

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Сидорова Максима Вікторовича

“Методи двобічних наближень розв’язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики”,

що представлена на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація є закінченою науковою роботою, присвяченою розробці методів двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь та розвиткові напівдискретних методів розв’язання першої початково-крайової задачі для напівлінійних параболічних рівнянь, які засновані на сумісному використанні методу прямих та двобічних наближень.

Актуальність теми дисертаційної роботи

Дослідження методами математичного моделювання явищ та процесів у хімічній кінетиці, біології, екології, теплопровідності тощо призводить до необхідності аналізу різноманітних нелінійних задач математичної фізики. Особливе місце серед методів числового аналізу таких задач займають двобічні ітераційні методи, оскільки вони мають зручний обчислювальний алгоритм і дають змогу будувати дві послідовності функцій, які знизу та зверху наближують шуканий розв’язок. Але двобічні ітераційні схеми розв’язання задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь і напівлінійних еліптичних рівнянь відомі лише для перших крайових задач для рівнянь вигляду $-u'' = f(x, u)$ та $-\Delta u = f(x, u)$, а їх обчислювальна реалізація вимагає знання функції Гріна, що значно звужує коло застосувань. Отже, актуальною є наукова проблема виділення класів задач математичної фізики, розв’язок яких може бути знайдений з двобічним наближенням, та розробка нових методів з цією властивістю, які можна було б застосувати, зокрема, у областях неklasичної геометрії.

Зв’язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконувалася на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки. Здобувач як виконавець проводив свої дослідження у рамках держбюджетної теми № 293 “Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації

концепції їх сталого розвитку” (№ ДР 0115U001522).

Ступінь обґрунтування наукових положень, висновків та їх достовірність

Обґрунтованість викладених у дисертаційній роботі положень базується на коректних постановках мети та завдань дослідження, підтверджується використанням таких методів дослідження, як методи теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, методи математичної фізики, методи теорії R -функцій тощо, а також підтверджується достатньою кількістю публікацій у періодичних наукових фахових виданнях та апробацією на наукових конференціях.

Наукова новизна одержаних результатів

У дисертаційній роботі М.В. Сидорова розроблено методи двобічних наближень розв’язання низки нелінійних задач математичної фізики. Автором дисертаційної роботи отримано такі нові наукові результати:

– для невідродженого еліптичного оператора $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$ для перших крайових умов вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова, що дозволило у областях, геометрію яких можна аналітично описати за допомогою засобів теорії R -функцій, замінити першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння еквівалентним інтегральним рівнянням, а першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь – системою еквівалентних інтегральних рівнянь;

– вперше виділено клас напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє за допомогою функції Гріна її подання у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором, і клас напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання за допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором, що дозволяє будувати двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв’язків цих задач;

– розвинуто метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна в частині його застосування до знаходження додатного розв’язку першої крайової задачі для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x,u), \quad x \in (a, b);$$

– розвинуто метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна в частині його застосування до розв’язання першої крайової задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \Omega$;

– вперше розроблено метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для розв’язання першої крайової задачі для напівлі-

нійних еліптичних рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \Omega$;

– для розв’язання першої крайової задачі для систем напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$, вперше розроблено методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна і квазіфункції Гріна-Рвачова;

– за допомогою сумісного застосування методу Роте та методу двобічних наближень (на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова) вперше розроблено напівдискретний метод розв’язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

– з рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$ вперше виділено клас рівнянь, розв’язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методом двобічних наближень, завдяки чому отримані умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– вперше до розв’язання нелінійної задачі Нав’є застосовано метод двобічних наближень, що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– удосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка в частині використання апарату теорії R -функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців, що є початкові наближення при числовій реалізації запропонованих двобічних ітераційних схем.

Всі результати дисертації Сидорова Максима Вікторовича “Методи двобічних наближень розв’язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики”, що виносяться на захист, є новими та науково обґрунтованими.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів

Розроблені у дисертації двобічні ітераційні методи розширюють множину числових методів, що застосовуються у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо при моделюванні явищ і процесів, математичними моделями яких є перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння та системи напівлінійних еліптичних рівнянь і перша початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння. Результати дисертаційної роботи впроваджені в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки при викладанні дисципліни “Чисельні методи розв’язання нелінійних операторних рівнянь” та при підготовці атестаційних робіт.

Аналіз публікацій та повнота відображення наукових результатів

у авторефераті дисертаційної роботи

Основні наукові результати дисертаційної роботи повною мірою викладені у 22 статтях, з яких 21 стаття опублікована у наукових виданнях, зазначених в пе-

реліку фахових видань України з фізико-математичних наук і одна стаття опублікована у закордонному фаховому науковому виданні. Результати дисертаційного дослідження пройшли апробацію на 7 міжнародних та 5 всеукраїнських наукових конференціях (усього 15 тез доповідей).

Наведений перелік публікацій та їх зміст відповідає темі роботи та в достатньому обсязі відображає її основні наукові результати, положення та висновки.

Зміст автореферату повністю відповідає змістові дисертації. У ньому достатньо повно відображено основні наукові результати дисертаційного дослідження. У дисертації та авторефераті розкрито особистий внесок здобувача у роботах, які опубліковано у співавторстві.

Загальна характеристика дисертаційної роботи

Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (320 найменувань) та чотирьох додатків. Повний обсяг роботи становить 486 сторінок (з них 320 сторінок основного тексту).

У *вступі* до дисертації обґрунтовано актуальність теми роботи, сформульовано мету, виділено об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено інформацію про наукові праці, у яких розкрито результати дисертаційного дослідження.

У *першому розділі* проведено огляд нелінійних задач математичної фізики, які є математичними моделями нелінійних процесів різної природи, та проведено огляд сучасних методів їх числового аналізу. Як найбільш ефективні числові методи відзначено ітераційні методи з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку і наведено основні означення та теореми з теорії напівупорядкованих просторів, що для цих методів є теоретичною основою їх побудови. Наприкінці розділу, виходячи зі зробленого аналізу предметної області, сформульовані задачі дослідження.

Другий розділ містить результати розробки методу двобічних наближень знаходження додатного розв'язку першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. Цей ітераційний метод заснований на переході за допомогою функції Гріна до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке розглядається як операторне рівняння з гетеротонним оператором та служить для введення поняття узагальненого розв'язку крайової задачі. Обґрунтування двобічної збіжності ітерацій використовує результати теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах і міститься у теоремах, які дають достатні умови цієї збіжності. Застосування розроблених методів розглянуто на прикладах напівлінійних рівнянь з оператором Лапласа й оператором Гельмгольца. Ефективність запропонованих методів підтверджена обчислювальними експериментами для

звичайного диференціального рівняння та для двох еліптичних рівнянь, які моделюють процеси у магнітній гідродинаміці та у мікроелектромеханічних системах.

У *третьому розділі* введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для невідроджуваного еліптичного оператора другого порядку та з її допомогою отримано інтегральне рівняння Урисона, яке еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. Далі у просторі неперервних функцій, який напівупорядковано конусом невід'ємних функцій, це інтегральне рівняння розглянуто як рівняння з гетеротонним оператором, для якого виділено сильно інваріантний конусний відрізок і побудовано двобічний ітераційний метод знаходження узагальненого розв'язку. Для розробленого методу доведено декілька достатніх умов збіжності ітерацій та описано способи побудови початкового наближення (за яке обираються кінці сильно інваріантного відрізка) з використанням засобів теорії R -функцій. Роботу методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова проілюстровано обчислювальними експериментами для еліптичних задач, числовий розв'язок яких було у другому розділі отримано методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. З метою підтвердження ефективності запропонованого методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова результати, що отримані обома методами, було порівняно між собою та з відомими з літератури розв'язками, отриманими іншими числовими методами.

Четвертий розділ містить дослідження методами двобічних наближень, які було запропоновано у другому та третьому розділах, перших крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та еліптичних рівнянь з оператором Лапласа й оператором Гельмгольца та різними типами степеневих нелінійностей (ізотонною $f(u) = \lambda u^p$, антитонною $f(u) = \mu u^{-q}$ та гетеротонною $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$). Кожна з цих крайових задач досліджена на існування єдиного додатного розв'язку та двобічну збіжність до нього послідовних наближень. Також для кожного типу нелінійностей отримано апріорні оцінки розв'язків крайових задач, що розглядаються на відрізку, у крузі та у кулі. Для низки дво- та тривимірних задач результати, отримані методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна та методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, порівняно між собою.

П'ятий розділ присвячено розробці методів двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь. Для цього побудовано відповідні двобічні ітераційні процеси (на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова) та отримано достатні умови їх збіжності до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку крайової задачі. Також на-

ведено загальні рекомендації щодо вибору початкового наближення. Обчислювальні експерименти проведено для систем з двох напівлінійних еліптичних рівнянь з нелінійностями степеневого та експоненціального типів.

У шостому розділі запропоновано напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного застосування методів прямих (Роте) та двобічних наближень, які було розроблено у другому та третьому розділах. Запропонований метод дозволяє звести вихідну нестационарну задачу до послідовності стаціонарних напівлінійних крайових задач, що розглядаються на часових шарах та до розв'язання яких застосовні методи двобічних наближень. Роботу методу продемонстровано на задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності і гетеротонною степеневою нелінійністю (одновимірне рівняння) та на задачі зі сталим коефіцієнтом теплопровідності і гетеротонною степеневою нелінійністю (двовимірне рівняння).

У сьомому розділі методи двобічних наближень застосовані до розв'язання задачі Діріхле для стаціонарного рівняння теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом та до розв'язання нелінійної задачі Нав'є. Перша з цих задач заміною невідомої функції зведена до задачі для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа, що дозволило для її аналізу застосувати результати, отримані у другому та третьому розділах. Метод розв'язання нелінійної задачі Нав'є базується на переході до еквівалентної системи напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа і застосуванні для обґрунтування відповідного двобічного ітераційного методу результатів, що отримано у п'ятому розділі дисертаційної роботи.

У висновках зроблено загальну оцінку отриманих у дисертаційній роботі результатів.

Додатки містять список публікацій здобувача за темою дисертації роботи, відомості про апробацію результатів, акт впровадження, відомі функції Гріна операторів Лапласа і Гельмгольца для деяких областей та результати обчислювальних експериментів з розв'язання задач зі степеневими нелінійностями, що розглянуті у четвертому розділі роботи.

Зауваження до змісту дисертаційної роботи та автореферату

1. У пп. 2.4.2 та 3.4 розробленими двобічними ітераційними методами чисельно досліджено задачі, які є математичними моделями течії провідного середовища та мікроелектромеханічної системи. Для задач з наведеними результатами обчислювальних експериментів у пп. 2.4.1, 5.3, 6.4, 7.4, на жаль, не описано фізичної інтерпретації та порівняння обчислювальної ефективності. У пп. 2.4.2 та 3.4 теоретичні оцінки кількості ітерацій для обох задач є завищеними та й фізичній інтерпретації отриманих числових розв'язків не надається достатньої уваги.

2. У розділі 4, без усяких коментарів, переважна більшість результатів числових експериментів винесено до додатків. Бажано було б провести порівняння апріорних оцінок розв'язків крайових задач для різних типів степеневих нелінійностей, отриманих за допомогою методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна та основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова та аргументувати їх обчислювальну ефективність.

3. При формулюванні теорем про збіжність послідовних наближень (розділ 2, теореми 2.2, 2.6; розділ 3, теорема 3.2; розділ 5, теореми 5.2, 5.6) на функції $\hat{f}(x, v, w)$, $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$, $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ($i = \overline{1, n}$) накладаються відповідно умови (2.25), (2.84) і (3.40), (5.23) і (5.45), але результати обчислюваних експериментів для правих частин $f(x, u)$, $f(\mathbf{x}, u)$, $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ($i = \overline{1, n}$) розглядуваних рівнянь, які б цим умовам задовільняли, не наведено.

4. У висновках до дисертаційної роботи щодо напрямів подальших досліджень варто також було б вказати застосування розроблених методів двобічних наближень до крайових задач із мішаними крайовими умовами.

5. Слід також відзначити деякі граматичні неточності у авторефераті та дисертації:

на стор. 26 автореферату у формулі (60) замість векторної формули Гріна $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ надруковано скалярну функцію Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, а у останній формулі на тій же сторінці пропущено індекс i у функції $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ під інтегралом у лівій частині нерівності; на стор.32 “заборонованого методу”, стор.119 “у сосуді”, подано “зробимо заміну”, хоча просто перепозначено і т.д.

Вказані зауваження та неточності, на нашу думку, в цілому не впливають на загальну позитивну оцінку наукових результатів, отриманих у дисертаційній роботі.

Відповідність дисертаційної роботи встановленим вимогам

Зміст дисертаційного дослідження та обґрунтованість наукових результатів свідчить, що дисертаційна робота Сидорова М.В. є завершеною науковою працею, у якій вирішено актуальну наукову проблему побудови методів двобічних наближень розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики.

Результати дисертаційної роботи достатньо повно опубліковано у фахових виданнях.

Результати дисертаційної роботи, за якими автор захистив кандидатську дисертацію не виносяться на захист докторської дисертації.

Зміст автореферату відповідає змістові дисертаційної роботи.

Зміст дисертаційної роботи відповідає паспорту спеціальності 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (фізико-математичні науки),

зокрема, п. 2 “Удосконалення математичного моделювання та методів чисельного аналізу”.

Структура дисертаційної роботи, її обсяг та оформлення відповідають вимогам Міністерства освіти та науки України і вимогам Порядку присудження наукових ступенів.

Загальний висновок

Дисертаційна робота Сидорова М.В. є завершеною науковою працею, у якій отримано нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності є розв’язанням наукової проблеми побудови методів двобічних наближень розв’язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики.

Враховуючи актуальність теми дослідження, ступінь обґрунтованості та достовірності отриманих наукових результатів, їх теоретичне та практичне значення, вчащаю, що дисертація “Методи двобічних наближень розв’язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики” відповідає паспорту спеціальності 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи і всім вимогам, що висуваються до докторських дисертацій відповідно до пунктів 9, 10, 12 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, затвердженими постановами Кабінету Міністрів України від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р. та № 567 від 27.07.2016 р.), а її автор, Сидоров Максим Вікторович, заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,
декан факультету прикладної математики та інформатики
Львівського національного університету імені Івана Франка,
доктор фізико-математичних наук, доцент

І. Дияк

