

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

**Сидорова Максима Вікторовича**

*«Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики»,*

яка подана на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

### **1. Актуальність теми дослідження.**

Процеси у нелінійних середовищах, які описуються нелінійними рівняннями математичної фізики для крайових та початково-крайових задач, переважно доводиться аналізувати чисельно. Існуючі аналітичні підходи стосуються автотомельних розв'язків та не охоплюють ряд важливих практичних задач, які зазвичай для нелінійних рівнянь досліджуються чисельно, зокрема, ітераційними методами двобічних наближень. А використання конструктивних методів теорії  $R$ -функцій дозволяє дослідити досить складні нелінійні процеси. Отже, розробка методів двобічних наближень чисельного аналізу різних класів задач є актуальною науковою проблемою.

### **2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Робота відповідає плану наукових досліджень кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки та завданням відповідної держбюджетної теми «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (ДРН № 0115U001522).

### **3. Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень, висновків і рекомендацій.**

Отримані в роботі теоретичні результати та висновки ґрунтуються на досвіді використання математичного апарату, порівняльному аналізі тестових чисельних експериментів з відомими з літератури результатами, які не суперечать один одному та відомим науковим фактам, а навпаки, логічно доповнюють та розвивають їх.

**4. Нові наукові результати, отримані у дисертаційній роботі.** В дисертації отримано наступні нові наукові результати:



– виділено класи напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь та напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких може бути представлена у вигляді нелінійного операторного рівняння з гетеротонним оператором, на основі чого були розроблені двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв’язків цих задач;

– при розв’язанні першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння було розвинуто метод двобічних наближень, який спирається на застосування функції Гріна до рівнянь вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x,u), \quad x \in (a, b);$$

– розвинуто метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, який спирається на застосування функції Гріна до рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x},u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

– для невіроджуваного еліптичного оператора  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$  вперше введено поняття квазіфункції Гріна – Рвачова першої крайової задачі, що дозволило отримати інтегральне рівняння, яке еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, та систему інтегральних рівнянь, яка еквівалентна першій крайовій задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь для областей, геометрія яких може бути аналітично описана через апарат теорії  $R$ -функцій;

– для напівлінійного еліптичного рівняння  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x},u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , вперше розроблено метод двобічних наближень, який спирається на застосування квазіфункції Гріна – Рвачова для розв’язання першої крайової задачі;

– для першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вперше розроблено методи двобічних наближень її розв’язку, які спираються на застосування функції Гріна чи квазіфункції Гріна – Рвачова;

– вперше розроблено напівдискретний метод розв’язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння шляхом сумісного використання методів Роте та двобічних наближень;

– серед рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x},\theta)$  виділено клас рівнянь, для яких розв’язок першої крайової задачі може бути знайдений методом

двобічних наближень та вдалось отримати умови існування єдиного додатного розв'язку цієї задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– до розв'язання нелінійної задачі Нав'є вперше застосовано метод двобічних наближень, який дозволив отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– вдосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка, кінці якого є початковими наближеннями при реалізації двобічних ітеративних схем в частині використання апарату теорії  $R$ -функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців.

#### **4. Характеристика змісту дисертації.**

Дисертаційна робота Сидорова Максима Вікторовича «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики» є рукописом і складається із вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (всього 320 джерел), чотирьох додатків, 132 рисунків, 115 таблиць. Повний обсяг роботи – 486 сторінок, з яких 320 сторінок – основний текст.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет і методи дослідження, визначено наукову новизну отриманих результатів з теоретичної та практичної точки зору. Також там наведено інформацію про апробацію результатів та публікації за темою дисертації.

У *першому розділі* роботи проведено огляд сучасного стану проблеми математичного моделювання процесів, які протікають у нелінійних середовищах. Серед методів чисельного аналізу задач, які призводять до нелінійних рівнянь математичної фізики, виділено методи двобічних наближень і наведено основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, що є теоретичним підґрунтям для їх розробки. Виходячи з проведеного аналізу, наприкінці розділу сформульовано задачі дослідження.

У *другому розділі* розглянуто першу крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння. За допомогою функції Гріна від них здійснено перехід до еквівалентних рівнянь Гаммерштейна, які взято за основу означення узагальненого розв'язку задачі. Далі ці інтегральні рівняння розглянуті як рівняння з гетеротонним оператором у банаховому просторі неперервних функцій, який напівупорядкований за допомогою конуса невід'ємних функцій.

цій. Це дало змогу побудувати метод двобічних наближень знаходження єдиного (узагальненого) розв'язку задач, які розглядаються. Для обґрунтування методу доведено декілька теорем, які дають достатні умови збіжності ітерацій. Проведено обчислювальний експеримент, який підтвердив ефективність запропонованих методів для напівлінійного звичайного диференціального рівняння (ступенева гетеротонна нелінійність) та для напівлінійних еліптичних рівнянь, які виникають при розв'язанні задач магнітної гідродинаміки (нелінійність експоненціального типу) та при моделюванні процесів у мікроелектромеханічних системах (ступенева нелінійність).

У *третьому розділі* введено поняття квазіфункції Гріна – Рвачова першої крайової задачі для невиводжуваного еліптичного оператора другого порядку, із використанням її та інтегральних формул теорії еліптичних рівнянь було отримано інтегральне рівняння Урисона, яке еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. Далі на основі цього інтегрального рівняння, що розглянуто як рівняння з оператором гетеротонного типу у просторі неперервних функцій, введено поняття узагальненого розв'язку крайової задачі та побудовано метод його двобічного ітераційного знаходження. Далі наведено обґрунтування запропонованого методу, достатніх умов збіжності послідовних наближень та варіантів побудови початкового наближення (за яке обираються кінці сильно інваріантного конусного відрізка) з використанням конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій. Роботу методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова було проілюстровано на двох обчислювальних експериментах для еліптичних задач, для яких чисельний розв'язок було отримано у другому розділі методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Результати, отримані обома методами, було звірено між собою та з відомими літературними розв'язками, які були отримані іншими методами.

У *четвертому розділі* методами двобічних наближень за допомогою функції Гріна та квазіфункції Гріна – Рвачова було досліджено перші крайові задачі для напівлінійних звичайних диференціальних та еліптичних рівнянь з оператором Лапласа  $-\Delta u$  й оператором Гельмгольца  $-\Delta u + \kappa^2 u$ . Було розглянуто різні типи ступеневих нелінійностей: ізотонну  $f(u) = \lambda u^p$ , антитонну  $f(u) = \mu u^{-q}$  та гетеротонну  $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ . Для кожної з представлених крайових задач отримано умови існування єдиного додатного розв'язку, дво-

бічної збіжності до нього послідовних наближень та знайдено апріорні оцінки розв'язків у випадку відрізка, круга та кулі. У дво- та тривимірному випадку для одиничного квадрата, половини одиничного круга, одиничної кулі та одиничного куба порівняно результати, які отримані методом двобічних наближень за допомогою функції Гріна та методом двобічних наближень за допомогою квазіфункції Гріна – Рвачова.

У *п'ятому розділі* методи двобічних наближень, які були розроблені в розділах два та три, перенесено на першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь: побудовано відповідні двобічні ітераційні процеси, отримано умови їх збіжності до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку крайової задачі та надано загальні рекомендації щодо початкового наближення у вигляді кінців сильно інваріантного конусного відрізка. Проведено обчислювальні експерименти для систем з двох напівлінійних еліптичних рівнянь для випадків степеневі та експоненціальної нелінійності.

У *шостому розділі* на основі сумісного застосування методів Роте та двобічних наближень запропоновано метод часткової дискретизації розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння. Цим методом вихідна нестационарна задача зведена до послідовності стаціонарних напівлінійних крайових задач, які розглядаються на послідовних часових шарах та розв'язуються методами двобічних наближень. Роботу методу продемонстровано на одновимірному випадку для задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневію нелінійністю, а у двовимірному випадку – на задачі зі сталим коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневію нелінійністю.

У *сьомому розділі* методи двобічних наближень застосовуються до розв'язання задачі Діріхле для стаціонарного нелінійного рівняння теплопровідності та до розв'язання задачі Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку. Заміною невідомої функції нелінійна задача Діріхле зведена до задачі для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа, що дозволило на основі результатів другого та третього розділів отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та побудувати двобічний ітераційний процес його знаходження. Метод розв'язання задачі Нав'є базується на переході до еквівалентної системи напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа та застосуванні для обґрунтування відповідного двобічного ітераційного методу результатів, отриманих у п'ятому розділі.

**Висновки** містять загальну оцінку отриманих результатів.

У *додатку А* наведено список публікацій здобувача та відомості про апробацію результатів дисертації, у *додатку Б* – акт впровадження, у *додатку В* – функції Гріна перших крайових задач для операторів Лапласа і Гельмгольца у деяких областях (круг, частина круга, прямокутник, куля, паралелепіпед тощо), а у *додатку Г* наведено числові та графічні результати обчислювальних експериментів для задач, розглянутих у четвертому розділі.

### **5. Аналіз публікацій та повнота відображення результатів у авторефераті.**

Всі основні наукові результати дисертації повною мірою викладено у 22 статтях, з яких: 21 стаття опублікована у наукових виданнях, які зазначені в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук (4 статті включено до наукометричної бази Web of Science), 1 стаття опублікована у закордонному фаховому науковому виданні.

Результати роботи доповідалися та обговорювалися на 12 наукових конференціях (з яких 7 – міжнародних), участь в яких підтверджена тезами доповідей, а також на наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О.М. Бекетова, кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків).

Перелік публікацій та їх зміст відповідає темі дисертації та в достатньому обсязі відображає її основні наукові результати, положення та зроблені висновки.

Зміст автореферату повністю відповідає структурі та змісту дисертації. В авторефераті достатньо повно відображено основні наукові результати дисертаційного дослідження. Оформлення дисертації та автореферату відповідає встановленим вимогам і виконано на належному рівні.

### **6. Практичне та теоретичне значення одержаних результатів.**

Запропоновані в роботі двобічні ітераційні методи розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики мають доволі просту обчислювальну схему та зручну апостеріорну оцінку похибки, що дозволяє здійснювати ефективне математичне моделювання процесів, що відбуваються у нелінійних середовищах різної природи. Результати дисертаційного дослідження впровадженні в освітній процес Харківського національного університету

радіоелектроніки під час викладання дисципліни «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь» та у підготовці атестаційних робіт здобувачів першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів вищої освіти.

### 7. Зауваження до змісту дисертації та автореферату.

1) На сторінках 80 та 101 зауважено, що для випадку нелінійності у рівнянні крайової задачі, яка монотонно зростає за  $u$ , обчислення методом двобічних наближень на основі використанні функції Гріна можуть бути розпаралелені, проте з опису обчислювального експерименту для задачі (2.146) – (2.148) з монотонною нелінійністю не зрозуміло, чи отримало це зауваження програмну реалізацію.

2) З тексту дисертації не зрозуміло, як саме обиралася часткова сума, яка замінювала функцію Гріна, що подана кратним рядом Фур'є, у випадку обчислювальних експериментів у пп. 2.4.2, 4.1, 4.2, 4.3, 6.4.2.

3) У аналізі обчислювальних експериментів у розділах 2, 3, 5, 6 та 7 зазначено, що ітераційні послідовності методів двобічних наближень збігаються зі швидкістю геометричної прогресії. Бажано б було проаналізувати можливість прискорення збіжності ітераційної послідовності.

4) У нерівностях (2.12) на сторінці 71, (2.74) на сторінці 93 та (5.14) на сторінці 223, які дають умову  $u_0$ -псевдоувігнутості відповідних операторів, використовується позначення  $t$  для константи, яку у розділі 6 (формула (6.19), сторінка 264, та формула (6.54), сторінка 275) позначено через  $n$ , у той час, як позначення  $t$  використовується для кроку дискретизації за часом.

Вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи та отриманих у ній наукових результатів.

## ВИСНОВОК

Зміст дисертаційного дослідження та отримані наукові результати свідчать, що дисертаційна робота Сидорова М.В. «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики» є завершеною науковою працею і вирішує актуальну наукову проблему побудови методів двобічних наближень розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Для побудови цих методів в роботі запропоновано два підходи: перший з них використовує класичну функцію Гріна та практично

може бути реалізований лише для невеликої кількості класичних областей, у яких функція Гріна відома, а другий використовує квазіфункцію Гріна – Рвачова, що значно розширює коло застосувань відповідного двобічного ітераційного методу. Поняття квазіфункції Гріна – Рвачова, яке введено у дисертаційній роботі, є узагальненням поняття квазіфункції (воно використовувалося в роботах академіка НАН України В.Л. Рвачова). На відміну від класичної функції Гріна побудова квазіфункції Гріна – Рвачова є можливою, якщо є відомими фундаментальний розв’язок відповідного еліптичного оператора та геометрія області, в якій задача розглядається, може бути описана методом  $R$ -функцій. Можливості розроблених двобічних ітераційних методів проілюстровано великою кількістю обчислювальних експериментів.

Беручи до уваги проведений аналіз дисертації «Методи двобічних наближень розв’язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики», можна стверджувати, що ця робота є закінченою науковою працею, яка відповідає паспорту спеціальності 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (фізико-математичні науки) та всім вимогам, які висуваються до докторських дисертацій згідно п.п. 9, 10, 12 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою КМУ №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, затвердженими постановами КМУ від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р. та №567 від 27.07.2016 р.), а її автор, Сидоров Максим Вікторович, заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент:

проректор з інноваційної діяльності

та перспективного розвитку

Харківського національного педагогічного університету

імені Г.С. Сковороди,

лауреат Державної премії України в галузі освіти,

доктор фізико-математичних наук

С.С. Зуб

