

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Луханіна Володимира Сергійовича
«Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач
для нелінійних еліптичних рівнянь»,
що представлена на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю
01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

1. Актуальність теми

Багато змістовних задач із різних галузей науки та техніки зводяться до крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для можливості відшукування розв'язків таких задач відповідне рівняння вважалось лінійним. На сьогодні, у зв'язку з появою потужних ЕОМ, спостерігається велика зацікавленість до процесів, що мають місце у нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів досить часто є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами. Можливість отримати точний розв'язок таких задач є досить сумнівною, а тому для їх розв'язання застосовують наближені методи, такі як, наприклад, метод скінчених різниць, метод скінчених елементів тощо, недоліком яких є необхідність генерувати нову сітку при переході до нової області, замінювати складні ділянки межі геометрично простими, розв'язувати системи рівнянь з великою кількістю рівнянь тощо. При цьому виникає питання: наскільки побудований наближений процес дає розв'язок, який добре погоджується з точним розв'язком задачі. Такого питання не виникає при застосуванні методів побудови двобічних наближень, тому що вони дають можливість на кожному кроці ітераційного процесу замикаати шуканий розв'язок у «виделку» і таким чином отримати зручну апостеріорну оцінку похибки обчислень. Теоретичне обґрунтування та розвиток двобічні методи розв'язання операторних рівнянь набули у роботах М.О. Красносельского та його учнів П.П. Забрєйко, В.І. Опойцева та інших.

Тому що до операторного рівняння, яке є еквівалентним крайовій задачі, що розглядається, входить функція Гріна, яка є відомою лише для деяких доволі простих областей, то виникає проблема розв'язання таких задач у областях складної геометрії, для яких ця функція невідома або є занадто складною для обчислень. Академіком НАН України В.Л. Рвачовим розроблено метод квазіфункцій Гріна для його застосування до крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь.

Отже, актуальною науковою задачею є дослідження можливості побудови двобічних ітераційних методів для розв'язання конкретних крайових задач для



нелінійних еліптичних рівнянь та удосконалення методу квазіфункцій Гріна з метою можливості його застосування до цих задач.

Дисертаційна робота виконана у Харківському національному університеті радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ ДР 0115U001522), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

2. Вірогідність та наукова новизна отриманих результатів

Наукова новизна результатів, отриманих автором дисертаційної роботи, полягає в наступному:

– уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких, користуючись методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, доведено існування єдиного додатного розв'язку та побудовано двобічні наближення до нього;

– удосконалено метод побудови конусного відрізка при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, в частині застосування апарату теорії R -функцій для побудови лівого кінця конусного відрізка, що дозволило перетворити неминуче одnobічний процес послідовних наближень у двобічний;

– набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна у частині його застосування до розв'язання нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд;

– набув подальшого розвитку метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів у частині застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв'язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується строгістю математичних постановок задач із використанням основних результатів теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах та доведеними в роботі теоремами. Всі результати підтверджені відповідними обчислювальними експериментами для методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, результати яких порівняно між собою.

3. Практична цінність результатів роботи

В дисертаційній роботі розроблено двобічні методи розв'язання крайових

задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які дозволяють отримати наближений розв'язок із наперед заданою точністю. Результати досліджень впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Рівняння математичної фізики», «Вибрані глави математичної фізики», при виконанні атестаційних робіт.

4. Повнота викладення основних результатів

Результати дисертаційної роботи достатньо повно відображені в публікаціях здобувача. За темою дисертаційної роботи опубліковано 23 наукові праці, в тому числі 4 статті у виданнях, які зазначені в переліку вітчизняних фахових видань з фізико-математичних наук, 2 статті у закордонних наукових виданнях, 1 стаття в інших виданнях, 16 тез доповідей, опублікованих в матеріалах наукових конференцій, 14 з яких є міжнародними. Публікації розкривають основний зміст дисертації та відповідають її основним положенням.

5. Оцінка змісту дисертації та автореферату

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У першому розділі розглянуто основні поняття, що пов'язані з операторними рівняннями та методами їх розв'язання. Окремо загострено увагу на двобічних методах, їх історії розвинення та переваги, які вони мають в порівнянні з іншими методами. Далі розглянуто основні поняття та результати теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах із конусом, отримані та розвинені в роботах М.О. Красносельського та його учнів.

Другий розділ присвячений дослідженню ряду крайових задач на можливість побудови двобічних наближень. Для цього вихідна крайова задача зведена до відповідного інтегрального рівняння, яке розглянуте як операторне рівняння у просторі додатних неперервних функцій з конусом. Далі досліджені властивості оператора цього рівняння, до яких відносяться наступні: монотонність, антитонність або гетеротонність; існування інваріантного або сильно інваріантного конусного відрізка та спосіб його побудови; угнутість або u_0 -угнутість; псевдоугнутість або u_0 -псевдоугнутість. В результаті дослідження визначено умови, яким мають задовольняти параметри, що входять до постановки задачі, для того, щоб згадані властивості виконувалися, та будується двобічний ітераційний процес. В результаті сформульована та доведена теорема про існування, єдиність додатного розв'язку та збіжність двобічних наближень до нього. Також в розділі розглянуто удосконалення методу квазіфункцій Гріна, який застосовано до крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь. Цей метод полягає у заміні вихідної крайової задачі

еквівалентним нелінійним інтегральним рівнянням другого роду, до яких входять допоміжні функції. Далі побудовано схему розв'язання цього інтегрального рівняння, до якого спочатку застосовано метод послідовних наближень для переходу до послідовності лінійних інтегральних рівнянь. Кожне з лінійних рівнянь розв'язане методом Бубнова-Гальоркіна.

В третьому розділі розроблено чисельний алгоритм знаходження наближеного розв'язку, наведено функції Гріна для різних областей та рівняння їх меж, при цьому використано конструктивний апарат теорії R -функцій. Для кожної з розглянутих задач проведено обчислювальний експеримент, наведено графіки наближених розв'язків та таблиці їх значень на певних ітераціях. Результати, отримані за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, були порівняні між собою та зроблено відповідні висновки.

За структурою та оформленням дисертація та автореферат відповідають установленим вимогам. Автореферат повністю висвітлює основні положення та результати дисертації.

6. Зауваження до змісту дисертаційної роботи

1. В роботі не було чітко сформульовано, що розуміється під конструктивним дослідженням крайової задачі.
2. Для розглянутих конкретних задач варто було б приділити більше уваги фізичній інтерпретації.
3. Варто було б використати декілька різних методів наближеного розв'язання нелінійного інтегрального рівняння, до якого зводиться вихідна крайова задача при застосуванні методу квазіфункцій Гріна, для порівняння точності та витраченого часу.
4. В роботі не проведено порівняння отриманих наближених розв'язків для розглянутих задач із відомими розв'язками.
5. Цікаво було б розглянути застосування методу двобічних наближень до крайових задач у тривимірному просторі.

Зроблені зауваження не впливають на загальне позитивне враження від дисертаційної роботи, її якість в цілому, достовірність та новизну результатів, а лише мають характер побажань щодо подальшого розвитку роботи.

7. Загальний висновок

Вважаю, що дисертаційна робота «Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь» є завершеною актуальною науковою працею, в якій одержано нові науково обґрунтовані результати, що

представляють вагомий внесок в удосконалення методів розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь.

Дисертація відповідає паспорту спеціальності та всім вимогам до кандидатських дисертацій згідно з п.п. 9, 11, 12 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, затвердженими Постановами Кабінету Міністрів України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р. та №567 від 27.07.2016 р.), а її автор, Луханін Володимир Сергійович, заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,
в.о. зав. каф. Технологій і дизайну
Української інженерно-педагогічної академії



доктор фізико-математичних наук, доцент

Литвин О.О.