

ВІДГУК
ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертацію Луханіна Володимира Сергійовича

*“Конструктивні методи розв’язання одного класу крайових задач для
нелінійних еліптичних рівнянь”*,

що представлена на здобуття наукового ступеня

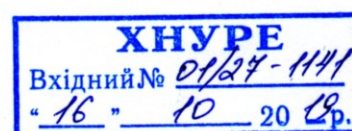
кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Предметом дослідження дисертаційної роботи є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь та методи їх чисельного аналізу.

Існує велика кількість наближених методів розв’язання крайових задач. Однією з основних властивостей, на яку звертають увагу дослідники в першу чергу – це оцінка близькості точного та наближеного розв’язку. У зв’язку з цим особливе місце серед наближених методів посідають двобічні методи, які дають зручну апостеріорну оцінку точності розв’язку. Оскільки в загальному випадку розглядаються крайові задачі з параметрами, то постає задача знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб відповідний двобічний ітераційний процес збігався. Теоретичну основу для дослідження застосування методу двобічних наближень у напівупорядкованих просторах розробив М.О. Красносельський та його учні.

Разом із цим, при переході від крайової задачі до відповідного операторного рівняння не завжди вдається знайти точну функцію Гріна, що до нього входить, або ця функція є настільки складною, що нею практично немає можливості користуватися. У такому випадку пропонується застосувати метод квазіфункцій Гріна, розроблений В.Л. Рвачовим. Але, оскільки цей метод розроблено для застосування до лінійних еліптичних рівнянь, то з’являється необхідність його удосконалення для застосування до нелінійних еліптичних



рівнянь. При цьому важливу роль відіграє конструктивний апарат теорії R -функцій, який дозволяє отримати рівняння меж практично будь якої області.

В зв'язку з зазначеним ясно, що розробка двобічних методів та удосконалення методу квазіфункцій Гріна є важливою задачею. В контексті наведеного вважаю, що тема дисертаційної роботи Луханіна В.С. є актуальною.

Основні положення та висновки дисертаційної роботи в достатній мірі науково обгрунтовані. Методи досліджень базуються на використанні основних положень теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах та методу квазіфункцій Гріна.

Достовірність отриманих автором результатів забезпечується строгими доведеннями ключових результатів, коректністю математичних постановок основних задач дисертаційної роботи: зведення нелінійної еліптичної крайової задачі до операторного рівняння, дослідження властивостей оператора отриманого рівняння, дослідження можливості побудови конусного відрізка, що містить розв'язок вихідної крайової задачі, удосконалення методу квазіфункцій Гріна для його застосування до задач, що розглядаються.

Результати даного дослідження, які визначають **наукову новизну роботи** та виносяться на захист, наступні:

1. Уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких, користуючись методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, доведено існування єдиного додатного розв'язку та побудовано двобічні наближення до нього.
2. Удосконалено метод побудови конусного відрізка при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, в частині застосування апарату теорії R -функцій для побудови лівого кінця конусного відрізка, що

дозволило перетворити неминуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний.

3. Набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна у частині його застосування до розв'язання нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд.

4. Набув подальшого розвитку метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів у частині застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв'язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

Практична вагомість отриманих результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що розглянуті методи можуть бути використані для знаходження розв'язків прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

Розроблені засоби впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в курсах «Вибрані глави математичної фізики», «Рівняння математичної фізики» та при виконанні атестаційних робіт.

За результатами наукових досліджень дисертаційної роботи опубліковано 23 друкованих праці, серед яких 4 статті у вітчизняних фахових виданнях України з фізико-математичних наук, 2 статті у закордонних наукових виданнях, 1 стаття в інших виданнях. Основні результати роботи доповідалися та отримали схвалення на міжнародних наукових конференціях.

Наведений перелік публікацій та їх зміст відповідають темі дисертації, в повному обсязі відображають її основні положення, наукові результати та висновки, свідчать про їх новизну. В авторефераті достатньо повно відображені основні положення та висновки дисертації. У дисертації та авторефераті визначено особистий внесок дисертанта для тих друкованих праць, які опубліковані у співавторстві.

Дисертація є завершеною науковою роботою, виконаною на актуальну тему. Дисертація написана достатньо лаконічно, чіткою мовою, з логічним способом викладення матеріалу, що в достатній мірі розкриває загальний науково-технічний рівень автора. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (146 найменувань) та додатків. Повний обсяг роботи складає 273 сторінки, основний текст викладено на 167 сторінках. Метою дисертаційної роботи є розробка конструктивних методів для знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходження умов збіжності двобічного ітераційного процесу.

У вступі обґрунтовано актуальність тематики, що досліджувалася, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано об'єкт, предмет та методи досліджень, зазначено наукову новизну та практичне значення, наведено відомості про публікації за темою дисертації та про апробацію результатів досліджень, а також вказано особистий внесок здобувача у наукових працях, написаних у співавторстві.

Перший розділ присвячений огляду літератури та методів розв'язання операторних рівнянь. Серед них автором виділено двобічні методи та зроблено огляд їх розвитку. Наприкінці розділу наведено основні поняття теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах та основні теореми про існування та єдиність додатного розв'язку, а також про збіжність послідовних наближень до нього. Далі поставлено задачі дослідження дисертаційної роботи.

У *другому розділі* розглянуто ряд крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами, які відносяться до різних типів операторів. Кожна з розглянутих задач зводиться до відповідного нелінійного операторного рівняння та розглядається в просторі неперервних функцій з конусом. Для кожного з таких операторних рівнянь визначено наступні властивості: монотонність, антитонність або гетеротонність; існування інваріантного або сильноінваріантного конусного відрізка та спосіб його побудови; угнутість або u_0 -угнутість; псевдоугнутість, u_0 -псевдоугнутість. В результаті досліджень

встановлено умови, яким мають задовольняти параметри, що входять до постановок задач, щоб вказані вище властивості виконувалися. Далі побудовані відповідні двобічні ітераційні процеси та доведені теореми про існування та єдиність розв'язку, а також збіжність двобічного процесу. В кінці розділу розглянуто удосконалення методу квазіфункцій Гріна для його застосування до крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, який можна використовувати, коли функція Гріна, що входить до операторного рівняння, яке є еквівалентним вихідній крайовій задачі, невідома або має складний вигляд. При цьому застосовується конструктивний апарат теорії R -функцій.

У *третьому розділі* розроблено чисельний алгоритм знаходження наближених розв'язків для кожної із розглянутих задач у різних областях, застосовуючи методи двобічних наближень та квазіфункцій Гріна. Для кожної області розглянуто відповідні формули для знаходження функції Гріна першої внутрішньої крайової задачі для оператора Лапласа, де це можливо, та побудовано рівняння її межі. Для кожної задачі проведено обчислювальний експеримент, та його результати представлено у вигляді таблиць значень наближених розв'язків, графіків їх поверхонь та ліній рівня.

Висновки достатньо повно відображають зміст отриманих результатів дисертаційної роботи.

У *додатку А* наведено акт про використання результатів дисертаційної роботи у навчальному процесі Харківського національного університету радіоелектроніки. У *додатку Б* наведено результати додаткових обчислювальних експериментів у вигляді таблиць значень наближених розв'язків, графіків їх поверхонь та ліній рівня. У *додатку В* наведено список публікацій здобувача.

Зауваження щодо змісту дисертації.

1. Метод квазіфункцій Гріна ставить у відповідність нелінійній крайовій задачі еквівалентне нелінійне інтегральне рівняння, до розв'язання якого автор застосовує метод послідовних наближень з метою звести його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь з пропозицією розв'язувати останні методом

Бубнова-Гальоркіна. Бажано було б для розв'язання цього нелінійного інтегрального рівняння застосувати ще інший підхід, наприклад, метод заміни інтеграла кінцевою сумою, щоб зробити висновок про достовірність отриманого результату.

2. Більше уваги варто було б приділити наведенню основних теоретичних відомостей про конструктивний апарат теорії R -функцій та його застосування.

3. Варто було б дослідити залежність точності наближеного розв'язку та витраченого часу, потрібного для обчислень, від кількості ітерацій.

4. На графіках для двовимірних та тривимірних областей у декартовій системі координат не позначені вісі координат.

5. У якості побажання щодо подальшого розвитку роботи для можливості побудови двобічних наближень для задач у областях складної геометрії доцільно було б розглянути застосування методів наближеної побудови функції Гріна (а можливо й самому зайнятись розробкою таких методів).

ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК

Не зважаючи на наведені зауваження вважаю, що дисертація Луханіна Володимира Сергійовича *“Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь”* є логічним, самостійним та завершеним науковим дослідженням на актуальну тему. Дисертація виконана на високому професійному рівні. Вона містить нові науково обґрунтовані результати в галузі розв'язання прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

Основні положення і результати роботи знайшли своє відображення у відкритому друці, пройшли апробацію на міжнародних науково-практичних конференціях. Основний зміст роботи достатньо повно відображено в опублікованих працях. Автореферат містить основні наукові положення дисертації та відповідає всім вимогам МОН України.

Наведене дає підстави зробити висновок, що дисертація відповідає паспорту спеціальності та всім вимогам до кандидатських дисертацій згідно з п.п. 9, 11, 12 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, затвердженими Постановами Кабінету Міністрів України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р. та №567 від 27.07.2016 р.), а її автор – Луханін В.С. заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного моделювання
та штучного інтелекту Національного аерокосмічного
університету імені М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»



С.В. Яковлев

