Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

ЛУХАНІН ВОЛОДИМИР СЕРГІЙОВИЧ

Підпис

УДК 517.95:519.63

КОНСТРУКТИВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	кандидат фізико-математичних наук, доцент **Колосова Світлана Василівна,** професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Яковлев Сергій Всеволодович,** професор кафедри математичного моделювання та штучного інтелекту, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»;
	доктор фізико-математичних наук, доцент **Литвин Олег Олегович,** декан технологічного факультету, Українська інженерно-педагогічна академія.

Захист відбудеться «29» жовтня 2019 року о 14^{30} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

Автореферат розісланий «25» вересня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради *Підпис* Л.В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики, найчастіше з параметрами. Нелінійність у багатьох моделях є принципово важливою, оскільки вона приводить до результатів, які якісно відрізняються від тих, що дає лінійний аналіз.

У більшості випадків знайти точний розв'язок таких задач практично неможливо, а тому важливу роль відіграють наближені методи розв'язання. Тоді визначним стає питання про величину похибки наближеного розв'язку. Існує велика кількість прямих та непрямих методів оцінки точності похибки. Серед непрямих особливе місце займають різні методи порівняння розрахункових даних з експериментальними та тестовими результатами. При цьому особливе значення мають апріорні оцінки та теореми збіжності. Але вони, зазвичай, не дають строгих, гарантованих оцінок близькості конкретних наближених та точних методів. Таку властивість мають двобічні обчислювальні методи, які дають зручну апостеріорну оцінку обчислюваної похибки. Обґрунтування та розвиток двобічні методи розв'язання операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах із конусом набули в роботах М.О. Красносельського та його учнів П.П. Забрейко, Г.М. Вайнікко, В.І. Опойцева, Т.А. Хуродзе та ін.

Оскільки до операторного рівняння, що є еквівалентним крайовій задачі для еліптичного рівняння, входить функція Гріна, та її точний вигляд відомий лише для деяких доволі простих областей, то виникає питання розв'язання таких задач у областях складної геометрії. Академіком НАН України В.Л. Рвачовим розроблено метод квазіфункцій Гріна для застосування до лінійних еліптичних рівнянь, який разом із застосуванням конструктивного апарату теорії *R*-функцій дозволяє звести вихідну задачу до еквівалентного лінійного інтегрального рівняння у області, геометрія якої може бути описана за допомогою *R*-функцій.

Отже, побудова двобічних наближень та розвиток методу квазіфункцій Гріна до розв'язання конкретних крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь є актуальною науковою задачею.

Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ ДР 0115U001522), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

Мета та задачі дослідження. Метою досліджень дисертаційної роботи є розробка конструктивних методів знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходження умов, яким мають задовольняти параметри, що входять до постановки задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв’язати такі задачі:

– звести нелінійну еліптичну крайову задачу до операторного рівняння;

– методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах дослідити властивості оператора отриманого рівняння, зокрема, монотонність, антитонність або гетеротонність;

– дослідити можливість побудови конусного відрізку, інваріантного для оператора монотонного типу та сильно інваріантного для оператора антитонного або гетеротонного типу, що містить розв’язок вихідної крайової задачі, та запропонувати безпосередньо процедуру для його побудови;

– дослідити оператор на угнутість (для оператора монотонного типу) або псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу);

– дослідити оператор на u_0-угнутість (для оператора монотонного типу) або u_0-псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу), щоб мати змогу не лише робити висновки про існування єдиного розв’язку, а й накласти умови на параметри, що входять до задач;

– у разі неможливості отримання двобічних наближень розвинути метод квазіфункцій Гріна для його застосування до задач, що розглядаються;

– провести ряд обчислювальних експериментів для задач, що розглядаються, в різних областях.

Об’єктом дослідження є процеси, що описуються крайовими задачами для нелінійних еліптичних рівнянь, які зводяться до операторних рівнянь з оператором монотонного, антитонного або гетеротонного типу.

Предметом дослідження є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь та методи їх чисельного аналізу.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах для знаходження наближених розв’язків, апарат теорії *R*-функцій – для побудови рівнянь меж областей, в яких розглядаються крайові задачі, метод квазіфункцій Гріна – для зведення нелінійної крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння, формули чисельного інтегрування та інтерполяції функцій – для спрощення обчислень.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

– уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких, користуючись методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, доведено існування єдиного додатного розв’язку та побудовано двобічні наближення до нього;

– удосконалено метод побудови конусного відрізку при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, в частині застосування апарату теорії *R*-функцій для побудови лівого кінця конусного відрізку, що дозволило перетворити неминуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний;

– набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна у частині його застосування до розв'язання нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд;

– набув подальшого розвитку метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів у частині застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв'язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

Практичне значення отриманих результатів. Розглянуті методи можуть бути використані для знаходження розв'язків прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Розроблені засоби дослідження впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Вибрані глави математичної фізики», «Рівняння математичної фізики» та при виконанні атестаційних робіт.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [1 – 23]. Усі обчислювальні експерименти виконані автором особисто. Здобувач брав безпосередню участь у дослідженні збіжності методів, що розглядаються, аналізі отриманих результатів, формулюванні висновків та написанні статей.

Роботи [4, 6, 10, 13 – 17, 20 – 23] виконані одноосібно. В інших роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: [1, 9] – дослідження оператора задачі на монотонність та угнутість, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна до розв'язання нелінійної задачі, розробка алгоритму, який дозволяє отримати результат для методу квазіфункцій Гріна в аналітичному вигляді, проведення обчислювального експерименту; [5, 11] – дослідження оператора задачі на монотонність, угнутість у випадку монотонного типу оператора та на антитонність, псевдоугнутість у випадку антитонного типу оператора, проведення обчислювального експерименту; [2, 8, 12] – дослідження оператора задачі на u_0-угнутість, отримання умов, що пов'язують параметри задачі, за яких існує розв'язок та збігаються двобічні наближення, використання вдосконаленого методу побудови інваріантного конусного відрізку, застосовуючи апарат теорії *R*-функції, проведення обчислювального експерименту; [7, 18, 19] – побудова інваріантного конусного відрізку, отримання умов, що пов'язують параметри задачі, за яких існує розв'язок та збігаються двобічні наближення, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна, проведення обчислювального експерименту; [3] – дослідження відповідного гетеротонного оператора на псевдоугнутість, отримання умов, що пов'язують параметри задачі, за яких існує розв'язок та збігаються двобічні наближення, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна, проведення обчислювального експерименту.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: XV Всеукраїнській (X Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2012» (Львів, 2012 р.); XVI, XVII, XVIII, XIX, XX Міжнародних молодіжних форумах «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті» (Харків, 2012 – 2016 рр.); XVI Всеукраїнській (XI Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» (Львів, 2013 р.); I Міжнародній науково-практичній конференції «Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності» (Бухарест, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» «МДОЗМФ-2013» (Харків-Херсон, 2013 р.); Міжнародній молодіжній науковій конференції «XL Гагаринские чтения» (Москва, 2014 р.); VIII, IX Міжнародних науково-технічних конференціях молодих спеціалістів, аспірантів та студентів «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 2014, 2015 рр.); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» – «APAMCS-2015» (Львів, 2015 р.); 17-й Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2016 р.); 5-й Міжнародній науково-технічній конференції «Информационные системы и технологии» (Коблево-Харків, 2016 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертаційної роботи опубліковані в 23 наукових працях: 7 статей, з них 4 статті – у виданнях , які зазначені в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук, 2 статті – у закордонних наукових виданнях, 1 стаття – в інших виданнях, 16 тез доповідей, опублікованих в матеріалах наукових конференцій, в тому числі – 14 міжнародних.

Структура та обсяг роботи. Дисертація містить анотацію, вступ, три розділи, висновки по роботі, 3 додатки (на 49 с.), 123 рисунки (на 21 с.), 46 таблиць (на 23 с.) та список використаних джерел з 146 найменувань (на 13 с.). Повний обсяг дисертації складає 273 сторінки, з них 167 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, які потрібно розв'язати для її досягнення. Розкрито наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про апробацію результатів та публікації.

У **першому розділі** розглянуто загальні відомості про операторні рівняння та основні методи їх розв'язання. Зроблено огляд розвитку двобічних методів розв'язання операторних рівнянь. Наведено основні визначення та теореми теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, які будуть використані у наступних розділах.

Основні результати першого розділу опубліковані в [1 – 7, 9, 12, 13, 15, 19, 22, 23].

У **другому розділі** досліджено можливість побудови двобічних наближень до розв'язків дев'яти крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

$$u > 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ – числові параметри.

Нехай $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ є функцією Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω. У класі неперервних функцій задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s}, \tag{3}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Вважаємо, що простір $C(\overline{\Omega})$ напівупорядкований конусом K невід'ємних функцій. Тоді інтегральне рівняння (3) розглядаємо як операторне рівняння

$$u = Tu,$$

де оператор T визначається наступним чином

$$Tu = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \tag{4}$$

Розглянемо задачу Ліувілля-Гельфанда

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{5}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0 \quad (\lambda = const). \tag{6}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \tag{7}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (5), (6) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \ge 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 1. Ітераційний процес (8), (9) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (7), якщо параметри λ та β задовольняють умови $\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \dfrac{\beta}{\lambda e^{\beta}}$, $\beta < 1$. При цьому маємо $0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta$.

Стосовно задачі, яка зводиться до операторного рівняння $u = T(\lambda, u)$, доводиться наступна теорема, висновки якої можуть бути застосовані й до інших задач вигляду (1), (2).

Теорема 2. Нехай оператор $T(\lambda, u)$ для кожного $\lambda > 0$ є монотонним та угнутим, для кожного $u \in K$ монотонно зростає за λ та задовольняє умову

$$T(t\lambda, u) \le \frac{1}{t} T(\lambda, u), \quad t \in (0,1].$$

Нехай u_1 та u_2 – додатні розв'язки рівняння $u = T(\lambda, u)$, що відповідають двом різним значенням λ_1 та λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$. Тоді $u_1 < u_2$.

Розглянемо крайову задачу для рівняння Лане-Емдена

$$-\Delta u = u^q \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{10}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad q > 0. \tag{11}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, u^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}. \tag{12}$$

Якщо для побудови конусного відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ покласти $u_1 = v_0 = 0$, то лівий кінець відрізку при використанні схеми послідовних наближень $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 1,2,\ldots$, залишається нерухомим, тому що для $f(u) = u^q$ маємо $f(0) = 0$, тобто замість двобічних наближень отримуємо лише наближення зверху. Ми пропонуємо покласти $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon\omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = const > 0$, а функція $\omega(\mathbf{x})$ визначається наступним чином: $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω, $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$. При цьому функція $\omega(\mathbf{x})$ із вказаними властивостями може бути побудована з використанням конструктивного апарату теорії *R*-функцій для області Ω досить довільної геометрії. Ітераційний процес для задачі (10), (11) будуємо за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, v_{n-1}^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\dots, \tag{13}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, w_{n-1}^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\dots, \tag{14}$$

де $v_0 = \varepsilon\omega$, $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 3. Ітераційний процес (13), (14) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0\rangle$ рівняння (12), якщо параметри q, ε, β задовольняють умови $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \omega^2(\mathbf{x}) \le \varepsilon^{2(q-1)} \int_\Omega \omega^{2q}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_\Omega G^2(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}$, $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \beta^{1-q}$, $0 < q < 1$. При цьому маємо

$$\varepsilon\omega = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та двома параметрами

$$-\Delta u = \lambda + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{15}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad p > 1, \quad \lambda > 0 \quad (p, \lambda - const). \tag{16}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + u^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}. \tag{17}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (15), (16) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + v_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\dots, \tag{18}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + w_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\dots, \tag{19}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 4. Ітераційний процес (18), (19) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (17), якщо параметри λ, p, β задовольняють умови $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \dfrac{\beta}{\lambda+\beta^p}$, $\lambda > \max\left\{\beta^p(p-1);\ \dfrac{\beta^p\left(t_* - t_*^p\right)}{1-t_*}\right\}$, де $t_* \in (0,1)$ – корінь рівняння $1+t^p(p-1) = p\,t^{p-1}$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та трьома параметрами

$$-\Delta u = \lambda u^q + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{20}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < q < 1 < p, \quad \lambda > 0 . \tag{21}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(\lambda u^q(\mathbf{s}) + u^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}. \tag{22}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (20), (21) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(\lambda v_{n-1}^q(\mathbf{s}) + v_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(\lambda w_{n-1}^q(\mathbf{s}) + w_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{24}$$

де $v_0 = \varepsilon\omega$, $w_0 = \beta$, $\varepsilon = const > 0$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω, $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 5. Ітераційний процес (23), (24) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (22), якщо параметри λ, q, p, ε, β задовольняють умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \omega^2(\mathbf{x}) \le \varepsilon^{2(q-1)} \int\limits_{\Omega} \left(\lambda\omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q}\omega^p(\mathbf{s})\right)^2 d\mathbf{s} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G^2(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\beta^q + \beta^p},$$

$$\lambda > \max\left\{\beta^{p-q}\frac{1-p}{q-1}, \beta^{p-q}\frac{t_* - t_*^p}{t_*^q - t_*}\right\},$$

де $t_* \in (0,1)$ – корені рівняння $(1-pt^{p-1})(t^q-t)-(qt^{q-1}-1)(t-t^p)=0$. При цьому маємо

$$\varepsilon\omega = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу з експоненціальною нелінійністю та двома параметрами

$$-\Delta u = \lambda\left(e^u + e^{\gamma u}\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{25}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda, \gamma - const). \tag{26}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s} . \tag{27}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (25), (26) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{28}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \ge 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 6. Ітераційний процес (28), (29) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (27), якщо параметри λ, γ, β задовольняють умови

$$e^{\tau\beta} + e^{\gamma\tau\beta} - \tau e^{\beta} - \tau e^{\gamma\beta} > 0 \quad \forall \tau \in (0,1), \quad \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)} .$$

При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу з експоненціальною нелінійністю та трьома параметрами

$$-\Delta u = \lambda\, |\mathbf{x}|^{2\alpha} \left(e^u + e^{\gamma u}\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^2, \tag{30}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda, \alpha, \gamma - const). \tag{31}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \, |\mathbf{s}|^{2\alpha} \left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}. \tag{32}$$

Задача (30), (31) є більш загальним випадком задачі (25), (26) у просторі $\mathbf{R}^2$.
Будуємо ітераційний процес для задачі (30), (31) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} \left(e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{33}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} \left(e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{34}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 7. Ітераційний процес (33), (34) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (32), якщо параметри λ, γ, α, β задовольняють умови $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} |\mathbf{x}|^{2\alpha} \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} \leq \dfrac{\beta}{\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)}$, $\beta \leq 1$, $\gamma \leq 1$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Розглянемо лінійну крайову задачу з двома параметрами

$$-\Delta u = a u + b \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{35}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad b \geq 0, \quad a = const. \tag{36}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a u(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}. \tag{37}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (35), (36) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a v_{n-1}(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{38}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a w_{n-1}(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{39}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 8. Ітераційний процес (38), (39) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (37), якщо параметри a, b, β задовольняють умови $a > 0$, $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \dfrac{\beta}{a\beta + b}$. При цьому маємо $0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta$.

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та одним параметром

$$-\Delta u = \frac{1}{u^p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{40}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad p > 0. \tag{41}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з антитонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x},\mathbf{s})}{u^p(\mathbf{s})}\, d\mathbf{s}. \tag{42}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (40), (41) за схемою

$$w_n(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x},\mathbf{s})}{w_{n-1}^p(\mathbf{s})}\, d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{43}$$

де $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується виконанням наступної теореми.

Теорема 9. Ітераційний процес (43) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (42), якщо параметри p та β задовольняють умови $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \beta^{1+p}$, $0 < p < 1$. При цьому маємо

$$v_0 = w_1 \le w_3 \le \ldots \le w_{2n-1} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_{2n} \le \ldots \le w_2 \le w_0 = \beta.$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та чотирма параметрами

$$-\Delta u = a u^{-q} + b u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{44}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad p,q > 0. \tag{45}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з гетеротонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a u^{-q}(\mathbf{s}) + b u^{p}(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} . \tag{46}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (44), (45) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a w_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b v_{n-1}^{p}(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} , \quad n = 1,2,\ldots, \tag{47}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a v_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b w_{n-1}^{p}(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} , \quad n = 1,2,\ldots, \tag{48}$$

де $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$, $\varepsilon = const > 0$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 10. Ітераційний процес (47), (48) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_1, w_0 \rangle$ рівняння (46), якщо параметри a, b, p, q, ε та β задовольняють умови

$$0 < p < 1,$$

$$0 < q < 1,$$

$$\begin{cases} a\beta^{-q} + b\varepsilon^{p} \geq \varepsilon \left(\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \right)^{-1}, \\ a\varepsilon^{-q} + b\beta^{p} \leq \beta \left(\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \right)^{-1}. \end{cases}$$

При цьому маємо $v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 = \beta$.

Також у цьому розділі розглянуто метод квазіфункцій Гріна, розроблений академіком Рвачовим В.Л. для розв'язання крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь. Метод квазіфункцій Гріна з деякою модифікацією застосовано до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь вигляду (1), (2). Це дозволяє замінити задачу (1), (2) еквівалентним їй нелінійним операторним рівнянням

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} K(\mathbf{x},\mathbf{s}) u(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}, \tag{49}$$

при цьому вигляд $G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ та $K(\mathbf{x},\mathbf{s})$ залежить від вимірності простору, якому належить область Ω.

Нехай $\omega = 0$ є рівняння межі $\partial\Omega$, тобто $\omega(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Позначимо $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$, $\Delta_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}$, $\mathbf{s} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$. Тоді, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, то

$$G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s})\right), \quad \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{2}\ln\left(r^2 + 4\,\omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{s})\right), \quad K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi}\Delta_s\zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}),$$

якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, то

$$G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s})\right), \quad \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \left(r^2 + 4\,\omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{s})\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_s\zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}).$$

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (49) використовуємо метод послідовних наближень, що приводить до послідовності лінійних інтегральних рівнянь

$$u_n(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} K(\mathbf{x},\mathbf{s})\,u_n(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{\Omega} G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s})\ f\left(\mathbf{s}, u_{n-1}(\mathbf{s}), \lambda\right) d\mathbf{s}, \quad n = 2,3,\ldots, \tag{50}$$

де покладено $u_1(\mathbf{x}) = const$.

Кожне з рівнянь (50) може бути розв'язане за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. В цьому випадку ми отримаємо послідовність наближених розв'язків

$$u_{n,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_{n,i}\phi_i(\mathbf{x}), \tag{51}$$

при цьому $u_{1,k}(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$, $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{k}$ – координатна послідовність, $c_{n,i}$ $(i = \overline{1,k}$, $n = 2,3,\ldots)$ – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k} c_{n,i}\left[\int_{\Omega}\phi_i(\mathbf{x})\,\phi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\Omega}\int_{\Omega} K(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\phi_i(\mathbf{s})\,\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{s}d\mathbf{x}\right] = \int_{\Omega}\int_{\Omega} G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s})\ f\left(\mathbf{s}, u_{n-1,k}(\mathbf{s}), \lambda\right)\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{s}d\mathbf{x},$$
$$j = \overline{1,k}, \quad n = 2,3,\ldots.$$

Основні результати другого розділу опубліковані в [1 – 23].

У **третьому розділі** наведено формули для знаходження функцій Гріна першої внутрішньої крайової задачі для оператора Лапласа у крузі, півкрузі, чверті круга, секторі та прямокутнику.

Для обчислення інтегралів, що входять до операторних рівнянь вигляду (4), та спрощення обчислення наближень розглядається використання кубатурної формули Гаусса та кусково-лінійної інтерполяції.

Для кожної із розглянутих задач проведено обчислювальний експеримент із різними значеннями параметрів, що входять до постановки задачі, застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна. Результати обчислень представлено у вигляді таблиць значень наближених розв'язків у точках, а також графіків їх поверхонь та ліній рівня для наступних областей

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$
$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_2 > 0\},$$
$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\},$$
$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^8 + x_2^8 < 1\},$$
$$\Omega_5 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\},$$
$$\Omega_6 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ \sqrt{3}x_1 - x_2 > 0,\ x_2 > 0\}.$$

Розглянемо результати обчислень для задачі (5), (6) в областях Ω_2 та Ω_4.

Для області Ω_2 та значень параметрів $\lambda = 3{,}75387$, $\beta = 0{,}99999$ на рис. 1 наведено поверхню наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$, отриманого за допомогою методу двобічних наближень, а на рис. 2 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$, де $\tilde{u}_n(\mathbf{x}) = \dfrac{v_n(\mathbf{x}) + w_n(\mathbf{x})}{2}$. В таблиці 1 наведено значення для наближень $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках з полярними координатами (ρ_i, φ_j), де $\rho_i = 0{,}2i$, $\varphi_j = \dfrac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

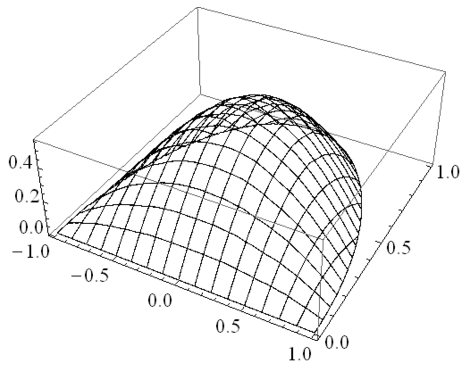

Рисунок 1 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$

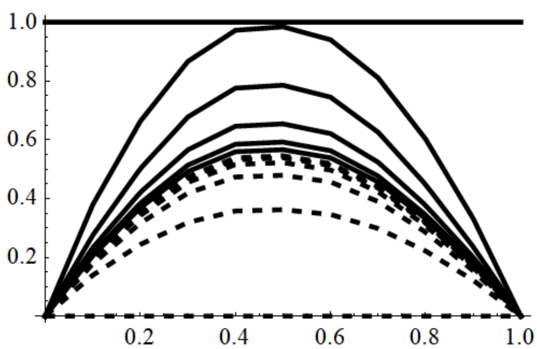

Рисунок 2 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

Таблиця 1 – Значення $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ				
		$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,2	w_{14}	0,125216	0,227626	0,302400	0,347689	0,362880
	v_{14}	0,125215	0,227624	0,302398	0,347686	0,362877
0,4	w_{14}	0,210584	0,363158	0,465387	0,524092	0,543225
	v_{14}	0,210583	0,363156	0,465383	0,524087	0,543220
0,6	w_{14}	0,230799	0,373355	0,460847	0,508909	0,524057
	v_{14}	0,230798	0,373352	0,460843	0,508905	0,524052
0,8	w_{14}	0,165423	0,247047	0,293656	0,318549	0,326172
	v_{14}	0,165422	0,247046	0,293654	0,318546	0,326170

Застосовуючи метод квазіфункцій Гріна для тих же самих значень параметрів, знаходимо наближені розв'язки рівнянь (50) у вигляді (51), при цьому $u_n(\mathbf{x}) = u_{n,6}(\mathbf{x})$, а в якості координатної послідовності $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{6}$ обрали поліноми Лежандра.

В таблиці 2 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 10, 13$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j), де $\rho_i = 0{,}2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1{,}4}$, $j = \overline{1{,}5}$ (значення в іншій чверті симетричні), в таблиці 3 наведено значення коефіцієнтів $c_{13,i}$ наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$, а на рис. 3 та 4 наведено відповідно поверхня та лінії рівня.

Таблиця 2 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 10, 13$ в точках області Ω_2

ρ	φ					n
	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0,2	0,125805	0,228912	0,304118	0,349458	0,364566	5
	0,126566	0,230379	0,306159	0,351876	0,367115	10
	0,126573	0,230394	0,306179	0,351899	0,367139	13
0,4	0,208259	0,362025	0,463751	0,520601	0,538775	5
	0,209468	0,364393	0,467086	0,524577	0,542980	10
	0,209480	0,364416	0,467117	0,524614	0,543018	13
0,6	0,223912	0,371268	0,458325	0,502867	0,516460	5
	0,225045	0,373540	0,461573	0,506777	0,520608	10
	0,225056	0,373561	0,461603	0,506812	0,520645	13
0,8	0,156986	0,247800	0,294904	0,316951	0,323461	5
	0,157569	0,249023	0,296701	0,319148	0,325806	10
	0,157575	0,249034	0,296718	0,319169	0,325828	13

Таблиця 3 – Значення коефіцієнтів $c_{13,i}$ для розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$ в області Ω_2

	i					
	1	2	3	4	5	6
$c_{13,i}$	1,479438	–0,325348	0,018635	–0,000134	0,000085	–0,078694

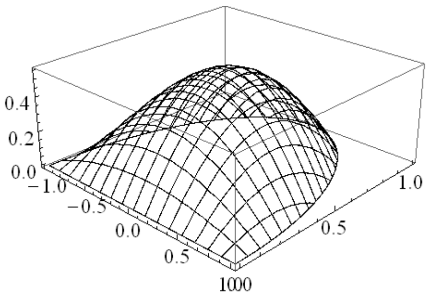

Рисунок 3 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$

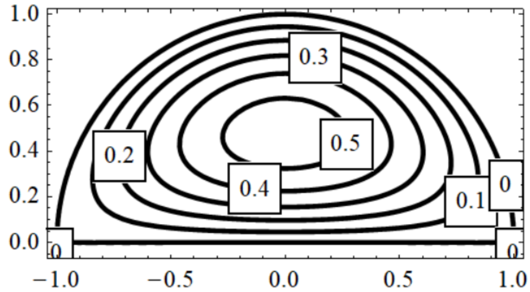

Рисунок 4 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає $\|u_{13}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{14}(\mathbf{x})\| \approx 0{,}57 \cdot 10^{-2}$.

Для області Ω_4 побудувати двобічні наближення не вдається, оскільки функція Гріна для цієї області невідома. Тому застосовуємо лише метод квазіфункцій Гріна. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1{,}24704$, $\beta = 0{,}99999$. На рис. 5 та 6 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$. В таблиці 4 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 10, 11$ в точках області Ω_4 з полярними координатами (ρ_i, φ_j), де $\rho_i = 0{,}2i$, $\varphi_j = \dfrac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$ (значення в інших чвертях симетричні). Значення коефіцієнтів $c_{11,i}$ наведено в таблиці 5.

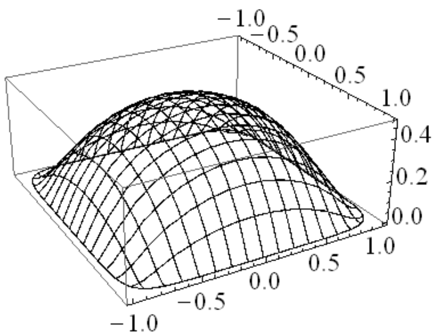

Рисунок 5 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$

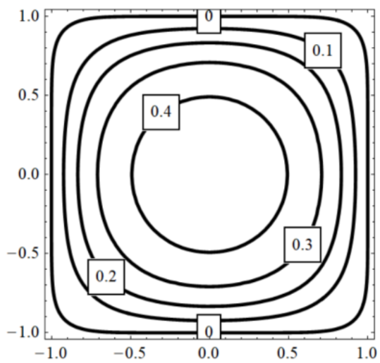

Рисунок 6 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$

Таблиця 4 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 10, 11$ в точках області Ω_4

ρ	φ					n
	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0,2	0,462094	0,462090	0,462085	0,462081	0,462079	5
	0,464293	0,464288	0,464283	0,464278	0,464277	10
	0,464301	0,464296	0,464291	0,464287	0,464285	11
0,4	0,424813	0,424931	0,424916	0,424774	0,424678	5
	0,426820	0,426937	0,426921	0,426776	0,426679	10
	0,426827	0,426944	0,426929	0,426784	0,426687	11
0,6	0,359092	0,361943	0,361915	0,359016	0,356992	5
	0,360762	0,363624	0,363592	0,360676	0,358641	10
	0,360769	0,363631	0,363598	0,360683	0,358647	11
0,8	0,245556	0,267405	0,267359	0,245443	0,230097	5
	0,246659	0,268602	0,268550	0,246530	0,231113	10
	0,246664	0,268607	0,268554	0,246535	0,231117	11

Таблиця 5 – Значення коефіцієнтів $c_{11,i}$ для розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$ в області Ω_4

	i					
	1	2	3	4	5	6
$c_{11,i}$	0,269536	–0,000053	–0,207273	0	0	–0,207121

Для похибки ітераційних процесів 10^{-5}, заданої кількості координатних функцій, вузлів для чисельного інтегрування та інтерполяції, областей, що розглядаються, та значень параметрів маємо від 3 до 18 ітерацій, при цьому для кожної з задач більшу кількість ітерацій зазвичай вимагали обчислення в області Ω_3. Різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, за нормою простору неперервних функцій складає від $0{,}43 \cdot 10^{-3}$ до $0{,}29 \cdot 10^{-1}$, що свідчить про адекватність отриманих розв'язків.

Основні результати третього розділу опубліковані в [1 – 23].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено конструктивні методи знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знайдено умови, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

1. У роботі виконано аналіз наближених методів розв'язання операторних рівнянь, серед яких найбільший інтерес представляють двобічні обчислювальні методи, що використовують теорію операторних рівнянь у напівупорядкованих

просторах та дозволяють знайти наближений розв’язок із заданою точністю. Встановлено, що у випадку розгляду крайових задач в областях складної геометрії важливу роль відіграє подальший розвиток та застосування методу квазіфункцій Гріна, використовуючи конструктивний апарат теорії *R*-функцій.

2. Уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором. Для кожної з розглянутих задач досліджено властивості оператора та можливість побудови конусного відрізку, що гарантують існування двобічних наближень, та отримано умови, які пов’язують параметри, що входять до цих задач, і за яких існує єдиний додатний розв’язок. При цьому зазначено, що побудова конусного відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ дає апріорну оцінку шуканого розв’язку, оскільки маємо $v_0 \le u^* \le w_0$, тому немає необхідності порівнювати його з розв’язками, отриманими іншими методами. Отримані двобічні наближення до розв’язку задачі дають зручну апостеріорну оцінку похибки.

3. Для крайових задач з нелінійними еліптичними рівняннями, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, удосконалено метод побудови лівого кінця конусного відрізку, використовуючи апарат теорії *R*-функцій. Це дозволило перетворити неминуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний.

4. Для крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів набув подальшого розвитку метод їх дослідження шляхом застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв’язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

5. При розв’язанні нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд, набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна, який дозволяє перейти від вихідної задачі до еквівалентного їй нелінійного операторного рівняння. При цьому для знаходження наближеного розв’язку цього рівняння використовувався метод послідовних наближень та метод Бубнова-Гальоркіна.

6. Для кожної з розглянутих задач проведено ряд обчислювальних експериментів. Водночас зазначено, що алгоритм вимагає небагато обчислювальних ресурсів. Результати подано у вигляді таблиць значень наближених розв’язків, графіків їх поверхонь та ліній рівня, а у разі використання методу квазіфункцій Гріна – в аналітичному вигляді.

7. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки.

8. Отримані результати є теоретичною основою для розв’язання прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kolosova S.V., Lukhanin V.S, Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2018. Vol. 99. No. 3. P. 78–91. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar].

2. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2016. Vol. 5. No. 4. P. 11–19. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus, BazTech].

3. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв’язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar].

4. Луханін В.С. Додатні розв’язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 4 (71). С. 24–27. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus, OAJI, SIS].

5. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus].

6. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв’язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 2 (69). С. 16–18. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus, OAJI, SIS].

7. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35–42. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus].

8. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of one nonlinear elliptic problem // Информационные системы и технологии: материалы 5-й Международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево, Харьков, 2016. С. 109–110.

9. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв’язки задачі Ліувілля-Гельфанда // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали 17-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. Київ, 2016. Т. 1. С. 147–149.

10. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з нелінійністю // Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного молодіжного форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харків, 2016. Т. 7. С. 102–103.

11. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 362–365.

12. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 185–188.

13. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для эллиптической краевой задачи с экспоненциальной нелинейностью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 20−22 мая 2015 г. Пенза, 2015. С. 16–20.

14. Луханін В.С. Про метод побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометричної структури // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XIX Международного молодежного форума, 20–22 апреля 2015 г. Харьков, 2015. Т. 7. С. 70–71.

15. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для одной линейной задачи // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 26−30 мая 2014 г. Пенза, 2014. С. 46–49.

16. Луханін В.С. Про деякі методи побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного молодежного форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. Т. 7. С. 114–115.

17. Луханин В.С. О построении последовательных приближений к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // XL Гагаринские чтения: научные труды Международной молодёжной научной конференции, 7–11 апреля 2014 г. Москва, 2014. Т. 5. С. 139–141.

18. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI

Международного симпозиума, 10–15 июня 2013 г. Харьков, Херсон, 2013. С. 205–208.

19. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції, 17 травня 2013 р. Бухарест, 2013. Ч. I. С. 16–24.

20. Луханін В.С. Про застосування методу квазіфункцій Гріна до одного нелінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVII Международного молодежного форума, 22–24 апреля 2013 г. Харьков, 2013. Т. 7. С. 140–141.

21. Луханін В.С. Застосування методу функцій Гріна та методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // XVI Всеукраїнська (XI Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 11–12 квітня 2013 р. Львів, 2013. С. 94–95.

22. Луханін В.С. Наближені методи розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVI Международного молодежного форума, 17–19 апреля 2012 г. Харьков, 2012. Т. 10. С. 159–160.

23. Луханін В.С. Про деякі підходи до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // XV Всеукраїнська (X Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 5–6 квітня 2012 р. Львів, 2012. С. 232–234.

АНОТАЦІЯ

Луханін В.С. Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертація присвячена розробці конструктивних методів знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходженню умов, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалися існування та єдиність розв'язку, а також збіжність відповідного ітераційного процесу.

У роботі вперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких доведено існування єдиного додатного розв'язку та побудовано двобічні наближення до нього.

Удосконалено метод побудови конусного відрізку при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких перетворюється на нуль на лівому кінці конусного відрізку.

Набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна, а також метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів.

Розглянуті методи можуть бути використані для відшукання розв’язків прикладних задач, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

Ключові слова: функція Гріна, квазіфункція Гріна, двобічні наближення, інваріантний конусний відрізок, сильноінваріантний конусний відрізок, угнутість, u_0-угнутість, псевдоугнутість, u_0-псевдоугнутість, монотонний оператор, антитонний оператор, гетеротонний оператор.

АННОТАЦИЯ

Луханин В.С. Конструктивные методы решения одного класса краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2019.

Диссертация посвящена разработке конструктивных методов нахождения положительных решений одного класса краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений и нахождению условий, которым должны удовлетворять параметры задачи, чтобы гарантировались существование и единственность решения, а также сходимость соответствующего итерационного процесса.

В работе впервые выделен класс краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений, которые можно представить в виде нелинейных операторных уравнений с монотонным, антитонным или гетеротонным оператором и для которых доказано существование единственного положительного решения и построены двусторонние приближения к нему.

Усовершенствован метод построения конусного отрезка при исследовании краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений, правая часть которых обращается в ноль на левом конце конусного отрезка.

Получил дальнейшее развитие метод квазифункций Грина, а также метод исследования нелинейных краевых задач с двумя и большим количеством параметров.

Рассмотренные методы могут быть использованы для нахождения решений прикладных задач, математическими моделями которых являются краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений.

Ключевые слова: функция Грина, квазифункция Грина, двусторонние приближения, инвариантный конусный отрезок, сильноинвариантный конусный отрезок, вогнутость, u_0-вогнутость, псевдовогнутость, u_0-псевдовогнутость, монотонный оператор, антитонный оператор, гетеротонный оператор.

ABSTRACT

Lukhanin V.S. Constructive methods of solving one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations. – The manuscript.

The thesis for the candidate of physical and mathematical sciences degree on a specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

Modern science is highly interested in processes that take place in nonlinear environments. Mathematical models of these processes typically are represented by nonlinear boundary value problems of mathematical physics, often with parameters.

The development and application of two-sided methods and the Green's quasifunction method to the solution of specific boundary value problems for nonlinear elliptic equations is an actual scientific task.

The thesis is devoted to the development of constructive methods of searching positive solutions of one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations and finding the conditions that the parameters of the problem must satisfy in order to guarantee the existence and uniqueness of the solution as well as the convergence of the corresponding iterative process.

To achieve this goal the following tasks need to be solved: reduce the nonlinear elliptic boundary value problem to the operator equation; investigate the properties of the operator of the obtained equation by means of the nonlinear analysis methods in partially ordered spaces, in particular, monotonicity, antitonicity or heterotonicity; investigate the possibility of constructing an invariant conical interval for a monotone operator and a strongly invariant one for the antitone or the heterotone operator containing the solution of the initial boundary value problem and provide the procedure for its construction explicitly; investigate the operator on the concavity (for the monotone operator) or pseudoconcavity (for the antitone or the heterotone operator); investigate the operator on the u_0-concavity (for the monotone operator) or u_0-pseudoconcavity (for the antitone or the heterotone operator) in order to be able not only draw to conclusions about the existence of a single solution, but also to impose conditions on the parameters included in the problems; develop the Green's quasifunction method for its application to the problems under consideration in case two-sided approximations can’t be obtained; conduct a series of computational experiments for each of the problems in various domains.

The research methods are based on the use of the methods of the operator equations theory in partially ordered spaces to find approximate solutions, the mathematical apparatus of the R functions theory to construct normalized equations of domains

boundary in which boundary value problems are considered, the Green's quasifunction method to reduce a nonlinear boundary value problem to a nonlinear integral equation, the formulas of the numerical integration and the function interpolation.

The research carried out in the dissertation allowed us to obtain the following new scientific results: for the first time one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations has been highlighted for which these problems can be represented as nonlinear operator equations with a monotone, antitone or heterotone operator, the existence of a unique positive solution has been proved using the methods of the operator equations theory in partially ordered spaces and two-sided approximations has been constructed that converge to this solution; the method of constructing a conical interval has been improved in the case of investigation of boundary value problems for nonlinear elliptic equations when the right side of the equation turns into zero on the left end of a conical interval in terms of the application of the R functions theory apparatus to the construction of the left end of a conical interval, which has made it possible to transform the inevitably one-sided process of successive approximations into the two-sided one; the Green's quasifunction method has been further developed in terms of its application to the solution of nonlinear boundary value problems in domains for which the Green's function analytical expression is unknown or it has a complex form for computations; the method of investigation of nonlinear boundary value problems with two and more parameters has been further developed in terms of the application of nonlinear analysis methods in partially ordered spaces to find the conditions which these parameters must satisfy in order to have a single positive solution to exist and two-sided successive approximations to converge to it.

The discussed methods can be used to find solutions to applied problems with mathematical models described by boundary value problems for nonlinear elliptic equations.

Key words: Green’s function, Green’s quasifunction, two-sided approximations, invariant conical interval, strongly invariant conical interval, concavity, u_0-concavity, pseudoconcavity, u_0-pseudoconcavity, monotone operator, antitone operator, heterotone operator.

Підписано до друку 16.04.2019 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 0,9. Наклад 100 пр. Зам. № б/н.
Надруковано СПД ФО Степанов В. В., м. Харків, вул. Ак. Павлова, 311
Свідоцтво про державну реєстрацію В00 № 941249 від 28.01.2003 р.