

Українська інженерно-педагогічна академія
Міністерства освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки
Міністерства освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СЛАВІК ОЛЕКСІЙ ВАЛЕРІЙОВИЧ

УДК 004.94:519.65

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНІ МЕТОДАМИ
ІНТЕРСТРІПАЦІЇ ФУНКЦІЙ ЗА НЕПОВНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ ПРО НЕЇ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Підпис О.В. Славик

Науковий керівник:

Литвин Олег Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи ідентичний за змістом
з іншими, поданими до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 Підпис Л.В. Колесник
Печатка

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Славiк Олексiй Валерiйович. Математичне моделювання поверхнi методами iнтерстрипацiї функцiй за неповною iнформацiєю про неї. – Квалiфiкацiйна наукова праця на правах рукопису.

Дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук за спецiальнiстю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальнi методи». – Українська iнженерно-педагогiчна академiя, Мiнiстерство освiти i науки України; Харкiвський нацiональний унiверситет радіоелектронiки, Мiнiстерство освiти i науки України; Харкiв, 2020.

За останнiй час новi iнформацiйнi оператори (iнтерлінацiї, iнтерстрипацiї, iнтертубацiї, iнтерлайеризацiї, iнтерлокацiї) набувають все бiльшoї популярностi i охоплюють все бiльше прикладних задач механiки та технiки. На даний момент вiдомi оператори iнтерстрипацiї (вiд англ. *inter* – мiж, вiд англ. *stripe* – смуга) для вiдновлення пошкоджених поверхонь у виглядi смуг iз границями, паралельними осям координат, що досить сильно звужує спектр прикладних задач, до яких можна застосувати метод. Тому узагальнення операторiв iнтерстрипацiї на випадок смуг, границi яких розташованi пiд довiльним кутом або мають криволiнiйнi границi зробить оператори бiльш унiверсальними та дасть змогу застосовувати оператори для бiльшoї кiлькостi прикладних задач.

Метою дисертацiйної роботи є побудова математичних моделей поверхонь тривимiрних тiл з урахуванням даних про них на рiзних системах смуг на основi використання операторiв iнтерстрипацiї функцiй.

Для досягнення поставленої мети у дисертацiйнiй роботi були розв'язанi такi *основнi задачі*:

– дослідження математичної моделі освітленості поверхні за даними iнтенсивностi освiтленостi на системi смуг за допомогою операторiв iнтерстрипацiї;

– удосконалення методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між паралельними смугами;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, розташованими під довільним кутом;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, що мають криволінійні границі;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами із врахуванням структури тіла;

– удосконалення методу знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку;

– проведення обчислювальних експериментів на основі розробленого автором пакету прикладних програм для тестування запропонованих методів та алгоритмів.

Об'єкт дослідження – процес обробки даних дистанційного зондування планети.

Предмет дослідження – метод обробки та відновлення даних дистанційного зондування планети з використанням інтерстріпації функцій.

Дослідження базується на комплексному використанні нових інформаційних операторів, методів математичного аналізу та математичного моделювання: для побудови математичних моделей поверхонь досліджуваного об'єкту – теорія наближення функцій двох змінних із використанням операторів інтерлінації; для сегментації поверхні досліджуваного об'єкту – методи виявлення розривів на цифрових зображеннях; для побудови розривних сплайнів – методи наближення операторами інтерполяції.

Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

– набув свого подальшого розвитку метод відновлення поверхні заданими про неї на системі паралельних смуг із врахуванням додаткової інформації, відмінність якого від існуючого методу інтерстріпації полягає у використанні більшого об'єму даних зі смуг;

– запропоновано та обґрунтовано метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг, розташованих під довільним кутом, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі яких описуються лінійними функціями;

– уперше побудовано математичну модель поверхні тіла за даними про неї на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються неперервними функціями;

– розроблено та досліджено метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг із врахуванням структури тіла, що дозволяє відновлювати поверхню із врахуванням особливостей текстури об'єкта дослідження на відомих смугах;

– удосконалено метод знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку, який дозволяє локалізувати з деяким наперед заданим порядком точності розриви функції чи її похідної деякого порядку.

Розроблені в дисертаційній роботі методи можуть бути використані для автоматичного відновлення поверхні між смугами на основі даних дистанційного зондування Землі, аерофотозйомки, сейсморозвідки тощо.

Результати дисертаційної роботи використані у навчальному процесі кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії в курсі «Інформаційні технології в наукових дослідженнях».

Результати дисертаційної роботи використані при виконанні держбюджетної теми «Розробка та дослідження нового методу побудови 4D

міжсвердловинної акселерометричної математичної моделі кори Землі за даними сейсмічного зондування» (№ ДР 0115U002498).

Результати дисертаційної роботи опубліковано в 13 роботах. З них 7 статей у наукових періодичних виданнях (з них 1 стаття – у періодичному виданні, що включено до наукометричної бази Scopus; 5 статей – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з фізико-математичних наук; 1 стаття – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з технічних наук); 6 робіт – у збірниках матеріалів конференцій та тез доповідей.

Ключові слова: нові інформаційні оператори, інтерстріпація, інтерлінація, відновлення зображень, дистанційне зондування планети, сейсмічна томографія, картографія, ε -неперервність, $d^k\varepsilon$ -неперервність.

Список публікацій здобувача

1. Литвин О. М., Славик О. В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку // Проблемы машиностроения. 2016. Т.19 №1. С. 37-43.

2. Литвин О. М., Славик О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетених смуг, розташованих під довільним кутом // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. №2. С. 175-182.

3. Відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славик // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2016. №2(87). С. 88-93.

4. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славик // Управляющие системы и машины. 2017. №1(267). С. 46-58.

5. Славiк О. В. Наближення функцій двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi неперетинних смуг з криволiнiйними границями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серiя: Фiзико-математичнi науки. 2017. №15. С. 207-212.

6. Литвин О. М., Пасiчник В. О., Славiк О. В. Застосування методу iнтерстрипацiї для реставрацiї пошкоджених зображень // Бiонiка iнтелекту: науково-технiчний журнал. 2017. №2(89). С. 56-60.

7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized interstripation of functions of two variables // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54 №3. P. 465-475. [The journal is indexed in Scopus]

8. Славiк О. В. Дослiдження методiв виявлення розривiв земної поверхнi // Iнформатика та системнi науки (ICN-2015): матерiали VI Всеукраїнської науково-практичної конференцiї за мiжнародною участю (м. Полтава, 19-21 березня 2015р.). 2015. С. 309-312.

9. Славiк О. В. Застосування оператора Лапласа для виявлення розривiв земної поверхнi // Радiоелектронiка та молодь у XXI столiтті: матерiали XIX мiжнародного молодiжного форуму (м. Харкiв, 20-22 квітня 2015р.). 2015. Т.7. С. 102-103.

10. Славiк О. В. Про один метод реставрацiї зображень // Iнформатика та системнi науки (ICN-2016): матерiали VII Всеукраїнської науково-практичної конференцiї за мiжнародною участю (м. Полтава, 10-12 березня 2016р.). 2016. С. 277-279.

11. Литвин О. М., Литвин О. О., Славiк О. В. Наближення функцій двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi неперервних смуг з криволiнiйними границями // Обчислювальнi методи i системи перетворення iнформацiї: збiрник праць IV науково-технiчної конференцiї (м. Львiв, 28-30 вересня 2016р.). 2016. Вип.4. С. 21-24.

12. Литвин О. М., Славiк О. В. Застосування узагальненої iнтерстрипацiї функцій двох змiнних для вiдновлення зображення поверхнi // Iнформатика та системнi науки (ICN-2017): матерiали VIII Всеукраїнської науково-практичної

конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16-18 березня 2017р.). 2017. С. 180-182.

13. Литвин О. М., Славик О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетин них смуг, розташованих під довільним кутом // Матеріали 50-ї науково-практичної конференції науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії. Технологічний факультет. Секції: харчових та хімічних технологій, технологій та дизайну, вищої та прикладної математики (м. Харків, 25-29 вересня 2017р.). 2017. С. 53.

ABSTRACT

Slavik Oleksii Valeriyovich. Mathematical modeling of surfaces by methods of interstripation of functions on incomplete information about it. – A qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

A dissertation for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.05.02 «Mathematical modeling and computational methods». – Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Ministry of Education and Science of Ukraine; Kharkiv National University of Radioelectronics, Ministry of Education and Science of Ukraine; Kharkiv, 2020.

Recently, new information operators (interlination, interstipation, intertubation, interlayerization, interlocation) are becoming increasingly popular and cover more and more applied problems of mechanics and technology. At the moment, interstipation operators are known for the restoration of damaged surfaces in the form of stripes with boundaries parallel to the coordinate axes, which greatly narrows the range of applied problems to which the method can be applied. Therefore, the generalization of interstipation operators in the case of stripes whose boundaries are located at an arbitrary angle or have curvilinear boundaries will make operators more universal and will allow operators to be used for more applications.

The objective of the dissertation is to build mathematical models of surfaces of three-dimensional bodies taking into account data on them on different systems of stripes on the basis of use of operators of interstipation functions.

To achieve this objective in the dissertation the following main tasks were solved:

- to study of the mathematical model the intensity of illumination of surface on the system of stripes with the help of interstipation operators;
- to improve the method of mathematical modeling of the illumination of the body surface by the operators of interstipation between stripes with parallel boundaries;

- to develop and research the new method of mathematical modeling of the illumination of the body surface by interstipation operators between the stripes with boundaries, located at an arbitrary angle;

- to develop and research of a new method of mathematical modeling of the illumination of the body surface by interstipation operators between stripes with curvilinear boundaries;

- to develop and research of a new method of mathematical modeling of the illumination of the body surface by interstipation operators between the stripes, taking into account the structure of the body;

- to improve the method of finding the lines of discontinuity of continuous functions (one or two variables) or their derivatives of some order;

- to conduct computational experiments on the basis of a package of applications developed by the author for testing the proposed methods and algorithms.

The object of research is the process of processing remote sensing data of the planet.

The subject of research is a method of processing and restoring data of remote sensing of the planet using interstipation of functions.

The research is based on the complex use of new information operators, methods of mathematical analysis and mathematical modeling: to build mathematical models of the surfaces of the object – the theory of approximation of functions of two variables using interlination operators; for segmentation of the surface of the object – methods of detecting edges in digital images; for the construction of discontinuous splines – methods of approximation by interpolation operators.

The research in the dissertation allowed to obtain the following new scientific results:

- the method of restoration of a surface according to its data on system of parallel strips taking into account the additional information which difference from an existing method of interstripation consists in use of bigger volume of data from strips, has got the further development;

– the method of surface restoration according to its data on the system of strips located at an arbitrary angle, which allows to restore the surface if information about it is known on the strips, the boundaries are described by linear functions, has proposed and substantiated;

– the mathematical model of the body surface based on data on it on a system of strips with curvilinear boundaries, which allows to restore the surface if information about it is known on the strips with the boundaries in the form of continuous functions;

– the method of restoring the surface according to the data on it on a system of strips taking into account the structure of the body, which allows to restore the surface taking into account the texture of the object on known strips, has developed and researched;

– the method of finding discontinuity lines of continuous functions (one or two variables) or their derivatives of some order, which allows to localize with some predetermined order the accuracy the discontinuity of a function or its derivative of some order, is improved.

The methods obtained in the dissertation can be used for automatic restoration of the surface between the strips on the basis of remote sensing of the Earth, aerial photography, seismic tomography, etc.

The results of the dissertation have been used in the educational process of the Department of Information Computer Technologies and Mathematics of the Ukrainian Engineering Pedagogical Academy in the course «Information Technologies in Research».

The results of the dissertation have been used in the research, which are funded by Ministry of Education of Ukraine.

The results of the research have been published in 13 works. From them 7 articles in scientific periodicals (from them 1 article - in the periodical, which is included in the Scopus; 5 articles - in the scientific journals of Ukraine in physical and mathematical sciences; 1 article - in scientific journal of Ukraine in technical sciences); 6 papers - in the conference proceedings.

Keywords: new information operators, interlination, interstripation, inpainting, remote sensing of the planet, seismic tomography, cartography, ε -discontinuous, $d^k\varepsilon$ -discontinuous.

List of applicant's publications

1. Литвин О. М., Славик О. В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку // Проблемы машиностроения. 2016. Т.19 №1. С. 37–43.

2. Литвин О. М., Славик О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетених смуг, розташованих під довільним кутом // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. №2. С. 175–182.

3. Відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славик // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2016. №2(87). С. 88–93.

4. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славик // Управляющие системы и машины. 2017. №1(267). С. 46–58.

5. Славик О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперетинних смуг з криволінійними границями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. №15. С. 207–212.

6. Литвин О. М., Пасічник В. О., Славик О. В. Застосування методу інтерстріпації для реставрації пошкоджених зображень // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2017. №2(89). С. 56–60.

7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized interstripation of functions of two variables // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54 №3. P. 465–475. [The journal is indexed in Scopus]

8. Славiк О. В. Дослiдження методiв виявлення розривiв земної поверхнi // Інформатика та системнi науки (ІСН-2015): матерiали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 19-21 березня 2015р.). 2015. С. 309–312.

9. Славiк О. В. Застосування оператора Лапласа для виявлення розривiв земної поверхнi // Радіоелектронiка та молодь у XXI столiтті: матерiали XIX міжнародного молодiжного форуму (м. Харкiв, 20-22 квітня 2015р.). 2015. Т.7. С. 102–103.

10. Славiк О. В. Про один метод реставрації зображень // Інформатика та системнi науки (ІСН-2016): матерiали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 10-12 березня 2016р.). 2016. С. 277–279.

11. Литвин О. М., Литвин О. О., Славiк О. В. Наближення функцій двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi неперервних смуг з криволiнійними границями // Обчислювальнi методи i системи перетворення iнформації: збiрник праць IV науково-технiчної конференції (м. Львiв, 28-30 вересня 2016р.). 2016. Вип.4. С. 21–24.

12. Литвин О. М., Славiк О. В. Застосування узагальненої iнтерстріпації функцій двох змiнних для вiдновлення зображення поверхнi // Інформатика та системнi науки (ІСН-2017): матерiали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16-18 березня 2017р.). 2017. С. 180–182.

13. Литвин О. М., Славiк О. В. Наближення функцій двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi перетинних смуг, розташованих пiд довiльним кутом // Матерiали 50-ї науково-практичної конференції науково-педагогiчних працiвників, науковцiв, аспiрантiв та спiвробiтників академiї. Технологiчний факультет. Секції: харчових та хiмiчних технологiй, технологiй та дизайну, вищої та прикладної математики (м. Харкiв, 25-29 вересня 2017р.). 2017. С. 53.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	17
Вступ.....	18
1 Огляд літератури з теми дослідження.....	23
1.1 Огляд методів виявлення розривів на цифрових зображеннях.....	23
1.2. Огляд методів попередньої обробки зображень	36
1.2.1 Лінійне контрастування зображення	37
1.2.2 Солярізація зображення	38
1.2.3 Препарування зображення	39
1.2.4 Еквалізація гістограми зображення	39
1.3 Методи відновлення пошкоджених зображень	41
1.3.1 Текстульні методи відновлення пошкоджених зображень	42
1.3.2 Шаблонні (структурні) методи відновлення пошкоджених зображень...	44
1.3.3 Методи відновлення пошкоджених зображень, основані на розв'язання диференційних рівнянь з частинними похідними	47
1.3.4 Гібридні методи відновлення пошкоджених зображень	48
1.3.5 Швидкі напівавтоматичні методи відновлення пошкоджених зображень.....	49
Висновки до розділу 1	50
2 Метод відновлення поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних	52
2.1 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг, обмежених прямими паралельними осям координат, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних	52

2.1.1. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі неперетинних смуг, обмежених прямими паралельними вісі Oy.....	54
2.1.2 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі неперетинних смуг, обмежених прямими паралельними вісі Ox.....	60
2.1.3. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі перетинних смуг, обмежених прямими паралельними осям координат.....	67
2.2 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних.....	80
2.2.1 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з двох перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом.....	90
2.2.2. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з трьох перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом.....	92
2.2.3. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з M перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом.....	94
2.3 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на неперетинних системі смуг, обмежених прямими із криволінійними границями, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних	98
Висновки до розділу 2	111
3 Метод відновлення двовимірних дискретних сигналів за відомою інформацією на системі смуг за допомогою операторів інтерстріпації.....	114

3.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку, коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких паралельні осям координат	114
3.1.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді вертикальних смуг	115
3.1.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді горизонтальних смуг	116
3.1.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді перетинних взаємоперпендикулярних смуг	118
3.1.4 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді системі кадрів, границі яких паралельні осям координат	120
3.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких розташованими під довільним кутом	122
3.2.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді двох смуг, розташованих під довільним кутом,	123
3.2.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді m ($m > 2$) смуг, розташованих під довільним кутом.	125
3.2.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді m ($m > 2$) смуг, розташованих під довільним кутом із врахуванням структури зображення	126
3.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі неперетинних смуг із криволінійними границями	129
3.4 Застосування операторів інтерстріпації в методах обробки зображень та систем зондування поверхні планети	137
3.5 Застосування операторів інтерстріпації в розвідці корисних копалин	144
Висновки до розділу 3	147
4 Метод знаходження розривів функцій або їх похідних деякого порядку	149

4.1 Метод знаходження точок розриву функції однієї змінної або її похідної деякого порядку.....	149
4.2 Метод знаходження точок розриву функції двох змінних або її похідної деякого порядку.....	154
Висновки до розділу 4	161
Висновки	163
Список використаних джерел	166
Додаток А. Список власних публікацій здобувача.....	175
Додаток Б. Акт впровадження	177

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

\mathbb{R} – множина дійсних чисел, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$;

\mathbb{R}^n – евклідов n – вимірний простір, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$;

$x \in A$ – елемент x належить множині A ;

$x \notin A$ – елемент x не належить множині A ;

$A \cup B$ – об'єднання множин A та B ;

$A \cap B$ – перетин множин A та B ;

$A \subset B$ – множина A є частиною множини B ;

\overline{A} – замикання множини A ;

δ_{ij} – символ Кронекера; $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$;

$U[a, b]$ – рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$.

ВСТУП

Актуальність теми. За останній час нові інформаційні оператори (зокрема, оператори інтерстріпації) набувають все більшої популярності і охоплюють все більше прикладних задач механіки та техніки. Наприклад, в задачах обробки даних дистанційного зондування Землі, отриманих з літального апарату або штучного супутника планети; обробки пошкоджених даних сейсмічної томографії; обробки графічних даних, пошкоджених в результаті помилок при передачі даних по мережі або її перенавантаження; обробці архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину) тощо.

На даний момент відомі оператори інтерстріпації для відновлення пошкоджених поверхонь у вигляді смуг із границями, паралельними осям координат, що досить сильно звужує спектр прикладних задач, до яких їх можна застосувати. Тому узагальнення операторів інтерстріпації на випадок смуг, границі яких розташовані під довільним кутом або мають криволінійні границі зробить оператори більш універсальними, що дасть змогу застосовувати оператори інтерстріпації для більшої кількості прикладних задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії. Як виконавець, здобувач проводив дослідження у рамках держбюджетної теми № 15-01 ДБ «Розробка та дослідження нового методу побудови 4D міжсвердловинної акселерометричної математичної моделі кори Землі за даними сейсмічного зондування» (№ ДР 0115U002498), яка входила до плану НДР цієї кафедри.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є побудова математичних моделей поверхонь тривимірних тіл з урахуванням даних про них на різних системах смуг на основі використання операторів інтерстріпації функцій. Для досягнення сформульованої мети у процесі досліджень поставлені такі завдання:

–дослідження математичної моделі освітленості поверхні за даними інтенсивності освітленості на системі ліній за допомогою операторів інтерстріпації;

–удосконалення методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між паралельними смугами;

–розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, розташованими під довільним кутом;

–розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, що мають криволінійні границі;

–розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами із врахуванням структури тіла;

–удосконалення методу знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку;

–проведення обчислювальних експериментів на основі розробленого автором пакету прикладних програм для тестування запропонованих методів та алгоритмів.

Об'єктом дослідження є процес обробки даних дистанційного зондування планети.

Предметом дослідження є метод обробки та відновлення даних дистанційного зондування планети з використанням інтерстріпації функцій.

Методи дослідження базуються на комплексному використанні нових інформаційних операторів, методів математичного аналізу та математичного моделювання: для побудови математичних моделей поверхонь досліджуваного об'єкту – теорія наближення функцій двох змінних із використанням операторів інтерлінації; для сегментації поверхні досліджуваного об'єкту – методи виявлення розривів на цифрових зображеннях; для побудови розривних сплайнів – методи наближення операторами інтерполяції.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

– набув свого подальшого розвитку метод відновлення поверхні за даними про неї на системі паралельних смуг із врахуванням додаткової інформації, відмінність якого від існуючого методу інтерстріпації полягає в використанні більшого об'єму даних зі смуг;

– запропоновано та обґрунтовано метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг, розташованих під довільним кутом, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються лінійними функціями;

– уперше побудовано математичну модель поверхні тіла за даними про неї на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються неперервними функціями;

– розроблено та досліджено метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг із врахуванням структури тіла, що дозволяє відновлювати поверхню із врахуванням особливостей текстури об'єкта дослідження на відомих смугах;

– вдосконалено метод знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку, який дозволяє локалізувати з деяким наперед заданим порядком точності розриви функції чи її похідної деякого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати можуть бути використані для автоматичного відновлення поверхні між смугами на основі даних дистанційного зондування Землі, аерофотозйомки, сейсмозв'язки тощо. Крім того розроблена математична модель поверхні може бути використана для відновлення двовимірних сигналів, пошкоджених в результаті помилок при передачі даних по мережі або її перевантаженню. Оцінка справжніх значень втрачених даних необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних

документів у вигляді графічних зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо); при реставрації пошкоджених картин, портретів, зображень тощо.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано у 13 роботах [1–13]. Результати, які складають основу дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [5, 8–10], отримані одноосібно. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: [1] – метод виявлення розривів функцій за допомогою $d^k\varepsilon$ -неперервності; [2] – метод відновлення поверхні тіла за допомогою інтерстріпації функції на смугах, розташованих під довільним кутом; [3, 4] – метод відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на паралельних смугах із врахуванням шумів вхідних даних; [6] – метод відновлення пошкодженого зображення операторами інтерстріпації функцій двох змінних; [7] – узагальнена характеристика методів відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації; [11] – метод відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на неперетинних смугах із криволінійними границями; [12] – алгоритм відновлення поверхні тіла із врахуванням його структури; [13] – алгоритм відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на перетинних смугах розташованих під довільним кутом.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- VI всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2015)» (19-21 березня 2015 року, м. Полтава);
- XIX міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (20-22 квітня, 2015 року, ХНУРЕ, м. Харків);
- VII всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2016)» (10-12 березня 2016 року, м. Полтава);
- Європейському конгресі математики «7th European Congress of

Mathematics (7ЕСМ)» (18-22 липня 2016 року, м. Берлін);

– XLIX науково-практичній конференції професорсько-викладацького складу Української інженерно-педагогічної академії (секція «Вищої та прикладної математики») (25-29 вересня 2016 року, м. Харків);

– IV науково-технічній конференції «Обчислювальні методи та системи перетворення інформації» (28-30 вересня 2016 року, м. Львів);

– VIII всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2017)» (16-18 березня 2017 року, м. Полтава);

– Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLIV)» (26-29 вересня 2017 року, м. Кам'янець-Подільський);

– семінарі «Образний комп'ютер» (28 листопада 2017 року, м. Київ).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 13 робіт: серед них 7 статей у наукових періодичних виданнях (з них 1 стаття – у періодичному виданні, що включено до наукометричної бази Scopus [7]; 5 статей – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з фізико-математичних наук [2–6]; 1 стаття – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з технічних наук [1]); 6 робіт – у збірниках матеріалів конференцій та тез доповідей [8–13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація включає вступ, чотири розділи, список використаних джерел із 100 найменувань (на 9 сторінках), 54 ілюстрації, 1 таблицю та 2 додатки. Загальний обсяг роботи складає 178 сторінок друкованого тексту, з них 148 сторінок основного тексту.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ З ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В наш час обробка сигналів та зображень є однією з найважливіших задач в радіотехніці. Результати досліджень в даній області застосовуються у:

- системах комп'ютерного (або машинного) зору;
- системах доповненої реальності;
- робототехніці;
- промисловості;
- сфері ІТ-технологій;
- топографії;
- медицині і т.п. [14-18].

1.1 Огляд методів виявлення розривів на цифрових зображеннях

Сегментація зображення – це процес поділу цифрового зображення на безліч областей або наборів пікселів. Фактично, цей поділ на різні об'єкти, які мають однакову текстуру або колір. Результатом сегментації є набір областей, що покривають разом все зображення, і набір контурів. Всі пікселі з однієї області подібні за деякими характеристиками, такими як колір, текстура або інтенсивність. Суміжні області відрізняються один від одного цими ж характеристиками. Різні підходи знаходження меж між областями базуються на неоднорідностях рівнів інтенсивності яскравості. Таки чином вибір методу сегментації зображення залежить від проблеми, яку необхідно вирішити [19-22].

Порогова сегментація є найпростішим видом сегментації. На її основі області можуть бути класифіковані за базовим діапазоном значень, які залежать від інтенсивності пікселів зображення. Порогова обробка перетворює вхідне зображення в бінарне.

Методи сегментації, засновані на виявленні областей, знаходять безпосередньо різкі зміни значень інтенсивності. Такі методи називаються

граничними методами. Виявлення меж – фундаментальна проблема при аналізі зображень. Техніки виділення границь зазвичай використовуються для знаходження неоднорідностей на чорно-білому зображенні.

Границі об'єктів на зображенні в значній мірі зменшують кількість даних, які необхідно обробити, і в той же час зберігають важливу інформацію про об'єкти на зображенні, їх форму, розмір, кількість. Головною особливістю техніки виявлення границь є можливість виявити точну лінію з її орієнтацією. У літературі описано безліч алгоритмів, які дозволяють виявляти межі об'єктів, але ніде немає опису того, як оцінювати результати обробки. Результати оцінюються суто індивідуально і залежать від сфери їх застосування.

Виявлення профілю об'єктів – фундаментальний інструмент для сегментації зображення. Такі алгоритми перетворюють вхідне зображення в зображення з контурами об'єктів, переважно в сірих тонах. В обробці зображень, особливо в системах комп'ютерного зору, за допомогою виділення контуру розглядають важливі зміни рівня яскравості на зображенні, фізичні та геометричні параметри об'єкта тощо. Це фундаментальний процес, який описує в загальних рисах об'єкти, отримуючи тим самим деякі дані про зображення. Виявлення профілю є найпопулярнішим підходом для виявлення значних неоднорідностей.

Контури є місцевою зміною яскравості на зображенні. Вони, як правило, проходять по краю між двома областями. За допомогою контурів можна отримати базові дані про зображення. Функції їх отримання використовуються передовими алгоритмами комп'ютерного зору і таких областях, як медична обробка зображень, біометрія і тому подібні. Виявлення контурів – активна область досліджень, так як він полегшує високорівневий аналіз зображень. На напівтонових зображеннях існує три види розривів: точка, лінія і контур. Для виявлення всіх трьох видів неоднорідностей можуть бути використані просторові маски.

Існує багато шляхів виявлення розривів. Проте, їх можна об'єднати у дві групи, такі як градієнтні та основані на операторі Лапласа. Градієнтні методи

виявляють розриви шукаючи максимум та мінімум в першій похідній зображення [23]. Методи основані на операторі Лапласа здійснюють пошук по нулям в другій похідній зображення для знаходження розривів.

Всі методи виявлення розривів так чи інакше використовують поняття згортки ядрами відповідного оператора з зображенням. Нехай I – матриця зображення розміром $N \times M$, яке аналізується, G – ядро деякого оператора, яке подане у вигляді квадратної матриці $n \times n$ (зазвичай $n=3,5,7$). Тоді згортокою ядра з зображенням будемо вважати [1]

$$H_{i,j} = L_{i,j} \cdot G, \quad (1.1)$$

де $L_{i,j}$ – підматриця матриці I розміром $n \times n$, відповідно до розміру матриці G .

Підматриця $L_{i,j}$ матриці I містить в собі елементи $\left[i - \frac{n-1}{2}, i + \frac{n-1}{2} \right] \times \left[j - \frac{n-1}{2}, j + \frac{n-1}{2} \right]$. Отримана матриця H має розмір $(N - n + 1) \times (M - n + 1)$. Тобто після кожного застосування такої згортки розмір вихідного зображення зменшується в залежності від розміру ядра G .

В більшості методів виявлення розривів загальна схема полягає в тому, що проводиться згортка ядер G_x та G_y з зображенням. Потім за допомогою отриманих матриць H_x та H_y знаходиться матриця M , кожний елемент якої обчислюється за формулою [1]

$$M_{i,j} = \sqrt{H_x^2(i,j) + H_y^2(i,j)}. \quad (1.2)$$

Потім значення $M_{i,j}$ порівнюється із заздалегідь заданим пороговим значенням T . Якщо значення $M_{i,j}$ перевищує порогове значення T , то точка (i,j) належить лінії розриву, в протилежному випадку ця точка не належить жодній лінії розриву.

Оператори «різниця пікселів» є найпростішим операторами виявлення розривів. Цей оператор складається з двох ядер, які враховують вертикальні та горизонтальні особливості зображення.

Ядра оператора «різниця пікселів» мають наступний вигляд [24]:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оператор «роздільна різниця пікселів» подібний до оператора «різниця пікселів», ядра якого наведені нижче [24]:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оператор Робертса або перехресний оператор Робертса (*Roberts cross operator*) є одним із найпростіших графічних фільтрів, який був запропонований Лоренцом Робертсом ще у 1963 році. Перехресний оператор Робертса надає просту апроксимацію величини градієнта виду [23]:

$$G(f(i, j)) = |f(i, j) - f(i + 1, j + 1)| + |f(i + 1, j) - f(i, j + 1)|$$

або у вигляді згортки з ядер [23]:

$$G_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи згортку ядрами перехресний оператор Робертса має наступний вигляд:

$$G(f(i, j)) = |G_x| + |G_y|.$$

Перетворення кожного пікселя оператором Робертса може показати похідну зображення вздовж ненульової діагоналі, і комбінація цих перетворених зображень може також розглядатися як градієнт від двох верхніх пікселів до двох нижніх. Оператор Робертса все ще використовується заради швидкості обчислень, але він програє порівняно з альтернативами з його значною проблемою чутливості до шуму.

Оператор Собеля (*Sobel operator*) є 3x3 оператором і враховує всі суміжні точки. Оператор Собеля являє собою величину градієнта, яка обчислюється за формулою [20]:

$$M = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}, \quad (1.3)$$

де часткові похідні обчислюються за формулами [23]:

$$S_x = (a_2 + ca_3 + a_4) - (a_0 + ca_1 + a_6),$$

$$S_y = (a_0 + ca_1 + a_2) - (a_6 + ca_5 + a_4)$$

з константою $c = 2$.

Або у вигляді згортки ядер виду [23]:

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оператор Собеля є одним з найбільш широко вживаних графічних операторів. В результат застосування оператора Собеля в кожній точці зображення є або вектор градієнта яскравості в цій точці, або його норма.

Оператор Прюїтта (*Prewitt operator*) використовує такі ж самі рівняння, як і в операторі Собеля, але з константою $c = 1$.

Ядра оператора Прюїтта [23]:

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оператор Прюїтта обчислює максимальний відгук на множині ядер згортки для знаходження локальної орієнтації границі в кожному пікселі.

Алгоритм оператора Шарра (*Scharr operator*) подібний алгоритмом оператору Собеля, за винятком використання іншої матриці [25]:

$$S_x = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \end{bmatrix}, S_y = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

В наведених вище матрицях згортки вага центральних пікселів переважає вагу крайніх пікселів у 3.3 рази.

Використання класичних методів виявлення розривів може не дати очікуваного результату, а тому для дуже зашумлених зображень використовуються більш великі оператори. Такий як наприклад, оператор «піраміда», ядра якого наведені нижче:

$$H_x = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, H_y = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно до оператора «піраміда», оператор Прюїтта 7×7 використовує більш великі ядра порівняно зі стандартним оператором Прюїтта описаним вище. Ядра оператора Прюїтта 7×7 наведені нижче:

$$H_x = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, H_y = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Перетворення Лапласа-Гауса (*The Laplacian of the Gaussian (LoG)*) складається з двох кроків. На першому кроці виконується згладжування зображення оператором Гауса, а на другому – обчислюється оператор Лапласа, що призводить до виявлення подвійних контурів. Визначення контурів зводиться до знаходження нулів на перетині подвійних границь. Комп'ютерна реалізація функції Лапласа зазвичай здійснюється через наступну маску [26-27]:

$$G_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, G_y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Лапласіан Гаусіана зазвичай використовується для знаходження пікселя на темній або світлій стороні контуру.

Різницею гаусіанів (*The Difference of Gaussians (DoG)*) називають зображення, отримане шляхом попіксельного віднімання одного гаусіана вихідного зображення з гаусіана з іншим радіусом розмиття. Цей алгоритм широко застосовується в області машинного бачення і працює досить швидко. Найбільш важливі параметри фільтра – два радіуси. Їх найлегше вказати дивлячись на вікно перегляду. Збільшення малого радіусу призводить до широких границь, а зменшення великого радіусу збільшує межу, за яким визначається межа це чи ні. У більшості випадків кращі результати виходять коли радіус 2 менше радіуса 1. При світлих зображеннях з темним тлом зворотні значення дають кращі результати.

Різниця гаусіанів для зображення I є функція вигляду [27-28]:

$$\Gamma_{\sigma_1, \sigma_2}(x, y) = I \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}} - I \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (1.4)$$

Оператор Кірша або компасний оператор Кірша (*Kirsch compass kernel*) – це метод виявлення розривів, який знаходить максимальну величину розриву на декількох заданих напрямках.

В основі оператора лежить просте ядро, яке обертається з кроком в 45 градусів в усіх восьми напрямках компасу: північ (N), північний захід (NW), захід (W), південний захід (SW), південь (S), південний схід (SE), схід (E).

Величина розриву згідно оператора Кірша розраховується як максимальної величини по всіх напрямках [29-30]:

$$H_{n,m} = \max_{z=1,\dots,8} \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 k_{i,j}^{(z)} f_{n+i,m+j}, \quad (1.5)$$

де z – номер, який позначає напрям.

Ядра для кожного напрямку компасу наведені нижче [29-30]:

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad NE = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad NW = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \\
 W &= \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad SW = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad SE = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Напрямок розриву визначається ядром, яке дає найбільше величину розриву.

Оператор Робінсона (*Robinson compass mask*) аналогічний оператору Кірша, але потребує менше обчислювальних затрат, бо оперує коефіцієнтами 0, 1 та 2. Ядра оператора симетричні відносно напрямку вісі, яка сама містить нулі. Згідно методу спочатку обчислюється тільки перша четвірка операторів, обчислення інших чотирьох операторів здійснюється тільки тоді, коли перша четвірка не дала результатів. Ядра оператора Робінсона мають наступний вигляд [31]:

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad NE = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad NW = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \\
 W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad SW = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad SE = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Величина розриву в методі Робінсона визначається аналогічно методу Кірша за формулою [31]:

$$H_{n,m} = \max_{z=1,\dots,8} \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 r_{i,j}^{(z)} f_{n+i,m+j}. \quad (1.6)$$

Оператор виявлення розривів Фрея-Чена (*Frei-Chen operator*) це 3x3 оператор, але застосовує в цілому 9 масок згортки із зображенням. Це унікальні маски, які містять всі базисні вектори. Це означає, що область 3x3 представляється у вигляді зваженої суми 9 масок вигляду [32]:

$$G_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad G_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_6 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$G_7 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_8 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad G_9 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перші чотири маски використовуються для виявлення субпростору розривів, наступні чотири використовуються для виявлення субпростору ліній і останній маска використовується для обчислення середнього значення. Крім того, оператори G_1 та G_2 виявляють середнє значення градієнту, G_3 та G_4 виявляють хвилі, G_5 та G_6 виявляють лінії, а G_7 та G_8 є дискретною формою Лапласіана.

Далі знаходиться величина [32]

$$\theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{M}{S}}\right), \quad (1.7)$$

$$M = \sum_{k=1}^4 (G_k \cdot I)^2 \text{ та } S = \sum_{k=1}^9 (G_k \cdot I)^2.$$

Потім, якщо отримана величина θ виявляється достатньо малою, знаходиться величина G вигляду [32]:

$$G = \frac{M}{(B, B)}, \quad (1.8)$$

де B – це піксель, який розглядається на даному кроці.

Якщо отримана величина G виявиться більша за величину заздалегідь заданого порогового значення, то точка B вважається точкою розриву.

Оператор Кені (*Canny operator*) є одним з найпопулярніших алгоритмів виявлення розривів. Важливим кроком у даному алгоритмі є усунення шуму на контурах, який значною мірою може вплинути на результат, при цьому необхідно максимально зберегти границі. Для цього необхідний ретельний підбір порогового значення при обробці даним методом.

Нижче наведено алгоритм виявлення розривів Кені [33]:

Крок 1. Згладжування. Розмиття вихідного зображення за допомогою функції Гауса. Оператор Кені використовує фільтр, який може бути добре наближений до першої похідної гаусіани $\sigma = 1.4$ [34]:

$$G = \frac{1}{159} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Крок 2. Пошук напрямку градієнта. На отриманому розмитому зображенні шукаються значення градієнта. Зазвичай для цього

використовується метод Собеля. Окрім значень $M_{i,j}$, отриманих оператором Собеля, окремо знаходяться згортки з ядрами G_X та G_Y з формули (6) для знаходження кута напрямку градієнта за такою формулою [34]:

$$\Theta_{i,j} = \arctan\left(\frac{G_Y(i,j)}{G_X(i,j)}\right). \quad (1.10)$$

Кут напрямку вектора градієнта округляється і може набувати таких значень: 0, 45, 90, 135.

Крок 3. Придушення немаксимумів (*Non-Maxima Suppression*). Тільки локальні максимуми відзначаються як границі;

Крок 4. Подвійна порогова фільтрація. Отримана множина точок ділиться на три підмножини точок: розриву, неоднозначності та точки, які не належать до ліній розриву. Поділ проводиться за допомогою двох заданих значень:

T_{\min} – порогове значення, нижче якого вважається, що точка не належить лінії розриву;

T_{\max} – порогове значення, вище якого вважається, що точка належить лінії розриву.

Точки, які потрапляють до діапазону $[T_{\min}, T_{\max}]$, належать області неоднозначності.

Крок 5. Гістерезис. До області точок, які належать лініям розриву, додаються точки із області неоднозначності за умови, якщо поряд з цією точкою розташована точка із області точок розриву.

На відміну від операторів Робертса і Собеля, алгоритм Кені не надто сприйнятливий до шуму на зображенні.

В цілому, оператор Ротвелла дуже схожий на оператор Кені, різниця між ними полягає в тому, що алгоритм Ротвелла використовує процедуру витончення країв замість придушення немаксимумів, і що динамічне визначення порогу використовується замість гістерезису.

Нижче наведено основні етапи алгоритму Ротвелла [35]:

Крок 1. Первинна обробка. Зображення згладжується за допомогою дискретної вибірки двовимірного фільтра Гауса. Потім знаходиться градієнт для кожної точки зображення. S_x і S_y обчислюється за допомогою центральних кінцевих різниць. $|\Delta S|$ і θ обчислюються для кожної точки за допомогою наступних формул [35]:

$$|\Delta S| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}, \quad (1.11)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{S_y}{S_x}\right). \quad (1.12)$$

Крок 2. Субпіксельна локалізація. Для кожного пікселя, у якого $|\Delta S| > t$ (де t – це наперед задане порогове значення), де фактично будуть лежати крайові пікселі, використовується техніка пошуку локальних максимумів оператора Кені. Місця крайових пікселів знайдені шляхом оцінки перетину другої похідної з нулем у напрямку нормалі до контуру дотичній.

Крок 3. Визначення порога зображення. Після визначення $|\Delta S|$ і θ з'являється проблема поділу крайових пікселів і інших точок. Це робиться за допомогою процедури динамічного визначення порогу, тобто оператор визначає значення порога, яке варіюється залежно від зображення.

Крок 4. Витончення країв. Процес визначення порогу дає зображення множини елементів Σ , членами якого є пов'язані крайові пікселі. Елемент є «сусідом» іншого елемента, якщо він знаходиться на відстані не більше одного пікселя від нього, тобто, належить квадрату 3×3 , центром якого є другий елемент. Підмножини тоншають до ланцюгів одиничної товщини. Отримана множина позначається Σ_t .

Крок 5. Отримання топологічного опису. Враховуючи Σ_t , робиться топологічний опис з дискретних зображень і з ним асоціюється субпіксельна геометрична інтерпретація.

На рисунку 1.1 наведено приклад знаходження розривів на цифровому зображенні.

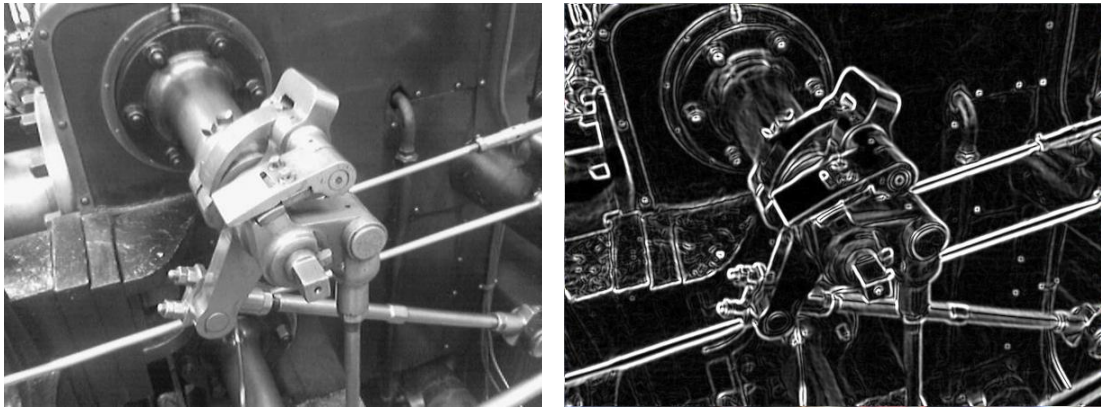


Рисунок 1.1 – Приклад знаходження розривів на зображенні

1.2. Огляд методів попередньої обробки зображень

Для поліпшення результатів роботи методів обробки зображень застосовують методи попередньої обробки зображень. До таких методів відносяться: лінійне контрастування, соляризація, препарування, еквалізація.

Основна ідея методів попередньої обробки зображень полягає в тому, що існує залежність вигляду [36]:

$$y_{i,j} = f_{i,j}(x_{i,j}), \quad (1.13)$$

що дозволяє по значенню вхідного сигналу знайти значення вихідного сигналу. У загальному випадку вид або параметри функції $f_{i,j}$, яка описує обробку, залежать від поточних координат. При цьому обробка є неоднорідною. Однак, у більшості практичних процедур використовується однорідна поелементна обробка. У цьому випадку індекси i та j у виразі можуть бути відсутні. При

цьому залежність між яскравостями вхідного і обробленого зображень описується однаковою для всіх точок зображення функцією [36]:

$$y = f(x). \quad (1.14)$$

1.2.1 Лінійне контрастування зображення

В основі цього методу лежить поелементне перетворення зображення вигляду [36]

$$y = a \cdot x + b, \quad (1.15)$$

де a та b визначаються за допомогою такої системи [36]:

$$\begin{cases} y_{\min} = a \cdot x_{\min} + b; \\ y_{\max} = a \cdot x_{\max} + b, \end{cases} \quad (1.16)$$

де $[y_{\min}, y_{\max}]$ – максимально допустимий діапазон яскравості;

$[x_{\min}, x_{\max}]$ – діапазон яскравості зображення, тобто мінімальне та максимальне значення яскравості на зображенні.

Враховуючи вищесказане перетворення матиме вигляд:

$$y = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} (y_{\max} - y_{\min}) + y_{\min}. \quad (1.17)$$

Таке перетворення дозволяє використати весь допустимий діапазон яскравості (наприклад, інтервал $[0, 255]$, якщо для кожного пікселя зображення в системі виділяється 1 байт пам'яті).

1.2.2 Солярізація зображення

В даному методі обробки перетворення має вигляд [36]:

$$y = kx(x_{\max} - x), \quad (1.18)$$

де x_{\max} – максимальне значення вхідного сигналу;

k – параметр, який відповідає за динамічний діапазон вихідного зображення.

Функція, що описує це перетворення є квадратичною параболою. При $y_{\max} = x_{\max}$ динамічні діапазони вхідного і вихідного зображень співпадуть, що може бути досягнуто при $k = 4 / x_{\max}$ [36].

На рисунку 1.2. наведено приклад лінійного контрастування зображення.



Рисунок 1.2 – Приклад лінійного контрастування зображення [36]

Суть солярізації полягає у тому, що ділянки вхідного зображення, що мають рівень білого або близький до нього рівень яскравості, після обробки мають рівень чорного. При цьому рівень чорного зберігають ділянки зображення, що мали його у вхідному зображенні. Рівень білого у вихідному зображенні мають ті ділянки зображення, що мали на вході рівень сірого.

1.2.3 Препарування зображення

Препарування – це цілий клас поелементних перетворень зображення.

Характеристики застосовуваних на практиці процедур зміни яскравості і контрасту наведені на рисунку 1.3.

Препарування часто використовується в автоматичних системах обробки візуальної інформації, оскільки підготовлений при цьому препарат може містити всю інформацію, необхідну для подальшої (вторинної) обробки.



Рисунок 1.3 – Приклад соляризації зображення [36]

1.2.4 Еквалізація гістограми зображення

Під час поелементних перетворень відбувається зміна закону розподілу ймовірностей, що описує зображення. При лінійному контрастуванні зберігається вид щільності ймовірності, проте в загальному випадку, за довільних значень параметрів лінійного перетворення, змінюються параметри щільності ймовірності перетвореного зображення.

У практиці обробки зображень перетворення розподілів виконують у два етапи.

На першому етапі вимірюється гістограма початкового зображення. Для цифрового зображення, шкала яскравостей якого належить дискретному

діапазону від 0 до 255, гістограмою є таблиця з 256 чисел. Кожне з них показує кількість точок на зображенні, що мають дану яскравість.

Розділивши всі числа цієї таблиці на загальний розмір вибірки, рівний числу використаних точок зображення, отримують оцінку розподілу ймовірностей яскравості зображення. Позначимо цю оцінку через [36]

$$p_f(j), j = \overline{0, 255}. \quad (1.19)$$

Тоді функція розподілу матиме вигляд [36]:

$$F_f(j) = \sum_{i=0}^j p_f(i). \quad (1.20)$$

На другому етапі виконується нелінійне перетворення, що забезпечує необхідні властивості вихідного зображення. Замість невідомого істинного інтегрального розподілу використовується його оцінка, основана на гістограмі.

Приклади нелінійного перетворення наведено на рисунку 1.4.

З урахуванням цього всі методи поелементного перетворення зображень, метою яких є видозміна законів розподілу, отримали назву гістограмних методів. Зокрема, перетворення, при якому вихідне зображення має рівномірний розподіл, називається еквалізацією (вирівнюванням) гістограм.

Слід також відмітити, що процедури перетворення гістограм можуть бути застосовані як до всього зображення в цілому, так і для окремих його фрагментів. Останнє може бути корисним при обробці так званих нестационарних зображень, ділянки яких істотно відрізняються за своїми характеристиками. В цьому випадку можна досягти кращого результату, застосовуючи гістограмну обробку до кожної з ділянок окремо [36].

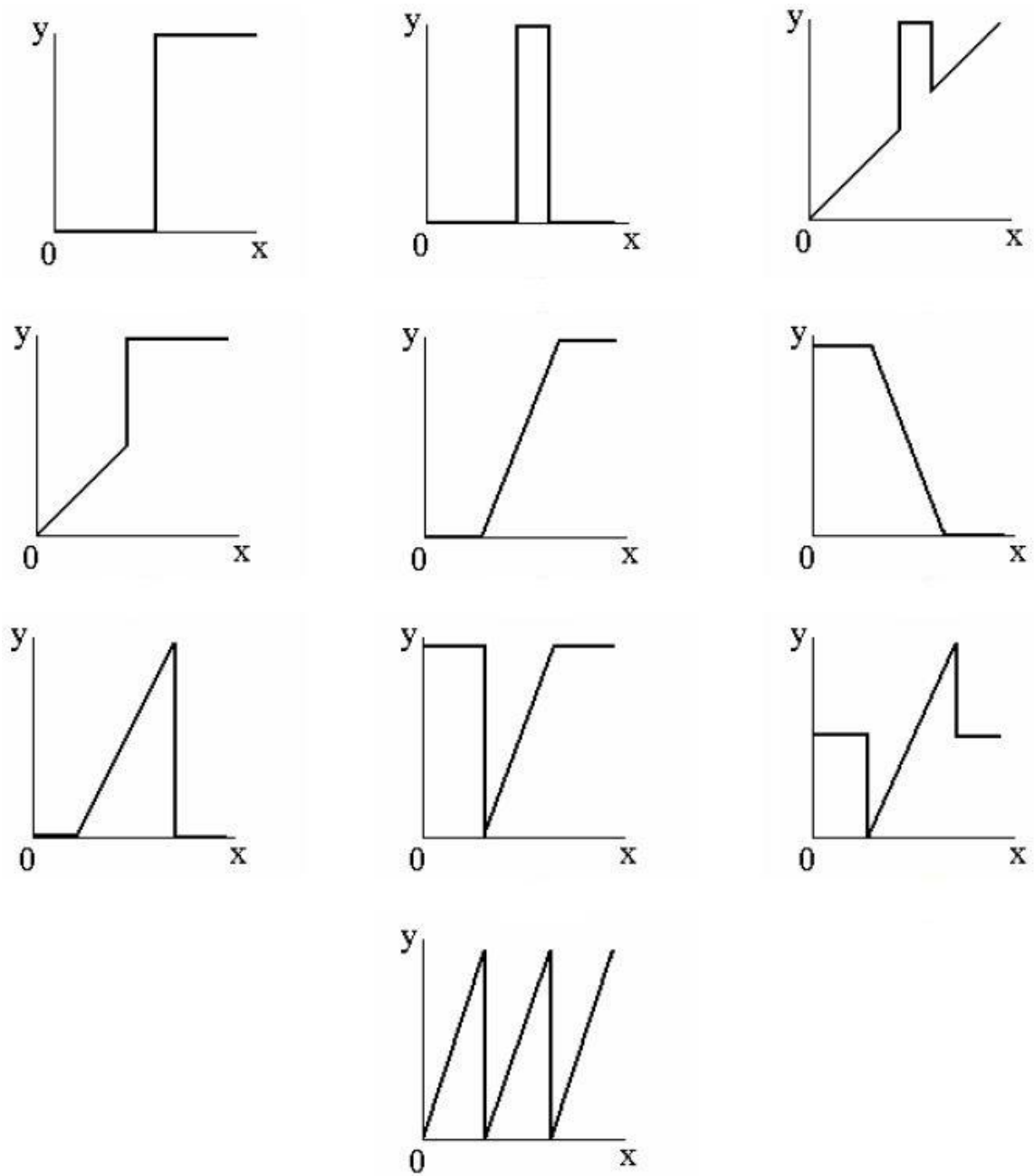


Рисунок 1.4 – Приклади перетворень, що використовуються при підготовці зображень

[36]

1.3 Методи відновлення пошкоджених зображень

Існують методи відновлення пошкоджених зображень, що дозволяють видаляти дефектні ділянки, за рахунок аналізу відомих областей. Наприклад, на рис. 1.5(а) показана фотографія з потертостями і подряпинами, на рис. 1.5(б) показана маска дефектних областей, за якими буде проводитися відновлення.

Результатом застосування методу до таких вхідних даних є зображення, представлене на рис. 1.5(в), на якому практично непомітні ділянки, де були присутні дефекти.

Більшість методів відновлення зображень можна умовно поділити на наступні групи [38]:

- текстурні;
- шаблонні (Exemplar-based method, EBM);
- основані на рівняннях в частинних похідних (Partial differential equation, PDE);
- гібридні.

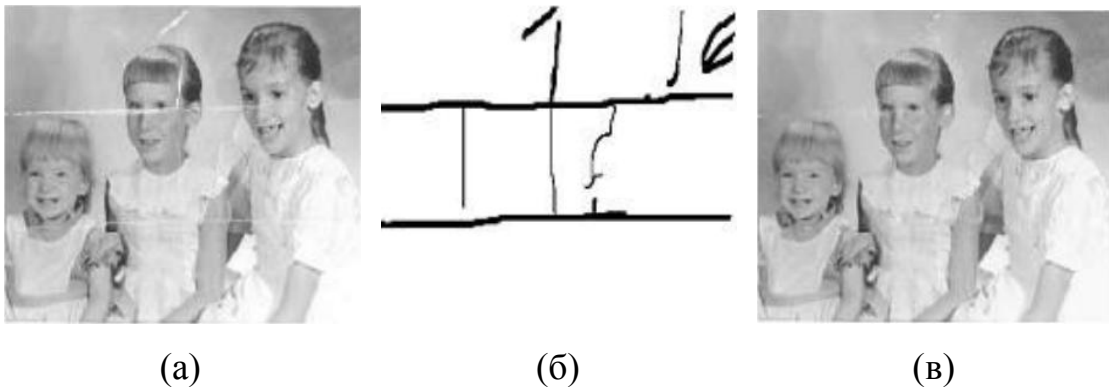


Рисунок 1.5 – Приклад відновлення дефектів на зображенні [37] (а – вихідний знімок; б – маска пошкодженої області; в – результат відновлення)

1.3.1 Текстурні методи відновлення пошкоджених зображень

Одними з найперших методів відновлення зображень використовували алгоритми на основі синтезу текстур [39-43]. Текстура генерувалась шляхом копіювання інформації з границі пошкодженої області в її центр. Наприклад, в роботі [44] використовується модель випадкових полів Маркова для знаходження розподілу пікселів на границі пошкодженої області для її відновлення. Однак даний метод працює тільки на дуже обмеженому наборі зображень з однотонними текстурами, в іншому випадку відновлюване зображення виглядає неприродньо.

В роботі [45] було запропоновано розширений варіант алгоритму швидкого синтезу текстур за рахунок використання малих блоків текстур і поширення їх на пошкоджену ділянку.

В роботі [46] представлений метод відновлення пошкоджених областей шляхом копіювання текстур невеликими блоками з схожою області, яка визначається користувачем. До цієї групи слід також віднести метод інтерполяції, який відновлює дефектні ділянки за рахунок спрямованого застосування медіанної фільтрації від кордонів пошкодженої області до її центру [47].

В роботі [48] авторами наведено алгоритм відновлення зображення на основі аналізу та синтезу текстур, згідно якого зображення спочатку аналізується методом аналізу головних компонент (Principal Component Analysis (PCA)), а потім методом векторного квантування (Vector Quantization (VQ)) знаходяться невідомі значення.

Час роботи більшості текстурних методів може вимірюватися від декількох хвилин до декількох годин, в залежності від розмірів зображення і пошкодженої області. Для прискорення процесу відновлення, Oliveira і співавтори [49] запропонували алгоритм відновлення на основі використання просторової обробки. Відновлення проводилося за рахунок дифузії шляхом згортки з ядром Гауса. Кількість ітерацій визначається граничним значенням змін між сусідніми ітераціями, або може бути вказано користувачем. Даний метод не здатний відновлювати текстуру або лінійні структури і призводить до розмилення зображення, проте добре придатний для відновлення малих ділянок, простий в реалізації, швидко працює і дозволяє зберігати основну кольорову інформацію на зображенні.

Існує безліч методів інтерполяції на основі синтезу текстур, які можуть відновлювати області з певними параметрами: монотонні, області з градієнтом або текстуровані які складаються з повторюваних блоків. Але при цьому потрібно точна ручна установка параметрів і вказівки як відновити конкретну

область, тому в основному ці методи спрямовані на виправлення дуже маленьких похибок на зображеннях, і не здатні працювати на великих областях.

1.3.2 Шаблонні (структурні) методи відновлення пошкоджених зображень

Шаблонний метод, заснований на пошуку схожих блоків (Exemplar-based method, EBM), був запропонований Criminisi і співавторами в [50]. Принцип роботи даної групи методів полягає в обчисленні пріоритету для кожного пікселя з подальшим пошуком найбільш схожого квадратного блоку на вихідному зображення, та копіюванні його в пошкоджену область. Порядок відновлення пікселів є одним з найважливіших моментів даного методу і визначається величиною пріоритету пікселів, що знаходяться на границі. Пріоритет залежить від значень градієнта в точці $D(p)$ та коефіцієнта довіри (кількості відомої інформації) $C(p)$ в околиці пікселя, і обчислюється таким чином [50]:

$$P(p) = D(p)C(p), \quad (1.21)$$

$$C(p) = \frac{\sum_{q \in \Psi_p} C(q)}{|\Psi_p|}, \quad (1.22)$$

$$D(p) = \frac{|\nabla I_p^\perp n_p|}{\alpha}, \quad (1.23)$$

де p – поточний піксель;

$C(p)$ – коефіцієнт достовірності;

$D(p)$ – коефіцієнт градієнта;

$|\Psi_p|$ – площа блоку з центром в пікселі;

∇I_p^\perp – вектор, ортогональний градієнту в точці;

n_p – вектор, ортогональний кордон в точці;

α – коефіцієнт нормування.

Таке визначення порядку заповнення дозволяє в першу чергу відновлювати лінійні структури, а потім вже решту ділянок зображення, тим самим, виключаючи розмиття різких перепадів яскравості, властивих текстурним методів відновлення.

До недоліків даного методу слід віднести:

- поява артефактів при відновленні криволінійних структур;
- помилки при відсутності схожих блоків;
- чутливість до вибору розміру блоку.

В роботі [51] запропонований метод, заснований на використанні цільової функції, яка показує відмінність між областю з максимальним пріоритетом і найбільш схожим блоком за допомогою виразу виду [51]

$$Q = \sqrt{\sum (\Psi_p - \Psi_q)^2}, \quad (1.24)$$

З огляду на це, вирази для розрахунку величини довіри і пріоритету матимуть вигляд [51]:

$$C(q) = C(p)E^{-\rho}, \quad (1.25)$$

$$P(p) = (wC(p) + (1-w)L(p))D(p), \quad (1.26)$$

де w – лінійний фактор;

$L(p)$ – комбінаторний фактор;

$$0 \leq w \leq 1, \quad 0 \leq L(p) \leq 1.$$

В роботі [52] пропонується метод, який дозволяє підвищити якість відновлення криволінійних границь. Для цього вираз розрахунку коефіцієнта градієнта набуває вигляду [52]

$$D(p) = \alpha |n_p \nabla I_p^\perp| + \beta \left| \nabla \frac{\nabla I_p}{|\nabla I_p|} \right|, \quad (1.27)$$

де α , β – комбінаторний і викривлений комбінаторний фактор.

З урахуванням вище викладеного вираз для пріоритету матиме вигляд [52]

$$P(p) = (wC(p) + (1-w)L(p))\alpha |n_p \nabla I_p^\perp| + \beta \left| \nabla \frac{\nabla I_p}{|\nabla I_p|} \right|, \quad (1.28)$$

$$0 \leq w \leq 1, \quad 0 \leq L(p) \leq 1.$$

Недоліком є залежність ефективності реконструкції зображень від вибору розміру блоку для пошуку подібності.

В роботі [53] представлена модифікація методу на основі пошуку схожих блоків, алгоритм роботи якого складається з двох етапів. На першому етапі проводиться сегментація вихідного зображення на області, що мають подібну структуру, на другому етапі – пошук схожих блоків і відновлення зображень в сегментованих областях.

В роботі [54] було запропоновано ітераційний алгоритм для заповнення області G , який апроксимує невідомі області та компоує фрагменти зображення.

Особливо виділяється робота [55], де на відміну від всіх вищеописаних робіт, для заповнення пошкодженої області використовується база даних зображень, яка містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Крім відновлення окремих зображень, в даний час вирішуються задачі реконструкції кадрів відеопотоку, на яких також можуть бути присутні різні дефекти та спотворення [56-57].

В роботі [57] пропонується підхід до реконструкції кадрів шляхом пошуку схожого неушкодженого блоку на сусідніх кадрах і копіювання

інформації на пошкоджений кадр з урахуванням компенсації руху. До недоліків даного методу слід віднести те, що ефективність реконструкції залежить від параметрів методу передбачення руху, оскільки на сцені, що швидко змінюється, сусідні кадри можуть значно відрізнятись.

1.3.3 Методи відновлення пошкоджених зображень, оснований на розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними

Метод, оснований на розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними (Partial Differential Equations, PDE), був запропонований в роботах Bertalmio і співавторів [37, 58]. В основі даної групи методів лежить ітеративний процес видалення дефектів на зображенні шляхом дифузії зображення з вихідної неспотвореної області в пошкоджені ділянки.

Процес дифузії описується наступним виразом [58]

$$I_{i,j}^{n+1} = I^n(i, j) + \Delta t I_t^n(i, j), \quad (1.29)$$

де n – номер ітерації;

(i, j) – координати пікселя;

Δt – швидкість зміни;

$I^{n+1}(i, j)$ – оновлене зображення $I^n(i, j)$;

$I_t^n(i, j)$ – являє собою зображення оброблене оператором Лапласа і може бути записано як [58]

$$I_t = \nabla(\Delta I)\nabla^\perp I, \quad (1.30)$$

де $\nabla^\perp I$ – напрямок лінійної структури;

$\nabla(\Delta I)$ – оператор Лапласа, що застосовується до градієнту.

Основним недоліком такого підходу є неможливість відновлення великих текстурованих областей через появу сильного «розмиття» в процесі дифузії, що призводить до викривлення різких перепадів яскравості на зображенні.

Продовженням ідеї Bertalmio є робота [59], в якій представлений алгоритм Total Variation, що використовує вираз Ейлера-Лагранжа та анізотропну дифузію. Зображення відновлюється за допомогою функціоналу [59]:

$$\min E(\bar{I}) = \int_{\delta I} \nabla \bar{I} . \quad (1.31)$$

Мінімізація даного функціоналу еквівалентна поєднанню рівнів зображення з найменшим середньоквадратичним відхиленням.

Дана модифікація краще зберігає лінійні структури на зображенні, але все також не вирішує проблему розмиття.

У роботах [60-61] модель Total Variation була розширена до моделі Curvature Driven Diffusion, шляхом додавання інформації про градієнт в кожній точці зображення, що знижує, але не виключає ефект розмиття. Автори роботи [62] запропонували інший підхід, оснований на PDE, – алгоритм анізотропної вектор-регуляризації.

Підводячи підсумок можна зробити висновок, що основним недоліком методів, основаних на розв'язанні диференційних рівнянь з частинними похідними є розмиття різких перепадів яскравості і нездатність відновлювати текстурні області або вигнуті контури об'єктів, отже ця група методів може з високою ефективністю застосовуватися тільки для видалення невеликих дефектів на зображенні.

1.3.4 Гібридні методи відновлення пошкоджених зображень

Гібридні методи засновані на застосуванні декомпозиції та морфологічного аналізу зображення, з метою класифікації пошкоджених

ділянок на гладкі і текстуровані поверхні, з подальшим застосуванням методів відновлення в залежності від типу кожної ділянки [63-68].

Відповідно для гладких поверхонь використовуються методи, основані на розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними (п. 1.3.3), а для текстурних областей – методи на основі синтезу текстур (п. 1.3.1) або пошуку схожих блоків (п. 1.3.2).

В роботі [65] зображення представляється у вигляді суми двох функції що складаються з структурної і текстурної складової, при цьому структура зображення відновлюється за допомогою методу PDE, а текстурна частина – методом синтезу текстур.

В роботі [53] представлений метод відновлення, який сегментує текстурну область зображення, тим самим зменшуючи площу пошуку схожих блоків, що підвищує швидкість обробки зображення.

1.3.5 Швидкі напівавтоматичні методи відновлення пошкоджених зображень

Недоліком більшості представлених вище методів є їх висока обчислювальна складність, тому в деяких працях застосовують алгоритми для прискорення обчислень. В роботі [69] було наведено метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури. Метод Fast Marching Method (FMM), наведений у [70], розглядає невідому область зображення як набір рівнів та використовує їх для відновлення зображення.

Підводячи підсумок аналізу методів відновлення пошкоджених зображень можна зробити висновок, що існуючі методи не дозволяють домогтися прийнятної якості реконструкції зображень. В якості основних недоліків слід виділити наступне:

–методи на основі синтезу текстур можуть зберігати лише приблизну структуру зображення, і не здатні реконструювати лінійні або текстурні області;

– методи, основані на розв'язанні диференційних рівнянь з частинними похідними, дають можливість відновлювати маленькі пошкоджені ділянки, але при відновленні великих призводять до появи значної рівня розмиття границь об'єктів;

– методи, засновані на пошуку схожих блоків, не призводять до розмиття зображення, проте можуть викликати спотворення і артефакти на межах об'єктів, і схильні до помилок при відновленні криволінійних структур.

Висновки до розділу 1

1. Проведено аналіз сучасних методів обробки цифрових зображень: методів попередньої обробки зображень, методів виявлення розривів на зображеннях, методів відновлення пошкоджених зображень.

2. Проведений аналіз показує, що використання існуючих методів цифрової обробки сигналів не дозволяє ефективно відновлювати зображення поверхонь, отриманих методами сейсморозвідки, радіолокації, дистанційного зондування планети і т.п.

3. Аналіз літературних джерел показує, що існуючі на даний момент методи цифрової обробки сигналів, вносять значні спотворення при відновленні втрачених даних, такі як розмиття різких перепадів яскравості та поява артефактів на границях областей.

4. У результаті проведеного аналізу сформульовано такі основні задачі:

– побудувати математичну модель освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між паралельними смугами з використанням узагальнених глобальних формул Шепарда, Шепарда-Литвина, Лагранжа та Ерміта;

– побудувати математичну модель освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації операторами інтерстріпації між смугами, розташованими під довільним кутом до осей координат;

– побудувати математичну модель освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, що мають криволінійні границі;

– побудувати математичну модель освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами із границями у вигляді замкнутого контуру;

– побудувати математичну модель освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами із врахуванням структури тіла на відомих областях.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [1, 3, 4, 9].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [14-70].

2 МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ ПОВЕРХНІ ДВОВИМІРНОГО ТІЛА ЗА ВІДОМОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ ПРО ЦЮ ПОВЕРХНЮ НА СИСТЕМІ СМУГ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРСТРІПАЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

2.1 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг, обмежених прямими паралельними осям координат, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних

Нехай нам задана функція $u = f(x, y)$ двох змінних і система ліній $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$ або $\Gamma_k : x = x_k(t), y = y_k(t), k = \overline{1, M}; t \in [\alpha_k, \beta_k]$.

Означення 2.1 [71-72]. Слідом функції $u = f(x, y)$ на лінії $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$ будемо називати функцію однієї змінної (x , або y , або параметра t) $f_k(x)$ або $f_k(y)$ або $f_k(t) = f(x_k(t), y_k(t))$, яка у кожній точці цієї лінії Γ_k приймає такі ж значення, як і функція $u = f(x, y)$. В математиці цей факт записують так:

$$f|_{\Gamma_k} = f_k|_{\Gamma_k}, k = \overline{1, M}.$$

Означення 2.2 [73-74]. Інтерполяцією функції $f(x, y)$ (від англ. *inter* – між, *pole* – полюс) називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y)$ в довільних точках (x, y) за допомогою значень $z_k = f(x_k, y_k)$ цієї функції у заданій системі точок $(x_k, y_k), k = \overline{1, M}$.

Означення 2.3 [75-76]. Інтерлінацією функції $f(x, y)$ (від англ. *inter* – між, *line* – лінія) називається відновлення (можливо, наближене) функції

$f(x, y)$ у точках між лініями $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0, k = \overline{1, M}$ за допомогою її слідів $f_k|_{\Gamma_k} = f|_{\Gamma_k}, k = \overline{1, M}$ на цих лініях.

Означення 2.4. Інтерстріпацією функції $f(x, y)$ (від англ. *inter* – між, *stripe* – смуга) називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y)$ між смугами за допомогою її слідів на границях смуг.

Позначимо оператор інтерстріпації через

$$\Theta f(x, y) = \Theta(x, y; \{f(x, y)\}; \{G_k\}), k = \overline{1, n},$$

де G_k – задана система смуг, взагалі кажучи перетинних, на кожній із яких задаються деякі зображення у вигляді функцій $f(x, y)$.

Означення 2.5. Якщо $f(x) \in C^r(\mathbb{R}^n), r \geq n \geq 1$ та $O(\{\varphi_{k,p}\}, x) \in C^r(\mathbb{R}^n)$, то оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати операторами, що зберігають клас диференційованості $C^r(\mathbb{R}^n)$, якому належать наближувала функція $f(x)$. Інакше оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати операторами, які не зберігають клас диференційованості $C^r(\mathbb{R}^n)$, якому належить наближувана функція $f(x)$.

Вважаємо, що деяке зображення відоме не на всій поверхні Σ , а лише на системі m ($m \geq 2$) вертикальних смуг вигляду:

$$G_{1,k} = \{\alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1, m} \quad (2.1)$$

та (або) на системі n ($n \geq 2$) горизонтальних смуг вигляду:

$$G_{2,l} = \{\gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}]\}, l = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Об'єднання множин $G_{1,k}, k = \overline{1,m}$ та $G_{2,l}, l = \overline{1,n}$ дає область G непошкоджених ділянок зображення. Точки зображення, які не потрапили до G належать області пошкоджених точок

$$\begin{aligned}\bar{G} &= \mathbb{R}^2 \setminus G = \bar{G}_{1,k,k+1} \cup \bar{G}_{2,l,l+1}, \\ \bar{G}_{1,k,k+1} &= \{\beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1,m-1}, \\ \bar{G}_{2,l,l+1} &= \{\delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}, x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}]\}, l = \overline{1,n-1}.\end{aligned}$$

Нехай поверхня $\Sigma: z = f(x, y)$, $f(x, y) = C^{N,N}(\mathbb{R}^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$\begin{aligned}f(x, y)|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} &= f_{1,k}(x, y), \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, \\ f(x, y)|_{\gamma_l \leq y \leq \delta_l} &= f_{2,l}(x, y), \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}.\end{aligned}$$

При цьому

$$\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, k = \overline{1,m}, \gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1}, l = \overline{1,n},$$

$C^{N,N}(\mathbb{R}^2)$ – клас функцій, які мають неперервні частинні похідні $f^{(p,q)}(x, y)$ для $0 < p, q \leq N$.

2.1.1. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі неперетинних смуг, обмежених прямими паралельними вісі Oy

Вважаємо, що все зображення поверхні Σ відоме нам лише на системі горизонтальних смуг (2.1).

Якщо $\alpha_k = \beta_k$, $k = \overline{1, m}$, то ці смуги вироджуються в лінії.

Введемо до розгляду оператори

$$\Theta f(x, y) = \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & \alpha_k \leq x \leq \beta_k; \\ O_{1,k,k+1} f(x, y) & \beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}; 1 \leq k \leq m-1. \end{cases} \quad (2.3)$$

де оператор $O_{1,k,k+1} f(x, y)$ може бути представлений за допомогою поліномів Лагранжа:

$$O_{1,k,k+1} f(x, y) = H_{1,k,k+1}(x) f(\beta_k, y) + H_{2,k,k+1}(x) f(\alpha_{k+1}, y), \quad (2.4)$$

$$H_{1,k,k+1}(x) = \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}}, \quad H_{2,k,k+1}(x) = \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k}.$$

або за допомогою поліномів Ерміта [76]:

$$E_{1,k,k+1} f(x, y) = \sum_{s=0}^N \left[f^{(s,0)}(\beta_k, y) \ell_{1,k,s}(x) + f^{(s,0)}(\alpha_{k+1}, y) \ell_{2,k+1,s}(x) \right], \quad (2.5)$$

$$\ell_{1,k,s}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N \frac{(x - x_k)^s}{s!} \left\{ \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N} \right\}_{(x_k)}^{N-s-1},$$

$$\ell_{2,l,p}(y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N \frac{(y - y_l)^p}{p!} \left\{ \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N} \right\}_{(y_l)}^{N-p-1}.$$

Будемо вважати оператор (2.3) математичною моделлю поверхні Σ , яка на кожній із смуг (2.1) точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора (2.4) або (2.5).

Теорема 2.1. Якщо відстань між смугами $\alpha_{k+1} - \beta_k = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, то для відновлення поверхні оператор (2.3) можна записати у вигляді:

$$\Theta f(x, y) = f_{1,k}(x, y), \alpha_k \leq x \leq \beta_k, k = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

Доведення впливає безпосередньо з визначення оператора (2.3).

Теорема 2.2. Оператор (2.3) має такі властивості:

$$\Theta f(\alpha_k, y) = f(\alpha_k, y), \Theta f(\beta_k, y) = f(\beta_k, y), k = \overline{1, m}. \quad (2.7)$$

Теорема 2.3. Оператор (2.4) для випадку двох довільних суміжних смуг i та j має такі властивості:

якщо $f_{1,i}(x, y) \in C(G_{1,i})$ та $f_{1,i+1}(x, y) \in C(G_{1,i+1})$, то результат відновлення поверхні Σ оператором $\Theta_{i,i+1}f(x, y) \in C(G_{1,i} \cup \overline{G_{1,i,i+1}} \cup G_{1,i+1})$.

Доведення. Очевидно, що функції $H_{1,i,i+1}(x)$ та $H_{2,i,i+1}(x)$ мають такі властивості:

$$\begin{aligned} H_{1,i,i+1}(x) \Big|_{x=x_i} &= 1, \quad H_{1,i,i+1}(x) \Big|_{x=x_{i+1}} = 0, \\ H_{2,i,i+1}(x) \Big|_{x=x_i} &= 0, \quad H_{2,i,i+1}(x) \Big|_{x=x_{i+1}} = 1. \end{aligned}$$

Тому

$$\Theta_{i,i+1}f(x, y) = \begin{cases} f_{1,i}(x, y) & (x, y) \in G_{1,i}; \\ O_{1,i,i+1}f(x, y) & (x, y) \in \overline{G_{1,i,i+1}}; \\ f_{1,i+1}(x, y) & (x, y) \in G_{1,i+1}, \end{cases}$$

має властивості $\Theta_{i,i+1}f(x, y) \in C(G_{1,i} \cup \overline{G_{1,i,i+1}} \cup G_{1,i+1})$, оскільки

$$f_{1,i}(x,y) \in C(G_{1,i}), f_{1,i+1}(x,y) \in C(G_{1,i+1}), O_{1,i,i+1}f(x,y) \in C(\overline{G}_{1,i,i+1}).$$

Теорему 2.3 доведено.

Теорема 2.4. Оператор (2.3) на системі з k смуг має такі властивості:

якщо $\forall f_{1,i}(x,y) \in C(G_{1,i}), i = \overline{1,k}$, то оператор $\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G})$.

Доведення. Оскільки згідно із твердженням теореми 2.3, справедливе твердження

$$\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_{1,i} \cup \overline{G}_{1,i,i+1} \cup G_{1,i+1}),$$

то

$$\Theta f(x,y) \in C\left(\bigcup_{i=1}^k G_{1,i} \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G}_{1,i,i+1}\right).$$

Оскільки $\bigcup_{i=1}^k G_{1,i} = G$ та $\bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G}_{1,i,i+1} = \overline{G}$, то

$$\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G}).$$

Теорему 2.4 доведено.

Теорема 2.5. Залишок наближення функції $f(x,y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$f(x,y) - \Theta f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in G_{1,i}, i = \overline{1,m}; \\ R_{i,i+1}f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{1,i,i+1}, i = \overline{1,m-1}, \end{cases}$$

$$R_{i,i+1}f(x,y) = H_{1,i,i+1}(x) \int_{\beta_i}^x \frac{\partial^r f(t,y)}{\partial t^r} \frac{(\beta_i - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt +$$

$$+H_{2,i,i+1}(x) \int_{\alpha_{i+1}}^x \frac{\partial^r f(t,y)}{\partial t^r} \frac{(\alpha_{i+1}-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$H_{1,i,i+1}(x) \frac{(\beta_i-x)^q}{q!} + H_{2,i,i+1}(x) \frac{(\alpha_{i+1}-x)^q}{q!} = 0.$$

Доведення. Той факт, що в областях $G_{1,i}$, $i = \overline{1, m}$ похибка наближення дорівнює нулю впливає безпосередньо з припущення.

$$f(x,y)|_{G_{1,k}} = f_{1,k}(x,y), \quad k = \overline{1, m}.$$

Нехай $r=1$. Тоді $R_{i,i+1}f(x,y)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} R_{1,i,i+1}f(x,y) &= H_{1,i,i+1}(x) \int_{\beta_i}^x \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} dt + H_{2,i,i+1}(x) \int_{\alpha_{i+1}}^x \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} dt = \\ &= H_{1,i,i+1}(x)[f(x,y) - f(\beta_i,y)] + H_{2,i,i+1}(x)[f(x,y) - f(\alpha_{i+1},y)] = \\ &= [H_{1,i,i+1}(x) + H_{2,i,i+1}(x)]f(x,y) - [H_{1,i,i+1}(x)f(\beta_i,y) + H_{2,i,i+1}(x)f(\alpha_{i+1},y)]. \end{aligned}$$

Оскільки

$$H_{1,i,i+1}(x) + H_{2,i,i+1}(x) = \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} + \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} = 1.$$

та маючи на увазі (2.4) маємо

$$R_{1,i,i+1}f(x,y) = f(x,y) - \Theta f(x,y). \quad (2.8)$$

Нехай $r = 2$. Тоді $R_{i,i+1}f(x, y)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 R_{2,i,i+1}f(x, y) &= H_{1,i,i+1}(x) \int_{\beta_i}^x \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} (\beta_i - t) dt + H_{2,i,i+1}(x) \int_{\alpha_{i+1}}^x \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} (\alpha_{i+1} - t) dt = \\
 &= H_{1,i,i+1}(x) \left[\left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} (\beta_i - t) \right) \Big|_{\beta_i}^x - \int_{\beta_i}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt \right] + \\
 &+ H_{2,i,i+1}(x) \left[\left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} (\alpha_{i+1} - t) \right) \Big|_{\alpha_{i+1}}^x - \int_{\alpha_{i+1}}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt \right] = \\
 &= \left[H_{1,i,i+1}(x)(\beta_i - t) + H_{2,i,i+1}(x)(\alpha_{i+1} - t) \right] \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \\
 &+ H_{1,i,i+1}(x) \int_{\beta_i}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt + H_{2,i,i+1}(x) \int_{\alpha_{i+1}}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt .
 \end{aligned}$$

Зважаючи, що

$$H_{1,i,i+1}(x)(\beta_i - x) + H_{2,i,i+1}(x)(\alpha_{i+1} - x) = 0$$

та маючи на увазі (2.8) маємо

$$R_{2,i,i+1}f(x, y) = R_{1,i,i+1}f(x, y) = f(x, y) - \Theta f(x, y).$$

Аналогічно справедливе також для $r > 2$.

Теорему 2.5 доведено.

Приклад 2.1. Нехай зображення поверхні

$$f(x, y) = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y. \quad (2.9)$$

описується функціями на смугах:

$$f(x, y)|_{-3 \leq x \leq -2} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x, y)|_{-1 \leq x \leq 1} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x, y)|_{2 \leq x \leq 3} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y.$$

На рисунку 2.1 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні на системі вертикальних смуг. На рисунку 2.2 наведено результат відновлення поверхні (2.8) за допомогою оператора (2.3)

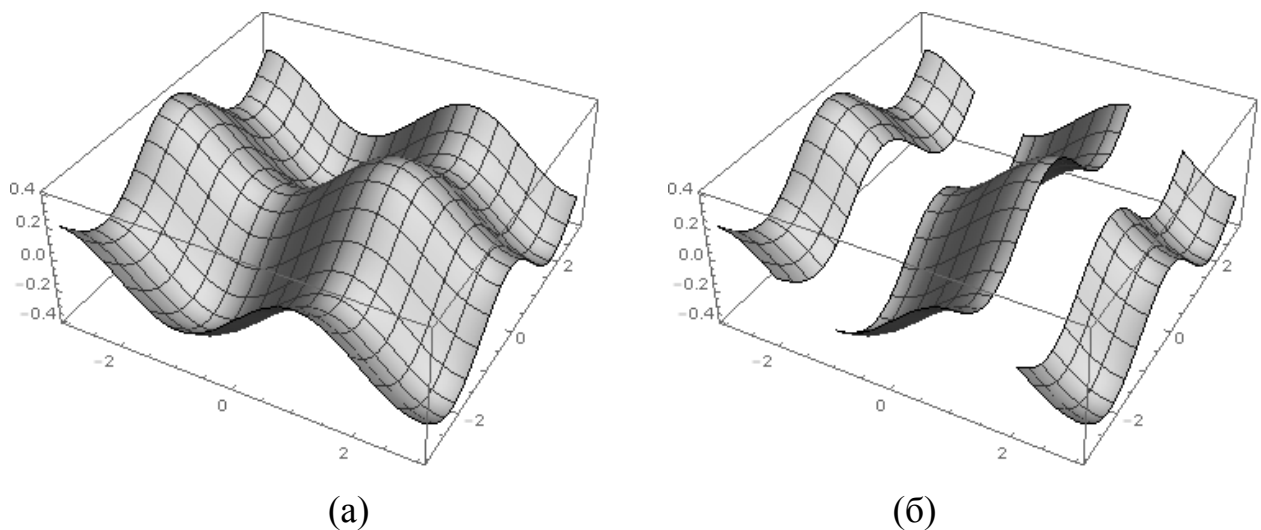


Рисунок 2.1 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні на системі вертикальних смуг)

2.1.2 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі неперетинних смуг, обмежених прямими паралельними вісі Ox

Вважаємо, що все зображення поверхні Σ відоме нам лише на системі горизонтальних смуг (2.2).

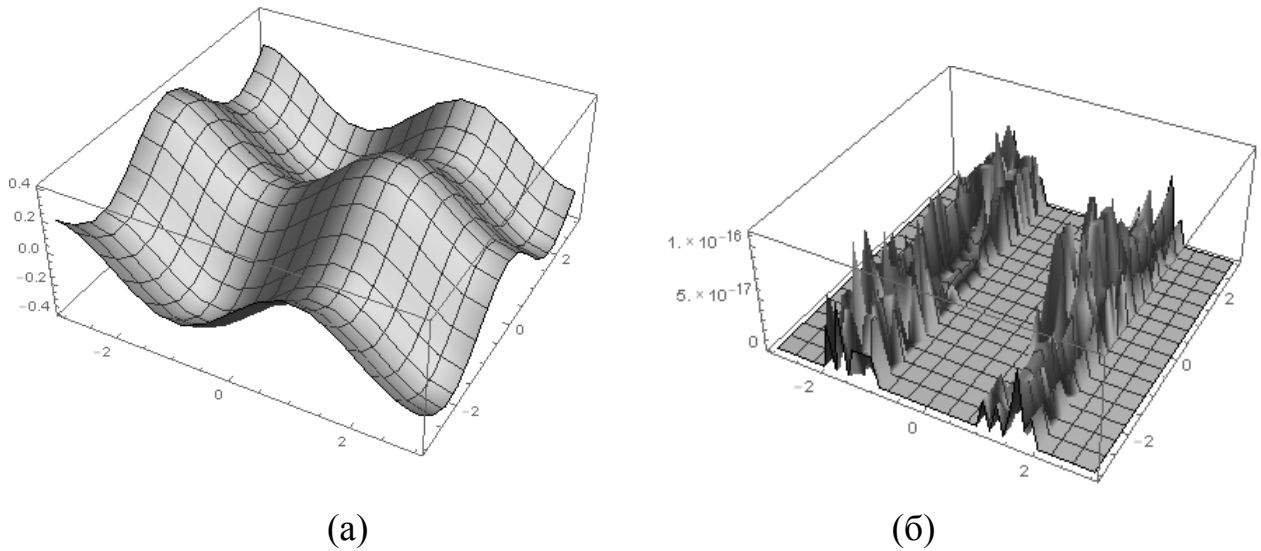


Рисунок 2.2 – Результат відновлення поверхні (а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

Якщо $\gamma_l = \delta_l$, то ці смуги вироджуються в лінії.

Введемо до розгляду оператори

$$\Theta f(x, y) = \begin{cases} f_{2,l}(x, y) & \gamma_l \leq y \leq \delta_l; \\ O_{2,l,l+1}f(x, y) & \delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}, 1 \leq l \leq n-1, \end{cases} \quad (2.10)$$

де оператор $O_{2,l,l+1}f(x, y)$ може бути представлений за допомогою поліномів Лагранжа:

$$O_{2,l,l+1}f(x, y) = H_{1,l,l+1}(y)f(x, \delta_l) + H_{2,l,l+1}(y)f(x, \gamma_{l+1}), \quad (2.11)$$

$$H_{1,l,l+1}(y) = \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}}, \quad H_{2,l,l+1}(y) = \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l}.$$

або за допомогою поліномів Ерміта [76]:

$$O_{2,l,l+1}f(x, y) = \sum_{p=0}^N \left[f^{(0,p)}(x, \delta_l) \ell_{1,l,p}(y) + f^{(0,p)}(x, \gamma_{l+1}) \ell_{2,l+1,p}(y) \right], \quad (2.12)$$

$$\ell_{1,k,s}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N \frac{(x - x_k)^s}{s!} \left\{ \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N} \right\}_{(x_k)}^{N-s-1},$$

$$\ell_{2,l,p}(y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N \frac{(y - y_l)^p}{p!} \left\{ \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N} \right\}_{(y_l)}^{N-p-1}.$$

Будемо вважати оператор (2.10) математичною моделлю поверхні Σ , яка на кожній із смуг (2.2) точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора (2.11) або (2.12).

Теорема 2.5. Якщо відстань між смугами $\gamma_{l+1} - \delta_l = 0$, то для відновлення поверхні оператор (2.10) можна записати у вигляді

$$\Theta f(x, y) = f_{2,l}(x, y), \gamma_l \leq y \leq \delta_l, l = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Теорема 2.6. Оператор (2.10) має такі властивості:

$$\Theta f(x, \gamma_l) = f(x, \gamma_l), \Theta f(x, \delta_l) = f(x, \delta_l), l = \overline{1, n}. \quad (2.14)$$

Теорема 2.7. Оператор (2.11) для випадку двох довільних суміжних смуг i та j має такі властивості:

якщо $f_{2,i}(x, y) \in C(G_{2,i})$ та $f_{2,i+1}(x, y) \in C(G_{2,i+1})$, то результат відновлення поверхні Σ оператором $\Theta_{i,i+1} f(x, y) \in C(G_{2,i} \cup \overline{G_{2,i,i+1}} \cup G_{2,i+1})$.

Доведення. Очевидно, що функції $H_{1,i,i+1}(y)$ та $H_{2,i,i+1}(y)$ мають такі властивості:

$$H_{1,i,i+1}(y)|_{y=y_i} = 1, H_{1,i,i+1}(y)|_{y=y_{i+1}} = 0,$$

$$H_{2,i,i+1}(y)|_{y=y_i} = 0, H_{2,i,i+1}(y)|_{y=y_{i+1}} = 1.$$

Тому

$$\Theta_{i,i+1}f(x,y) = \begin{cases} f_{2,i}(x,y) & (x,y) \in G_{2,i}; \\ O_{2,i,i+1}f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{2,i,i+1}; \\ f_{2,i+1}(x,y) & (x,y) \in G_{2,i+1}, \end{cases}$$

має властивості $\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_{2,i} \cup \overline{G}_{2,i,i+1} \cup G_{2,i+1})$, оскільки

$$f_{2,i}(x,y) \in C(G_{2,i}), f_{2,i+1}(x,y) \in C(G_{2,i+1}), O_{2,i,i+1}f(x,y) \in C(\overline{G}_{2,i,i+1}).$$

Теорему 2.7 доведено.

Теорема 2.8. Оператор (2.10) на системі з k смуг має такі властивості:

якщо $\forall f_{2,i}(x,y) \in C(G_{2,i}), i = \overline{1,k}$, то оператор $\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G})$.

Доведення. Оскільки згідно із твердженням теореми 2.7, справедливе твердження

$$\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_{2,i} \cup \overline{G}_{2,i,i+1} \cup G_{2,i+1})$$

то

$$\Theta f(x,y) \in C\left(\bigcup_{i=1}^k G_{2,i} \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G}_{2,i,i+1}\right).$$

Оскільки $\bigcup_{i=1}^k G_{2,i} = G$ та $\bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G}_{2,i,i+1} = \overline{G}$, то $\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G})$.

Теорему 2.8 доведено.

Теорема 2.9. Залишок наближення функції $f(x, y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$f(x, y) - \Theta f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in G_{2,i}, i = \overline{1, n}; \\ R_{i,i+1} f(x, y) & (x, y) \in \overline{G}_{2,i,i+1}, i = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

$$R_{i,i+1} f(x, y) = H_{1,i,i+1}(y) \int_{\delta_i}^y \frac{\partial^r f(x, t) (\delta_i - t)^{r-1}}{\partial t^r (r-1)!} dt + \\ + H_{2,i,i+1}(y) \int_{\gamma_{i+1}}^y \frac{\partial^r f(x, t) (\gamma_{i+1} - t)^{r-1}}{\partial t^r (r-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$H_{1,i,i+1}(y) \frac{(\delta_i - y)^q}{q!} + H_{2,i,i+1}(y) \frac{(\gamma_{i+1} - y)^q}{q!} = 0.$$

Доведення. Той факт, що в областях $G_{2,i}, i = \overline{1, n}$ похибка наближення дорівнює нулю впливає безпосередньо з припущення.

$$f(x, y)|_{G_{2,k}} = f_{2,k}(x, y), k = \overline{1, n}.$$

Нехай $r = 1$. Тоді $R_{i,i+1} f(x, y)$ матиме вигляд:

$$R_{i,i+1} f(x, y) = H_{1,i,i+1}(y) \int_{\delta_i}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + H_{2,i,i+1}(y) \int_{\gamma_{i+1}}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt = \\ = H_{1,i,i+1}(y) [f(x, y) - f(x, \delta_i)] + H_{2,i,i+1}(y) [f(x, y) - f(x, \gamma_{i+1})] = \\ = [H_{1,i,i+1}(y) + H_{2,i,i+1}(y)] f(x, y) - [H_{1,i,i+1}(y) f(x, \delta_i) + H_{2,i,i+1}(y) f(x, \gamma_{i+1})].$$

Оскільки

$$H_{1,i,i+1}(y) + H_{2,i,i+1}(y) = \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} + \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} = 1.$$

та маючи на увазі (2.11) маємо

$$R_{1,i,i+1}f(x, y) = f(x, y) - \Theta f(x, y). \quad (2.15)$$

Нехай $r = 2$. Тоді $R_{i,i+1}f(x, y)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} R_{2,i,i+1}f(x, y) &= H_{1,i,i+1}(y) \int_{\delta_i}^y \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} (\delta_i - t) dt + H_{2,i,i+1}(y) \int_{\gamma_{i+1}}^y \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} (\gamma_{i+1} - t) dt = \\ &= H_{1,i,i+1}(y) \left[\left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} (\delta_i - t) \right) \Big|_{\delta_i}^y - \int_{\delta_i}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right] + \\ &+ H_{2,i,i+1}(y) \left[\left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} (\gamma_{i+1} - t) \right) \Big|_{\gamma_{i+1}}^y - \int_{\gamma_{i+1}}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right] = \\ &= \left[H_{1,i,i+1}(y)(\delta_i - t) + H_{2,i,i+1}(y)(\gamma_{i+1} - t) \right] \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \\ &+ H_{1,i,i+1}(y) \int_{\delta_i}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + H_{2,i,i+1}(y) \int_{\gamma_{i+1}}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Зважаючи, що

$$H_{1,i,i+1}(y)(\delta_i - y) + H_{2,i,i+1}(y)(\gamma_{i+1} - y) = 0$$

та маючи на увазі (2.15) маємо

$$R_{2,i,i+1}f(x,y) = R_{1,i,i+1}f(x,y) = f(x,y) - \Theta f(x,y).$$

Аналогічно справедливе і для $r > 2$.

Теорему 2.9 доведено.

Приклад 2.2. Нехай зображення поверхні (2.9) описується функціями на смугах:

$$f(x,y)|_{-3 \leq y \leq -2} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x,y)|_{-1 \leq y \leq 1} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x,y)|_{2 \leq y \leq 3} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y.$$

На рисунку 2.3 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні на системі горизонтальних смуг.

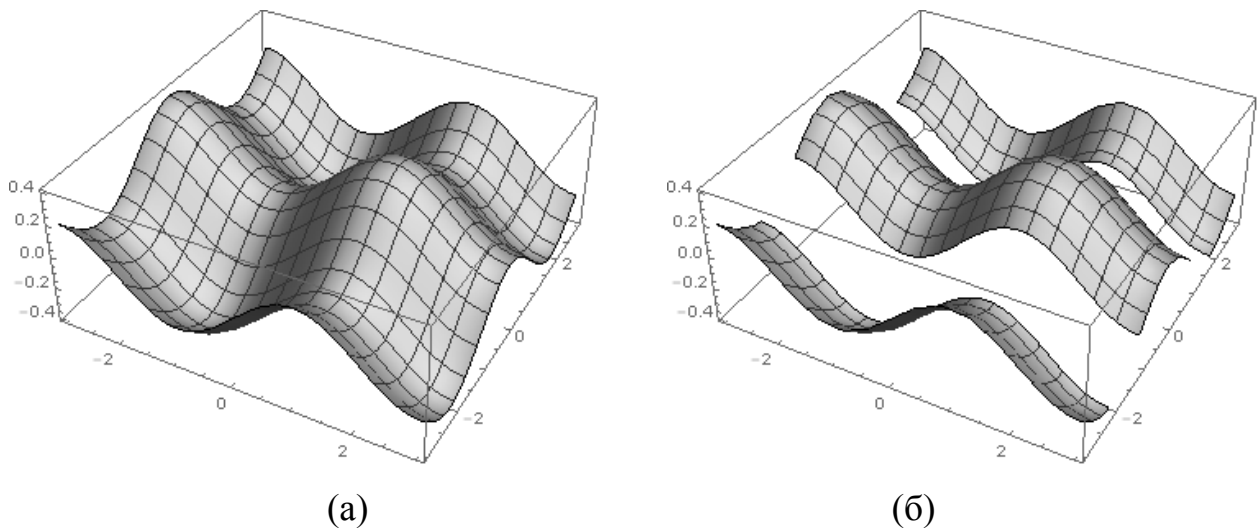


Рисунок 2.3 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні на системі горизонтальних смуг)

На рисунку 2.4 наведено результат відновлення поверхні (2.9) за допомогою оператора (2.10).

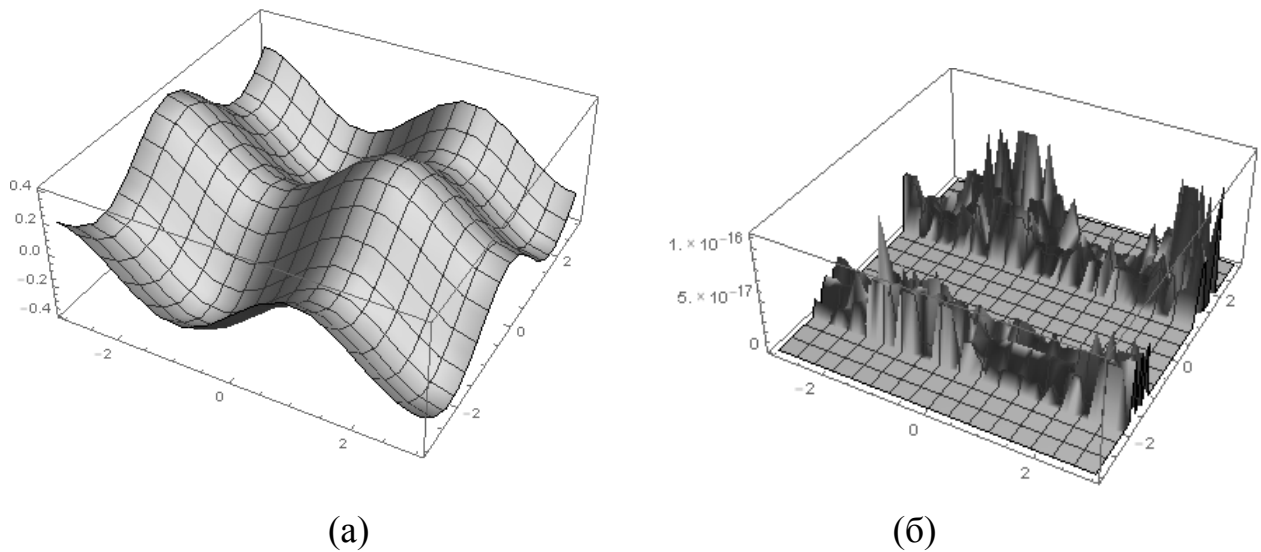


Рисунок 2.4 – Результат відновлення поверхні (а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

2.1.3. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі перетинних смуг, обмежених прямими паралельними осям координат

Введемо до розгляду оператори

$$\Theta f(x, y) = \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & (x, y) \in G_{1,k}, k = \overline{1, m}; \\ f_{2,l}(x, y) & (x, y) \in G_{2,l}, l = \overline{1, n}; \\ O_{1,2,k,l} f(x, y) & (x, y) \notin G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.16)$$

$$O_{1,2,k,l} f(x, y) = [O_{1,k,k+1} + O_{2,l,l+1} - O_{1,k,k+1} O_{2,l,l+1}] f(x, y). \quad (2.17)$$

Теорема 2.10. Для всіх функцій $f \in C^{N,N}(G)$ виконується співвідношення

$$O_{1,2,k,l}f = (O_{1,k,k+1} \oplus O_{2,l,l+1})f \in C^{N,N}(G), \quad G = [\alpha_1, \beta_{m+1}] \times [\gamma_1, \delta_{n+1}].$$

Доведення. Відмітимо властивості операторів $O_{1,k,k+1}f(x,y)$:

$$1) \left. \frac{\partial^p}{\partial x^p} O_{1,k,k+1}f(x,y) \right|_{x=\beta_k} = f^{(p,0)}(\beta_k, y), \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1},$$

$$2) \left. \frac{\partial^p}{\partial x^p} O_{1,k,k+1}f(x,y) \right|_{x=\alpha_{k+1}} = f^{(p,0)}(\alpha_{k+1}, y), \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1},$$

та $O_{2,l,l+1}f(x,y)$:

$$1) \left. \frac{\partial^r}{\partial x^r} O_{2,l,l+1}f(x,y) \right|_{y=\delta_l} = f^{(0,r)}(x, \delta_l), \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1},$$

$$2) \left. \frac{\partial^r}{\partial x^r} O_{2,l,l+1}f(x,y) \right|_{y=\gamma_{l+1}} = f^{(0,r)}(x, \gamma_{l+1}), \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}.$$

Оператор $O_{1,k,k+1}O_{2,l,l+1}f(x,y)$ є оператором двовимірної чотирьохточкової ермітової інтерполяції з властивостями:

$$\left. \frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} O_{1,k,k+1}O_{2,l,l+1}f(x,y) \right|_{(\alpha_k, \gamma_l)} = f^{(p,r)}(\alpha_k, \gamma_l), 0 \leq r, p \leq N,$$

$$\left. \frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} O_{1,k,k+1}O_{2,l,l+1}f(x,y) \right|_{(\alpha_k, \delta_l)} = f^{(p,r)}(\alpha_k, \delta_l), 0 \leq r, p \leq N,$$

$$\left. \frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} O_{1,k,k+1}O_{2,l,l+1}f(x,y) \right|_{(\beta_k, \gamma_l)} = f^{(p,r)}(\beta_k, \gamma_l), 0 \leq r, p \leq N,$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} O_{1,k,k+1} O_{2,l,l+1} f(x,y) \Big|_{(\beta_k, \delta_l)} = f^{(p,r)}(\beta_k, \delta_l), 0 \leq r, p \leq N.$$

Тому оператори $O_{1,2,k,l} f(x,y)$ мають такі властивості:

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} O_{1,2,k,l} f(x,y) \Big|_{x=\alpha_k} = f^{(p,0)}(\alpha_k, y), \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, 0 \leq p \leq N,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} O_{1,2,k,l} f(x,y) \Big|_{x=\beta_k} = f^{(p,0)}(\beta_k, y), \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, 0 \leq p \leq N,$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} O_{1,2,k,l} f(x,y) \Big|_{y=\gamma_l} = f^{(0,r)}(x, \gamma_l), \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}, 0 \leq r \leq N,$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} O_{1,2,k,l} f(x,y) \Big|_{y=\delta_l} = f^{(0,r)}(x, \delta_l), \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}, 0 \leq r \leq N.$$

Тобто оператор (2.17) є оператором ермітової інтерлінації функції $f(x,y)$ на чотирьох взаємно перпендикулярних прямих $x = \alpha_k, \beta_k$ та $y = \gamma_l, \delta_l$

Таким чином, оператор (2.16) має такі властивості:

1) він визначений в усіх точках області $G = [\alpha_1, \beta_{m+1}] \times [\gamma_1, \delta_{n+1}]$;

2) зберігає частинні похідні по x і по y на границі кожного прямокутника $G_{1,k} \cap G_{2,l}$.

Тобто, $\Theta f(x,y) \in C^{N,N}(G)$.

Теорему 2.10 доведено.

Теорема 2.11. Для всіх функцій $f \in C^{N,N}(G)$ похибка їх наближення оператором (2.12) задовольняє співвідношення

$$[I - \Theta]f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}; \\ [f - O_{1,2,k,l}f](x, y) & (x, y) \notin G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Доведення. Доведення цієї теореми проводиться у два різні етапи. На першому етапі слід враховувати, що на смугах оператор (2.16) збігається з функцією $f(x, y)$ на смугах $G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}$, тобто також і на перетині цих смуг. Тому в точках вказаних смуг, а також в точках їх перетину, буде виконуватись рівність

$$\Theta f(x, y) = f(x, y), (x, y) \in G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}.$$

Звідси витікає, що

$$f(x, y) - \Theta f(x, y) = 0, (x, y) \in G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}.$$

Тобто першу частину цієї теореми доведено.

Для доведення другої частини достатньо згадати, що в точках $(x, y) \notin G_{1,k} \cup G_{2,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}$ виконується рівність

$$\Theta f(x, y) = O_{1,2,k,l}f(x, y), k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n},$$

де $O_{1,2,k,l}f(x, y)$ задається у вигляді мішаної ермітової інтерполяції в кожному з прямокутників $[\beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}] \times [\delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}], k = \overline{1, m-1}, l = \overline{1, n-1}$.

Тому дійсно

$$\begin{aligned} & f(x, y) - (O_{1,k,k+1} \oplus O_{2,l,l+1})f(x, y) = \\ & = f(x, y) - O_{1,2,k,l}f(x, y), (x, y) \in [\beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}] \times [\delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}], \end{aligned}$$

що і доводить друге твердження теореми 2.11.

Теорему 2.11 доведено.

Теорема 2.12. Для оцінки похибки наближення диференційовних функцій $f(x, y) \in C^{2(N+1), 2(N+1)}(G)$ оператором (2.16) справедливе таке співвідношення

$$\|f - \Theta f\|_{C(G)} \leq \frac{\Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)}}{(2(N+1))!(2(N+1))!} \|f^{(2(N+1), 2(N+1))}\|_{C(G)} \frac{1}{2^{4(N+1)}},$$

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq m-1} \Delta_{1,k}, \Delta_{1,k} = \alpha_{k+1} - \beta_k,$$

$$\Delta_2 = \max_{1 \leq l \leq n-1} \Delta_{2,l}, \Delta_{2,l} = \gamma_{l+1} - \delta_l.$$

При цьому $\|f - \Theta f\|_{C(D_{1,i} \cup D_{2,j})} = 0$.

Доведення. Враховуючи, що сліди функції $f(x, y)$ на смугах вважаються заданими точно, то функція $\Theta f(x, y), (x, y) \in G_{1,k} \cup G_{2,l}$, у всіх точках смуг $G_{1,k}, G_{2,l}$ збігається точно з функцією $f(x, y)$.

Тому оцінку похибки треба досліджувати лише у точках між смугами.

З теореми 2.10 витікає, що оператор $(O_{1,k,k+1} \oplus O_{2,l,l+1})f(x, y)$ є оператором ермітової інтерлінації функції $f(x, y)$ на чотирьох лініях $x = \beta_k, x = \alpha_{k+1}$ та $y = \delta_l, y = \gamma_{l+1}$.

Як відомо [77-78], інтегральне представлення для залишку наближення диференційовної функції $f(x, y)$ за допомогою операторів двовимірної ермітової інтерлінації записується такою формулою ($N+1 \leq p_1, p_2 \leq 2(N+1)$):

$$R_{MN}f(x) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N \prod_{k=1}^2 h_{k i_k s_k}(x_k) \times \int_{x_{1i_1}}^{x_1} \int_{x_{2i_2}}^{x_2} f^{(p)}(\xi) \prod_{k=1}^2 \frac{(x_{ki_k} - \xi_k)^{p_k - s_k - 1}}{(p_k - s_k - 1)!} d\xi_k. \quad (2.18)$$

Тобто, для залишку можна написати таку рівність:

$$R_{MN}f(x) = \frac{f^{(2(N+1), 2(N+1))}(\eta_1, \eta_2)}{(2(N+1))!(2(N+1))!} \prod_{k=1}^2 \prod_{i_k=1}^2 (x_k - x_{ki_k})^{N+1}.$$

З нерівності

$$\|R_{MN}f\|_{L_\mu(\bar{I})} \leq \prod_{i_k=1}^2 (d_k - c_k)^{p_k - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} q_{kM_k N_{p_k} \nu \mu}$$

можна записати

$$\|R_{MN}f\|_{L_\mu(\Pi)} \leq \Delta_{1,k}^{p_1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} \Delta_{2,l}^{p_2 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}} q_{k,2,N,p_1,\nu,\mu} q_{l,2,N,p_2,\nu,\mu}.$$

При $\mu = \infty, \nu = \infty$ отримуємо

$$\|R_{MN}f\|_{L_\mu(\Pi)} \leq \Delta_{1,k}^{p_1} \Delta_{2,l}^{p_2} q_{k,2,N,p_1,\infty,\infty} q_{l,2,N,p_2,\infty,\infty}.$$

Таким чином, теорема 2.12 доведена.

Оператор (2.16) і є математичною моделлю поверхні, побудованої за допомогою відомих даних аерофотозйомки або радіолокаційного зондування на взаємноперпендикулярних смугах.

Зауваження 2.1. Замість поліномів Ерміта в наведених вище операторах інтерстріпації можна використовувати поліноми Шепарда [79]

$$S_{n,\mu}(x) = \frac{\sum_{k=0}^n f(x_k) |x - x_k|^{-\mu}}{\sum_{k=0}^n |x - x_k|^{-\mu}}, \quad \mu > 0$$

або поліноми Шепарда-Литвина [80]

$$L_{n,\lambda}(x) = \frac{\sum_{k=0}^n f(x_k) |x - x_k|^\lambda}{\sum_{k=0}^n |x - x_k|^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Зауваження 2.2. Оператор $O_{1,2,k,l}f(x,y)$ можна зобразити у вигляді

Лагранжа:

$$\begin{aligned} O_{1,2,k,l}f(x,y) = & H_{1,k,k+1}(x)f(\beta_k, y) + H_{2,k,k+1}(x)f(\alpha_{k+1}, y) + \\ & + H_{1,l,l+1}(y)f(x, \delta_l) + H_{2,l,l+1}(y)f(x, \gamma_{l+1}) - \\ & - H_{1,k,k+1}(x)H_{1,l,l+1}(y)f(\beta_k, \delta_l) - H_{1,k,k+1}(x)H_{2,l,l+1}(y)f(\beta_k, \gamma_{l+1}) - \\ & - H_{2,k,k+1}(x)H_{1,l,l+1}(y)f(\alpha_{k+1}, \delta_l) - H_{2,k,k+1}(x)H_{2,l,l+1}(y)f(\alpha_{k+1}, \gamma_{l+1}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$H_{1,k,k+1}(x) = \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}}, \quad H_{2,k,k+1}(x) = \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k}.$$

$$H_{1,l,l+1}(y) = \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}}, \quad H_{2,l,l+1}(y) = \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l}.$$

Приклад 2.3. Нехай зображення поверхні (2.9) описується функціями на смугах:

$$f(x,y)|_{-3 \leq x \leq -1} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x, y)|_{|x| \leq 3} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x, y)|_{|-3 \leq y \leq -1} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y,$$

$$f(x, y)|_{|y| \leq 3} = 0.2 \sin \frac{\pi}{2} x + 0.2 \cos \frac{\pi}{2} y.$$

На рисунку 2.5 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні на системі взаємоперпендикулярних смуг.

На рисунку 2.6 наведено результат відновлення поверхні (2.9) за допомогою оператора (2.16)

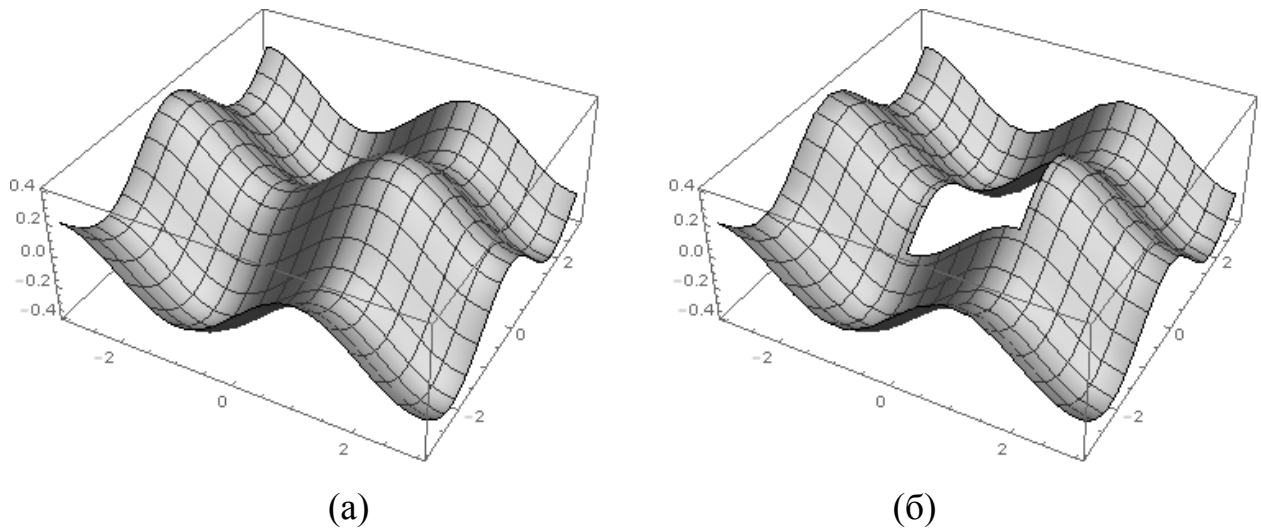


Рисунок 2.5 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні на системі взаємоперпендикулярних смуг)

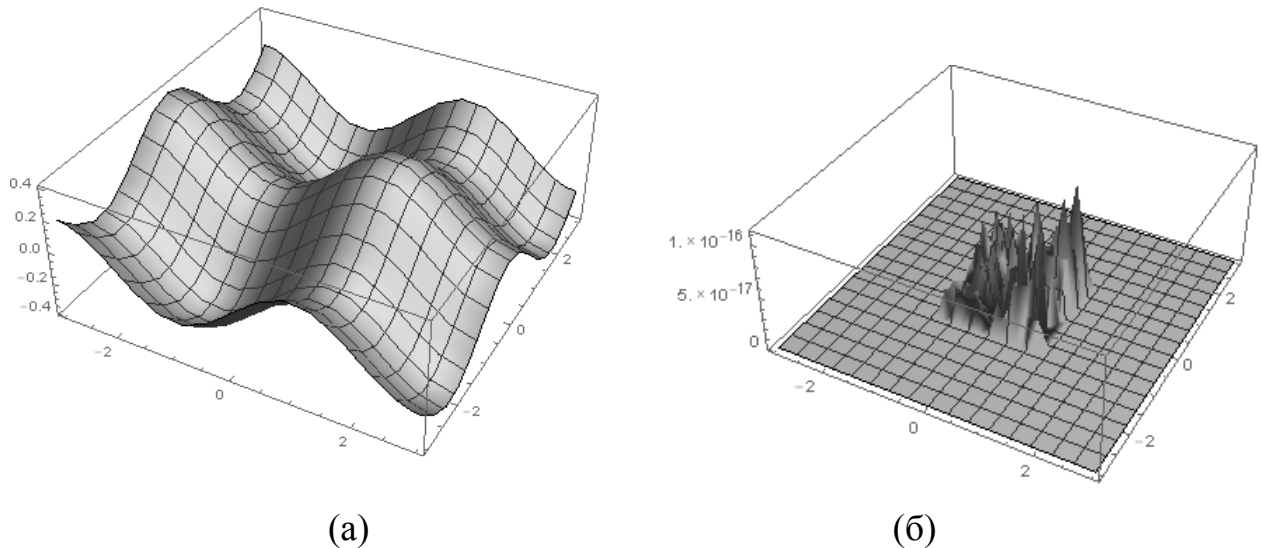


Рисунок 2.6 – Результат відновлення поверхні (а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

Окремо слід виділити випадок смуг, границі яких представлені у вигляді замкнутого контуру. Для такого виду пошкоджень ефективним буде застосування операторів інтерстріпації в полярних координатах:

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

При цьому

$$\Theta \tilde{f}(r, \varphi) = \begin{cases} \tilde{f}_k(r, \varphi) & (r, \varphi) \in G_k, \quad k = \overline{1, m}; \\ O_{k, k+1} \tilde{f}(r, \varphi) & (r, \varphi) \in \overline{G}_{k, k+1}, \quad k = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (2.20)$$

$$G_k = \{(r, \varphi) : r_{k,1} \leq r \leq r_{k,2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\overline{G}_{k, k+1} = \{(r, \varphi) : r_{k,2} \leq r \leq r_{k+1,1}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де оператор $O_{k, k+1} \tilde{f}(r, \varphi)$ може бути представлений за допомогою поліномів Лагранжа:

$$O_{k,k+1} \tilde{f}(r, \varphi) = \tilde{H}_{1,k,k+1}(r) \tilde{f}(r_{k,2}, \varphi) + \tilde{H}_{2,k,k+1}(r) \tilde{f}(r_{k+1,1}, \varphi), \quad (2.21)$$

$$\tilde{H}_{1,k,k+1}(r) = \frac{r - r_{k+1,1}}{r_{k,2} - r_{k+1,1}}, \quad \tilde{H}_{2,k,k+1}(r) = \frac{r - r_{k,2}}{r_{k+1,1} - r_{k,2}}.$$

Теорема 2.13. Залишок наближення функції $\tilde{f}(x, y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$\tilde{f}(r, \varphi) - \Theta \tilde{f}(r, \varphi) = \begin{cases} 0 & (r, \varphi) \in G_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ R_{i,i+1} \tilde{f}(r, \varphi) & (r, \varphi) \in \overline{G}_{i,i+1}, \quad i = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$R_{i,i+1} \tilde{f}(r, \varphi) = \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \int_{r_{i,2}}^r \frac{\partial^k \tilde{f}(t, \varphi)}{\partial t^k} \frac{(r_{i,2} - t)^{k-1}}{(k-1)!} dt + \\ + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \int_{r_{i+1,1}}^r \frac{\partial^k \tilde{f}(t, \varphi)}{\partial t^k} \frac{(r_{i+1,1} - t)^{k-1}}{(k-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \frac{(r_{i,2} - r)^q}{q!} + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \frac{(r_{i+1,1} - r)^q}{q!} = 0.$$

Доведення. Той факт, що в областях $G_i, i = \overline{1, m}$ похибка наближення дорівнює нулю впливає безпосередньо з припущення.

$$\tilde{f}(r, \varphi) \Big|_{G_k} = \tilde{f}_k(r, \varphi), \quad k = \overline{1, m}.$$

Нехай $k=1$. Тоді $R_{i,i+1} \tilde{f}(r, \varphi)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
R_{1,i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) &= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \int_{r_{i,2}}^r \frac{\partial f(t,\varphi)}{\partial t} dt + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \int_{r_{i+1,1}}^r \frac{\partial f(t,\varphi)}{\partial t} dt = \\
&= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) [\tilde{f}(r,\varphi) - \tilde{f}(r_{i,2},\varphi)] + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) [\tilde{f}(r,\varphi) - \tilde{f}(r_{i+1,1},\varphi)] = \\
&= [\tilde{H}_{1,i,i+1}(r) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r)] f(r,\varphi) - [\tilde{H}_{1,i,i+1}(r)\tilde{f}(r_{i,2},\varphi) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r)\tilde{f}(r_{i+1,1},\varphi)].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) = \frac{r - r_{i+1,1}}{r_{i,2} - r_{i+1,1}} + \frac{r - r_{i,2}}{r_{i+1,1} - r_{i,2}} = 1.$$

та маючи на увазі (2.21) маємо

$$R_{1,i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) = \tilde{f}(r,\varphi) - \Theta\tilde{f}(r,\varphi). \quad (2.22)$$

Нехай $k = 2$. Тоді $R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
R_{2,i,i+1}\hat{f}(r,\varphi) &= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \int_{r_{i,2}}^r \frac{\partial^2 \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^2} (r_{i,2} - t) dt + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \int_{r_{i+1,1}}^r \frac{\partial^2 \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^2} (r_{i+1,1} - t) dt = \\
&= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \left[\left(\frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} (r_{i,2} - t) \right) \Big|_{r_{i,2}}^r - \int_{r_{i,2}}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt \right] + \\
&+ \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \left[\left(\frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} (r_{i+1,1} - t) \right) \Big|_{r_{i+1,1}}^r - \int_{r_{i+1,1}}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt \right] = \\
&= \left[\tilde{H}_{1,i,i+1}(r)(r_{i,2} - t) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r)(r_{i+1,1} - t) \right] \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} + \\
&+ \tilde{H}_{1,i,i+1}(r) \int_{r_{i,2}}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r) \int_{r_{i+1,1}}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt.
\end{aligned}$$

Зважаючи, що

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r)(r_{i,2} - r) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r)(r_{i+1,1} - r) = 0$$

та маючи на увазі (2.22) маємо

$$R_{2,i,i+1}\tilde{f}(r, \varphi) = R_{1,i,i+1}\tilde{f}(r, \varphi) = \tilde{f}(r, \varphi) - \Theta\tilde{f}(r, \varphi).$$

Аналогічно справедливе і для $k > 2$.

Теорему 2.13 доведено.

Приклад 2.4. Нехай зображення поверхні описується функціями на областях:

$$f(x, y)|_{x^2+y^2 \leq 1} = e^{-\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}, \quad f(x, y)|_{x^2+y^2 \geq 4} = e^{-\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}.$$

На рисунку 2.7 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні із замкнутим контуром.

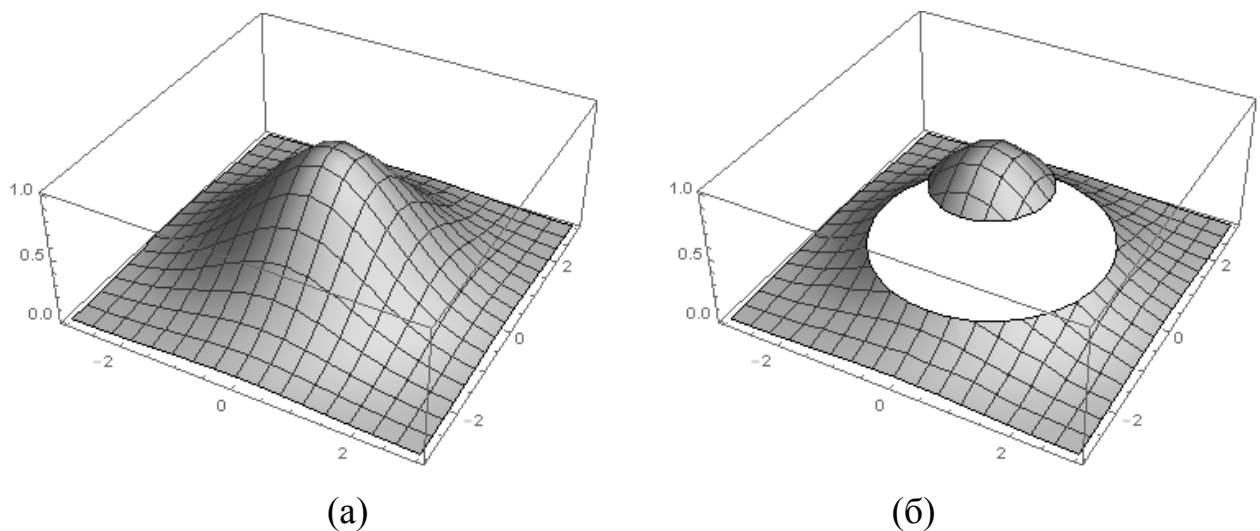


Рисунок 2.7 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні із замкнутим контуром)

Для відновлення зображення поверхні в даному випадку пропонується замінити Декартову систему координат полярною (рисунок 2.8).

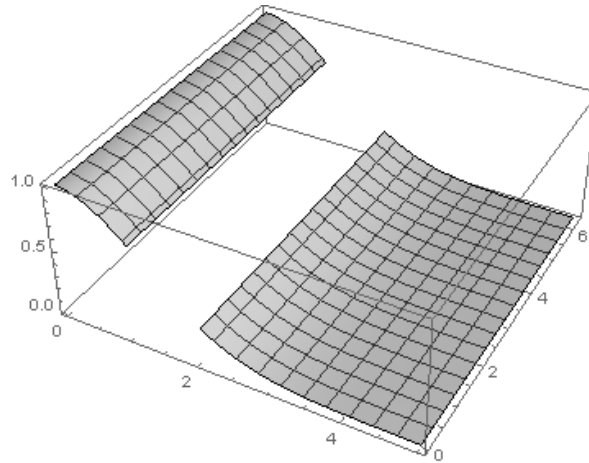


Рисунок 2.8 – Зображення поверхні із замкнутим контуром у полярній системі координат

На рисунку 2.9 наведено результат відновлення поверхні за допомогою оператора (2.12) у полярній системі координат.

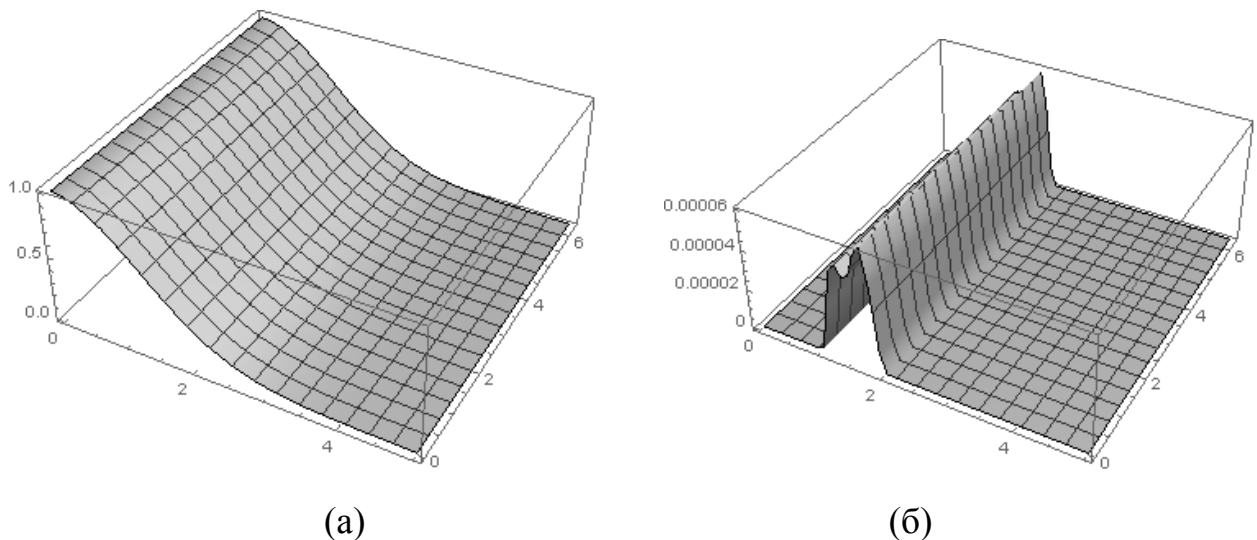


Рисунок 2.9 – Результат відновлення поверхні у полярній системі координат
(а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

На рисунку 2.10 наведено результат відновлення поверхні у Декартовій системі координат.

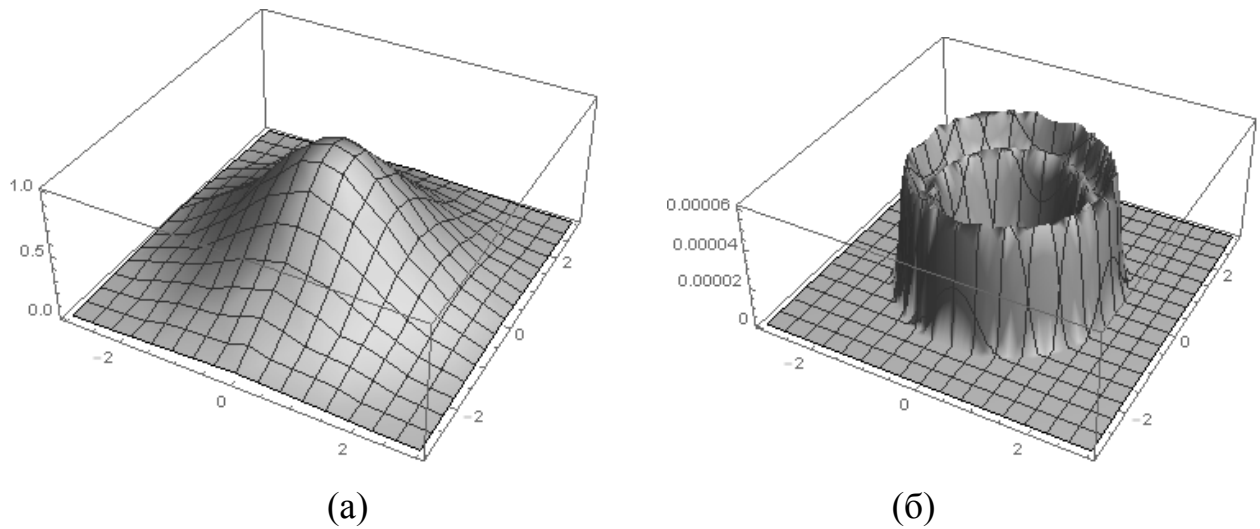


Рисунок 2.10 – Результат відновлення поверхні у Декартовій системі координат
(а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

2.2 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних

Нехай задана множина смуг із границями у вигляді прямих

$$\Gamma_k : \omega_k(x) \equiv x_1 \omega_{k,1} + x_2 \omega_{k,2} - \gamma_k = 0, \quad \omega_{k,1}^2 + \omega_{k,2}^2 = 1, \quad k = \overline{1, M},$$

що задовольняють умовам:

- ніякі з трьох прямих у цій множині не перетинаються в одній точці;
- кожна пряма з цієї множини має хоча б одну точку перетину з якою-небудь іншою прямою цієї множини.

Введемо позначення:

$$\mathfrak{R} = \left\{ (k, l) : A_{k,l} = (x_{1,k,l}, x_{2,k,l}) = \Gamma_k \cap \Gamma_l \neq \emptyset, k, l \in B_M = \overline{1, M} \right\},$$

$$\mathfrak{R}_k = \left\{ (k, l) \in \mathfrak{R} : A_{k,l} \neq \emptyset, l \in B_M \right\}, k = \overline{1, M},$$

$$\Delta_{k,l} = \begin{vmatrix} \omega_{k,1} & \omega_{k,2} \\ \omega_{l,1} & \omega_{l,2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \omega_{k,j} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}, j = 1, 2,$$

$$\nabla_{k,l} = (\omega_k, \omega_l), \quad \tau_k = (\omega_{k,2}, -\omega_{k,1}),$$

$$T_s^{(k)} = \left(\omega_{k,2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \omega_{k,1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^s, D_s^{(k)} = \left(\omega_{k,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_{k,2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^s, s \in \mathbb{N},$$

$$T_0^{(k)} = D_0^{(k)} = I.$$

Теорема 2.14. Між координатами $(x_{1,k,l}, x_{2,k,l}) = A_{k,l}$ точками перетину прямих Γ_k та Γ_l векторами τ_k, τ_l і функціями $\omega_k(x), \omega_l(x)$ виконується співвідношення

$$A_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \equiv x + \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x), x = (x_1, x_2).$$

Доведення. Координати точки $A_{k,l} \neq \emptyset$ задовольняють систему

$$\begin{cases} \omega_k(A_{k,l}) = 0, \\ \omega_l(A_{k,l}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{k,1}x_{1,k,l} + \omega_{k,2}x_{2,k,l} = \gamma_k, \\ \omega_{l,1}x_{1,k,l} + \omega_{l,2}x_{2,k,l} = \gamma_l. \end{cases}$$

Тобто

$$A_{k,l} = \begin{pmatrix} x_{1,k,l} \\ x_{2,k,l} \end{pmatrix} = \Omega_{k,l}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_l \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{k,l} = \begin{pmatrix} \omega_{k,1} & \omega_{k,2} \\ \omega_{l,1} & \omega_{l,2} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{k,l}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{k,l}} \begin{pmatrix} \omega_{k,1} & -\omega_{k,2} \\ -\omega_{l,1} & \omega_{l,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{k,l}} (\tau_l^T - \tau_k^T).$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k,l}^T + \frac{\tau_l^T}{\Delta_{k,l}} \omega_k(x) + \frac{\tau_k^T}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) &= \mathbf{A}_{k,l}^T + \Omega_{k,l}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_k(x) \\ \omega_l(x) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A}_{k,l}^T - \Omega_{k,l}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_l \end{pmatrix} + \Omega_{k,l}^{-1} \Omega_{k,l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T. \end{aligned}$$

Теорема 2.14 доведена.

Твердження 2.1. Мають місце наступні тотожності:

$$\begin{aligned} \omega_l \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) &\equiv 0, \\ f(x - \omega_l(x) \nabla \omega_l) \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) &\equiv f \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right), \\ D_s^{(k)} f \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) &\equiv (-1)^s (\Delta_{l,k})^{-s} (T_s^{(l)} f) \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right), \\ T_s^{(k)} f \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) &\equiv 0, s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теорема 2.15. Нехай $f(x) \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 2N$. Тоді оператор

$$L_k^l f(x) = \sum_{s=0}^N \frac{\omega_k^s}{s!} \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left(\varphi_{k,s-i} \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{k,l}} \omega_k(x) \right) \right)$$

має властивості

$$\left. \frac{\partial^q L_k^l f(x)}{\partial v_k^q} \right|_{\Gamma_k} = \left. \frac{\partial^q f(x)}{\partial v_k^q} \right|_{\Gamma_k} = \varphi_{k,l}(x) \Big|_{\Gamma_k}, 0 \leq q \leq N-1.$$

При цьому для залишку $R_k^l = (I - L_k^l) f(x)$ справедлива рівність

$$(R_k^l f)(x) = \int_0^{\omega_k(x)} \left(\frac{\partial^N}{\partial t^N} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) \frac{(\omega_k - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s}{\partial t^s} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) &= \Delta_{k,l}^{-s} (T_s^{(l)} f) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) = \\ &= \Delta_{k,l}^{-s} \left((\nabla_{k,l} T_1^{(k)} - \Delta_{l,k} D_1^{(k)})^s f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) = \\ &= \Delta_{k,l}^{-s} \sum_{i=0}^s (-1)^{s-i} C_s^i \nabla_{k,l}^i \Delta_{l,k}^{s-i} (T_i^{(k)} D_{s-i}^{(k)} f) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right). \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left((D_{s-i}^{(k)} f) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) &= \\ = \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i \left(\Delta_{k,l} T_1^{(l)} + \nabla_{k,l} D_1^{(l)} \right)^i \left((D_{s-i}^{(k)} f) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) &= \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i \nabla_{k,l}^i (-\Delta_{k,l})^{-i} \left(T_i^{(k)} D_{s-i}^{(k)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right).$$

Тобто справедливі рівності (при $\Delta_{k,l} = -\Delta_{l,k}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left(\left(D_{s-i}^{(k)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) = \\ & = \frac{\partial^s}{\partial t^s} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \equiv \\ & \equiv (\Delta_{k,l})^{-s} \left(T_s^{(l)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right), s = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Інтегруючи частинами отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_k(x)} \left(\frac{\partial^N}{\partial t^N} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) \frac{(\omega_k - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt = \\ & = \sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{(\omega_k - t)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\omega_k} = \\ & = f(x) - \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\omega_k^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \Bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отже, теорему 2.15 доведено.

Теорема 2.16. Якщо $f \in \mathbb{C}^{2N-2}(\mathbb{R}^2)$, то при $0 \leq \lambda + s \leq 2N - 2$

$$\frac{1}{\Delta_{l,k}^\lambda \Delta_{k,l}^s} \left(T_s^{(l)} T_\lambda^{(k)} f \right) (A_{k,l}) =$$

$$= D_{\lambda}^{(l)} \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left(\left(D_{s-i}^{(k)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \right) \Big|_{\omega_l=0} = J_{\lambda,k}^{l,k} f .$$

Доведення. З формули (2.23) отримуємо

$$\begin{aligned} & D_{\lambda}^{(l)} \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left(\left(D_{s-i}^{(k)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) \right) \right) \Big|_{\omega_l=0} = \\ & = D_{\lambda}^{(l)} \Delta_{k,l}^{-s} \left(T_s^{(l)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) \right) \Big|_{\omega_l=0} = \\ & = (-1)^{\lambda} \Delta_{k,l}^{-\lambda} \Delta_{k,l}^{-s} \left(T_{\lambda}^{(k)} T_s^{(l)} f \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) \right) \Big|_{\omega_l=0} = \\ & = \Delta_{l,k}^{-\lambda} \Delta_{k,l}^{-s} \left(T_{\lambda}^{(k)} T_s^{(l)} f \right) (A_{k,l}) . \end{aligned}$$

Тобто

$$J_{\lambda,k}^{l,k} f = \Delta_{l,k}^{-\lambda} \Delta_{k,l}^{-s} \left(T_{\lambda}^{(k)} T_s^{(l)} (f) \right) \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t \right) \Big|_{\substack{t=0 \\ \omega_l=0}} . \quad (2.24)$$

Теорему 2.16 доведено.

Теорема 2.17. Якщо функції

$$\varphi_{k,s}(x) \Big|_{\Gamma_k} = \frac{\partial^s f(x)}{\partial V_k^s} \Big|_{\Gamma_k} , k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N-1}$$

задовольняють умови

$$J_{\lambda,s}^{l,k} f = J_{s,\lambda}^{k,l} f \Leftrightarrow \left(T_{\lambda}^{(k)} T_s^{(l)} f \right) (\mathbf{A}_{k,l}) = \left(T_s^{(l)} T_{\lambda}^{(k)} f \right) (\mathbf{A}_{k,l})$$

причому числа $J_{s,\lambda}^{k,l} f$ знаходяться за формулами (2.24), в яких

$$D_{s-i}^{(k)} f = \varphi_{k,s-i}, \quad D_{\lambda-j}^{(l)} f = \varphi_{l,\lambda-j},$$

то функція

$$\begin{aligned} L_{k,l} f(x) &= \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\omega_k^s}{s!} \sum_{i=0}^s (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left(\varphi_{k,s-i} \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) \right) \right) + \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{N-1} \frac{\omega_l^\lambda}{\lambda!} \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^i C_{\lambda}^i D_i^{(l)} \left(\varphi_{l,\lambda-i} \left(\mathbf{A}_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) \right) - \sum_{s,\lambda=0}^{N-1} \frac{\omega_k^s \omega_l^\lambda}{s! \lambda!} J_{s,\lambda}^{k,l} f \quad (2.25) \end{aligned}$$

інтерлінує f та її нормальні похідні до порядку $N-1$ на смугах із границями Γ_k та Γ_l :

$$\left(D_q^{(p)} L_{k,l} f \right) \Big|_{\Gamma_k} = \left(D_q^{(p)} f \right) \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_{p,q}(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad p = k, l; q = \overline{0, N-1}. \quad (2.26)$$

Доведення. Враховуючи рівність (2.25) та твердження теореми 2.15, отримаємо

$$L_{k,l} f(x) = \left(L_k^l + L_l^k - L_k^l L_l^k \right) f(x), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \left(D_q^{(k)} L_{k,l} f \right) \Big|_{\Gamma_k} &= \varphi_{k,q}(x) \Big|_{\Gamma_k} + \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{r=0}^q C_q^r \left(D_r^{(k)} \frac{\omega_l^\lambda}{\lambda!} \right) \Big|_{\Gamma_k} J_{q-r,\lambda}^{k,l} f - \\ &- \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{s=0}^q \sum_{r=0}^q C_q^r \left(D_{q-r}^{(k)} \frac{\omega_l^\lambda}{\lambda!} \right) \Big|_{\Gamma_k} \left(D_r^{(k)} \frac{\omega_k^s}{s!} \right) \Big|_{\Gamma_k} J_{s,\lambda}^{k,l} f = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_{k,q}(x) \Big|_{\Gamma_k} + \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{r=0}^q C_q^r \left(D_r^{(k)} \frac{\omega_l^\lambda}{\lambda!} \right) \Big|_{\Gamma_k} J_{q-r,\lambda}^{k,l} f - \\
&- \sum_{\lambda=0}^{N-1} \sum_{s=0}^q C_q^s \left(D_{q-s}^{(k)} \frac{\omega_l^\lambda}{\lambda!} \right) \Big|_{\Gamma_k} J_{s,\lambda}^{k,l} f = \varphi_{k,q}(x) \Big|_{\Gamma_k}, q = \overline{0, N-1}.
\end{aligned}$$

Аналогічно і для

$$\left(D_q^{(l)} L_{k,l} f \right) \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_{l,q}(x) \Big|_{\Gamma_l}, q = \overline{0, N-1}.$$

Теорему 2.17 доведено.

Теорема 2.18. Для залишку справедливе інтегральне зображення

$R_{k,l} = I - L_{k,l}$ (якщо $f(x) \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 2N$):

$$R_{k,l} f(x) = \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \left(\frac{\partial^{2N}}{\partial t_k^N \partial t_l^N} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) \right) \frac{(\omega_k - t_k)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{(\omega_l - t_l)^{N-1}}{(N-1)!} dt_k dt_l.$$

Доведення. Із рівності (2.26) одержуємо

$$R_{k,l} f(x) = (I - L_k^l - L_l^k + L_k^l L_l^k) f(x) = (I - L_k^l)(I - L_l^k) f(x) = R_k^l R_l^k f(x).$$

Звідси із урахуванням тотожностей

$$\begin{aligned}
\omega_k \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) &\equiv t_k, \\
\omega_l \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) &\equiv \omega_l.
\end{aligned}$$

та теореми 2.14 отримуємо:

$$\begin{aligned}
R_k^l R_l^k f(x) &= \int_0^{\omega_k} \left(\frac{\partial^N}{\partial t_k^N} \left(\int_0^{\omega_l} \frac{\partial^N}{\partial t_l^N} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k \right) \frac{(\omega_l - t_l)^{N-1}}{(N-1)!} dt_l \right) \right) \times \\
&\quad \times \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) \frac{(\omega_k - t_k)^{N-1}}{(N-1)!} dt_k = \\
&= \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \frac{\partial^{2N}}{\partial t_k^N \partial t_l^N} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) \frac{(\omega_l - t_l)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{(\omega_k - t_k)^{N-1}}{(N-1)!} dt_l dt_k.
\end{aligned}$$

Теорему 2.18 доведено.

Теорема 2.19. Функція

$$\bar{\Lambda}_{M,N} f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(x) L_{k,l} f(x),$$

$$\left. \frac{\partial^s \bar{\Lambda}_{M,N} f(x)}{\partial v_k^s} \right|_{\Gamma_k} = \left. \frac{\partial^s f(x)}{\partial v_k^s} \right|_{\Gamma_k} = \varphi_{k,s}(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N-1}$$

задовольняє умовам

$$\left. \frac{\partial^q L_k^l f(x)}{\partial v_k^q} \right|_{\Gamma_k} = \left. \frac{\partial^q f(x)}{\partial v_k^q} \right|_{\Gamma_k} = \varphi_{k,l}(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad 0 \leq q \leq N-1.$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
D_q^{(m)} \bar{\Lambda}_{M,N} \Big|_{\Gamma_m} &= \sum_{(m,l) \in \mathfrak{R}_m} D_q^{(m)} (h_{m,l}(x) L_{m,l} f(x)) \Big|_{\Gamma_m} = \\
&= \sum_{(m,l) \in \mathfrak{R}_m} \sum_{r=0}^q C_q^r \left(D_r^{(m)} h_{m,l}(x) \right) \Big|_{\Gamma_m} \left(D_{q-r}^{(m)} L_{m,l} f(x) \right) \Big|_{\Gamma_m} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^q C_q^r \left(D_r^{(m)} \sum_{(m,l) \in \mathfrak{R}_m} h_{m,l}(x) \right) \Big|_{\Gamma_m} \left(D_{q-r}^{(m)} f(x) \right) \Big|_{\Gamma_m} = \\
&= \sum_{r=0}^q \delta_{r,0} C_q^r \left(D_{q-r}^{(m)} f(x) \right) \Big|_{\Gamma_m} = \left(D_q^{(m)} f(x) \right) \Big|_{\Gamma_m}, m = \overline{1, M}, q = \overline{0, N-1}.
\end{aligned}$$

Теорему 2.19 доведено.

Теорема 2.20. Для залишку $\bar{R}_{M,N} = I - \bar{\Lambda}_{M,N}$ справедливі зображення

$$\bar{R}_{M,N} = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(x) R_{k,l} f(x).$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(x) \equiv 1,$$

а також формули

$$(L_{k,l} + R_{k,l})f(x) = f(x),$$

можна записати

$$f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(L_{k,l}f(x) + R_{k,l}f(x)).$$

Звідси випливає рівність

$$f(x) - \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(x) L_{k,l}f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} h_{k,l}(x) R_{k,l}f(x).$$

Теорему 2.20 доведено.

2.2.1 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з двох перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом

Нехай задана множина смуг із границями у вигляді двох прямих

$$\Gamma_k : \omega_k(x) \equiv x_1 \omega_{k,1} + x_2 \omega_{k,2} - \gamma_k = 0, \omega_{k,1}^2 + \omega_{k,2}^2 = 1, k = 1, 2.$$

Мають місце наступні вирази

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} \end{vmatrix} = \Delta_{1,2} \neq 0, \tau_k = (\omega_{k,2} - \omega_{k,1}), \Delta_{2,1} = -\Delta_{1,2},$$

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(x_1) = f|_{\Gamma_k} = f\left(x_1, \frac{\gamma_k - x_1 \omega_{k,1}}{\omega_{k,2}}\right), \omega_{k,2} \neq 0,$$

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(x_2) = f|_{\Gamma_k} = f\left(\frac{\gamma_k - x_2 \omega_{k,2}}{\omega_{k,1}}, x_2\right), \omega_{k,1} \neq 0,$$

$A_{1,2} = (x_{1,1,2}, x_{2,1,2})$ – розв’язок системи рівнянь $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$, де

$$x_{1,1,2} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \omega_{1,2} \\ \gamma_2 & \omega_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta_{1,2}}, x_{2,1,2} = \frac{\begin{vmatrix} \omega_{1,1} & \gamma_1 \\ \omega_{2,1} & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\Delta_{1,2}}.$$

Будемо використовувати тотожність

$$A_{1,2} - \frac{\tau_1}{\Delta_{1,2}} \omega_2(x) \equiv x + \frac{\tau_2}{\Delta_{2,1}} \omega_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,1,2} - \frac{\omega_{1,2}}{\Delta_{1,2}} \omega_2(x) \equiv x_1 + \frac{\omega_{2,2}}{\Delta_{2,1}} \omega_1(x) \\ x_{2,1,2} - \frac{\omega_{1,1}}{\Delta_{1,2}} \omega_2(x) \equiv x_2 + \frac{\omega_{2,1}}{\Delta_{2,1}} \omega_1(x) \end{cases},$$

Очевидно, що

$$f\left(A_{1,2} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x)\right) \equiv \varphi_l\left(A_{1,2} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x)\right), k \neq l; k, l = 1, 2.$$

Теорема 2.21. Якщо сліди $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ задовольняють в точці $A_{1,2}$ умову С.М. Нікольського $\varphi_1(A_{1,2}) = \varphi_2(A_{1,2})$, то оператор

$$\Lambda_{1,2} f(x) = \varphi_1\left(A_{1,2} - \frac{\tau_1}{\Delta_{1,2}} \omega_2(x)\right) + \varphi_2\left(A_{1,2} - \frac{\tau_2}{\Delta_{2,1}} \omega_1(x)\right) - \varphi_1(A_{1,2})$$

має властивості

$$\Lambda_{1,2} f(x)|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x)|_{\Gamma_k}, k = 1, 2.$$

При цьому, якщо $f(x)$ є неперервною разом із своїми похідними до другого порядку включно, то для залишку наближення функції $f(x)$ з допомогою оператора $\Lambda_{1,2} f(x)$ виконується рівність

$$f(x) - \Lambda_{1,2} f(x) = \int_0^{\omega_1(x)} \int_0^{\omega_2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} f\left(A_{1,2} - \frac{\tau_1}{\Delta_{1,2}} t_2 - \frac{\tau_2}{\Delta_{2,1}} t_1\right) dt_1 dt_2.$$

2.2.2. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з трьох перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом

Нехай задана множина смуг із границями у вигляді трьох прямих

$$\Gamma_k : \omega_k(x) \equiv x_1 \omega_{k,1} + x_2 \omega_{k,2} - \gamma_k = 0, \omega_{k,1}^2 + \omega_{k,2}^2 = 1, k = \overline{1,3}.$$

Мають місце наступні вирази

$$\Delta_{1,2,3} = \begin{vmatrix} \omega_{1,2} & \omega_{1,1} & -\gamma_1 \\ \omega_{2,2} & \omega_{2,1} & -\gamma_2 \\ \omega_{3,2} & \omega_{3,1} & -\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_{i,k} = \begin{vmatrix} \omega_{i,1} & \omega_{i,2} \\ \omega_{k,1} & \omega_{k,2} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_{k,i} = -\Delta_{i,k}, k \neq i, \tau_k = (\omega_{k,2} - \omega_{k,1}),$$

$A_{k,l} = (x_{1,k,l}, x_{2,k,l})$ – розв'язок системи рівнянь $\omega_k = 0, \omega_l = 0, k \neq l, k, l = \overline{1,3}$,

де

$$x_{1,k,l} = \begin{vmatrix} \gamma_k & \omega_{k,2} \\ \gamma_l & \omega_{l,2} \end{vmatrix} / \Delta_{k,l}, x_{2,k,l} = \begin{vmatrix} \omega_{k,1} & \gamma_k \\ \omega_{l,1} & \gamma_l \end{vmatrix} / \Delta_{k,l}.$$

Теорема 2.22. Якщо сліди $\varphi_k(x), k = \overline{1,3}$ задовольняють в точках $A_{k,l}$ умови С.М. Нікольського

$$\varphi_k(A_{k,l}) = \varphi_l(A_{k,l}), k \neq l; k, l = \overline{1,3},$$

то оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_3 f(x) = & \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(A_{2,3})} \left(\varphi_2 \left(A_{2,3} - \frac{\tau_2}{\Delta_{2,3}} \omega_3(x) \right) + \varphi_3 \left(A_{2,3} - \frac{\tau_3}{\Delta_{3,2}} \omega_2(x) \right) - \varphi_3(A_{2,3}) \right) + \\ & + \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(A_{1,3})} \left(\varphi_1 \left(A_{1,3} - \frac{\tau_1}{\Delta_{1,3}} \omega_3(x) \right) + \varphi_3 \left(A_{1,3} - \frac{\tau_3}{\Delta_{3,1}} \omega_1(x) \right) - \varphi_1(A_{1,3}) \right) + \\ & + \frac{\omega_3(x)}{\omega_3(A_{1,2})} \left(\varphi_1 \left(A_{1,2} - \frac{\tau_1}{\Delta_{1,2}} \omega_2(x) \right) + \varphi_2 \left(A_{1,2} - \frac{\tau_2}{\Delta_{2,1}} \omega_1(x) \right) - \varphi_2(A_{1,2}) \right). \end{aligned}$$

має властивості

$$\Lambda_3 f(x)|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x)|_{\Gamma_k}, k = \overline{1,3}.$$

При цьому, якщо $f(x)$ є неперервною разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, то для залишку $R_3 f = (I - \Lambda_3)f$ виконується рівність

$$R_3 f(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{k,l})} \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_l} f \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) dt_k dt_l.$$

Приклад 2.4. Якщо $\omega_1 \equiv x_1$, $\omega_2 \equiv x_2$, $\omega_3 \equiv (1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, то

$$\begin{aligned} \Lambda_3 f(x) = & x_1 (\varphi_2(x_1 + x_2, 0) + \varphi_3(1 - x_2, x_2) - \varphi_3(1, 0)) + \\ & + x_2 (\varphi_1(0, x_1 + x_2) + \varphi_3(x_1, 1 - x_1) - \varphi_1(0, 1)) + \\ & + (1 - x_1 - x_2) (\varphi_1(0, x_2) + \varphi_2(x_1, 0) - \varphi_2(0, 0)). \end{aligned}$$

2.2.3. Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі з M перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом

Нехай задана множина смуг із границями у вигляді M прямих

$$\Gamma_k : \omega_k(x) \equiv x_1 \omega_{k,1} + x_2 \omega_{k,2} - \gamma_k = 0, \omega_{k,1}^2 + \omega_{k,2}^2 = 1, k = \overline{1, M}.$$

Мають місце наступні вирази

$$\Delta_{i,k} = \begin{vmatrix} \omega_{i,1} & \omega_{i,2} \\ \omega_{k,1} & \omega_{k,2} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_{k,i} = -\Delta_{i,k}, k \neq i, \tau_k = (\omega_{k,2} - \omega_{k,1}),$$

$A_{k,l} = (x_{1,k,l}, x_{2,k,l})$ – розв’язок системи рівнянь $\omega_k = 0, \omega_l = 0, k \neq l, k, l = \overline{1, M}$.

Теорема 2.23. Якщо сліди $\varphi_k(x), k = \overline{1, M}$ задовольняють в точках $A_{k,l}$ умови С.М. Нікольського

$$\varphi_k(A_{k,l}) = \varphi_l(A_{k,l}), k \neq l; k, l = \overline{1, M},$$

то оператор

$$\Lambda_M f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^M \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{k,l})} \times \\ \times \left(\varphi_k \left(A_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} \omega_l(x) \right) + \varphi_l \left(A_{k,l} - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} \omega_k(x) \right) - \varphi_k(A_{k,l}) \right).$$

має властивості

$$\Lambda_M f(x)|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x)|_{\Gamma_k}, k = \overline{1, M}.$$

При цьому, якщо $f(x)$ є неперервною разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно $f^{(p_1, p_2)}, 0 \leq p_1, p_2 \leq 1$, то для залишку $R_M f = (I - \Lambda_M)f$ виконується рівність

$$R_M f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^M \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(\Lambda_{k,l})} \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_l} f \left(\Lambda_{k,l} - \frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}} t_k \right) dt_k dt_l.$$

Теорема 2.24. Число підобластей, які утворюються між M перетинних смуг, ширина яких прямує до нуля та жодні три з яких не перетинаються в одній точці можна обчислити таким чином:

$$N = 1 + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Нехай задана система смуг вигляду:

$$S_i : \alpha_i \leq \omega_i(x, y) \leq \beta_i, i = \overline{1, n}, \quad \omega_i := a_i x + b_i y - c_i, \cdot a_i^2 + b_i^2 = 1.$$

Вважаємо відомими також рельєфи поверхні $S : z = f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$ над кожною смугою: $f_i(x, y) = f(x, y)|_{S_i}, i = \overline{1, n}$. Треба за цією інформацією відновити (можливо наближено) функцію $f(x, y)$. Нижче викладемо один з можливих підходів до розв'язання цієї задачі.

Теорема 2.25. У випадку, коли всі смуги паралельні одній і мають спільні тільки границі (тобто, не накладаються одна на одну)

$$S_i : \alpha_i \leq \omega_i(x, y) \leq \alpha_{i+1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad -\infty < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1} < \infty,$$

то задача розв'язується тривіально:

$$O(\{f_i\}; x, y) = f_k(x, y), \quad (x, y) \in S_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Приділимо більше уваги загальному випадку. Введемо до розгляду такі позначення:

$$S_{k,p} = S_k \cap S_p, \quad f_{k,p}(x, y) = f(x, y) \Big|_{S_{k,p}} = f_k(x, y) \Big|_{S_{k,p}} = f_p(x, y) \Big|_{S_{k,p}},$$

$$\Omega_{ik}(x, y) = \begin{cases} \omega_i(x, y) - \alpha_{ik}, & \omega_i(x, y) < \alpha_{ik} \\ 0, & \alpha_{ik} \leq \omega_i(x, y) \leq \beta_{ik}, \\ \omega_i(x, y) - \beta_{ik}, & \omega_i(x, y) > \beta_{ik} \end{cases}$$

$$G_{ik}(x, y) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \Omega_{ij}^2(x, y) \Big/ \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \Omega_{ij}^2(x, y), \quad i = \overline{1, n}.$$

Очевидно,

$$G_i(x, y) \Big|_{S_p} = \begin{cases} 1, & p = i, \\ 0, & p \neq i, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^M G_i(x, y) \equiv 1.$$

Ці властивості функцій $G_i(x, y)$ дають змогу довести справедливність наступної теореми.

Теорема 2.26. Якщо сліди $f_i(x, y)$ функції $f(x, y)$ на смугах $S_i, i = \overline{1, n}$ задовольняють умову $f_i(x, y) \in C(R^2)$, $i = \overline{1, n}$, то оператор

$$O(\{f_i\}; x, y) = \sum_{i=1}^n G_i(x, y) f_i(x, y) - \sum_{S_{k,p} \neq \emptyset} G_k(x, y) G_p(x, y) f_{k,p}(x, y)$$

має такі властивості:

$$O(\{f_i\}; x, y) \in C(R^2); O(\{f_i\}; x, y) \Big|_{S_q} = f_q(x, y) \Big|_{S_q}, \quad q = \overline{1, n}.$$

Доведення. Запишемо (для $q = \overline{1, n}$)

$$\begin{aligned} O(\{f_i\}; x, y) \Big|_{S_q} &= \sum_{i=1}^n G_i(x, y) f_i(x, y) \Big|_{S_q} - \\ &- \sum_{S_{k,p} \neq \emptyset} G_k(x, y) G_p(x, y) f_{k,p}(x, y) \Big|_{S_q} = \\ &= f_q(x, y) \Big|_{S_q} + \sum_{i=1, i \neq q}^n f_{i,q}(x, y) \Big|_{S_{i,q}} - \sum_{k=1, k \neq q}^n f_{k,q}(x, y) \Big|_{S_{k,q}} = \\ &= f_q(x, y) \Big|_{S_q}. \end{aligned}$$

Теорема 2.26 доведена.

Отже, оператори $O(\{f_i\}; x, y)$ дають змогу наближено відтворювати невідому поверхню у точках між смугами за інформацією про неї, заданою на вказаних смугах.

2.3 Математичне моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на неперетинних системі смуг, обмежених прямими із криволінійними границями, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних

Дана система смуг

$$G_k = \{y_{k,1}(x) \leq y \leq y_{k,2}(x), x \in \mathbb{R}\}, k = \overline{1, m}, \quad (2.28)$$

взагалі кажучи перетинних, на кожній із цих смуг задається деяке зображення у вигляді функцій.

$$f(x, y)|_{G_k} = f_k(x, y), k = \overline{1, m}. \quad (2.29)$$

Об'єднання множин $\bigcup_{k=1}^m G_k$ дає область G непошкоджених ділянок зображення. Точки зображення, які не потрапили до G належать області пошкоджених точок

$$\bar{G} = \mathbb{R}^2 \setminus G = \bigcup_{k=1}^m G_k,$$

$$\bar{G}_{k,k+1} = \{y_{k,2}(x) \leq y \leq y_{k+1,1}(x), x \in \mathbb{R}\}, k = \overline{1, m-1}.$$

Введемо до розгляду оператор

$$\Theta f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in G_k, k = \overline{1, m}; \\ O_{k,k+1} f(x, y) & (x, y) \in \bar{G}_{k,k+1}, k = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (2.30)$$

де оператор $O_{k,k+1} f(x, y)$ може бути представлений у вигляді:

$$O_{k,k+1}f(x, y) = H_{1,k,k+1}(x, y)f(x, y_{k,2}(x)) + H_{2,k,k+1}(x, y)f(x, y_{k+1,1}(x)), \quad (2.31)$$

$$H_{1,k,k+1}(x, y) = \frac{y - y_{k+1,1}(x)}{y_{k,2}(x) - y_{k+1,1}(x)}, \quad H_{2,k,k+1}(x, y) = \frac{y - y_{k,2}(x)}{y_{k+1,1}(x) - y_{k,2}(x)}.$$

$f(x, y_{k,2}(x))$ та $f(x, y_{k+1,1}(x))$ – сліди функцій $f_k(x, y)$ та $f_{k+1}(x, y)$ на границях смуг $y_{k,2}(x)$ та $y_{k+1,1}(x)$ відповідно.

Будемо вважати оператор (2.30) математичною моделлю поверхні, яка на кожній із смуг (2.28) точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора (2.31).

Теорема 2.27. Оператор (2.30) має такі властивості:

$$\Theta f(x, y_{k,1}(x)) = f(x, y_{k,1}(x)), \quad \Theta f(x, y_{k,2}(x)) = f(x, y_{k,2}(x)), \quad k = \overline{1, m} \quad (2.32)$$

Теорема 2.28. Оператор (2.31) для випадку двох довільних суміжних смуг i та $i + 1$ має такі властивості:

якщо $f_i(x, y) \in C(G_i)$ та $f_{i+1}(x, y) \in C(G_{i+1})$, то результат відновлення поверхні оператором $\Theta_{i,i+1}f(x, y) \in C(G_i \cup \overline{G_{i,i+1}} \cup G_{i+1})$.

Доведення. Очевидно, що функції $H_{1,i,i+1}(x, y)$ та $H_{2,i,i+1}(x, y)$ мають такі властивості:

$$H_{1,i,i+1}(x, y)\Big|_{y=y_{i,2}} = 1, \quad H_{1,i,i+1}(x, y)\Big|_{y=y_{i+1,1}} = 0,$$

$$H_{2,i,i+1}(x, y)\Big|_{y=y_{i,2}} = 0, \quad H_{2,i,i+1}(x, y)\Big|_{y=y_{i+1,1}} = 1.$$

Тому

$$\Theta_{i,i+1}f(x,y) = \begin{cases} f_i(x,y) & (x,y) \in G_i; \\ O_{i,i+1}f(x,y) & (x,y) \in \overline{G_{i,i+1}}; \\ f_{i+1}(x,y) & (x,y) \in G_{i+1}, \end{cases}$$

має властивості $\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_i \cup \overline{G_{i,i+1}} \cup G_{i+1})$, оскільки

$$f_i(x,y) \in C(G_i), f_{i+1}(x,y) \in C(G_{i+1}), O_{i,i+1}f(x,y) \in C(\overline{G_{i,i+1}}).$$

Теорему 2.28 доведено.

Теорема 2.29. Оператор (2.30) на системі з k смуг має такі властивості:

якщо $\forall f_i(x,y) \in C(G_i)$, $i = \overline{1,k}$, то оператор $\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G})$.

Доведення. Оскільки згідно із твердженням теореми 2.28, справедливе твердження

$$\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_i \cup \overline{G_{i,i+1}} \cup G_{i+1})$$

то

$$\Theta f(x,y) \in C\left(\bigcup_{i=1}^k G_i \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G_{i,i+1}}\right).$$

Оскільки $\bigcup_{i=1}^k G_i = G$ та $\bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{G_{i,i+1}} = \overline{G}$, то

$$\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G}).$$

Теорему 2.29 доведено.

Теорема 2.30. Залишок наближення функції $f(x, y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$f(x, y) - \Theta f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in G_i, i = \overline{1, m}; \\ R_{i, i+1} f(x, y) & (x, y) \in \overline{G}_{i, i+1}, i = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$R_{i, i+1} f(x, y) = H_{1, i, i+1}(x, y) \int_{y_{i,2}(x)}^y \frac{\partial^r f(x, t)}{\partial t^r} \frac{(y_{i,2}(x) - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt +$$

$$+ H_{2, i, i+1}(x, y) \int_{y_{i+1,1}(x)}^y \frac{\partial^r f(x, t)}{\partial t^r} \frac{(y_{i+1,1}(x) - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$H_{1, i, i+1}(x, y) \frac{(y_{i,2}(x) - y)^q}{q!} + H_{2, i, i+1}(x, y) \frac{(y_{i+1,1}(x) - y)^q}{q!} = 0.$$

Доведення. Той факт, що в областях $G_i, i = \overline{1, m}$ похибка наближення дорівнює нулю впливає безпосередньо з припущення.

$$f(x, y)|_{G_k} = f_k(x, y), k = \overline{1, m}.$$

Нехай $r=1$. Тоді $R_{i, i+1} f(x, y)$ матиме вигляд:

$$R_{1, i, i+1} f(x, y) = H_{1, i, i+1}(x, y) \int_{y_{i,2}(x)}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + H_{2, i, i+1}(x, y) \int_{y_{i+1,1}(x)}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt =$$

$$= H_{1, i, i+1}(x, y) [f(x, y) - f(x, y_{i,2}(x))] + H_{2, i, i+1}(x, y) [f(x, y) - f(x, y_{i+1,1}(x))] =$$

$$= [H_{1, i, i+1}(x, y) + H_{2, i, i+1}(x, y)] f(x, y) -$$

$$-\left[H_{1,i,i+1}(x,y)f(x,y_{i,2}(x)) + H_{2,i,i+1}(x,y)f(x,y_{i+1,1}(x)) \right].$$

Оскільки

$$H_{1,i,i+1}(x,y) + H_{2,i,i+1}(x,y) = \frac{y - y_{k+1,1}(x)}{y_{k,2}(x) - y_{k+1,1}(x)} + \frac{y - y_{k,2}(x)}{y_{k+1,1}(x) - y_{k,2}(x)} = 1.$$

та маючи на увазі (2.31) маємо

$$R_{1,i,i+1}f(x,y) = f(x,y) - \Theta f(x,y). \quad (2.33)$$

Нехай $r = 2$. Тоді $R_{i,i+1}f(x,y)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} R_{2,i,i+1}f(x,y) &= H_{1,i,i+1}(x,y) \int_{y_{i,2}(x)}^y \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} (y_{i,2}(x) - t) dt + \\ &+ H_{2,i,i+1}(x,y) \int_{y_{i+1,1}(x)}^y \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} (y_{i+1,1}(x) - t) dt = \\ &= H_{1,i,i+1}(x,y) \left[\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} (y_{i,2}(x) - t) \right) \Big|_{y_{i,2}(x)}^y - \int_{y_{i,2}(x)}^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt \right] + \\ &+ H_{2,i,i+1}(x,y) \left[\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} (y_{i+1,1}(x) - t) \right) \Big|_{y_{i+1,1}(x)}^y - \int_{y_{i+1,1}(x)}^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt \right] = \\ &= \left[H_{1,i,i+1}(x,y)(y_{i,2}(x) - t) + H_{2,i,i+1}(x,y)(y_{i+1,1}(x) - t) \right] \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \\ &+ H_{1,i,i+1}(x,y) \int_{y_{i,2}(x)}^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt + H_{2,i,i+1}(x,y) \int_{y_{i+1,1}(x)}^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Зважаючи, що

$$H_{1,i,i+1}(x,y)(y_{i,2}(x) - y) + H_{2,i,i+1}(x,y)(y_{i+1,1}(x) - y) = 0$$

та маючи на увазі (2.33) маємо

$$R_{2,i,i+1}f(x,y) = R_{1,i,i+1}f(x,y) = f(x,y) - \Theta f(x,y).$$

Аналогічно справедливе і для $r > 2$.

Теорему 2.30 доведено.

Приклад 2.5. Нехай зображення поверхні описується функціями на областях:

$$f(x,y)|_{g_1(x,y)>0} = e^{\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}},$$

$$f(x,y)|_{g_2(x,y)<0} = e^{\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}},$$

$$g_1(x,y) = 1 + 0.5\sin x + y,$$

$$g_2(x,y) = -1 + 0.5\cos x + y.$$

На рисунку 2.11 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні на системі смуг із криволінійними границями.

На рисунку 2.12 наведено результат відновлення поверхні за допомогою оператора (2.30).

Аналогічні висновки можна зробити для випадку, коли система смуг має вигляд:

$$G_k = \{x_{k,1}(y) \leq x \leq x_{k,2}(y), y \in \mathbb{R}\}, k = \overline{1, m}, \quad (2.34)$$

на кожній з яких задані функції:

$$f(x, y)|_{G_k} = f_k(x, y), k = \overline{1, m}.$$

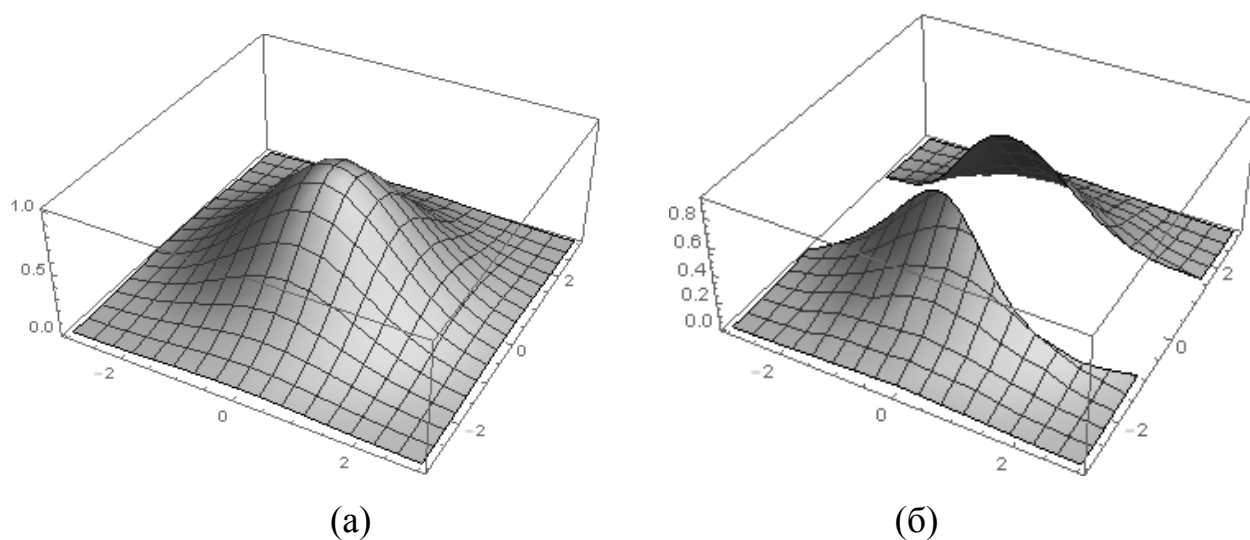


Рисунок 2.11 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні на системі смуг із криволінійними границями)

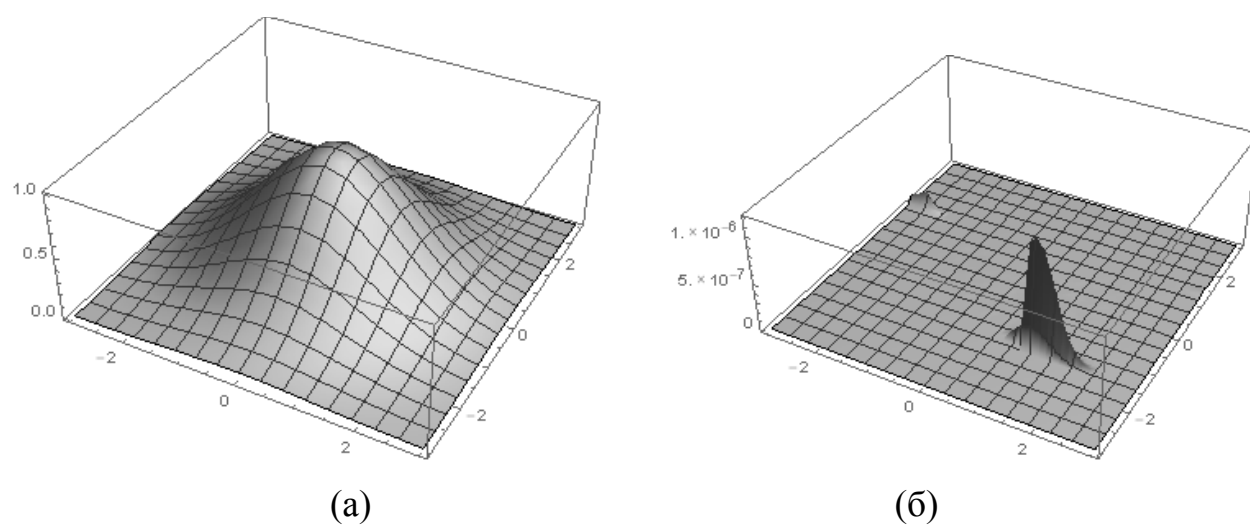


Рисунок 2.12 – Результат відновлення поверхні (а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

Пошкоджені області матимуть вигляд:

$$\bar{G}_{k, k+1} = \{x_{k,2}(y) \leq x \leq x_{k+1,1}(y), y \in \mathbb{R}\}, k = \overline{1, m-1}.$$

Оператор (2.30) матиме той самий вигляд проте оператор (2.31) матиме вигляд:

$$O_{k,k+1}f(x,y) = H_{1,k,k+1}(x,y)f(x_{k,2}(y),y) + H_{2,k,k+1}(x,y)f(x_{k+1,1}(y),y), \quad (2.35)$$

$$H_{1,k,k+1}(x,y) = \frac{x - x_{k+1,1}(y)}{x_{k,2}(y) - x_{k+1,1}(y)}, \quad H_{2,k,k+1}(x,y) = \frac{x - x_{k,2}(y)}{x_{k+1,1}(y) - x_{k,2}(y)}.$$

$f(x_{k,2}(y),y)$ та $f(x_{k+1,1}(y),y)$ – сліди функцій $f_k(x,y)$ та $f_{k+1}(x,y)$ на границях смуг $x_{k,2}(y)$ та $x_{k+1,1}(y)$ відповідно.

Оператор (2.30) є математичною моделлю поверхні, яка на кожній із смуг (2.34) точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора (2.35).

Далі наведено низку теорем для операторів (2.35). Доведення теорем аналогічне теоремам наведеним вище для операторів (2.31).

Теорема 2.31. Оператор (2.30) має такі властивості:

$$\Theta f(x_{k,1}(y),y) = f(x_{k,1}(y),y), \quad \Theta f(x_{k,2}(y),y) = f(x_{k,2}(y),y), \quad k = \overline{1,m}.$$

Теорема 2.32. Оператор (2.35) для випадку двох довільних суміжних смуг i та $i+1$ має такі властивості:

якщо $f_i(x,y) \in C(G_i)$ та $f_{i+1}(x,y) \in C(G_{i+1})$, то результат відновлення поверхні оператором $\Theta_{i,i+1}f(x,y) \in C(G_i \cup \overline{G_{i,i+1}} \cup G_{i+1})$.

Теорема 2.33. Оператор (2.30) на системі з k смуг має такі властивості:

якщо $\forall f_i(x,y) \in C(G_i)$, $i = \overline{1,k}$, то оператор $\Theta f(x,y) \in C(G \cup \overline{G})$.

Теорема 2.34. Залишок наближення функції $f(x,y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$f(x, y) - \Theta f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in G_i, i = \overline{1, m}; \\ R_{i, i+1} f(x, y) & (x, y) \in \overline{G}_{i, i+1}, i = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$R_{i, i+1} f(x, y) = H_{1, i, i+1}(x, y) \int_{x_{i,2}(y)}^x \frac{\partial^r f(t, y)}{\partial t^r} \frac{(x_{i,2}(y) - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt + \\ + H_{2, i, i+1}(x, y) \int_{x_{i+1,1}(y)}^x \frac{\partial^r f(t, y)}{\partial t^r} \frac{(x_{i+1,1}(y) - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$H_{1, i, i+1}(x, y) \frac{(x_{i,2}(y) - x)^q}{q!} + H_{2, i, i+1}(x, y) \frac{(x_{i+1,1}(y) - x)^q}{q!} = 0.$$

Окремо слід виділити випадок смуг, границі яких представлені у вигляді замкнутого контуру. Для такого виду пошкоджень ефективним буде застосування операторів інтерстріпації в полярних координатах:

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

При цьому

$$\Theta \tilde{f}(r, \varphi) = \begin{cases} \tilde{f}_k(r, \varphi) & (r, \varphi) \in G_k, k = \overline{1, m}; \\ O_{k, k+1} \tilde{f}(r, \varphi) & (r, \varphi) \in \overline{G}_{k, k+1}, k = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$G_k = \{(r, \varphi) : r_{k,1}(\varphi) \leq r \leq r_{k,2}(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\overline{G}_{k, k+1} = \{(r, \varphi) : r_{k,2}(\varphi) \leq r \leq r_{k+1,1}(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де оператор $O_{k, k+1} \tilde{f}(r, \varphi)$ може бути представлений за допомогою поліномів Лагранжа:

$$O_{k,k+1}\tilde{f}(r,\varphi) = \tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi)\tilde{f}(r_{k,2}(\varphi),\varphi) + \tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi)\tilde{f}(r_{k+1,1}(\varphi),\varphi), \quad (2.37)$$

$$\tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi) = \frac{r - r_{k+1,1}(\varphi)}{r_{k,2}(\varphi) - r_{k+1,1}(\varphi)}, \quad \tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi) = \frac{r - r_{k,2}(\varphi)}{r_{k+1,1}(\varphi) - r_{k,2}(\varphi)}.$$

Теорема 2.35. Залишок наближення функції $\tilde{f}(x,y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$\tilde{f}(r,\varphi) - \Theta\tilde{f}(r,\varphi) = \begin{cases} 0 & (r,\varphi) \in G_i, i = \overline{1,m} \\ R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) & (r,\varphi) \in \overline{G}_{i,i+1}, i = \overline{1,m-1} \end{cases}$$

$$R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) = \tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i,2}(\varphi)}^r \frac{\partial^k \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^k} \frac{(r_{i,2}(\varphi) - t)^{k-1}}{(k-1)!} dt +$$

$$+ \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r \frac{\partial^k \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^k} \frac{(r_{i+1,1}(\varphi) - t)^{k-1}}{(k-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \frac{(r_{i,2}(\varphi) - r)^q}{q!} + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \frac{(r_{i+1,1}(\varphi) - r)^q}{q!} = 0.$$

Доведення. Той факт, що в областях $G_i, i = \overline{1,m}$ похибка наближення дорівнює нулю впливає безпосередньо з припущення.

$$\tilde{f}(r,\varphi)|_{G_k} = \tilde{f}_k(r,\varphi), \quad k = \overline{1,m}.$$

Нехай $k=1$. Тоді $R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
R_{1,i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) &= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i,2}(\varphi)}^r \frac{\partial f(t,\varphi)}{\partial t} dt + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r \frac{\partial f(t,\varphi)}{\partial t} dt = \\
&= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) [\tilde{f}(r,\varphi) - \tilde{f}(r_{i,2}(\varphi),\varphi)] + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) [\tilde{f}(r,\varphi) - \tilde{f}(r_{i+1,1}(\varphi),\varphi)] = \\
&= [\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi)] f(r,\varphi) - \\
&\quad - [\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \tilde{f}(r_{i,2}(\varphi),\varphi) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \tilde{f}(r_{i+1,1}(\varphi),\varphi)].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) = \frac{r - r_{i+1,1}(\varphi)}{r_{i,2}(\varphi) - r_{i+1,1}(\varphi)} + \frac{r - r_{i,2}(\varphi)}{r_{i+1,1}(\varphi) - r_{i,2}(\varphi)} = 1.$$

та маючи на увазі (2.37) маємо

$$R_{1,i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) = \tilde{f}(r,\varphi) - \Theta\tilde{f}(r,\varphi). \quad (2.38)$$

Нехай $k = 2$. Тоді $R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
R_{2,i,i+1}\hat{f}(r,\varphi) &= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i,2}(\varphi)}^r \frac{\partial^2 \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^2} (r_{i,2}(\varphi) - t) dt + \\
&\quad + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \int_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r \frac{\partial^2 \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^2} (r_{i+1,1}(\varphi) - t) dt = \\
&= \tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi) \left[\left(\frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} (r_{i,2}(\varphi) - t) \right) \Big|_{r_{i,2}(\varphi)}^r - \int_{r_{i,2}(\varphi)}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt \right] + \\
&\quad + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi) \left[\left(\frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} (r_{i+1,1}(\varphi) - t) \right) \Big|_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r - \int_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r \frac{\partial \tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t} dt \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[\tilde{H}_{1,i,i+1}(r, \varphi)(r_{i,2}(\varphi) - t) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r, \varphi)(r_{i+1,1}(\varphi) - t) \right] \frac{\partial \tilde{f}(r, \varphi)}{\partial r} + \\ + \tilde{H}_{1,i,i+1}(r, \varphi) \int_{r_{i,2}(\varphi)}^r \frac{\partial \tilde{f}(t, \varphi)}{\partial t} dt + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r, \varphi) \int_{r_{i+1,1}(\varphi)}^r \frac{\partial \tilde{f}(t, \varphi)}{\partial t} dt.$$

Зважаючи, що

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r, \varphi)(r_{i,2}(\varphi) - r) + \tilde{H}_{2,i,i+1}(r, \varphi)(r_{i+1,1}(\varphi) - r) = 0$$

та маючи на увазі (2.38) маємо

$$R_{2,i,i+1} \tilde{f}(r, \varphi) = R_{1,i,i+1} \tilde{f}(r, \varphi) = \tilde{f}(r, \varphi) - \Theta \tilde{f}(r, \varphi).$$

Аналогічно справедливе і для $k > 2$.

Теорему 2.35 доведено.

Приклад 2.6. Нехай зображення поверхні описується функціями на областях:

$$f(x, y) \Big|_{x^2+y^2 < g_1(x,y)} = e^{\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}, \\ f(x, y) \Big|_{x^2+y^2 > g_2(x,y)} = e^{\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}, \\ g_1(x, y) = 1 + 0.1 \cos(10 \arctan(x, y)), \\ g_2(x, y) = 4 + \sin(10 \arctan(x, y)).$$

На рисунку 2.13 наведено зображення оригіналу поверхні та зображення поверхні із замкнутим контуром.

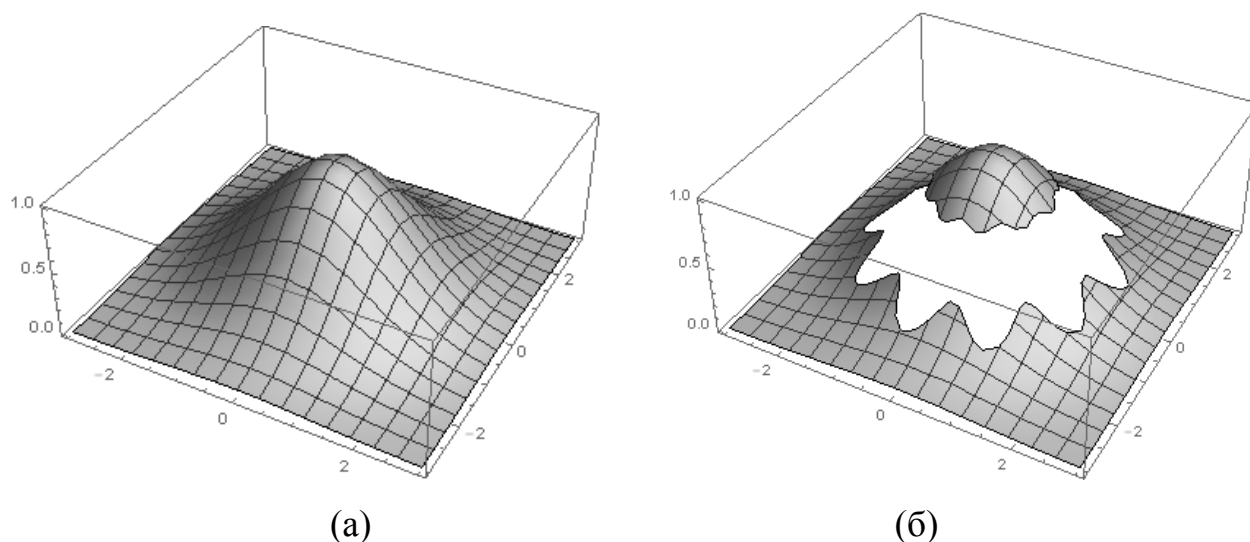


Рисунок 2.13 – Зображення поверхні (а – оригінал зображення; б – зображення поверхні із замкнутим контуром)

Для відновлення зображення поверхні в даному випадку пропонується замінити Декартову систему координат полярною (рисунок 2.14).

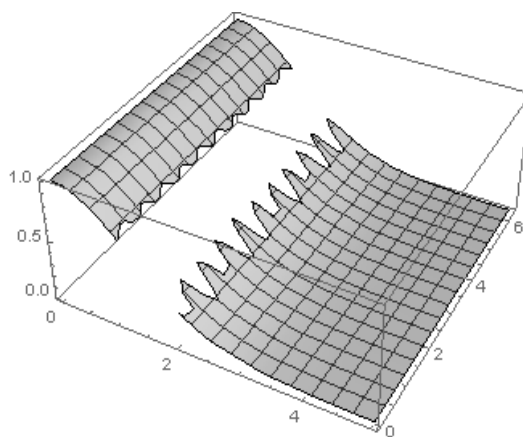


Рисунок 2.14 – Зображення поверхні із замкнутим контуром у полярній системі координат

На рисунку 2.15 наведено результат відновлення поверхні за допомогою оператора (2.36) у полярній системі координат

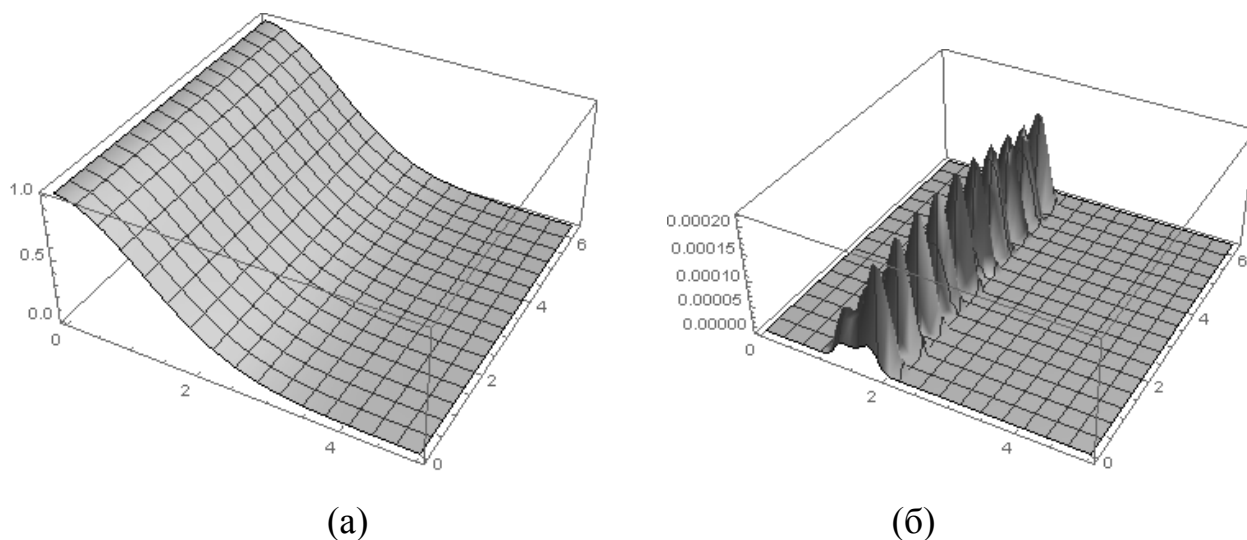


Рисунок 2.15 – Результат відновлення поверхні у полярній системі координат
(а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

На рисунку 2.16 наведено результат відновлення поверхні у Декартовій системі координат.

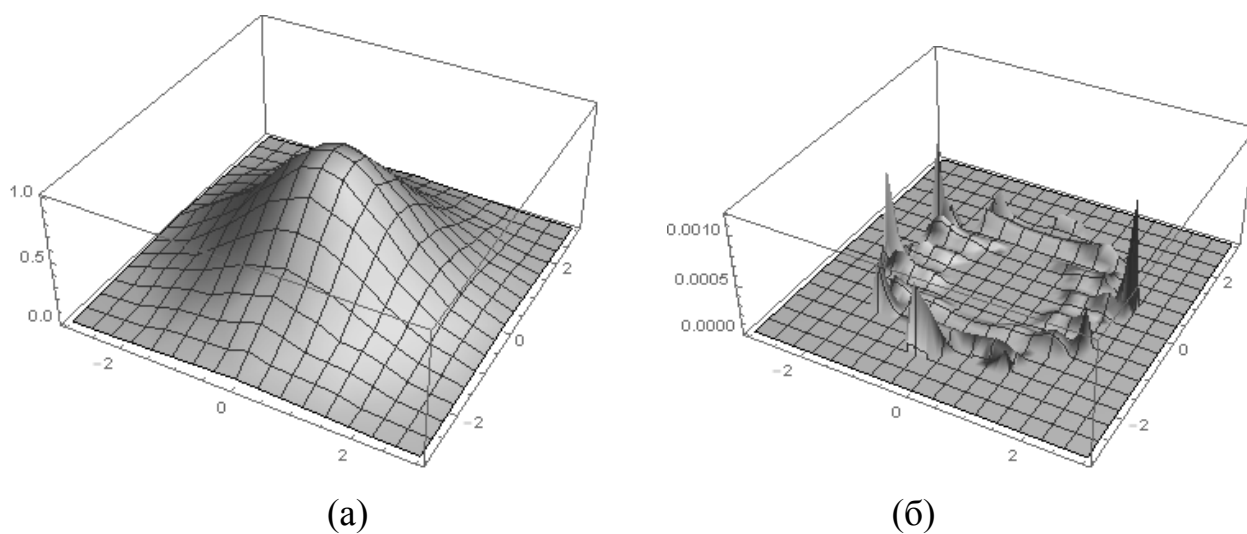


Рисунок 2.16 – Результат відновлення поверхні у Декартовій системі координат
(а – відновлена поверхня; б – абсолютна похибка відновлення)

Висновки до розділу 2

1. На основі розроблених в попередніх роботах операторів інтерстріпації, набули подальшого розвитку методи відновлення двовимірних поверхонь із

пошкодженнями у вигляді смуг, що паралельні осям координат, із використанням узагальнених поліномів Шепарда, Шепарда-Литвина, Лагранжа та Ерміта.

2. Вперше побудована математична модель поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних на системах смуг, границі яких перетинаються під довільним кутом, жодні три з яких не перетинаються в одній точці, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються лінійними функціями загального вигляду.

3. Вперше побудовані математичні моделі поверхні тіла із використанням операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються деякими наперед відомими неперервними функціями.

4. Вперше наведено та досліджено метод математичного моделювання поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних, інформація про яку відома лише на системі смуг, границі яких представляють собою замкнуті криві.

5. Запропоновані в даному розділі оператори інтерстріпації можуть бути використані для відновлення пошкоджених сигналів, отриманих за допомогою аерокосмічної зйомки, даних сканування поверхні за допомогою радіолокатора, розміщеного на штучному супутнику планети, який рухається вздовж відповідних смуг, даних сейсмічної розвідки корисних копалин тощо.

6. Усі отримані в розділі 2 результати добре узгоджуються із попередніми результатами досліджень в області операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних. Тобто, оператори інтерстріпації для випадку границь невідомих областей у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом, у випадку якщо прямі розташовані паралельно до осей координат дають аналогічні результати, що і результати попередніх досліджень для операторів інтерстріпації із границями, паралельними осям координат. Аналогічно і для

операторів інтерстріпації для випадку криволінійних границь невідомих областей: якщо функції границі описують прямі, паралельні осям координат.

Всі теоретичні твердження розділу 2 доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм.

Основні результати другого розділу опубліковано в роботах [2-5, 7, 10, 13].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [14-70].

3 МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ ЗА ВІДОМОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ НА СИСТЕМІ СМУГ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРСТРІПАЦІЇ

В даному розділі наведено методи для відновлення пошкоджених двовимірних сигналів (наприклад, інформація яка мітиться у графічних файлах). Під пошкодженнями мається на увазі, наприклад, втрата пакетів при передачі даних по мережі або її перенавантаження. Оцінка справжніх значень втрачених даних необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення(подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

3.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку, коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких паралельні осям координат.

Вважаємо, що зображення поверхні визначається матрицею M розмірності $m \times n$ у відтинках сірого. Розіб'ємо цю матрицю на підматриці вигляду

$$M^{1,k} = M_{i,j}, i = \overline{\alpha_k, \beta_k}, j = \overline{1, n}, k \geq 2, \quad (3.1)$$

$$M^{2,l} = M_{i,j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{\gamma_l, \delta_l}, l \geq 2. \quad (3.2)$$

Отримані в результаті такого розбиття об'єднання матриць $M^{1,k}$ та $M^{2,l}$ будуть представляти собою смуги із відомою інформацією про поверхню. Інформація між смугами вважається невідомою:

$$\overline{M}^{1,k,k+1} = M_{i,j}, i = \overline{\beta_k, \alpha_{k+1}}, j = \overline{1, n}, k \geq 1, \quad (3.3)$$

$$\overline{M}^{2,l,l+1} = M_{i,j}, i = \overline{1,m}, j = \overline{\delta_l, \gamma_{l+1}}, l \geq 1. \quad (3.4)$$

Для серії обчислювальних експериментів оберемо зображення поверхні (рис. 3.1), з якого видалимо ділянки зображення для їх подальшого відновлення.



Рисунок 3.1 – Тестове зображення

Розмірність матриці зображення: 328×217 .

Для обчислювальних експериментів оберемо наступні параметри:

$$\alpha = \{19, 44, 69, 94, 119, 144, 169, 194, 219, 244, 269, 294, 319\},$$

$$\beta = \{14, 39, 64, 89, 114, 139, 164, 189, 214, 239, 264, 289, 314\},$$

$$\gamma = \{23, 48, 73, 98, 123, 148, 173, 198\},$$

$$\delta = \{18, 43, 68, 93, 118, 143, 168, 193\}.$$

3.1.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді вертикальних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі η вертикальних смуг $M^{1,k}$ вигляду (3.1).

Тоді для відновлення невідомих ділянок зображення $\overline{M}^{1,k,k+1}$ вигляду (3.3) пропонується використовувати оператор

$$O_{1,k,k+1}M = \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} M_{\alpha_{k+1}, j} + \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} M_{\beta_k, j}. \quad (3.5)$$

Теорема 3.1. Оператор $O_{1,k,k+1}$ має такі властивості:

$$(O_{1,k,k+1}M)_{\alpha_{k+1}, j} = M_{\alpha_{k+1}, j}, \quad (O_{1,k,k+1}M)_{\beta_k, j} = M_{\beta_k, j}, \quad k = \overline{1, \eta - 1}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{1,k}, \quad k = \overline{1, \eta}; \\ (O_{1,k,k+1}M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1}, \quad k = \overline{1, \eta - 1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{1,k}$, $k = \overline{1, \eta}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{1,k,k+1}$, $k = \overline{1, \eta - 1}$.

Приклад 3.1. Залишимо у матриці зображення M (рис. 3.1) лише вертикальні смуги. Зображення поверхні відомо лише на системі з 10 смуг, наведених на рисунку 3.2(а). На рисунку 3.2(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.5).

3.1.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді горизонтальних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі μ горизонтальних смуг $M^{2,l}$ вигляду (3.2).



(а)

(б)

Рисунок 3.2 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі вертикальних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

Тоді для відновлення невідомих ділянок зображення $\overline{M}^{2,l,l+1}$ вигляду (3.4) пропонується використовувати оператор

$$O_{2,l,l+1}M = \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{i, \gamma_{l+1}} + \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{i, \delta_l}. \quad (3.7)$$

Теорема 3.2. Оператор $O_{2,l,l+1}$ має такі властивості:

$$(O_{2,l,l+1}M)_{i, \delta_l} = M_{i, \delta_l}, \quad (O_{2,l,l+1}M)_{i, \gamma_{l+1}} = M_{i, \gamma_{l+1}}, \quad l = \overline{1, \mu - 1}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.8)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{2,l}, \quad l = \overline{1, \mu}; \\ (O_{2,l,l+1}M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{2,l,l+1}, \quad l = \overline{1, \mu - 1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{2,l}$, $l = \overline{1, \mu}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{2,l,l+1}$, $l = \overline{1, \mu - 1}$.

Приклад 3.2. Залишимо у матриці зображення M (рис. 3.1) лише горизонтальні смуги.

Зображення поверхні відомо лише на системі з 14 смуг, наведених на рисунку 3.3(а).

На рисунку 3.3(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.7).

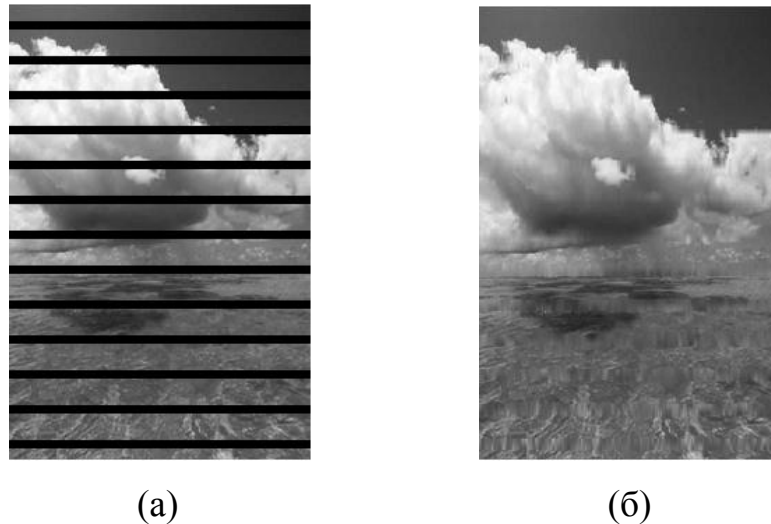


Рисунок 3.3 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі горизонтальних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

3.1.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді перетинних взаємоперпендикулярних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі η вертикальних смуг $M^{1,k}$ вигляду (3.1) та системі μ горизонтальних смуг $M^{2,l}$ вигляду (3.2).

Невідомі ділянки зображення, що потребують відновлення в даному випадку матимуть вигляд прямокутників:

$$\overline{\Pi}^{k,l} = [\beta_k, \alpha_{k+1}] \times [\delta_l, \gamma_{l+1}], \quad k = \overline{1, \eta-1}, \quad l = \overline{1, \mu-1}. \quad (3.9)$$

Для відновлення невідомих ділянок зображення (3.9) пропонується використовувати оператор

$$\begin{aligned} O_{k,l} M &= [O_{1,k,k+1} + O_{2,l,l+1} - O_{1,k,k+1} O_{2,l,l+1}] M = \\ &= \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} M_{\alpha_{k+1}, j} + \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} M_{\beta_k, j} + \\ &\quad + \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{i, \gamma_{l+1}} + \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{i, \delta_l} - \\ &\quad - \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{\alpha_{k+1}, \gamma_{l+1}} - \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{\alpha_{k+1}, \delta_l} - \\ &\quad - \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{\beta_k, \gamma_{l+1}} - \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{\beta_k, \delta_l}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{1,k}, \quad k = \overline{1, \eta}; \\ M_{i,j} & (i, j) \in M^{2,l}, \quad l = \overline{1, \mu}; \\ (O_{k,l} M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{\Pi}^{k,l}, \quad k = \overline{1, \eta-1}, \quad l = \overline{1, \mu-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній із смуг $M^{1,k}$, $k = \overline{1, \eta}$ або $M^{2,l}$, $l = \overline{1, \mu}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора

$$O_{k,l}, k = \overline{1, \eta - 1}, l = \overline{1, \mu - 1}.$$

Приклад 3.3. Залишимо у матриці зображення М (рис. 3.1) лише ділянки зображення, що є перетином вертикальних смуг, наведених на рис. 3.2(а), та горизонтальних смуг, наведених на рис. 3.3(а).

Необхідно відновити інформацію на прямокутних ділянках зображення, які наведено на рис. 3.4(а).

На рисунку 3.4(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.10).

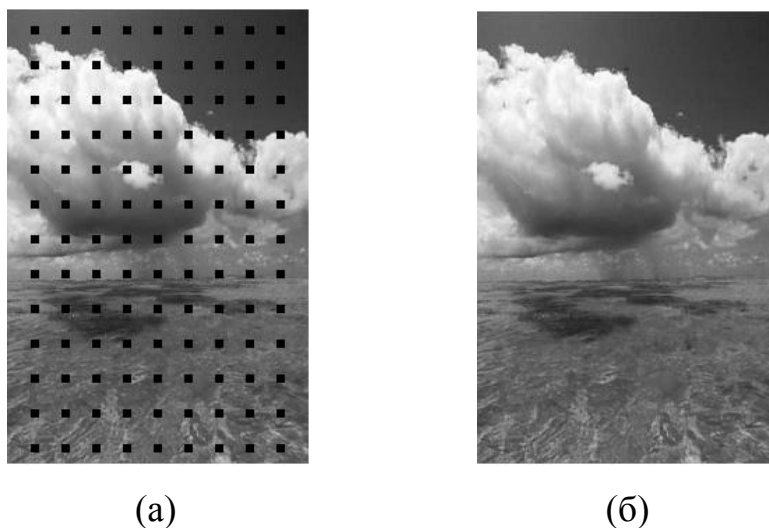


Рисунок 3.4 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі взаємоперпендикулярних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

3.1.4 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді системі кадрів, границі яких паралельні осям координат

Нехай зображення деякої поверхні М відомо лише на системі прямокутників вигляду:

$$\Pi_{k,l} = [\alpha_k, \beta_k] \times [\gamma_l, \delta_l], k = \overline{1, \eta}, l = \overline{1, \mu}. \quad (3.11)$$

Невідома область зображення в цьому випадку являє собою об'єднання вертикальних смуг (3.3) та горизонтальних смуг (3.4).

Для відновлення поверхні зображення пропонується використовувати алгоритм:

Крок 1. До вхідного зображення застосовується оператор

$$O_I M = \begin{cases} (O_{1,k} M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1}, k = \overline{1, \eta - 1}; \\ (O_{2,l} M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{2,l,l+1}, l = \overline{1, \mu - 1}; \\ M_{i,j} & (i, j) \in \Pi_{k,l}, k = \overline{1, \eta}, l = \overline{1, \mu}. \end{cases}$$

Крок 2. До отриманої поверхні застосовується оператор

$$O_{II} M = \begin{cases} (O_I M)_{i,j} & (i, j) \notin \overline{M}^{1,k,k+1} \cap \overline{M}^{2,l,l+1}, k = \overline{1, \eta - 1}, l = \overline{1, \mu - 1}; \\ (O_{k,l} O_I M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1} \cap \overline{M}^{2,l,l+1}, k = \overline{1, \eta - 1}, l = \overline{1, \mu - 1}. \end{cases}$$

Оператори $O_{1,k} M$, $O_{2,l} M$, $O_{k,l} M$ наведені вище (3.5), (3.7) та (3.10) відповідно.

Приклад 3.4. Залишимо у матриці зображення M (рис. 3.1) лише ділянки зображення, що є об'єднанням вертикальних смуг вигляду (3.3) та горизонтальних смуг вигляду (3.4).

Необхідно відновити поверхню у вигляді прямокутних областей, які наведені на рис. 3.5(а).

На рисунку 3.5(б) наведено результат проміжного кроку наведеного вище алгоритму.

На рисунку 3.5(в) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні.

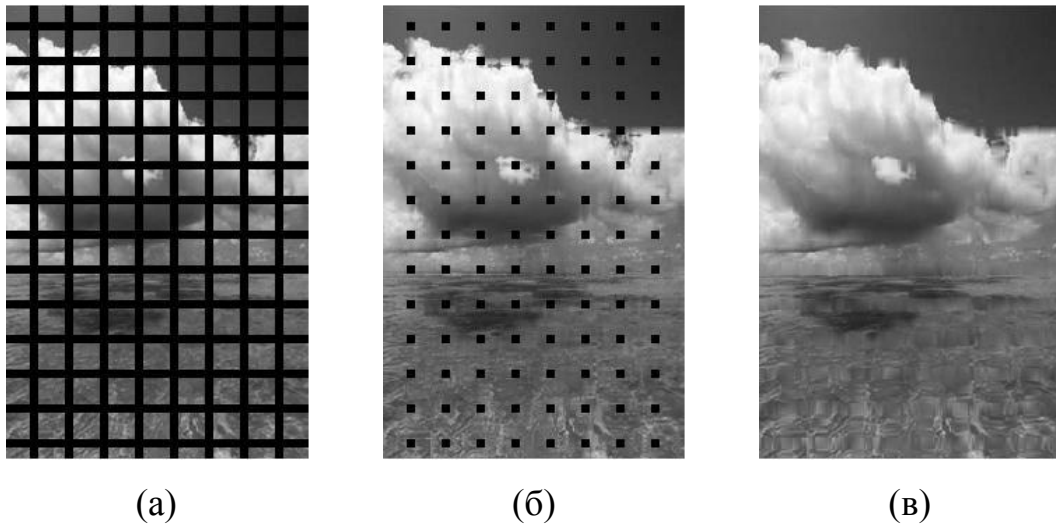


Рисунок 3.5 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі кадрів; б – проміжний результат відновлення; в – результат відновлення зображення)

3.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких розташованими під довільним кутом.

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі m ($m \geq 2$) смуг, розташованих під довільним кутом:

$$M_k = \{M_{i,j}, \omega_{1,k}(i,j) \leq i, j \leq \omega_{2,k}(i,j)\}, k = \overline{1, m}, \quad (3.11)$$

де $\omega_{1,k}(i,j) = \alpha_{1,k}i + \beta_{1,k}j - \gamma_{1,k}$ та $\omega_{2,k}(i,j) = \alpha_{2,k}i + \beta_{2,k}j - \gamma_{2,k}$ – деякі прями, якими обмежена смуга. Причому

$$\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2 = \alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2 = 1, k = \overline{1, m}. \quad (3.12)$$

Поверхня, яку необхідно відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах.

3.2.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді двох смуг, розташованих під довільним кутом,

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі двох смуг вигляду (3.11). Тоді для відновлення невідомої області зображення пропонується використовувати оператор

$$O_2M = \frac{\rho_2(i, j)}{P(i, j)} M_{x_1(i, j), y_1(i, j)} + \frac{\rho_1(i, j)}{P(i, j)} M_{x_2(i, j), y_2(i, j)}, \quad (3.13)$$

$$P(i, j) = \sum_{k=1}^2 \rho_k(i, j); \quad \rho_k(i, j) = \sqrt{(x_k(i, j) - i)^2 + (y_k(i, j) - j)^2};$$

$$x_k(i, j) = \left| \begin{array}{cc} \gamma_k & \beta_k \\ \alpha_k j - \beta_k i & \alpha_k \end{array} \right| / \Delta_k; \quad y_k(i, j) = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \gamma_k \\ -\beta_k & \alpha_k j - \beta_k i \end{array} \right| / \Delta_k; \quad \Delta_k = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{array} \right|.$$

Фактично, $x_k(i, j)$ та $y_k(i, j)$ – це координати точки на k -тій смузі, яка знаходиться на найменшій відстані від точки (i, j) з невідомої області, $\rho_k(i, j)$ – відстань від точки (i, j) до k -тої прямої, $P(i, j)$ – сума відстаней до кожної із смуг.

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i, j} & (i, j) \in M_k, k = \overline{1, 2}; \\ (O_2M)_{i, j} & (i, j) \notin M_k, k = \overline{1, 2}, \end{cases} \quad (3.14)$$

є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні, яка на кожній із смуг $M_k, k = \overline{1, 2}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора O_2 .

Приклад 3.4. Залишимо у матриці зображення M (рис. 3.1) лише ділянки зображення, що є перетином смуг, що обмежені лініями:

$$\cos\left(\frac{\pi}{60}\right)x + \cos\left(\frac{29\pi}{60}\right)y + 160 = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{60}\right)x - \cos\left(\frac{31\pi}{60}\right)y + 155 = 0.$$

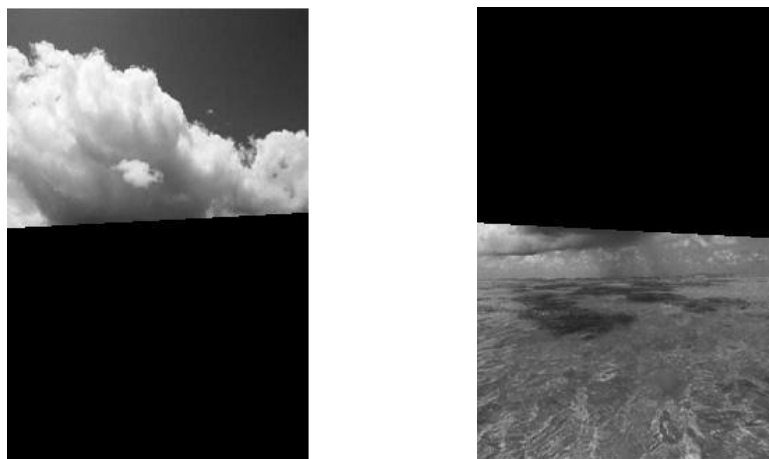


Рисунок 3.6 – Зображення поверхні на вказаних смугах

Вся наявна інформація про поверхню в даному випадку, тобто об'єднання інформації на обох смугах, наведено на рис. 3.7(а). На рисунку 3.7(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.13).



(а)

(б)

Рисунок 3.7 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

3.2.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді m ($m > 2$) смуг, розташованих під довільним кутом.

Нехай $A_{k,l}$, $(k,l) \in \mathfrak{R} = \{(k,l) : \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{k,l}; k \neq l; k,l = \overline{1,m}\}$ – точки перетину прямих Γ_k та Γ_l , які є границями k -тої та l -тої смуг відповідно.

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі m ($m > 2$) смуг вигляду (3.11). Тоді для відновлення невідомої області зображення пропонується використовувати оператор

$$O_m M = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k,l}}^m \frac{\omega_n(i,j)}{\omega_n(A_{k,l})} O_{k,l} M_{i,j}, \quad (3.15)$$

$$O_{k,l} M = \frac{\rho_l(i,j)}{P(i,j)} M_{x_k(i,j), y_k(i,j)} + \frac{\rho_k(i,j)}{P(i,j)} M_{x_l(i,j), y_l(i,j)}. \quad (3.16)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i,j) \in M_k, k = \overline{1,m}; \\ (O_m M)_{i,j} & (i,j) \notin M_k, k = \overline{1,m}, \end{cases} \quad (3.17)$$

є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні, яка на кожній із смуг M_k , $k = \overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора O_m .

Приклад 3.4. Залишимо у матриці зображення M (рис. 3.1) лише ділянки зображення, що є перетином смуг, що обмежені лініями (рис. 3.8):

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)y + 80 = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y + 40 = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y + 200 = 0.$$



Рисунок 3.8 – Зображення поверхні на вказаних смугах

Вся наявна інформація про поверхню в даному випадку, тобто об'єднання інформації на обох смугах, наведено на рис. 3.9(а).

На рисунку 3.9(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.15).

3.2.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді m ($m > 2$) смуг, розташованих під довільним кутом із врахуванням структури зображення

Наведемо алгоритм відновлення зображення поверхні, інформація про яку відома лише на системі перетинних смуг, розташованих під довільним кутом.

Крок 1. На кожній із смуг шукаються розриви першого роду від функції, що описує поверхню. Для цього можна скористатися методами, наведеними у [20-23]. В результаті проведення такої операції отримуємо набір сегментів S_i , $i = \overline{1, n}$ зображення на кожній із смуг.

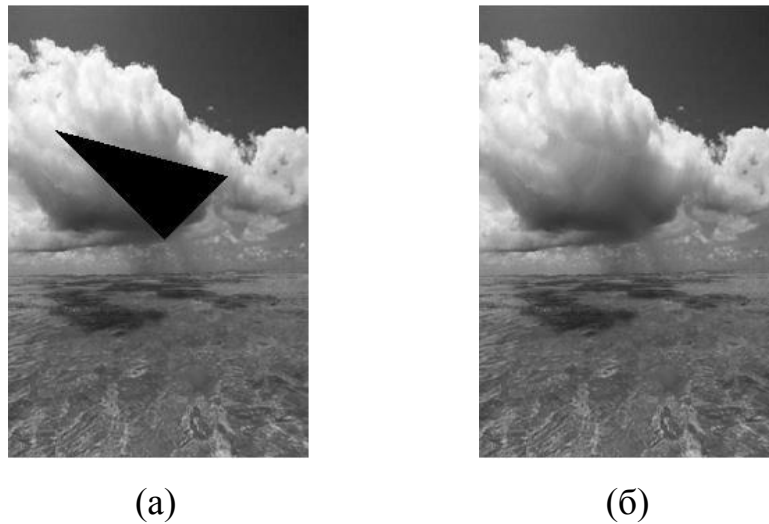


Рисунок 3.9 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

Крок 2. Наближуємо границі $\partial S_i = \omega_i(x, y) \leq 0$, $i = \overline{1, n}$ отриманих сегментів за допомогою поліномів k -го степеня ($k \geq 2$), використовуючи точки розриву відповідного сегменту.

Крок 3. Шукаємо продовження кожного сегменту на іншій смузі. Для цього шукаємо точки перетину отриманих границі сегментів в невідомій області. При цьому якщо такі точки перетину є, то вважаємо, що обидві границі належать одному сегменту і цей сегмент розташовується та декількох смугах одночасно. Якщо таких точок немає, то вважається, що сегмент розташований тільки на одній смузі і його межі не перетинають жодну іншу смугу. Цей процес автоматичний об'єднання сегментів можна замінити штучним об'єднанням сегментів за допомогою ручного їх задання.

Крок 4. Застосовуємо оператор інтерстріпації для відновлення зображення поверхні для кожного із сегментів S_i , $i = \overline{1, n}$, який перетинає смуги p та r , $O_{p,r}$, $p, r = \overline{1, m}$ (3.16).

Приклад 3.5. Нехай дано поверхню тіла у вигляді фантому Шеппа-Логана (від англ., *Shepp-Logan phantom*) [81].



Рисунок 3.10 – Зображення фантому Шеппа-Логана

Залишимо у зображенні фантому зображення, що є перетином смуг, що обмежені лініями:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)y + 80 = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y + 40 = 0.$$



Рисунок 3.11 – Зображення поверхні на вказаних смугах

Вся наявна інформація про поверхню в даному випадку, тобто об'єднання інформації на обох смугах, наведено на рис. 3.12.

На рисунку 3.13(а) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.15).

На рисунку 3.13(б) результат відновлення наведеним вище алгоритмом.

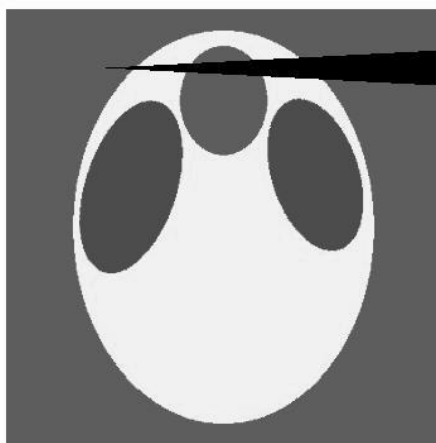


Рисунок 3.12 – Пошкоджене зображення поверхні



(а)



(б)

Рисунок 3.13 – Відновлення зображення поверхні (а – відновлення оператором інтерстріпації без врахування структури зображення; б – відновлення наведеним вище алгоритмом із врахуванням структури зображення)

3.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі неперетинних смуг із криволінійними границями.

Вважаємо, що зображення поверхні відоме на системі $m(m \geq 2)$ криволінійних смуг вигляду:

$$M^{1,k} = \{M_{i,j} : \alpha_k(j) \leq i \leq \beta_k(j)\}, k = \overline{1,m} \quad (3.18)$$

або на системі $n(n \geq 2)$ криволінійних смуг вигляду:

$$M^{2,l} = \{M_{i,j} : \gamma_l(i) \leq j \leq \delta_l(i)\}, l = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

Отримані в результаті такого розбиття об'єднання матриць $M^{1,k}$ та $M^{2,l}$ будуть представляти собою смуги із відомою інформацією про поверхню.

Інформація між смугами вважається невідомою:

$$\overline{M}^{1,k,k+1} = \{M_{i,j} : \beta_k(j) \leq i \leq \alpha_{k+1}(j)\}, k = \overline{1, m-1}, \quad (3.20)$$

$$\overline{M}^{2,l,l+1} = \{M_{i,j} : \delta_l(i) \leq j \leq \gamma_{l+1}(i)\}, l = \overline{1, n-1}. \quad (3.21)$$

Для відновлення невідомих ділянок зображення (3.20) пропонується використовувати оператор:

$$O_{1,k,k+1}M = \frac{i - \beta_k(j)}{\alpha_{k+1}(j) - \beta_k(j)} M_{\alpha_{k+1}(j), j} + \frac{i - \alpha_{k+1}(j)}{\beta_k(j) - \alpha_{k+1}(j)} M_{\beta_k(j), j}, k = \overline{1, m-1}. \quad (3.22)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{1,k}, k = \overline{1, m}; \\ (O_{1,k,k+1}M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1}, k = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{1,k}$, $k = \overline{1, m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{1,k,k+1}$, $k = \overline{1, m-1}$.

Приклад 3.6. Нехай інформація задана на системі смуг із границями вигляду:

$$\alpha_k(j) = \sin\left(\frac{j}{\xi_{1,k}}\right) + \sigma_k, \quad k = \overline{1,9},$$

$$\beta_k(j) = \sin\left(\frac{j}{\xi_{2,k}}\right) + \nu_k, \quad k = \overline{1,9},$$

$$\sigma = \{1, 20, 45, 70, 95, 120, 150, 175, 195\},$$

$$\nu = \{15, 40, 65, 90, 115, 145, 170, 190, 217\},$$

де $\xi_{1,k}(x) \in U[1,10]$, $\xi_{2,k}(x) \in U[1,10]$, $U[a,b]$ – рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.

Вся наявна інформація про зображення поверхні в даному випадку наведена на рисунку 3.14(а). На рисунку 3.14(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.22).



(а)



(б)

Рисунок 3.14 – Результат відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення поверхні; б – відновлене зображення поверхні)

Для відновлення невідомих ділянок зображення (3.21) пропонується використовувати оператор:

$$O_{2,l,l+1}M = \frac{j - \delta_l(i)}{\gamma_{l+1}(i) - \delta_l(i)} M_{i, \gamma_{l+1}(i)} + \frac{j - \gamma_{l+1}(i)}{\delta_l(i) - \gamma_{l+1}(i)} M_{i, \delta_l(i)}, l = \overline{1, n-1}. \quad (3.23)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i,j) \in M^{2,l}, l = \overline{1, n}; \\ (O_{2,l,l+1}M)_{i,j} & (i,j) \in \overline{M}^{2,l,l+1}, l = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{2,l}$, $l = \overline{1, n}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{2,l,l+1}$, $l = \overline{1, n-1}$.

Приклад 3.7. Нехай інформація задана на системі смуг із границями вигляду:

$$\gamma_l(i) = \sin\left(\frac{i}{\xi_{1,l}}\right) + \sigma_l, l = \overline{1, 13},$$

$$\delta_l(i) = \sin\left(\frac{i}{\xi_{2,l}}\right) + \nu_l, l = \overline{1, 13},$$

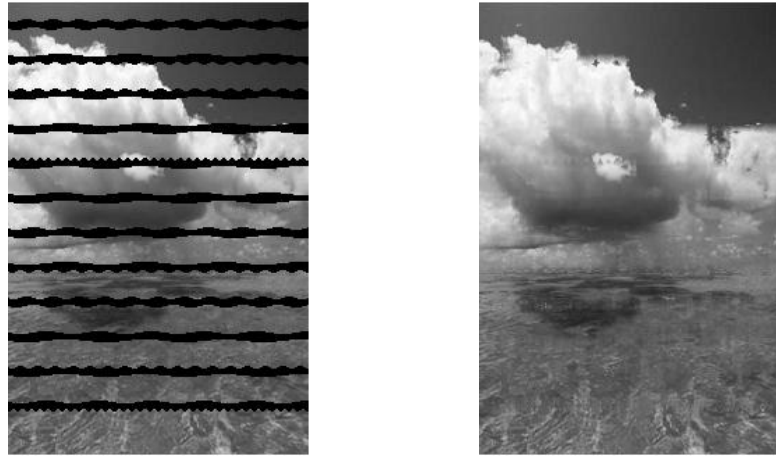
$$\sigma = \{1, 20, 45, 70, 95, 120, 145, 170, 195, 220, 245, 270, 295\},$$

$$\nu = \{15, 40, 65, 90, 115, 140, 165, 190, 215, 240, 265, 290, 328\},$$

де $\xi_{1,l}(x) \in U[1, 10]$, $\xi_{2,l}(x) \in U[1, 10]$, $U[a, b]$ – рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$.

Вся наявна інформація про зображення поверхні в даному випадку наведена на рисунку 3.15(а).

На рисунку 3.15(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.23).



(а)

(б)

Рисунок 3.15 – Результат відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення поверхні; б – відновлене зображення поверхні)

Для випадку коли зображення поверхні відоме лише на системі m ($m \geq 2$) смуг вигляду (3.18) та на системі n ($n \geq 2$) смуг вигляду (3.19). Тобто, границі відомих областей зображення – деякі криві, що можна зобразити у вигляді:

$$\overline{\Pi}^{k,l} = \{M_{i,j} : [\beta_k(j), \alpha_{k+1}(j)] \times [\delta_l(i), \gamma_{l+1}(i)]\}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad l = \overline{1, n-1}. \quad (3.24)$$

Для відновлення невідомих ділянок зображення (3.24) пропонується використовувати оператор:

$$\begin{aligned} O_{k,l} M &= [O_{1,k,k+1} + O_{2,l,l+1} - O_{1,k,k+1} O_{2,l,l+1}] M = \\ &= \frac{i - \beta_k(j)}{\alpha_{k+1}(j) - \beta_k(j)} M_{\alpha_{k+1}(j), j} + \frac{i - \alpha_{k+1}(j)}{\beta_k(j) - \alpha_{k+1}(j)} M_{\beta_k(j), j} + \\ &+ \frac{j - \delta_l(i)}{\gamma_{l+1}(i) - \delta_l(i)} M_{i, \gamma_{l+1}(i)} + \frac{j - \gamma_{l+1}(i)}{\delta_l(i) - \gamma_{l+1}(i)} M_{i, \delta_l(i)} - \\ &- \frac{i - \beta_k(j)}{\alpha_{k+1}(j) - \beta_k(j)} \frac{j - \delta_l(i)}{\gamma_{l+1}(i) - \delta_l(i)} M_{\alpha_{k+1}(j), \gamma_{l+1}(i)} - \\ &- \frac{i - \beta_k(j)}{\alpha_{k+1}(j) - \beta_k(j)} \frac{j - \gamma_{l+1}(i)}{\delta_l(i) - \gamma_{l+1}(i)} M_{\alpha_{k+1}(j), \delta_l(i)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i - \alpha_{k+1}(j)}{\beta_k(j) - \alpha_{k+1}(j)} \frac{j - \delta_l(i)}{\gamma_{l+1}(i) - \delta_l(i)} M_{\beta_k(j), \gamma_{l+1}(i)} - \\
& - \frac{i - \alpha_{k+1}(j)}{\beta_k(j) - \alpha_{k+1}(j)} \frac{j - \gamma_{l+1}(i)}{\delta_l(i) - \gamma_{l+1}(i)} M_{\beta_k(j), \delta_l(i)}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Поверхня

$$\text{OM} = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{1,k}, k = \overline{1, m}; \\ M_{i,j} & (i, j) \in M^{2,l}, l = \overline{1, n}; \\ (O_{k,l}M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{\Pi}^{k,l}, k = \overline{1, m-1}, l = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній із смуг $M^{1,k}$, $k = \overline{1, m}$ або $M^{2,l}$, $l = \overline{1, n}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{k,l}$, $k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n-1}$.

Приклад 3.8. Нехай інформація задана об'єднанням системи смуг із границями вигляду:

$$\alpha_k(j) = \sin\left(\frac{j}{\xi_{1,k}}\right) + \sigma_k, \quad k = \overline{1, 9},$$

$$\beta_k(j) = \sin\left(\frac{j}{\xi_{2,k}}\right) + \nu_k, \quad k = \overline{1, 9},$$

$$\gamma_l(i) = \sin\left(\frac{i}{\zeta_{1,l}}\right) + \eta_l, \quad l = \overline{1, 13},$$

$$\delta_l(i) = \sin\left(\frac{i}{\zeta_{2,l}}\right) + \mu_l, \quad l = \overline{1, 13},$$

$$\sigma = \{1, 20, 45, 70, 95, 120, 150, 175, 195\},$$

$$\nu = \{15, 40, 65, 90, 115, 145, 170, 190, 217\},$$

$$\eta = \{1, 20, 45, 70, 95, 120, 145, 170, 195, 220, 245, 270, 295\},$$

$$\mu = \{15, 40, 65, 90, 115, 140, 165, 190, 215, 240, 265, 290, 328\},$$

де $\xi_{1,k}(x) \in U[1,10]$, $\xi_{2,k}(x) \in U[1,10]$, $\zeta_{1,l}(x) \in U[1,10]$, $\zeta_{2,l}(x) \in U[1,10]$, $U[a,b]$ – рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.

Вся наявна інформація про зображення поверхні в даному випадку наведена на рисунку 3.16(а).

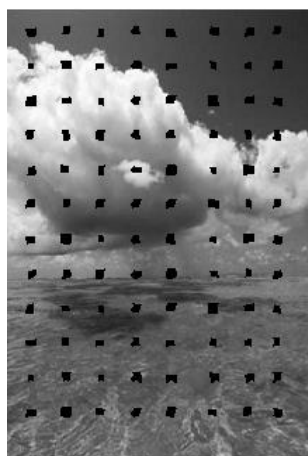
На рисунку 3.16(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (3.25).

Приклад 3.9. Нехай інформація задана на областях із границями вигляду:

$$y + \frac{x}{2} + 40 + \xi_1(x) \leq 0,$$

$$y + \frac{x}{2} + 45 + \xi_2(x) \geq 0,$$

де $\xi_1(x) \in U[1,5]$, $\xi_2(x) \in U[-5,1]$, $U[a,b]$ – рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.



(а)



(б)

Рисунок 3.16 – Результат відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення поверхні; б – відновлене зображення поверхні)

Смуги, на яких присутня наявна інформація про зображення наведена на рисунку 3.17.

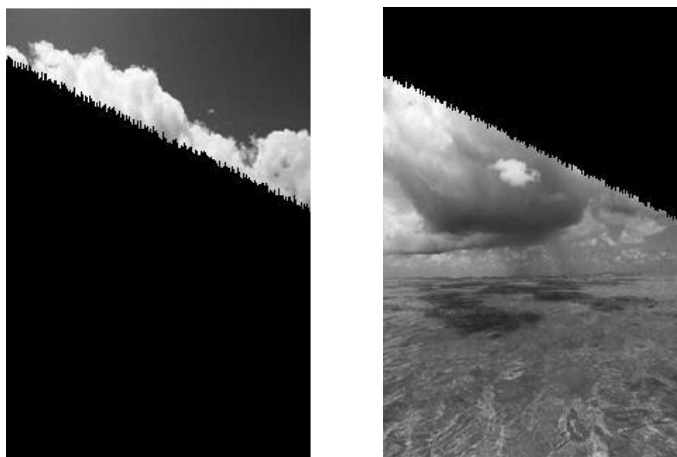
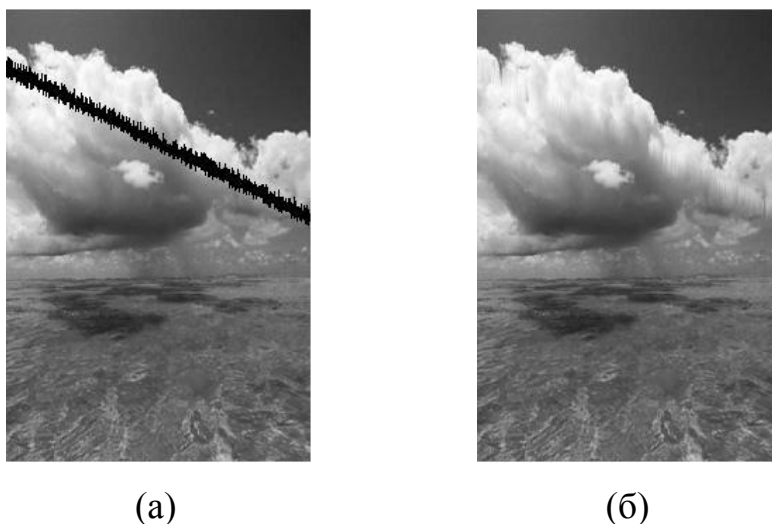


Рисунок 3.17 – Зображення поверхні на смугах

Такі дефекти зображення можуть бути отримані, наприклад, при використанні радару бокового огляду [82].

Зображення поверхні, яку потрібно відновити наведено на рис. 3.18(а).

На рисунку 3.18(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні.



(а)

(б)

Рисунок 3.18 – Результат відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення поверхні; б – відновлене зображення поверхні)

3.4 Застосування операторів інтерстріпації в методах обробки зображень та систем зондування поверхні планети

Дистанційне зондування Землі (ДЗЗ) – спостереження поверхні Землі авіаційними і космічними засобами, оснащеними різними видами знімальної апаратури. Робочий діапазон довжин хвиль, що приймаються знімальної апаратурою, становить від часток мікрометра (видиме оптичне випромінювання) до метрів (радіохвилі). Методи зондування можуть бути пасивні, тобто використовувати природне відбите або вторинне теплове випромінювання об'єктів на поверхні Землі, обумовлене сонячною активністю, і активні, тобто використовувати вимушене випромінювання об'єктів, ініційоване штучним джерелом направленої дії [83].

Дані ДЗЗ, отримані з космічного апарату, характеризуються великою мірою залежності від прозорості атмосфери. Тому на космічних апаратах використовується багатоканальне обладнання пасивного та активного типів, які реєструють електромагнітне випромінювання в різних діапазонах. Апаратура ДЗЗ перших космічних апаратів, запущених в 1960-1970-х рр. була трасового типу - проекція області вимірювань на поверхню Землі являла собою лінію. Пізніше з'явилася і широко поширилася апаратура ДЗЗ панорамного типу - сканери, проекція галузі вимірювань на поверхню Землі яких представляє собою смугу. Космічні апарати дистанційного зондування Землі використовуються для вивчення природних ресурсів Землі та вирішення завдань метеорології. Апарати для дослідження природних ресурсів оснащуються в основному оптичній або радіолокаційної апаратурою. Переваги останньої полягають в тому, що вона дозволяє спостерігати поверхню Землі в будь-який час доби, незалежно від стану атмосфери.

Якість даних, одержуваних у результаті дистанційного зондування, залежить від їх просторової, спектральної, радіометричної і тимчасової роздільної здатності. Просторова роздільна здатність характеризується розміром пікселя (на поверхні Землі), що записується в растрову картинку –

зазвичай варіюється від 1 до 4000 метрів. Спектральна роздільна здатність даних Landsat включають сім смуг, у тому числі інфрачервоного спектра, в межах від 0.07 до 2.1 мкм. Сенсор Hyperion апарату Earth Observing-1 здатний реєструвати 220 спектральних смуг від 0.4 до 2.5 мкм, зі спектральною роздільною здатністю від 0.1 до 0.11 мкм. Радіометрична роздільна здатність – це число рівнів сигналу, які сенсор може реєструвати. Зазвичай варіюється від 8 до 14 біт, що дає від 256 до 16 384 рівнів. Ця характеристика також залежить від рівня шуму в інструменті. Тимчасова роздільна здатність – це частота прольоту супутника над областю поверхні, має значення при дослідженні серій зображень, наприклад при вивченні динаміки лісів.

Спочатку аналіз серій проводився для потреб військової розвідки, зокрема для відстеження змін в інфраструктурі, пересувань супротивника. Для створення точних карт на основі даних дистанційного зондування, необхідна трансформація, що усуває геометричні спотворення. Знімок поверхні Землі апаратом, направленим точно вниз, містить неспотворену картинку тільки в центрі знімка. При зміщенні до країв відстані між точками на знімку і відповідні відстані на Землі все більш різняться. Корекція таких спотворень проводиться в процесі фотограмметрії. З початку 1990-х більшість комерційних супутникових зображень продається вже скоригованими. Крім того, може вимагатися радіометрична або атмосферна корекція. Радіометрична корекція перетворює дискретні рівні сигналу, наприклад від 0 до 255, в їх справжні фізичні значення. Атмосферна корекція усуває спектральні спотворення, внесені наявністю атмосфери.

Лазерне зондування – метод дистанційного зондування. Лазерне зондування проводиться за допомогою спеціальних приладів – лазерних локаторів (лідарів). В атмосферу надсилається лазерне випромінювання. Порівняльний аналіз посилається і прийнятого лідару випромінювання дозволяє визначити дальність, фазовий склад, форму, розміри і концентрацію твердих і рідких частинок, зважених в повітрі, і т.д. Лазерне зондування може

виконуватися як з нерухомих, так і з рухомих об'єктів – автомобілів, кораблів, літаків, вертольотів, космічних апаратів.

Лідари здатні реєструвати просторовий розподіл вуглеводневих аномалій в приземних шарах атмосфери, встановлювати місця протікання в трубопроводах, викиди вуглеводнів і продуктів їх згоряння на родовищах нафти і природного газу, аналізувати вплив на навколишнє середовище об'єктів переробки нафти і газу. Але точність таких визначень до теперішнього часу залишається недостатньо високою для аеропошуку ореолів родовищ, і первинний аналіз часом не може замінити безпосередніх польових спостережень і вимірювань на місцевості.

Автоматизований бортовий лідар дозволяє встановлювати прогнозовану потужність нафто- та газоносних пластів, вміст у них нафти і газу, якісні та кількісні параметри вуглеводневої сировини. За даними аерогеохімічної зйомки можна визначати місця буріння нафтових і газових свердловин, складність умов буріння по вертикальному профілю, гірничо-геологічної характеристики нафто- і газоносних пластів. Крім того, можлива оцінка екологічних та інженерних умов проектування, будівництва та експлуатації свердловин, прокладки трубопроводів та ін. Тим самим значно зменшуються терміни проведення досліджень об'єктів нафтової і газової промисловості, будуть виключені забруднення, скоротяться витрати, пов'язані з розвідувальними роботами.

Зауваження 3.1. Для більшого наближення до практики слід мати на увазі, що функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$ можуть бути задані у вигляді набору знімків, отриманих вздовж смуги, причому знімки можуть накладатися один на одного, тобто мати спільні підобласті, а не тільки спільні границі. Це означає, що для побудови $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$ у точках \mathbb{R}^2 інколи треба використовувати для своєї побудови згладжуючі алгоритми, а не тільки алгоритми, що точно відновлюють поверхню заданої підобласті у смугі S_i , $i = \overline{1, n}$. Крім того, треба вміти продовжувати функції $f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$ за межі смуг. Наведемо один з можливих

алгоритмів такого продовження. Нехай смугі S_i відповідає місцева система координат $\omega_i := a_i x + b_i y - c_i$, $\tau_i := -b_i x + a_i y$. Тоді функція (тут $\omega_i = \omega_i(x, y)$)

$$\tilde{f}_i(x, y) = \begin{cases} f_i(x, y), & (x, y) \in S_i; \\ f_i(x - (\omega_i - \alpha_i)a_i, y - (\omega_i - \alpha_i)b_i), & \omega_i < \alpha_i; \\ f_i(x - (\omega_i - \beta_i)a_i, y - (\omega_i - \beta_i)b_i), & \omega_i > \beta_i, \end{cases}$$

буде неперервною в \mathbb{R}^2 і $\tilde{f}_i(x, y) = f_i(x, y)$, $(x, y) \in S_i$.

Оператори інтерстріпації можна використовувати також для відновлення пошкоджених файлів, які містять графічну інформацію. Наприклад, в процесі передачі по мережі файли можуть бути пошкоджені в результаті помилок при передачі даних або перенавантаженню мережі. Оцінка справжніх значень втрачених пікселів необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

Розглянемо задачу відновлення пошкодженого зображення деякої поверхні Σ . Вважаємо, що зображення поверхні відоме лише на системі m ($m \geq 2$) смуг вигляду:

$$G_k = \{(x, y) : \alpha_k \leq \omega_k(x, y) \leq \beta_k\}, \quad k = \overline{1, m},$$

Поверхня $\Sigma : z = f(x, y)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{G_k} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in G_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Нехай $\mathfrak{R} = \{(k, l) : k \neq l; k, l = \overline{1, m}\}$ – множина всіх можливих комбінацій пар смуг.

Введемо до розгляду наступний оператор:

$$\Theta_m f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in G_k, k = \overline{1, m}; \\ \Lambda_m f(x, y) & (x, y) \notin G_k, k = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$\Lambda_m f(x, y) = \frac{1}{m-1} \sum_{(k, l) \in \mathfrak{R}} \frac{\omega_k(x, y) + \omega_l(x, y)}{\sum_{i=1}^m \omega_i(x, y)} \Lambda_{k, l} f(x, y).$$

Оператор $\Lambda_{k, l} f(x, y)$ – оператор інтерстріпації між k -ю та l -ю смугами:

$$\Lambda_{k, l} f(x, y) = \frac{\rho_l(x, y)}{\rho_k(x, y) + \rho_l(x, y)} f(x_k^*(x, y), y_k^*(x, y)) +$$

$$+ \frac{\rho_k(x, y)}{\rho_k(x, y) + \rho_l(x, y)} f(x_l^*(x, y), y_l^*(x, y)),$$

$$\rho_k(x, y) = \sqrt{(x_k^*(x, y) - x)^2 + (y_k^*(x, y) - y)^2},$$

де $x_k^*(x, y)$ та $y_k^*(x, y)$ – це координати точки на k -тій смузі, яка знаходиться на найменшій відстані від точки (x, y) з невідомої області;

$\rho_k(x, y)$ – відстань від точки (x, y) до k -тої прямої.

Поверхня $z = \Theta_m f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній із смуг $G_k, k = \overline{1, m}$, точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_m f(x, y)$.

Приклад 3.10. Наведемо приклад відновлення пошкодженої фотографії (рисунок 3.19).

На цій фотографії чітко виділяється пошкодження, а саме згин.

Тому виділимо область навколо цього згину і будемо вважати, що інформація в цій області невідома (рисунок 3.20).

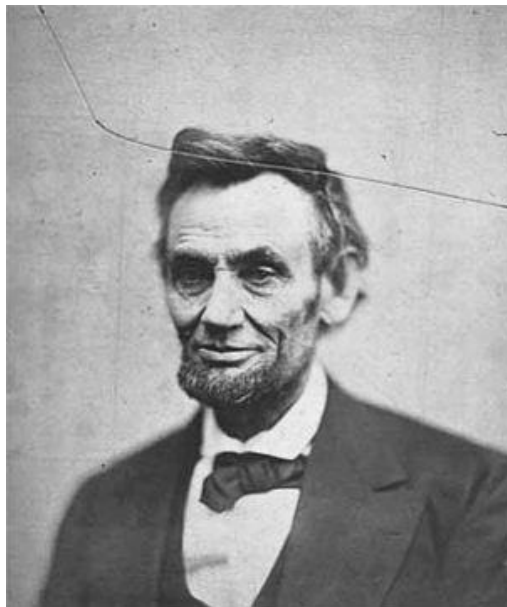


Рисунок 3.19 – Пошкоджена фотографія [70]

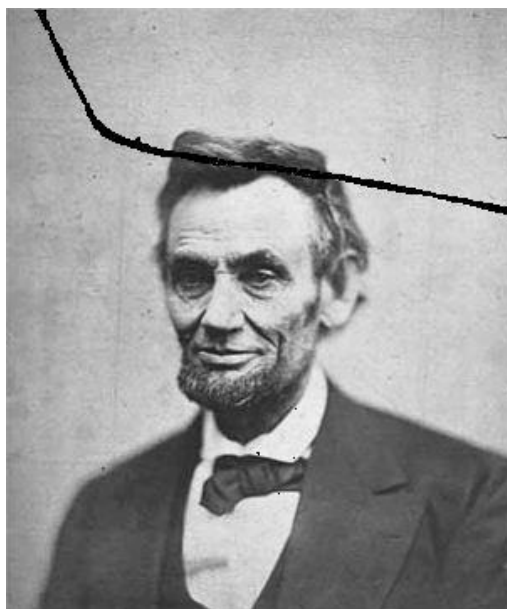


Рисунок 3.20 – Виділення пошкодженої області для відновлення

Поділимо отриману область на дві смуги – область вище пошкодження та область нижче пошкодження.

В результаті отримаємо набір із двох смуг (рисунок 3.21), до яких застосуємо метод узагальненої інтерстріпації для смуг із криволінійними границями. Результат відновлення наведено на рис.3.22.

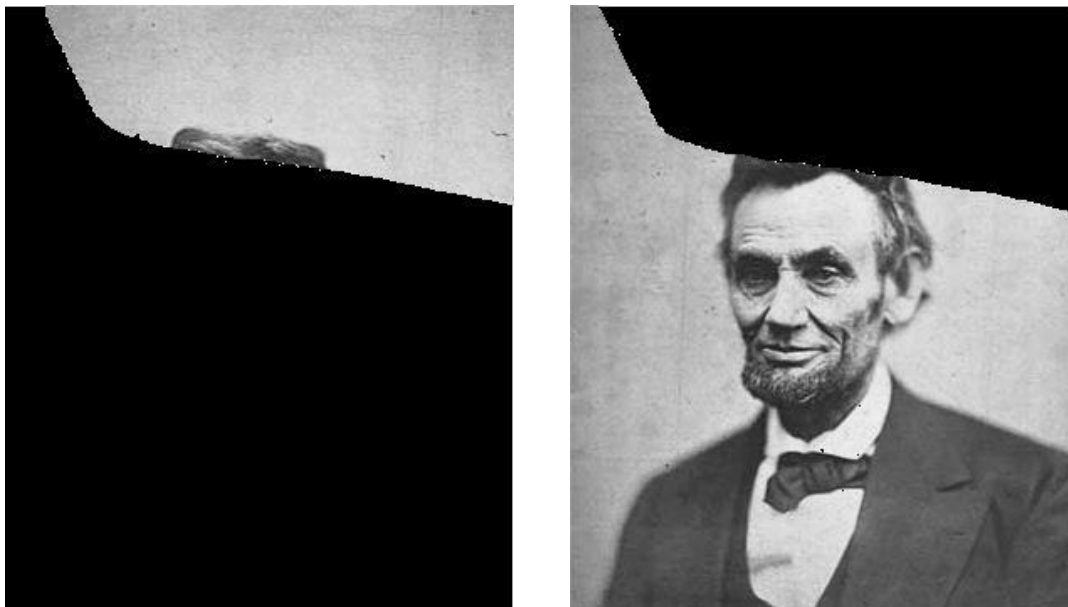
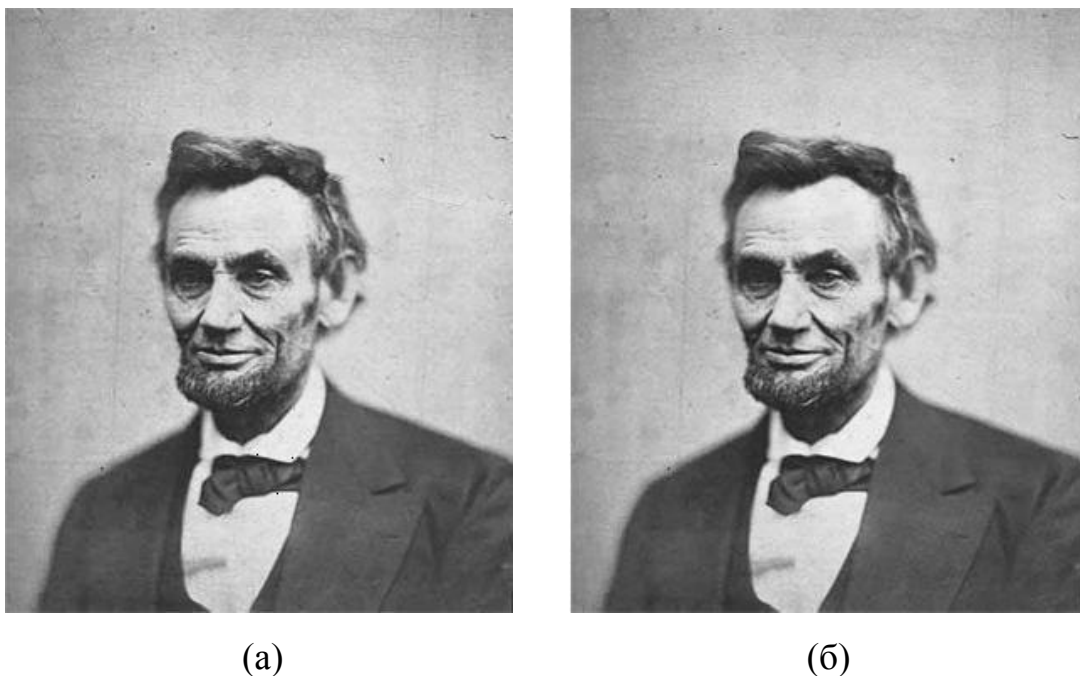


Рисунок 3.21 – Розбиття фотографії на смуги



(а)

(б)

Рисунок 3.22 – Результат усунення дефекту на фотографії (а – відновлення за допомогою інтерстріпації функцій; б – результат відновлення методом, наведеним у роботі) [70].

Зауваження 3.1. На практиці рідко коли вдається знайти функціональну відповідність для границі криволінійної області. Для вирішення такої проблеми можна представити границю у вигляді сплайнів (тригонометричних, поліноміальних тощо). Інший варіант представити інформацію про границю у вигляді масиву точок, зв'язного списку або іншої структури даних.

3.5 Застосування операторів інтерстріпації в розвідці корисних копалин

На даний момент існує ціла низка методів розвідки родовищ корисних копалин: гравіметрія, магніторозвідка, електророзвідка, термічна розвідка, ядерна розвідка та сейсморозвідка.

Сейсмічна розвідка (сейсморозвідка) – це геофізичний метод дослідження будови Землі і геологічного середовища, пошуків і розвідки нафти і газу, а також інших корисних копалин, заснований на вивченні поширення пружних хвиль, порушених штучно за допомогою тих чи інших джерел: вибухів, ударів та ін.

Гірські породи відрізняються по пружним властивостям і тому володіють різними швидкостями поширення пружних хвиль. Це призводить до того, що на кордонах шарів, де швидкості змінюються, можуть утворитися відображені, заломлені, рефрагировані, дифраговані та інші хвилі, реєструючи які на земній поверхні, можна отримати інформацію про швидкісному розрізі, і по ньому судити про геологічну будову [84-87].

Методика сейсморозвідки заснована на вивченні кінематики хвиль або часу пробігу різних хвиль від пункту їх збудження до сейсмоприймачів, що уловлюють швидкості зсуву ґрунту, і їх динаміки або інтенсивності хвиль.

У спеціальних досить складних установках (сейсмостанціях) електричні коливання, створені в сейсмоприймачі дуже слабкими коливаннями ґрунту, посилюються і автоматично реєструються на сейсмограмах і магнітограмах. В результаті їх інтерпретації можна визначити глибини залягання сейсмогеологічних кордонів, їх падіння, простягання, швидкості хвиль, а

використовуючи геологічні дані, встановити геологічну природу виявлених кордонів [88-93].

У сейсморозвідці розрізняють два основні методи: метод відбитих хвиль (МВХ) і метод заломлених хвиль (МЗХ). Менш популярні методи, що використовують інші хвилі. Розв'язання найскладніших задач, пов'язаних з високоточним визначенням геометрії геологічного розрізу (помилки менше 1%), стало можливим завдяки застосуванню трудомістких систем збудження і спостереження, що забезпечують одночасне, іноді багаторазове, знімання інформації з великих площ і її цифрову обробку на ЕОМ. Це забезпечує виділення корисних, частіше одноразово відображених або заломлених хвиль серед безлічі хвиль-перешкод.

За вирішеними задачами розрізняють глибинну, структурну, нафтогазову, рудну, інженерну сейсморозвідку. За місцем проведення сейсморозвідка підрозділяється на наземну (польову), акваторіальну (морську), свердловинну та підземну, а по частотам коливань пружних хвиль можна виділити високочастотну (частоти понад 100 Гц), середньочастотну (частоти в кілька десятків герц) та низькочастотну (частоти менше 10 Гц) сейсморозвідку. Чим вище частота пружних хвиль, тим більше їх загасання і менше глибинність розвідки [94-97].

Сейсморозвідка – дуже важливий і в багатьох випадках найточніший (хоча й найдорожчий і трудомісткий) метод геофізичної розвідки, що застосовується для вирішення різних геологічних задач з глибинністю від декількох метрів (вивчення фізико-механічних властивостей порід) до декількох десятків і навіть сотень кілометрів (вивчення земної кори і верхньої мантії). Однак головне призначення сейсморозвідки – пошук і розвідка нафти і газу.

Приклад 3.11. В процесі розвідки корисних копалин виникають ситуації, коли інформація з тих чи інших причин є недоступною на деяких ділянках області дослідження.

В результаті отримуються неповні дані про кору планети під даною ділянкою.

На рисунку 3.23 зображено перші декілька горизонтів сейсмограми.

Виділяємо пошкоджену область, яку необхідно відновити. На кожному горизонті пошкоджена область розміщена однаково та має вигляд, наведений на рисунку 3.24.

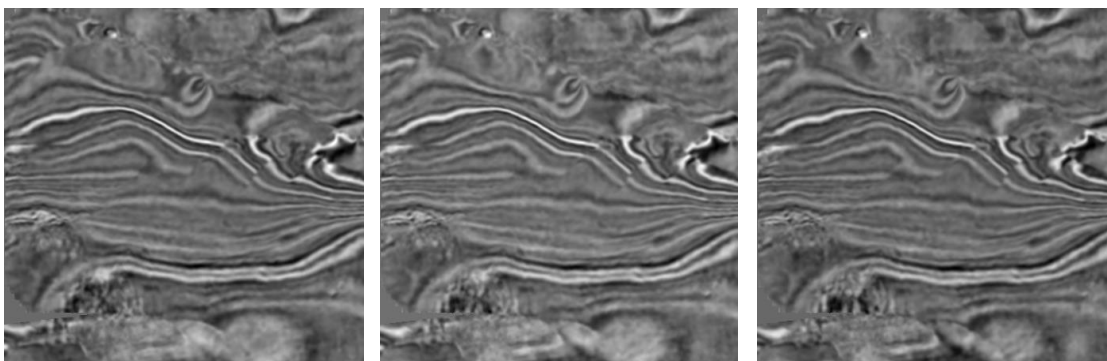


Рисунок 3.23 – Зображення пошкоджених даних сейсмограми

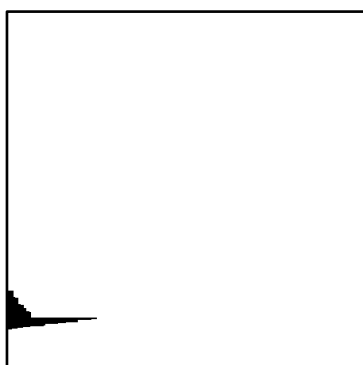


Рисунок 3.24 – Маска пошкодження

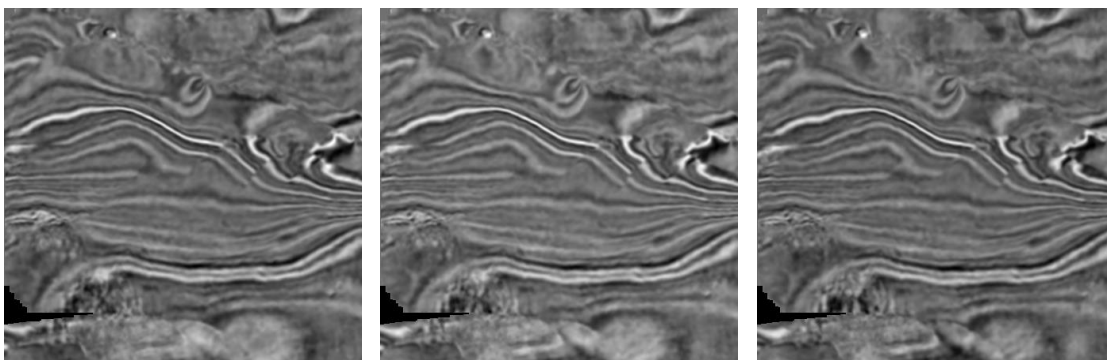


Рисунок 3.25 – Зображення пошкоджених даних сейсмограми

Використовуючи узагальнення операторів інтерстріпації функцій для відновлення даних сейсмічної розвідки отримуємо зображення горизонтів сейсмограми, що наведено на рисунку 3.26.

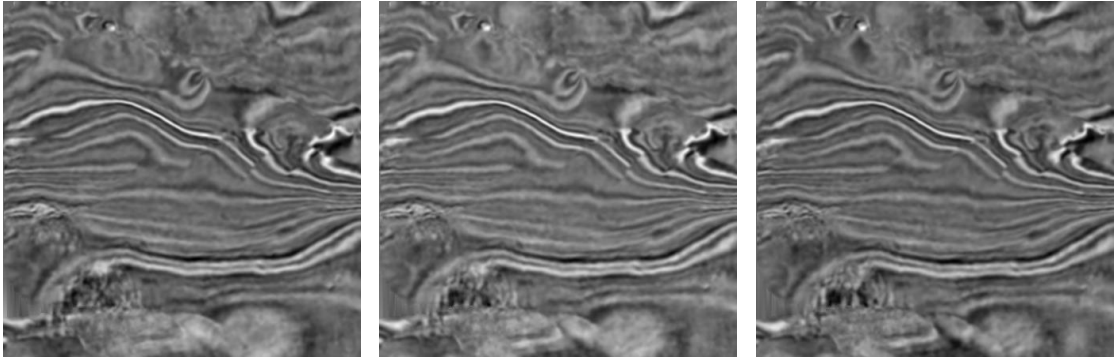


Рисунок 3.26 – Зображення пошкоджених даних сейсмограми

Висновки до розділу 3

1. Уперше розроблено математичні моделі та запропоновано метод відновлення поверхні тіла за допомогою операторів інтерстріпації функцій для випадків смуг із границями у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом. Використання отриманих операторів інтерстріпації для відновлення пошкоджених сигналів дозволяє розширити спектр прикладних задач, до яких можна їх застосовувати, порівняно із попередніми результатами в області інформаційних операторів.

2. Вперше наведено математичні моделі відновлення поверхні тіла за допомогою операторів інтерстріпації функцій для випадків смуг із границями у вигляді криволінійних функцій загального вигляду. Отримані оператори дозволяють відновлювати поверхні для більшої кількості прикладних задач, зокрема для обробки даних радарів бокового огляду.

3. Розроблено метод відновлення поверхні тіла із урахуванням додаткової інформації про структуру поверхні на відомих її ділянках. Цей метод дозволяє більш точно відновлювати поверхню між смугами у випадку якщо на ній

присутні значні розриви, наприклад, обриви, підняття або деякі штучно створені об'єкти.

4. Наведено приклади відновлення пошкоджених двовимірних дискретних сигналів у вигляді деяких тестових зображень із штучно видаленими ділянками зображення для подальшого їх відновлення різними операторами інтерстріпації та порівнянням результатів відновлення із оригіналом зображення.

5. Наведено приклади застосування отриманих операторів інтерстріпації для відновлення фотознімку із пошкодженнями у вигляді заломів та приклад відновлення пошкоджених профілів результатів сейморозвідки корисних копалин в деякому регіоні.

6. Результати застосування операторів інтерстріпації до пошкоджених двовимірних дискретних сигналів показують досить високий рівень відновлення даних порівняно із оригіналом.

7. Усі отримані в розділі 3 результати добре узгоджуються із попередніми результатами досліджень в області операторів інтерстріпації. Тобто, оператори інтерстріпації для випадку границь невідомих областей у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом, у випадку якщо прямі розташовані паралельно до осей координат дають аналогічні результати, що і результати попередніх досліджень для операторів інтерстріпації із границями, паралельними осям координат. Аналогічно і для операторів інтерстріпації для випадку криволінійних границь невідомих областей: якщо функції границі описують прямі, паралельні осям координат.

Всі обчислювальні експерименти розділу 3 були проведені за допомогою створених дисертантом програм.

Основні результати третього розділу опубліковано в роботах [2-7, 11, 12].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [71-97].

4 МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗРИВІВ ФУНКЦІЙ АБО ЇХ ПОХІДНИХ ДЕЯКОГО ПОРЯДКУ

4.1 Метод знаходження точок розриву функції однієї змінної або її похідної деякого порядку

Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими; розривами першого роду функції або деякої її похідної в точках $x_k, k = \overline{1, n}$. Задані вузли розбивають інтервал $[a, b]$ на $n - 1$ частин.

Означення 4.1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відріжку $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ функцію $S(x) \in C^{-1}[a, b]$, яка визначається наступним чином

$$S_{k,k+1}(x) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (4.1)$$

де $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ – параметри сплайну $S_{k,k+1}(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^+ = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f^{(m)}(x), \quad C_{k+1}^- = \lim_{x \rightarrow x_k - 0} f^{(m)}(x), \quad (4.2)$$

де m – деякий порядок похідної.

Означення 4.2. Якщо $\left| \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f^{(m)}(x) - \lim_{x \rightarrow x_k - 0} f^{(m)}(x) \right| < \varepsilon$, то функцію $f(x)$

будемо називати $d^{(m)}\varepsilon$ -неперервною в точці x_k .

Оптимальним набором вузлів будемо називати таку найменшу кількість вузлів, серед яких є точки $d^{(m)}\varepsilon$ -розриву функції, та таку, що розривний сплайн, побудований на їх основі, наближує функцію із заданою точністю.

Викладемо алгоритм знаходження розривів функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах x_k , $k = \overline{1, n}$ за формулою (4.1) з невідомими коефіцієнтами C_k^+, C_{k+1}^- , $k = \overline{1, n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, \dots, C_{n-1}^+, C_n^-)$ з умови з умови (4.2). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у (4.1) отримаємо сплайни $S_{k,k+1}(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення

$$J_k^* = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} J_k(x), \quad J_k(x) = |f^{(m)}(x) - S_{k,k+1}(x)|.$$

Крок 3. Видаляємо з розгляду ті інтервали, на яких побудований сплайн є $d^{(m)}\varepsilon$ -неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Інтервали, що залишилися ділимо навпіл.

Крок 4. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (4.1) та за формулою (4.2) знаходимо вектор коефіцієнтів C .

Перевіряємо виконання умови

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(m)}(x) - S(x)| < \delta,$$

де δ – задана точність наближення.

Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Зауваження 4.1. Якщо за допомогою ділення відрізка навпіл, не потрапляємо точно на точку розриву, то ітераційний процес будемо зупиняти на тій ітерації, починаючи з якої результат не покращується.

Приклад 4.1. Нехай задано функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x^2 \leq 1; \\ x^2 + 1 + (x^2 - 1)c & x^2 > 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Очевидно, що функція (4.3) є $d^{(0)}\varepsilon$ -неперервною.

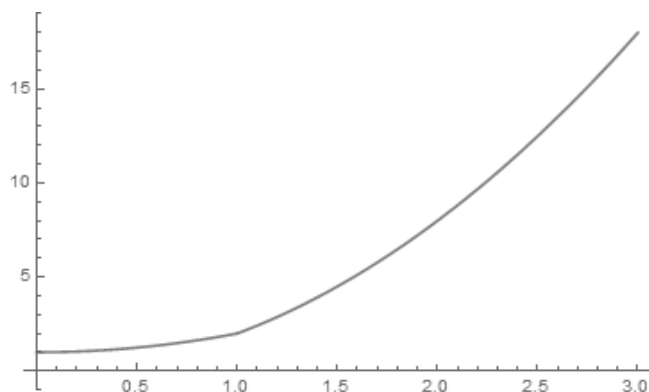


Рисунок 4.1 – Зображення заданої функції

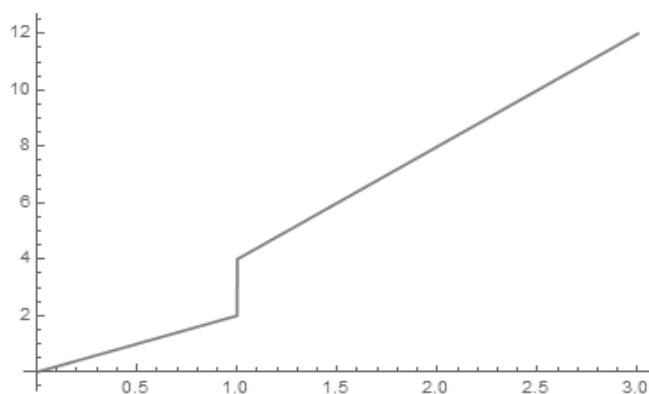


Рисунок 4.2 – Зображення похідної першого порядку заданої функції

Для знаходження розривів заданої функції застосуємо наведений вище алгоритм. Для цього покладемо

$$a = 0, \quad b = 3, \quad \delta = 10^{-2}$$

та оберемо початкову сітку вузлів

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.75, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 2.25, \quad x_4 = 3.$$

Отримуємо наступне розбиття

$$[0,0.75), [0.75,1.5), [1.5,2.25), [2.25,3].$$

Знаходимо невідомі параметри сплайнів

$$C_1^+ = 0, C_2^- = 1.5, C_2^+ = 1.5, C_3^- = 6, C_3^+ = 6, C_4^- = 9, C_4^+ = 9, C_5^- = 12.$$

Підставляємо отримані параметри у (4.1) та отримуємо слайни вигляду:

$$S_{1,2}(x) = 2x,$$

$$S_{2,3}(x) = 6x - 3,$$

$$S_{3,4}(x) = 4x,$$

$$S_{4,5}(x) = 4x.$$

На рисунку 4.3 наведено наближення сплайнами заданої функції.

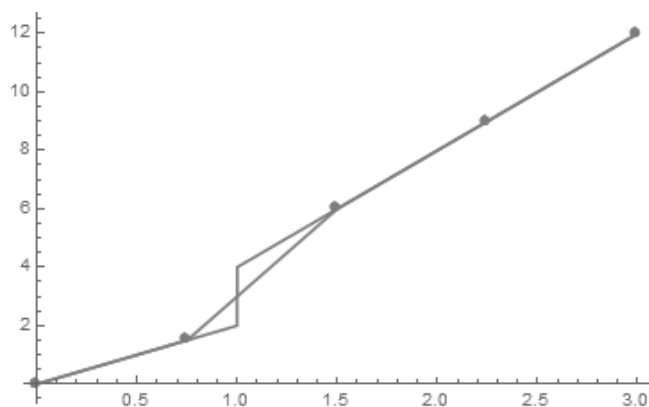


Рисунок 4.3 – Зображення заданої функції та отриманих сплайнів

Розрив першої похідної заданої функції локалізовано на інтервалі $(0.999023, 1.00195)$. В якості розриву функції пропонується взяти середину отриманого інтервалу, тобто $x = 1.0004865$.

Таблиця 4.1 – Проміжні результати ітерацій алгоритму

k	(a,b)	J_k^*
1	(0.75,1.5)	1
2	(0.75,1.125)	1.5
3	(0.9375,1.125)	1.25
4	(0.9375,1.03125)	1.375
5	(0.984375,1.03125)	1.3125
6	(0.984375,1.00781)	1.34375
7	(0.996094,1.00781)	1.32812
8	(0.996094,1.00195)	1.33594
9	(0.999023,1.00195)	1.33203

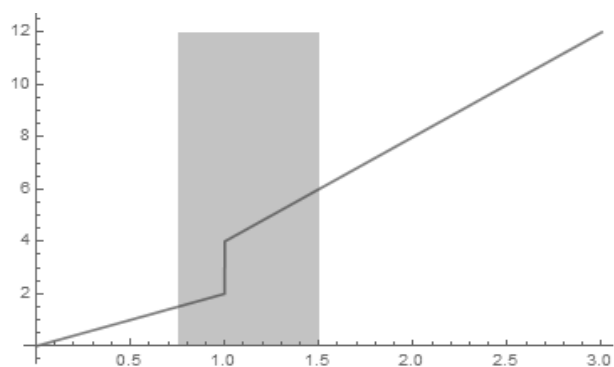
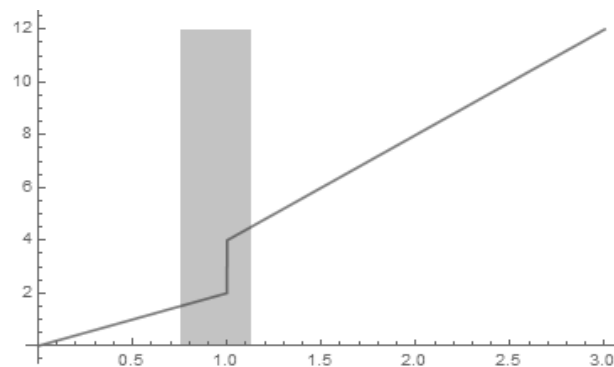
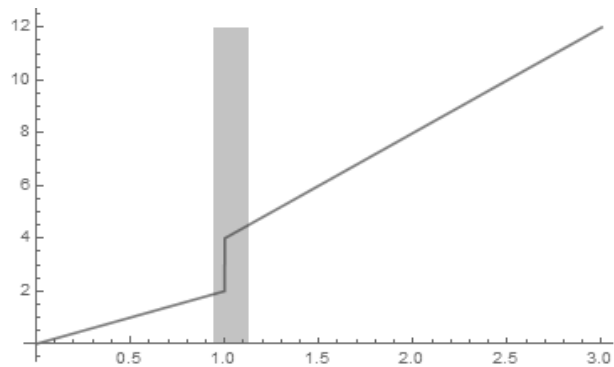
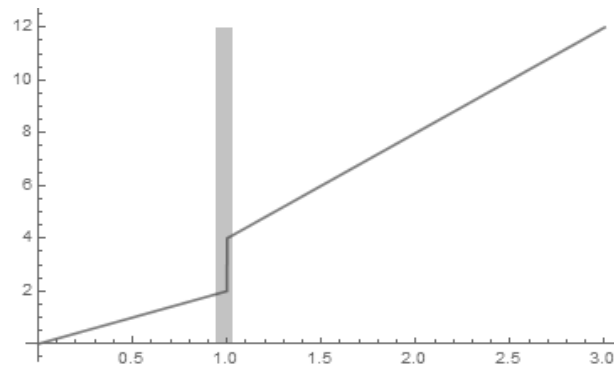
 $k = 1$  $k = 2$  $k = 3$  $k = 4$

Рисунок 4.4 – Зображення ітерацій алгоритму знаходження розриву похідної першого порядку заданої функції

4.2 Метод знаходження точок розриву функції двох змінних або її похідної деякого порядку

Нехай в області $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ задана розривна функція $f(x, y)$ та деяке розбиття на прямокутні елементи

$$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$$x = x_k, \quad k = \overline{0, m}, \quad a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b_1,$$

$$y = y_l, \quad l = \overline{0, n}, \quad a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b_2.$$

Означення 4.3. Введемо у розгляд оператор $d^k f(x, y)$:

$$d^k f(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_{i,j} \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$, або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i-1,j}$, або $\Pi_{i,j-1}$, функція $f(x, y)$ може мати розриви першого роду функції або її похідної деякого порядку, причому в кожній точці (x_i, y_j) може бути задано чотири різних значення наближуваної функції:

$$C_{i,j}^{++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} d^k f(x, y),$$

$$C_{i,j}^{-+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} d^k f(x, y),$$

$$C_{i,j}^{+-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} d^k f(x, y),$$

$$C_{i,j}^{--} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} d^k f(x, y).$$

Означення 4.4. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на прямокутнику $\Pi_{i,j}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$ функцію, яка визначається наступним чином

$$S_{i,j}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i,j+1}^{+-} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, \quad (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad (4.4)$$

який в кожному елементі $\Pi_{i,j}$ є неперервним інтерполяційним поліномом.

Означення 4.5. Якщо $\left| \lim_{x \rightarrow x_q + 0} d^k f(x, y) - \lim_{x \rightarrow x_q - 0} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon, \forall y$, то функцію $f(x, y)$ будемо називати $d^{(k)}\varepsilon$ -неперервною на лінії $x = x_q$.

Означення 4.6. Якщо $\left| \lim_{y \rightarrow y_s + 0} d^k f(x, y) - \lim_{y \rightarrow y_s - 0} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon, \forall x$, то функцію $f(x, y)$ будемо називати $d^{(k)}\varepsilon$ -неперервною на лінії $y = y_s$.

Означення 4.7. Якщо виконуються всі чотири нерівності в точці (x_q, y_s)

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} d^k f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} d^k f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} d^k f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} d^k f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} d^k f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати $d^{(k)}\varepsilon$ -неперервною в точці (x_q, y_s) .

Означення 4.8. Якщо $f(x, y) \in d^{(k)}\varepsilon$ -неперервною $\forall (x, y) \in \Pi_{i,j}$, то будемо її називати $d^{(k)}\varepsilon$ -неперервною в усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Будемо називати розривним апроксимаційним білінійним сплайном в кожному прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$ сплайн з коефіцієнтами $C_{i,j}^{++}, C_{i+1,j}^{+-}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i+1,j+1}^{--}$, що знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset G} \iint_{\Pi_{i,j}} [d^k f(x, y) - S_{i,j}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C,$$

де k – значення похідної, в якій шукається розрив.

Далі в даному розділі пропонується алгоритм виявлення ліній розриву функції двох змінних за заданими значеннями функції у заданій сітці вузлів.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$, який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $S_{i,j}(x, y)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,l}$, $k = \overline{1, (m-1)(n-1)}$, $l = \overline{1, 4}$ і знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна. Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $S_{i,j}(x, y)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. На кожному прямокутному елементі розбиття

$$\Pi_{i,j}, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1}$$

обчислюємо значення

$$J_{i,j}^* = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{i,j}, J_{i,j} = |d^k f(x, y) - S_{i,j}(x, y)|.$$

Крок 3. Видаляємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є $d^{(k)}\varepsilon$ –неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися ділимо на чотири рівні прямокутники, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента.

Крок 4. Для отриманого набору прямокутних елементів знову будуюмо апроксимаційні сплайни. Далі перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in [0,1]}} |d^k f(x, y) - S(x, y)| < \delta,$$

де δ – задана точність наближення.

Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Зауваження 4.2. Якщо за допомогою ділення прямокутного елемента на чотири частини, не потрапляємо точно на відрізок розриву, то ітераційний процес будемо зупиняти на тій ітерації, починаючи з якої результат не покращується.

Приклад 4.2. Нехай задано функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 & x^2 + y^2 \leq 1; \\ x^2 + y^2 + 1 + (x^2 + y^2 - 1)c & x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Для знаходження розривів заданої функції застосуємо наведений вище алгоритм. Для цього покладемо

$$a = 0, b = 1, \delta = 10^{-2}$$

та оберемо початкову сітку вузлів

$$x_0 = 0, x_1 = 0.3333, x_2 = 0.6667, x_3 = 1,$$

$$y_0 = 0, y_1 = 0.3333, y_2 = 0.6667, y_3 = 1.$$

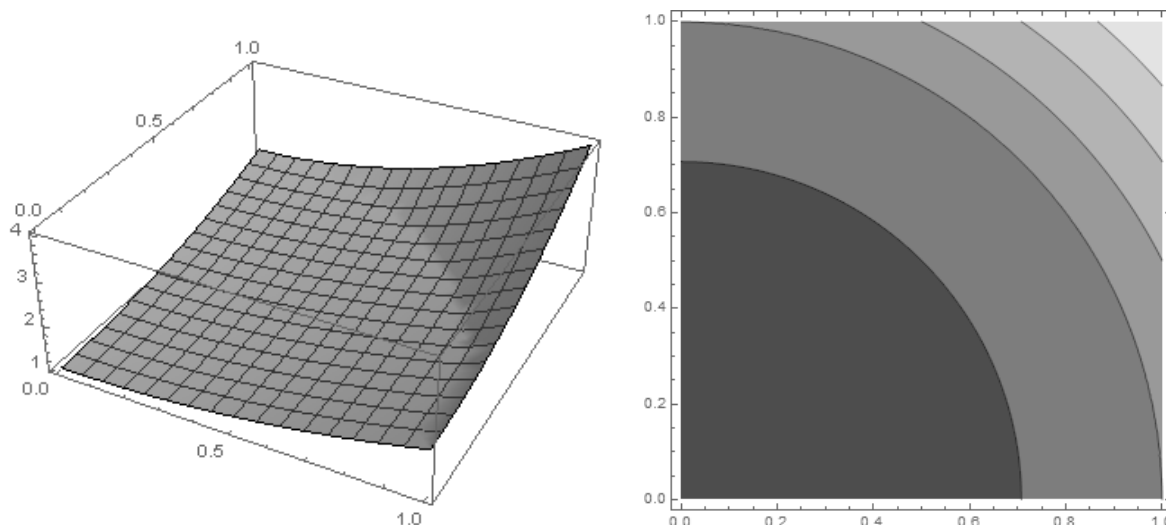


Рисунок 4.5 – Графік та лінії рівня заданої функції

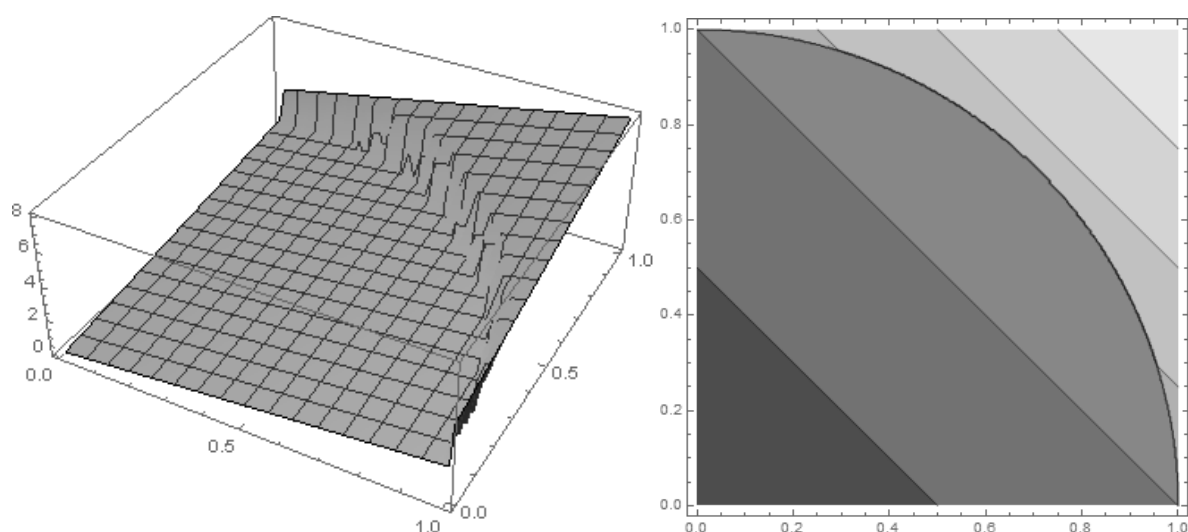


Рисунок 4.6 – Графік та лінії рівня похідної першого порядку заданої функції

Знаходимо значення параметрів $C_{k,l}$, $k = \overline{1, (m-1)(n-1)}$, $l = \overline{1, 4}$.

$$C_{1,1}^{++} = 0, C_{2,1}^{-+} = 0.6667, C_{1,2}^{+-} = 0.6667, C_{2,2}^{--} = 1.3333,$$

$$C_{2,1}^{++} = 0.6667, C_{3,1}^{-+} = 1.3333, C_{2,2}^{+-} = 1.3333, C_{3,2}^{--} = 2,$$

$$C_{3,1}^{++} = 1.3333, C_{4,1}^{-+} = 2, C_{3,2}^{+-} = 2, C_{4,2}^{--} = 5.3333,$$

$$C_{1,2}^{++} = 0.6667, C_{2,2}^{-+} = 1.3333, C_{1,3}^{+-} = 1.3333, C_{2,3}^{--} = 2,$$

$$\begin{aligned}
C_{2,2}^{++} &= 1.3333, C_{3,2}^{++} = 2, C_{2,3}^{+-} = 2, C_{3,3}^{--} = 2.6667, \\
C_{3,2}^{++} &= 2, C_{4,2}^{++} = 5.3333, C_{3,3}^{+-} = 2.6667, C_{4,3}^{--} = 6.6667, \\
C_{1,3}^{++} &= 1.3333, C_{2,3}^{++} = 2, C_{1,4}^{+-} = 2, C_{2,4}^{--} = 5.3333, \\
C_{2,3}^{++} &= 2, C_{3,3}^{+-} = 2.6667, C_{2,4}^{+-} = 5.3333, C_{3,4}^{--} = 6.6667, \\
C_{3,3}^{++} &= 2.6667, C_{4,3}^{+-} = 6.6667, C_{3,4}^{+-} = 6.6667, C_{4,4}^{--} = 8.
\end{aligned}$$

Підставляємо отримані параметри у (4.4) та отримуємо сплайни вигляду:

$$\begin{aligned}
S_{1,1}(x, y) &= 2(x + y); \\
S_{1,2}(x, y) &= 2(x + y); \\
S_{1,3}(x, y) &= 2(y + x(-7 + 12y)); \\
S_{2,1}(x, y) &= 2(x + y); \\
S_{2,2}(x, y) &= 2(x + y); \\
S_{2,3}(x, y) &= -1.33333 + 6x(1 + y); \\
S_{3,1}(x, y) &= 2(x - 7y + 12xy); \\
S_{3,2}(x, y) &= -1.33333 + 6y(1 + x); \\
S_{3,3}(x, y) &= -4(6 - 7y + x(-7 + 6y));
\end{aligned}$$

Обчислюємо значення $J_{i,j}^*$ на кожній із областей розбиття:

$$\begin{aligned}
J_{1,1} &= 1.85182 \times 10^{-16}, \\
J_{1,2} &= 2.46331 \times 10^{-16}, \\
J_{1,3} &= 2.20914, \\
J_{2,1} &= 2.498 \times 10^{-16}, \\
J_{2,2} &= 3.747 \times 10^{-16}, \\
J_{2,3} &= 2.82405,
\end{aligned}$$

$$J_{3,1} = 2.20914,$$

$$J_{3,2} = 2.82405,$$

$$J_{3,3} = 2.05887.$$

Виключаємо з розгляду області розбиття

$$\Pi_{1,1} = [0, 0.3333] \times [0, 0.3333],$$

$$\Pi_{1,2} = [0, 0.3333] \times [0.3333, 0.6667],$$

$$\Pi_{2,1} = [0.3333, 0.6667] \times [0, 0.3333],$$

$$\Pi_{2,2} = [0.3333, 0.6667] \times [0.3333, 0.6667].$$

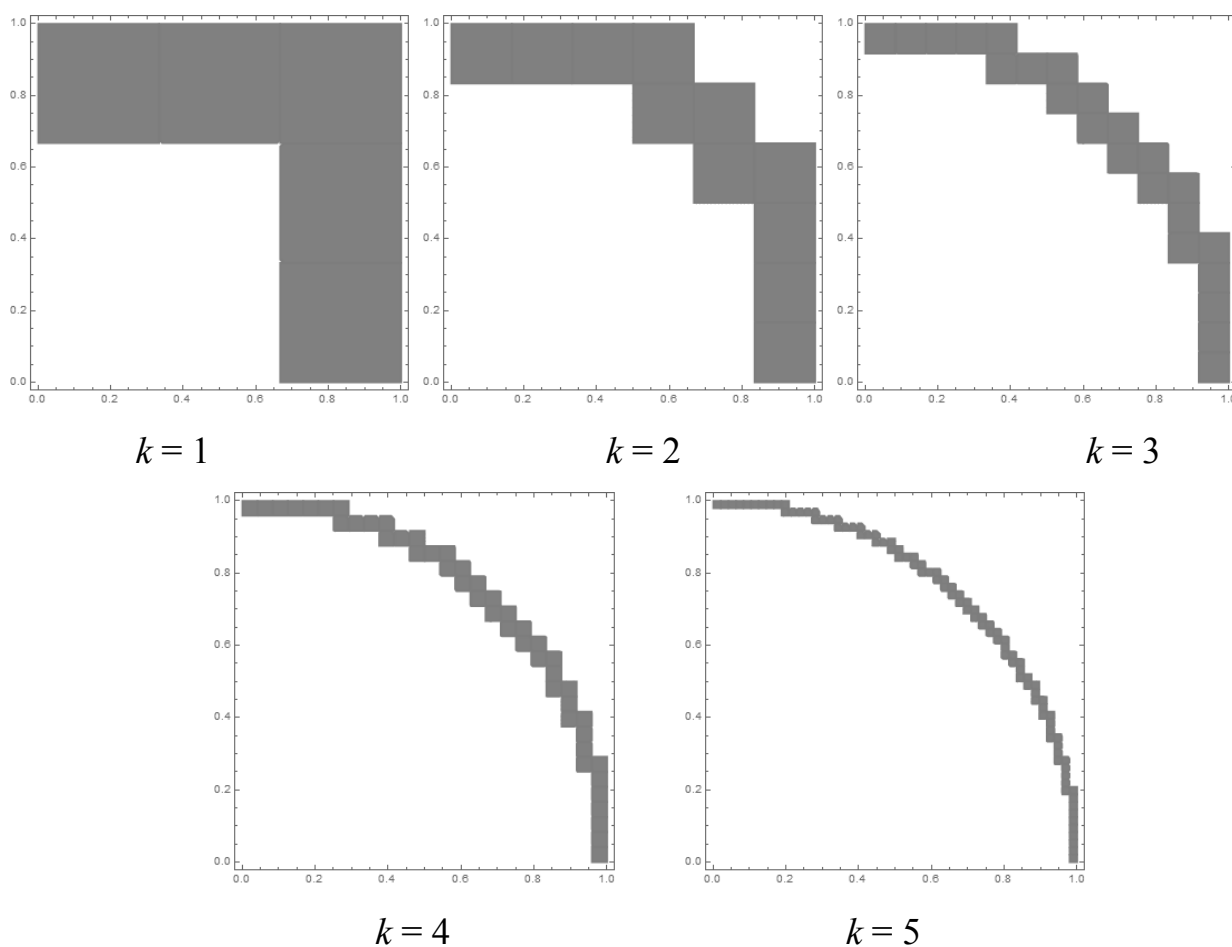


Рисунок 4.7 – Зображення ітерацій алгоритму знаходження розриву похідної першого порядку заданої функції

Області розбиття, що залишилися розбиваємо на 4 прямокутники, в кожному з яких будуємо сплайни за аналогічною схемою.

На рисунку 4.7 зображено результати роботи наведеного алгоритму на кожній ітерації.

Висновки до розділу 4

1. Введено означення $d^k \varepsilon$ -неперервності функції однієї та двох змінних та розривних інтерполяційних сплайнів, що є подальшим розвитком поняття ε -неперервності, що оснований на неперервності самої функції. Вперше поняття ε -неперервності було наведено в роботах Першиної [98-100]. Зважаючи на наведене в розділі означення $d^k \varepsilon$ -неперервності, ε -неперервність є частинним випадком $d^k \varepsilon$ -неперервності при $k = 0$.

2. Розроблено метод знаходження точок розриву функції однієї змінної, або деякої її похідної, що має точки розриву першого роду у відповідній похідній.

3. Розроблено метод знаходження ліній розриву функції двох змінних, що має лінії розриву функції або деякої її похідної, та наближення їх білінійними сплайнами, використовуючи прямокутні елементи.

4. Проведено обчислювальні експерименти із локалізації точок розриву для функції однієї змінної та ліній розриву для функцій двох змінних.

Слід відмітити, що наведені в даному розділі методи можуть одночасно локалізувати одразу декілька окремих точок (ліній) розриву.

Наведені в розділі 4 методи знаходження точок (ліній) розриву можуть бути використані при обробці даних рентгенографії, сейсмічної томографії, комп'ютерної томографії тощо.

Всі теоретичні твердження розділу 4 доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм.

Основні результати четвертого розділу опубліковано в роботах [1, 8].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [71-74, 78, 98-100].

ВИСНОВКИ

У роботі отримано нові результати, які є подальшим розвитком теорії інтерстріпації функцій, вперше запропонованих в роботах О.М. Литвина та Ю. І. Матвєєвої. Отримані в роботі результати є теоретичною основою математичного моделювання поверхонь, які описуються функціями двох змінних за допомогою операторів інтерстріпації.

У процесі вирішення поставлених завдань побудови математичних моделей поверхонь операторами інтерстріпації було отримано ряд нових наукових і практичних результатів.

1. Виконано аналіз сучасного стану методів обробки інформації у вигляді двовимірних зображень, у результаті якого встановлено, що використання існуючих методів цифрової обробки сигналів не дозволяє ефективно відновлювати зображення поверхонь, отриманих методами сейсмозвідки, радіолокації, дистанційного зондування планети тощо.

2. На основі розроблених в попередніх роботах операторах інтерстріпації, набули подальшого розвитку методи відновлення двовимірних поверхонь із пошкодженнями у вигляді смуг, що паралельні осям координат, із використанням узагальнених поліномів Шепарда, Шепарда-Литвина, Лагранжа та Ерміта.

3. Уперше побудована математична модель поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації на системах смуг, границі яких перетинаються під довільним кутом, жодні три з яких не перетинаються в одній точці, що дозволяє відновлювати поверхню, якщо інформація про неї відома на смугах, границі яких описуються лінійними функціями загального вигляду. Використання отриманих операторів інтерстріпації для відновлення пошкоджених сигналів дозволяє розширити спектр прикладних задач, до яких можна їх застосовувати, порівняно із попередніми результатами в області інформаційних операторів.

4. Уперше побудовані математичні моделі поверхні тіла із використанням операторів інтерстріпації на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню, якщо інформація про неї відома на смугах, границі яких описуються деякими наперед відомими неперервними функціями. Отримані оператори дозволяють відновлювати поверхні для більшої кількості прикладних задач, зокрема для обробки даних радарів бокового огляду.

5. Уперше наведено та досліджено метод математичного моделювання поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації, інформація про яку відома лише на системі смуг, границі яких представляють собою замкнуті криві.

6. Розроблено метод відновлення поверхні тіла із урахуванням додаткової інформації про структуру поверхні на відомих її ділянках. Цей метод дозволяє більш точно відновлювати поверхню між смугами у випадку якщо на ній присутні значні розриви, наприклад, обриви, підняття або деякі штучно створені об'єкти.

7. Наведено приклади практичного застосування отриманих операторів інтерстріпації для відновлення фотознімку із пошкодженнями у вигляді заломів та приклад відновлення пошкоджених профілів результатів сейсмозвідки корисних копалин в деякому регіоні.

8. Усі отримані результати добре узгоджуються із попередніми результатами досліджень в області операторів інтерстріпації функцій. Тобто, оператори інтерстріпації для випадку границь невідомих областей у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом, у випадку якщо ці прямі розташовані паралельно до осей координат дають аналогічні результати, що і результати попередніх досліджень для операторів інтерстріпації із границями, паралельними осям координат. Аналогічно і для операторів інтерстріпації для випадку криволінійних границь невідомих областей: якщо функції границі описують прямі, паралельні осям координат, що в сукупності означає добру узгодженість отриманих результатів із існуючою теорією операторів інтерстріпації функцій.

9. Введено означення $d^k \varepsilon$ -неперервності функції однієї чи двох змінних та розривних інтерполяційних сплайнів, що є подальшим розвитком поняття ε -неперервності, в основі якого лежить поняття неперервності самої функції.

10. Розроблено метод знаходження точок розриву функції однієї змінної, або деякої її похідної, що має точки розриву першого роду у відповідній похідній.

11. Розроблено метод знаходження ліній розриву функції двох змінних, що має лінії розриву функції або деякої її похідної, та наближення їх білінійними сплайнами, використовуючи прямокутні елементи.

Побудовані в роботі математичні моделі, методи та алгоритми можуть бути використані для обробки архівних даних у вигляді знімків, даних сейсмічної томографії, комп'ютерної томографії, рентгенографії, аерокосмічної зйомки, радіолокаторів бокового огляду тощо. При цьому функції, що описують поверхню можуть являти собою інтенсивність освітлення поверхні в кожній точці поверхні, рівнем радіоактивності тощо.

Всі теоретичні твердження дисертаційної роботи доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Литвин О. М., Славів О. В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку // Проблемы машиностроения. 2016. Т.19, №1. С. 37-43.
2. Литвин О. М., Славів О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетених смуг, розташованих під довільним кутом // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. №2. С. 175-182.
3. Відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славів // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2016. №2(87). С. 88-93.
4. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славів // Управляющие системы и машины. 2017. №1(267). С. 46-58.
5. Славів О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперетинних смуг з криволінійними границями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. №15. С. 207-212.
6. Литвин О. М., Пасічник В. О., Славів О. В. Застосування методу інтерстріпації для реставрації пошкоджених зображень // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2017. №2(89). С. 56-60.
7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized interstripation of functions of two variables // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54, №3. P. 465-475.
8. Славів О. В. Дослідження методів виявлення розривів земної поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2015): матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 19-21 березня 2015р.). 2015. С. 309-312.

9. Славiк О. В. Застосування оператора Лапласа для виявлення розривiв земної поверхнi // Радіоелектронiка та молодь у ХХІ столiтті: матерiали ХІХ мiжнародного молодiжного форуму (м. Харкiв, 20-22 квітня 2015р.). 2015. Т.7. С. 102-103.

10. Славiк О. В. Про один метод реставрацiї зображень // Інформатика та системнi науки (ІСН-2016): матерiали VII Всеукраїнської науково-практичної конференцiї за мiжнародною участю (м. Полтава, 10-12 березня 2016р.). 2016. С. 277-279.

11. Литвин О. М., Литвин О. О., Славiк О. В. Наближення функцiй двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi неперервних смуг з криволiнійними границями // Обчислювальнi методи i системи перетворення iнформацiї: збiрник праць IV науково-технiчної конференцiї (м. Львiв, 28-30 вересня 2016р.). 2016. Вип.4. С. 21-24.

12. Литвин О. М., Славiк О. В. Застосування узагальненої iнтерстріпацiї функцiй двох змiнних для вiдновлення зображення поверхнi // Інформатика та системнi науки (ІСН-2017): матерiали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференцiї за мiжнародною участю (м. Полтава, 16-18 березня 2017р.). 2017. С. 180-182.

13. Литвин О. М., Славiк О. В. Наближення функцiй двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi перетинних смуг, розташованих пiд довiльним кутом // Матерiали 50-ї науково-практичної конференцiї науково-педагогiчних працiвникiв, науковцiв, аспiрантiв та спiвробiтникiв академiї. Технологiчний факультет. Секцiї: харчових та хiмiчних технологiй, технологiй та дизайну, вищої та прикладної математики (м. Харкiв, 25-29 вересня 2017р.). 2017. С. 53.

14. Лукьяница А. А., Шишкин А. Г. Цифровая обработка видеоизображений. Москва : Ай-Эс-Эс Пресс, 2009. 518 с.

15. Форсайт Д. Компьютерное зрение: современный подход. Москва : Вильямс, 2004. 926 с.

16. Шапиро Л., Стокман Д. Компьютерное зрение. Москва : БИНОМ, 2006. 752 с.

17. Яне Б. Цифровая обработка изображений. Москва : Техносфера, 2007. 583 с.
18. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. Москва : Сов. радио, 1979. 272 с.
19. Kaur M., Spardha I. An Effective Approach of Negative Selection Algorithm with Canny Algorithm for Detection of Edges // International Journal of Computer Applications. 2014. Vol.107. P. 15-19.
20. Bin L., Samiei M. Comparison for Image Edge Detection Algorithms // Journal of Computer Engineering. 2012. Vol.2. P. 1-4.
21. Edge Detection Techniques in Processing Digital Images: Investigation of Canny Algorithm and Gabor Method / M. Nosrati, R. Karimi, M. Hariri, K. Malekian // World Applied Programming. 2013. Vol.3. P. 116-121.
22. Chaudhary A., Gulati T. Segmenting Digital Images using Edge Detection // International Journal of Application or Innovation in Engineering & Management. 2013. Vol.2. P. 319-323.
23. Shrivakshan G., Chandrasekar C. A Comparison of various Edge Detection Techniques used in Image Processing // International Journal of Computer Science Issues. 2012. Vol.9. P. 269-276.
24. Гонсалес Р, Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Москва : Техносфера, 2005. 1007 с.
25. Jähne B., Scharr H., Körkel S. Principles of filter design // Handbook of Computer Vision and Applications. 1999. Vol.2. P. 125-151.
26. Lindeberg T. Image Matching Using Generalized Scale-Space Interest Points // Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. 2013. Vol.7893. P. 355-367.
27. Lindeberg T. Image matching using generalized scale-space interest points // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2015. Vol.52, №1. P. 3-36.
28. Lindeberg T. Feature detection with automatic scale selection // International Journal of Computer Vision. 1998. Vol.30, №2. P. 79-116.

29. Muthukrishnan R., Radha M. Edge Detection Techniques for Image Segmentation // International Journal of Computer Science & Information Technology. 2011. Vol.3. P. 259–267.
30. Kirsch R. Computer determination of the constituent structure of biological images // Computers and Biomedical Research. 1971. Vol.4. P. 315–328.
31. Robinson G. Edge detection by compass gradient masks // Computer graphics and image processing. 1977. Vol.6. P. 492–501.
32. Frei W., Chen C. Fast Boundary Detection: A Generalization and a New Algorithm // Transactions on Computers. 1977. Vol.26. P. 988–998.
33. Canny J. A Computational Approach to Edge Detection // Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1986. Vol.8. P. 679–698.
34. Maini R., Aggarwal H. Study and Comparison of Various Image Edge Detection Techniques // International Journal of Image Processing. 2009. Vol.3. P. 1–12.
35. Driving Vision by Topology / C. Rothwell, J. Mundy, W. Hoffman, V. Nguyen // International Symposium on Computer Vision. 1995. P. 1–6.
36. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман, В. С. Киричук, В. П. Косых [и др.]. Новосибирск : Издательство Новосибирского Государственного Технического Университета, 2000. 168 с.
37. Bertalmio M., Bertozzi A., Sapiro G. Navier-Stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting // Proc. IEEE Computer Vision and Pattern Recognition. 2001. P. 1–8.
38. Joshua J., Darsan G. Digital inpainting techniques – a survey // International journal of latest research in engineering and technology. 2016. Vol.2. P. 34–36.
39. Efros A., Leung T. Texture synthesis by non-parametric sampling // International conference on Computer Vision (ICCV). 1999. P. 1033–1038.
40. Heeger D. J., Bergen J. R. Pyramid-based texture analysis (synthesis) // Proceedings of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH). 1995. Vol.29. P. 229–233.

41. Igehy H., Pereira L. Image replacement through texture synthesis // Proceedings of International Conference on Image Processing. 1997. Vol.3. P. 186-190.
42. Fast Inpainting Algorithm for Kinect Depth Map / W. Kui, A. Ping, Z. Zhao-Yang [and others] // Journal of Shanghai University. 2012. P. 91-95.
43. Yamauchi H., Haber J., Seidel H. Image restoration using multiresolution texture synthesis and image inpainting // Computer Graphics International (CGI). 2003. P. 120-125.
44. Ashikhmin M. Synthesizing natural textures // Proceedings of ACM Symposium on Interactive 3D Graphics. 2001. P. 217-226.
45. Efros A., Freeman W. T. Image quilting for texture synthesis and transfer // Proceedings of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH). 2001. P. 341-346.
46. Harrison P. A non-hierarchical procedure for re-synthesis of complex texture // WSCG Winter School of Computer Graphics Conf. Proc., Univ. of West Bohemia. 2001. P. 190-197.
47. Noori H., Saryazdi S. Image Inpainting Using Directional Median Filters // International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks, 2010. Vol.1. P. 45-49.
48. Fang C. W., Lien J. J. Fast image replacement using multi-resolution approach // Lecture Notes in Computer Science. 2006. Vol. 3852. P. 509-520.
49. Fast Digital Image Inpainting / M. Oliveira, B. Bowen, R. McKenna, Y. Chang // Imaging and Image Processing. 2001. P. 261-266.
50. Criminisi A., Perez P., Toyama K. Region filling and object removal by exemplar-based inpainting // Transactions on Image Processing. 2004. Vol.13, №9. P. 1200-1212.
51. Wu J., Ruan Q. A Novel Exemplar-Based Image Completion Model // Journal of Information Science and Engineering. 2009. P. 481-497.
52. Qin Y., Feng W. A Curvature Constraint Exemplar-Based Image Inpainting // Image Analysis and Signal Processing. 2010. P. 263-267.

53. Image inpainting algorithm based on regional segmentation and adaptive window exemplar / L. Yang, T. Xiao, W. Qing [and others] // Advanced computer control. 2010. P. 556-559.
54. Drori I., Cohen-Or D., Yeshurun H. Fragment-based image completion // SIGGRAPH. 2003. Vol.22. P. 303-312.
55. Hays J., Efros A. Scene completion using millions of photographs // Transactions on Graphics. 2007. Vol.26, №3. P. 87-94.
56. Interpolation of missing data in image sequences / A. Kokaram, R. Morris, W. Fitzgerald, P. Rayner // IEEE Trans. Image Process. 1995. Vol.4. P. 1509-1519.
57. Van Roosmalen P. Restoration of Archived Film and Video // Delft University of Technology. 1999. P. 156-158.
58. Image inpainting / M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, C. Ballester // Computer Graphics. 2000. P. 417-424.
59. Rudin L., Osher E., Fatemi S. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D. 1992. Vol.60. P. 259-268.
60. Chan T., Shen J. Mathematical models for local deterministic inpaintings // Journal on Applied Mathematics. 2002. Vol.62, №3. P. 1019-1043.
61. Chan T., Shen J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD) // Visual Comm. Image Rep. 2001. Vol.12. P. 436-449.
62. Tschumperl D., Deriche R. Vector-valued image regularization with PDE's // Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2005. Vol.27, № 4. P. 506-517.
63. Grossauer H. Simultaneous texture and structure image inpainting // Proceedings of European Conference on Computer Vision. 2004. P. 214-224.
64. Grossauer H., Scherzer O. Using the complex Ginzburg-Landau equation for digital inpainting in 2D and 3D // In Sacle space method in computer vision. 2003. P. 225-236.
65. PDE Image Inpainting with Texture Synthesis based on Damaged Region Classification / W. Yao, J. Sun, G. Zou [and others] // Advanced Computer Control. 2009. Vol.5. P. 447-450.

66. Simultaneous structure and texture image inpainting / M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, S. Osher // Transactions on Image Processing. 2003. Vol.12, №8. P. 882-889.

67. Starck J. L., Elad M., Donoho D. L. Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach // Transaction on Image Processing. 2005. Vol.14, №10. P. 1570-1582.

68. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA) / M. Elad, J. L. Starck, D. Donoho, P. Querre // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2005. Vol.19, №3. P. 340-358.

69. Image completion with structure propagation / J. Sun, L. Yuan, J. Jia, H. Shum // In Proceedings of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH). 2005. Vol.24. P. 861-868.

70. Telea A. An image in-painting technique based on the fast marching method // Journal of Graphics Tools. 2004. Vol.9. P. 23-34.

71. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ : Наук. думка, 2005. 331 с.

72. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва : Физматлит, 2002. 320 с.

73. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. Частина 1. Київ : Вища школа, 1995. 367 с.

74. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. Частина 2. Київ : Вища школа, 1995. 431 с.

75. Литвин О. М. Інтерлінація функцій. Харків : Основа, 1993. 235 с.

76. Матвеева С. Ю. Математичне моделювання поверхні тіла методами інтерстріпації функцій за даними радіолокації : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Українська інженерно-педагогічна академія. Харків, 2014. 126 с.

77. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544 с.

78. Сергієнко І. В., Литвин О. М. Нові інформаційні оператори в математичному моделюванні. Київ : Наук. думка, 2018. 444 с.
79. Shepard D. Two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data // In proc. 23rd nat. conf. ACM. 1968. P. 517-524.
80. Литвин О. М., Штепа Н. І., Литвин О. О. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій. Київ : Наук. думка, 2011. 228 с.
81. Shepp L. A., Logan B. F. The Fourier Reconstruction of a Head Section // IEEE Transactions on Nuclear Science. 1974. Vol. 3. P. 21-43.
82. Гришин Ю. П., Ипатов В. П., Казаринов Ю. М. Радиотехнические системы: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». Москва : Высш. шк., 1990. 496 с.
83. Трофимов Д. М., Евдокименков В. Н., Шуваева М. К. Современные методы и алгоритмы обработки и анализа комплекса космической, геолого-геофизической и геохимической информации для прогноза углеводородного потенциала неизученных участков недр. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. 320 с.
84. Хмелевской В. К. Геофизические методы исследования земной коры. Дубна, 1999. 204 с.
85. Nolet G. A Breviary of Seismic Tomography: Imaging the Interior of the Earth and Sun. New York : Cambridge University Press, 2008. 344 p.
86. Боганик Г. Н., Гурвич И. И. Сейсморазведка. Тверь : АИС, 2006. 744 с.
87. Stein S., Wysession M. An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. Blackwell : Blackwell Publishing, 2003. 512 p.
88. Сукач М. К. Гравитационное зондирование грунтов. Киев : Наукова думка, 1997. 170 с.
89. Грушинский Н. П. Основы гравиметрии. Москва : Наука, 1983. 351 с.
90. Логачев А. А. Захаров В. П. Магниторазведка. Ленинград : Недра, 1979. 352 с.
91. Электроразведка методом сопротивлений / В. А. Шевнин, И. Н. Модин, Д. К. Большаков, А. А. Бобачев. Москва : МГУ, 1994. 160 с.

92. Электрическое зондирование геологической среды / В. К. Хмелевской, В. А. Шевнин, И. Н. Модин, А. Г. Яковлев. Москва : МГУ, 1992. 200 с.
93. Ваньян Л. Л. Электромагнитные зондирования. Москва : Научный мир, 1997. 219 с.
94. Лісний Г. Д. Використання моделі анізотропного середовища для аналізу сейсмічних зображень геологічних об'єктів. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002. 136 с.
95. Лісний Г. Д. Практичні аспекти побудови об'ємних сейсмічних зображень за сейсмограмами спільних джерел. Київ : Радуга, 2012. 264 с.
96. Shearer P. M. Introduction to seismology. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. 412 p.
97. Тимошин Ю. В., Лісний Г. Д. Теорія обробки геофізичної інформації. Київ : КДУ, 1994. 216 с.
98. Нефьодова І. В. Вибір оптимальних базисних функцій та вузлів в методі скінченних елементів (прямокутні елементи) при математичному моделюванні розподілу тепла : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Українська інженерно-педагогічна академія. Харків, 2014. 167 с.
99. Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії : дис. на здобуття наук. ступеня док. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Українська інженерно-педагогічна академія. Харків, 2015. 385 с.
100. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, Ю. І. Першина. Київ : Наук. думка, 2017. 314 с.

ДОДАТОК А

Список власних публікацій здобувача

1. Литвин О. М., Славік О. В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку // Проблемы машиностроения. 2016. Т.19 №1. С. 37–43.
2. Литвин О. М., Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетених смуг, розташованих під довільним кутом // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. №2. С. 175–182.
3. Відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славік // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2016. №2(87). С. 88–93.
4. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славік // Управляющие системы и машины. 2017. №1(267). С. 46–58.
5. Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперетинних смуг з криволінійними границями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. №15. С. 207–212.
6. Литвин О. М., Пасічник В. О., Славік О. В. Застосування методу інтерстріпації для реставрації пошкоджених зображень // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2017. №2(89). С. 56–60.
7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized interstripation of functions of two variables // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54 №3. P. 465–475. [The journal is indexed in Scopus]
8. Славік О. В. Дослідження методів виявлення розривів земної поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2015): матеріали VI Всеукраїнської

науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 19-21 березня 2015р.). 2015. С. 309-312.

9. Славiк О. В. Застосування оператора Лапласа для виявлення розривiв земної поверхнi // Радіоелектронiка та молодь у ХХІ столiтті: матерiали ХІХ мiжнародного молодiжного форуму (м. Харкiв, 20-22 квітня 2015р.). 2015. Т.7. С. 102-103.

10. Славiк О. В. Про один метод реставрацiї зображень // Інформатика та системнi науки (ІСН-2016): матерiали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за мiжнародною участю (м. Полтава, 10-12 березня 2016р.). 2016. С. 277-279.

11. Литвин О. М., Литвин О. О., Славiк О. В. Наближення функцiй двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi неперервних смуг з криволiнійними границями // Обчислювальнi методи i системи перетворення iнформацiї: збiрник праць IV науково-технiчної конференції (м. Львiв, 28-30 вересня 2016р.). 2016. Вип.4. С. 21-24.

12. Литвин О. М., Славiк О. В. Застосування узагальненої iнтерстріпацiї функцiй двох змiнних для вiдновлення зображення поверхнi // Інформатика та системнi науки (ІСН-2017): матерiали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за мiжнародною участю (м. Полтава, 16-18 березня 2017р.). 2017. С. 180-182.

13. Литвин О. М., Славiк О. В. Наближення функцiй двох змiнних за допомогою їх слiдiв на системi перетинних смуг, розташованих пiд довiльним кутом // Матерiали 50-ї науково-практичної конференції науково-педагогiчних працiвникiв, науковцiв, аспiрантiв та спiвробiтникiв академiї. Технологiчний факультет. Секцiї: харчових та хiмiчних технологiй, технологiй та дизайну, вищої та прикладної математики (м. Харкiв, 25-29 вересня 2017р.). 2017. С. 53.

ДОДАТОК Б
Акт впровадження

Міністерство освіти і науки України
Українська інженерно-педагогічна академія



А К Т

про впровадження результатів дисертаційної роботи
аспіранта кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики
Славіка Олексія Валерійовича
в навчальний процес

Результати дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук Славіка Олексія Валерійовича "Математичне моделювання поверхні методами інтерстріпації функцій за неповною інформацією про неї" впроваджено та нині використовується на кафедрі інформаційних комп'ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії при викладанні курсу "Інформаційні технології в наукових дослідженнях" для аспірантів Української інженерно-педагогічної академії.

Впровадження в навчальних процес лекцій та практичних занять сприяло розширенню та поглибленню знань аспірантів в галузі нових інформаційних операторів та методів наближення неперервних функцій.

Апробація результатів дослідження підтверджує їх теоретичну та практичну цінність, доводить доцільність подальшого їх використання в навчальному процесі з метою підвищення якості підготовки аспірантів Української інженерно-педагогічної академії.

к. т. н., доц., зав. кафедри
машинобудування та транспорту

Подольак О.С.

д. ф.-м. н., доц., зав. кафедри
інформаційних комп'ютерних
технологій і математики

Нечуйвітер О.П.

к. т. н., доц., доц. каф. інформаційних
комп'ютерних технологій і
математики

Трохимчук С.М.

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник