nanoelectronics: 2019* : proceedings of inter. scient. conf, 16–21 Sept. 2019. Kharkov-Odessa, 2019. P. 136–140.
41. Nikolaiev S., Pozhar V., Dzyubenko M., Nikolaiev K., Kurskoy Yu. Laser Emission of Dye Solutions Co-doped with Silver Nanoparticles. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 284–287.
42. Gulak S., Cherkashyn A., Balashov I., Zarytskyi V., Kurskoy Yu., Zhdanova Yu. Laser Marking System for Plastic Products. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 361–364.
43. Таровский Д. М., Курской Ю. С. Аппаратное обеспечение лазерного охлаждения частиц. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20–22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 187–188.
44. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С., Применение лазерного излучения для управления движением атомов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20–22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 189–190.

45. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С. Перспективы использования охлаждённых молекул йода. *Функциональная база нанoeлектроники: 2015 г.:* матер. VIII межд. науч. конф. 28 сент. – 2 окт. 2015 г. Одесса, 2015. С. 91–94
46. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2016 г.:* матер. XIII межд. науч.-тех. сем. 13–14 апр. 2016 г. Минск, 2016. С. 86–89.
47. Курской Ю. С. Нелинейная метрология как универсальный инструмент исследования сложных систем. *Физика, электроника и электротехника: 2016 г.:* мат. межд. конф. 18–22 апр. 2016 г. Сумы, 2016. С. 23.
48. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Метрологія та вимірювальна техніка: 2016 р.:* матер. X між. наук.-практ. конферен. 5–7 жовт. 2016 р. Харків: ННЦ «ІМ», 2016 р. С. 22.
49. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Неопределённость измерения величин с нелинейной динамикой. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.:* матер. XIV межд. науч.-тех. семин. 8 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2017 г. С. 86–89.
50. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Информационно-измерительные процедуры с использованием сверхизлучения нанoлазеров. *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 135–137
51. Мачехін Ю. П., Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Пуляєв Ю. С. Керування параметрами нанoлазерів. *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 128-130
52. Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Сівні В. Б., Крапельні лазери *Функциональная база нанoeлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 131–134

53. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Сивни В. Б., Ткаченко В. В. Принципы построения модели измерения в нелинейных динамических системах. *Метрологія, інформ.-вимір. технології та системи: 2017 р.* : матер. VI міжнар. наук.-техн. конф. 24–25 жовт. 2017 р. Харків: ННЦ «ІМ». 2017. С. 95.
54. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.* : матер. XV междунар. науч.-тех. семин. 10 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2018 г. С 24.
55. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии *Метрологія та вимірювальна техніка: 2018 р.* : матер. XI міжнар. наук.-практ. конфер. 5–7 жовт. 2018 р. Харків: ННЦ «ІМ», 2018 р. С. 187.
56. Ткаченко В. А., Курський Ю. С. Дослідження параметрів лазерного випромінювання. *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: 2019 р.* : мат. міжнар. молод. форуму. 16-18 квіт. 2019 р. Харків : ХНУРЕ. 2019. С. 264–265
57. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. Москва, 1990. 312 с.
58. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В.. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие. Москва : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. 82 с.
59. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. Москва : Мир, 1979. 512 с.
60. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Наука, 2000. 295 с.
61. Хакен Г. Синергетика. Перевод с английского: Емельянов В.И. Москва : Мир, 1980. 388 с.

62. Неймарк Ю. Динамические системы и управляемые процессы. Москва : Едиториал УРСС, 2010. 336 с.
63. Качественная теория динамических систем второго порядка. / Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А.Г. Москва : Наука, 1966. 568 с.
64. Лоскутов А. Ю. Очарование хаоса. *Успехи физических наук*. 2010. Том 180, № 12. С. 1304-1329.
65. Еськов В. М., Андреевских М. А., Карпин В. А., Полухин В. В. Анализ параметров квазиаттракторов вектора состояния организма работников железнодорожного транспорта. *Современные методы системного анализа и возможности их применения в медицинской науке*. 2009. № 4. С 47-49.
66. Климов О. В., Борейченко И. В., Баев К. А., Балтиков А. Р. *Современные методы системного анализа и возможности их применения в медицинской науке*. 2009. № 4. С 49-54.
67. Еськов В. В., Карпин В. А., Бурмасова А. В., Шерстюк Е. С. Хаотическая динамика параметров квазиаттракторов больных язвенной болезнью двенадцатиперстной кишки, находящихся в условиях медикаментозного и физиотерапевтического воздействия. *Вестник новых медицинских технологий*. 2016. №1. URL: <http://www.medtsu.tula.ru/VNMT/Bulletin/E2016-1/1-3.pdf> (дата обращения: 16.03.2016).
68. Бабунц И. В., Мириджанян Э. М., Машаех Ю. А. Азбука анализа variability сердечного ритма. Ставрополь : 2002. 112 с.
69. Добрынина И. Ю., Добрынин Ю. В., Еськов В. М., Лазарев В. В., Адайкин В. А. Использование методов теории хаоса и синергетики в современной клинической кибернетике. *Сибирский медицинский журнал*, 2006. №8. С. 38–41.
70. Еськов В. М., Еськов В. В., Вохмина Ю. В., Гавриленко Т. В. Эволюция хаотической динамики коллективных мод как способ описания поведения живых систем. *Вестник Московского университета. Серия Физика. Астрономия*. 2016. №2. С. 57-64.

71. Хадарцев А. А., Еськов В. М. Внутренние болезни с позиции теории хаоса и самоорганизации систем. *Терапевт*, 2015. №1. С. 35–42.
72. Хадарцева К. А., Филатова О. Е. Гомеостаз биосистем и теория хаоса и синергетики (краткое сообщение). *Вестник новых медицинских технологий*, 2015. №2. URL: <http://medtsu.tula.ru/VNMT/Bulletin/E2015-2/1-2.pdf> (дата обращения 12.05.2015).
73. Ван Кампен Н.Г.. Стохастические процессы в физике и химии. Москва : Высшая школа, 1990. 376 с.
74. Глейк Дж.. Хаос. Создание новой науки. Пер. с англ. Е. Барашковой. СПб. : Амфора, 2001. 398 с.
75. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence. *Commun. math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167—192.
76. Smale S. Morse inequalities for dynamical system. *Bulletim of the Amer. Math. Soc.*, 1960. Vol. 66, №1. P. 61—69.
77. Пуанкаре А., Эренфест П., Эренфест Т., фон Нейман Дж. Работы по статистической механике. Москва–Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 280 с.
78. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco : Freeman, 1982. 491 p.
79. Martin N. F., England J. W. Mathematical Theory of Entropy. Cambridge : Cambridge University Press, 1984. 286 p.
80. Воскресенский В. Ю. Об основаниях энтропии: монография. Москва : Красанд, 2010. 104 с.
81. Shannon C. E. A mathematical theory of communications. *Bell Systems Tech. J.*, 1948. Vol. 27. P. 623–656.
82. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Москва : И-во иностр. лит., 1963. 829 с.
83. Климонтович Ю. Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации. *УФН*. 1989. Т. 158, № 1. С. 59-91.

84. Горбань И. И. Энтропия неопределенности. *Математичні машини і системи*. 2013. № 2. С. 105-117.
85. Горбань И. И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. Київ : Наукова думка, 2011. 318 с.
86. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 528 с.
87. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В.. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие. Москва : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. 82 с.
88. Федер Е. Фракталы. Москва : Мир, 1991. 258 с.
89. Machehkhin Yu. P. Fractal scale for time series of the results of measurements. *Measurement Techniques*, 2009. V. 52. № 8. P. 835–840.
90. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики Москва : Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
91. Lighthill J. An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics. Oxford : Oxford University Press, 1988. 272 p.
92. Борн М. Размышления и воспоминания физика. Сборник статей. Москва : Наука, 1977. 280 с.
93. Кравцов Ю. А. Случайность, детерминированность, предсказуемость. *Успехи физических наук*, 1989. Т. 158, № 1. С. 93–122.
94. Казютинский В.В., Мамчур Е.А., Сачков Ю.В. Спонтанность и детерминизм. Москва : Наука, 2006. 323 с.
95. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Москва : Наука, 1973. 412 с.
96. Бекман И. Н.. <http://beckuniver.u> Синергетика. Лекция 2. Динамические системы URL: coz.ru/index/kurs_sinergetika/0-82. (дата обращения 12.05.2018).
97. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. Москва.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.

98. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963. Vol. 20. № 2. P. 130–141.
99. Crutchfield J. P., Farmer J. D., Packard N., Shaw R., Jones G., Donnelly R. J. *Phys.Lett.* 1980. V. 76. P. 14.
100. Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 3 edition. Elsevier Inc., 2013. 432 p.
101. Guckenheimer J., Holmes P. J. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York : Springer, 1983. 471 p.
102. Климонтович Ю.Л.. Введение в физику открытых систем. Москва ; Янус-К, 2002. 284 с.
103. Климонтович Ю. Л. Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации. S-теорема. *Письма в Журнал технической физики*, 1983, Т. 8, С. 1412-1423.
104. Климонтович Ю. Л. Критерии относительной степени упорядоченности открытых систем. *УФН*, 1996. Т. 166, № 11. С. 1231–1243
105. Кадомцев Динамика и информация. *УФН*, 1994. Т. 164, №5, С. 449–530.
106. Иваницкий Г. Р. Самоорганизующаяся устойчивость биосистем, далёких от равновесия. *УФН*. Т. 187, №7. С 757-784
107. Le Chatelier H *Lecçons sur le carbone, le combustion, les lois chimiques*. Paris : J. Hermann, 1936. 357 p.
108. Ланкин Ю. П. Самовозникновение моделей – от теории к реальности. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2013. № 5. С. 22–26.
109. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва-Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 472 с.
110. Astakhov V. V., Anishchenko V. S., Shabunin A. V., Controlling Spatiotemporal Chaos in a Chain of the Coupled Logistic Maps, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1995. Vol. 42, № 6. p. 352-357.
111. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*. В 10-ти т. Т. IX. Теория конденсированного состояния: Учеб. пособие. — 4-е изд., испр. и доп. Москва ; Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 448 с.

112. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? *УФН*, 1999. Т. 169. С 419–441.
113. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: наука о взаимодействии. Москва-Ижевск, 2003. 320 с.
114. Турицын С. К., Розанов Н. Н., Яруткина И. А., Беднякова А. Е., Фёдоров С. В., Штырина О. В., Федорук М. П. Диссипативные солитоны в волоконных лазерах. *УФН*, 2016. Т. 186. С. 713–742.
115. Воронин А. А., Желтиков А. М. Нелинейная динамика сверхмощных ультракоротких лазерных импульсов: эксафлопные вычисления на лабораторном компьютере и субпериодные световые пули. *УФН*, 2016. Т. 186. С. 957–966.
116. Павлов Е. А., Жужома Е. В., Осипов Г. В. Альтернативные способы контроля и подавления хаоса спиральных волн в модели сердечной мышцы. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2015. Т. 23, № 4. С. 40-57
117. Флейшман А. Н., Кораблина Т. В., Смагина Е. С., Петровский С. А., Иовин Д. Е., Неретин А. А. Энтропия и DFA variability ритма сердца при дистантном прекондиционировании, ортостазе у здоровых молодых людей и у лиц с изменениями нейровегетативной регуляции кардиодинамики. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2016. Т. 24, № 5. С. 37–61.
118. Чибисов С. М., Катин Г. С. Биоритмы и Космос: мониторинг космобиосферных связей: монография. Москва. 442 с.
119. Трубецков Д. И. Математическое моделирование живых систем. Некоторые исторические аспекты и частные задачи. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2015. Т. 23, №2. С. 3-29.
120. Лаос-Бельтра Р. Математика жизни. Численные модели в биологии и экологии. Мир математики: в 40 т., т. 28 : Пер. с исп. Москва : Де Агостини, 2014. 160 с.
121. Злепко С. М., Бондарчук В. В., Костішин С. В. Метод визначення рівня емоційного стресу для оцінки інтегрального показника доров'я спортсмена

- Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*, 2008. № 2. С 143-149.
122. Еськов В. М., Еськов В. В., Гавриленко Т. В., Вохмина Ю. В. Кинематика биосистем как эволюция: стационарные режимы и скорость движения сложных систем. *ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия*, 2015. № 2. С. 62-73.
123. Кузенков Н. П., Логинов В. М.. Использование метода нормированного размаха при анализе речевых патологий неврологического генеза. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2014. Т. 6, №5. С. 775–791
124. Апрыткина М. Л., Бородин А. С., Васильченко М. Н. Анализ показателя Херста для вариаций периода сокращений сердца человека. *Известия высших учебных заведений. Физика*, 2010. Т. 53, №9. С. 233–234.
125. Тужилкин Д. А. Особенности изменчивости показателей висцеральных функций в норме при воздействии комплекса физических факторов окружающей среды. *Вестник науки Сибири. Серия Медицинские технологии*, 2015. Спецвыпуск (15). С. 333-339.
126. Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов / Под ред. Ильина И. В., Трубецкова Д. И.. Москва : Изд-во Московского университета, 2010. 412 с.
127. Стаховский И. Р. Масштабная инвариантность коровой сейсмичности и прогностические признаки землетрясений. *УФН*, 2017. Т. 187. С. 505–524.
128. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети. *УФН*, 2017. Т. 187. С. 745–756.
129. Иваницкий Г. Р. Самоорганизующаяся динамическая устойчивость биосистем, далёких от равновесия. *УФН*, 2017. Т. 187. С 757–784
130. Fisher W P. New metrological horizons: invariant reference standards for instruments measuring human, social, and natural capital. IMEKO, 2008 : Proceedings of 12th IMEKO TC1 & TC7 Joint Symposium on Man Science & Measurement, 3–5 Sep., 2008. Annecy, France. 2008. P. 51-58.

131. A. Guerra, M. Pillet, J. Maire Control of variability for man measurement IMEKO, 2008 : Proceedings of 12th IMEKO TC1 & TC7 Joint Symposium on Man Science & Measurement, 3–5 Sep., 2008. Annecy, France. 2008. P. 45-50.
132. Dissipative Solitons: from Optics to Biology and Medicine / edited by Akhmediev N. and Ankiewicz A. Lecture Notes in Physics Vol. 751. Springer Heidelberg, 2008. 245 p.
133. Lugiato L., Prati F., Brambilla M. Nonlinear Optical Systems. Cambridge : Cambridge University Press, 2015. 455 p. .
134. Nonlinear Dynamics: Materials, Theory and Experiments, Springer Proceedings in Physics / edited by M. Tlidi and M. G. Clerc. Springer, 2016. Vol. 173.
135. Conforti M., Mussot A., Fatome J., Picozzi A., Pitois S., Finot C., Haelterman M., Kibler B., Michel C., and Millot G. Turbulent dynamics of an incoherently pumped passive optical fiber cavity: Quasisolitons, dispersive waves, and extreme events. *Phys. Rev.*, 2015. A 91. P 023823/
136. Bianchi S., Frezza M. Fractal stock markets: International evidence of dynamical (in) efficiency. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 071102/
137. Kroll J. Fire, ice, water, and dirt: A simple climate model. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 073101.
138. Bathiany S., Dijkstra H., Crucifix M., Dakos V., Brovkin V., Williamson M. S., Lenten T. M. , and Scheffer M. Beyond bifurcation: Using complex models to understand and predict abrupt climate change. *Dyn. Stat. Clim. Syst.*, 2016.
139. Сапожникова К., Тайманов Р., Бакшеева Ю. Метрологический анализ как основа системного нейрофизиологического исследования. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2016 г. : матер. междунар. науч.-тех. семина. 10 сент. 2016 г. Созополь, Болгария. 2016 г. С 385-390*
140. Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины: пер. с англ. и фр. Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. Изд. 2-е, испр. СПб.: НПО «Профессионал», 2010. 82 с.

141. Petrov V., Mazhul L., Lombardo G. Measurement of happiness– seasonal determination. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2016 р. : матер. междунар. науч.-тех. семина. 10 сент. 2016 г. Созополь, Болгария. 2016 г. С 373-377*
142. Rantanen V., Kumpulainen P., Venesvirta H., Verho J., Špakov O., Lylykangas J. Capacitive facial activity measurement. *АСТА ИМЕКО. 2013, V. 2, № 2. P. 78 – 85.*
143. Crenna F., Rossi G. B., Palazzo A. Measurement of human movement under metrological controlled conditions. *АСТА ИМЕКО, 2015. V. 4, № 4. P. 48-56*
144. Toma1 D. M., Garcia-Benadi A., Manuel-Gonzalez1 B.-J., del-Rio-Fernandez1 J. Systematic quality control for long term ocean observations and applications. *АСТА ИМЕКО, 2016, V. 5, № 1. P. 64-68.*
145. Feistel R. Salinity and relative humidity: climatological relevance and metrological needs. *АСТА ИМЕКО, 2015, V. 4, № 4. P. 57-61*
146. Rolle F., Pessana E., Sega M. Metrological traceability for the analysis of environmental pollutants in the atmosphere. *АСТА ИМЕКО, 2015, V. 4, № 4. P. 62-65.*
147. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. — 2-е изд., перераб. и доп. Ленинград: Издательство Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1991. 304 с.
148. Грасюк А. З., Ораевский А. Н.. *Радиотехника и электроника, 1964. № 9, С. 527.*
149. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. Пер. с англ. Москва: Физматлит, 2000. 896 с.
150. Uspenskii A. V. *Radio Eng. Electron. Phys., 1963. № 8, P. 1145.*
151. Хакен Г. Лазерная светодинамика. Москва: Мир, 1988. 350 с.
152. Weiss T. O., Klische W., Ering P. S., Cooper M. *Opt. Commun. 1985. № 52. P. 405.*
153. Акчурин Г. Г., Акчурин А. Г. Аномальный сценарий возникновения динамического хаоса в многомодовых лазерных диодах. *Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, №10. С.76–82.*

154. Сытова С. Н. Хаос в объемных лазерах на свободных электронах. *Изв. вузов «ПНД»*. 2011. Т. 19, № 2. С. 93-111.
155. Roy R., Murphy T. W., Maier T. D., Gills Z., Hunt E. R. Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system. *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 1259-1262.
156. Andrievsky B., Fradkov A. Information transmission by adaptive synchronization with chaotic carrier and noisy channelю. *IEEE, 2000* ; Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr. Sydney, 2000. P. 122-126.
157. Uchida A., Shinozuka M., Kinugawas S., et al. Chaotic on-off keying in laser systems for optical secure communications, *Experimental Chaos, 2001* ; Proc.6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001. Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. *AIP Conf. Proc.* NY, 2002. V. 622. P. 317⁺ 328.
158. Dykstra R., Dykstra R., Tang D.Y., Heckenberg N.R. Experimental control of single-mode laser chaos by using continuous, time-delayed feedback. *Phys. Rev. E.*, 1998. V. 57. P. 6596-6598.
159. Guderian A., Munster A.F., Jinguji M., Kraus M., Schneider F.W. Resonant chaos control by light in a chemiluminescent reaction. *Chem. Phys. Lett.*, 1999. V. 312. P. 440-446.
160. Турицын С. К., Розанов Н. Н., Яруткина И. А., Беднякова А. Е., Фёдоров С. В., Штырина О. В., Федорук М. П. Диссипативные солитоны в волоконных лазерах. *УФН*, 2016. V. 186. P. 713–742.
161. Дмитриев А. С. Динамический хаос и информация, Нелинейные волны. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. 256 с.
162. Tang S., Illing L., Liu J.M , et al. Communication using synchronization of chaos semiconductor lasers with optoelectronic feedback. *Experimental Chaos, 2001* : 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001. Eds. S. Boccaletti, B. J. Gluckman, J. Kurths et al. *AIP Conf. Proc.* V. 622, NY, 2002. P. 224_229.
163. Мачехин Ю. П., Одинец В. А. Применение метода фрактального анализа для исследования неустойчивости частоты лазеров. *Украинский метрологический журнал*. 1996. № 2. С.49-54.

164. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd edn. BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, 1995, 46 p.
165. Берже П., Помо И., Видаль К., Порядок в хаосе. Москва : Мир, 1991. .365 с.
166. Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, Москва — Ленинград : ОГИЗ. Гостехиздат, 1946. 118 с.
167. Романчук В. М. Измерение нефизической величины. *Системный анализ и прикладная информатика*, 2017. №4. С. 39-44.
168. Лячнев В. В., Сирая Т. Н., Довбета Л. И. Метрологические основы теории измерительных процедур: учебное пособие. Санкт-Петербург : Элмор, 2011. 411 с
169. Арнольд В. И., Авец А.. Эргодические проблемы классической механики. Москва—Ижевск: РХД, 1999. 284 с.
170. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. Москва : Наука, 1980. 384 с.
171. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. Москва : Факториал, 1999. 768 с.
172. Добронец Б. С. Интервальная математика: Учеб. Пособие. Красноярск, 2007. 287 с.
173. Вегер В. Информация об измеряемой величине как основа формирования функции плотности вероятности. *Измерительная техника*, 2003. № 9. С. 3-9
174. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Москва : Изд-во Наука, 1974. 257 с.
175. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. Москва : Наука, 1968. 272 с.
176. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. Москва : Мир, 1988. 234 с.
177. Колмогоров А. Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона. *ДАН СССР*, 1954, Т. 98. С.527.
178. Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Ленинград: Академия Наук СССР, 1951. 719 с.

179. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. Москва : МЦНМО, 2010. 588 с.
180. Вегер В. Информация об измеряемой величине как основа формирования функции плотности вероятности. *Измерительная техника*, 2003, № 9. С. 3-9
181. Poincare H. *Cficul des Probabilites*. Paris: Cantier-Villard, 1912.
182. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. Москва – Ленинград : Изд-во АН СССР, 1950. 209 с.
183. Карташев А. П., Рождественский Б. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов. Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 255 с.
184. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 394 с.
185. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. 3-е изд., стереотип. Москва : МЦНМО, 2008. 128 с.
186. Хаусдорф Ф. Теория множеств. Перевод с немецкого Н. Б. Веденисова. Под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. Ленинград : Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 306 с.
187. ISO/IEC Guide 98-3:2008/Suppl.1:2008/Cor.1:2009. Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) -- Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method -- Technical Corrigendum 1. [Чинний від 2009-07-05]. Женева : ISO, 2009. 76 с. стандарт. (Інформація та документи).
188. Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. Москва : Издательство физико-математической литературы, 2002. 200 с.

189. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. Москва : Издательство физико-математической литературы, 2010. 400 с.:
190. Методы анализа нелинейных математических моделей / Холодинок М., Клич А., Кубечек М., Марек М. Москва : Мир, 1991. 291 с.
191. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. Москва : Физматлит, 2000. 296 с.
192. Мачехин Ю. П. Особенности анализа результатов измерений в динамических системах с хаотическим поведением. *Системи обробки інформації*. 2006. № 7. с. 53-56
193. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. Москва : Наука, 1990. 270 с.
194. Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва : Мир, 1988. 240 с.
195. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987. 382 с.
196. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. Москва : Мир, 1991. 254 с.
197. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории Учебное пособие. Москва : Постмаркет, 2000. 352 с.
198. Ветовский Г. В. Элементы информационной физики. Москва : Гос. Ин-т управления, 2002. 260 с.
199. Machehkin Yu. P. Fractal scale for time series of the results of measurements. *Measurement Techniques*. 2009. Vol. 52, №8. P. 835-838.
200. Истомина И. А., Котляров О. Л., Лоскутов А. Ю. К проблеме обработки временных рядов: расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа, *ТМФ*. 2005. Т. 142, № 1. С. 148–159.
201. Мачехин Ю. П., Одинец В. А. Применение метода фрактального анализа для исследования неустойчивости частоты лазеров. *Український метрологічний журнал*. 1996. №2-3. С. 49-54.

202. ГОСТ 13109-97. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. [Действующий от 1999-17-11]. Москва : МГС. 1997. 33 с. (Межгосударственный стандарт).
203. Грановский В. А. Динамические измерения. Ленинград : Энсргоатомиздат. 1984. 214 с
204. Широков К. П., Арутюнов В. О., Грановский В. А. и др. Основные понятия теории динамических измерений. *Измерительная техника*. 1975, №12. С. 9-13.
205. Агалецкий П. Н. Динамические измерения механических величин. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Метрология и измерительная техника, Т. 2. Москва : ВИНТИ, 1972. С. 7-29.
206. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM). Paris : Bureau International de Métrologie Légale. 2007. 159 p.
207. ГОСТ 16263-70. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения. [Чинний від 1971-01-01]. Москва : Госстандарт СССР, 1970. 55 с. (Інформація та документація)
208. Мачехин Ю. П. Теоретическое обоснование применения фрактального анализа для изучения временных рядов. *Метрологія та вимірювальна техніка, 1999 рік* : Наукові праці II Міжнародна науково-технічна конференція "Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія-99)".-Том 1.- Харьков: ХГНИИМ. 1999. С.38-41.
209. Мачехин Ю. П. Обоснования методов статистической обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Часть 1. *Украинский метрологический журнал*. 2003. № 4. С.15-21.
210. Мачехин Ю. П. Обоснования методов статистической обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Часть 2. *Украинский метрологический журнал*. 2004. № 1. С. 6-7.

211. Мачехин Ю. П. Особенности влияния хаотического поведения динамических систем на неопределенность измерения. *Измерительная техника*. 2008. № 1. С. 38-45.
212. Мачехин Ю. П. Фрактальная шкала для временных рядов результатов измерений. *Измерительная техника*. 2009. № 8. С. 40–43
213. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. Москва : Изд. «Наука», 1968. 272 с.
214. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York : Wiley, 1964. 612 p.
215. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. Москва : Главная редакция физико-математической литературы. 1987. 394 с.
216. Колмогоров А. Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Москва : ДАН СССР, 1954. Т. 98. 527 с.
217. Takens F. Detecting strange attractor in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lect. Notes Math. 1* Berlin : Springer. 1981. Vol. 898. P. 336-381.
218. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Пер. с английского. Москва : Постмаркер, 2000. 352 с.
219. РМГ 43-2001. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". [Дата введения 2003-07-01]. Москва : МГС. 2001. 33 с. (Информация та документи).
220. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. Москва : Физматлит, 2000. 296 с.
221. Broomhead D. S., King G. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica*. 1986 . № 20. P. 217-236.
222. Crutchfield J. P., McNamara B. Equations of Motion from a Data Series. *Complex Systems*. 1987. № 1. P. 417-452.

223. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В.. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие. Москва : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. 82 с.
224. Васильев В. В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание. Киев : НАН Украины, 2008. 256 с.
225. Фрумкин В. Д., Рубичев Н. А. Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. Москва : Машиностроение, 1987. 168 с.
226. Добронев Б. С. Интервальная математика: Учеб. Пособие. Красноярск : СФУ, 2007. 287 с.
227. Акчурин Г. Г., Акчурин А. Г. Аномальный сценарий возникновения динамического хаоса в многомодовых лазерных диодах. *Письма ЖТФ*. 2005. Т. 31, №10. С. 76–82.
228. Akchurin A. G., Akchurin G. G Optical chaos in single-mode frequency stabilized laser. *SPIE 2000* : Proc. SPIE. 2000. Vol. 4002. P. 114-120.
229. Жалнин А. Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22, № 5. С. 3-12.
230. Junxiang Ke, Lilin Yi, Guangqiong Xia, and Weisheng Hu Chaotic optical communications over 100-km fiber transmission at 30-Gb/s bit rate. *Optics Letters*. 2018. Vol. 43, № 6. P. 1323-1326.
231. ISO 11554:2017(E) Optics and photonics — Lasers and laser-related equipment — Test methods for laser beam power, energy and temporal characteristics. [Дійсний із 2018-01-01]. Geneva : ISO. 2017. 18 p. (Інформація документи).
232. ISO 13695:2004 Optics and photonics -- Lasers and laser-related equipment - Test methods for the spectral characteristics of lasers. [Дійсний із 2005-01-01]. Geneva : ISO. 2004. 24 p. (Інформація документи).

233. Климонтович Ю. Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации. *УФН*. 1989. № 158. С. 59–91.
234. Мохаммад Я. Х., Павлова О. Н., Павлов А. Н.. Оценка времени предсказуемости зашумленной хаотической динамики по точечным последовательностям. *Письма в ЖТФ*. 2017. Т. 43, № 2. С. 45-51.
235. Розанов Н. Н. Некоторые проблемы теоретической лазерной физики: от пиковой генерации к экстремальной и топологической лазерной оптике. *Оптический журнал*. 2018. Т. 85, № 11. С. 8-18.
236. Stockman M. I. Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future. *Opt. Express*. 2011. Vol. 19, P. 22029–22106.
237. Hill M. Lasing in metallic-coated nanocavities. *Nat. Photonics*. 2007. № 1, P. 589.
238. Ding K., Liu Z. C., Yin L. J., Hill M. T., Marell M. J. H., van Veldhoven P. J., Nöetzel R., and Ning C. Z. Room-temperature continuous wave lasing in deep-subwavelength metallic cavities under electrical injection. *Phys. Rev.* 2012. № 85. P. 041301.
239. Ding K., Hill M., Liu Z., Yin L. J., Sahin D., P. J. van Veldhoven, Geluk E.J., Vries D. and Ning C. Z. Record Performance of a CW Metallic Subwavelength-Cavity Laser at Room Temperature, *Conference on Lasers and Electro-Optics 2012*. URL: http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?uri=CLEO_SI-2012-CTh4M.3 (дата звернення: 02.11.2018).
240. Khajavikhan M., Simic A., Katz M., Lee J.H., Slutsky B., Mizrahi M., Lomakin V., Fainman Y. Thresholdless nanoscale coaxial lasers. *Nature*. 2012. № 482. P. 204.
241. Самые маленькие в мире лазеры могут уничтожать раковые клетки. URL: <http://planet-today.ru/novosti/nauka/item/71236-samye-malenkie-v-mire-lazery-mogut-unichtozhat-rakovye-kletki> (дата звернення: 11.10.2018).
242. Lu Y. J., Wang C. Y., Kim J., Chen H. Y., Lu M. Y., Chen Y. C., Chang W. H., Chen L. J., Stockman M. I., Shih C. K., Gwo S. All-color plasmonic nanolasers with

- ultralow thresholds: autotuning mechanism for single-mode lasing. *Nano Lett.* 2014. Vol. 14, № 8. P. 4381–4388.
243. Noginov M., Zhu G., Belgrave A., Bakker R., Shalaev V. M., Narimanov E. E., Stout S., Herz E., Suteewong T., Wiesner U. Demonstration of a spaser-based nanolaser. *Nature*. 2009. Vol. 460, № 7259. P. 1110–1112.
244. Звелто О.. Принципы лазеров. Пер. под науч. ред. Т. А . Шмаонова. Изд.4-е. СПб. : Издательство «Лань», 2008.720 с.
245. Dicke R. H., *Phys. Rev.*, 1954. Vol. 93, № 99. P.235.
246. Карачевский Л. Я., Новиков И. И., Гордеев Н. Ю. Механизм сверхизлучения Дике в полупроводниковых гетероструктурах. *Физика и техника полупроводников*. 2004. Т. 38№ 7. С.872-876.
247. Карачевский Л. Я., Новиков И. И., Копьев П. С. ФТП. 1999. Т. 33. С. 1456.
248. Лебедев Д. В., Минтаиров А. М., Власов А. С., Давыдов В. Ю., Кулагина М. М., Трошков С. И., Богданов А. А., Смирнов А. Н., Лазерная генерация в микродисках с активной областью на основе решеточно-согласованных InP/AlInAs наноструктур. *ЖТФ*. 2017, Т.87, № 5. С. 106 –1071.
249. Ankun Y., Hoang T., Odomatall T. Real-time tunable lasings from plasmonics nanocavity arrays. *Nat. Communications*. 2015. № 4. P. 1-7.
250. Аллен Л., Эберли Дж. Оптические резонансы и двухуровневые атомы. Москва : Мир, 1978. С.221.
251. Li H., Hui L., Philip W. Vertical cavity surface-emittine for optical interconnects. *SPIE Newsroom*. 2014. URL https://www.researchgate.net/publication/287568028_Vertical-cavity_surface-emitting_lasers_for_optical_interconnects (дата звернення: 11.10.2018).
252. Chin A. H., Vaddiraju S. Near-infrared semiconductor subwavelength-wire laser. *APP. Phys. Lett.* 2006. № 88. P. 163115.
253. Van Campenhout J., Rojo Romeo P., Regreny P., Seassal C., Van Thourhout D., Verstuyft S., Di Cioccio L., Fedeli J.M., Lagahe C., Baets R. Electriclsly pumped InP-based microdisk laser integrated with a nanophotonic silicon on insulator waveguide circuit. *Opt. Express*. 2007. № 15. P.6744-6749.

254. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Vasianovych A.V. Ring fiber lasers for telecommunication systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 6. P. 541-548.
255. Zegrya G. G. Antimonite Related Strained Layer Heterostructures, ed by M. O. Manasrech. Gordon and Breach, Neward. 1997. 571 P.
256. Зябловский А. А., Дорофеенко А. В., Виноградов А. П. Двумерный сверхизлучающий плазмонный лазер. *Научная конференции МФТИ, 2012 год : Труды 55-й научной конференции МФТИ*. 2012. С.14.
257. Жуков А. Е., Крыжановская Н. В., Максимов М. В., Липовский А. А., Савельев А. В., Богданов А. А., Шостак И. И., Моисеев Э. И., Карпов Д. В., Laukkanen J., Tommila J. Лазерная генерация в микродисках сверхмалого диаметра. *Физика и техника полупроводников*. Т.48, № 12. 2014. С. 1666-1670.
258. Дмитриев А. Л. Оптические системы передачи информации. Учебное пособие. СПб : СПбГУ ИТМО. 2007. 96 с.
259. Бражников Д. В. Исследование возможности глубокого лазерного охлаждения атомов магния для создания стандарта частоты нового поколения. *Вестник НГУ, серия «Физика»*, 2012. Т. 7, № 14, С. 6=18
260. Летохов В. С., Миногин В. Г., Павлик Б. Д. *ЖЭТФ*. 1977. Т 72. С. 1328.
261. Балыкин В. И.. Атомная оптика и её приложения. *Вестник Российской Академии наук*. 2011. Т. 81, № 4. С. 291–315
262. Балыкин В. И., Летохов В. С., Миногин В. Г. Охлаждение атомов давлением лазерного излучения. *Успехи физических наук*. 1985. Т. 147, № 1. С. 117–156.
263. Philips W. D. Laser colling and trapping of neutral atoms, Nobel lecture, URL <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1997/phillips/lecture/> (Дата звернення 07.11.2017)
264. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. Москва : Наука, 1982. 608 с.
265. Звелто О. Принципы лазеров. – Москва : Лань, 2008, 720 с.
266. Волькенштейн М. В. Энтропия и информация. Москвса .: Наука, 1986. 192 с.
267. Лебедько Е. Системы импульсной оптической локации. Учебное пособие. Москва : Лань, 2014. 368 с.

268. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В.. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Учебное пособие. Москва : МГУ, 2004. 82 с.
269. Новейшие методы обработки изображений. / Под ред. А. А. Потапова. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.
270. Ландсберг Г. С. Оптика. 6-е изд., стереот. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 848 с.
271. Аккерман Ю. Биофизика. Москва : Мир, 1964. 684 с.
272. Біда О. А., Дерій С. І. та ін. Біологія: навчально-методичний посібник — 3-тє вид., — Київ : Літера ЛТД, 2012. 672 с.
273. Платонов К. И. Слово как физиологический и лечебный фактор. Вопросы теории и практики психотерапии на основе учения И.П. Павлова. Москва : Знание, 1962. 186 с.
274. Апрыткина М. Л., Бородин А. С., Васильченко М. Н. Анализ показателя Херста для вариаций периода сокращений сердца человека. *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2010. Т. 53. № 9. С. 233–234.
275. Прокопов А. В., Захаров И. П., Боцюра О. А. Основные проблемы обоснования модельного уравнения при оценивании неопределенности измерений. *Український метрологічний журнал*. 2016. №3. С. 19–22.
276. Прокопов А. В., Подколзина Е. Н. О возможности уточнения уравнения (модели) измерения на основе использования экспериментальных данных *UM-2016* : Труды XIII Международный научно-технический семинар «Неопределенность измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты» (UM-2016). Минск:БелГИМ, 2016. С. 108–110.
277. Klaus-D. Sommer. Modelling of Measurements, System Theory and Uncertainty Evaluation / In book “Data Modelling for Metrology and Testing in Measurement Science”. Editors: Franko Pavese, Alistair B. Forbes. Pub. Birkhauser: Boston-Basel-Berlin. 2009. P. 275–298.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача

за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Монографія

1. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Основы нелинейной метрологии. Новый подход в теории измерений: монография. LAP Lambert Acad. Publ., 2014. 168 с.

Статті

2. Grechko L. G., Pinchuk A. O., Kurskoy Yu. S., Lesjo A. On a Problem of Anomalous Absorption of Far-Infrared Radiation by Small Metallic Particles. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2000. Vol. 2, № 1. С. 95–99.

3. Мачехин Ю., Курской Ю.. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем. *Системы обработки інформації*. 2012. № 1. С. 169–175.

4. Мачехин Ю., Курской Ю. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Системы обработки інформації*. 2012. № 7. С. 117–122.

5. Мачехин Ю., Курской Ю. Энтропийный анализ динамических переменных. *Системы обработки інформації*. 2013. № 1. С. 100–104.

6. Курской Ю. С. Особенности измерений в реальных динамических системах. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2013. № 4. С. 64–71.

7. Курской Ю. Энтропийная шкала оценки результата измерений. *Системы обработки информации*. 2013. № 9. С. 169–175.

8. Курской Ю. С. Фрактальный анализ результатов электрических измерений. *Энергетика, энергосбережение и энергоаудит*. 2014. № 1. С. 52–57.

9. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Features of entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Метрологія та прилади*. 2013. № 6. С. 17–21.

10. Курской Ю. Здоровье как объект измерения. *Системы обработки інформації*. 2014. № 3. С. 124–126.

11. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Фрактально-энтропийный анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах. *Измерительная техника*. 2014. № 6. С. 18–21.

12. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Measuring technique*. 2014. Vol. 57, № 6. P. 609–704.

13. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Модель измерения здоровья человека. Метрологический подход. *Метрологія та прилади*. 2014. № 2. С. 40–44.
14. Мачехин Ю., Курской Ю. Норма энтропии как реперная точка шкалы измерения здоровья. *Метрологія та прилади*. 2014. № 6. С. 56–60.
15. Курской Ю. Применение интервального анализа для оценки неопределенности измерений в сложных системах. *Системи обробки інформації*. 2015. № 2. С. 146–148.
16. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление уравнения измерения энтропии Шеннона нелинейных динамических систем с использованием методов интервального анализа. *Приборы и методы измерений*. 2015. Т. 6, № 2. С. 257–263.
17. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Development of Nonlinear Metrology Methods. *Стандартизація, сертифікація, якість*. 2015. № 4. С. 61–65.
18. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. The Evaluation of Cooled Particles Parameters by Instruments of Nonlinear Metrology. *Метрологія та прилади*. 2015 № 6. С. 50–53.
19. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Приборы и методы измерений*. 2016. № 6. С. 18–21.
20. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. The measurement portrait of dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2016. № 5. С. 48–51.
21. Machekhin Yu., Kurskoy Yu., Prisich E. A human as a research object for metrology of nonlinear dynamic systems. *Метрологія та прилади*. 2017. № 1. С. 63–66.
22. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Український метрологічний журнал*. 2017. № 1. С. 8–10.
23. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Expression of uncertainty in measurement of nonlinear dynamic variables. *Метрологія та прилади*. 2017. № 3. С. 49–51.
24. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Составление модели измерения в нелинейных динамических системах. *Метрологія та прилади*. 2018. № 1. С. 58–62.

25. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Физико-математические основы измерений в нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 192. С. 102–105.
26. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Providing mode locking in fiber ring lasers. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 2. P. 02033.
27. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Ткаченко В. А. Сверхизлучение нанолазеров в информационно-измерительных процедурах. *Радіофізика та електроніка*. 2018. Т. 23, № 2. С. 61–68.
28. Gnatenko A. S., Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Obozna V. P., Vasianovych A. V. Ring fiber lasers for telecommunication systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, №. 6. P. 541–548.
29. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Энтропийная оценка процесса лазерного охлаждения. *J. Nano-Electron. Phys.* 2018. № 10. P. 02033.
30. Kurskoy Yu. S., Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S. Topological methods in measurement and research of nonlinear dynamical systems. *Вісник ХНУ. Серія «Фізика»*. 2018. № 29. С. 22–28.
31. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Принципы моделирования измерений в оптических нелинейных динамических системах. *Радиотехника*. 2018. № 194. С. 29–33.
32. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Photonic Crystal Nanolasers As Optical Frequency Standards. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 13. P. 1169–1177.
33. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S., Tkachenko V. A. Nanolaser Superradiation In Information And Measuring Procedures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. ol. 77, № 13. P. 1179–1186
34. Machekhin Yu. P., Gnatenko A. S., Kurskoy Yu. S. Laser Anemometry Method For Particle Velocity Measurement In The Bose-Einstein Condensate. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 17. P. 1555–1563.

35. Machekhin Yu. P., Kurskoy Yu. S., Gnatenko A. S. Physical and mathematical foundations of measurements in nonlinear dynamic systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2018. Vol. 77, № 18. P. 1631–1637

36. Курской Ю. С. Модель измерения для систем с функцией самоорганизации. *Бионика интеллекта*. 2018. Вып. 91. №2. С. 94–98.

37. Курской Ю. С. *Топологическая идентификация оптических систем*. *Радиотехника*. 2019. Вып. 196. С. 51–54.

38. Курской Ю. С. Теоретическая модель измерения параметров лазерного излучения. *Радиотехника*. 2019. Вып. 197. С. 86–92.

Тези доповідей на конференціях

39. Kurskoy Yu., Hnatenko O., Neofitnyi M., Yu. Machekhin. Topological Model of Laser Emission Parameters Research. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 280–283.

40. Kurskoy Yu. S. Usage of the nonlinear metrology instruments for research the laser cooling process. *Functional Basis of Nanoelectronics: 2019* : proceedings of inter. scient. conf, 16–21 Sept. 2019. Kharkov-Odessa, 2019. P. 136–140.

41. Nikolaiev S., Pozhar V., Dzyubenko M., Nikolaiev K., Kurskoy Yu. Laser Emission of Dye Solutions Co-doped with Silver Nanoparticles. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 284–287.

42. Gulak S., Cherkashyn A., Balashov I., Zarytskyi V., Kurskoy Yu., Zhdanova Yu. Laser Marking System for Plastic Products. *CAOL: 2019* : proceedings of inter. conf., 6–8 Sep. 2019. Sozopol, Bulgaria, 2019. P. 361–364.

43. Таровский Д. М., Курской Ю. С. Аппаратное обеспечение лазерного охлаждения частиц. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20-22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 187–188.

44. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С., Применение лазерного излучения для управления движением атомов. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: 2015 г.* : матер. 19-го Междунар. Молод. форума., 20–22 апр. 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2011. С. 189–190.

45. Урсой Е. Ю., Шеруда В. Ю., Курской Ю. С. Перспективы использования охлаждённых молекул йода. *Функциональная база наноэлектроники: 2015 г.:* матер. VIII межд. науч. конф. 28 сент. – 2 окт. 2015 г. Одесса, 2015. С. 91–94

46. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Измерение величин со сложной динамикой как основная задача нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2016 г.:* матер. XIII межд. науч.-тех. сем. 13–14 апр. 2016 г. Минск, 2016. С 86–89.

47. Курской Ю. С. Нелинейная метрология как универсальный инструмент исследования сложных систем. *Физика, электроника и электротехника: 2016 г.:* мат. межд. конф. 18–22 апр. 2016 г. Сумы, 2016. С. 23.

48. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Физические основы метрологии нелинейных динамических систем. *Метрологія та вимірювальна техніка: 2016 р.:* матер. X міжнар. наук.-практ. конфер. 5–7 жовт. 2016 р. Харків: ННЦ «ІМ», 2016 р. С. 22.

49. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Неопределённость измерения величин с нелинейной динамикой. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.:* матер. XIV междунар. науч.-тех. семин. 8 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2017 г. С 86–89.

50. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Гнатенко А. С. Информационно-измерительные процедуры с использованием сверхизлучения нанолазеров. *Функциональная база наноэлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 135–137

51. Мачехин Ю. П., Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Пуляев Ю. С. Керування параметрами нанолазерів. *Функциональная база наноэлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 128–130

52. Курський Ю. С., Гнатенко О. С., Сівні В. Б., Крапельні лазери *Функциональная база наноэлектроники: 2017 г.:* матер. X межд. науч. конф. 18–24 сент. 2017 г. Одесса. 2017 г. С. 131–134

53. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С., Сивни В. Б., Ткаченко В. В. Принципы построения модели измерения в нелинейных динамических системах.

Метрологія, інформ.-вимір. технології та системи: 2017 р. : матер. VI міжнар. наук.-техн. конф. 24-25 жовт. 2017 р. Харків: ННЦ «ІМ». 2017. С. 95.

54. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии. *Неопределённость измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты: 2017 р.* : матер. XV междунар. науч.-тех. семин. 10 сент. 2017 г. Созополь, Болгария. 2018 г. С 24.

55. Курской Ю. С., Гнатенко А. С., Сивни В. Б. Решение сложных измерительных задач методами нелинейной метрологии *Метрологія та вимірювальна техніка: 2018 р.* : матер. XI міжнар. наук.-практ. конфер. 5–7 жовт. 2018 р. Харків: ННЦ «Інститут метрології», 2018 р. С. 187.

56. Ткаченко В. А., Курський Ю. С. Дослідження параметрів лазерного випромінювання. *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: 2019 р.* : матер. міжнар. молод. фор. 16–18 квіт 2019 р. Харків: ХНУРЕ. 2019. С. 264–265.