Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»
Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ДВІРНА ОЛЕНА АНАТОЛІЇВНА

УДК 519.87

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Підпис О.А. Двірна

Науковий керівник:
Колєчкіна Людмила Миколаївна, доктор фізико-математичних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи ідентичний за змістом з іншими, поданими до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д64.052.02 *Підпис* Л.В. Колесник
Печатка

Полтава – 2019

АНОТАЦІЯ

Двірна О.А. Моделі та методи розв'язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», Міністерство освіти і науки України, Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України; Полтава, 2019.

Дисертацію присвячено актуальному завданню розробки методів розв'язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

Оскільки багатьом прикладним задачам в галузях економіки, управління, планування, проектування складних систем притаманна умова багатокритеріальності, вони можуть бути подані як моделі векторних задач оптимізації. За умови, що множина, на якій розв'язуються задачі, має комбінаторний характер, одержуємо відповідно комбінаторні задачі. При необхідності виконання обох умов виникає завдання об'єднання задач на комбінаторних конфігураціях з векторними задачами. Для кожного окремого класу вченими проведені ґрунтовні дослідження, проте у сукупності вищезгадана проблема є складною і малодослідженою. Отже, розробка методів розв'язування векторних оптимізаційних задач на комбінаторних конфігураціях є актуальною науковою задачею.

Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних методів розв'язування векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення таких *завдань*:

– проаналізувати існуючі методи розв'язування задач комбінаторної та векторної оптимізації;

– описати способи побудови комбінаторних конфігурацій та перехід до евклідових комбінаторних конфігурацій;

– виконати постановку векторної задачі комбінаторної оптимізації та векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях, виокремити клас векторних задач лінійної евклідової комбінаторної оптимізації;

– означити та побудувати грід-граф та структурний граф евклідових комбінаторних конфігурацій, дослідити властивості цих графів;

– розробити методи розв'язування векторних задач лінійної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях;

– створити алгоритми відповідно до розроблених методів та провести числові експерименти, обґрунтувати ефективність запропонованих методів;

– побудувати моделі прикладних задач, що зводяться до векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Об'єкт дослідження – процес моделювання та розв'язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

Предмет дослідження – моделі та методи розв'язування векторних оптимізаційних задач на комбінаторних конфігураціях.

Дослідження базується на використанні методів векторної оптимізації для розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях, а саме: метод лінійної згортки критеріїв і метод поступового введення обмежень використовуються у варіаціях координатного і горизонтального методів; метод головного критерію – у методі розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень; методи комбінаторної оптимізації, зокрема, метод відсікання – у комбінованому методі розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях; методи теорії графів – для побудови структурного графа та грід-графа; методи локалізації значення функції – як ідеї для методів розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях.

У результаті виконання дисертаційного дослідження розроблені моделі векторних задач на комбінаторних конфігураціях та *отримані такі нові наукові результати:*

уперше:

– означено та побудовано грід-граф евклідових комбінаторних конфігурацій та досліджено його властивості;

– розроблено горизонтальний метод розв'язування векторних комбінаторних оптимізаційних задач, у ході виконання якого використовується подання комбінаторної конфігурації у вигляді структурного графа та проводиться послідовне занурення в граф, що дозволило значно скоротити кількість елементів, які необхідно розглянути для формування множини e-конфігурацій, які задовольняють лінійним обмеженням задачі;

– розроблено координатний метод розв'язування векторних комбінаторних оптимізаційних задач, який на відміну від існуючих методів використовує подання комбінаторних конфігурацій у вигляді набору грід-графів, що дозволяє проаналізувати групи елементів та скоротити кількість вершин, необхідних для повного аналізу графа як етапу знаходження розв'язку задачі;

набуло подальшого розвитку:

– формулювання векторних комбінаторних задач, а саме сформульована постановка векторної задачі на евклідових комбінаторних конфігураціях та виділена задача векторної лінійної евклідової комбінаторної оптимізації;

– вивчення властивостей графів евклідових комбінаторних конфігурацій, а саме узагальнено поняття структурного графа та досліджено його властивості;

– метод комбінаторного відсікання, а саме розроблено підхід, що дозволяє інтегрувати і реалізувати комбінований метод, що є синтезом методу векторної оптимізації та методу комбінаторного відсікання, який на відміну від існуючих поєднує векторні властивості задачі та комбінаторний характер множини, що дозволило застосувати вказаний метод для розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях;

– моделі векторної та комбінаторної оптимізації, а саме подані: модель задачі визначення ефективності вкладів у нерухомість; модель задачі планування виробництва; модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту;

модель задачі вибору модулів при розробці програм; модель задачі оптимального розподілу масивів по рівням пам'яті комп’ютера; модель задачі вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів як моделі векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Наукові результати, отримані у результаті виконання дисертаційного дослідження, у сукупності є вирішенням наукового завдання розробки методів розв’язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях та побудови моделей таких задач.

У роботі проаналізовано існуючі методи розв’язування векторних оптимізаційних задач, які у більшості випадків дозволяють знаходити множину оптимальних розв’язків. При огляді методів визначено, що у більшості з них суттєвим є вплив особи, що приймає рішення, на процес розв’язування на початковому етапі та проміжних кроках в залежності від методу. Зроблено висновок про відсутність спеціальних методів розв’язування задач з кількома критеріями на комбінаторних конфігураціях, що стало предметом подальших досліджень.

Також проаналізовано методи комбінаторної оптимізації, призначені для розв’язування комбінаторних оптимізаційних задач. Існуючі методи охоплюють широкий спектр застосувань, представлені точними, наближеними та евристичними алгоритмами, але недостатньо розвинутим є апарат комбінаторної оптимізації для розв’язування задач з векторним критерієм. У роботі запропоновано нові методи на основі горизонтального та координатного методів локалізації значення функції. У нових методах використана ідеї названих методів для формування множини точок комбінаторної конфігурації, що задовольняють усім лінійним обмеженням.

Означено та досліджено властивості графів евклідових комбінаторних конфігурацій, а саме запропонована побудова грід-графів евклідових комбінаторних конфігурацій та їх властивості, побудова і властивості структурного графа e-конфігурацій. Сформульовані та доведені відповідні теореми. Сформульовані та доведені властивості грід-графів e-конфігурацій.

Одержані результати дозволяють розробити нові методи розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях. Основою цих методів є таке розбиття графа комбінаторної конфігурації, яке дозволяє виконати направлений пошук та робити висновки одразу про цілі групи елементів, об'єднаних за певними ознаками.

Розроблено методи розв'язування векторних екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях, серед яких комбінований метод, модифікований метод послідовного вводу обмежень, координатний метод та горизонтальний метод. Комбінований метод та модифікований метод послідовного вводу обмежень поєднують у собі метод комбінаторного відсікання з методами векторної оптимізації. Проте результатом розв'язування за даними методами є лише один розв'язок, який належить множині оптимальних за Парето, а не вся множина ефективних розв'язків. У свою чергу координатний та горизонтальний методи дозволяють сформувати множину точок, що задовольняють обмеженням задачі. Пошук оптимальних значень проводиться на одержаній множині.

Розроблені методи розв'язування задачі векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень. В основу вказаних методів покладено існуючі методи векторної оптимізації, проте проведена їх адаптація для розв'язування саме задач на евклідових комбінаторних конфігураціях. Використання методів векторної оптимізації та властивостей комбінаторних конфігурацій дозволяє знайти ефективний розв'язок задачі, що належить множині Парето-оптимальних розв'язків.

За розробленими алгоритмами описаних методів розв'язані тестові приклади. Обґрунтовано ефективність запропонованих алгоритмів. Особливої уваги у цьому ракурсі заслуговує координатний метод, для якого розроблені алгоритми не лише для лінійних цільових функцій, але й для дробово-лінійних. Методологія координатного методу описана для комбінаторних конфігурацій перестановок, але може бути поширена на інші комбінаторні конфігурації.

Алгоритми за названими методами є збіжними і за рахунок побудови дозволяють реалізацію шляхом паралельних обчислень, оскільки аналіз за кожним з лінійних обмежень задачі, що є ключовим кроком для координатного та горизонтального методів, може проводиться незалежно. Множина точок формується шляхом перетину одержаних множин. Подальший пошук оптимальних розв'язків проводиться на множині точок, що задовольняють лінійним обмеженням задачі.

Побудовані моделі прикладних задач як векторних на евклідових комбінаторних конфігураціях, такі як модель задачі визначення ефективності вкладів у нерухомість; модель задачі панування виробництва; модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту; модель задачі вибору модулів при розробці програм; модель задачі оптимального розподілу масивів по рівням пам'яті комп'ютера; модель задачі вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів. Ці математичні моделі задач з різних прикладних галузей свідчать про необхідність подальшого розвитку векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

Ключові слова: векторна оптимізація, горизонтальний метод, грід-граф, евклідові комбінаторні конфігурації, комбінаторна оптимізація, комбінаторні конфігурації, координатний метод, модель векторної задачі на комбінаторних конфігураціях, структурний граф.

Список публікацій здобувача

1. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях та підхід до розв'язання // Радиоэлектроника и информатика. 2007. №. 1. С. 84–88.

2. Kolechkina L. N., Rodionova E. A. Multicriteria combinatorial optimization problems on a set of polypermutations // Cybernetics and Systems Analysis. 2008. Vol. 44. No. 2. P. 276–288.

3. Колечкина Л. Н., Родионова Е. А. Моделирование прикладных задач векторными задачами на комбинаторных конфигурациях // Радиоэлектроника и информатика. 2009. № 3. С. 62−68.

4. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Багатокритеріальні комбінаторні задачі на поліперестановках та методи їх розв'язування // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2010. Випуск 16. С. 28–39.

5. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності // Штучний інтелект. 2011. № 2. С. 137–143.

6. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Підхід до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / ред. О.М. Кісельової та ін. Дніпропетровськ : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. С. 183–190.

7. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный подход к решению многокритериальных экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях // Теорія оптимальних рішень. 2012. С. 98–103.

8. Koliechkina L. N., Dvernaya E. A., Nagornaya A. N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations // Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. No. 4. P. 620–626.

9. Koliechkina L. M., Dvirna O. A. Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality // Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53. No. 4. P. 590–599.

10. Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на множині полірозміщень // Наукові записки: матеріали звітної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету (м. Полтава, 15 травня 2008 р.). Полтава : АСМІ, 2008. С. 38–39.

11. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Модель багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties: abstracts (PDMU-2009). (Shidnica, April 27–30, 2009). Київ: «Освіта України», 2009. С. 117–118.

12. Колєчкіна Л. М., Родіонова О.А. Підхід до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2010, (м. Дніпропетровськ, 10–12 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 109–110.

13. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Локалізація значень функції, заданої на розміщеннях // Комп'ютерні науки та інженерія: матеріали IV конференції молодих вчених CSE−2010 (м. Львів, 25–27 листопада 2010 р.). Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. С. 240 – 241.

14. Родіонова О.А. Програма розв'язування багатокритеріальних задач на полікомбінатоних множинах // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU–2010): abstracts (Lviv, May 17–21, 2010). Київ: «Освіта України», 2010. С. 139–140.

15. Родіонова О. А. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): матеріали 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції (м. Черкаси, 10–13 травня 2011 р.). Черкаси: Маклаут, 2011. С. 474.

16. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный алгоритм координатного метода для решения многокритериальных комбинаторных задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2012): матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1–3 березня 2012 року). Полтава: ПУЕТ, 2012. С. 144–147.

17. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Використання властивостей комбінаторних конфігурацій для розв'язування екстремальних комбінаторних задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2013): матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21–23 березня 2013 року).). Полтава: ПУЕТ, 2013. С. 153–156.

18. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності з використанням

методу послідовного введення обмежень // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ–2013): матеріали ІІІ Всеукр. наук. семінару, (м. Полтава, 30–31 серпня 3013 р.) / за ред. О. О. Ємця. Полтава : ПУЕТ, 2013. С. 51–53.

19. Двірна О. А. Переваги використання координатного методу при розв'язувані екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації : матеріали Міжнародної науково–практичної конференції (м. Полтава, 12–13 травня 2016 року). Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 326–329.

20. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Алгоритм модифікованого координатного методу для розв'язування екстремальних задач з дробово–лінійною функцією цілі на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS–2016, (м. Дніпро, 16–18 листопада 2016 р.) / Під загальною редакцією О.М. Кісельової, Дніпро : ДНУ, 2016. С. 102–103.

21. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв'язування векторних екстремальних комбінаторних задач з дробово-лінійними функціями цілі на конфігурації перестановок // Інформатика та системні науки (ІСН–2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. Полтава : ПУЕТ, 2017. С. 143–145.

22. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Подход к решению векторных задач с дробно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): праці міжнар. наук.-практ. конф., (Київ-Черкаси, 16–18 травня 2017 р.); наук. ред. В.Є. Снитюк. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2017. С. 343.

23. Дверная Е. А. Модификация горизонтального метода локализации значения функции для решения векторных задач на комбинаторных конфигурациях // Наука и образование – 2018: сборник материалов XIII

Международной научной конференции студентов и молодых ученых (г. Астана, 12 апреля 2018 г.). Астана : ЄУУ, 2018. С. 1634–1637.

24. Двірна О. А. Використання схем підграфів при розв'язуванні задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях // Потенціал сучасної науки (частина I) : матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 10−11 листопада 2018 р.). Київ : МЦНД, 2018. С. 57–59.

25. Двірна О.А. Розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень // Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень : праці наукової школи-семінару, (м. Ужгород, 15–20 квітня 2019 р.) / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», наук. ред. Л. Ф. Гуляницький. Ужгород : УНУ, 2019. С. 79–80.

ABSTRACT

Dvirna O.A. The models and methods of solving of vector problems of discrete optimization on combinatorial configurations. – Manuscript.

A dissertation for the degree the candidate's degree of physics and mathematics sciences in specialty 01.05.02 "Mathematical modeling and computational methods" – Higher Educational Establishment of Ukoopspilka "Poltava University of Economics and Trade", Ministry of Education and Science of Ukraine; Kharkiv National University of Radioelectronics, Ministry of Education and Science of Ukraine; Poltava, 2019.

The dissertation is devoted to the actual problem of developing methods for solving vector problems of discrete optimization on combinatorial configurations. A number of practical tasks in the fields of economics, management, planning, designing of complex systems include the search for an extreme value of the magnitude and value of the variables in which it is achieved, which can be presented as models of vector problems of combinatorial optimization, since many applications have a multicriterial condition. There is a problem of combining extreme problems in combinatorial configurations with vector problems. For each separate class of tasks,

scientists have carried out fundamental research, but in aggregate, the above problem is complicated and poorly investigated. An approach to solving combinatorial problems using the graph theory is grounded, which is the basis for finding methods for solving and improving existing ones.

The purpose of the dissertation is to develop effective methods for solving vector problems on Euclidean combinatorial configurations.

To achieve this goal the following tasks need to be solved:

– solving combinatorial and vector optimization problems;

– describe methods for constructing combinatorial configurations and switching to Euclidean combinatorial configurations;

– perform the formulation of the vector problem of combinatorial optimization and vector optimization on Euclidean combinatorial configurations, distinguish the class of vector problems of linear Euclidean combinatorial optimization;

– identify and construct a grid graph and structural graph of Euclidean combinatorial configurations, investigate the properties of these graphs;

– develop methods for solving vector linear optimization problems on Euclidean combinatorial configurations;

– to create algorithms according to the developed methods and to carry out numerical experiments, to substantiate the effectiveness of the proposed methods;

– to build models of application problems that are reduced to vector problems on Euclidean combinatorial configurations.*The object of research* is the process of modeling and solving vector problems of discrete optimization on combinatorial configurations.

The subject of research – models and methods for solving vector extremal problems in combinatorial configurations.

The research is based on the using of vector optimization methods for their adaptation to solving vector problems in combinatorial configurations, namely, the method of linear convolution of the criteria, the method of gradual introduction of constraints used in variations of coordinate and horizontal methods, the method of the main criterion is used in the method of solving the vector problem on combinatorial configurations without additional restrictions, methods of combinatorial optimization, namely, the method of clipping in the combined method of solving in vector problem in combinatorial configurations, methods of graph theory - for constructing a graph in a horizontal method and schemes of subgraphs in a coordinate method, methods of localizing the value of a function as an idea for methods for solving vector problems on combinatorial configurations.

As a result of the dissertation research, models of vector problems at combinatorial configurations were developed and the following *new scientific results* were obtained:

for the first time

– a grid graph of Euclidean combinatorial configurations is defined and its properties are investigated;

– a horizontal method for solving vector combinatorial optimization problems is developed, in the course of which the representation of combinatorial configuration in the form of a structural graph is used, and a consecutive immersion in the graph is carried out, which allowed to significantly reduce the number of elements that need to be considered for forming a set of configurations that satisfy the lines limitation of the task;

– developed a coordinate method for solving vector combinatorial optimization problems, which, unlike the existing methods, uses the representation of combinatorial configurations in the form of a grid-graph, which allows to analyze groups of elements and reduce the number of vertices required for a complete analysis of the graph as a solution tasks;

has been further developed:

– formulation of vector combinatorial problems, namely the formulation of a vector problem on Euclidean combinatorial configurations, and the isolated problem of vector linear Euclidean combinatorial optimization;

– study of properties of graphs of Euclidean combinatorial configurations, namely the generalized concept of a structural graph and its properties;

– combinatorial clipping method, namely the developed approach that allows to integrate and implement the combined method, which is a synthesis of the vector optimization method and the combinatorial clipping method, which unlike the existing ones combines the vector properties of the problem and the combinatorial character of the set, which allowed to apply the specified method for linking vector problems on combinatorial configurations;

– vector and combinatorial optimization models, namely the following: a model of the problem of determining the efficiency of real estate deposits; model of production planning task; model of the problem of ensuring the effective work of the site; model of the problem of module selection in program development; model of the task of optimal allocation of arrays by computer memory levels; model of the problem of choosing the optimal set of measuring devices as a vector problem model on Euclidean combinatorial configurations.

The scientific results obtained as a result of the dissertation research are collectively a solution to the scientific problem of developing methods for solving vector problems of discrete optimization on combinatorial configurations and constructing models of such problems.

The paper considers the existing methods of solving vector optimization problems, which in most cases allow us to find a set of optimal solutions. When reviewing the methods, it has been determined that in most of them the influence of the decision maker on the initiation and intermediate steps depending on the method is significant. It is concluded that there are no special methods for solving problems with several criteria on combinatorial configurations, which has become the subject of further research.

Also it is considered are combinatorial optimization methods designed to solve combinatorial optimization problems. Existing methods cover a wide range of applications, presented by precise, approximate and heuristic algorithms, but the underdeveloped apparatus of combinatorial optimization for solving problems with a vector criterion. The paper proposes new methods based on the horizontal and coordinate methods of localizing the value of the function. In the new methods, the ideas of these methods are used to form a set of combinator configuration points that satisfy all linear constraints.

The properties of combinatorial configurations in terms of their construction and connection with graph theory are studied. New definitions and theorems concerning the connection of combinatorial configurations with the theory of graphs are proposed, which allow to provide a combinatorial configuration in the form of structural graphs and subgraph scheme, which is the basis for developing algorithms for solving problems in combinatorial configurations. The basis of these algorithms is a breakdown of the combinatorial configuration graph, which allows you to perform a directed search and draw conclusions about the whole group of points, united by certain features.

The methods of solving vector extreme problems in combinatorial configurations, among which the combined method, the modified method of sequential introduction of constraints, the coordinate method and the horizontal method, are developed. The combined method and the modified method of sequencing constraints combine combinatorial methods of clipping with vector optimization methods. However, the result of the algorithms according to these methods is only one solution, which belongs to the set of optimal Pareto, and not the whole set of effective solutions. In turn, coordinate and horizontal methods allow the formation of a set of points satisfying the restriction of the problem. The search for optimal values is performed on the resulting set. As a result of the algorithms work, the set of Pareto-optimal solutions is formed by these methods.

The methods of solving the vector optimization problem on combinatorial configurations without any additional restrictions are developed. The method is based on the existing methods of vector optimization, but their adaptation to solving problems is precisely on combinatorial configurations. Using the methods of vector optimization and the properties of combinatorial configurations allows us to find the set of Pareto-optimal solutions of the given problem.

According to the developed algorithms of the described methods, numerical experiments, indicating their effectiveness, have been carried out. The efficiency of the proposed algorithms is substantiated. Of particular interest in this perspective is the coordinate method, for which algorithms are developed not only for linear target functions, but also for fractional-linear ones. The methodology of the coordinate method is described for combinatorial permutation configurations, but may be extended to other combinatorial configurations.

The conducted numerical experiments showed the practical efficiency of the proposed methods for solving vector optimization problems at combinatorial configurations. Algorithms are convergent and at the expense of construction allow implementation through parallel computing, since analysis for each of the linear limitations of the task, which is a key step for algorithms of coordinate and horizontal methods, can be carried out independently. The set of points is formed by intersection of the resulting sets.

The constructed models of applied problems, which are vector problems in combinatorial configurations, such as the model of the problem of determining the efficiency of real estate investments; model of the task of production domination; model of the task of ensuring the effective work of the site; model of the task of selecting modules in the development of programs; model of the problem of optimal distribution of arrays on the levels of memory of the computer; model of the task of choosing an optimal set of measuring devices. These mathematical models of tasks from various applications indicate the need for the further development of vector optimization on combinatorial configurations.

Keywords: vector optimization, horizontal method, grid graph, Euclidean combinatorial configurations, combinatorial optimization, combinatorial configurations, coordinate method, vector problem’s model on combinatorial configurations, structural graph.

List of publications of the applicant

1. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на поліорозміщеннях та підхід до розв’язання // Радиоэлектроника и информатика. 2007. №. 1. С. 84–88.

2. Kolechkina L. N., Rodionova E. A. Multicriteria combinatorial optimization problems on a set of polypermutations // Cybernetics and Systems Analysis. 2008. Vol. 44. No. 2. P. 276–288.

3. Колечкина Л. Н., Родионова Е. А. Моделирование прикладных задач векторными задачами на комбинаторных конфигурациях // Радиоэлектроника и информатика. 2009. № 3. С. 62−68.

4. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Багатокритеріальні комбінаторні задачі на поліперестановках та методи їх розв'язування // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2010. Випуск 16. С. 28–39.

5. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності // Штучний інтелект. 2011. № 2. С. 137–143.

6. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Підхід до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / ред. О.М. Кісельової та ін. Дніпропетровськ : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. С. 183–190.

7. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный подход к решению многокритериальных экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях // Теорія оптимальних рішень. 2012. С. 98–103.

8. Koliechkina L. N., Dvernaya E. A., Nagornaya A. N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations // Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. No. 4. P. 620–626.

9. Koliechkina L. M., Dvirna O. A. Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality // Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53. No. 4. P. 590–599.

10. Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на множині полірозміщень // Наукові записки: матеріали звітної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-

математичного факультету (м. Полтава, 15 травня 2008 р.). Полтава : АСМІ, 2008. С. 38–39.

11. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Модель багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties: abstracts (PDMU-2009). (Shidnica, April 27–30, 2009). Київ: «Освіта України», 2009. С. 117–118.

12. Колєчкіна Л. М., Родіонова О.А. Підхід до розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2010, (м. Дніпропетровськ, 10–12 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 109–110.

13. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Локалізація значень функції, заданої на розміщеннях // Комп’ютерні науки та інженерія: матеріали IV конференції молодих вчених CSE−2010 (м. Львів, 25–27 листопада 2010 р.). Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. С. 240 – 241.

14. Родіонова О.А. Програма розв’язування багатокритеріальних задач на полікомбінатоних множинах // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU–2010): abstracts (Lviv, May 17–21, 2010). Київ: «Освіта України», 2010. С. 139–140.

15. Родіонова О. А. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): матеріали 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції (м. Черкаси, 10–13 травня 2011 р.). Черкаси: Маклаут, 2011. С. 474.

16. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный алгоритм координатного метода для решения многокритериальных комбинаторных задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2012): матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1–3 березня 2012 року). Полтава: ПУЕТ, 2012. С. 144–147.

17. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Використання властивостей комбінаторних конфігурацій для розв’язування екстремальних комбінаторних задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2013): матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21–23 березня 2013 року).). Полтава: ПУЕТ, 2013. С. 153–156.

18. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності з використанням методу послідовного введення обмежень // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ–2013): матеріали ІІІ Всеукр. наук. семінару, (м. Полтава, 30–31 серпня 3013 р.) / за ред. О. О. Ємця. Полтава : ПУЕТ, 2013. С. 51–53.

19. Двірна О. А. Переваги використання координатного методу при розв’язувані екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації : матеріали Міжнародної науково‒практичної конференції (м. Полтава, 12–13 травня 2016 року). Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 326–329.

20. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Алгоритм модифікованого координатного методу для розв’язування екстремальних задач з дробово‒лінійною функцією цілі на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS–2016, (м. Дніпро, 16–18 листопада 2016 р.) / Під загальною редакцією О.М. Кісельової, Дніпро : ДНУ, 2016. С. 102–103.

21. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв’язування векторних екстремальних комбінаторних задач з дробово-лінійними функціями цілі на конфігураціі перестановок // Інформатика та системні науки (ІСН–2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. Полтава : ПУЕТ, 2017. С. 143–145.

22. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Подход к решению векторных задач с дробно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): праці міжнар. наук.-практ. конф., (Київ-Черкаси, 16−18 травня 2017 р.); наук. ред. В.Є. Снитюк. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2017. С. 343.

23. Дверная Е. А. Модификация горизонтального метода локализации значения функции для решения векторных задач на комбинаторных конфигурациях // Наука и образование – 2018: сборник материалов XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых (г. Астана, 12 апреля 2018 г.). Астана : ЄУУ, 2018. С. 1634–1637.

24. Двірна О. А. Використання схем підграфів при розв'язуванні задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях // Потенціал сучасної науки (частина I) : матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 10−11 листопада 2018 р.). Київ : МЦНД, 2018. С. 57–59.

25. Двірна О.А. Розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень // Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень : праці наукової школи-семінару, (м. Ужгород, 15–20 квітня 2019 р.) / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородький національний університет», наук. ред. Л. Ф. Гуляницький. Ужгород : УНУ, 2019. С. 79–80.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях є моделями різних прикладних задач, що зумовлює інтерес до їх вивчення та широкий розвиток методів їх розв'язування. Дослідженням в області комбінаторної оптимізації присвячені роботи зарубіжних та вітчизняних вчених, серед яких І. В. Гребеннік Л. Ф. Гуляницький, В. О. Ємелічев, О. О. Ємець, М. З. Згуровський, Л. М. Колєчкіна, Б. Корте, А. А. Павлов, П. М. Пардалос, В. М. Сачков, Н. В. Семенова, І. В. Сергієнко, Ю. Г. Стоян, В. П. Шило, Н. З. Шор, С. В. Яковлев та інші. Важливу роль відіграє відображення комбінаторних об'єктів в евклідів простір, що описано в роботах О. О. Ємця, Ю. Г. Стояна, С. В. Яковлева та інших.

Ю. Г. Стояном, С. В. Яковлевим, О. О. Ємцем, Л. М. Колєчкіною та іншими розроблено підходи до розв'язування дискретних задач комбінаторної оптимізації, що засновані на зануренні комбінаторних множин в арифметичний евклідів простір. Г. П. Донцем та Л. М. Колєчкіною досліджено структурні властивості множини допустимих значень, особлива увага приділена побудові графів багатогранників комбінаторних конфігурацій, запропоновано нові підходи та методи розв'язування екстремальних комбінаторних задач.

І. В. Гребенніком, С. В. Яковлевим та іншими проведені дослідження комбінаторних оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів, побудовано моделі прикладних задач та запропоновано шляхи їх розв'язування.

Підставою для вдосконалення існуючих методів є застосування властивостей комбінаторних конфігурацій, на яких розв'язується задача, що визначаються як відображення χ множини B у деяку результуючу множину A, структура якої визначається набором обмежень Ω. Дослідженню комбінаторних конфігурацій присвячені роботи К. Бержа, В. М. Сачкова, С. В. Яковлева, І. В. Гребенніка, Л. Ф. Гуляницького, Г. П. Донця та інших.

Останнім часом особливої актуальності набуває підхід до розв’язування комбінаторних задач на графах. Апарат теорії графів є підґрунтям для пошуку нових специфічних підходів до побудови алгоритмів.

Практичним задачам притаманна умова багатокритеріальності. Вагомий внесок у розвиток теорії векторної оптимізації та розробку методів векторної оптимізації внесли українські вчені В. В. Безкоровайний, Т. Т. Лебєдєва, Л. М. Козерацька, Л. М. Колєчкіна, М. В. Новожилова, В. А. Перепелиця, Е. Г. Петров, К. Е. Петров, Н. В. Семенова, І. В. Сергієнко та інші. Серед зарубіжних вчених відомими в області багатокритеріальної оптимізації є такі вчені, як Е. Гірліч, Г. Грінберг, В. О. Ємелічев, М. Студнярські, Р. Штойер та інші. Особливістю даного класу задач є необхідність вибору розв'язку з непорівнюваних альтернатив. Названий напрямок досліджень пропонує широкий спектр методів розв’язування векторних задач, але не досліджена специфіка задач з кількома критеріями на комбінаторних конфігураціях.

Виходячи з цього, розробка методів розв’язування векторних оптимізаційних задач на комбінаторних конфігураціях є актуальним науковим завданням.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі» у відповідності з планами науково-дослідної роботи університету в рамках держбюджетної теми «Моделі і механізми соціально-економічного розвитку підприємств при стратегічному управлінні» (№ ДР 0113U002587), в розробці якої автор брала участь як виконавець.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка ефективних методів розв’язування векторних задач оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення таких завдань:

– проаналізувати існуючі методи розв’язування задач комбінаторної та векторної оптимізації;

– описати способи побудови комбінаторних конфігурацій та перехід до евклідових комбінаторних конфігурацій;

– виконати постановку векторної задачі комбінаторної оптимізації та векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях, виокремити клас векторних задач лінійної евклідової комбінаторної оптимізації;

– означити та побудувати грід-граф та структурний граф евклідових комбінаторних конфігурацій, дослідити властивості цих графів;

– розробити методи розв'язування векторних задач лінійної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях;

– створити алгоритми відповідно до розроблених методів та провести числові експерименти, обґрунтувати ефективність запропонованих методів;

– побудувати моделі прикладних задач, що зводяться до векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Об'єкт дослідження – процес моделювання та розв'язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

Предмет дослідження – моделі та методи розв'язування векторних оптимізаційних задач на комбінаторних конфігураціях.

Методи дослідження. Дослідження базується на використанні методів векторної оптимізації для розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях, а саме: метод лінійної згортки критеріїв і метод поступового введення обмежень використовуються у варіаціях координатного і горизонтального методів; метод головного критерію – у методі розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень; методи комбінаторної оптимізації, зокрема, метод відсікання – у комбінованому методі розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях; методи теорії графів – для побудови структурного графа та грід-графа; методи локалізації значення функції – як ідеї для методів розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

уперше:

– означено та побудовано грід-граф евклідових комбінаторних конфігурацій та досліджено його властивості;

– розроблено горизонтальний метод розв'язування векторних комбінаторних оптимізаційних задач, у ході виконання якого використовується подання комбінаторної конфігурації у вигляді структурного графа та проводиться послідовне занурення в граф, що дозволило значно скоротити кількість елементів, які необхідно розглянути для формування множини e-конфігурацій, які задовольняють лінійним обмеженням задачі;

– розроблено координатний метод розв'язування векторних комбінаторних оптимізаційних задач, який на відміну від існуючих методів використовує подання комбінаторних конфігурацій у вигляді набору грід-графів, що дозволяє проаналізувати групи елементів та скоротити кількість вершин, необхідних для повного аналізу графа як етапу знаходження розв'язку задачі;

набуло подальшого розвитку:

– формулювання векторних комбінаторних задач, а саме сформульована постановка векторної задачі на евклідових комбінаторних конфігураціях та виділена задача векторної лінійної евклідової комбінаторної оптимізації;

– вивчення властивостей графів евклідових комбінаторних конфігурацій, а саме узагальнено поняття структурного графа та досліджено його властивості;

– метод комбінаторного відсікання, а саме розроблено підхід, що дозволяє інтегрувати і реалізувати комбінований метод, що є синтезом методу векторної оптимізації та методу комбінаторного відсікання, який на відміну від існуючих поєднує векторні властивості задачі та комбінаторний характер множини, що дозволило застосувати вказаний метод для розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях;

– моделі векторної та комбінаторної оптимізації, а саме подані: модель задачі визначення ефективності вкладів у нерухомість; модель задачі планування виробництва; модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту; модель задачі вибору модулів при розробці програм; модель задачі оптимального розподілу масивів по рівням пам'яті комп’ютера; модель задачі вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів як моделі векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання запропонованих методів розв’язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях для прикладних задач у різних галузях, зокрема для визначення ефективності вкладів у нерухомість, планування виробництва та інші. Методи розв’язування таких задач використані в навчальному процесі при викладанні навчальних дисциплін «Математичні основи інформаційної діяльності» та «Системний аналіз інформаційної діяльності».

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [1 – 25].

Роботи [10, 15, 19, 23 – 25] виконані одноосібно. В інших роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: [1, 10] – комбінований методом на основі згортки критеріїв, [2] – описані властивості множини полірозміщень, які використовуються в методі, комбінований метод деталізовано та проілюстровано етапи розв’язування, [3] – метод на основі методу послідовного вводу обмежень та методу відсікання, модель планування виробництва, [4, 11, 12] – метод розв’язування векторних задач на поліперестановках, схема алгоритму, модель визначення ефективності вкладів у нерухомість, [5, 13] – горизонтальний метод розв’язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях розміщень, [6, 14] – горизонтальний метод як засіб розв’язування векторних задач, [7, 16 – 18, 20 – 22] – координатний метод як засіб розв’язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях, [8] – координатний метод розв’язування задач за умови багатокритеріальності на комбінаторних конфігураціях, загальний алгоритм та приклад розв’язування,

[9] – координатний метод розв'язування векторної задачі з дробово-лінійними цільовими функціями, алгоритм за методом, приклад розв'язування.

Апробація результатів дисертації. Основні ідеї, принципи, положення і результати дисертаційних досліджень пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах різних рівнів, серед яких: Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення» (Ужгород, 2019), ІІІ Міжнародна науково-практична конференція «Потенціал сучасної науки» (Київ, 2018), XIII Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених (Астана, 2018), І та IV міжнародна науково-практична конференція «Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи)» (Київ, 2011, 2017), Міжнародна науково-практична конференція «Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації» (Полтава, 2016), III, IV та VIII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» (Полтава, 2012, 2013, 2017), семінар «Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини» (Полтава, 2013), VIII та XIV міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ, 2010, 2016), International Conference «Problem of decision making under uncertainties» (Львів, 2010, Східниця, 2009), «Наукові записки» (Полтава, 2008).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 25 наукових робіт, у тому числі 9 статей в наукових фахових виданнях, які входять до переліку ДАК МОН України (з них 3 – до наукометричної бази SCOPUS), 9 тез доповідей на міжнародних, 3 – на всеукраїнських наукових конференціях.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація містить анотацію, вступ, три розділи, висновки по роботі, 6 додатків (на 10 с.), 15 рисунків (на 9 с.), 1 таблицю (на 1 с.) та список використаних джерел із 154 найменувань (на 17 с.). Повний обсяг дисертації становить 137 сторінок, з них 135 сторінок основного тексту.

1 ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1 Загальна постановка задачі векторної оптимізації та огляд методів її розв'язування

Дослідженню задач векторної (багатокритеріальної) оптимізації присвячені роботи багатьох вчених, таких як В. О. Ємелічев, В. А. Перепелиця, Е. Г. Петров, Н. В. Семенова, Т. І. Сергієнко та інші [3, 4, 71-79, 83-87, 119, 132-134 та ін.]. Розглянемо коротко загальну постановку задачі векторної оптимізації, особливості її розв'язків та деякі методи розв'язування.

Нехай на деякій множині задано функцію $h(z)$, екстремальне значення якої необхідно знайти, тоді загальна задача оптимізації матиме вигляд:

$$h(z) \to extr, \tag{1.1}$$

$$z \in Z \subseteq Z' \tag{1.2}$$

де $Z \subseteq Z'$ – множина допустимих розв'язків, що виділяється із Z' за допомогою додаткових обмежень.

При необхідності одночасної оптимізації декількох критеріїв одержуємо задачу багатокритеріальної або векторної оптимізації: при умові (1.2)

$$h_i(z) \to extr, i \in J_n \tag{1.3}$$

де $Z \subseteq Z'$ – множина допустимих розв'язків, що виділяється із Z' за допомогою додаткових обмежень,

$h_i : Z' \to R^1, i \in J_n$ – часткові критерії оптимальності,

n – кількість функцій.

Умову (1.3) можна записати у формі

$$H(z) \to extr\,, \tag{1.4}$$

де $H(z) = H(h_1(z), h_2(z), ..., h_n(z))$ – векторний критерій. Тоді задача векторної оптимізації (ЗВО) набуває форму (1.2), (1.4). Не порушуючи загальності можна вважати, що напрям оптимізації $extr = \min$, тоді ЗВО розглядатиметься у вигляді (1.2)

$$H(z) \to \min\,.$$

У скалярній задачі під розв'язком розуміють значення або множину значень для яких цільова функція приймає екстремальне значення. Коли ж критеріїв оптимальності декілька, то часто виникає ситуація, коли неможливо знайти таке значення змінної, при якому б досягалось екстремальне значення для усіх часткових критеріїв векторної цільової функції одночасно. Мова йде про пошук деякої множини оптимальних розв'язків. Дослідженню цієї проблеми приділяють увагу такі вчені як Р. Штойер, В. В. Подіновський, В. Д. Ногін, Н. В. Семенова та інші [87, 99, 119, та ін.].

Під розв'язком задачі векторної оптимізації розуміють деяке компромісне значення z, яке не обов'язково є оптимальним за окремими критеріями, але в загальному є ефективним для задачі [87, 119]. Точка $z \in Z$ є ефективною тоді і тільки тоді, коли відповідне їй значення векторного критерію $H(z)$ не домінується, тобто неможливо покращити значення жодної з цільових функцій, не погіршивши при цьому значення іншої. Опишемо переваги елементів множини Z таким чином: $z_i \succeq z_j$, якщо z_i «не гірше», ніж z_j; $z_i \approx z_j$, якщо не має різниці, який з елементів z_i, z_j обрати; $z_i \succ z_j$, якщо z_i «краще», має більшу перевагу, ніж z_j.

Нехай z_i^* – елемент, що визначає екстремальне значення h_i, тоді $h_i^* = h_i\left(z_i^*\right)$, $i \in J_n$. Якщо існує таке z^*, що $h_i^* = h_i\left(z^*\right), i \in J_n$, тобто $\exists H^* = H\left(z^*\right) = \left(h_1^*, h_2^*, ..., h_n^*\right)$, то z^* є ідеальним розв'язком ВЗО. Множина усіх таких значень є множиною ідеальних розв'язків ВЗО:

$$I\left(H, \mathrm{Z}\right) = \left\{z^* \in Z : \mathrm{H}\left(z^*\right) = H^*\right\}. \tag{1.5}$$

Проте досягнення ідеального значення є малоймовірним, але можливим є знаходження ефективного розв'язку або множини ефективних розв'язків. При розв'язуванні задач векторної оптимізації використовують поняття домінування за Парето, за Слейтером, за Смейлом, які породжують відповідні множити розв'язків. Дамо означення названих множин згідно робіт Р. Штойера, В.В. Подіновського та інших [87, 99, 119].

Означення 1.1 Множиною оптимальних за Парето $P(\mathrm{H}, Z)$ (ефективних) розв'язків (або множиною Парето) є така множина, що:

$$P(H, Z) = \left\{ \begin{matrix} z^* \in Z : \textit{не існує такого } \mathrm{z} \in \mathrm{Z}, \textit{ що } h_i\left(z\right) \geq h_i\left(z^*\right) \\ \textit{і хочаб одна нерівність строга} \end{matrix} \right\}. \tag{1.6}$$

Множина Парето складається з таких розв'язків, що не існує жодного іншого, який би покращив хоча б один з часткових критеріїв оптимальності, не погіршуючи при цьому жодного іншого.

Означення 1.2 Множиною Слейтера $Sl(F, X)$ або множиною слабо ефективних розв'язків називається така множина, що:

$$\mathrm{Sl}(H,Z)=\left\{z^{*}\in Z:\text{не існує такого } z\in Z, \text{ що } h_i\left(z\right)\geq h_i\left(z^{*}\right)\right\}. \tag{1.7}$$

Означення 1.3. Множиною Смейла $Sm(F,X)$ або множиною строго ефективних розв'язків називається така множина, що:

$$Sm(\mathrm{H},Z)=\left\{z\in Z:\forall z'\in Z\setminus\left\{z\right\} \textit{ не виконується } H(z')>H(z)\right\}. \tag{1.8}$$

Для описаних множин очевидно, що

$$I(H,Z)\subset Sm(H,Z)\subset P(H,Z)\subset Sl(H,Z). \tag{1.9}$$

Позначимо через Θ множини ефективнх розв'язків:

$$\Theta=\left\{I\left(H,Z\right), P\left(H,Z\right), Sm\left(H,Z\right), Sl\left(H,Z\right)\right\}. \tag{1.10}$$

Визначимо множину $Z^{*}\in\Theta$ ефективних розв'язків, що буде розв'язком задачі (1.2), (1.5). У деяких випадках достатньо знайти лише одне із ефективних значень $z^{*}\in Z^{*}$. Тоді задача формулюється так: знайти

$$z^{*}\in Z^{*}$$

для векторної функції (1.5) при умові (1.2).

Кожен розв'язок векторної задачі оптимізації характеризується відповідною векторною оцінкою, тому вибір оптимального розв'язку є вибором оптимальної оцінки із множини оцінок.

Множина $\Psi=H(Z)=\left\{\psi\in R^{m}:\psi=H(z),z\right\}\in Z$ називається множиною оцінок або множиною досяжних цілей (досяжних критеріальних векторів). Множина Ψ містить ті і лише ті векторні оцінки, які можуть бути досягнуті згідно умови задачі. Домінування за Парето, введене у просторі R^m, дозволяє визначити максимальні елементи множини Ψ. Вектор $\psi^0 \in \Psi$, який є максимальним по бінарному відношенню Парето, називається парето-оптимальним (оптимальним за Парето). Множина $Max_P\Psi$ максимальних за відношенням Парето оцінок із множини Ψ називається множиною Парето-оптимальних критеріальних векторів або ефективною за Парето межею множини Ψ (або межею Парето), яку позначимо через $P(\Psi)$.

Отже, у векторній оптимізаційній задачі під оптимальним розв'язком розуміють пов'язані між собою множини у просторі критеріїв та у просторі розв'язків. У більшості випадків метою розв'язування векторних задач є пошук розв'язків, оптимальних за Парето, тому у роботі методи націлені на пошук саме таких розв'язків.

На сьогодні розроблено багато методів розв'язування векторних оптимізаційних задач. Слід зауважити на деякі специфічні проблеми, які виникають при виборі критерію оптимальності. Проблема нормалізації критеріїв пов'язана з тим, що часткові критерії мають різний фізичний зміст і вимірюються у різних не порівнювальних одиницях. На цю проблему звертають увагу у своїй роботі В. В. Подіновський та В. Д. Ногін, Р. Штойер [119, 158]. Оскільки порівняти якість одержаних результатів за кожним локальним критерієм неможливо, виникає необхідність нормалізація критеріїв. Нормалізація є процесом такого перетворення критеріїв, який дозволяє їх адекватне порівняння та передує побудові принципу оптимальності.

Вибір принципу оптимальності визначає, у якому розумінні оптимальний розв'язок переважає над усіма іншими допустимими розв'язками і дає правило, за яким ці оптимальні розв'язки можуть бути знайдені. Саме принцип оптимальності є основною проблемою векторної оптимізації. яка безпосередньо пов'язана з нормалізацією критеріїв. Фізичний зміст цільових функцій задачі визначає різну пріоритетність локальних критеріїв. Це необхідно враховувати при виборі принципу оптимальності, віддаючи перевагу важливішому критерію. Проблема врахування пріоритету цільових функцій полягає у тому, як математично визначити та описати пріоритет та ступінь впливу критерію на розв'язок векторної оптимізаційної задачі.

Розвиток методів розв'язування векторних оптимізаційних задач має декілька напрямків : методи, що засновані на згортанні часткових критеріїв в один; методи, що засновані на накладанні обмежень на критерії; методи цільового програмування; методи, що засновані на відшуканні компромісного розв'язку; методи інтерактивного програмування.

У свою чергу, згідно ролі ОПР у процесі розв'язування задачі векторної оптимізації наводиться така класифікація методів багатокритеріальної оптимізації [99]: а) методи пошуку переваг без участі ОПР; б) методи, у яких ОПР приймає участь у побудові правила вибору невеликого числа Парето-оптимальних розв'язків до початку вивчення множини допустимих значень; в) інтерактивні процедури розв'язування задачі з участю ОПР, коли ОПР поступово формулює свої переваги у процесі вивчення допустимих розв'язків; г) методи, засновані на апроксимації межі Парето та інформуванні ОПР у тій чи іншому вигляді, у яких ОПР вказує переважне досяжне значення критеріїв безпосередньо серед точок апроксимації межі Парето. Одна з можливих класифікацій методів векторної оптимізації наведена в додатку В.

Розглянемо метод згортки, що описаний у роботах [87, 99, 119 та ін.]. Ще Парето ввів поняття вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = \{\alpha_i, i \in J_n\}$, які характеризують відносну важливість відповідного критерію, причому $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$. Використовуючи вагові коефіцієнти здійснюється перехід до однокритеріальної (скалярної) задачі:

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(X) \to extr .$$

Для розв'язування проблеми нормалізації в адитивних критеріях використовують нормовані значення часткових критеріїв. Часткові критерії мають різну розмірність за рахунок відмінної фізичної природи, тому просте їх додавання є некоректним. Для переходу до безрозмірного вигляду цільових функцій числові значення часткових критеріїв необхідно поділити на нормуючі дільники $f_i^0, i \in J_n$, визначені одним із таких шляхів: а) директивні значення параметрів чи критеріїв, задані замовником приймаються як нормуючі дільники $f_i^0, i \in J_n$. При цьому передбачається, що закладені в технічному завданні значення параметрів є найкращими і оптимальними; б) Максимальні (мінімальні) значення цільових функцій, досяжні в області допустимих значень задачі, приймаються як нормуючі дільники $f_i^0, i \in J_n$.

Тоді скалярну функцію в узагальненому вигляді можна подати так:

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\overline{f_i}(X)}{f_i^0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(X) \to extr .$$

Основною перевагою згортки є те, що з нею пов'язані класичні, достатні та необхідні умови оптимальності за Парето.

Проте існує ряд недоліків адитивної згортки, серед яких нестійкість розв'язку; розв'язок, що є оптимальним у розумінні сумарного критерію, може характеризуватися низькою якістю за рядом локальних критеріїв; неможливість задати вагові коефіцієнти, через недостатність або відсутність інформації про перевагу локальних критеріїв.

Крім адитивних критеріїв, ще одним видом є перехід до максимінного та мінімаксного критерію. Основа принципу максиміна полягає в тому, що при проектуванні складних систем, за наявності великої кількості часткових критеріїв встановити аналітичні співвідношення між ними дуже складно. Завдання полягає у тому, щоб знайти таке значення змінних $x \in X$, при яких

$f_i(X), i \in J_n$ – нормовані значення всіх часткових цільових функцій рівні між собою, тобто рівні деякій константі C: $f_i(X) = C, i \in N_n$.

Для подолання проблем лінійної згортки В. В. Бескоровайним, Е. Г. Петровим та іншими [4, 85-86] запропоновано використовувати функцію, побудовану на основі поліному Колмогорова-Габора:

$$P(q,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \xi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \lambda_{ij} \cdot \xi_i(x) \cdot \xi_i(x) + \ldots,$$

де n – кількість часткових критеріїв; λ_i, λ_{ij} – вагові коефіцієнти часткових критеріїв k_i та їх добутків $\lambda_i \geq 0, \lambda_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$; $\xi_i(x)$ – функція корисності часткових критеріїв k_i; $i = J_n$, q – вектор параметрів моделі. Використання описаної функції дозволяє підвищити точність параметрів моделі.

Розглянемо кілька методів, що не використовують згортки згідно. Згідно методу пріоритетів [87, 99, 119] локальні критерії впорядковуються за пріоритетністю на основі оцінки ОПР.

$\min f_1(X) = \rho_1$ (найважливіший критерій),

…

$\min f_m(X) = \rho_m$ (критерій з найнижчим пріоритетом),

де ρ_i – це компоненти відхилення змінних, які визначають i-тий критерій.

В описаному методі послідовно розв’язуються скалярні задачі, починаючи із задачі з функцією цілі з найвищим пріоритетом, і закінчуючи задачею із функцією цілі з найнижчим пріоритетом. Зазначимо, що у процесі розв’язання послідовності задач розв’язок кожної наступної задачі, не може погіршити отримані на попередніх кроках результати, одержані при розв’язуванні задач з цільовими функціями з вищим пріоритетом. Тобто, якщо

x_i оптимальне значення критерію $f_i(X)$, то для всіх $i>1$ оптимізація критерію $f_j(X)$ з нижчим пріоритетом $i>j$ не може погіршити оптимальний розв'язок x_i.

Розглянемо метод задоволених вимог [87, 99, 119], для використання якого необхідно мати інформацію про домінування однієї цільової функції над іншими та інформацію про допустимі діапазони значень критеріїв. Не порушуючи загальності виокремлюється «головний» критерій $f_1(x)$. Для решти функцій $f_i(x), i \in J_n \setminus \{1\}$, , встановлюються мінімально допустимі рівні значень $\varepsilon_i^k, \mathrm{i} \in J_n \setminus \{1\}$.

Тоді розв'язується скалярна задача

$$f_1(x) \to \max_{x \in X_k}, \ ,$$
$$X_k = \left\{ x \in X \,\middle|\, f_i(x) \geq \varepsilon_i^k, \mathrm{i} \in J_n \setminus \{1\} \right\},$$

та визначається ефективна альтернатива x^*, для якої розраховується її оцінка

$$y^* = (f_1(x^*), f_2(x^*), .., f_n(x^*)).$$

Аналізується одержане значення «головного» критерію. Аналіз проводиться таким чином: а) якщо значення «головного» критерію не задовольняє ОПР, по процедура починається спочатку з тим самим «головним» критерієм, але іншими мінімально допустимими рівнями значень для інших цільових функцій; б) якщо значення «головного» критерію задовольняє ОПР, і можливе його погіршення з метою покращення значень інших цільових функцій, то процедура починається спочатку, але «головним» обирається інший критерій; в) якщо значення «головного» критерію задовольняє ОПР, і його погіршення недопустиме, то процедура закінчується.

Згідно методу послідовних поступок [87, 99, 119] проводиться упорядкування критеріїв за спаданням пріоритетності $f_1 \succ f_2 \succ ... \succ f_n, n \in N_n$. Визначається оптимальне значення для першого критерію: $f_1^* = \min f_1(x)$. Визначається величина допустимої поступки $(f_1^* + \Delta f_1)$, до системи обмежень додається нерівність $f_1(x) \le f_1^* + \Delta f_1$ і знаходиться оптимальне значення другого за важливістю критерію. Коли процедура виконана для кожного з m критеріїв і задані поступки не перебільшені то розв'язок вважається оптимальним.

За умови, що ЗВО розв'язується на комбінаторній множині, одержуємо задачу векторної комбінаторної оптимізації, тому необхідно розглянути загальну постановку комбінаторної задачі та методи її розв'язування.

1.2 Задачі комбінаторної оптимізації та огляд методів їх розв'язування

Задачам евклідової комбінаторної оптимізації присвячені роботи І. В. Гребенніка, Л. Ф. Гуляницького, В. О. Ємєлічева, О. О. Ємця, Л. М. Колєчкіної, П. М. Пардалоса, Н. В. Семенової, Ю. Г. Стояна, С. В. Яковлева та інших [7-15, 17-37, 70, 81, 105-116, 136-138, 140-143 та ін.]. Розглянемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації та деякі методи розв'язування комбінаторних задач.

Нехай на комбінаторній множині Π' задано відображення $\varphi : \pi' \to R^1$. Задано $\Pi \subseteq \Pi'$ – множину, що формується з Π' за допомогою накладання певних обмежень. Тоді загальна постановка задачі комбінаторної оптимізації (ЗКО) формулюється так: знайти

$$\pi^* = \arg \underset{\pi \in \Pi \subseteq \Pi'}{extr} \varphi(\pi), \tag{1.11}$$

де Π – множина допустимих розв'язків задачі, що виділяється з комбінаторної множини Π' обмеженнями задачі.

Розв'язком задачі (1.11) буде деякий елемент π^*, для якого досягається відповідна екстремаль $\varphi^* = \varphi(\pi^*)$. Інколи під розв'язком розуміють пару $\langle \pi^*, \varphi^* \rangle$, де є $\varphi^* = \varphi(\pi^*)$.

Під повним розв'язком ЗКО розуміють множину

$$\Pi^* = \left\{ \pi^* \in \Pi : \pi^* = \arg \underset{\pi \in \Pi \subseteq \Pi'}{extr}\, \varphi(\pi) \right\}. \tag{1.12}$$

В залежності від вимог до розв'язку розв'язуються або задача (1.11), або задача (1.12). Розглянемо постановку векторної задачі комбінаторної оптимізації.

Задачі комбінаторної оптимізації з точки зору обчислень є одними з найскладніших. Універсальний метод, що передбачає повний перебір варіантів має своє місце при малій розмірності, але зі збільшенням потужності комбінаторної множини та накладанням значної кількості обмежень на задачу є неефективним.

Існуючі комбінаторні методи дають можливість застосування до різних оптимізаційних комбінаторних задач. Їх суть полягає у скороченому переборі скінченої множини, що містить можливі розв'язки задачі. Найпоширенішими методами комбінаторної оптимізації є метод гілок та меж, метод побудови послідовності розв'язків, метод послідовного аналізу варіантів, метод локальної оптимізації, метод комбінаторного відсікання, метод динамічного програмування та апроксимаційно-комбінаторний метод. При розв'язуванні комбінаторних задач застосовують також евристичні та метаевристичні алгоритми, які досить швидко дають розв'язок, не гарантуючи його оптимальності. На початку розвитку теорії дискретної оптимізації велика увага приділялася розробці точних методів, у наш час значного поширення за рахунок практичного застосування набули наближені методи комбінаторної оптимізації, детально описані Л. Ф. Гуляницьким. Розглянемо ідеї деяких точних методи.

І. В. Сергієнком та М. Ф. Каспшицькою описані послідовні алгоритми оптимізації, такі як метод послідовного виключення можливостей та метод послідовного аналізу варіантів, що є формалізованою схемою прийняття рішень, розробленою в Інституті кібернетики В. М. Глушкова. Основоположною ідеєю методу послідовного аналізу варіантів є подання процесу розв'язання у вигляді багатоступінчатої структури. Кожен ступінь визначається наявністю тих або інших властивостей у підмножини варіантів, що перевіряються, і веде або до безпосереднього скорочення початкової множини варіантів, або задає можливість такого скорочення в майбутньому.

Із збільшенням розмірності оптимізаційних задач виникали проблеми громіздких обчислень. Послідовні обчислювальні технології розв'язування не були раціональними з точки зору використання ресурсів. Варіантом розв'язання проблеми стало використання паралельних обчислень. Проте, важливою передумовою їх застосування є вимога до алгоритму, структура якого має дозволяти розпаралелити обчислення. Таким методом є метод гілок та меж, що розроблений для розв'язування задач дискретної оптимізації.

Ідея методу гілок та меж полягає у послідовному розбитті множини допустимих розв'язків на підмножини та відкиданні тих з них, які не містять розв'язку. Трудомісткість роботи алгоритму за методом гілок та меж у послідовній реалізації визначається числом розв'язаних оціночних задач, а загальний час роботи алгоритму вважають приблизно рівним добутку числа розв'язаних оціночних задач і середнього часу розв'язування однієї такої задачі. Проте, деревовидна структура алгоритму дає можливість реалізувати ідею паралельних обчислень – проводити незалежно на різних процесорах розрахунки по різних гілках дерева. Експерименти по реалізації методу виявили, що продуктивність зростає, проте недоліком є недотримання балансу навантаження процесорів. Зокрема, І.Х. Сигал у роботах [145] ілюструє, що ефективність паралельної реалізації виявляється чутливою до структури дерева розгалуження і вибору параметрів алгоритму. Крім того, метод гілок і меж передбачає розв'язування ряду оціночних задач з метою знаходження верхньої оцінки, за якою буде проводитись аналіз підмножини. Виникає одразу кілька проблем – вибір підмножини, вибір функції переваги. Проблемою цього методу є вибір способу визначення межі, оскільки її точне значення не завжди легко знайти.

Ще одним відомим методом є метод комбінаторного відсікання, ідея якого для дискретних задач була запропонована Данцингом та одержала подальший розвиток у працях Гоморі. Його ефективність прямо пропорційна ефективності способу побудови відсікання, що дало поштовх розробці великої кількості методів цієї групи. Відомі своїми роботами у даному напрямі такі вчені, як Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна та ін. [51, 146].

Ідея групи методів відсікання полягає у зануренні дискретної множини допустимих розв'язків у відповідну неперервну опуклу область, тобто у відкиданні умов дискретності. До одержаної регулярної задачі застосовуються стандартні методи оптимізації. Ефективність застосування методу відсікання прямо пропорційна ефективності способу побудови відсікань. Методи відсікання описані для задач комбінаторної оптимізації з лінійними та дробово-лінійними цільовими функціями з додатковими лінійними обмеженнями на множинах перестановок, поліперестановок, розміщень та полірозміщень. Недоліком алгоритмів, що побудовані за цими методами є схильність до накопичення великої кількості обмежень-відсікань. Це спричиняє ситуацію, коли обмеження, які не впливають на розв'язок задачі після певної кількості кроків, зберігаються у пам'яті, що у свою чергу вимагає багато таких ресурсів, як час, пам'ять тощо.

Дана група методів займає вагоме місце та має результати, але особливістю його є те, що системи, які описують комбінаторні багатогранники і використовуються як математична інтерпретація комбінаторних множин у задачах, описують не виключно вершини багатогранника, що збігаються з комбінаторними множинами.

Для задачі пошуку заданого значення лінійної функції Г. П. Донцем та Л. М. Колєчкіною розроблено ряд методів з використанням теорії графів. Ці методи можуть бути використані для розв’язування комбінаторних оптимізаційних задач.

Перетином галузі векторної та комбінаторної оптимізації є векторні задачі на комбінаторних множинах, що вимагає розробки нових методів. Важливу роль відіграє множина, на якій розв’язується задача. Робота присвячена розв’язуванню задач на комбінаторних конфігураціях, тому розглянемо на побудову множини евклідовх комбінаторних конфігурацій.

1.3 Множини евклідових комбінаторних конфігурацій

Опис комбінаторних множин та їх властивості подані у роботах багатьох вчених, зокрема В. І. Баранова, І. В. Гребенника, Г. П. Донця, В. А. Ємелічева, М. М. Ковальова, М. К. Кравцова, В. Н. Сачкова, Н. В. Семенової, Б. С. Стєчкіна, Ю. Г. Стояна, С. В. Яковлева та інших [2, 7-9, 26, 27, 91, 99, 111 та ін.]. При розв’язуванні задач комбінаторної оптимізації найчастіше використовуються перестановки, розміщення, сполучення тощо.

В. Н. Сачковим на основі робіт Г. Пойа введено поняття конфігурації [91] для більш строгої формалізації комбінаторних об’єктів з метою уникнення проблем словесних накопичень, що виникають з ускладненням конструкцій. У роботі [111] описані властивості евклідових комбінаторних конфігурацій та їх множини.

Нехай задано множину $B=\{b_1, b_2,..., b_m\}$, а $A=\{a_1, a_2,.., a_n\}$ – скінчена лінійно впорядкована множина. Нехай $\chi: B \to A$ відображення, що ставить у відповідність кожному елементу $b \in B$ єдиний елемент $a \in A$, тобто $a=\chi(b)$. Областю визначення відображення χ є множина B, а A – область його значень. Визначимо конфігурацію згідно [111] як відображення $\chi: B \to A$, що задовольняє деякому комплексу обмежень Λ.

За умови скінченності множин U та V мова йде про комбінаторну конфігурацію. Саме в такому розумінні її розглядають К. Берж, Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, І. В. Гребенник. У роботах Л. Ф. Гуляницького множина V може бути зчисленою, тоді відображення $\chi: B \to A$ визначає комбінаторний об’єкт.

У результаті відображення $\chi: B \to A$ одержимо впорядковану послідовність π з елементів множини A:

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_m} \end{pmatrix} = \left[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m} \right], \tag{1.13}$$

де $j_i \in J_n, i \in J_m$. Для описаної конфігурації π будемо використовувати позначення $\pi = \left[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m} \right]$.

Для більшості випадків можна уніфікувати множину B у розумінні того, що елементи множини можуть бути замінені їх порядковими номерами. Встановивши бієктивне відображення між B та J_m, одержимо перетворення відображення $\phi: B \to A$ у відображення

$$\phi: J_m \to A, \tag{1.14}$$

при цьому J_m називають нумеруючою множиною. Зауважимо, що елементи конфігурації π не змінюються, тобто

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_m} \end{pmatrix} = \left[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m} \right]. \tag{1.15}$$

Структура множини A визначається порядком елементів, тобто $a_i \prec a_{i+1}, i \in J_{n-1}$. Отже, описану комбінаторну конфігурацію можна подати кортежем [111]

$$\langle \phi, A, \Lambda \rangle, \tag{1.16}$$

де ϕ – відображення вигляду (1.14), яке задовольняє комплексу обмежень Λ, A – результуюча множина, елементи якої є строго впорядкованими.

Розглянемо як результуючу множину при формуванні конфігурації (1.16) множину [111]

$$A^* = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n\}, \tag{1.17}$$

що є сукупністю векторів однакової розмірності простору R^k, тобто

$$\alpha_t = (a_{1t}, a_{2t}, ..., a_{nt})^T \in R^k, \quad t \in J_n, \tag{1.18}$$

а в якості Λ – розглянемо множину відповідних обмежень, що визначають необхідну конфігурацію. Тоді, відповідно до (1.15),

$$\pi = \left[\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_m}\right]. \tag{1.19}$$

Кожній конфігурації вигляду (1.19) поставимо у взаємно-однозначну відповідність вектор

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) \in R^N, N = k \cdot m, \tag{1.20}$$

компоненти якого є впорядкованим набором елементів мультимножини

$$A(x)=\left\{a_{1j_1},a_{1j_2},\ldots,a_{1j_m},a_{2j_1},a_{2j_2},\ldots,a_{2j_m},a_{kj_1},a_{kj_2},\ldots,a_{kj_m}\right\}, \tag{1.21}$$

задавши таким чином бієктивне відображення ψ таке, що

$$x=\psi\left(\pi\right), \pi=\psi^{-1}(x). \tag{1.22}$$

Означення 1.4. Евклідовою комбінаторною конфігурацією назвемо відображення

$$\psi:(\phi, A^*, \Theta)\rightarrow R^N, \tag{1.23}$$

де $\phi: J_m\rightarrow A^*$, A^* – результуюча множина вигляду (1.17)-(1.18), Θ – система обмежень на відображення ϕ, ψ [111].

Означена евклідова комбінаторна конфігурація

$$\left\langle \psi, \phi, A^*, \Theta\right\rangle \tag{1.24}$$

є образом комбінаторної конфігурації (1.14) в арифметичному евклідовому просторі R^N при заданих відображеннях ϕ, ψ і визначає вектор x вигляду (1.20). Число N будемо називати розмірністю евклідової комбінаторної конфігурації, а мультимножину $A(x)$ у – індукуючою мультимножиною евклідової комбінаторної конфігурації.

Надалі розумітимемо відображення φ у відповідності з (1.23) і не будемо накладати інших обмежень на його вид. Покладемо $\Theta=\Lambda$, тоді формула (1.23) набуде вигляду

$$\psi : (\phi, A^*, \Lambda) \to R^N , \tag{1.25}$$

а формула (1.24) перетвориться у

$$\left\langle \psi, \phi, A^*, \Lambda \right\rangle . \tag{1.26}$$

Нехай Π' – множина усіх можливих комбінаторних конфігурацій вигляду (1.13), що співпадає із множиною конфігурацій вигляду (1.16). Нехай існує $k \in R^k$ таке, що $A = A^*$, де A^* має вигляд (1.17) – (1.18).

При відображенні в R^N, множина Π буде сукупністю всіх евклідових комбінаторних конфігурацій вигляду (1.26):

$$E = \psi(\Pi') \subset R^N . \tag{1.27}$$

Таке відображення є зануренням множини Π' в арифметичний евклідовий простір. Маємо E – множину евклідових комбінаторних конфігурацій (e-конфігурацій) [111]. Відповідно (1.22) справедливим є також

$$\Pi' = \psi^{-1}\left(E\right). \tag{1.28}$$

У роботах [111] використовується клас евклідових комбінаторних множин (e-множин), елементи яких відрізняються або складом компонент, або порядком, що дає можливість розглядати замість них їх образи в арифметичному евклідовому просторі – спеціальні комбінаторні множини (s-множини). У роботі [111] s-множини вигляду (1.27) виділено у клас множин евклідових комбінаторних конфігурацій (C-множин). s-множини, що є прообразами C-множин, будуть множинами комбінаторних конфігурацій ($\mathcal{E}_c$-множинами).

Надалі будемо вважати, що E – це множина C-множин, породжених e-конфігураціями вигляду (1.26), у яких відображення ψ має вигляд (1.25):

$$E=\left\{x\in R^{N} : x-e\text{-}\textit{конфігурація вигляду}\ (1.26)\right\}. \tag{1.29}$$

Виділимо із класу C-множин два підкласи.

Означення 1.5. C-множину вигляду (1.29) назвемо множиною e-конфігурацій перестановок, якщо індукуючі множини усіх його елементів співпадають, тобто

$$\forall x,y\in E \quad \tilde{A}(x)=\tilde{A}(y). \tag{1.30}$$

Означення 1.6. C-множину вигляду (1.29) назвемо множиною e-конфігурацій розміщень, якщо воно містить елементи, індукуючи множини яких різні, тобто

$$\exists x,y\in E \quad \tilde{A}(x)\neq\tilde{A}(y). \tag{1.31}$$

Для того, щоб задати e-конфігурації у термінах координат, із яких складаються їх вектори введемо такі означення згідно [111].

Означення 1.7. Мультимножину $\tilde{A}=\left\{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,...,\tilde{a}_\eta\right\}$ назвемо індукуючою для множини E вигляду (1.29), якщо вона задовольняє умовам

$$\forall x\in E \quad \tilde{A}(x)\subseteq\tilde{A}, \tag{1.32}$$

$$\forall\tilde{a}\in\tilde{A}\,\exists x\in E : \tilde{A}(x)\not\subset\tilde{A}\setminus\left\{\tilde{a}\right\}. \tag{1.33}$$

Тоді замість означенњ 1.5, 1.6 можна використовувати такі.

Означення 1.7. C-множину вигляду (1.29) назвемо множиною e-конфігурацій перестановок, якщо індукуюча її мультимножина співпадає з індукуючою мультимножиною кожного і її елементів, тобто

$$\forall x \in E \quad \tilde{A}(x) = \tilde{A}.$$

Означення 1.8. C-множину вигляду (1.29) назвемо множиною e-конфігурацій розміщень, якщо індукуюча мультимножина усіх її елементів є власною підмножиною мультимножиною, що індукує множину E, тобто

$$\forall x \in E \quad \tilde{A}(x) \subset \tilde{A}.$$

Отже, розглянуто множини e-конфігурацій, їх побудова та означення.

Висновки до першого розділу

У першому розділі розглянуто векторні задачі оптимізації, поняття ефективного розв’язку задачі, деякі методи розв’язування, що можуть бути поширені на розв’язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях.

Розглянуто задачі комбінаторної оптимізації з одним критерієм оптимальності та зроблено короткий огляд існуючих методів розв’язування.

Розглянуто поняття комбінаторних конфігурацій та перехід до евклідових комбінаторних конфігурацій, наведені означення деяких e-конфігурацій.

Поєднання векторного критерію та комбінаторних властивостей задачі призводить до векторної задачі на комбінаторних конфігураціях, що вимагає її дослідження та розробки нових методів розв’язування, що і є предметом дослідження.

Основні результати першого розділу опубліковано в роботах [69, 88, 89].

Список джерел, які використано у розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1–15, 17–42, 44–49, 60, 70–87, 91–154].

2 ВЕКТОРНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

2.1 Постановка векторної задачі комбінаторної оптимізації

Нехай Π' множина комбінаторних конфігурацій за Бержем, а $\Pi \subseteq \Pi'$ підмножина, що виділяється із множини Π' за допомогою додаткових обмежень. Задано декілька відображень $\varphi_i : \Pi' \to R^1, i \in J_n$, екстремальні значення яких необхідно знайти. Тоді їх можна записати у вигляді векторного критерію $\Phi(\pi) = \left(\varphi_1(\pi), \varphi_2(\pi), ..., \varphi_n(\pi)\right)$. Тоді задача (1.2) – (1.5) матиме вигляд: знайти усі такі π, що

$$\Phi\left(\pi\right) \to extr, \tag{2.1}$$

$$\pi \in \Pi \subseteq \Pi'. \tag{2.2}$$

Нехай π_i^* – елемент, що визначає екстремальне значення φ_i, тоді $\varphi_i^* = \varphi_i\left(\pi_i^*\right)$, $i \in J_n$. Множина ідеальних розв’язків ВЗО (1.5) на множині Π' визначається так

$$I\left(\Phi, \Pi\right) = \left\{\pi^* \in \Pi : \Phi\left(\pi^*\right) = \Phi^*\right\}. \tag{2.3}$$

Нехай маємо $\pi', \pi'' \in \Pi$, якщо для всіх φ_i, $i \in J_n$ виконуються нерівності $\varphi_i\left(\pi'\right) \geq \varphi_i\left(\pi''\right)$ за умови, що $extr = \max$ і $\exists j \in J_n \; \varphi_j\left(\pi'\right) > \varphi_j\left(\pi''\right)$, то говорять, що π' переважає π'' на Π, тобто $\pi' \succ \pi''$. Відповідно кращим є значення $\Phi(\pi')$, ніж $\Phi(\pi'')$, тобто $\Phi(\pi') \geq \Phi(\pi'')$. Зауважимо, що $\left(\Phi\left(\pi'\right)=\Phi\left(\pi''\right)\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in J_n\ \varphi_i\left(\pi'\right)=\varphi_i\left(\pi''\right)\right)$.

Множина оптимальних за Парето розв'язків (1.6), на множині Π' матиме вигляд:

$$P(\Phi,\mathrm{H}) = \left\{ \begin{matrix} \pi^* \in \Pi : \textit{не існує такого } \pi \in \Pi, \textit{ що } \varphi_i\left(z\right) \geq \varphi_i\left(z^*\right), \\ i \in J_n \textit{ і хочаб одна нерівність строга} \end{matrix} \right\}. \tag{2.4}$$

Множиною слабо ефективних розв'язків або оптимальних за Слейтером (1.7) на множині Π' матиме вигляд:

$$\mathrm{Sl}(\Phi,\Pi) = \left\{\pi^* \in \Pi : \text{не існує такого } \pi \in \Pi, \text{ що } \varphi_i\left(\pi\right) \geq \varphi_i\left(\pi^*\right), i \in J_n\right\}. \tag{2.5}$$

Множиною строго ефективних розв'язків або множина Смейла (1.8) на множині Π' матиме вигляд:

$$Sm(\Phi,\Pi) = \left\{\pi \in \Pi : \forall \pi' \in \Pi \setminus \left\{\pi\right\} \textit{ не виконується } \varphi_i(\pi') > \varphi_i(\pi), i \in J_n\right\}. \tag{2.6}$$

Відповідно розв'язком ВЗКО буде одна з описаних вище множин. Множина, що відповідає (1.10) матиме вигляд

$$\Xi_\Pi = \left\{I\left(\Phi,\Pi\right), \mathrm{P}\left(\Phi,\Pi\right), Sl\left(\Phi,\Pi\right), Sm\left(\Phi,\Pi\right)\right\}, \tag{2.7}$$

тобто розв'язком буде множина $\Pi^* \subset \Xi_\Pi$. Зазначимо також, що задачу можна визначити як знаходження множини Π^* або як знаходження елемента $\pi^* \in \Pi^*$.

Сформулюємо задачу знаходження одного розв'язку, що належить визначеній множині з Ξ_Π: для (2.1), (2.2) знайти таке

$$\pi^* \in \Pi^*, \tag{2.8}$$

де $\Pi^* \subset \Xi_\Pi = \{I(\Phi,\Pi), \mathrm{P}(\Phi,\Pi), Sl(\Phi,\Pi), Sm(\Phi,\Pi)\}$ – множина розв’язків задачі.

Часто у векторних задачах достатньо знайти не всю множину ефективних розв’язків, а деяку її частину. Введемо позначення: $\Pi_P^* \subseteq P(\Phi,\Pi)$ – підмножина множини оптимальних за Парето, та відповідні підмножини $\Pi_I^* \subseteq I(\Phi,\Pi)$, $\Pi_{Sl}^* \subseteq Sl(\Phi,\Pi)$, $\Pi_{Sm}^* \subseteq Sm(\Phi,\Pi)$ ідеальних, слабо ефективних та строго ефективних розв’язків. Найчастіше шукають точки, що належать саме множині Парето, тому надалі у задачах шукатимемо множину Π_P^*.

Задача (2.1)-(2.2) у разі знаходження деякої підмножини ефективних розв’язків матиме вигляд: знайти множину

$$\Pi_P^* \subseteq P(\Phi,\Pi), \tag{2.9}$$

$$\Phi(\pi) = (\varphi_1(\pi),...,\varphi_n(\pi)) \to extr, \tag{2.10}$$

$$\pi \in \Pi \subseteq \Pi'. \tag{2.11}$$

Отже, маємо задачу векторної оптимізації у комбінаторній постановці, тобто векторну (або багатокритеріальну) задачу комбінаторної оптимізації (ВЗКО). Із зазначеного вище очевидно, що в залежності від вимог, розв’язується задача знаходження множини ідеальних, ефективних, слабо чи строго ефективних розв’язків, або лише задача знаходження лише одного розв’язку (задача (2.1),(2.2),(2.8)), що належить цій множині, або задача знаходження деякої підмножини розв’язків (зокрема підмножини Парето у задачі (2.9)-(2.11)).

ВЗКО класифікуємо за ознакою належності відповідній множині та за необхідністю знаходження елемента множини чи множини розв’язків. Результати класифікації подані на рисунку 2.1.

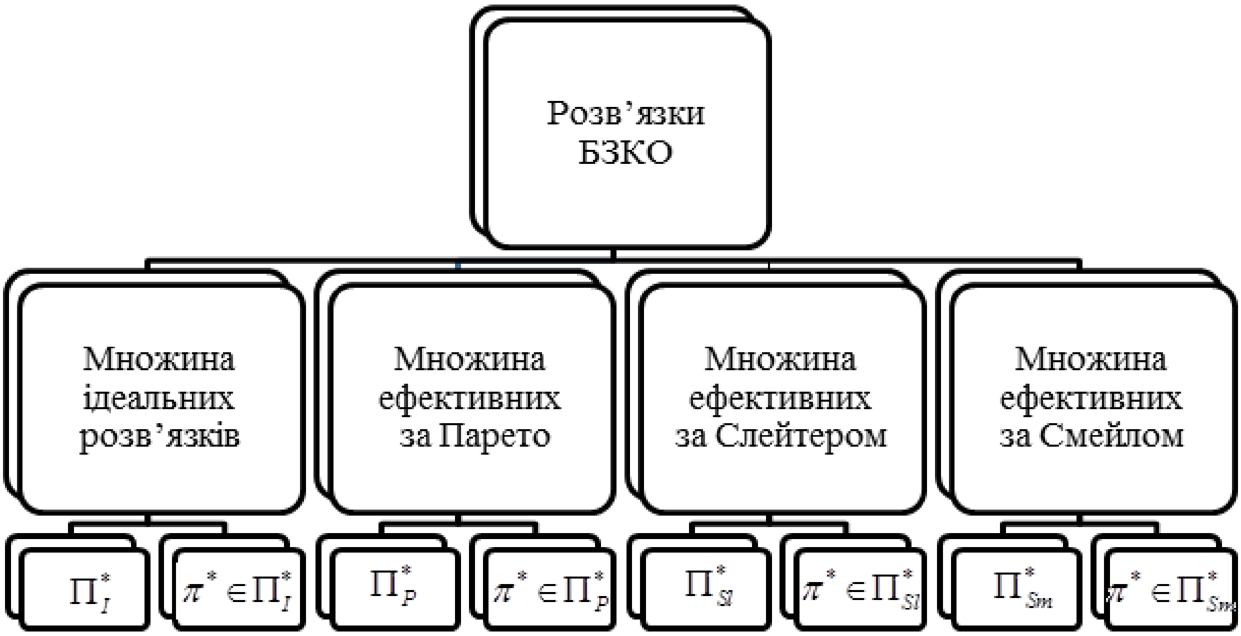


Рисунок 2.1 – Класифікація розв'язків багатокритеріальної задачі комбінаторної оптимізації

Для подальшого розгляду необхідним є перехід до простору евклідових комбінаторних конфігурацій та відповідних задач. Розглянуто відображення множини Π комбінаторних конфігурацій за Бержем у множину E евклідових комбінаторних конфігурацій (e-конфігурацій). Необхідним є відображення поставлених векторних задач комбінаторної оптимізації в евклідів простір для подальшого їх розв'язування.

2.2 Задачі векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях

При зануренні комбінаторних конфігурацій в арифметичний простір відбувається перехід до евклідової комбінаторної оптимізації, а описані вище задачі у комбінаторній постановці (2.1),(2.2),(2.8) та (2.9)-(2.11) матимуть відповідні аналоги.

Нехай в задачі (1.2), (1.4) $Z' = X \subseteq R^m$ множина евклідових комбінаторних конфігурацій у просторі R^m, а $Z = D \subseteq X$ – множина допустимих значень e-конфігурацій, що виділяється із X за допомогою додаткових обмежень. Відображенню $\varphi_i : \Pi' \to R^1, i \in J_n$ відповідатимуть функції $f_i : \mathrm{X} \to \mathrm{R}^1, i \in J_n$ ($f_i(x)$). Тоді задача (1.2), (1.4) набуде вигляду

$$F(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x) \right) \to extr, \tag{2.12}$$

$$x \in D \subseteq X \,. \tag{2.13}$$

Задача (2.12)-(2.13) є задачею векторної евклідової комбінаторної оптимізації (ЗВЕКО).

Припустимо, що усі складові векторного критерію оптимальності є лінійними функціями, тобто

$$f_i(x) = \left\langle c_{ij} x_j \right\rangle, i \in J_n, \; j \in J_m \,, \tag{2.14}$$

а D виділяється з X за допомогою лінійних обмежень.

Тоді задача (2.12)-(2.13) набуває вигляду: за умови (2.13) знайти множину X^* оптимальних значень функцій

$$f_i(x) = \left\langle c_{ij} x_j \right\rangle \to extr, i \in J_n, \; j \in J_m \,, \tag{2.15}$$

де $extr = \{\min, \max\}$ – напрям оптимізації,

D формується обмеженнями вигляду

$$\left\langle a_{ij} x_j \right\rangle \le b_i, i \in N_k, \; j \in N_m \,. \tag{2.16}$$

Задачу (2.13)-(2.15) назвемо векторною задачею лінійної евклідової комбінаторної оптимізації (ВЗЛЕКО).

Завданням роботи є розв'язування ЗВКО за допомогою ЗВЕКО, що можливо, якщо виконується умова

$$\exists \psi : \Pi' \to R^m : X^* = \psi\left(\Pi^*\right), \Pi^* = \psi^{-1}\left(X^*\right), \tag{2.17}$$

тобто ЗВКО та ЗВЕКО еквівалентні.

Надалі обмежимось розглядом ВЗЛЕКО (2.13), (2.15), (2.16).

Розв'язком задачі (2.12)-(2.13) є множина X^* ефективних розв'язків. При переході від комбінаторної до евклідової комбінаторної оптимізації одержимо відповідні множини $I\left(F, \mathrm{X}\right)$ – ідеальних, $P\left(F, \mathrm{X}\right)$ – оптимальних за Парето, $Sl(F, \mathrm{X})$ – слабо ефективних та $Sm(F, X)$ – строго ефективних розв'язків, що відповідають множинам (2.3)-(2.6) та матимуть вигляд:

$$I\left(F, X\right) = \left\{x^* \in X : F\left(x^*\right) = F^*\right\}, \tag{2.18}$$

$$P\left(F, X\right) = \left\{\begin{array}{c} x \in X : \nexists x' \in X \text{ } \textit{такого, що } f_i\left(x'\right) \geq f_i\left(x\right), i \in J_n \\ \textit{і хочаб одна нерівність строга} \end{array}\right\}, \tag{2.19}$$

$$Sl\left(F, X\right) = \left\{x \in X : \nexists x' \in X \text{ } \textit{такого, що } f_i\left(x'\right) \geq f_i\left(x\right), i \in J_n \right\}, \tag{2.20}$$

$$Sm\left(F, X\right) = \left\{x \in X : \nexists x' \in X \setminus \left\{x\right\} \textit{ такого, що } f_i\left(x'\right) > f_i\left(x\right), i \in J_n\right\}. \tag{2.21}$$

Тоді множина (2.7) матиме вигляд

$$\Xi_X = \left\{I\left(F, X\right), \mathrm{P}\left(F, X\right), Sl\left(F, X\right), Sm\left(F, X\right)\right\}. \tag{2.22}$$

При розв'язуванні задачі у загальному випадку необхідно знайти деяку множину $X^* \in \Xi_X$. Позначимо шукані множини відповідно $X_I^* = I(F, X)$,

$X_P^* = P(F,X)$, $X_{Sl}^* = Sl(F,X)$, $X_{Sm}^* = Sm(F,X)$. Надалі у задачах будемо шукати множину X_P^* оптимальних за Парето розв'язків. Як зазначалося вище, згідно вимог поставленої задачі часто достатнім є знаходження частини множини оптимальних розв'язків або одного розв'язку, що цій множині належить. Одержимо дві задачі.

Перша – задача пошуку частини множини ефективних розв'язків : знайти

$$X^* \subseteq X_P^* \tag{2.23}$$

для функцій (2.15) за умов (2.13), (2.16).

Друга – задача пошуку одного представника із множини X_P^* : знайти

$$x^* \in X_P^* \tag{2.24}$$

для функцій (2.15) за умов (2.13), (2.16).

Отже, розв'язком задачі (2.13), (2.15), (2.16), (2.23) буде деяка підмножина ефективних розв'язків. Така вимога дозволяє скорочувати кількість необхідних етапів розв'язку задачі. Для задачі (2.13), (2.15), (2.16), (2.24) можна використовувати методи, що націлені на знаходження одного ефективного розв'язку, що є цілком достатнім для більшості практичних задач.

Множиною X можуть бути множини евклідових комбінаторних конфігурацій розміщень, перестановок, поліроміщень, поліперестановок та інші. Властивості евклідових комбінаторних конфігурацій є основою для розробки методів розв'язування поставлених задач. Одним із важливих напрямків є зв'язок комбінаторних конфігурацій із комбінаторними многогранниками та їх графами. Таке подання евклідових комбінаторних конфігурацій дозволяє структурувати множини e-конфігурацій для аналізу значень функцій на них. Розглянемо цей зв'язок детальніше.

2.3 Властивості графів множин евклідових комбінаторних конфігурацій

Множина таких евклідових комбінаторних конфігурацій як конфігурації перестановок, розміщень, поліперестановок, полірозміщень співпадають з множиною вершин відповідних багатогранників. Наприклад, опуклою оболонкою загальної множини e-конфігурацій перестановок $conv\, P_{nk}(G)$ є переставний багатогранник $M_{nk}(G)$, що описується системами (1.16), (1.17).

Властивості багатогранника $M_{nk}(G)$ використовуються для побудови методів розв'язування задач оптимізації на комбінаторних конфігураціях. Вершини та ребра багатогранника можна подати у вигляді відповідного графа.

Важливі результати дає зв'язок комбінаторних конфігурацій з теорією графів, який досліджено у працях Г. П. Донця, В. А. Ємелічева, М. М. Ковальова, Н. В. Семенової, Л. М. Колєчкіної [26, 27, 99]. Багато задач дискретної оптимізації подаються у термінах теорії графів. Теоретико-графові моделі найбільш широко використовуються у сфері побудови та дослідження комунікаційних мереж, при вивченні хімічних та генетичних структур, електричних ланцюгів та ін.

Графом G називається фігура, що може бути подана парою (V,U), де $V=\{v_1,v_2,..,v_m\}$ – не порожня скінчена множина вершин, а $U=\{u_1,u_2,..,u_n\}$ – скінчена множина орієнтованих чи неорієнтованих ребер, що з'єднують пари вершин. Нехай ребро з'єднує вершини v_i,v_j, тобто $u_{ij}=(v_i,v_j)$, тоді вони є суміжними вершинами, що інцидентні одному ребру u_{ij}.

Нехай X – множина e-конфігурацій, а $G(V,U)$ – деякий граф, для кого кількість вершин збігається з потужністю множини X. Здійснимо бієктивне відображення ψ елементів множини $X \subset R^n$ у множину V вершин графа G, тобто кожному елементу $x \in X \subset R^n$ поставимо у відповідність $v \in V$, таким чином маємо $G^X(V,U)$ – граф множини e-конфігурацій X.

Вважатимемо позначення $G^X(V,U)$ та G^X ідентичними.

Означення 2.1. Якщо існує бієктивне відображення $\psi : X \to V$, де X – множина e-конфігурацій, а V – множина вершин деякого графа G^X, а також визначено Ψ – умови суміжності вершин, то G^X є графом множини e-конфігурацій X.

Для зручності будемо розглядати вершини графа G^X як відповідні елементи e-конфігурацій, тобто вершини відображені в евклідів простір.

Для багатогранників e-конфігурацій визначені умови суміжності. Наприклад, згідно [27] для переставного багатогранника M_{nk}(G), щоб вершини були суміжні з вершиною $x = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, .., a_{\alpha_n})$, необхідною умовою є їх одержання з x шляхом однієї перестановки сусідніх компонент і тільки їх. Відповідні вершини графа переставного багатогрнанника є також суміжними.

Для множини розміщень складність виникає тоді, коли множина перестає бути вершинно розташованою, тобто деякі точчки e-конфігурацій містяться на ребрах багатогранника, що відображається й у графі. Виникає питання побудови такого графа або набору графів, які б дозволили розглядати усі e-конфігурації як вершини.

Якщо визначити іншу умову суміжності вершин графа e-конфігурацій, ніж наведена вище, одержимо новий граф.

Означення 2.2. Вершинами графа G^X, суміжними з вершиною $v = x = \left(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, .., a_{\alpha_n}\right)$, назвемо ті і тільки ті вершини, одержані з x шляхом перестановки довільних компонент індукуючої множини. $e_i, e_j \forall i, j \in J : i \neq j$.

Означення 2.3. Транспозиційним графом G^X_{Tr} назвемо такий граф G^X, суміжні вершини якого визначаються згідно означення 2.2.

На основі транспозиційного графа побудуємо грід-граф евклідової комбінаторної конфігурації, попередньо ввівши відповідні означення.

2.3.1 Побудова грід-графів евклідових комбінаторних конфігурацій

Впорядкувати вершин G_{Tr}^{X} певним чином дає можливість аналізу зміни значень функцій у його вершинах та є підґрунтям для розробки методів розв'язування задач на e-конфігураціях. Розглянемо побудову транспозиційних графів різних множин евклідових комбінаторних конфігурацій.

Означення 2.4. Координатами вершини $v' \in V$ графа $G_{Tr}^{X}\left(V,U\right)$, де $V=\left\{v=x\left(x_1,x_2,...,x_m\right) \mid x\in X\right\}$ називається вектор $\left(x_1',x_2',...,x_m'\right)\in X$, що їй відповідає.

Означення 2.5. Кодом вершини $v' \in V$ графа $G_{Tr}^{X}\left(V,U\right)$ називається порядок входження його її координат $\left(i_1,i_2,...,i_m\right)$.

Означення 2.6. Типом вершини $v' \in V$ графа $G_{Tr}^{X}\left(V,U\right)$ називається v_t^i – порядок перших t координат, що визначається елементами множини перестановок без повторень P_t, $i\in J_{|P_t|}$.

Наприклад, для $t=3$ $P_3=\left\{(1,2,3),(2,1,3),(1,3,2),(3,1,2),(2,3,1),(3,2,1)\right\}$, Якщо пронумерувати елементи множини P_3, то одержимо показник i, що визначає тип вершини. Нехай $i=4$, тоді $v_3^4=\left(3,1,2\right)$ а для перших трьох координат вершин із типом v_3^4 буде справджуватись умова $x_2\le x_3\le x_1$.

Множину типів вершин позначимо через V_t. Очевидно, що $\left|V_t\right|=\left|P_t\right|$, тобто кількість типів вершин залежить від того, для якої кількості координат визначається порядок.

Означення 2.7. Закріпленими h координатами підграфа $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)\subset G_{Tr}^{X}\left(V,U\right)$ називаються такі координати з номерами $m-h+j$, $j\in J_h$, значення яких $x_{m-h+1}',x_{m-h+2}',...,x_m'$ є незмінним для всіх вершин $v\in\tilde{V}$ підграфа $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$.

Множину закріплених h координатами підграфа $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ позначимо через p^h. Потужність множини p^h дорівнює кількості розміщень по A_h^r, де r – кількість різних елементів основи.

У транспозиційному графі G_{Tr}^{X} виділимо підграф $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$, що об'єднує усі вершини, які задовольняють набору умов Υ. Нехай Υ описується парою

$$\left\langle \tilde{v}_t^i, \tilde{p}^h \right\rangle, \tilde{v}_t^i \in V_t,\ \tilde{p}^h \in p^h, \tag{2.25}$$

тобто $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ визначається певним порядком перших t координат та закріпленими h координатами. Координати вершин матимуть вигляд

$$\left(x_1,...,x_t,x_{t+1},...,x_{m-h},x'_{m-h+1},...,x'_m\right), \tag{2.26}$$

причому має виконуватись умова $t+h\leq m$. Якщо $t+h=m$, то підграф $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ складається з однієї єдиної вершини, тому будемо розглядати лише підграфи, для яких

$$t+h<m. \tag{2.27}$$

Означення 2.8. Вільними координатами вершин підграфа $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$, для якого виконуються умови (2.25) та (2.27), а координати вершин мають вигляд (2.25), назвемо вершини множину $\tilde{X}=\left\{x_{t+1},x_{t+2},...,x_{m-h}\right\}$.

Кількість вільних координат вершин графа рівна $\left(m-t-h\right)$.

Нехай на підграфі $\tilde{G}_{Tr}^{X}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ визначено тип вершини $\tilde{v}_t^i \in V_t$ так, що для перших t координат виконується умова

$$x_{j_1} \le x_{j_2} \le \ldots \le x_{jt}, \text{ при } j_1 \le j_2 \le \ldots \le \mathrm{j}_h, \quad (2.28)$$

а також закріплені h координат

$$\tilde{p}^h = \left\{ x'_{m-h+j} \right\}, j \in J_h, \quad (2.29)$$

а для решти координат виконується умова

$$x_{t+1} \le x_{t+1} \ldots \le x_{m-h}. \quad (2.30)$$

Означення 2.9. Головною вершиною v_0 або витоком графа $\tilde{G}_{Tr}^X\left(\tilde{V}, \tilde{U}\right)$, для якого виконуються умови (2.28)-(2.30), назвемо таку, що

$$x_{j_1} \le x_{j_2} \le \ldots \le x_{jt} \le x_{t+1} \le x_{t+1} \ldots \le x_{m-h}, \text{ при } j_1 \le j_2 \le \ldots \le \mathrm{j}_h. \quad (2.31)$$

Для генерації усіх вершин графа виконаємо послідовність транспозицій для кожної із вільних вершин. Нехай i' – координата для якої здійснюється поточна транспозиція, $i' \in \left\{ t+1, t+2, \ldots, m-h \right\}$. Здійснимо транспозицію відповідно такій послідовності кроків:

Крок 1. Покладемо $i' = m - h$, $k' = \left| \tilde{\mathrm{X}} \right| = \left(m - h - t \right)$, $v' = v_0$, $j' = 1$, $V'_{j'} = \left\{ v' \right\}$ – множина вершин, для яких необхідно виконати послідовність транспозицій

Крок 2. Здійснимо послідовні транспозиції усіх $v \in V'_{j'}$:

$$x_{i'} \leftrightarrow x_{i'-1} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow x_{h+1} \leftrightarrow x_{j_t} \leftrightarrow x_{j_{t-1}} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow x_{j_2} \leftrightarrow x_{j_1}. \quad (2.32)$$

Таких транспозицій виконано $\left(i'-1\right)$, у результаті чого маємо $\left(i'-1\right)$ нових вершин, множину яких позначимо через $V''=\left\{v_{\tilde{i}j'},\ \tilde{i}\in J_{i'-1}\right\}$. Збільшимо j' на 1. Додамо одержані вершини до поточної множини вершин, тобто$V'_{j'}=V'_{j'-1}\cup V''$.

Крок 3. Зменшуємо i' на 1. Якщо $i'>t$, то переходимо на крок 1, інакше – генерація вершин завершена.

Визначимо суміжні вершини як такі, що з'єднують вершини, утворені транспозиціями вигляду (2.32), а ребра, що їх з'єднують позначимо через $\tilde{U}_s$.

Приклад 2.1. Нехай маємо підграф евклідової комбінаторної конфігурації $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$, вершини якого містять 6 координат, причому $x_i\in J_6$, закріпимо останню координату – покладемо $x_6=5$, визначимо тип вершини для перших трьох координат $v^4_3=\left(3,1,2\right)$, тобто $\Upsilon^*=\left\langle x_6=5,\ v^4_3=\left(3,1,2\right)\right\rangle$, а підграф позначимо $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$. Координати головної вершини будуть $\left(3,1,2,4,6,5\right)$. Зобразимо граф, що відповідає вказаним умовам на рисунку 2.2, на якому опущена шоста координата, яка рівна 5.

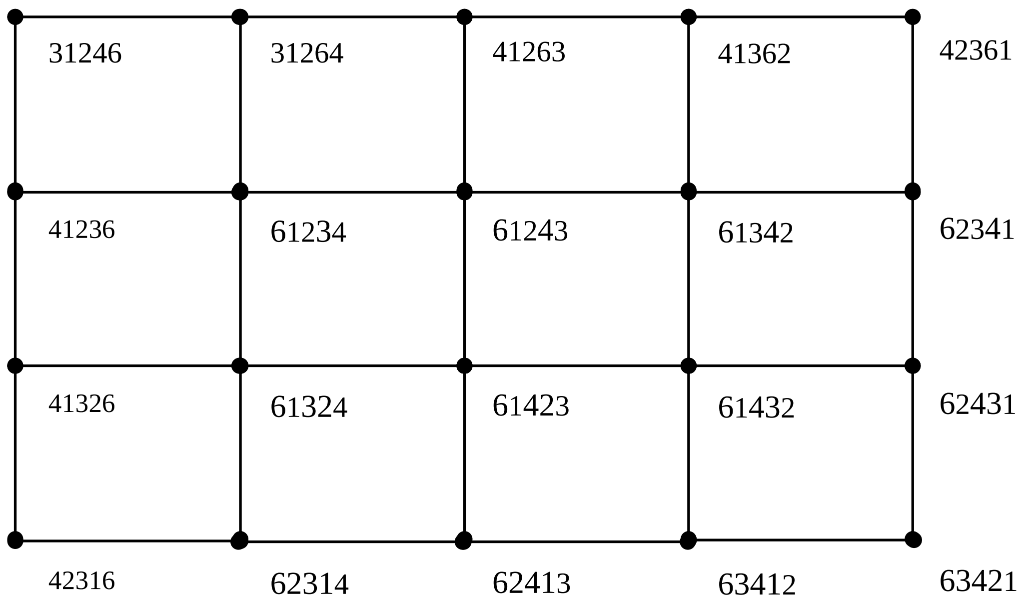


Рисунок 2.2 – Підграф $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$, $\Upsilon^*=\left\langle x_6=5,\ v^4_3=\left(3,1,2\right)\right\rangle$

Із прикладу 2.1 видно, що вершини мають дві вільні координати , для яких виконується послідовність транспозицій. На рисунку 2.2 ця зміна прослідковується по рядках та по стовпчиках. Координата x_5 монотонно спадає зліва направо по рядках, а координата x_4 теж послідовно зменшується згори вниз по стовпчиках. Описаний грід-граф можна подати двомірною решітною, вузли якої відповідають вершинам $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$.

Приклад 2.2. Нехай вершини графа $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ містять 7 координат. Якщо закріпити одну останню координату, поклавши $x_7 = x^*$ та визначити деякий тип вершини v_3^*, то одержимо умову $\Upsilon^* = \left\langle x_7 = 6, v_3^* = (3,2,1)\right\rangle$ та граф $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$, вершини якого містять три вільні координати. Для схематичного зображення $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$ можна використати трьохвимірну решітку (рисунок 2.3).

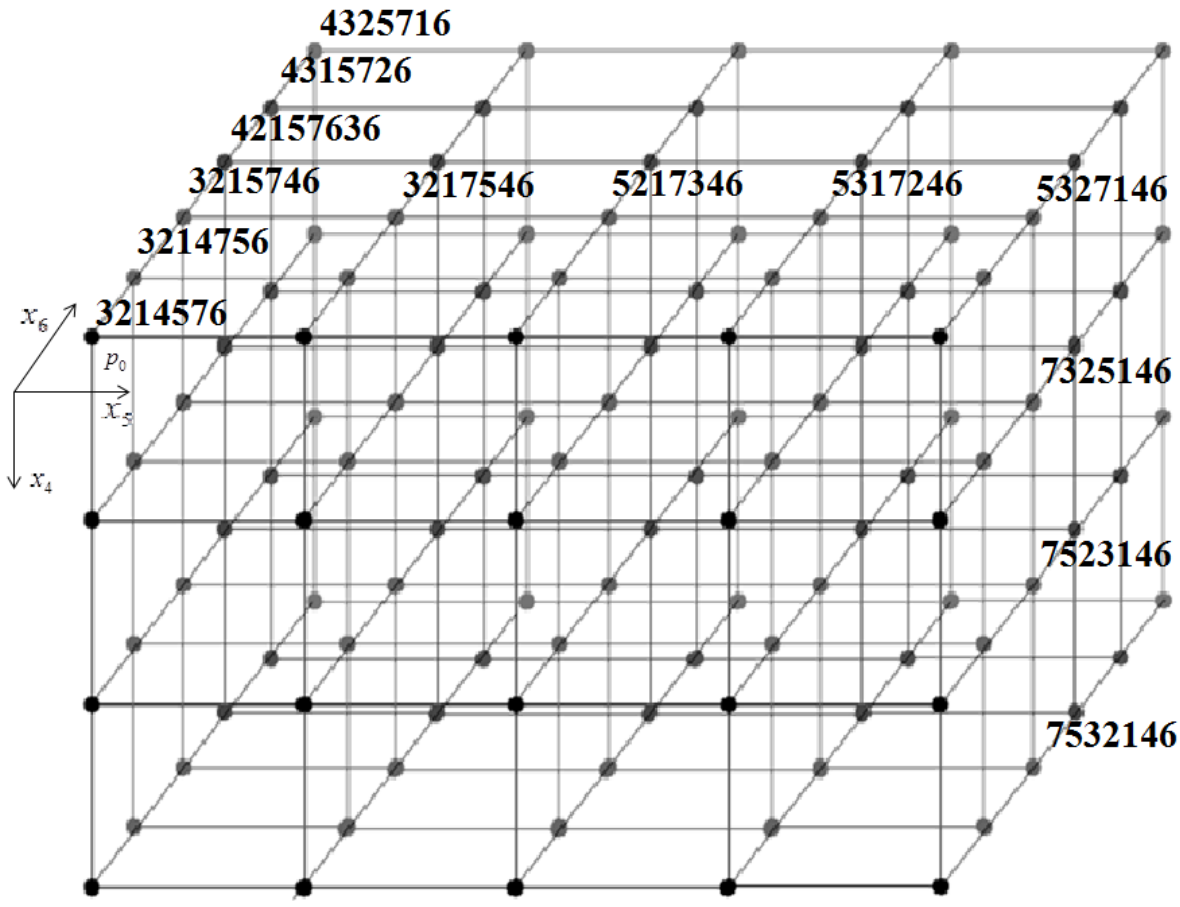


Рисунок 2.3 – Підграф $\tilde{G}^X_{Tr}\left(\tilde{V},\tilde{U},\Upsilon^*\right)$, $\Upsilon^* = \left\langle x_7 = 6, v_3^* = (3,2,1)\right\rangle$

Для вузлів решітки справджуються умова (2.32). На рисунку позначені напрямки зміни координат x_6, x_5, x_4 та вибірково записані координати згенерованих транспозиціями вершин.

Визначимо поняття попередньої та наступної вершини.

Означення 2.10. Вершини v_i, v_{i+1} графа $\tilde{G}_{Tr}^X\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{\Upsilon}\right)$ називаються відповідно попередньою та наступною вершинами, якщо v_{i+1} одержується з v_i однією транспозицією вигляду (2.32).

Зауважимо, що попередня вершина з наступної може бути одержана шляхом зворотної транспозиції.

Отже, ми одержали новий вид графа, який назвемо грід–граф e-конфігурації, для якого визначено порядок вершин, умова суміжності вершин та множина ребер, що ці вершини з’єднують.

Означення 2.11. Нехай $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ – граф, вершини якого відповідають елементам множини $X'\subseteq X$ – підмножини деякої e-конфігурації, та Υ – умови вигляду (2.25). Тоді якщо для усіх вершин $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ виконуються умови (2.27) – (2.30), а для головної вершини – умова (2.31), і кожна вершина згенерована послідовністю транспозицій (2.32), тоді такий граф назвемо грід–графом (Grid Graph) евклідової комбінаторної конфігурації.

Теорема 2.1. Якщо існує скінчена множина грід–графів

$$GR^X=\left\{Gr_1\left(X_1',\Upsilon_1\right),Gr_2\left(X_2',\Upsilon_2\right),\ldots,Gr_l\left(X_l',\Upsilon_l\right)\right\}, \qquad (2.33)$$

таких, що виконується умови:

$$X_1'\bigcap X_2'\cap\ldots\cap X_l'=\varnothing \quad X_1'\cup X_2'\cup\ldots\cup X_l'=X, \qquad (2.34)$$

то існує множина ребер U' така, що $GR^X\cup U'=G_{Tr}^X$, тобто граф GR^X буде підграфом G_{Tr}^X – транспозиційного графа e-конфігурації X.

Доведення. Нехай V – множина вершин транспозиційного графа e-конфігурацій X, а $\tilde{V}$ – множина вершин грід-графа GR^X. За означенням транспозиційного графа G_{Tr}^X множина вершин графа відповідає множині елементів e-конфігурацій X, оскільки для GR^X виконується умова (2.34), то вимога щодо вершин виконана, тобто $V = \tilde{V}$.

Ребра транспозиційного графа G_{Tr}^X з'єднують вершини, що є суміжними згідно означення 2.2. Нехай U – множина усіх ребер транспозиційного графа, а $\tilde{U}$ – множина ребер грід–графа. Умова (2.32), що визначає суміжні вершини грід-графа, є вужчою за означення 2.2., тобто якщо вершини є суміжними у грід-графі, то вони є суміжними за означенням 2.2, тобто ребра, що з'єднують суміжні вершини грід-графа є підмножиною ребер транспозиційного графа, тобто $\tilde{U} \subset U$. Позначимо через U' таку множину, що $\tilde{U} \cup U' = U$.

Отже, маємо $GR^X(\tilde{V},\tilde{U}) \cup U' = G_{Tr}^X(V,U)$, що й треба було довести.

Нехай задано лінійну функцію $f(x) = \langle c_i x_i \rangle, i \in J_m$. Значення функції у вершинах графа дорівнює її значенню у відповідних точках e-конфігурації.

Теорема 2.2. Нехай $Gr(X', \Upsilon)$ – грід-граф множини e-конфігурацій, а $x', x'' \in V$ – суміжні вершини, що відрізняються транспозицією елементів x_l та x_s, і задано функцію $f(x) = \langle c_i x_i \rangle, i \in J_m$, тоді значення функції у вершинах x' та x'' відрізнятиметься на величину $\Delta_{l-s} = (x_l - x_s)(c_l - c_s)$.

Доведення. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $l < s$. Запишемо значення функції $f(x)$ у вершинах x' та x'':

$$f\left(x'\right) = c_1 x_1 + \ldots + c_l x_l + \ldots + c_s x_s + \ldots + c_m x_m,$$

$$f\left(x''\right) = c_1 x_1 + \ldots + c_l x_s + \ldots + c_s x_l + \ldots + c_m x_m.$$

Знайдемо різницю значень функції у вказаних вершинах:

$$\Delta_{l-s} = f\left(x'\right) - f\left(x''\right) = c_1x_1 + \ldots + c_lx_l + \ldots + c_sx_s + \ldots + c_mx_m - c_1x_1 -$$
$$- \ldots - c_lx_s - \ldots - c_sx_l - \ldots - c_mx_m = c_lx_l + c_sx_s - c_lx_s - c_sx_l = c_l\left(x_l - x_s\right) -$$
$$-c_s\left(x_l - x_s\right) = \left(c_l - c_s\right)\cdot\left(x_l - x_s\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 2.2 дозволяє скоротити кількість обчислень, якщо необхідно знайти значення заданої функції у вершинах графа , оскільки достатньо обчислити значення в одній з них, а потім усі наступні обчислювати шляхом віднімання різниці.

Теорема 2.3. Нехай $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ – грід-граф множини e-конфігурацій, а $x',x''\in V$ – суміжні вершини, що відрізняються транспозицією елементів x_l та x_s, і задано функцію $f(x)=\left\langle c_ix_i\right\rangle, i\in J_m$, тоді значення функції у вершині x'' обчислюється за формулою $f\left(x''\right)= f\left(x'\right)-(x_l-x_s)(c_l-c_s)$.

Доведення. За теоремою 2.2 $f\left(x'\right)- f\left(x''\right)=\Delta_{l-s}$, де $\Delta_{l-s}=(x_l-x_s)(c_l-c_s)$. Отже, маємо $f\left(x'\right)- f\left(x''\right)=(x_l-x_s)(c_l-c_s)$, звідси випливає $f\left(x''\right)= f\left(x'\right)-(x_l-x_s)(c_l-c_s)$, що й треба було довести.

Нехай задано лінійну функцію, коефіцієнти якої впорядковані за зростанням, тобто

$$f(x)=\left\langle c_ix_i\right\rangle, i\in J_m,$$
$$c_1\le c_2\le\ldots\le c_m. \tag{2.35}$$

Дослідимо властивості функції (2.35) на грід-графі.

Теорема 2.4. Нехай на грід-графі e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ довільно вибрані $x',x''\in V$ – суміжні послідовні вершини $Gr\left(X',\Upsilon\right)$, із яких x' є попередньою, а x'' – наступною, та задано функцію (2.35), тоді виконується умова

$$f(x') \geq f(x''), \tag{2.36}$$

тобто значення лінійної функції з упорядкованими коефіцієнтами у наступній вершині буде не більшим за відповідне значення у попередній вершині грід-графа.

Доведення. За означенням (2.10) вершини $x', x'' \in V$ відрізняються транспозицією вигляду (2.32) двох координат. Не порушуючи загальності запишемо ці координати через $x_l, x_s, l < s$, тоді згідно умови (2.32) $x_l < x_s$, а вершини відповідно матимуть координати

$$x' = (x_1, ..., x_l, ..., x_s, ..., x_m), \; x'' = (x_1, ..., x_s, ..., x_l, ..., x_m).$$

За теоремою 2.2 $f(x') - f(x'') = \Delta_{l-s} = (c_l - c_s) \cdot (x_l - x_s)$.

Оскільки $x_l < x_s$, то $(x_l - x_s) < 0$. Згідно властивості функції вигляду (2.35) справедливою є нерівність $c_l \leq c_s$, тоді $(c_l - c_s) \leq 0$. Добутком від'ємного та не додатного множників є не від'ємна величина, тобто

$$f(x') - f(x'') \geq 0,$$
$$f(x') \geq f(x''),$$

що й треба було довести.

Згідно означення 2.9 визначено головну вершину або точку витоку графа. Згідно означення головна вершина є попередньою для деякої кількості вершин, причому ця кількість визначається кількістю вільних координат. Головна вершина не є наступною для жодної з вершин графа. Справедливою є така теорема.

Теорема 2.5. Нехай v^0 – головна вершина грід-графа e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$, якій відповідає $x^0 \in X'$. На $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ задана функція $f\left(x\right)$ вигляду (2.35), тоді

$$f\left(x^0\right) = \max_{x \in X'} f\left(x\right),$$

тобто лінійна функція із впорядкованими за зростанням коефіцієнтами досягає максимального значення на грід-графі $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ у точці витоку (у головній вершині).

Доведення. За теоремою 2.4 $f\left(x'\right) \geq f\left(x''\right)$ за умови, що x' є попередньою, а x'' – наступною вершиною. Згідно означення (2.11) кожна вершина графа згенерована із головної вершини скінченою кількістю транспозицій. Оберемо довільну вершину x^μ, що утворена із головної шляхом μ транспозицій. Тоді існує послідовність $x^0, x^1, ..., x^{\mu-1}, x^\mu$ така, що x^{j-1} є попередньою для x^j, де $j \in J_\mu$. Тоді згідно теореми 2.4 справедливими є нерівності

$$f\left(x^0\right) \geq f\left(x^1\right) \geq ... \geq f\left(x^{\mu-1}\right) \geq f\left(x^\mu\right).$$

Із довільності вибору вершини $x^\mu \in X'$ випливає, що $\forall x \in X' : f\left(x^0\right) \geq f\left(x\right)$, тобто $f\left(x^0\right) = \max_{x \in X'} f\left(x\right)$.

Означення 2.12. Вершиною стоку v^{st} або стоком грід-графа $Gr\left(X',\Upsilon\right)$, назвемо таку вершину, для координат якої виконуються такі умови:

$$x_{t+1} \geq x_{t+1} ... \geq x_{m-h},$$

$$x_j \geq x_{t+1},\ j \in J_t,$$

$$x_{j_1} \le x_{j_2} \le \ldots \le x_{jt}\text{, при } j_1 \le j_2 \le \ldots \le \mathrm{j}_t\,. \qquad (2.37)$$

Теорема 2.6. Нехай v^{st} – вершина стоку грід-графа e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$, якій відповідає $x^{st} \in X'$. На $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ задана функція $f\left(x\right)$ вигляду (2.71), тоді

$$f\left(x^{st}\right) = \min_{x\in X'} f\left(x\right),$$

тобто лінійна функція із впорядкованими за зростанням коефіцієнтами досягає мінімального значення на грід-графі $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ у вершині стоку.

Доведення. Згідно означення 2.12 вершина стоку побудована таким чином, що неможливо здійснити жодної транспозиції, яка б задовольняла умові (2.68), тобто вершина x^{st} не може бути попередньою для будь-якої вершини $Gr\left(X',\Upsilon\right)$. Згідно означення грід-графа вершина x^{st} є наступною для декількох вершин графа, оскільки усі вершини, крім головної, утворюються послідовними транспозиціями. Візьмемо довільну вершину x^{μ}, тоді існує послідовність транспозицій $x^{\mu}, x^{\mu+1}, \ldots, x^{st}$ така, що x^{j-1} є попередньою для x^{j}. Тоді згідно теореми 2.4 виконуються нерівності $f(x^{\mu}) \ge f(x^{\mu+1}) \ge \ldots \ge f(x^{st})$. Виходячи із довільності вибору $x^{\mu} \in X'$ випливає, що $\forall x \in X' : f\left(x\right) \ge f\left(x^{st}\right)$, тобто $f\left(x^{st}\right) = \min\limits_{x\in X'} f\left(x\right)$, що й треба було довести.

Означення 2.13. Послідовність обходу вершин грід-графа e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ $v^0, v^1, v^2, \ldots, v^{st}$, яким відповідають точки e–конфігурації $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{st}$, для яких x^{j-1} є попередньою для x^{j} назвемо рухом у напрямку від витоку до стоку.

Теорема 2.7. Значення лінійної функції $f\left(x\right)$ вигляду (2.35) на грід-графі e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ послідовно не зростає у напрямку від витоку до стоку від значення $\max\limits_{x\in X'} f\left(x\right)$ до значення $\min\limits_{x\in X'} f\left(x\right)$.

Доведення. Згідно означення 2.13 для значення функції у вершинах графа $x^0,x^1,x^2,...,x^{st}$ справедливими є рівності $f(x^0)\ge f(x^1)\ge f(x^1)\ge ...\ge f(x^{st})$ згідно теореми 2.4. Причому згідно теорем 2.5 та 2.6 маємо відповідно $\max\limits_{x\in X'} f\left(x\right)= f\left(x^0\right)$ та $\min\limits_{x\in X'} f\left(x\right)= f\left(x^{st}\right)$. Отже, одержуємо

$$\max_{x\in X'} f = f(x^0)\ge f(x^1)\ge f(x^1)\ge ...\ge f(x^{st}) = \min_{x\in X'} f\,, \tag{2.38}$$

що й необхідно було довести.

Теорема 2.7 дає можливість оцінити значення лінійної функції вигляду (2.71) на графі $Gr\left(X',\Upsilon\right)$. Сформулюємо властивості зазначеної функції.

Теорема 2.8. Нехай задано функцію $f\left(x\right)$ вигляду (2.71) на грід-графі e-конфігурацій $Gr\left(X',\Upsilon\right)$ і задано значення B тоді виконується одна із перелічених умов:

а) якщо $f\left(x^0\right)\le B$, тоді $\forall x\in X': f\left(x\right)\le B$;

б) якщо $f\left(x^{st}\right)\ge B$, то $\forall x\in X': f\left(x\right)\ge B'$;

в) якщо $f\left(x^0\right)\ge B\ge f\left(x^{st}\right)$, тоді $\exists X'_{\ge B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{\ge B}=\left\{x\in X': f\left(x\right)\ge B\right\}$, $\exists X'_{\le B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{\le B}=\left\{x\in X': f\left(x\right)\le B\right\}$.

Доведення. За теоремою 2.5 $f\left(x^0\right)=\max\limits_{x\in X'} f\left(x\right)$, тобто $\forall x\in X': f\left(x\right)\le f\left(x^0\right)\le B$, що й необхідно було довести в пункті а) теореми.

За теоремою 2.6. $f\left(x^{st}\right)=\min\limits_{x\in X'} f\left(x\right)$, тобто $\forall x\in X': f\left(x\right)\ge f\left(x^{st}\right)\ge B$, що й необхідно було довести в пункті б) теореми.

Згідно теорем 2.5 та 2.6 справедливими є твердження $\forall x \in X' : f\left(x^0\right) \geq f\left(x\right) \geq f\left(x^{st}\right)$. За умовою $f\left(x^0\right) \geq B \geq f\left(x^{st}\right)$, тоді існують такі вершини $x \in X'$, для яких виконуються нерівності $f\left(x^0\right) \geq f\left(x\right) \geq B$. Усі такі вершини утворюють множину $X'_{\geq B} = \left\{x \in X' : f\left(x\right) \geq B\right\}$. Також існують вершини $x \in X'$, для яких виконуються нерівності $f\left(x\right) \geq B \geq f\left(x^{st}\right)$, що утворюють множину $X'_{\leq B} = \left\{x \in X' : f\left(x\right) \leq B\right\}$. Отже, $\exists X'_{\geq B} \subset \mathrm{X}'$ та $\exists X'_{\leq B} \subset \mathrm{X}'$, що задовольняють пункту в), що й треба було довести.

Теорема 2.9. Нехай $Gr\left(X', \Upsilon\right)$ – грід-граф e-конфігурацій із множиною вершин $\tilde{V}$, для якого визначені умови Υ такі, що $t = \tilde{t}$, $h = \tilde{h}$, тоді кількість вершин $Gr\left(X', \Upsilon\right)$ визначається за формулою:

$$\left|\tilde{V}\right| = \frac{(\mathrm{m} - \tilde{\mathrm{h}})!}{\tilde{t}\,!}. \tag{2.39}$$

Доведення. Розглянемо довільну вершину грід-графа $Gr\left(X', \Upsilon\right)$. Вона визначається набором координат $\left(x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{m-h}, x_{m-h+1}, \ldots, x_m\right)$. За правилами побудови транспозиції відбуваються для координат $x_{t+1}, \ldots, x_{m-h}$ і тільки для них. Для координати x_{t+1} існує $\left(t+1\right)$ варіант транспозицій, для x_{t+2} існує $\left(t+2\right)$ варіант транспозицій і так далі. Для останньої вільної координати x_{m-h} відповідно існує $\left(h-m\right)$ варіантів. При побудові грід-графа здійснюються усі допустимі транспозиції, тому при повному переборі усіх допустимих варіантів одержуємо кількість усіх можливих вершин:

$$\left|\tilde{V}\right| = (\tilde{t}+1) \cdot (\tilde{\mathrm{t}}+2) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{m} - \tilde{\mathrm{h}}) = \frac{(\tilde{t}+1) \cdot (\tilde{\mathrm{t}}+2) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{m} - \tilde{\mathrm{h}})}{1} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \tilde{t} \cdot (\tilde{t}+1) \cdot (\tilde{\mathrm{t}}+2) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{m} - \tilde{\mathrm{h}})}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \tilde{t}} = \frac{(\mathrm{m} - \tilde{\mathrm{h}})!}{\tilde{t}\,!},$$

що й треба було довести.

Описані властивості грід-графів дозволяють здійснити оцінку значення лінійної функції, що дає підстави розробці нових методів векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях.

2.3.2 Побудова і властивості структурного графа e-конфігурацій

У роботі [27] використано поняття структурного графа комбінаторних конфігурацій, вершинами якого є лише деякі точки множини евклідових комбінаторних конфігурацій, які задовольняють поставленим вимогам. Сформулюємо означення та розглянемо його властивості.

Нехай підмножини X' множини комбінаторних конфігурацій X визначаються h закріпленими координатами, а елементами множини мають вигляд $x = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$.

Означення 2.14. Нехай $G^{X'}\left(\tilde{V}, \tilde{U}\right)$ – граф підмножини X' комбінаторних конфігурацій X, причому множина X' структурована таким чином, що $X' = X_1{}' \cup X_2{}' \cup ... \cup X_\lambda{}'$ і кожна підмножина $X_i', i \in J_\lambda$ відповідає вершинам із h закріпленими координатами та представлена двома вершинами x_i^0 та x_i^{st} такими, що для лінійної функції $f\left(x\right)$ вигляду (2.71) справджуються умови:

$$f\left(x_i^0\right) = \max_{x \in X_i'} f\left(x\right),$$

$$f\left(x_i^{st}\right) = \min_{x \in X_i'} f\left(x\right), \tag{2.40}$$

а ребрами графа $G^{X'}\left(\tilde{V},\tilde{U}\right)$ є такі, що з’єднують відповідні вершини x_i^0, x_i^{st} та вершини, утворені послідовними транспозиціями закріплених координат, тоді такий граф називатимемо структурним графом множини евклідових комбінаторних конфігурацій і позначатимемо $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},h\right)$.

Означення 2.15. Вершини x_i^0 та x_i^{st} підмножин $X_i', i\in J_\lambda$ структурного графа $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},h\right)$, для яких виконуються умови (2.40) називаються відповідно вершинами витоку та стоку $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},h\right)$, а величину λ назвемо рівнем структурного графа.

Розглянемо приклади декількох структурного графа, що ілюструє основні етапи їх побудови.

Приклад 2.3. Нехай маємо X – множину евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок із множини $A=\{1,2,3,4\}$. Покладемо $h=1$, тобто закріпимо лише одну координату, тоді одержимо чотири підмножини таких, що $x_4^1=4$, $x_4^2=3$, $x_4^3=2$, $x_4^4=1$. Одержимо відповідно чотири пари вершин x_i^0 та x_i^{st}: $x_1^0=(3,2,1,4)$, $x_1^{st}=(1,2,3,4)$, $x_2^0=(4,2,1,3)$, $x_2^{st}=(1,2,4,3)$, $x_3^0=(4,3,1,2)$, $x_3^{st}=(1,3,4,2)$, $x_4^0=(4,3,2,1)$, $x_4^{st}=(2,3,4,1)$. Позначимо вершини на графі $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},1\right)$, поданому на рисунку 2.3.

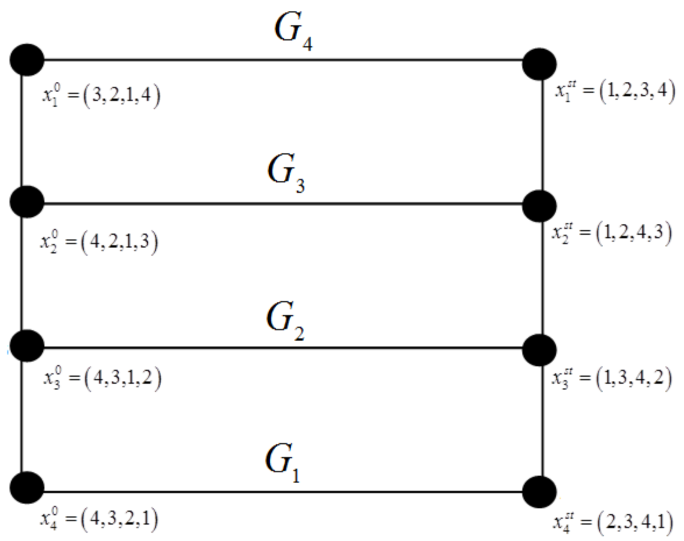


Рисунок 2.3 – Структурний граф $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},1\right)$

На рисунку 2.3 позначені рівні структурного графа G_4, G_3, G_2, G_1, номери яких відповідають закріпленим координатам.

Приклад 2.4. Нехай маємо X – множину евклідових комбінаторних конфігурацій розміщень розмірності 4 із множини $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Покладемо $h = 2$, тобто будемо закріплювати дві останні координати. Одержимо таку множину пар координат:

$$\{(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(5,6),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(4,6),(4,5),$$
$$(4,3),(4,2),(4,1),(3,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1),(2,6),(2,5),(2,4),(2,3),$$
$$(2,1),(1,6),(1,5),(1,4),(1,3),(1,2)\}.$$

Отже, одержимо тридцять рівнів структурного графа та відповідну кількість пар вершин x_i^0 та x_i^{st}. Позначимо їх вибірково на рисунку 2.4.

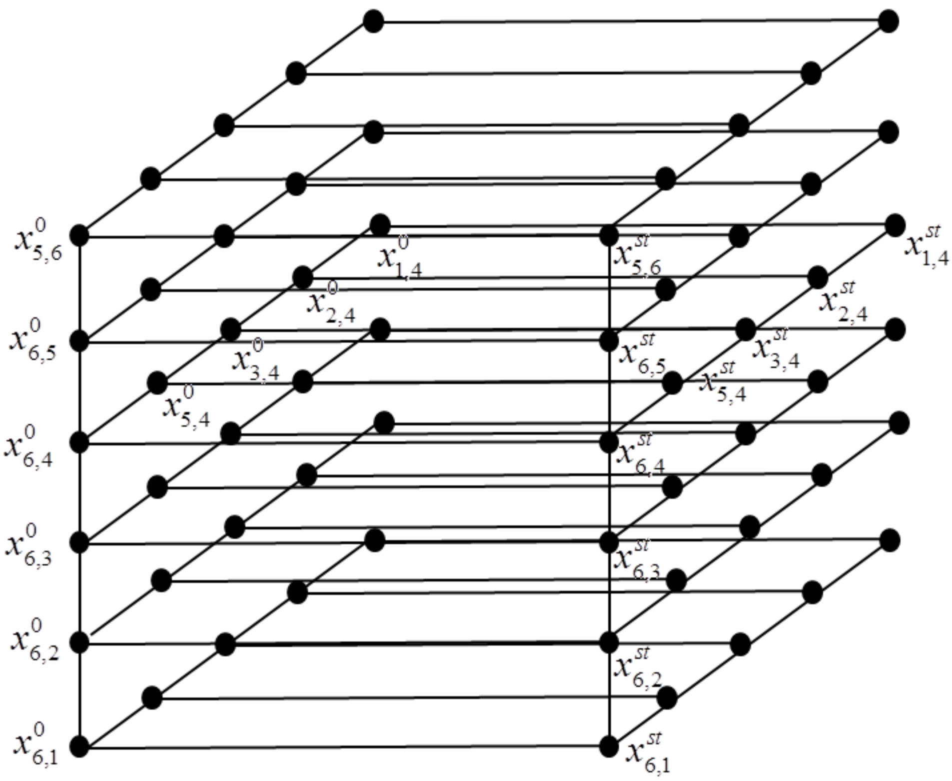


Рисунок 2.4 – Структурний граф $G_S^X\left(\tilde{V}, \tilde{U}, 2\right)$

Теорема 2.10. Нехай задано функцію $f(x)$ вигляду (2.35) на структурному графі e-конфігурацій $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},\mathrm{h}\right)$ і задано значення B тоді виконується одна із перелічених умов:

а) якщо $f\left(x_i^0\right)\le B$, тоді $\forall x\in X_i' : f(x)\le B$;

б) якщо $f\left(x_i^{st}\right)\ge B$, то $\forall x\in X_i' : f(x)\ge B$;

в) якщо $f\left(x_i^0\right)\ge B\ge f\left(x_i^{st}\right)$, тоді $\exists X'_{i,\ge B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{i,\ge B}=\left\{x\in X_i' : f(x)\ge B\right\}$, $\exists X'_{\le B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{i,\le B}=\left\{x\in X_i' : f(x)\le B\right\}$.

Доведення. За означенням структурного графа $f\left(x_i^0\right)=\max\limits_{x\in X_i'} f(x)$, $f\left(x_i^{st}\right)=\min\limits_{x\in X_i'} f(x)$, а отже, для будь-якого $\tilde{x}\in X_i'$ виконується умова:

$$f\left(x_i^0\right)\ge f(\tilde{x})\ge f\left(x_i^{st}\right). \tag{2.41}$$

Наслідком (2.40) будуть такі нерівності:

$$B\ge f\left(x_i^0\right)\ge f(\tilde{x}),$$
$$f(\tilde{x})\ge f\left(x_i^{st}\right)\ge B,$$

що й треба було довести у пунктах а) та б).

Із (2.41) також випливає нерівність

$$f\left(x_i^0\right)\ge f\left(x_i'\right)\ge \ldots\ge B\ge \ldots\ge f\left(x_i''\right)\ge f\left(x_i^{st}\right).$$

Отже, $\exists X'_{i,\ge B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{i,\ge B}=\left\{x\in X_i' : f(x)\ge B\right\}$, $\exists X'_{\le B}\subset \mathrm{X}'$, $X'_{i,\le B}=\left\{x\in X_i' : f(x)\le B\right\}$, що й треба було довести.

З теореми 2.10 випливає, що оцінивши попередні рівні структурного графа e-конфігурацій, можна оцінити наступні послідовні рівні, закріплені координати яких є лексикографічно впорядкованими, тобто для оцінки значення лінійної функції слід розглядати спочатку структурний граф $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},1\right)$.

Означення 2.16. Послідовний розгляд структурних графів e-конфігурацій $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},1\right)$, $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},2\right)$, $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},3\right)\ldots$ назвемо зануренням у структурний граф G_S^X.

Графи різних e-конфігурацій мають свою специфіку, що залежить від властивостей відповідної множини. Грід-графи та структурні графи e-конфігурацій є основою для розробки методів розв'язування сформульованої задачі векторної оптимізації на e-конфігураціях. Важливим є дослідження властивостей цих графів для різних видів евклідових комбінаторних конфігурацій. Отже, розглянемо властивості графів деяких e-конфігурацій.

2.3.3 Властивості графів деяких e-конфігурацій

Нехай X множина e-конфігурацій перестановок без повторень, основа якої містить m елементів $x=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$. Потужність множини $\left|X\right|=m!$ елементів. Це означає, що граф G_{Tr}^X містить $m!$ вершин, тобто $\left|V\right|=\left|X\right|=m!$.

Теорема 2.11. Транспозиційний граф G_{Tr}^X, де X множина e-конфігурацій перестановок без повторень, містить $\dfrac{m!m(m-1)}{4}$ ребер.

Доведення. Оскільки за означенням множина вершин графа G_{Tr}^X збігається із множиною елементів X, то кількість вершин дорівнює її потужності. Оскільки X – множина e-конфігурацій перестановок без повторень, що складається з елементів $x=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$, то згідно означення 2.2, суміжними будуть вершини, що відрізняються перестановкою двох довільних елементів. Не порушуючи загальності, виберемо деякий елемент x_l, тоді залишиться $\left(m-1\right)$ елемент з яким його можливо поміняти місцями для одержання суміжних вершин. Тоді для кожного елемента існує $m\left(m-1\right)$ транспозиція. Оскільки транспозиція $x_i \leftrightarrow x_j, i\neq j, i,j\in J_m$ враховується для обох елементів, то для кожної вершини існує $\frac{m\left(m-1\right)}{2}$ суміжні вершини. Враховуючи, що $u_{ij}=u_{ji}$, тобто одне ребро, що з'єднує дві вершини, одержимо кількість ребер

$$\left|U\right|=\frac{m!(m(m-1)/2)}{2}=\frac{m!m(m-1)}{4},$$

що й треба було довести.

Розглянемо побудову грід-графів e-конфігурацій перестановок. Структура грід-графів буде залежати від вибору параметрів Υ, тобто кількості закріплених та вільних вершин.

Приклад 2.5. Нехай маємо множину P_4 – e-конфігурацій перестановок без повторень з основою $A=\left\{1,2,3,4\right\}$. Умови Υ визначаються набором порядку вершин $\tilde{V}_t$ та параметром p_h.

Покладемо $t=0$, тобто не будемо визначати порядок перших координат, а отже, $\tilde{V}_t=\varnothing$. Покладемо $h=1$, тобто закріпимо лише одну останню координату. Маємо чотири різні умови $\Upsilon_1=\left\langle x_4=4,t=0\right\rangle$, $\Upsilon_2=\left\langle x_4=3,t=0\right\rangle$, $\Upsilon_3=\left\langle x_4=2,t=0\right\rangle$, $\Upsilon_4=\left\langle x_4=1,t=0\right\rangle$, а відповідно – чотири грід-графи $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_1,\tilde{U}_1,\Upsilon_1\right)$, $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_2,\tilde{U}_2,\Upsilon_2\right)$, $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_3,\tilde{U}_3,\Upsilon_3\right)$, $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_4,\tilde{U}_4,\Upsilon_4\right)$.

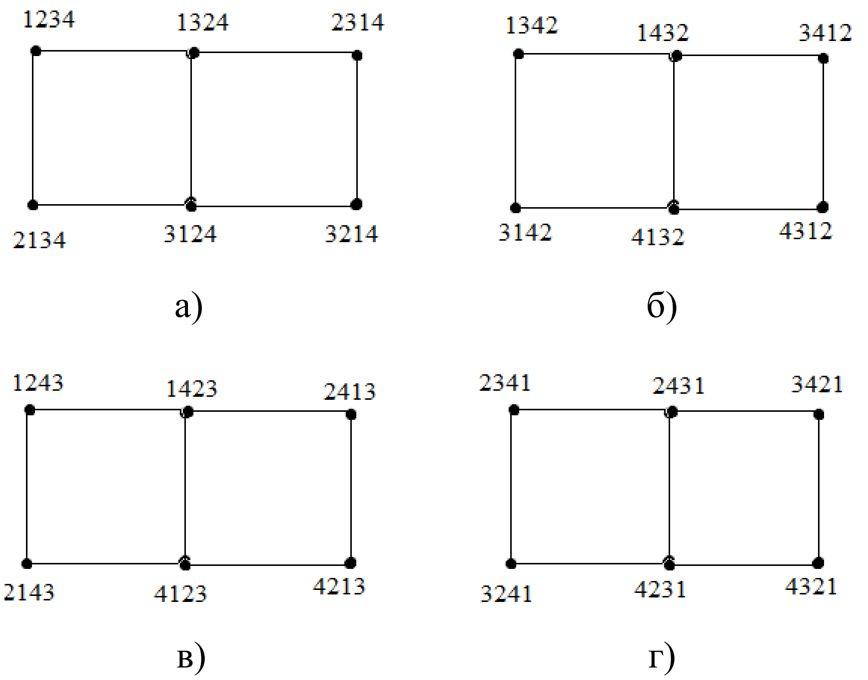


Рисунок 2.5 – Грід-графи e-конфігурацій P_4: а) $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_1,\tilde{U}_1,\Upsilon_1\right)$; б) $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_2,\tilde{U}_2,\Upsilon_2\right)$; в) $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_3,\tilde{U}_3,\Upsilon_3\right)$; г) $Gr^{P_4}\left(\tilde{V}_4,\tilde{U}_4,\Upsilon_4\right)$

З рисунку очевидно, що множина вершин усіх побудованих грід-графів відповідає множині e-конфігурацій P_4.

Теорема 2.12. Нехай $X = P_m$ – множина – e-конфігурацій перестановок без повторень розмірності m, а $Gr_i^X\left(X_i,\Upsilon_i\right)$, $i \in J\gamma$ – множина грід-графів e-конфігурацій X така, що $G^X = Gr_1 \cup Gr_2 \cup ... \cup Gr_\gamma$, а для усіх $\Upsilon_i, i \in J\gamma$ визначені однакові параметри, тобто $t_i = \tilde{t}, h_i = \tilde{h}, i \in J\gamma$, тоді кількість грід-графів визначається за формулою:

$$\gamma = \tilde{t}\,! \cdot \frac{m!}{(m-\tilde{h})!}. \tag{2.42}$$

Доведення. За означенням грід-графа евклідових комбінаторних конфігурацій порядок вершин визначається елементами множини перестановок. Як відомо, потужність множини перестановок із $\tilde{t}$ елементів дорівнює $\tilde{t}\,!$, відповідно маємо $\left|V_{\tilde{t}}\right| = \tilde{t}\,!$.

Для $\tilde{h}$ закріплених координат, що формують множину $p^{\tilde{h}}$, враховуючи, що основа множини e-конфігурацій складається з різних елементів, кількість різних варіантів дорівнює кількості розміщень $A_m^{\tilde{h}}$.

Для повноти відображення евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок необхідно розглянути усі варіанти комбінації типів вершин і закріплених координат, що і буде величиною

$$\tilde{t}\,! \cdot A_m^{\tilde{h}} = \frac{\tilde{t}\,! \cdot m!}{\left(m - \tilde{h}\right)!} = \gamma ,$$

що й необхідно було довести.

Очевидно, що кількість грід-графів евклідових комбінаторних конфігурацій із заданими параметрами $\tilde{t}, \tilde{h}$ можна знайти, розділивши кількість елементів множини на кількість вершин грід-графа відповідної розмірності. Потужність множини e-конфігурацій перестановок без повторень дорівнює $m!$. Розділивши це значення на кількість вершин, яка згідно теореми 2.9 дорівнює $\frac{\left(m - \tilde{h}\right)!}{\tilde{t}\,!}$, одержимо

$$m! : \frac{\left(m - \tilde{h}\right)!}{\tilde{t}\,!} = \frac{m! \cdot \tilde{t}!}{\left(m - \tilde{h}\right)!} = \gamma ,$$

що цілком узгоджується із теоремою 2.12.

Нехай X – множина e-конфігурацій розміщень без повторень із m' елементів по m, яку позначимо $A_{m'}^{m}$. Розміщення можна розглядати як сукупність множин перестановок із множини усіх можливих сполучень, що дає можливість побудувати усю множину грід-графів множина e-конфігурацій розміщень як сукупність множин грід-графів відповідних e-конфігурацій перестановок. Проілюструємо на прикладі.

Приклад 2.6. Нехай X – множина e-конфігурацій розміщень A_4^3. Кількість можливих сполучень $C_4^3 = \dfrac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$. Запишемо цю множину: $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}$. Візьмемо кожне сполучення за основу множина e-конфігурацій перестановок і одержимо чотири підмножини X_1', X_2', X_3', X_4'. Побудуємо їх грід-графи, поклавши $\tilde{t} = 0, \tilde{h} = 0$, оскільки розмірність перестановок є малою, тобто $\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = \Upsilon_3 = \Upsilon_4 = \tilde{\Upsilon} = \langle t = 0, h = 0 \rangle$. Одержимо чотири грід-графи (рисунок 2.6).

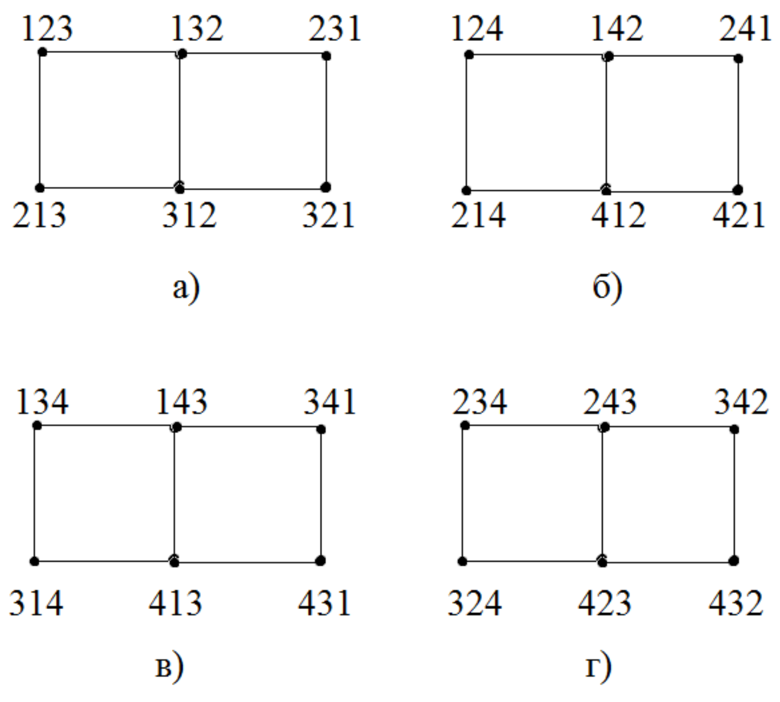


Рисунок 2.6 – Грід-графи множина e-конфігурацій розміщень

а) $Gr\left(X_1', \tilde{\Upsilon}\right)$; б) $Gr\left(X_2', \tilde{\Upsilon}\right)$; в) $Gr\left(X_3', \tilde{\Upsilon}\right)$; г) $Gr\left(X_4', \tilde{\Upsilon}\right)$

Теорема 2.13. Нехай X – множина e-конфігурацій розміщень $A_{m'}^{m}$, для якої побудовано множину грід-графів $Gr_i^X\left(X_i, \Upsilon_i\right)$, $i \in J\gamma$, що $G^X = Gr_1 \cup Gr_2 \cup ... \cup Gr_\gamma$, і для яких виконується умова $t_i = \tilde{t}, h_i = \tilde{h}, i \in J\gamma$, тоді кількість грід-графів визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{\tilde{t}\,!\cdot m'!}{(m-\tilde{h})!\cdot\left(m'-m\right)!}. \tag{2.43}$$

Доведення. Проведемо перевірку правильності вказаної у теоремі рівності двома способами.

Перший спосіб: поділимо загальну кількість елементів множини X на кількість вершин грід-графа із заданими параметрами, що визначена теоремою 2.13:

$$\gamma = \frac{m'!}{\left(m'-m\right)!} : \frac{\left(m-\tilde{h}\right)!}{\tilde{t}\,!} = \frac{\tilde{t}\,!\cdot m'!}{\left(m-\tilde{h}\right)!\cdot\left(m'-m\right)!},$$

що й треба було довести.

Другий спосіб: використаємо спосіб побудови множина e-конфігурацій розміщень як сукупності множин відповідних перестановок. Тоді необхідно помножити кількість сполучень на кількість грід-графів – множина e-конфігурацій перестановок, яка визначається згідно теореми 2.12. Одержимо:

$$\gamma = \frac{m'!}{m!\cdot\left(m'-m\right)!}\cdot\frac{\tilde{t}\,!\cdot m!}{\left(m-\tilde{h}\right)!} = \frac{\tilde{t}\,!\cdot m'!}{\left(m'-m\right)!\cdot\left(m-\tilde{h}\right)!},$$

що й треба було довести.

Структурні графи e-конфігурацій перестановок та розміщень будуються за однаковими правилами і кількість вершин у структурному графі із $\tilde{h}$ закріпленими координатами залежить не стільки від кількості елементів твірної основи e-конфігурацій.

Із правил побудови структурного графа e-конфігурацій випливає така теорема.

Теорема 2.13. Нехай $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{\mathrm{h}}\right)$ – структурний граф множини e-конфігурацій X, основа якої містить m' елементів, тоді потужність множини вершин $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{\mathrm{h}}\right)$ обчислюється за формулою:

$$\left|\tilde{V}\right| = \frac{2\cdot m'!}{\left(m'-\tilde{h}\right)!}. \tag{2.44}$$

Доведення. За правилами побудови структурного графа закріпляються $\tilde{h}$ координат. Варіанти усіх можливих варіацій відповідають множині розміщень по $\tilde{h}$ із m', де m' – потужність основи, потужність якої дорівнює величині $\frac{m'!}{\left(m'-\tilde{h}\right)!}$. Для кожного такого рівня у структурному графі будується дві точки, тому одержимо: $\left|\tilde{V}\right| = 2\cdot\frac{m'!}{\left(m'-\tilde{h}\right)!}$, що й треба було довести.

Отже, формула (2.80) може бути використана для e-конфігурацій розміщень. Для e-конфігурацій перестановок $m'=m$, тоді формула матиме вигляд:

$$\left|\tilde{V}\right| = \frac{2\cdot m!}{\left(m-\tilde{h}\right)!}. \tag{2.45}$$

Одержані властивості допомагають оцінити кількість вершин грід-графів та стуртурних графів, необхідних для розгляду, що дозволяє зробити висновки про складність методів, які використовують відповідні графи e-конфігурацій.

Використання грід-графів та структурних графів дозволяє побудувати нові методи розв'язування векторної задачі лінійної комбінаторної оптимізації.

Висновки до другого розділу

У другому розділі виконано постановку задачі векторної комбінаторної оптимізації. Здійснено перехід до оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях, запропонована векторна задача оптимізації на e-конфігураціях, що відповідає векторній задачі у комбінаторній постановці.

Означено та досліджено властивості графів евклідових комбінаторнних конфігурацій, а саме побудова грід-графів евклідових комбінаторнних конфігурацій та їх властивості, побудова і властивості структурного графа e-конфігурацій. Сформульовані та доведені відповідні теореми.

Сформульовані та доведені властивості графів e-конфігурацій перестановок та розміщень.

Одержані результати дозволяють розробити нові методи розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях.

Основні результати другого розділу опубліковано в роботах [54, 57, 61, 62, 66, 68, 69, 88, 89].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [5, 8, 9, 18-21, 26, 27, 70, 80, 91, 99, 107, 110, 111, 113, 140, 143].

3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

3.1 Горизонтальний метод розв'язування задач векторної оптимізації

Вище виконана постановка задач векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях. Будемо розглядати випадок, коли усі часткові критерії задачі та додаткові обмеження є лінійними функціями, тобто таку задачу: знайти

$$X^* \subseteq X_P^*, \tag{3.1}$$

$$f_i(x) = \langle c_{ij} x_j \rangle \to extr, i \in J_n, \ j \in J_m, \tag{3.2}$$

$$x \in D \subseteq X . \tag{3.3}$$

де $extr = \{\min, \max\}$ – напрям оптимізації,

D – множина, що формується обмеженнями вигляду

$$\langle a_{ij} x_j \rangle \le b_i, i \in N_k, \ j \in N_m . \tag{3.4}$$

За умовою задачі (3.1)-(3.4) необхідно знайти точки з множини оптимальних за Парето розв'язків. Перейдемо до розробки методів розв'язування вказаної задачі.

У другому розділі означено структурний граф e-конфігурацій та досліджено його властивості, що дає змогу використати їх для розробки горизонтального методу розв'язування задач векторної оптимізації. У роботі [27] запропоновано горизонтальний метод локалізації значення функції, суть якого полягає у розбитті графа комбінаторної конфігурації на підграфи та поступовому поглибленні у його структуру, що дозволяє вилучити з розгляду ті підграфи, які не задовольняють умові задачі. На відміну від горизонтального методу локалізації значення функції, який був направлений на пошук тих елементів конфігурації, які при підстановці у задану функцію дають шукане значення, новий метод дозволяє знаходити усі точки евклідової комбінаторної конфігурації, що задовольняють певному обмеженню.

Нехай маємо векторну задачу оптимізації на множині X e-конфігурацій з (3.1) – (3.4), де одне із обмежень має вигляд $g(x) \geq b$, $g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$.

Опишемо основну процедуру горизонтального методу такими кроками:

Крок 0. Введемо коефіцієнти лінійного обмеження $g(x) \geq b$**.** Впорядкуємо коефіцієнти заданої лінійної функції-обмеження $g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$, тоді функція набуває вигляду:

$$g(x) = \tilde{c}_1 x_1 + \ldots + \tilde{c}_n x_n,\ \tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2 \leq \ldots \leq \tilde{c}_m,$$

до якого приходимо, застосовуючи перетворення коефіцієнтів:

$$\tilde{c}_i = c_{\pi^{-1}},\ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m \end{pmatrix},\ \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \ldots & \tilde{c}_m \end{pmatrix}.$$

*Крок 1***.** Будуємо структурний граф множини X e-конфігурацій $G_S^X\left(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h}\right)$, $\tilde{h} = 1$, тобто із однією закріпленою координатою.

Крок 2. Кількість вершин графа $G_S^X\left(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h}\right)$ визначаємо за теоремою 2.13 і дорівнює $\left|\tilde{V}\right| = \dfrac{2 \cdot m'!}{\left(m' - \tilde{h}\right)!}$, де m' – потужність індукуючої множини e-конфігурацій.

Крок 3. Обчислюємо значення $g(x)$ у вершинах графа $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{\mathrm{h}}\right)$, які згідно означення структурного графа будуть дорівнювати мінімуму та максимуму на кожному рівні графа $G_S^X\left(\tilde{V},\tilde{U},1\right)$.

Крок 4. Визначаємо рівні графа, що місять шукані вершини, які задовольняють умові $g(x)\geq b$, використовуючи теорему 2.10. Збільшуємо кількість зафіксованих координата, тобто $\tilde{h}=\tilde{h}+1$. Якщо $\tilde{h}\leq m$, формуємо набір структурних графів $G_S^{X_1}\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{h}\right)$, $G_S^{X_2}\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{h}\right),\ldots$, $G_S^{X_l}\left(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{h}\right)$. Тобто занурюємось у структуру графа G_S^X, переходимо на крок 3 і повторюємо дослідження для кожного із l графів.

Крок 5. Формуємо множину D таких e-конфігурацій, для яких виконується умова $g(x)\geq b$, використовуючи властивості структурного графа.

Описаний блок є частиною загального методу, що використовується для формування множини точок, що задовольняють лінійним обмеженням задачі, а пошук розв’язку основної задачі оптимізації проводиться на одержаній множині.

Згідно вказаного методу спочатку розглядається структурний граф комбінаторної конфігурації та знаходяться максимальне та мінімальне значення функції-обмеження на кожному з рівнів структурного графа. Ця інформація згідно теореми 2.10 є підставою для того, щоб або розглядати поточний рівень далі, заглиблюючись у його структуру при умові, що шукане значення міститься між мінімальний та максимальним, або повністю включити усі точки рівня підграфа, оскільки усі вони задовольняють обмеженню, або повністю виключити, оскільки жодна з точок не може задовольнити умові. Такі висновки можливо зробити за рахунок властивостей структурного графа евклідових комбінаторних конфігурацій, для яких він побудований. Аналіз проводиться для кожного з обмежень задачі, що дозволяє сформувати ряд множин елементів, що задовольняють лінійним обмеженням. Перетин цих множин і буде областю визначення задачі, серед точок якої й містяться розв’язки.

Горизонтальний метод може бути об’єднаний з різними методами векторної оптимізації. Розглянемо його комбінацію із методом згортки.

Опишемо горизонтальний метод для задач векторної комбінаторної оптимізації такими кроками:

Крок 1. Ввести вхідні дані задачі: коефіцієнти функцій, додаткових обмежень.

Крок 2. Обчислити вагові коефіцієнти для кожної з функцій за формулою $a_i = \sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} \Big/ \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}, i \in J_n$.

Крок 3. Перейти до однокритеріальної задачі оптимізації за формулою $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to extr$

Крок 4. Побудувати структурний граф $G_S^X\left(\tilde{V}, \tilde{U}, 1\right)$ e-конфігурацій X ..

Крок 5. До кожного з k обмежень задачі визначити множину $D_k \subseteq X$ точок e-конфігурацій, які його задовольняють, застосувавши процедуру горизонтального методу.

Крок 6. Знайти перетин множин, що задовольняють кожне з лінійних обмежень задачі $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_k$.

Крок 7. Знайти екстремальні значення цільової функції f^* в точках $x \in D^*$, обравши відповідний напрямок оптимізації згідно з умовою задачі та використовуючи властивості множини e-конфігурацій, на яких розв’язується задача.

Запропонований метод спирається на інформацію від ОПР про переваги на множині критеріїв для визначення вагових коефіцієнтів функцій. Метод дозволяє уникнути повного перебору елементів множини. Оптимальні значення функції містяться на межі області допустимих значень критеріїв, що є перетином множин, утворених у результаті застосованих процедур горизонтального методу для кожного із заданих обмежень. Порівняння значень цільової функції в цих точках дає не єдиний розв’язок, а частину множини оптимальних за Парето альтернатив, на відміну від методів, що працюють на основі алгоритму комбінаторного відсікання.

Проведені числові експерименти розв'язування задач векторної оптимізації на e-конфігураціях розміщень за горизонтальним методом відображені в додатку Д.

Дані таблиці, наведеної в додатку Д, ілюструють ефективність горизонтального методу, оскільки значна кількість елементів множини евклідових комбінаторних конфігурацій не розглядається з огляду на те, що значення функції для відповідних точок не задовольнятиме умові. Кількість точок, що підлягають розгляду, залежить від заданого значення функції та характеру цільової функції. Чим «ближче» задане значення до максимального чи мінімального, тим менше точок необхідно розглянути, оскільки багато рівнів структурного графа не задовольнятимуть умові (або задовольняють повністю).

Поступове поглиблення у структуру графа дозволяє уникнути зайвих обчислень, що скорочує час роботи програми. Використання властивостей евклідових комбінаторних конфігурацій та правил побудови структурного графа e-конфігурацій та різних його рівнів є засобом формування множини допустимих розв'язків задачі та етапом розв'язування векторних оптимізаційних задач.

З рисунку видно, що час роботи прямо пропорційний кількості розв'язків. Це можна пояснити тим, що проведення аналізу рівнів структурного графа дозволяє вилучити з розгляду велику кількість вершин одночасно, оскільки одразу відомо максимальне та мінімальне значення функції, якщо шукане значення міститься між ними, то виникає необхідність у подальшому заглибленні, інакше підграф не розглядається. Одержаний графік свідчить про ефективність горизонтального методу як для локалізації значення функції, так і для роботи з обмеженнями векторної задачі.

Ще одним методом, що дозволяє знайти множину Парето-оптимальних розв'язків, є координатний метод, який розглянемо далі.

3.2 Координатний метод розв’язування задач векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях

Основою для розробки координатного методу розв’язування задач векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях є використання властивостей грід-графів e-конфігурацій. У другому розділі означено грід-граф, описані правила його побудови, досліджені його властивості як загальні, так і для деяких видів e-конфігурацій.

Згідно означення грід-граф визначається типом вершини $\tilde{v}$ – параметром, що визначає порядок перших $\tilde{t}$ координат кожної вершини поточного грід-графа, та $\tilde{h}$ закріпленими координатами. Якщо сформувати множину грід-графів із однаковою розмірність параметрів $\tilde{t}$ та $\tilde{h}$ таку, що будуть охоплені усі точки заданої множини X e-конфігурацій, можна провести оцінку значення лінійної функції на множині X. Розглянемо приклад визначення типів вершини та обчислення кількості грід-графів e-конфігурацій.

Приклад 3.1. Якщо типом вершини визначається порядок перших $\tilde{t}=3$ координат, то цей порядок визначається множиною $\{(123),(213),(132),(312),(231),(321)\}$, а множина відповідних типів вершини грід-графа позначається через $v_i, i \in N_6$. обраним порядок перших трьох координат, що визначається множиною. Для множини перестановок з 6 елементів при умові, що $\tilde{h}=1$, таких кількість таких грід-графів буде відповідно до теореми: $\gamma=\tilde{t}\,!\cdot\dfrac{m!}{(m-\tilde{h})!}=3!\cdot\dfrac{6!}{(6-1)!}=36$.

У другому розділі досліджені властивості лінійної функції на грід-графі e-конфігурацій. Ці властивості дають можливість оцінити значення функції на певній частині множини X, що відповідає вершинам заданого грід-графа. Також проілюстровані приклади побудови грід-гафів e-конфігурацій.

На основі властивостей грід-графів будується координатний метод розв’язування векторної задачі оптимізації на e-конфігураціях. Суть координатного методу полягає у побудові множини грід-графів евклідових комбінаторних конфігурацій, які у об’єднанні утворюють граф e-конфігурацій множини X.

За доведеними властивостями грід-графів можна оцінити значення лінійної функції, коефіцієнти якої впорядковані за зростанням, оскільки можливо встановити максимальне та мінімальне значення вказаної функції для кожного з грід-графів. За рахунок побудови чітко визначено порядок транспозицій та напрям спадання значень функції, що дає можливість зупинити процедуру аналізу у випадку, коли досягнуте певне задане значення.

Розглянемо приклад побудови грід-графа та оцінки значення функції.

Приклад 3.2. Нехай необхідно побудувати грід-граф e-конфігурацій перестановок з шести елементів при умові $\Upsilon' = \left\langle x_6 = 2, v' = (1,2,3) \right\rangle$. Задано деяку лінійну функцію із впорядкованими за зростанням коефіцієнтами $g(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 55x_6$. Необхідно знайти усі вершини грід-графа, у яких справджується нерівність $g(x) \le 243$. За означенням грід-графа вершина витоку матиме координати $x^0 = (1,3,4,5,6,2)$. Згідно умови Υ' остання координата для усіх вершин $Gr(X, \Upsilon')$ матиме значення 2. Координати x_5 та x_4 послідовно будуть змінювати значення шляхом транспозицій вигляду (2.68). За властивостями грід-графа e-конфігурацій значення функції $g(x)$ буде зменшуватись (або не зростати) із кожною наступною транспозицією, тому для знаходження усіх точок, що будуть відповідати умові $g(x) \le 243$, необхідно знайти перші задовільні значення у напрямку від витоку до стоку. Позначимо координати деяких вершин та значення функції у вершинах грід-графа $Gr(X, \Upsilon')$ на рисунку 3.2. Для наочності заштрихуємо ті вершини, які задовольняють лінійному обмеженню $g(x) \le 243$.

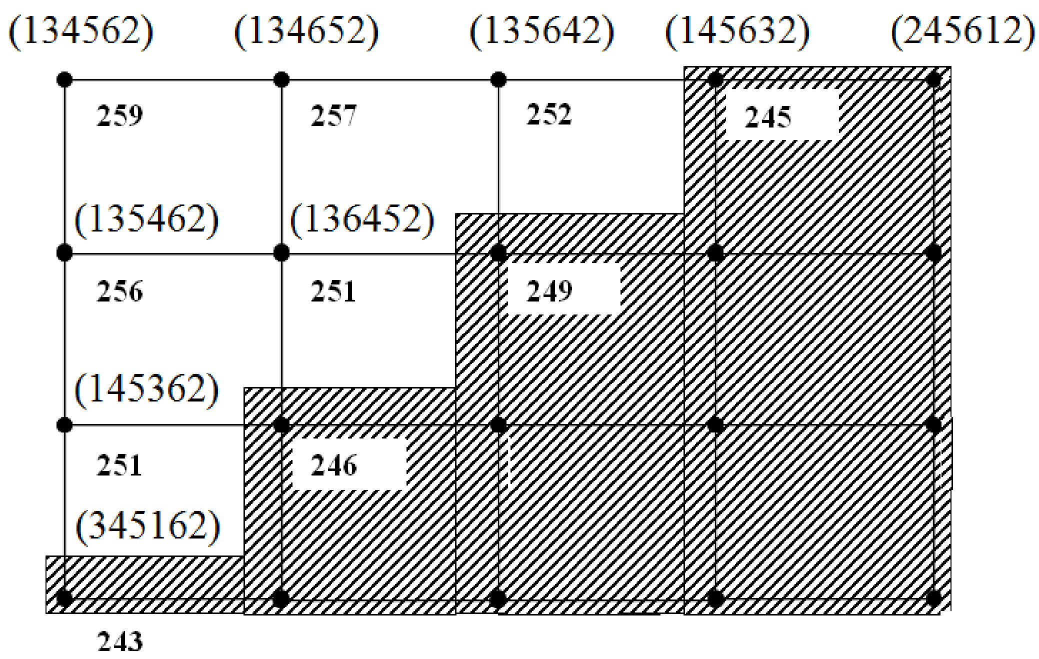


Рисунок 3.2 – Грід-граф $Gr\left(X,\Upsilon'\right)$, $\Upsilon' = \left\langle x_6 = 2, v' = \left(1,2,3\right)\right\rangle$ із значеннями функції $g(x)$ у його вершинах

Координатний метод базується на побудові та властивостях грід-графів e-конфігурацій, що дозволяють розглядати не всі елементи конфігурації, оскільки відомо напрям спадання значення функції. Зазначений метод може бути використаний при розв'язування векторних задач, оскільки є можливість його застосування у якості деякої процедури та об'єднання з відомими методами векторної оптимізації.

Прикладом такої модифікації може бути метод послідовного вводу обмежень, об'єднаний з процедурою координатного методу для розв'язування задач на евклідових комбінаторних конфігураціях, який опишемо такими кроками.

Крок 1. Ввести змінну $k = 0$. Ввести максимально допустиму відстань до «ідеальної» точки ρ^*.

Крок 2. За координатним методом визначити точки комбінаторної конфігурації, що задовольняють кожному з початкових обмежень $D_i \subset X$, де $i \in N_s$: Використати *процедуру координатного методу,* що наведена нижче.

1. Задати початкові значення змінних: $t = 1$, $\tilde{k} = m - \tilde{h}$, $i = m$.

2. Зафіксувати тип вершини $v_t = (i_1, i_2, ..., i_{\tilde{t}})$, де $i_1 \cup i_2 \cup ... \cup i_{\tilde{t}} = \{1, 2, ..., \tilde{t}\}$. Номер підграфа i.

3. Задати значення таким чином: $x_s = i$, $x_{s-1} = \max\{J_s \setminus x_s\}$, $x_{s-2} = \max\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}$, …, $x_4 = \max\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_5)\}$. Числа $\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_{\tilde{k}})\}$ впорядкувати за зростанням $j_1 < j_2 < ... < j_{\tilde{t}}$. Тоді $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, ..., x_{\tilde{t}} = j_{i_{\tilde{t}}}$. Це й будуть координати головної вершини (витоку) x^0. Обчислимо значення функції в коді головної вершини $\mathrm{g}(x^0)$.

4. Задати значення таким чином: $x_s = i$, $x_{s-1} = \min\{J_s \setminus x_s\}$, $x_{s-2} = \min\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}$, …, $x_4 = \min\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_5)\}$. Числа $\{J_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_4)\}$ впорядкувати за спаданням $j_1 < j_2 < ... < j_{\tilde{t}}$. Тоді $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, ..., x_{\tilde{t}} = j_{i_{\tilde{t}}}$. Це будуть координати правої нижньої вершини – стоку x^{st}. Обчислимо значення функції в коді вершини-стоку $g(x^{st})$.

5. Оптимізація пошуку: визначити напрям пошуку в побудованій мережі шляхом порівняння значень $g(x^0)$ и $\mathrm{g}(x^{st})$ із заданим B^* за таким правилом: якщо $\mathrm{g}(x^0) - B^* \le B^* - f(x^{st})$, то провести пошук від витоку до стоку (перейти на крок 6), інакше – від стоку до витоку (перейти до пункту 7).

6. Розглянути та впорядкувати за спаданням значення $x_k, k \in J_k$: $j_k > j_{k-1} > ... > j_1$. Провести розгортання графа в напрямку координати x_k, шляхом послідовних транспозицій: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow j_1$, що приведуть до утворення координат ще $k-1$ вершин $p_2, p_3, .., p_k$. Ці координати вершин є координатами вершин грід-графа. Перейти до пункту 8.

7. Розглянути та впорядкувати за зростанням значення $x_k, k \in J_k$. Провести розгортання графа в напрямку координати x_k, шляхом послідовних транспозицій: $j_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow j_k$, що приведуть до утворення координат ще $k-1$ вершин $p_{st2}, p_{st3}, .., p_{stk}$.

8. Знайти значення функції у цих вершинах, використовуючи їх координати: $g(p_n) = g(p_{n-1}) - \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, де $\mu(\lambda)$ – номер місця числа j_λ в коді перестановки p_{n-1}.

9. Перевірити виконання таких умов:

a) Якщо $g(p_m) \geq B*$ (шукані значення можуть міститися у підграфі), то включаємо m-ту перестановку в наступний пошук. Перейти на крок 10;

b) Якщо для всіх знайдених координат $g(p_m) < B*$ і $i-1 \leq 1$ (шукані значення відсутні у побудованому підграфі, але не всі координати були зафіксовані для визначеного типу першини), то перейти до розгляду грід-графів, зафіксувавши наступну координату $x_s = i$ – перейти до пункту 2;

c) Якщо для всіх знайдених координат вершин $g(p_m) < y*$ і $i-1=0$ (шукані значення відсутні у побудованому грід-графі, всі координати були зафіксовані та розглянуті для визначеного типу першини), то присвоїти $i=6$ і перейти до розгляду грід-графів з типом вершин v_{t+1}. Перейти до пункту 6. Якщо $t+1 \leq 6$ (не всі типи вершин були розглянуті) перейти по пункту 2, інакше – завершити роботу процедури координатного методу для поточного обмеження.

Крок 3. Знайти перетин множин $D* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_s$. $D^{(k)} = D*$.

Крок 4. Визначити оптимальні значення кожного критерію на множині $D^{(k)}$ та сформувати «ідеальну» оцінку $f^{*(k)}$ як вектор оптимальних значень критеріїв.

Крок 5. Визначити величини $\sigma_i^k, i \in N_m$ за формулою $\sigma_i^k = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{f_i^{\max(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{\max(k)} - f_i^{\min(k)}}$, де x^{il} – альтернатива, що максимізує l-й критерій на множині $D^{(k)}$; $f_i^{\max(k)}$ та $f_i^{\min(k)}$ – відповідно найкраще та найгірше значення i-го критерію на множині $D^{(k)}$.

Крок 6. Обчислити вагові коефіцієнти критеріїв за формулою:

$$a_i^k = \sigma_i^k \Big/ \sum_{j=1}^{m}\sigma_j^k, i \in J_m.$$

Крок 7. Визначити суперкритерій оптимальності: $F = \sum_{i=1}^{k} a_i^k f_i \to \max$.

Крок 8. Знайти x^k, як розв'язок задачі $Z(F, D^{(k)})$, та його оцінку y^k.

Крок 9. Якщо y^k задовольняє «ідеальну» оцінку $f^{*(k)}$, тобто $\rho(y^k, f^{*(k)}) \leq \rho^*$ перейти на крок 10, інакше – на крок 11.

Крок 10. Знайти відхилення по кожному критерію $\Delta_i = f_i(x^k) / f_i^{\max(k)}, i \in N_m$ та визначити $\Delta_r = \max(\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_m)$. Тобто r – номер критерію, значення якого необхідно покращити, ω_r – рівень, до якого слід покращити обраний критерій. Збільшити значення k на 1. До обмежень задачі додати k-те обмеження у вигляді $f_r(x) \geq \omega_r$. Перейти на крок 3.

Крок 11. x^k – шуканий розв'язок. Завершити роботу алгоритму.

Алгоритм методу поданий у вигляді схеми на рисунку 3.3. Описаний метод передбачає одержання інформації від ОПР про попарні переваги критеріїв, а також про величину відстані від «ідеальної» точки та величину покращення значення за «найгіршим» із критеріїв на кроці 9 алгоритму.

Процедура до кожного з обмежень задачі застосовується лише один раз і не потребує постійних перерахунків. При додаванні нових нерівностей до системи задачі з метою покращення значення обраного часткового критерію виникає необхідність застосування процедури координатного методу лише до нової нерівності.

При подальших ітераціях процедура координатного методу застосовується лише до нового обмеження, що вводиться з метою покращення одного з критеріїв, значення якого було найгіршим. Одержана множина точок перетинається із уже існуючою. Процес продовжується до моменту, коли утвориться множина точок, відстань від яких до ідеальної, не перевищуватиме заданого. Хоча сам метод послідовного введення обмежень досить трудомісткий, проте саме підхід з використанням процедур координатного або горизонтального методів дає можливість оптимізувати пошук при кожній наступній ітерації, не переглядаючи розглянуті вище обмеження.

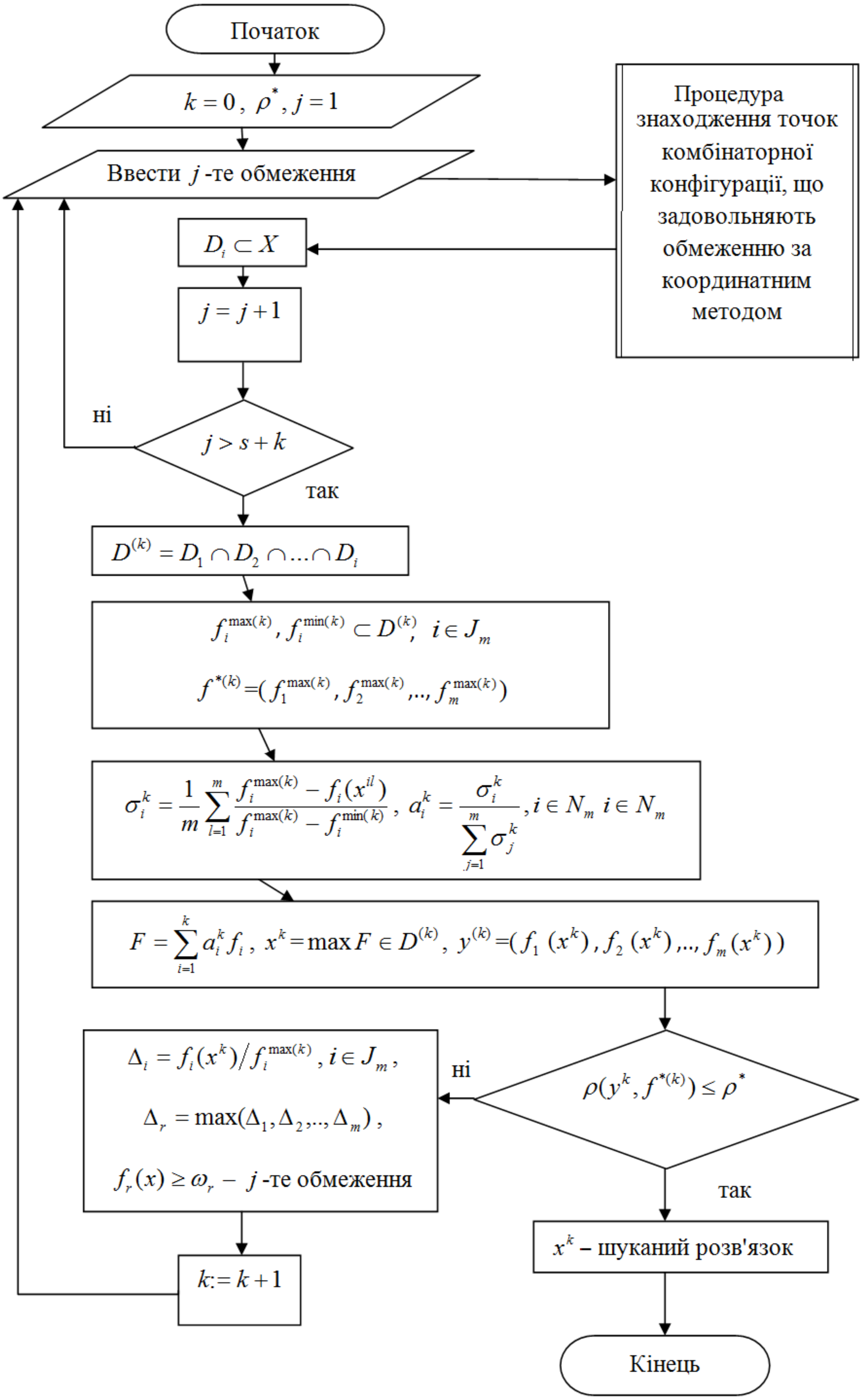


Рисунок 3.3 – Схема алгоритму модифікованого методу послідовного вводу обмежень координатним методом

Горизонтальний та координатний методи дають можливість отримати результати за рахунок використання теорії графів, згідно якої евклідова комбінаторна конфігурація подається як структурний граф або набір грід-графів, які в об’єднанні дають граф евклідової комбінаторної конфігурації, що дозволяє шуканий розв’язок знайти за визначену кількість кроків.

У результаті цих перетворень змінюються і координати у вершинах грід-графів, що потрібно враховувати при перетині множин. Ця ситуація вимагає побудови набору грід-графів для кожного з обмежень окремо.

Координатний метод розв’язування векторних комбінаторних задач оптимізації, об’єднаний з методом згортки опишемо такими кроками:

Крок 1. Ввести коефіцієнти цільових функцій, додаткових обмежень задачі, елементи множини, що є основою комбінаторної конфігурації перестановок.

Крок 2. Перетворити векторний критерій у лінійну функцію $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i^k f_i \to extr$, де вагові коефіцієнти нового суперкритерію оптимальності розраховується по формулі $a_i^k = \sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} \Big/ \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}, i \in J_n$.

Крок 3. Для кожного з k обмежень знайти відповідні йому точки конфігурації перестановок, використовуючи процедуру координатного методу.

Крок 4. Одержати k множин $D_i \subset X, i \in J_k$.

Крок 5. Знайти перетин $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_k$.

Крок 6. Обчислити значення функції у точках $x \in D^*$ і порівняти їх, вибравши відповідно з напрямом оптимізації.

Крок 7. Знайти значення функції, що входять у векторний критерій. Завершити роботу алгоритму.

Цей метод використовує інформацію від ОПР про переваги на множині критеріїв, що входять до векторної функції. На відміну від попереднього не вимагає знаходження «ідеальної» точки та зазначення відстані до неї, а також діалогу з ОПР.

Метод описаний для лінійних функцій, проте при побудові математичних моделей економічних та технічних процесів, пов'язаних з визначенням рентабельності, собівартості, продуктивності і т.п., виникає необхідність в оптимізації деякого відносного показника, який може бути представлений дробово-лінійною функцією цілі. Якщо область допустимих значень таких прикладних задачі має властивості деякої множини комбінаторних конфігурацій, то мова йде про оптимізаційну комбінаторну задачу. При умові оптимізації декількох функцій приходимо до векторної задачі з дробово-лінійними цільовими функціями.

Задача формулюється таким чином: знайти таке $x^* \in X^*, X^* \subset D \subseteq X$, що $X^* = A\mathrm{rg} \underset{x \in D \subseteq X}{extr} F(x)$, де $F(f_1, f_2,.., f_n)$ – векторний критерій, який складається з дробово-лінійних функцій цілі

$$f_i = \underset{x \in D \subseteq X}{extr} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_i x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_i x_j + d_0}, i \in J_n, j \in J_m, \tag{3.5}$$

при умові $\sum_{j=1}^{m} d_i x_j + d_0 \neq 0$, де $D \subseteq X$ – підмножина допустимих розв'язків задачі, що формується із системи додаткових лінійних обмежень, X – множина евклідових комбінаторних конфігурацій, n – кількість функцій, m – кількість змінних.

При розв'язуванні задач з дробово-лінійними функціями найчастіше використовують метод перетворення змінних, які зводять початкову задачу до лінійної (лінеаризація). При цьому кількість змінних збільшується, що приводить до перетворення додаткових змінних задачі. У випадку комбінаторної оптимізації вимагає відображення заданої конфігурації. При виникненні умови багатокритеріальності перетворення змінних значно ускладнюється, оскільки його треба застосувати до кожної функції окремо.

Найчастіше знаменники цільових функцій різні та загальновживані формули для лінеаризації не можуть бути використані для усіх критеріїв одночасно.

Також використовують метод оновлення цільової функції, який передбачає періодичний перерахунок локального градієнту дробово-лінійної функції, зводячи задачу дробово-лінійного програмування до послідовності лінійних задач [119]. Даний метод розроблений для однокритеріальної оптимізації, при збільшенні кількості змінних і виникненні умови багатокритеріальності зростає його обчислювальна складність та є потреба модифікації.

У роботі [35] запропонований метод розв’язування задач оптимізації з дробово-лінійної функції на множині перестановок, базується на методі комбінаторного відсікання. Перевагою даного методу є його практична ефективність для вказаного класу задач, а також використання дробово-лінійної функції при зведенні векторних задач до скалярних. Даний метод використовується для однокритеріальної оптимізації, а також використовується метод лінеаризації, тому при розв’язуванні векторних задач приводить до тих же проблем, що й у методі перетворенні змінних.

Отже, очевидно, що пошук універсального методу розв’язування векторних дробово-лінійних задач на комбінаторних конфігураціях є перспективним напрямом досліджень. Поєднання багатокритеріальності та комбінаторних властивостей ускладнює задачу і вимагає використання специфічних підходів.

Як згадувалося вище, при розв’язуванні задач з дробово-лінійними функціями зазвичай застосовують перетворення, які зводять задачу до лінійної. Скінченність множини, на якій розв’язується задача дозволяє застосувати повний перебір варіантів, але такий підхід є нераціональним.

Розв’язування поставленої задачі за допомогою запропонованого алгоритму модифікованого координатного методу не вимагає виконання перетворень, оскільки працює безпосередньо із системою лінійних обмежень задачі, визначаючи лише точки комбінаторної конфігурації, які їх задовольнять, а також значно скорочує кількість точок для розгляду. Множина розв’язків задачі формується шляхом порівняння значень критерію оптимальності у знайдених точках конфігурації, які задовольняють обмеженням задачі.

Координатний метод для розв’язування векторних задач з дробово-лінійними цільовими функціями на комбінаторних конфігураціях складається з таких кроків:

Крок 1. Вводимо вхідні дані задачі: коефіцієнти дробово-лінійних функцій, додаткових обмежень, елементи комбінаторної конфігурації.

Крок 2. Обчислюємо вагові коефіцієнти кожної з функцій за формулою $a_i^k = \sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} \Big/ \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}, i \in N_n$.

Крок 3. Переходимо до однокритеріальної дробово-лінійної задачі за формулою $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to extr$

Крок 4. Формуємо комбінаторну конфігурацію. До кожного з k обмежень задачі визначаємо множину $D_k \subseteq X$ точок комбінаторної конфігурації, які його задовольняють, застосувавши алгоритм модифікованого координатного методу як підпрограму.

Крок 5. Знаходимо перетин множин $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_k$.

Крок 6. Знаходимо значення цільової функції f^* в точках $x \in D^*$.

Крок 7. Порівнюємо знайдені значення, обравши відповідний напрямок оптимізації. Визначаємо екстремальне значення. Закінчуємо роботу алгоритму.

Схема алгоритму координатного методу для дробово-лінійних функцій подана на рисунку 3.4.

Цей метод застосований для розв’язування задач з дробово-лінійними функціями на комбінаторних конфігураціях, але може бути застосований до інших видів нелінійних функцій. Він побудований таким чином, щоб скоротити кількість необхідних розрахунків за рахунок вибору напряму розгортання підграфа вздовж ліній його сітки у залежності від значення функції у вершині витоку та стоку для кожного із заданих лінійних обмежень задачі.

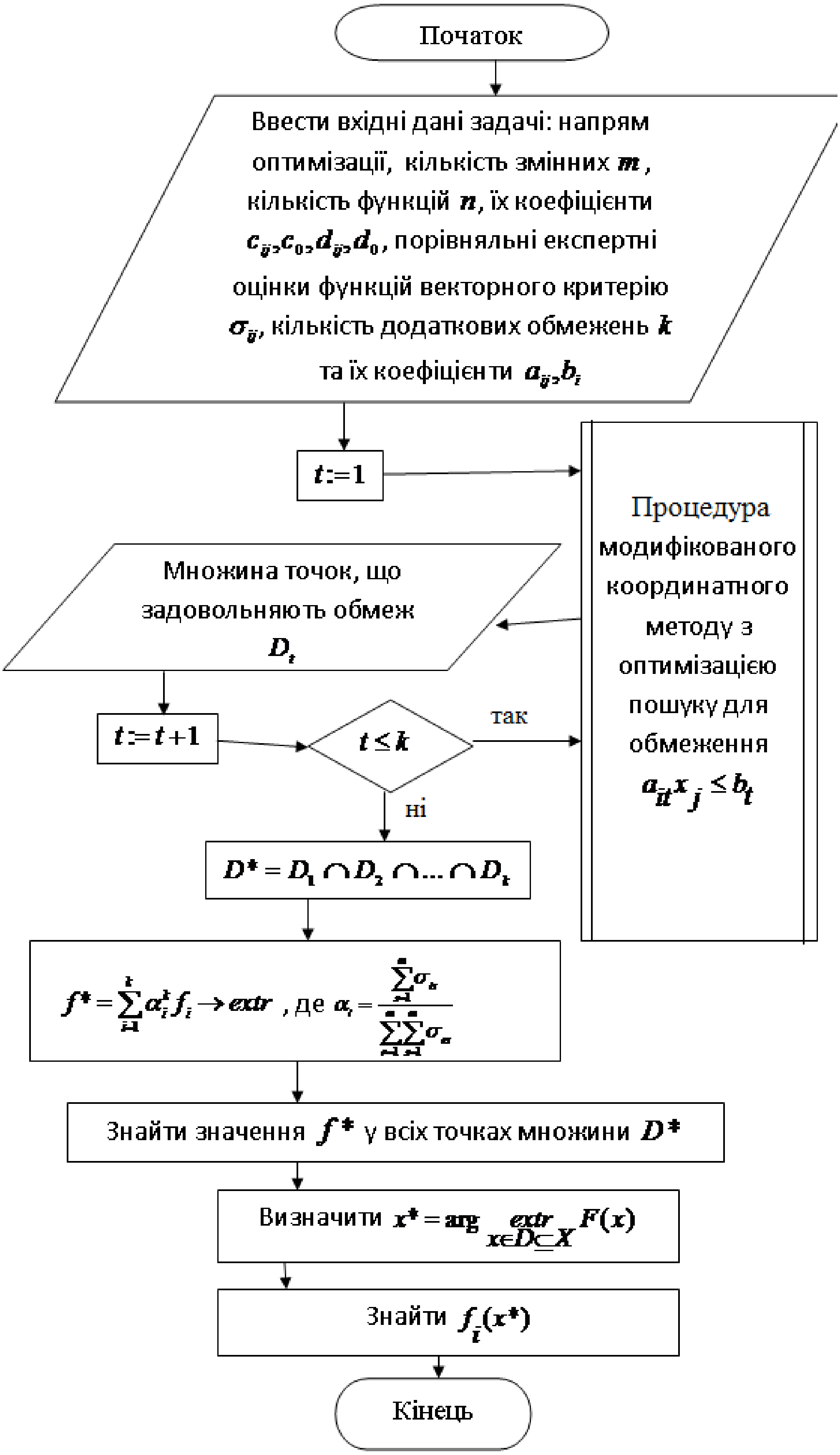


Рисунок 3.4 – Схема алгоритму координатного методу для векторних задач з дробово-лінійними цільовими функціями на комбінаторних конфігураціях

Така оптимізація пошуку при великій кількості обмежень та великій розмірності множини може скоротити час на обчислення та збереже не лише час, а й інші ресурси, такі як пам'ять та завантаженість процесора. Наочно ефективність методу можна простежити за даними таблиці, що подана у додатку Е.

Слід зазначити, що при збільшенні числа обмежень задачі важливим є порядок їх розгляду, який впливає на ефективність формування множини допустимих значень задачі $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_k$. Також, якщо на певному етапі може скластися ситуація, коли кількість точок комбінаторної конфігурації значно перевищує кількість допустимих розв'язків по вже розглянутим обмеженням, виникає питання доцільності проведення повномасштабного пошуку за обмеженнями, що ще залишились. Доцільнішим та більш раціональним підходом в описаній ситуації є перевірка виконання умови для решти обмежень у вже знайдених точках комбінаторної конфігурації. Причому, з кожною новою перевіркою кількість точок зменшується або не зростає.

Ще однією перевагою координатного методу для таких задач є можливість організації паралельних обчислень, оскільки робота підпрограми за кожним із обмежень проходить незалежно від інших. Також при великій кількості обмежень можливо проводити паралельно попарні перетини утворених множин. Це дозволяє скоротити загальний час роботи алгоритму при можливості запуску паралельних процесів.

Запропонований координатний метод можк бути використаний у комбінації з різними методами векторної оптимізації як процедура аналізу заданої множини комбінаторних конфігурацій. Використання для обчислень значень функції у вершинах грід-графів не за рахунок прямої підстановки, а за рахунок різниць між значеннями у сусідніх вершинах дає можливість скоротити кількість операцій, необхідних для роботи алгоритму за цим методом.

Координатний метод при необхідності дає можливість знайти усю множину Парето-оптимальних розв'язків векторної комбінаторної задачі, застосований до лінійних та дробово-лінійних функцій, але може бути поширений на інші види функцій.

3.3 Розв’язування задачі векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень

При відсутності додаткових обмежень задача (3.1) – (3.4) перетворюється у задачу векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень, що формулюється так: знайти множину X_P^* для

$$F(x) \to extr, \tag{3.6}$$

де $F(f_1, f_2,.., f_n)$ – векторний критерій, що складається із часткових цільових функцій

$$f_i\left(x\right) = \left\langle c_{ij} x_j \right\rangle, i \in J_n, j \in J_m, \tag{3.7}$$

де X – множина деяких e-конфігурацій;

$extr$ – напрям оптимізації:

$$extr \in \left\{\min, \max\right\}; \tag{3.8}$$

n – кількість функцій;

m – кількість змінних.

При відсутності додаткових лінійних обмежень слід використати властивості комбінаторної конфігурацій, на якій задана задача та один із відомих методів векторної оптимізації, модифікувавши його.

Найпростішим випадком для розв’язування задач з багатьма цільовими функціями є використання методів на основі лінійних згорток, коли визначаються вагові критерії кожної із цільових функцій. Таким чином відбувається перехід до безумовної комбінаторної задачі з однією цільовою функцією. Максимальне чи мінімальне значення скалярного критерію визначається згідно властивостей комбінаторних конфігурацій, описаних у другому розділі.

Суть методу розв'язування векторної задачі на комбінаторній конфігурації без додаткових обмежень на основі згортки полягає у тому, щоб експерт чи особа, що приймає рішення, визначила важливість кожної з функцій, що дозволяє одержати скалярну цільову функцію.

Оскільки задача розв'язується на деякій комбінаторній конфігурації і не має додаткових обмежень, то знайти екстремальне значення одержаного критерію можливо, спираючись на властивості заданої комбінаторної конфігурації. Зазвичай для цього необхідно виконати підстановку, щоб коефіцієнти функції були записані за зростанням, а потім знову перейти до початкових змінних. Коли знайдено елемент, конфігурації, у якому досягається екстремальне значення скалярного критерію, потрібно повернутись до векторного критерію і знайти значення, кожної з функцій, що входять до нього.

Метод розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень є послідовністю таких кроків.

Крок 1. Ввести вхідні дані задачі: коефіцієнти функцій, елементи комбінаторної конфігурації.

Крок 2. Обчислюємо вагові коефіцієнти для кожної з функцій за формулою $a_i = \sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} \Big/ \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}, i \in N_n$.

Крок 3. Переходимо до однокритеріальної задачі оптимізації за формулою $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to extr$.

Крок 4. Знайти відповідне екстремальне значення (максимальне або мінімальне) цільової функції f^* в точках $x \in X$.

Крок 5. Знайти значення кожного із часткових критеріїв.

Одним з можливих підходів до розв'язування векторної задачі комбінаторної оптимізації без додаткових обмежень може бути метод головного критерію, описаний у першому розділі, із відповідною модифікацією. Для розв'язування задачі (3.9)−(3.11) названим вище методом необхідна інформація про переваги на множині критеріїв та можливі величини відхилень по кожній із цільових функцій, що входять до векторного критерію. Тоді пошук ведеться за класичним алгоритмом методу головного критерію, а екстремальні значення знаходяться згідно властивостей заданої конфігурації. Усі критерії крім головного, стають обмеженнями задачі, до розв'язування якої можна застосувати алгоритм горизонтального чи координатного методу.

Адаптований метод головного критерію для розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень опишемо послідовністю таких кроків:

Крок 0. Одержати інформацію від ОПР про переваги на множині критеріїв для визначення головного критерію та допустимі відхилення для усіх інших критеріїв оптимальності $\xi_i, i \in N_{n-1}$.

Крок 1. Ввести вхідні дані задачі: коефіцієнти функції $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to extr$, додаткових обмежень, що утворились із цільових функцій у вигляді рівнянь $g_i \le \xi_i, i \in N_{n-1}$, елементи комбінаторної конфігурації.

Крок 2. Переходимо до однокритеріальної задачі оптимізації функції $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to extr$ при обмеженнях $g_i \le \xi_i, i \in J_{n-1}$.

Крок 3. Записати комбінаторну конфігурацію у вигляді структурного графа, визначивши крайні точки кожного із підграфів.

Крок 4. До кожного з $n-1$ обмежень задачі визначити множину $D_{n-1} \subseteq X$ точок комбінаторної конфігурації, які його задовольняють, застосувавши підпрограму за алгоритмом адаптованого горизонтального методу.

Крок 5. Знайти перетин множин, що задовольняють кожне з лінійних обмежень задачі $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$, якщо $D^* \neq \varnothing$, то перейти на крок 6, інакше – на крок 0 для уточнення можливих відхилень за критеріями оптимальності, крім головного.

Крок 6. Знайти екстремальне значення цільової функції f^* в точках $x \in D^*$, використовуючи властивості заданої комбінаторної конфігурації.

Ця процедура є діалоговою та вимагає інформації від ОПР. Задача векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень дає широке коло варіацій у пошуку підходів до розв'язування, проте ключовим її етапом у будь-якому варіанті є застосування властивостей комбінаторних конфігурацій, які відіграють важливу роль у побудові методів розв'язування.

Поданий метод використовує горизонтальний метод розв'язування векторної задачі на комбінаторних конфігураціях. Замість нього як підпрограма може бути використаний поданий в роботі координатний метод у відповідній модифікації як підпрограма роботи з додатковими лінійними обмеженнями.

3.4 Розробка методів розв'язування задач векторної оптимізації на основі методів відсікання

Ідея методу комбінаторного відсікання полягає у пошуку розв'язку задачі за допомогою симплекс-методу або його модифікацій та визначенні його належності відповідній комбінаторній множині. Якщо отримане значення є елементом множини, то алгоритм припиняє роботу, в іншому випадку – будується нерівність-відсікання, що приєднується до системи обмежень, і процедура пошуку розв'язку продовжується. Проте він розроблений для скалярних задач дискретної оптимізації. Для розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях є доцільним побудувати його комбінацію з методом обмежень. Такий комбінований алгоритм може використовуватись для різних комбінаторних конфігурацій. З метою деталізації алгоритму опишемо його для розв'язування на множині полірозміщень.

Суть методу полягає у мінімізації деякого показника, що визначає відхилення розв'язку задачі від бажаного. Метод передбачає вирішення проблеми нормалізації критеріїв шляхом відображення, що є переходом до безрозмірного вигляду кожної з цільових функцій. Запишемо алгоритм запропонованого методу.

Крок 1. Ввести цілочислову змінну q. Покласти $q = 0$.

Крок 2. Записати умову належності розв'язку множині полірозміщень у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j \in M_i^{'}} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} a_j^{M_i} \forall i \in J_s, \\ \sum_{j \in \omega^i} x_j \geq \sum_{j=1}^{\left|\omega^i\right|} a_j^{M_i} \forall \omega^i \in M_i^{'}, \forall i \in J_s. \end{cases}$$

Крок 3. Об'єднати систему кроку 2 із системою додаткових лінійних обмежень задачі: $a_{it} x_j \leq b_t, i \in J_m, t \in J_k$.

Крок 4. Визначити x_i^0 − розв'язок, що оптимізує i-ту цільову функцію $x_{i\max}(x_{i\min})$ − розв'язки, які максимізують (мінімізують) відповідний критерій на допустимій множині розв'язків, використовуючи властивість конфігурації полірозміщень.

Крок 5. Записати такі відображення функцій:

а) для функцій, що мінімізуються:

$$W_i(f_i(X)) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\max} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0}, \ \forall i \in J_s;$$

б) для функцій, що максимізуються:

$$W_i(f_i(X)) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{i\min}}, \forall i \in J_{m-s}.$$

Крок 6. Ввести додаткову змінну k_0 й перейти до такої однокритеріальної задачі лінійного програмування:

$$k_0 \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j \le \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 + \frac{\lambda_0}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{i\max} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0\right), \forall i \in N_s, \\ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j \ge \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \frac{\lambda_0}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{i\min}\right), \forall i \in N_{m-s}, \\ a_{ij}x_j \le b_j, i \in N_n, \\ \sum_{j \in M_i^{'}} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} a_j^{M_i} \forall i \in N_s, \\ \sum_{j \in \omega^i} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega^i|} a_j^{M_i} \forall \omega^i \in M_i^{'}, \forall i \in N_s. \end{cases}$$

Компромісним розв’язком заданої векторної задачі буде такий ефективний розв’язок x, для якого відносні відхилення однакові та мінімальні, тобто виконується умова $\rho_1 W_1(X) = \rho_2 W_2(X) = ... = \rho_m W_m(X) = k_{0\min}$

Крок 7. Скалярну задачу розв’язати двоїстим симплекс методом.

Крок 8. Перевірити належність вектора-розв’язку $x = (x_1, ..., x_k)$ комбінаторній конфігурації. Якщо $x = (x_1, ..., x_k) \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, то розв’язок знайдено, тоді алгоритм завершено, в іншому випадку переходимо до кроку 9.

Крок 9. Перевірити $q > 1$. Якщо «так», то перейти на крок 11. В іншому випадку – перейти на крок 10.

Крок 10. Збільшити q на одиницю. Додати до системи обмежень задачі нерівність-відсікання $\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}} + \frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}} + ... + \frac{x_{i_\gamma}}{\Theta_{i_\gamma}} \geq 1$ у вигляді рівняння: $-\frac{x_{i_1}}{\Omega_{i_1}} - \frac{x_{i_2}}{\Omega_{i_2}} - ... - \frac{x_{i_\gamma}}{\Omega_{i_\gamma}} + x_{n+q} = -1$ шляхом введення допоміжної змінної $x_{n+q} \geq 0$. Примітка: $i_1,...,i_\gamma$ – номери небазисних змінних у останній точці x^*, γ – їх кількість, а Θ_{ij} $\forall j \in \overline{N_\gamma}$ знаходиться за формулою $\Theta_i = \min\limits_{j:a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{ij}}$. Перейти на крок 6.

Крок 11. Якщо $\Omega_{n+q-1} \neq 0$, то приєднати до системи нерівностей задачі, замінивши допоміжну змінну нулем. Перейти на крок 6.

Запропонований метод подано у вигляді схеми на рисунку 2.5.

Група методів на основі комбінаторного відсікання має широкий спектр модифікацій, що визначаються колом задач, для яких можуть застосовуватись ці методи. Алгоритм є звідним, але подання комбінаторної конфігурації системою рівнянь чи нерівностей допускає те, що в результаті маємо розв’язок, який не належить заданій множині. Це пов’язано з тим, що згадані системи описують не лише вершини багатогранника, але і його грані, тому одержані у результати роботи точки завжди належать комбінаторному багатограннику відповідної множини, але не завжди потрапляють у вершину. Нерівність-відсікання є рівнянням гіперплощини, що відтинає частину багатогранника, де розв’язки міститись не можуть.

Постійне приєднання нових нерівностей до системи обмежень робить обчислення об’ємними, проте для них використовується апарат математичного програмування, що є вивченим та дослідженим, має різні варіації симплекс-методу. Це дає можливість обрати саме той його різновид, який буде прийнятний для розв’язування сформульованої та уточненої задач.

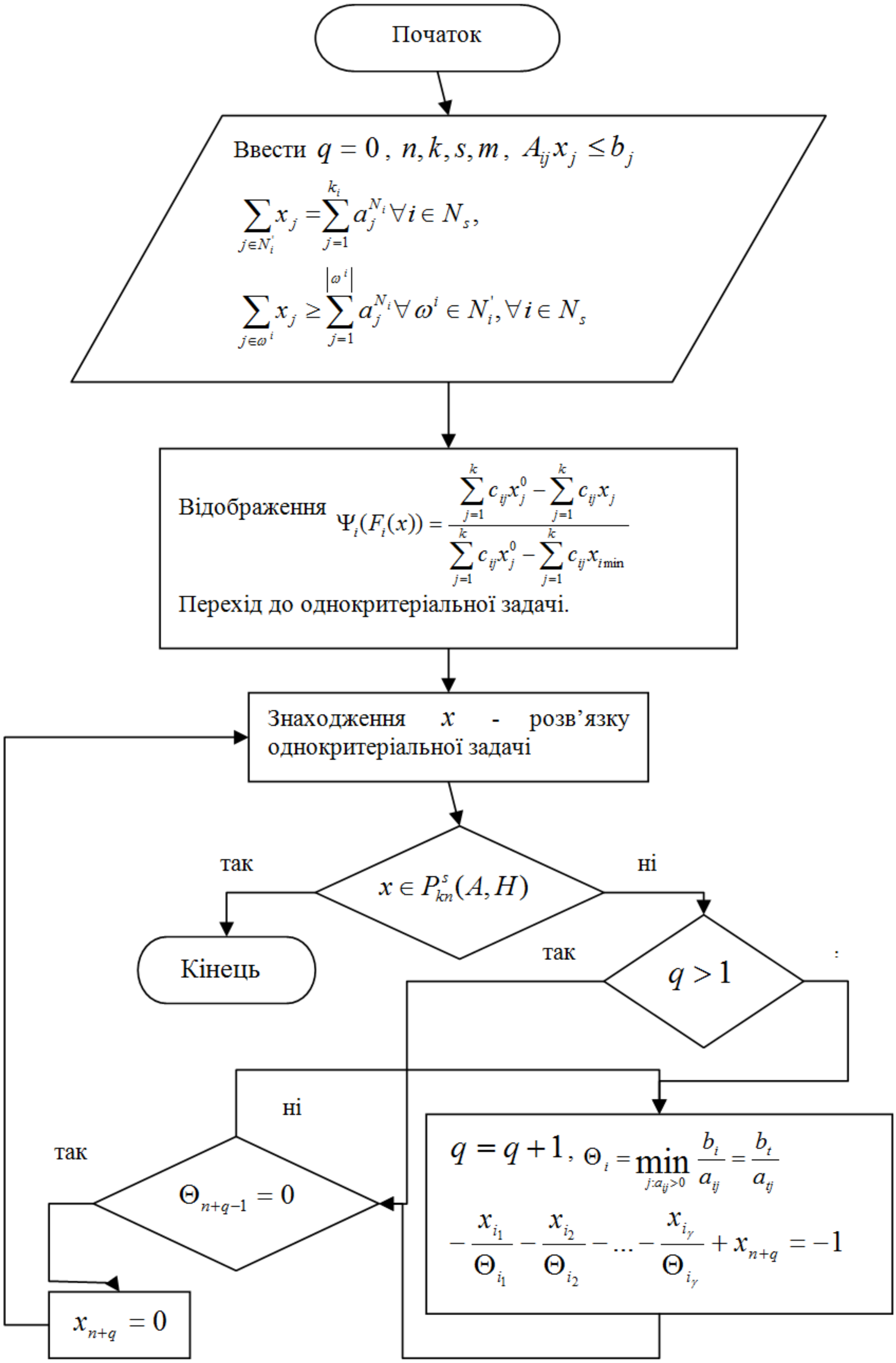


Рисунок 3.5 – Схема алгоритму комбінованого методу

Перевагою комбінованого методу розв’язування векторних задач є відсутність впливу ОПР на прийняття рішення, оскільки жодної зовнішньої інформації він не вимагає. Перевагою є також етап нормалізації функцій, який відображено у кроці 5 алгоритму та полягає у перетворенні часткових критеріїв до безрозмірного виду. Отже, при застосуванні комбінованого методу розв’язування векторних задач комбінаторної оптимізації розв’язком є одна точка, що належить множині Парето-оптимальних розв’язків, але неможливо сказати, чи існують інші ефективні розв’язки задачі, оскільки алгоритм передбачає зупинку при знаходженні першого з допустимих розв’язків.

Зведення задач векторної оптимізації до скалярних є загальновживаною практикою і застосовується у багатьох методах векторної оптимізації, одним із яких є метод послідовного вводу обмежень [87, 99]. При цьому важливу роль відіграє інформація від ОПР, яка визначає відносні переваги критеріїв. Для цього використовуються шкали відносної важливості критеріїв. Для модифікованого методу вводу обмежень використовується шкала, що є загальноприйнятою та міститься у самому алгоритмі. ОПР впливає на результат роботи алгоритму, оскільки порівнює одержані оцінки та вирішує, чи можна покращити значення якоїсь із функцій. Проте, цей етап можна автоматизувати, задавши максимально допустиме відхилення за кожним із критеріїв, або ввівши поняття відстані, що буде розглянуто нижче.

У методі послідовного вводу обмежень відіграє суттєву роль поняття оцінки, що є одним із важливих понять векторної оптимізації, і векторної комбінаторної у тому числі. Вибір оптимального розв’язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини Y усіх допустимих оцінок. Кожен розв’язок задачі може бути охарактеризований своєю оцінкою $y = (y_1, ..., y_n)$, де $y_i = f_i(x), i \in N_n$ – часткові критерії, що входять до складу векторної функції.

Для задач векторної комбінаторної оптимізації $Z(F, X)$ множину оцінок визначимо таким чином: $Y = F(X) = \{y \in R | y = F(x), x \in E\}$. Вибір розв’язку з комбінаторної множини рівносильний вибору відповідної оцінки з Y. У векторних задачах розв’язки порівнюються за перевагою векторної оцінки, тобто значенням векторного критерію $F(f(x)) = (f_1(x), f_2(x),..., f_m(x))$.

Модифікуємо метод послідовного вводу обмежень для його застосування на комбінаторних конфігураціях, використавши метод комбінаторного відсікання. Головна ідея методу послідовного вводу обмежень полягає у визначенні вагових коефіцієнтів кожного з критеріїв оптимальності та формуванні «ідеальної» оцінки, що зводить задачу до однокритеріальної. Шляхом порівняння отриманого результату з оцінкою визначається оптимальний розв’язок. Проте висновок щодо задовільності одержаної оцінки відносно «ідеальної» має приймати експерт. Якщо оцінка не задовільна, то множина альтернатив уточнюється і процедура повторюється.

У даному методі процес порівняння отриманої та «ідеальної» оцінки можна розглядати як відстань між відповідними точками простору, заздалегідь вказавши максимально допустиму відстань. Відстань між точками y і x у метричних просторах R_s^m з показником метрики $s \geq 1$ визначається за формулою:

$$\rho_s(y, x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Об’єднавши метод послідовного вводу обмежень з методом комбінаторного відсікання, одержимо такий модифікований алгоритм розв’язування багатокритеріальної задачі на множині поліперестановок. Для запису алгоритму використаємо такі позначення: k − кількість сформованих «ідеальних» оцінок, q − кількість приєднаних нерівностей-відсікань, ρ^* − максимально допустима відстань між розв’язком та «ідеальною» оцінкою.

Модифікований метод послідовного вводу обмежень на комбінаторній конфігурації поліперестановок запишемо у вигляді таких кроків.

Крок 1. Ввести змінну $k=1$. Ввести змінну $q=0$. Ввести максимально допустиму відстань ρ^*.

Крок 2. Визначити оптимальні значення кожного критерію відповідно до властивостей комбінаторної конфігурації поліперестановок. Сформулювати ідеальну оцінку $f^{*(k)}$, як вектор оптимальних значень критеріїв.

Крок 3. Скласти матрицю переваг на множині критеріїв $\sigma^{(k)}=(\sigma_{ij}^{(k)}),\ i,j\in N_m$, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)})=(\sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i-го критерію у порівнянні з j-м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: $\sigma_{ij}=8$, а $\sigma_{ji}=1/8$ − при домінуючій перевазі i-го критерію над j-м; $\sigma_{ij}=4$, а $\sigma_{ji}=1/4$ − при значній перевазі i-го критерію над j-м; $\sigma_{ij}=2$, а $\sigma_{ji}=1/2$ − при "звичайній" перевазі i-го критерію над j-м; $\sigma_{ij}=1$ та $\sigma_{ji}=1$ − при рівноцінності критеріїв; $\sigma_{ij}=1$ при $i=j$.

Крок 4. Обчислити вагові коефіцієнти критеріїв за формулою:

$$a_i^k=\frac{\sum_{s=1}^{m}\sigma_{is}}{\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sigma_{rs}},i\in J_m.$$

Крок 5. Визначити критерій оптимальності:

$$F=\sum_{i=1}^{k}a_i^k f_i\to\max.$$

Крок 6. Знайти x^k, як розв’язок задачі $Z(F,X)$, де $X=P_{nk}^s(A,H)\cap D$, та його оцінку y^k.

Крок 7. Якщо y^k задовольняє $f^{*(k)}$, тобто $\rho(y^k,f^{*(k)})\le\rho^*$ перейти на крок 9, інакше – на крок 8.

Крок 8. Сформувати вектор «ідеальної» оцінки на уточненій множині альтернатив $f^{*(k)}$ – $(f_1^{*(k)},...,f_m^{*(k)})$. Збільшити значення k на 1. Перейти на крок 3.

Крок 9. Якщо $x^k \in P_{kn}^s(A,H)$ – завершити алгоритм, x^k – шуканий розв'язок. Інакше перейти на крок 10.

Крок 10. Якщо $q > 1$, то перейти на крок 12, інакше – перейти на крок 11.

Крок 11. Покласти $q = q + 1$. Сформувати нерівність-відсікання $\frac{x_{i_1}}{\Omega_{i_1}} + \frac{x_{i_2}}{\Omega_{i_2}} + ... + \frac{x_{i_\gamma}}{\Omega_{i_\gamma}} \geq 1$ у вигляді рівняння $-\frac{x_{i_1}}{\Omega_{i_1}} - \frac{x_{i_2}}{\Omega_{i_2}} - ... - \frac{x_{i_\gamma}}{\Omega_{i_\gamma}} + x_{n+q} = -1$, ввівши допоміжну змінну $x_{n+q} \geq 0$, де $i_1,...,i_\gamma$ – номера небазисних змінних в останній точці x^*, γ – їх кількість, а $\Omega_{ij} \forall j \in N_\gamma$ визначається формулою: $\Omega_i = \min\limits_{j:a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{ij}} = \frac{b_t}{a_{tj}}$. Додати рівняння до системи обмежень задачі. Перейти на крок 5.

Крок 12. Якщо $\Omega_{n+q-1} \neq 0$, перейти до кроку 11. Інакше – в останньому приєднаному до системи рівнянні замінити введену допоміжну змінну нулем. Перейти на крок 5 алгоритму.

Цей метод дозволяє розв'язувати задачі векторної комбінаторної оптимізації. метод було реалізовано для множини комбінаторних конфігурацій поліперестановок. Алгоритми на основі методів комбінаторного відсікання передбачають послідовний пошук розв'язку, який би задовольняв обмеження задачі та належав відповідній комбінаторній конфігурації. Одержаний розв'язок буде належати множині оптимальних за Парето, але за описаними алгоритмами не знаходиться уся множина Парето-оптимальних розв'язків, оскільки при знаходженні першого з них, алгоритм припиняє роботу.

Під час роботи алгоритмів з використанням методів комбінаторного вдсікання постійно збільшується система нерівностей-обмежень із додаванням нерівностей-відсікань, а для алгоритму на основі методу послідовного введення обмежень – нерівностей, що покращують значення обраного критерію. Таким чином, обчислювальна складність зростає із кожним повтором алгоритму.

Описані методи ілюструють можливість об'єднання методів комбінаторної та векторної оптимізації для розв'язування запропонованої у роботі задачі.

3.5 Аналіз ефективності запропонованих методів та оцінка їх складності

Досліджуючи питання ефективності алгоритмів, побудованих на основі координатного та горизонтального методів, слід зазначити, що їх робота залежить від багатьох факторів, яким є кількість змінних m, кількість функцій n, що входять до складу векторного критерію, розмірність основи заданої комбінаторної конфігурації m', кількість нерівностей обмежень k та задані значення цих обмежень $b_t, t \in J_k$.

Методи побудовані так, що складна задача векторної комбінаторної оптимізації розбивається на певному етапі на ряд підзадач, що можуть обчислюватись паралельно. Це відбувається під час роботи процедур горизонтального та координатного методів відповідно. Уся складність обчислень зосереджена у роботі цих підпрограм і визначає ефективність методів в цілому. Кількість лінійних обмежень задачі визначає кількість використань процедури для аналізу та визначення тих точок комбінаторної конфігурації, що задовольняють кожному з обмежень. Робота ж процедури залежить від розмірності основи комбінаторної конфігурації та кількості змінних (що співпадає для множини перестановок). Можна зробити аналіз попередніх оцінок, що визначають які з підграфів, на які розбивається граф комбінаторної конфігурації розглядати.

Горизонтальний метод передбачає більш загальний огляд, для якого граф розбивається на підграфи за єдиною ознакою – закріпленою останньою координатою x_m. Тому на етапі аналізу визначаються дві точки для кожного підрівня згідно властивостей заданої комбінаторної конфігурації $x_{\min}^{ij} = \min g_j, i \in J_{m_A}, j \in J_k$ та $x_{\max}^{ij} = \max g_j, i \in J_{m_A}, j \in J_k$, обчислюється значення функції у цих точках $g_j(x_{\min}^{ij})$ та $g_j(x_{\max}^{ij})$. Отже, для алгоритмів модифікованого горизонтального методу локалізації попередній аналіз міститиме $N = 2m_A k$ точок, де m_A – кількість точок основи заданої комбінаторної конфігурації, k – кількість лінійних обмежень задачі.

Подальший хід обчислень у значній мірі залежить від конкретного заданого значення b_t. Якщо $g_j(x_{\min}^{ij}) \le b_j \le g_j(x_{\max}^{ij})$, то це визначає рівні структурного графа, що підлягають глибшому аналізу. Якщо визначимо мінімальне та максимальне допустиме значення функції-обмеження, то можна проаналізувати можливі варіанти, що підтверджується також проведеними розрахунками. При умові, що значення досить близьке до мінімального чи максимального, виникає ситуація, коли декілька підграфів повністю або включаються у множину допустимих точок, при умові $g_j(x_{\max}^{ij}) \le b_j$ або повністю вилучаються з неї при умові $g_j(x_{\min}^{ij}) \ge b_j$. Це виключає необхідність поглиблення в структуру графа, що скорочує необхідність обчислень у значній мірі особливо при великих розмінностях.

Якщо ж значення b_t наближається до середнього арифметичного між мінімальним $g_j(x_{\min}^{ij})$ та максимальним $g_j(x_{\max}^{ij})$, то виникає ситуація, коли точки містяться у більшості рівнів структурного графа і можливість виключити якісь із рівнів $G_i, i \in J_n$ з розгляду знижується. При цьому продовжується робота по зануренню у кожен з підграфів $G_i, i \in J_n$ з метою знаходження точок, які задовольняють обмеженню. На кожному з рівнів графа евклідової комбінаторної конфігурації така ситуація повторюється. Це свідчить про значну залежність складності обчислень за алгоритмом горизонтального методу від конкретно поставленої векторної задачі комбінаторної конфігурації.

Координатний метод пропонує більшу деталізацію у розбитті множини e-конфігурацій на множини для формування грід-графів, визначаючи не лише закріплену координату x_m, але й тип вершини $v_i, i \in J_{\tilde{t}!}$, як описано у методі. Така деталізація вимагає більш широкого аналізу на попередньому етапі, але при цьому кількість грід-графів, що не задовольняють умові нерівності або цілком задовольняють зростає. Як показано у прикладі 3.1, для перестановок розмірності $m = 6$ на першому етапі для аналізу слід побудувати 36 грід-графів, які аналізуються одразу і не вимагають подальшого занурення, яке необхідне для горизонтального методу. Перевагою координатного методу є зменшення кількості операцій по обчисленню значення функції, оскільки замість прямих обчислень використовується формула різниці між суміжними значеннями, тобто такими, що відрізняються лише перестановкою двох елементів. Ще одним доказом ефективності алгоритму координатного методу є можливість паралельних обчислень як за відповідними лінійними обмеженнями, так і за відповідним підграфами, на які розбивається граф заданої комбінаторної конфігурації.

У загальному випадку можна сказати про ефективність у порівнянні з повним перебором, оскільки значна частина точок комбінаторної конфігурації виключається з розгляду. Також у порівнянні з методами на основі комбінаторного відсікання перевагою є зменшення кількості обчислень, оскільки граф містить лише ті точки множини евклідових комбінаторних конфігурацій, у той час як система, що описує комбінаторний багатогранник включає також і грані, на яких може бути знайдений розв’язок, але він не задовольняє умові задачі. Перевагою також є те, що координатний та горизонтальний методи розв’язування комбінаторних задач векторної оптимізації дають можливість знайти всю множину Парето-оптимальних розв’язків у той час, як методи на основі відсікань знаходять лише один з них, оскільки вони призначені суто для розв’язування задач з однією цільовою функцією. А тому при їх застосуванні задача векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях зводиться до задачі з однією цільовою функцією.

Важливим аспектом для застосування алгоритму є оцінка складності алгоритму. Тому є необхідним ввести поняття міри складності для порівняння алгоритмів і вибір «кращого» за вказаним критерієм.

Для координатного і горизонтального методів, а зокрема для побудованих за цими методами алгоритмів розв'язування задач векторної оптимізації складність описується кількістю обчислювальних ресурсів, а саме часом виконання (часовою складністю) алгоритму для заданої задачі, а також об'ємом пам'яті, яка необхідна для виконання алгоритму.

Часом виконання алгоритму для векторних задач комбінаторної оптимізації є кількість базових операцій, які виконуються для отримання оптимальних розв'язків Парето.

Часова складність алгоритму в гіршому випадку визначається як

$$t_{\max}(n) = \max_{|x| \le n!} t(x).$$

Для обчислення точного значення складності алгоритму необхідно обчислити затрати, які залежать від конкретно розглядуваної моделі задачі. Очевидно, що з ростом вхідних даних часова складність алгоритму також зростає.

В теорії обчислювальної складності розрахунок складності алгоритму проводиться асимптотично, тобто оцінюються затрати ресурсів в межах конкретно розглядуваної задачі для випадку, коли розмір вхідних даних прямує до нескінченності.

Тоді, нехай алгоритм має деяку обчислювальну складність $f(n)$.

Означення 3.1. Оцінка складності алгоритму $\Theta(g(n))$ задає множину таких функцій $f(n)$, якщо існують деякі константи $c_1, c_2 > 0$ і деякий номер задачі $n_0, \forall n > n_0$ для яких буде виконуватися така нерівність

$$0 \le c_1.g(n) \le f(n) \le c_2.g(n).$$

Тоді, говорять, що $g(n)$ – асимптотично точна оцінка $f(n)$.

Означення 3.2. Оцінка складності алгоритму $\Theta(g(n))$ задає множину таких функцій $f(n)$, якщо існує деяка константа $c > 0$ і деякий номер задачі $n_0, \forall n > n_0$ для яких буде виконуватися нерівність $0 \le f(n) \le c \cdot g(n)$.

Тоді, припускаємо, що $g(n)$ – асимптотична верхня оцінка $f(n)$. Складність алгоритмів зазвичай оцінюють за часом виконання або за кількістю пам'яті. В обох випадках складність залежить від розміру вхідних даних. Формально $O\big(f(n)\big)$ означає, що час роботи алгоритму (або об'єм необхідної пам'яті) зростає в залежності від об'єму вхідних даних не швидше, ніж деяка константа, помножена на $f(n)$.

Лема 3.1. Складність розв'язку задачі комбінаторної оптимізації на перестановках з лінійною цільовою функцією, оцінюється згори поліномом не вище другої степені.

Оскільки число вершин графа перестановок (structural graph ***G* (Λ)***) рівне $n!$, то складність обчислень при дихотомії оцінюється величиною $R = log_2 n! = \sum_{i=2}^{n} log_2 i.$ Для її визначення розглянемо графік функції $y = log_2 x$ на рисунку 3.4.

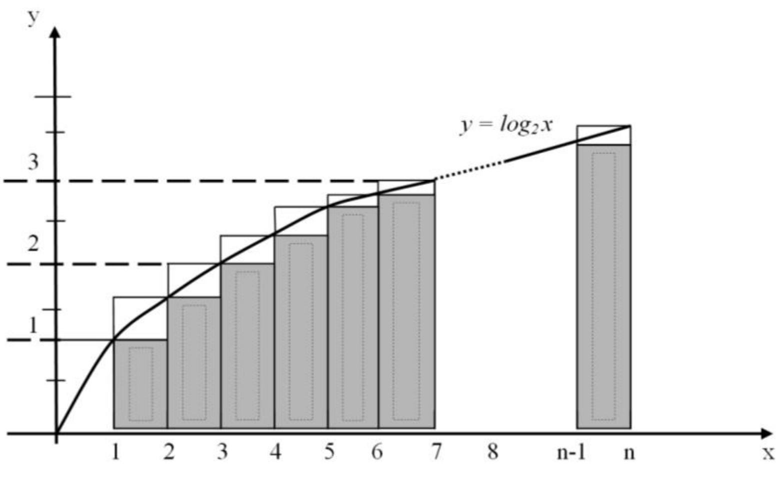


Рисунок 3.4 – Графік функції $y = log_2 x$

Площа всіх прямокутників, побудованих на кривій *y*, рівна $\overline{S}=\sum_{i=2}^{n} log_2 i = R$. Аналогічно, площа всіх прямокутників, побудованих під кривою y (заштрихованих), дорівнює $\underline{S}=\sum_{i=2}^{n-1} log_2 i = R - log_2 n$. З рисунку можна побачити, що площа, обмежена кривою $y = log_2 x$ і віссю абсцис, задовольняє обмеженням

$$R - log_2 n < \int_1^n log_2 x dx < R.$$

Значення невизначеного інтеграла дорівнює $\left[x ln x - x\right] / ln 2$. Оскільки $n \geq log_2 n$, то одержимо оцінку $R \leq n^2$,що й треба довести.

Вимогою до алгоритму також є коректність. Обчислювальний алгоритм є коректним, якщо виконані три умови: 1) він дозволяє після виконання скінченого числа елементарних для комп’ютера операцій перетворити будь-які вхідні дані в результат; 2) результат стійкий по відношенню до малих збурень вхідних даних; 3) результат має обчислювальну стійкість.

Якщо хоча б одна з перерахованих умов не виконується, то алгоритм є некоректним. Розрізняють часткову коректність, яка вимагає, щоб, якщо відповідь було повернуто, він був коректним, і повну коректність, що додатково вимагає, щоб алгоритм завершувався.

Що стосується алгоритмів методів, що запропоновані вище, то:

– виконання першої умови пояснюється тим, що для отримання результату виконується кінцеве число операцій, так як число вершин графа (перестановок) рівне *n*!. При вирішенні задачі обходу графа (перегляд вершин) здійснюється не за всіма вершинами, а тільки за тими, для яких виконуються відповідні умови. Відповідно, щоб отримати відповідь, необхідно виконати скінчене число операцій (у гіршому випадку переглянути максимальну кількість вершин);

– стійкість одержаного результату $\boldsymbol{y}$ до малих збурень вхідних даних (стійкість за вхідними даними) означає, що результат неперервно залежить від вхідних даних при умові, що відсутня обчислювальна похибка. Якщо говорити про розглянуті класи задач, то на вході беремо дискретні величини, при округленні яких отримуємо мінімальну похибку. Також можемо стверджувати, що похибка, допущена у початкових даних, і допускається при обчисленнях в алгоритмі, з кожним кроком не збільшується так як процес вирішення завдань на комбінаторних конфігураціях не є ітераційним;

– з попереднього пункту випливає виконання і третього умови – результат володіє обчислювальної стійкістю так як він стійкий за вхідними даними.

3.6 Моделювання прикладних задач моделями векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях

Інтерес до екстремальних задач при умові багатокритеріальності на комбінаторних множинах зумовлений можливістю їх використання для моделювання та розв’язування ряду прикладних задач. Прикладами можуть бути моделі задач у сфері економіки, планування, проектування, управління та ін. Побудуємо моделі практичних задач, що можуть бути представлені як векторні на комбінаторних множинах.

Модель 3.6.1. Задача визначення ефективності вкладів у нерухомість. Однією з важливих сфер застосування векторної комбінаторної оптимізації є економіка та планування. Якщо підприємство планує інвестувати капітал у нерухомість, то є доцільним розрахувати їх ефективність з метою визначення найвигіднішого плану, що принесе максимальний прибуток, а також буде найменш ризикованим.

Розглянемо побудову моделі задачі визначення ефективності вкладів у нерухомість. Нехай підприємство має k активів для вкладень у нерухомість $A=(a_1,...,a_k)$. Причому частина цих сум може бути використана лише для здійснення вкладів a_i^1 на період до n_1 років, a_i^2 – на n_2 років і так далі, a_i^s на період до n_s. $x=(x_1,...,x_k)$ – шуканий план вкладів у нерухомість, який необхідно знайти, де x_i – сума вкладу у i-й вид нерухомості.

Підприємству доступна інформація про ризики від вкладу у нерухомість i-го виду – $c_i^1, i \in J_k$, дохід від нерухомості i-го виду – $c_i^2, i \in J_k$, а також сума витрат на утримання i-го виду нерухомості – $c_i^3, i \in J_k$.

Таким чином, для отримання оптимального плану вкладів у нерухомість потрібно оптимізувати такі критерії:

- сума ризиків від вкладу: $f_1(x) = \min < c_i^1, x >, i \in J_k$;
- прибуток від вкладу: $f_2(x) = \max < c_i^2, x >, i \in J_k$;
- витрати на утримання (експлуатацію) нерухомості: $f_3(x) = \min < c_i^3, x >, i \in J_k$.

Оскільки вклад у нерухомість пов’язаний з необхідністю подальших витрат на утримання, то виникають додаткові обмеження пов’язані з ресурсами підприємства $A_{ij} x_j \le b_j$, де $i \in J_m, j \in J_k$, де A_{ij} – затрати ресурсів j-го виду на утримання i-го виду нерухомості, b_j – наявність ресурсів j-го виду.

Математична модель задачі матиме вигляд: $x=(x_1,...,x_k)$ – план вкладень у нерухомість, який необхідно знайти. Описана вище побудова множини відповідає конфігурації поліперестановок $P_{kn}^s(A,H)$. За умови, що усі суми різні і можуть бути використані на однаковий термін, тоді побудована множина відповідає конфігурації перестановок $P_n(A)$. Якщо суми повторюються, то одержимо конфігурацію перестановок з повтореннями $P_{kn}(A)$.

За умови, що варіантів вкладу менше, ніж доступних сум, тоді відповідно матимемо комбінаторні конфігурації розміщень A_k^n або розміщень з повтореннями A_{qk}^n. Узагальнюючи всі варіанти, комбінаторну множину позначимо через X. Отже, маємо задачу:

Знайти таке значення $x = (x_1,...,x_k) \in X$, яке є оптимальним для функцій:

$$f_1(x) = \min < c_i^1, x >, i \in J_k,$$

$$f_2(x) = \max < c_i^2, x >, i \in J_k,$$

$$f_3(x) = \min < c_i^3, x >, i \in J_k$$

та задовольняє обмеженням: $A_{ij} x_j \le b_j$.

Дана задача є векторною задачею на комбінаторних конфігураціях та може бути розв’язана запропонованими у роботі методами.

Модель 3.6.2. Задача панування виробництва. При роботі підприємства для вирішення питань планування доцільно скористатися відповідними математичними моделями, щоб максимально досягти поставленої мети.

Розглянемо роботу підприємства на основі моделі задачі панування виробництва. Завдання, що стоять перед ним можна сформулювати таким чином: отримати загальний максимальний чистий прибуток від виробництва, максимізувати чистий прибуток за кожен з періодів роботи, досягаючи мінімального числа невиконаних замовлень та зменшити понаднормовий час і обсяг запасів готової продукції.

Нехай підприємство займається виробництвом k видів товарів, причому товар розподіляється на s категорій, тоді $A = (a_1,...,a_k)$ − план виробництва, у якому товар a_i^1 належить до категорії n_1, тоді a_i^2 − категорії n_2 і так далі, a_i^s − до категорії n_s. Підприємству відомо, що чистий прибуток від i-го виду товару − $c_i^1, i \in J_k$, мінімальний чистий прибуток від i-го виду товару за досліджуваний період – $c_i^2, i \in J_k$, середня кількість невиконаних замовлень i-го виду товару – $c_i^3, i \in J_k$, понаднормовий час, затрачений на виготовлення i-го виду товару – $c_i^4, i \in J_k$, а також запаси продукції i-го виду товару – $c_i^4, i \in J_k$.

Дану задачу можна інтерпретувати як екстремальну при умові багатокритеріальності на комбінаторній конфігурації, оскільки необхідно A розділити на s підмножин, що характеризують кількість категорій, тоді x_i^j – кількість товару, що належить категорії $j \in J_s$. Природа множини відповідає конфігурації поліперестановок $P_{kn}^s(A, H)$.

Математично вищезазначені завдання записуються у вигляді ряду функцій або вектор-функції відповідно. До складу вектор-функції у математичну модель задачі входитимуть функції, що визначають:

– загальний чистий прибуток виробництва: $f_1(x) = \max < c_i^1, x >, i \in J_k$;

– мінімальний чистий прибуток за будь-який період: $f_2(x) = \min < c_i^2, x >, i \in J_k$;

– число невиконаних замовлень: $f_3(x) = \min < c_i^3, x >, i \in J_k$;

– понаднормовий час: $f_4(x) = \min < c_i^4, x >, i \in J_k$;

– запаси готової продукції: $f_5(x) = \min < c_i^5, x >, i \in J_k$.

Для виготовлення продукції необхідні затрати ресурсів підприємства $A_{ij} x_j \le b_j$, $i \in J_m, j \in J_k$, де A_{ij} – затрати ресурсів j-го виду на виготовлення i-го виду продукції, b_j – наявність ресурсів j-го виду.

Математична модель задачі планування виробництва матиме вигляд: знайти оптимальне значення функцій

$$f_1(x) = \max < c_i^1, x >, i \in J_k,$$

$$f_2(x) = \min < c_i^2, x >, i \in J_k,$$

$$f_3(x) = \min < c_i^3, x >, i \in J_k,$$

$$f_4(x) = \min < c_i^4, x >, i \in J_k,$$

$$f_5(x) = \min < c_i^5, x >, i \in J_k$$

за умови $x = (x_1, ..., x_k) \in P_{kn}^s(A, H)$ при додаткових обмеженнях виробництва $A_{ij}x_j \le b_j$, де $i \in J_m$, $j \in J_k$.

Задача є задачею векторної оптимізації на поліперестановках, метод розв'язування якої запропоновано у роботі.

Модель 3.6.3. Задача забезпечення ефективної роботи сайту. На сьогоднішній день практично кожне підприємство чи організація має свій сайт. Сайт доступний широкому колу користувачів Інтернет. Для забезпечення ефективної реклами та, у подальшому, роботи підприємства, є доцільним забезпечити ефективну роботу сайту.

Побудуємо модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту. Для забезпечення ефективної роботи сайту, слід зважати на ряд характеристик, що включають в себе як технічні обмеження, так і вимоги до естетичного оформлення та інформаційного наповнення сайту.

Тоді функції моделі будуть такими:

– відвідуваність сайту: $f_1(x) = \max < c_i^1, x >, i \in J_k$;

– рейтинг сайту в каталогах: $f_2(x) = \max < c_i^2, x >, i \in J_k$;

– кількість зовнішніх посилань на сайт: $f_3(x) = \max < c_i^3, x >, i \in J_k$;

– час завантаження сайту: $f_4(x) = \min < c_i^4, x >, i \in J_k$.

Але при створенні сайту накладається ряд обмежень $A_{ij}x_j \le b_j$, де $i \in J_m$, $j \in J_k$, що зумовлені технічними критеріями, що впливають на швидкість завантаження $a_{ij}^1 x_j \le b_j^1$, обмеження у використанні графічних елементів, мультимедіа, інтерактивних елементів сайту $a_{ij}^2 x_j \le b_j^2$, кількість запитів користувачів, що можуть бути виконані одночасно $a_{ij}^3 x_j \le b_j^3$.

Область допустимих значень задачі може бути представлена у вигляді множини поліперестановок $x=(x_1,...,x_k)\in P_{kn}^s(A,H)$ та описана системою обмежень
$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in M_i^{'}} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} a_j^{M_i} \forall i\in N_s, \\ \sum\limits_{j\in \omega^i} x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} a_j^{M_i} \forall \omega^i \in M_i^{'}, \forall i\in N_s. \end{cases}$$

Математична модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту: знайти таке значення $x=(x_1,...,x_k)\in P_{kn}^s(A,H)$, що оптимізує функції:

$$f_1(x)=\max < c_i^1, x >, i\in N_k,$$

$$f_2(x)=\max < c_i^2, x >, i\in N_k,$$

$$f_3(x)=\max < c_i^3, x >, i\in N_k,$$

$$f_4(x)=\min < c_i^4, x >, i\in N_k$$

при обмеженнях $A_{ij}x_j \le b_j$, де $i\in J_m$, $j\in J_k$.

Дана модель є моделлю задачі векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації поліперестановок. Для розв’язування одержаної задачі можна застосувати відповідні алгоритми, описані у попередньому розділі.

Модель 3.6.4. Задача вибору модулів при розробці програм. У роботі [1] вказана задача описана як скалярна, подамо її як векторну задачу на комбінаторних конфігураціях.

Одним з основоположних принципів сучасного програмування є принцип модульності, що дозволяє більш ефективно забезпечити різні етапи життєвого циклу програмного забезпечення, такі як створення, впровадження та супровід і вдосконалення програмного забезпечення та математичного забезпечення комп’ютера. Принцип модульності передбачає розробку та реалізацію програми у вигляді сукупності складових частин – модулів. Опишемо модель задачі вибору модулів при розробці програм. Розглянемо задачу оптимального компонування програми, що складається з кількох модулів, при умові що деякі з них можуть бути реалізовані на комп’ютері декількома способами.

На етапі розробки алгоритму програму можна представити як таку, що складається з n окремих взаємопов’язаних блоків (модулів, процедур, програм, сегментів). Для кожного j-го блоку ($j \in J_n$) можливі X_j варіантів його реалізації $x_j \in J_{X_j}$ у програмі. Згідно опису множина може бути подана як конфігурація полірозміщень. Кожен варіант характеризується часом роботи $t_j(x_j)$, об’ємом власної оперативної пам’яті, що займає програма, її власні константи та масиви, – $v_j(x_j)$ і необхідним об’ємом загальної оперативної пам’яті $w_j(x_j)$. Необхідно для кожного блоку програми вказати такий варіант, щоб ця програма виконувалась за мінімальний час та не виходила за межі відведених ресурсів.

Математична постановка задачі: знайти значення x_j при якому

$$T = \sum_{j=1}^{n} t_j(x_j) \to \min ,$$

$$M = \sum_{j=1}^{n} v_j(x_j) \to \min$$

при обмеженні $\sum_{j=1}^{n} v_j(x_j) + \max_{1 \le j \le n} w_j(x_j) \le V$, де V – об’єм оперативної пам’яті комп’ютера, що відводиться для програми, що оптимізується, а розв’язок належить конфігурації полірозміщень.

Описана математична модель відповідає векторній задачі оптимізації на комбінаторній конфігурації полірозміщень, розв’язати яку можливо із застосуванням описаних вище алгоритмів.

Масиви інформації у пам’яті комп’ютера можуть розміщатись на різних рівнях ієрархії, на кожному з яких може знаходитись один або декілька запам’ятовуючих пристроїв (ЗП) одного чи різних типів з приблизно однаковою швидкодією. Найважливішими параметрами ЗП є ємність та швидкодія. Як правило, ЗП верхніх рівнів ієрархів мають вищу швидкодію, але меншу ємність у порівнянні із ЗП нижчих рівнів. Опишемо модель задачі оптимального розподілу масивів по рівням пам’яті комп’ютера.

Масиви характеризуються розміром та активністю. Під активністю розуміють частоту використання або математичне очікування кількості звернень до масиву за певний проміжок часу функціонування комплексу програм. Загальний час звернень до масиву при розв’язуванні комплексу задач в обчислювальній системі залежить від того, яким чином розподілені масиви по рівням пам’яті. Тому виникає задача оптимального розподілу масивів по рівням ієрархічної пам’яті компютера.

Нехай T – загальний час звертань до масиву; m – сумарна кількість ЗП на всіх рівнях ієрархії; V_i, t_i – ємність та швидкодія i-го ЗП; $(i \in J_m)$; n – кількість масивів; v_j, r_j – розмір та активність j-го масиву ($j \in N_n$); $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, де $x_j \in J_m$ – вектор розподілу масивів по ЗП. За характером побудови може бути поданий як елемент конфігурації перестановок.

Математична модель задачі: знайти значення, при якому

$$T = \sum_{j=1}^{n} \tau_j(x_j) \to \min ,$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to \max$$

при обмеженні $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_j) \le V_i,\ i \in J_m$, де $\tau_j(x_j) = t_i r_j,\ i = x_j$,

$$w_{ij}(x_j) = \begin{cases} v_i, & \text{\textit{якщо} } x_j = i, \\ 0 & \text{\textit{якщо} } x_j \ne i. \end{cases}$$

Ця задача є векторною оптимізаційною задачею на перестановках.

Модель 3.6.5. Задача вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів. Скалярна задача описана у роботі [1], можливим є її подання у вигляді векторної комбінаторної задачі.

Для контролю якості виробництва необхідною умовою є перевірка якості, що здійснюється за допомогою відповідних вимірювальних приладів. Опишемо модель задачі вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів.

Контроль працездатності системи відбувається шляхом перевірки n параметрів. Для перевірки цих параметрів можуть бути використані m вимірювальних приладів. Задана вартість i-го вимірювального приладу $c_i, i \in J_m$ та матриця $\|x_{ij}\|$, кожен елемент якої є або нулем, або одиницею в залежності від того, чи може бути проведений контроль j-го параметру i-м вимірювальним приладом. Для оцінки j-го параметру i-м приладом використовується величина $q_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ (α_{ij} – ймовірність хибного бракування, помилка 1-го роду, β_{ij} – ймовірність хибного пропуску, помилка 2-го роду). Необхідно визначити комплекс вимірювальних приладів, для якого вартість вимірювальної апаратури буде мінімальною і сумарна достовірність контролю наближатиметься до мінімуму і не перевищуватиме задану величину Q. За характером задачі вона може бути подана як задача на розміщеннях.

Ця задача може бути сформульована таким чином. Необхідно визначити

$$C = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \to \min,$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} q_{ij} z_{ij} \to \min$$

при таких обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1, \quad j \in J_n,$$

$$z_{ij} \le x_{ij} y_i, \quad i \in J_m,\ j \in J_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} q_{ij} z_{ij} \le Q,$$

$$y_i = \{0,1\}, \quad i \in J_m.$$

Тут

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо можливий контроль j - го параметру i - м приладом,} \\ 0 \text{ у зворотному випадку.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{якщо і-й прилад включений у комплект,} \\ 0 \text{ у зворотному випадку.} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо j-й параметр контролюється і-м приладом,} \\ 0 \text{ у зворотному випадку.} \end{cases}.$$

Маємо задачу векторної оптимізації на комбінаторній конфігурації розміщень.

Отже, прикладні задачі описуються математичними моделями векторних задач оптимізації, що можуть бути класифіковані та розв'язані запропонованими методами, що є доказом практичної значущості запропонованої теми дослідження. Перелік моделей не є вичерпним, а лише теоретично ілюструє необхідність розробки методів їх розв'язування.

3.7. Приклад розв'язування задачі за координатним методом

Для ілюстрації використання координатного методу розглянемо приклад.Нехай маємо векторну функцію $F = (f_1, f_2,) \to \min$, де

$$f_1(x) = 23x_1 + 15x_2 + 28x_3 + 11x_4 + 18x_5 + 39x_6;$$
$$f_2(x) = 25x_1 + 45x_2 + 85x_3 + 12x_4 + 69x_5 + 33x_6;$$

при додатковому лінійному обмеженні:

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 12x_6 \geq 183.$$

Запишемо лінійне обмеження задачі у вигляді функції $g(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 12x_6$.

Перейдемо безпосередньо до виконання процедури координатного методу. Для цього зафіксуємо останню координату: $x_6 = 6$. Тоді п'ята координата згідно алгоритму визначається за правилом $x_5 = \max\{1,2,3,4,5\}$, тобто $x_5 = 5$. Аналогічно правилом $x_4 = \max\{1,2,3,4\}$, тобто $x_4 = 4$. Перейдемо до визначення значень координат x_1, x_2, x_3. Зафіксуємо тип вершини $t = 1$, $v_1 = (1,2,3)$, $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$, $j_{i_1} = 1, j_{i_2} = 2, j_{i_3} = 3$ Тип вершини відображає порядок перших трьох елементів, тобто оскільки $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, x_3 = j_{i_3}$, то $x_1 < x_2 < x_3$ для усіх вершин поточного грід-графа (схеми). Точкою витоку, що знаходиться у лівому верхньому кутку схеми, буде перестановка $p_1^1 = (123456)$ Побудуємо сітку з координатою витоком $p_1 = (123456)$. Значення функції у цій точці рівне 190. Отже, усі інші значення побудованої схеми будуть менші за 190, а це означає, що серед них можуть знаходитись значення, що не перевищують 183.

За координатним методом знайдемо координати точок, що утворяться за допомогою послідовної перестановки елементів $a_4 \Leftrightarrow a_3 \Leftrightarrow a_2 \Leftrightarrow a_1$, а саме $4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1$. Це будуть вузли грід-графа, що розташовуються у першому стовпчику, а саме $p_1^1 = (123456)$, $p_1^2 = (124356)$, $p_1^3 = (134256)$, $p_1^4 = (234156)$. Для знаходження значень функції в утворених точках скористаємось формулою $f\left(p_l^i\right) = f\left(p_k^i\right) - \Delta$, де $\Delta = (j_k - j_l)(c_k - c_{\mu(l)})$, j_k, j_l – координати вершини, $c_k, c_{\mu(l)}$ – коефіцієнти функції $g(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 12x_6$. Значення

$f(p_1^1) = g(123456) = 190$. Тоді наступні значення розраховуються за вище означеною формулою, а саме $f(p_1^2) = f(p_1^1) - \Delta = 190 - (4-3)(9-7) = 188$, $f(p_1^3) = f(p_1^2) - \Delta = 188 - (3-2)(9-4) = 183$, $f(p_1^4) = f(p_1^3) - \Delta = 183 - (2-1)(9-3) = 177$.

Одержані значення підпишемо на рисунку.

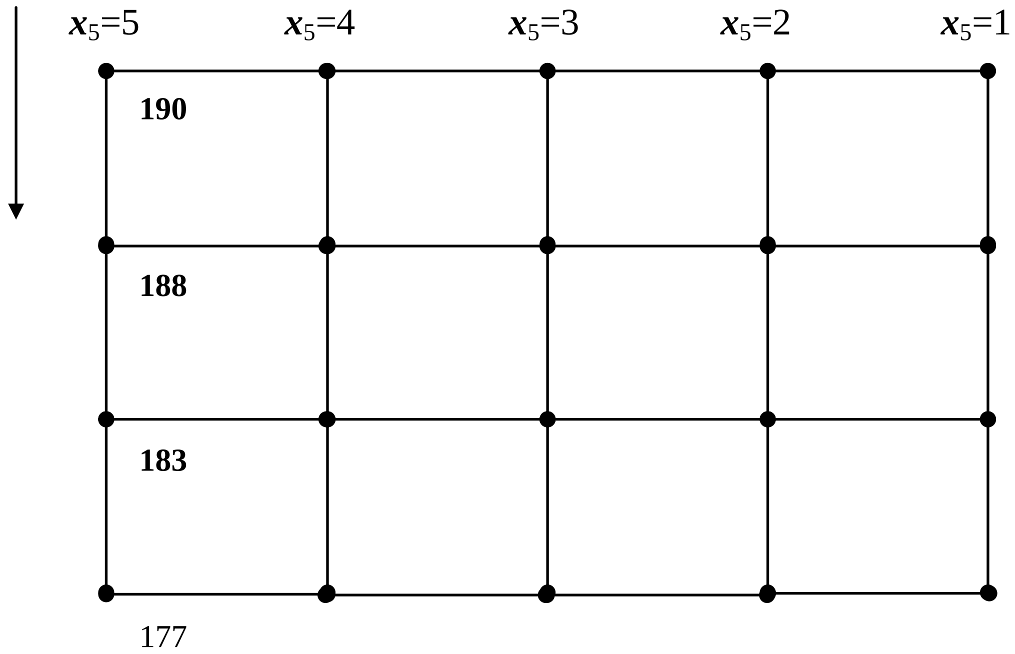


Рисунок 3.5. Грід-граф для обмеження при $v_1 = (1,2,3)$, $x_6 = 6$

З рисунку 3.5 очевидно, що значення у нижньому ряду не можуть перевищувати 177. Отже, серед них не можуть знаходитись точки, що задовольняли б обмеження, оскільки значення функції-обмеження зменшуються у напрямку зліва направо.

Перейдемо на наступний етап: проведемо розгортання вздовж п’ятої координати за рахунок послідовної транспозиції елементів $a_5 \Leftrightarrow a_4 \Leftrightarrow a_3 \Leftrightarrow a_2 \Leftrightarrow a_1$, а саме $5 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1$. Одержимо такі перестановки: $p_2^1 = (123546)$, $p_3^1 = (124536)$, $p_4^1 = (134526)$ та $p_5^1 = (234516)$. Значення функції в утворених точках знаходимо як добуток різниць елементів перестановок та відповідних коефіцієнтів функції. Отже, $f(p_1^1) = g(123456) = 190$, тоді

$f(p_2^{\,1}) = f(p_1^{\,1}) - \Delta = 190 - (5-4)(10-9) = 189$, $f(p_3^{\,1}) = f(p_2^{\,1}) - \Delta = 189 - (4-3)(10-7) = 186$,

$f(p_4^{\,1}) = f(p_3^{\,1}) - \Delta = 189 - (3-2)(10-4) = 180$, $f(p_5^{\,1}) = f(p_4^{\,1}) - \Delta = 180 - (2-1)(10-3) = 173$.

Зазначимо, що виконані обчислення для ілюстрації роботи координатного методу для усіх вузлів першого рядка схеми грід-графа. Обчислення ж припиняються на етапі, коли зустрічається перше із значень, які не задовольняють умові, а саме $f(p_4^{\,1}) = 180$, тобто в обчисленні значення $f(p_5^{\,1})$ немає необхідності. Результати проведених розрахунків подано на рисунку 3.6.

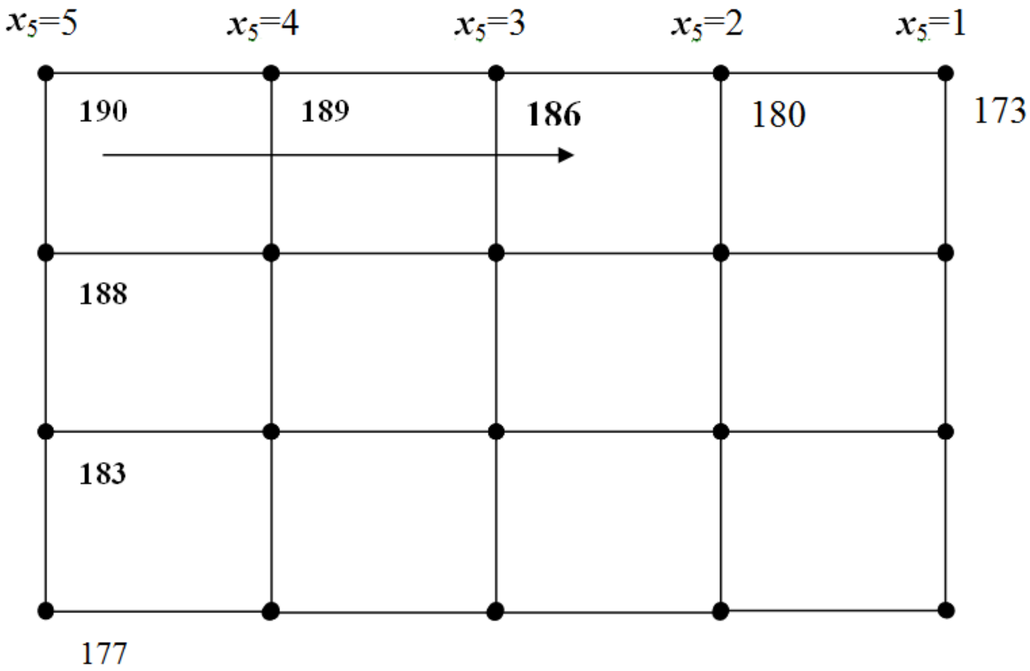


Рисунок 3.6 – Грід-граф для обмеження при $v_1 = (1,2,3)$, $x_6 = 6$.

Розгортання вздовж 5-ї координати

Пошук проводиться у напрямку зліва направо і припиняється при першій появі значення, що менше заданому (тобто 183). Подальший пошук припиняється. З рисунку 2 видно, що останні два стовпці не можуть містити шукане значення. Отже, залишилось перевірити виконання лінійного обмеження у 4 точках, а саме $p_2^{\,2} = (125346)$, $p_2^{\,3} = (135246)$ (2-й стовпчик схеми), $p_3^{\,2} = (125436)$, $p_3^{\,3} = (145236)$ (3-й стовпчик схеми). Скориставшись технологією обчислень за алгоритмом координатного методу матимемо

$$f(p_2^{\,2}) = f(p_2^{\,1}) - \Delta = 189 - (4-3)(9-7) = 187,$$

$$f(p_2^{\,3}) = f(p_2^{\,2}) - \Delta = 187 - (3-2)(9-4) = 182,$$

$$f(p_3^{\,2}) = f(p_3^{\,1}) - \Delta = 186 - (5-4)(9-7) = 184,$$

$$f(p_3^{\,3}) = f(p_3^{\,2}) - \Delta = 186 - (4-2)(9-4) = 176.$$

Одержані результати подано на рисунку 3.7.

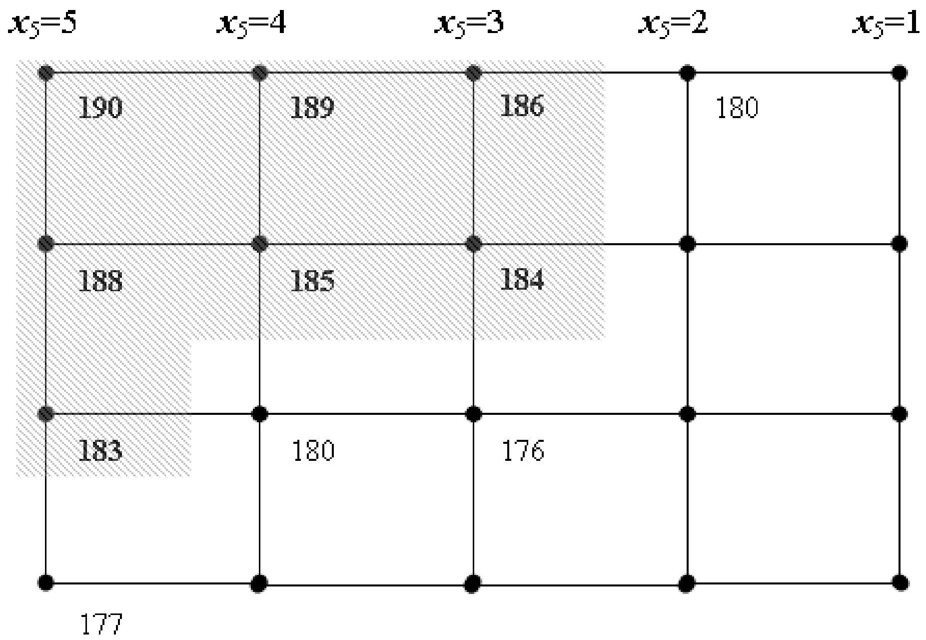


Рисунок 3.7 – Схема грід-графа зі знайденими значеннями функції-обмеження

Зазначимо, що при роботі алгоритму адаптованого координатного методу вдалося уникнути повного перебору (розглянуто 11 точок).

Для подальшої роботи алгоритму послідовно проводимо аналогічні дослідження, обираючи тип вершини та закріплену координату. Для повного дослідження графа конфігурації перестановок із 6 елементів таких грід-графів необхідно побудувати 24 (6 типів вершин для кожної із 6-ти закріплених координат). При інших параметрах задачі ця кількість буде іншою, оскільки залежить від розмірності та вибору кількості закріплених координат.

У результаті роботи алгоритму одержуємо точок, що задовольняють обмеженню. При цьому було розглянуто 91 із 720 елементів конфігурації перестановок.

Для одержання розв'язку векторної задачі перейдемо від векторного до скалярного критерію, визначивши вагові коефіцієнти функцій. Вважатимемо функції рівноцінними, тоді $f = 0{,}5 f_1 + 0{,}5 f_2 = 24x_1 + 30x_2 + 56{,}5x_3 + 11{,}5x_4 + 43{,}5x_5 + 36x_6$.

Знайдемо значення функції в одержаних точках (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення функції у знайдених точках

№	Перестановка	Значення функції	№	Перестановка	Значення функції	№	Перестановка	Значення функції
1	123564	716	8	126345	811,5	15	123546	701
2	125364	806	9	124635	689,5	16	124536	714
3	123654	684	10	213465	734,5	17	124356	778
4	213564	710	11	214365	779,5	18	125346	791
5	123465	740,5	12	213654	678	19	125436	759
6	124365	785,5	13	214635	683,5			
7	**123645**	**676,5**	14	123456	733			

З таблиці 3.1 очевидно, що розв'язком поставленої задачі є перестановка (123645), у якій векторний критерій набуває значень $F = (470{,}883)$.

Цей приклад ілюструє використання координатного методу для розв'язування векторної задачі на множині евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок. Проте координатний метод може застосовуватись і для інших множин, для яких визначені правила побудови грід-графів.

Координатний і горизонтальний методи базуються на використанні запропонованих у роботі графах евклідових комбінаторних конфігурацій. Подальші дослідження можливі у напрямку побудови та дослідження графів інших комбінаторних множин.

Висновки до третього розділу

У розділі запропоновані нові методи розв'язування векторних оптимізаційних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях. Розроблено методи розв'язування векторної задачі на e-конфігураціях без додаткових обмежень. А саме, розроблені горизонтальний та координатний методи. Особливість цих методів у безпосередній роботі з системою лінійних обмежень для формування множини точок, що задовольняють додатковим умовам задачі. Такий підхід дозволяє легко поєднувати ці комбінаторні методи з методами векторної оптимізації. У розділі наведений координатний метод для лінійних та дробово-лінійних функцій. У розділі подані схеми алгоритмів запропонованих методів.

Запропоновані два методи розв'язування векторної задачі на e-конфігураціях, побудовані на основі методу відсікання, що об'єднуєть у собі методи векторної та комбінаторної оптимізації.

Подані приклади векторних моделей прикладних задач з описом їх побудови та математичної постановки, як підтвердження практичної значущості запропонованої теми.

Дослідження у даній області не вичерпані і є перспективним напрямом і для подальшої роботи. Тому розгляд моделей задач оптимізації, дослідження та вдосконалення методів пошуку розв'язків, складання та реалізація алгоритмів розв'язування векторних екстремальних задач та пошук узагальнених методів і підходів залишається перспективним напрямом дослідження.

Основні результати першого розділу опубліковано в роботах [16, 43, 50-52, 55, 56, 58, 59, 61, 62-67, 69, 90].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1, 26, 35, 99, 119].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв’язане наукове завдання побудови ефективних методів розв’язування векторних задач оптимізації на комбінаторних конфігураціях.

1. У роботі виконано аналіз методів розв’язування задач комбінаторної і векторної оптимізації. Встановлено, що відсутні спеціальні методи розв’язування задач з кількома критеріями на комбінаторних конфігураціях.

2. Сформульована постановка векторної задачі на евклідових комбінаторних конфігураціях та виділена задача векторної лінійної евклідової комбінаторної оптимізації, тобто таких, де векторний критерій та система додаткових обмежень задачі складаються з лінійних функцій.

3. Уперше сформульовані означення та правила побудови грід-графа та структурного графа множин евклідових комбінаторних конфігурацій, досліджені їх властивості, сформульовані та доведені відповідні теореми. Властивості грід-графів та структурних графів покладені в основу розробки нових методів розв’язування векторних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях, оскільки дозволяють здійснювати ефективний аналіз множини допустимих розв’язків задачі.

4. Метод комбінаторного відсікання поширено на векторні задачі шляхом синтезу із методами векторної оптимізації, а саме розроблено комбінований метод, який поєднує векторні властивості задачі та комбінаторний характер множини, що дозволило застосувати вказаний метод для розв’язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях.

5. Розроблено методи розв’язування векторних задач лінійної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях, а саме горизонтальний та координатний методи. Розроблені методи розв’язування задачі векторної оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень. Використання названих методів, що поєднують надбання векторної

оптимізації та властивості комбінаторних конфігурацій, дозволяє знайти розв’язки вказаної задачі.

6. За алгоритмами запропонованих методів розв’язані приклади та проведені числові експерименти. Комбінований метод та метод послідовного введення обмежень базуються на методі комбінаторного відсікання, ефективність якого вже доведена. Встановлено, що алгоритми координатного і горизонтального методів є збіжними і, за рахунок побудови, дозволяють реалізацію шляхом паралельних обчислень, оскільки аналіз за кожним з лінійних обмежень задачі, може проводитись незалежно. Їх складність залежить від складності ряду підзадач, що не перевищує n^2.

7. Побудовані моделі прикладних задач, що є векторними задачами на комбінаторних конфігураціях, такі як моделі задачі визначення ефективності вкладів у нерухомість; модель задачі панування виробництва; модель задачі забезпечення ефективної роботи сайту; модель задачі вибору модулів при розробці програм; модель задачі оптимального розподілу масивів по рівням пам'яті комп’ютера; модель задачі вибору оптимального комплекту вимірювальних приладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексеев В.Б. Использование симметрии при нахождении ширины частично упорядоченного множества // Дискретный анализ. 1974. Вып. 26. С. 20–35.

2. Баранов В. И., Стечкин Б. С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. Москва : Наука, 1989. 160 с.

3. Безковайний В. В., Шевченко О. Ю. Модель системної оптимізації технологічних об’єктів // "Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції (м. Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018 року). – Івано-Франківськ: 2018. С. 327–330.

4. Безковайний В. В., Драз О. М., Семенець В. В. Синтез моделей багатокритеріального оцінювання методом компараторної ідентифікації // "Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції (м. Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018 року). Івано-Франківськ: 2018. С. 266–269.

5. Берж К. Теория графов и ее применение. Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. 320с.

6. Бескоровайный В. В., Подоляка К.Е. Выбор многокритериальных решений при реинжиниринге топологических структур систем крупномасштабного мониторинга // Системи обробки інформації. 2016. № 5(142). С. 80–86.

7. Гребенник И. В., Литвиненко А. С. Генерация перестановок с частично определенным порядком следования элементов // Бионика интеллекта. – 2017. – № 2 (89). – С. 26–30.

8. Гребенник И. В., Черная О. С., Макарова Е. Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями // Системи управління, навігації та зв’язку. Збірник наукових праць. Полтава:

ПНТУ, 2018. Т. 3 (49). С. 67–72.

9. Гребенник И. В. Решение некоторых задач условной оптимизации линейных функций на перестановочном багатограннике // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 1. С. 55−59.

10. Гуляницкий Л. Ф. Об одном метаэвристическом методе комбинаторной оптимизации // Компьютерная математика. 2006. № 2. С. 1–6.

11. Гуляницкий Л. Ф. Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе G-алгоритмов // Компьютерная математика. 2005. № 1. С. 143−151.

12. Гуляницкий Л. Ф., Сергиенко И. В. Метаэврический метод деформируемого многранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 6. С. 70−79.

13. Гуляницкий Л.Ф., Тимофеева Н. К. Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе G-алгоритмов // Управляющие системы и машины. 1982. № 3. С. 50−53.

14. Гуляницький Л. Ф., Мулеса О. Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навч. посіб. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. 142 с.

15. Дверная Е. А. Модификация горизонтального метода локализации значения функции для решения векторных задач на комбинаторных конфигурациях // Наука и образование – 2018: сборник материалов XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых (г. Астана, 12 апреля 2018 г.). 2018. С. 1634–1637.

16. Двірна О.А. Розв’язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень // Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень: праці наукової школи-семінару, (м. Ужгород, 15-20 квітня 2019 р.) / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», наук.ред. Л. Ф. Гуляницький. Ужгород: УНУ, 2019. С. 79–80.

17. Двірна О. А. Використання схем підграфів при розв’язуванні задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях // Потенціал сучасної науки (частина I): матеріали III Міжнародної науково−практичної конференції (м. Київ, 10−11 листопада 2018 р.). Київ : МЦНД, 2018. С. 57–59.

18. Двірна О. А. Переваги використання координатного методу при розв’язувані екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Полтава, 12−13 травня 2016 року) / за ред. М. В. Макарової. Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 326−329.

19. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Локализация значения линейной функции заданной на перестановках // Радиоэлектроника и информатика. 2009. № 1. С. 76−81.

20. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных // Теорія оптимальних рішень. 2009 № 8. С. 3−8.

21. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ 2009. № 2. С. 50−61.

22. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Проблемы управления и информатики. 2010. № 2. С. 12−16.

23. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие системы и машины. 2009 № 4. С.34−42

24. Донец Г. А., Сергиенко И. В. . Метод моделирования структуры исходных данных и подклассы разрешимых задач комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2014. № 1. С. 3−10.

25. Донець Г. П., Тимофієва Н. К. Метод моделювання структури вхідних даних і підкласи розв’язних задач // Математичне та програмне

забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS – 2007). П’ята міжнар. наук-практ. конф. Дніпропетровськ, 14−16 листопада 2007 р. Дніпропетровськ, 2007. С. 52−53.

26. Донець Г.П., Колєчкіна Л. М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях: монографія. Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.

27. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. Москва : Наука, 1981. 344 с.

28. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Общий подход к исследованию устойчивости Парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. 2007. 19. Вып. 3. С. 79−83.

29. Емец О. А., Барболина Т Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев : Наукова думка, 2008. 159 с.

30. Емец О. А., Барболина Т Н. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и системный анализ. 2004. №5. С. 115−125.

31. Емец О. А., Колечкина Л. Н. Использование метода отсечений при раскрое // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 3. С. 114−117.

32. Емец О. А., Колечкина Л. Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 3. С. 156−169.

33. Емец О. А., Недобачий С. И., Колечкина Л. Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного багатогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 1. С. 110−118.

34. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв’язків // Український математичний журнал. 2000. –Т. 52, № 12. С. 1630–1640.

35. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Київ : Наукова думка, 2005. 118 с.

36. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М., Нагірна А. М. Розв’язування багатокритеріальної задачі з лінійними критеріями на множині переставлень // Вісник Хмельницького національного університету. 2005.№ 5.С. 345−347.

37. Ємець О. О., Роскладка О. В.Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах : властивості та розв’язування. Полтава : РВВ ПУСКУ, 2006. 130 с.

38. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация : учеб. пособие. Киев : Вища школа, 1991. 198 с.

39. Кини Р. Л., Райфа Х Принятие решений при многих критериях : предпочтения и замещения. Москва : Радио и связь, 1981. 560 с.

40. Козерацкая Л. Н. Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации как характеристика ее устойчивости // Кибернетика и системный анализ. 1997. №6. С. 181−184.

41. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: исследование устойчивости // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. № 1. С. 12–30.

42. Козерецкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В. Необходимые и достаточные условия устойчивости задач целочисленного линейного программирования // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 10. С. 76−93.

43. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный подход к решению многокритериальных экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях // Теорія оптимальних рішень. 2012. С. 98−103.

44. Колечкина Л. Н. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Artificial Intelligence and Decision Making : Supplement to International Journal «Information Technologies and Knowledge». 2008. Vol. 2. P. 180–186. (Intern. Book Series «Information science and computing» ; № 7).

45. Колечкина Л. Н. О нахождении Парето-оптимальных решений в многокритериальных комбинаторных задачах на множестве размещений // Теорія оптимальних рішень. 2008. № 7. С. 109–116.

46. Колечкина Л. Н. Об одном алгоритме решения комбинаторных задач // Комп’ютерна математика в науці, інженерії та освіті : матеріали третьої міжнар. наук.-технічної конф., (Полтава, 1−31 жовт. 2009 р.). Київ : Вид-во НАНУ, 2009.С. 19.

47. Колечкина Л. Н. Об одном алгоритме решения комбинаторных задач векторной оптимизации на множестве размещений // Искусственный интелект. 2010. № 1. С. 61−69

48. Колечкина Л. Н. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок // Динамические системы. 2009. № 27. С. 1−13.

49. Колечкина Л. Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. 2007. № 6. С. 67–73.

50. Колечкина Л. Н., Дверна Е. А. Решение экстремальных задач с добно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок при условии многокритериальности // Кибернетика и системный анализ. 2017. № 4. С.113−122.

51. Колечкина Л. Н., Дверна Е. А., Нагорная А. Н. Модификация координатного метода решения экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях при условии многокритериальности // Кибернетика и системный анализ. 2014. № 4. С.153−161

52. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный алгоритм координатного метода для решения многокритериальных комбинаторных задач // Інформатика та системні науки (ІСН−2012). Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (1−3 березня 2012 року, м. Полтава). 2012. С. 144−147.

53. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Подход к решению векторных задач с дробно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): праці міжнар. наук.-практ. конф., 16−18 травня 2017 р., Київ−Черкаси; наук. ред. В.Є. Снитюк. К. ВПЦ «Київський університет», 2017. 343 с.

54. Колечкина Л. Н., Родионова Е. А. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений // Кибернетика и системный анализ. 2008. № 2. С. 152–160.

55. Колечкина Л. Н., Родионова Е. А. Моделирование прикладных задач векторными задачами на комбинаторных конфигурациях // Радиоэлектроника и информатика. 2009. № 3. С. 62−68.

56. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Алгоритм модифікованого координатного методу для розв'язування екстремальних задач з дробово-лінійною функцією цілі на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS−2016, Дніпро, 16−18 листопада 2016 р. / Під загальною редакцією О.М. Кісельової Д.: ДНУ, 2016. С. 102−103.

57. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Використання властивостей комбінаторних конфігурацій для розв'язування екстремальних комбінаторних задач // Інформатика та системні науки (ІСН−2013). Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (21−23 березня 2013 року, м. Полтава). 2013. С. 153−156.

58. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв'язування векторних екстремальних комбінаторних задач з дробово-лінійними функціями цілі на конфігурації перестановок // Інформатика та системні науки (ІСН 2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. Полтава : ПУЕТ, 2017. С. 143−145.

59. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності з використанням методу послідовного введення обмежень // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ−2013): матеріали III Всеукр. наук. семінару, (30−31 серпня 3013 р., м. Полтава) / за ред. О.О. Ємця. Полтава: ПУЕТ, 2013. С. 51−53.

60. Колєчкіна Л. М., Нагірна А. М. Моделювання та розв’язування економічних задач оптимізації відносних показників з урахуванням комбінаторних властивостей розв’язку // Наукові вісті Нацаціонального технічного університету України «Київський політехнічний інститут». 2006. № 5. С. 34–40.

61. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Багатокритеріальні комбінаторні задачі на поліперестановках та методи їх розв’язування // Вісник львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика 2010. Випуск 16. С. 28−39.

62. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Локалізація значень функції, заданої на розміщеннях // Комп’ютерні науки та інженерія: Матеріали IV конференції молодих вчених CSE−2010 (25−27 листопада 2010 р., Львів). Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. С. 240−241.

63. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Модель багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU−2009). Abstracts (April 27−30, 2009, Shidnica). 2009. С. 117−118.

64. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановках // Волинський математичний вісник. (Серія «Прикладна математика»). 2009. Вип. 6. С. 72−86.

65. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Питання розв’язування комбінаторних багатокритеріальних задач на множині полірозміщень // Наука практика освіта : матеріали V міжвуз.наук.-практ. конф., 23 трав. 2008 р. / упоряд. Л. Т. Коломієць. Київ : ЗАТ «ДОРАДО», 2008. С. 153−157.

66. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Підхід до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS−2010, Дніпро, 10−12 листопада 2010 р. Дніпро. 2010. С. 109−110.

67. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Підхід до розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / ред. кол. … О. М. Кісельова (голов. ред.) та ін. Дніпропетровськ : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. С. 183−190.

68. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях та підхід до розв'язання // Радиоэлектроника и информатика. 2007. №. 1. С. 84–88.

69. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності // Штучний інтелект. 2011 №2 С. 137−143.

70. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки / И.В. Гребенник, А.А. Коваленко, Т.Е. Романова, И.А. Урняева, С.Б. Шеховцов // Кибернетика и системный анализ. 2018. Т. 54, № 2. С. 55–67.

71. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В. , Сергиенко Т. И. Качественные характеристики устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности // Кибернетика и системный анализ. 2014. №2. С.75−82.

72. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В. , Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 4. С.90−100.

73. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации. Москва : Наука, 1986. 140 с.

74. Меламед И. И., Сигал И. Х. Вычислительное исследование трехкритериальных задач о деревьях и назначениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 10. С. 1780−1787.

75. Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах / Э. Г. Петров, М. В. Новожилова, И. В. Гребенник, Н. А. Соколова. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2003. 380 с.

76. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. Москва : Наука, 1982. 286 с.

77. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин, В. А. Заславский, И. А. Ушаков / под. ред. В. С. Михалевича. Киев : Наукова думка, 1993. 312 с.

78. Ногин В. Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42, № 7.С. 951–957.1

79. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. Москва : Физматлит, 2002. 144 с.

80. Оре О. Теория графов. / О.Оре . 2-е изд. Москва : Наука, 1980. С. 336.

81. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Москва : Мир, 1985. 512 с.

82. Парасюк И. Н., Каспшицкая М. Ф. О решении комбинаторной многокритериальной оптимизационной задачи нечетким методом вектора спада // Компьютерная математика. 2009. № 2. С. 150−158.

83. Перепелица В. А., Сергиенко И. В. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 3. С. 400–419.

84. Перепелица В. А., Сергиенко И. В. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. 1987. № 5. С. 85–93.

85. Петров К. Э., Кобзев И. В., Орлов А. В. Определение относительных экспертных оценок альтернатив методом компараторной идентификации // Проблеми інформаційних технологій, 2013. Випуск 2. С. 69-74.

86. Петров Э. Г., Крючковский В. В., Петров К. Э. Нормативный метод принятия решений в условиях многокритериальности и интервальной неопределенности // Проблеми інформаційних технологій, 2014. Випуск 1. С. 7-13.

87. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва : Наука, 1982. 256 с.

88. Родіонова О.А. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): Матеріали 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції (м. Черкаси, 10−13 травня 2011 р.). Черкаси : Маклаут, 2011. С. 474.

89. Родіонова О.А. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на множині полірозміщень // Наукові записки: Матеріали звіної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету (м. Полтава, 15 травня 2008 р.). Полтава : АСМІ, 2008. С. 38−39.

90. Родіонова О.А. Програма розв’язування багатокритеріальних задач на полікомбінатоних множинах // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU−2010). Abstracts (Lviv, May 17−21, 2010). 2010. С. 139−140.

91. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. Москва : Изд-во «Наука», 1977. 320 с.

92. Семенова Н. В., Белоусова В. А. Параметрическое моделирование геометрических объектов // Перспективы развития науки и образования. Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. 2017. С. 58-60.

93. Семенова Н. В. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Artificial Intelligence and Decision Making : Supplement to International Journal «Information Technologies and Knowledge». 2008. Vol. 2. P. 187−195. (Intern. Book Series «Information science and computing»; № 7).

94. Семенова Н. В. Гарантирующие и оптимистические решения задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений // Теорія оптимальних рішень. 2006. № 5. С. 39–46.

95. Семенова Н. В., Гром Н. В. Оптимізація розподілу зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими двопродуктовими еволюційними системами // Теорія оптимальних рішень. 2018. № 18. С. 49–55.

96. Семенова Н. В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 1. С. 103−114.

97. Семенова Н. В. О решении векторных задач частично дискретной оптимизации // Комп’ютерна математика. 2008.№ 2.С. 156 –164.

98. Семенова Н. В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. 2008. № 7. С. 153–160.

99. Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв’язання. Київ : Наукова думка, 2009. 262 с.

100. Семенова Н. В., Чайка Д. О. Адитивний алгоритм розв’язання векторних задач лінійної оптимізації з булевими змінними // Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр, 2018. № 17. С. 152−159.

101. Сергиенко И. В., Гуляницкий Л. Ф., Сиренко С. И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 5. С. 71−83.

102.Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач Киев : Наукова думка, 1995. 171 с.

103.Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2000. № 6. С. 39–46.

104.Сергиенко И. В., Перепелица В. А. О проблеме отыскания множества альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. 1987. № 5. С. 85−93.

105.Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев : Наукова думка, 2003. 264 с.

106.Сигал И. Х., Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. Москва : Физматлит, 2003. 240 с.

107.Стоян Ю. Г., Ємець О. О Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Киев : Ін-т системних досліджень освіти, 1993. 188 с.

108. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава : РВВ ПУСКУ, 2005. 104 с.

109.Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. Киев : Наукова думка, 1980. 205 с.

110.Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев : Наукова думка, 1986. 268 с.

111.Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С.. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков : Константа, 2017. 404 с.

112.Тимофеева Н.К. Комбинаторные функции в задаче размещения // Компьютерная математика. 2004. № 1. С. 47−56.

113.Тимофеева Н.К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества // Управляющие системы и машины. 2002. № 5. С. 6−23.

114.Тимофеева Н.К. О способах образования аргумента целевой функции в задачах комбинаторной оптимизации // Кибернетика и ситемный анализ. 2002. № 6 С. 96−103.

115.Тимофеева Н.К. Самонастраивающиеся алгоритмы нахождения неопределенных параметров в задачах комбинаторной оптимизации // Управляющие системы и машины. 2009. № 4. С. 43−51.

116.Тимофієва Н.К. Розв’язні задачі та комбінаторна оптимізація // Електротехнічні та комп’ютерні системи, 2014, № 13 (89), с. 46 51

117.Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород : Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.

118.Чуб І. А, Новожилова М. В., Андронов В. А. Моделювання прикладних оптимізаційних задач розміщення об’єктів з метричними характеристиками, що змінюються : монографія. Харків: НУЦЗ України, 2017. 167 с.

119.Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. Москва : Радио и связь, 1992. 504 с.

120.Элементы теории геометрического проектирования / С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк [и др.] / под ред. В. Л. Рвачева. Киев : Наукова думка, 1995. 240 с.

121.Яковлев С.В. Оптимизационные задачи синтеза стохастических матриц // Радиоэлектроника и информатика. 2005. № 4. С. 36−38.

122.Яковлев С.В. Свойства эвклидовых комбинаторных множеств-расстановок с повторениями и без повторений // Проблемы бионики. 1989. № 42. С. 90−95.

123.Яковлев С. В., Валуйская О. А. О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного багатогранника с учетом линейных ограничений // Доповіді НАН України. 1999. № 4. С. 103–108.

124.Яковлев С. В., Гребенник И. В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах // Известия вузов. Математика. 1991. № 11. С. 74–86.

125.Bernhard, K., Jens, V. Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms. SpringerVerlag, Berlin, 2012.

126.Beskorovainyi V. Parametric synthesis of models for multicriterial estimation of technological systems // Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2017. № 2 (2), pp. 5-11.

127.Blum C., Roli A. Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison // ACM Computing Surveys. 2003. 35, № 3. pp. 268−308.

128.Bras-Amoros M., Stokes K., Greferath M. Problems related to combinatorial configurations with applications to P2P-user private information retrieval // Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS 2010, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary

129.Diestel R. Graph Theory, Electronic Edition. New York : Springer-Verlag, 2005. 422 p.

130.Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Second edition. Heildelberg: Springer Berlin, 2005, P. 324.

131.Ehrgott M. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization / M. Ehrgott, X. Gandibleaux // OR. Spektrum 2000. – Vol 22. pp. 425–460.

132.Emelichev V. A., Bukhtoyarov S. E. Investment Boolean problem with Savage risk criterions in the conditions of uncertainty. Diskr. Mat. 2019, Volume 31, Issue 2, Pages 20–33

133.Emelichev V., Nikulin Y. Strong stability measures for multicriteria quadratic integer programming problem of finding extremum solutions. Computer Science Journal of Moldova . 2018, Vol. 26 Issue 2, p115-125. 11p.

134.Emelichev V. A., Yanushkevich O. A. The tests of efficiency for a discrete multicriteria optimization problem d’analyse numerique et de theorie de l’approximation. // Romania. 1998. V. 27. N 2. pp. 237−242.

135.Greco S., Ehrgott M., Figueira J. R. . Multiple Criteria Decision Analysis – State of the Art Surveys. – New York: Springer, 2016. – 1346 p.

136. Koliechkina L. M., Dvirna O. A. Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality // Cybernetics and Systems Analysis, 2017. Vol. 53. No. 4. July. P. 590–599.

137. Koliechkina L. N., Dvernaya E. A., Nagornaya A. N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations // Cybernetics and Systems Analysis, 2014. Vol. 50. No. 4. July. P. 620–626.

138. Koliechkina L, Pichugina O. Multiobjective optimization on permutations with applications // In DEStech Transactions on Computer Science and Engineering. IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). pp. 61-75.

139. Kolechkina L. N., Rodionova E. A. Multicriteria combinatorial optimization problems on a set of polypermutations // Cybernetics and Systems Analysis, 2008. Vol. 44, No. 2, P. 276– 288.

140. Korte B., Vygen J.: Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Springer, New York, 2018.

141. Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I. Stability of vector integer optimization problems with quadratic criterion functions // Theory of stochastic processes. 2004. № 3–4. pp. 95–101

142. Pardalos P. M., Du D-Z., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York : Springer, 2013. 3409 p.

143. Pichugina O. S., Yakovlev S. V. Functional and analytic representations of the general permutations // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016, 1(4), pp. 27−38.

144. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. Springer, Switzerland. 2016, pp. 689−700.

145. Schrijver A. A Course in Combinatorial Optimization. Amsterdam, 2017, P. 221.

146. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information / V. A. Emelichev, V. M. Kotov, K. G. Kuzmin, T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko // Journal of Automation and Information Sciences, 2014, Volume 46, Issue 2, pp. 27-41.

147. Steuer R. E., Na P. Multiple criteria decision making combined with finance: a categorized bibliography // European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 150. P. 496–515.

148. Stoyan Y. G., Chugay A. M. Packing convex homothetic polytopes into a cuboid // Journal of Mechanical Engineering, 2018, Vol. 21, No. 2. pp. 45-59.

149. Stoyan Y. G., Yakovlev S. V. Configuration space of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. 2018, 54(5), pp. 716−726.

150. Stoyan Y. G., Yakovlev S. V., Parshin O. V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n // Cybernetics and Systems Analysis. 1991, 27(4), pp.562−567.

151. Yakovlev S.V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1994, 34(7), pp. 1112−1119.

152. Yakovlev S. V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets // Cybernetics and Systems Analysis. 1989, 25(3), pp. 385−391.

153. Yakovlev S. V., Grebennik I. V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization // Cybernetics and Systems Analysis. 1993, 29(5),·pp. 419–426.

154. Yakovlev S. V., Valuiskaya O. A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation Polyhedron with additional linear constraints // Ukrainian Mathematical Journal. 2001, 53(9), pp. 1535−1535.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на поліросміщеннях та підхід до розв’язання // Радиоэлектроника и информатика. 2007. №. 1. С. 84–88.
2. Kolechkina L. N., Rodionova E. A. Multicriteria combinatorial optimization problems on a set of polypermutations // Cybernetics and Systems Analysis. 2008. Vol. 44. No. 2. P. 276–288.
3. Колечкина Л. Н., Родионова Е. А. Моделирование прикладных задач векторными задачами на комбинаторных конфигурациях // Радиоэлектроника и информатика. 2009. № 3. С. 62−68.
4. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Багатокритеріальні комбінаторні задачі на поліперестановках та методи їх розв’язування // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2010. Випуск 16. С. 28–39.
5. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності // Штучний інтелект. 2011. № 2. С. 137–143.
6. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Підхід до розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / ред. О.М. Кісельової та ін. Дніпропетровськ : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. С. 183–190.
7. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный подход к решению многокритериальных экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях // Теорія оптимальних рішень. 2012. С. 98–103.

8. Koliechkina L. N., Dvernaya E. A., Nagornaya A. N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations // Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. No. 4. P. 620–626.

9. Koliechkina L. M., Dvirna O. A. Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality // Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53. No. 4. P. 590–599.

10. Родіонова О. А. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на множині полірозміщень // Наукові записки: матеріали звітної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету (м. Полтава, 15 травня 2008 р.). Полтава : АСМІ, 2008. С. 38–39.

11. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Модель багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties: abstracts (PDMU-2009). (Shidnica, April 27–30, 2009). Київ: «Освіта України», 2009. С. 117–118.

12. Колєчкіна Л. М., Родіонова О.А. Підхід до розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2010, (м. Дніпропетровськ, 10–12 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 109–110.

13. Колєчкіна Л. М., Родіонова О. А. Локалізація значень функції, заданої на розміщеннях // Комп’ютерні науки та інженерія: матеріали IV конференції молодих вчених CSE−2010 (м. Львів, 25–27 листопада 2010 р.). Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. С. 240 – 241.

14. Родіонова О.А. Програма розв’язування багатокритеріальних задач на полікомбінатоних множинах // XV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU–2010): abstracts (Lviv, May 17–21, 2010). Київ: «Освіта України», 2010. С. 139–140.

15. Родіонова О. А. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): матеріали 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції (м. Черкаси, 10–13 травня 2011 р.). Черкаси: Маклаут, 2011. С. 474.

16. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Модифицированный алгоритм координатного метода для решения многокритериальных комбинаторных задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2012): матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1–3 березня 2012 року). Полтава: ПУЕТ, 2012. С. 144–147.

17. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Використання властивостей комбінаторних конфігурацій для розв’язування екстремальних комбінаторних задач // Інформатика та системні науки (ІСН–2013): матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21–23 березня 2013 року).). Полтава: ПУЕТ, 2013. С. 153–156.

18. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв’язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях за умови багатокритеріальності з використанням методу послідовного введення обмежень // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ–2013): матеріали ІІІ Всеукр. наук. семінару, (м. Полтава, 30–31 серпня 3013 р.) / за ред. О. О. Ємця. Полтава : ПУЕТ, 2013. С. 51–53.

19. Двірна О. А. Переваги використання координатного методу при розв’язувані екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності // Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації : матеріали Міжнародної науково‒практичної конференції (м. Полтава, 12–13 травня 2016 року). Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 326–329.

20. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Алгоритм модифікованого координатного методу для розв’язування екстремальних задач з дробово‒лінійною функцією цілі на комбінаторних конфігураціях // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS–2016,

(м. Дніпро, 16–18 листопада 2016 р.) / Під загальною редакцією О.М. Кісельової, Дніпро : ДНУ, 2016. С. 102–103.

21. Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв’язування векторних екстремальних комбінаторних задач з дробово-лінійними функціями цілі на конфігурації перестановок // Інформатика та системні науки (ІСН–2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. Полтава : ПУЕТ, 2017. С. 143–145.

22. Колечкина Л. Н., Дверная Е. А. Подход к решению векторных задач с дробно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): праці міжнар. наук.-практ. конф., (Київ-Черкаси, 16−18 травня 2017 р.); наук. ред. В.Є. Снитюк. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2017. С. 343.

23. Дверная Е. А. Модификация горизонтального метода локализации значения функции для решения векторных задач на комбинаторных конфигурациях // Наука и образование – 2018: сборник материалов XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых (г. Астана, 12 апреля 2018 г.). Астана : ЄУУ, 2018. С. 1634–1637.

24. Двірна О. А. Використання схем підграфів при розв’язуванні задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях // Потенціал сучасної науки (частина I) : матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 10−11 листопада 2018 р.). Київ : МЦНД, 2018. С. 57–59.

25. Двірна О.А. Розв’язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях без додаткових обмежень // Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень : праці наукової школи-семінару, (м. Ужгород, 15–20 квітня 2019 р.) / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», наук. ред. Л. Ф. Гуляницький. Ужгород : УНУ, 2019. С. 79–80.

Додаток Б

Довідка про використання результатів дисертаційної роботи у навчальному процесі Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Кооперація: взаємодопомога, демократія та мир!

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
36014, м. Полтава, вул. Коваля 3
п/р 26008000019421 в АТ «Укрексімбанк», МФО 322313, код за ЄДРПОУ 01597997
тел. (0532) 50-91-70, факс (0532) 50-02-22, e-mail: can@puet.edu.ua

№ 45-15/62 від «14» 05 2019 р.
на № ______________

ДОВІДКА

про впровадження в навчальний процес результатів
дисертаційної роботи Двірної Олени Анатоліївни за темою
«Моделі та методи розв'язування векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних множинах»

Основні положення та результати дисертаційної роботи Двірної О.А. поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук були використані у навчально-методичній роботі ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі» на кафедрі документознавства та інформаційної діяльності в економічних процесах (протокол засідання кафедри № 9 від 26.03.2019 р.) під час розробки навчальних і робочих програм, рекомендовано до впровадження в освітній процес:

- горизонтальний та координатний методи розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях та розгляд математичних моделей прикладних задач зазначеного виду під час викладання дисципліни «Системний аналіз інформаційної діяльності»;
- методологія розв'язування векторних задач на комбінаторних конфігураціях як задач на графах під час викладання дисципліни «Математичні основи інформаційної діяльності».

Ректор **О.О. Нестуля**

Дзеверіна
56 37 03

Згідно з оригіналом.

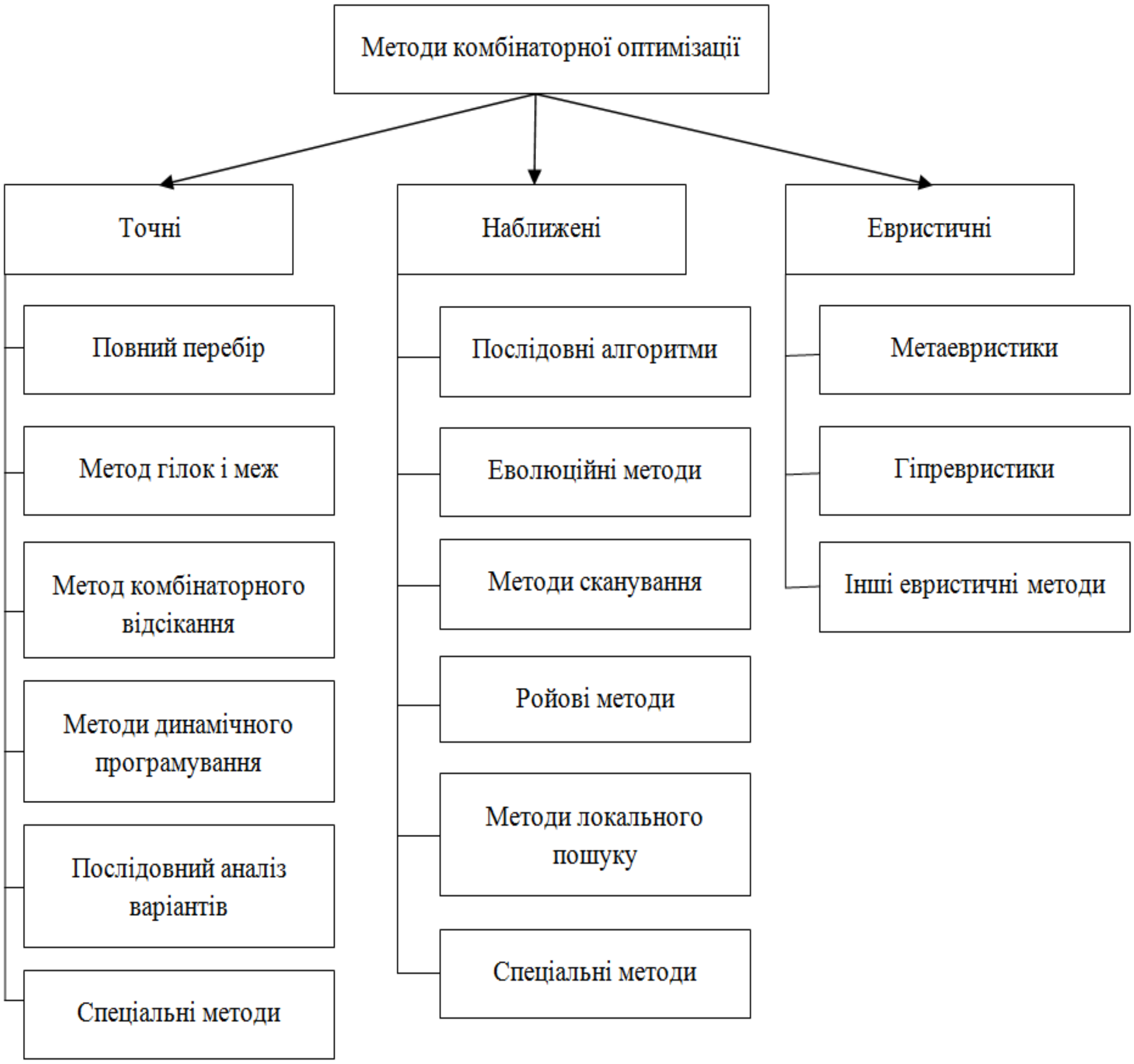
Вчений секретар спецради Д64.052.02 ______*Підпис*______ Л.В. Колесник
Печатка

Додаток В

Групи методів векторної оптимізації

Додаток Г

Класифікація методів комбінаторної оптимізації за роботами Л.Ф. Гуляницького



Додаток Д

Результати числових експериментів за горизонтальним методом

№	Розмірність функції	Кількість елементів множини	Кількість підграфів	Кількість розглянутих точок	Загальна кількість точок	Час	Значення функції	Кількість розв'язків
1	5	7	34	117	2520	0,66	107	9
2	5	7	5	18	2520	0,0001	110	1
3	5	7	15	54	2520	0,22	51	4
4	5	7	57	181	2520	1,15	105	16
5	5	6	120	274	720	2,19	79	26
6	5	6	166	366	720	2,02	74	20
7	5	6	194	413	720	3,57	69	34
8	5	6	33	83	720	0,55	53	8
9	4	6	64	178	360	1,26	53	17
10	4	6	10	31	360	0,1	67	3
11	4	6	29	87	360	0,49	62	6
12	4	6	54	154	360	1,05	57	12
13	4	7	32	124	840	0,66	76	7
14	4	7	85	317	840	1,98	66	19
15	4	7	108	399	840	2,59	61	32
16	4	7	32	124	840	0,66	36	7
17	3	6	6	20	120	0,0001	46	2
18	3	6	14	48	120	0,22	40	5
19	3	7	28	123	210	0,66	35	11
20	3	7	15	65	210	0,27	45	5
21	3	7	25	103	210	0,55	41	10
22	3	7	9	39	210	0,11	19	3

Додаток Е

Числові експерименти за алгоритмом модифікованого координатного методу для векторних задач з дробово-лінійними цільовими функціями

№	Кількість змінних	Кількість елементів множини	Кількість функцій	Кількість додаткових лінійних обмежень	Кількість точок, що задовольняють додатковим обмеженням	Кількість розв'язків
1.	7	5040	3	3	41	1
2.	7	5040	3	4	36	1
3.	7	5040	4	3	32	1
4.	7	5040	5	4	39	1
5.	7	5040	4	8	4	1
6.	7	5040	6	2	46	1
7.	6	720	3	7	4	1
8.	6	720	3	2	64	1
9.	6	720	3	6	9	1
10.	6	720	4	6	20	1
11.	6	720	4	4	51	1
12.	6	720	4	4	50	1