

Харківський національний університет радіоелектроніки

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

СИДОРОВ МАКСИМ ВІКТОРОВИЧ

УДК 519.63

## ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 М.В. Сидоров

Науковий консультант:

Колосов Анатолій Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи  
ідентичний за змістом з іншими, поданими  
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради



 Л.В. Колесник

Харків – 2019

## АНОТАЦІЯ

*Сидоров М.В.* Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2019.

При вивченні методами математичного моделювання процесів, що протікають у нелінійних середовищах, виникає необхідність розв'язання крайових і початково-крайових задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Такі задачі зазвичай не піддаються прямому аналітичному дослідженню, а тому для їх аналізу треба використовувати чисельні методи. Серед різноманіття існуючих чисельних методів слід виділити ітераційні методи з двобічним характером збіжності. Ці методи дозволяють будувати дві послідовності функцій, які знизу та зверху апроксимують шуканий розв'язок. Отже, при реалізації двобічних ітераційних схем ми матимемо зручні апостеріорну оцінку похибки і критерій закінчення ітерацій. Крім того, ці методи часто дозволять ще й зробити висновок про існування розв'язку задачі.

Метою досліджень, проведених у дисертаційній роботі, була розробка двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь та розробка комбінованого метода Рунге і двобічних наближень розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

Теоретичним підґрунтям розроблених двобічних ітераційних методів є методи теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, зокрема, результати В.І. Опоїцева з розв'язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором.

Побудова методів двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптич-

них рівнянь заснована на переході від вихідної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння. Це інтегральне рівняння розглядається у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій, і береться за основу означення узагальненого розв'язку крайової задачі. На основі подання інтегрального рівняння як рівняння з гетеротонним оператором будуються дві ітераційні послідовності, які стартують з кінців сильного інваріантного для гетеротонного оператора відрізка і двобічно збігаються до єдиного додатного розв'язку задачі.

Для побудови еквівалентних інтегральних рівнянь у роботі застосовуються два підходи. Перший з них заснований на використанні функції Гріна для зведення крайової задачі до інтегрального рівняння Гаммерштейна. Обмеженість у реалізації цього підходу пов'язана з необхідністю мати у наявності аналітичний вираз для функції Гріна. Другий підхід використовує для зведення крайової задачі до інтегрального рівняння Урисона введене у дисертаційній роботі поняття квазіфункції Гріна-Рвачова. На відміну від звичайної функції Гріна побудова квазіфункції Гріна-Рвачова у явному вигляді можлива, якщо відомий фундаментальний розв'язок еліптичного оператора крайової задачі і геометрія області, у якій задача розглядається, дозволяє її аналітичний опис з використанням конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій. Це значно розширює коло застосувань розробленого метода двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Крім того, функція, що аналітично описує геометрію області, у якій розглядається крайова задача, може бути використана для побудови кінців сильно інваріантного конусного відрізка. Для кожного з розроблених методів двобічних наближень наведено низку умов збіжності ітераційних послідовностей та існування додатних розв'язків розглядуваних задач.

Застосування методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна і квазіфункції Гріна-Рвачова розглянуто на прикладі задач Діріхле для рівнянь з оператором Лапласа і оператором Гельмгольца та степеневими і експоненціальними нелінійностями.

Для розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння запропоновано сумісне використання методів Роте та двобічних наближень: на основі дискретизації за часовою змінною вихідна задача заміню-

ється послідовністю перших крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь, розв'язок яких знаходиться двобічними ітераціями.

Також у роботі розглянуто застосування розроблених методів двобічних наближень до розв'язання першої крайової задачі для рівняння теплопровідності зі степеневим залежним від температури коефіцієнтом та до розв'язання рівнянь вищих порядків на прикладі нелінійної задачі Нав'є.

Роботу всіх запропонованих у дисертації двобічних ітераційних методів проілюстровано обчислювальними експериментами для тестових задач.

Отже, проведені у дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

- вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для невідроджуваного еліптичного оператора  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$  і з її допомогою отримано інтегральне рівняння, еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, та систему інтегральних рівнянь, еквівалентну першій крайовій задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, у областях, геометрію яких можна аналітично описати за допомогою конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій;

- вперше виділено клас напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, і клас напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, що дозволяє будувати двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв'язків цих задач;

- отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u), x \in (a, b)$ ;

- отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі ви-



користання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

– вперше розроблено метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше розроблено методи двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень розроблено напівдискретний метод розв’язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

– вперше з рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$  виділено клас рівнянь, розв’язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методом двобічних наближень, що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– вперше до розв’язання нелінійної задачі Нав’є застосовано метод двобічних наближень, на основі чого отримано умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– удосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка в частині використання апарату теорії  $R$ -функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців, які обираються за початкові наближення при реалізації двобічних ітераційних методів.

Розроблені двобічні ітераційні методи можуть бути використані при математичному моделюванні процесів, що описуються першою крайовою задачею для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь та першою початково-крайовою задачею для напівлінійного параболічного рівняння. Отримані у роботі результати впроваджені в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки при викладанні дисципліни «Чисельні методи розв’язання нелінійних операторних рівнянь» та

при підготовці атестаційних робіт.

Основні результати, що становлять зміст дисертації, опубліковані у 37 наукових роботах: 22 статті, з яких 21 стаття опублікована у наукових виданнях, зазначених в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук (з них 4 статті включено до міжнародної наукометричної бази Web of Science), 1 стаття опублікована у закордонному фаховому науковому виданні, та 15 тез доповідей на 12 наукових конференціях, з яких 7 міжнародних.

*Ключові слова:* метод двобічних наближень, перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння, перша крайова задача для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, перша початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння, рівняння з гетеротонним оператором, сильно інваріантний конусний відрізок, функція Гріна, квазіфункція Гріна-Рвачова, метод  $R$ -функцій, метод Роте, рівняння теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом, нелінійна задача Нав'є.

#### **Список публікацій здобувача**

1. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50-57. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. 2017. № 1 (88). С. 60-64. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2017. Вип. 34. С. 58-66. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157-167. DOI: 10.32626/2308-5878.2017-16.157-167. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

9. Сидоров М.В. Застосування конструктивних методів теорії  $R$ -функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів // Бионика интеллекта. 2017. № 2 (89). С. 43-49. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

10. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2017. № 3 (126). P. 110-123. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

11. Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

12. Сидоров М.В. Метод Роте та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь // Вісник

ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 38. С. 55-63. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

13. Сидоров М.В. Метод двобічних ітерацій у чисельному аналізі першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь // Бионика интеллекта. 2018. № 1 (90). С. 53-61. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

14. Сидоров М.В. Метод Рунге у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 108-127. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12

15. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96-113. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

16. Kolosova S.V., Lukhanin V. S., Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78 – 91. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

17. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85. DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2\(32\).149705](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2(32).149705). [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar, Index Copernicus.]

18. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. 2018. Т. 10. №. 2. С. 360-375. DOI:10.15330/cmp.10.2.360-375. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, Index Copernicus]

19. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ

ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 39. С. 33-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

20. Сидоров М.В. Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 3 (82). С. 50-56. DOI:10.30837/1563-0064.3.2018.162782. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

21. Сидоров М.В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 146-161. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161.

22. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, WorldCat.]

23. Колосов А.І., Колосова С.В., Сидоров М.В. Деякі питання побудови двобічних наближень до розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь // «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: збірник праць науково-технічної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2010 р.). Львів: ФМІ НАНУ, 2010. С. 37-39.

24. Колосов А.И., Сидоров М.В. Идеи М. А. Красносельского в исследовании нелинейных краевых задач математической физики // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 215-217.

25. Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В. Об одном конструктивном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 218-221.

26. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода ква-

зи функции Грина к построению итерационных методов решения некоторых нелинейных краевых задач // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць одинадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 21-23 листопада 2012 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2012. С. 101-102.

27. Колосова С.В., Сидоров М.В. Некоторые вопросы, связанные с построением итерационных методов решения нелинейных краевых задач // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28-31 мая 2013 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. С. 52-58.

28. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції (Румунія, м. Бухарест, 17 травня 2013 р.). Ч. I. Бухарест: Бухарест. ун-т, 2013. С. 16-24.

29. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (г. Херсон, 10-15 июня 2013 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. С. 205-208.

30. Колосова С.В., Сидоров М.В. Про побудову ітераційного процесу для рівняння з антитонним оператором // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць дванадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 11-12 листопада 2014 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2014. С. 37-38.

31. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 185-188.

32. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Ла-

не-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 362-365.

33. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problem for nonlinear elliptic systems // Proceedings of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied Mathematics” dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiyy (Lviv, 28-30 september 2017). Lviv: PAIS, 2017. P. 102-103.

34. Сидоров М.В. Нові конструктивні методи дослідження нелінійних крайових задач // «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 65-67.

35. Сидоров М.В., Кончаковська О.С. Побудова двобічних наближень до розв’язку однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 71-73.

36. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатних розв’язків нелінійних крайових задач методом квазіфункцій Гріна-Рвачова // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Луцьк – м. Київ, 7-10 жовтня 2017 р.). Т. 2. Київ: НТУУ «КПІ», 2017. С. 141-145.

37. Сидоров М. Метод двобічних наближень та метод прямих розв’язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі використання функції Гріна // Інформаційні системи та технології: матеріали статей 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції (с. Коблеве – м. Харків, 10-15 вересня 2018 р.). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 135-139.

## SUMMARY

*Sidorov M.V.* Two-sided approximations methods for solving certain classes of nonlinear problems in mathematical physics. – Qualification scientific study with manuscript copyright.

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science in Physics and Mathematics in specialty 01.05.02 “Mathematical modeling and numerical methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2018.

When studying the methods of mathematical modeling of processes occurring in nonlinear media, it becomes necessary to solve boundary and initial boundary value problems for nonlinear equations of mathematical physics. Such tasks are usually not amenable to direct analytical research, and therefore for their analysis one should use numerical methods. Among the variety of existing numerical methods, iterative methods should be distinguished with a two-sided nature of convergence. These methods allow to construct two sequences of functions which approximate the desired solution from below and above. Consequently, when implementing two-sided iterative schemes, we will have convenient a posteriori error estimate and criterion for the iterations ending. In addition, these methods often allow us to conclude that there is a solution to the problem.

The purpose of the research investigations, conducted in the dissertation, was to develop the two-sided iterative methods for solving the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of semilinear elliptic equations and to develop a combined Rothe method and two-sided approximations for solving the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation.

The theoretical basis of the developed two-sided iterative methods are methods of the theory of nonlinear operator equations in semiordered spaces, in particular, the results of V.I. Opořev on the solvability of nonlinear equations with a heterotone operator.

The construction of two-sided approximation methods for solving the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of semilinear elliptic equations is based on the transition from the initial problem to an equivalent integral



equation. This integral equation is considered in the continuous functions space semi-ordered by a cone of non-negative functions, and is taken as the basis for the definition of a generalized solution of the boundary value problem. Based on the representation of an integral equation as an equation with a heterotone operator, two iteration sequences, which start from the ends of the strongly invariant for the heterotone operator segment and converge bilaterally to the unique positive solution to the problem, are constructed.

To construct equivalent integral equations two approaches are used. The first one is based on the use of the Green's function to replace the boundary value problem by the Hammerstein integral equation. The limitation in implementation of this approach is associated with the necessity of existing an analytical expression for the Green's function. The second approach uses the concept of the Green-Rvachev's quasi-function, introduced in the thesis, for reducing the boundary value problem to the Uryson integral equation. In contrast to the usual Green's function, the construction of the Green-Rvachev's quasi-function is possible if the fundamental solution of the elliptic operator of the boundary value problem is known and the geometry of the area in which the problem is considered allows its analytical description by means of the constructive apparatus of the  $R$ -functions theory. It greatly expands the range of applications of the developed method of two-sided approximations based on the use of the Green-Rvachev's quasi-function. In addition, a function that analytically describes the geometry of a domain in which a boundary value problem is considered can be used to construct the ends of a strongly invariant cone segment. For each of the developed two-sided approximation methods, a number of conditions for the convergence of the iteration sequences and the existence of positive solutions to the problems under consideration are given.

The application of the two-sided approximation methods based on the use of the Green's function and the Green-Rvachev's quasi-function is considered on the example of the Dirichlet problems for equations with the Laplace operator and the Helmholtz operator and power and exponential nonlinearities.

To solve the first boundary value problem for a semilinear parabolic equation, the joint use of Rothe's methods and two-sided approximations is proposed: on the basis of discretization with respect to the time variable, the original problem is re-

placed by a sequence of the first boundary value problems for semilinear elliptic equations, which are solved by two-sided iterations.

The paper also considers the application of the developed two-sided approximation methods to the solution of the first boundary value problem for the heat equation with a temperature-dependent coefficient and to the solution of higher order equations using the example of the nonlinear Navier problem.

The work of all the two-sided iterative methods proposed in the thesis is illustrated by computational experiments for test problems.

Thus, the research carried out in the thesis allowed to obtain the following new scientific results:

- for the first time, the concept of the Green-Rvachev's quasi-function for the first boundary value problem for a nondegenerate elliptic operator  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$  was introduced, with its help an integral equation equivalent to the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of integral equations equivalent to the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations were obtained in domains whose geometry can be analytically described using constructive means of the  $R$ -functions;

- for the first time, a class of semilinear ordinary differential equations, the first boundary problem for which allows its representation (using the Green's function) as a nonlinear operator equation with a heterotone type operator, and the class of semilinear elliptic equations and systems of semilinear elliptic equations, the first boundary problem for which allows its representation (using the Green's function or the Green-Rvachev's quasi-function) as a nonlinear operator equation with a heterotone type operator, are distinguished, it allows to build the two-sided iterative methods for finding the positive solutions to these problems;

- the method of two-sided approximations of the solution of the first boundary value problem for a semilinear ordinary differential equation based on the use of the Green's function in terms of its application to equations of the form

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (a, b)$$

was further developed;

- the method of two-sided approximations of the solution of the first boundary

value problem for a semilinear elliptic equation based on the use of the Green's function in its application to the equations of the form  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  was further developed;

- for the first time, a two-sided approximations method for solving the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation of the form  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , based on the use of the Green-Rvachev's quasi-function was developed;

- for the first time, a two-sided approximations methods for solving the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations of the form  $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ , based on the use of the Green's function or the Green-Rvachev's quasi-function, were developed;

- for the first time, on the basis of the joint use of the Rothe methods and two-sided approximations, a semidiscrete method for solving the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation was developed;

- for the first time, from the equations of the form  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$  it is distinguished a class of equations, the solution of the first boundary value problem for which can be found by the method of two-sided approximations, which made it possible to obtain the conditions of the existence of a unique positive solution of the problem and the convergence of successive approximations to this solution;

- for the first time, the method of two-sided approximations was applied to the solution of the nonlinear Navier problem, from this the conditions of the existence of a unique positive solution of the problem and the convergence of successive approximations to it were obtained;

- the method of constructing a strongly invariant cone segment in terms of using the apparatus of the  $R$ -functions theory to select its lower and upper ends, which serve as initial approximations when implementing two-sided iterative methods was improved.

The developed two-sided iterative methods can be used in mathematical modeling of the processes described by the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of semilinear elliptic equations and the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation. The results obtained in

the thesis were introduced in the educational process at the Kharkiv National University of Radio Electronics in the discipline «Numerical methods for solving nonlinear operator equations» and in the diploma papers.

The main results that compose the content of the thesis were published in 37 scientific papers: 22 articles, 21 articles of which were published in scientific journals that are listed in the list of professional publications of Ukraine in physical and mathematical sciences (4 of them are included in the Web of Science international scientometric database), 1 article was issued in a foreign scientific publication, and 15 theses at 12 scientific conferences, 7 of which are international.

*Keywords:* method of two-sided approximations, the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation, the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations, the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation, equation with a heterotone operator, strongly invariant cone segment, Green's function, Green-Rvachev's quasi-function,  $R$ -functions method, Rothe method, equation of heat conductivity with nonlinear coefficient, nonlinear Navier problem.

#### **List of applicant's published works**

1. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50-57. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоелектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. 2017. № 1 (88). С. 60-64. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2017. Вип. 34. С. 58-66. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157-167. DOI: 10.32626/2308-5878.2017-16.157-167. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

9. Сидоров М.В. Застосування конструктивних методів теорії  $R$ -функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів // Бионика интеллекта. 2017. № 2 (89). С. 43-49. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

10. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2017. № 3 (126). P. 110-123. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

11. Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

12. Сидоров М.В. Метод Роте та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь // Вісник

ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 38. С. 55-63. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

13. Сидоров М.В. Метод двобічних ітерацій у чисельному аналізі першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь // Бионика интеллекта. 2018. № 1 (90). С. 53-61. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

14. Сидоров М.В. Метод Рунге у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 108-127. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12.

15. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96-113. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

16. Kolosova S.V., Lukhanin V. S., Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78 – 91. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

17. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85. DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2\(32\).149705](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2(32).149705). [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar, Index Copernicus.]

18. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. 2018. Т. 10. №. 2. С. 360-375. DOI:10.15330/cmp.10.2.360-375. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, Index Copernicus.]

19. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ

ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 39. С. 33-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

20. Сидоров М.В. Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и информатика. 2018. № 3 (82). С. 50-56. DOI:10.30837/1563-0064.3.2018.162782. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

21. Сидоров М.В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 146-161. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161.

22. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радиоелектроника, информатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, WorldCat.]

23. Колосов А.І., Колосова С.В., Сидоров М.В. Деякі питання побудови двобічних наближень до розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь // «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: збірник праць науково-технічної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2010 р.). Львів: ФМІ НАНУ, 2010. С. 37-39.

24. Колосов А.И., Сидоров М.В. Идеи М. А. Красносельского в исследовании нелинейных краевых задач математической физики // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 215-217.

25. Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В. Об одном конструктивном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 218-221.

26. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода ква-

зифункции Грина к построению итерационных методов решения некоторых нелинейных краевых задач // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць одинадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 21-23 листопада 2012 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2012. С. 101-102.

27. Колосова С.В., Сидоров М.В. Некоторые вопросы, связанные с построением итерационных методов решения нелинейных краевых задач // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28-31 мая 2013 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. С. 52-58.

28. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції (Румунія, м. Бухарест, 17 травня 2013 р.). Ч. I. Бухарест: Бухарест. ун-т, 2013. С. 16-24.

29. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (г. Херсон, 10-15 июня 2013 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. С. 205-208.

30. Колосова С.В., Сидоров М.В. Про побудову ітераційного процесу для рівняння з антитонним оператором // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць дванадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 11-12 листопада 2014 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2014. С. 37-38.

31. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 185-188.

32. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Ла-



не-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 362-365.

33. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problem for nonlinear elliptic systems // Proceedings of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied Mathematics” dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy (Lviv, 28-30 september 2017). Lviv: PAIS, 2017. P. 102-103.

34. Сидоров М.В. Нові конструктивні методи дослідження нелінійних крайових задач // «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 65-67.

35. Сидоров М.В., Кончаковська О.С. Побудова двобічних наближень до розв’язку однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 71-73.

36. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатних розв’язків нелінійних крайових задач методом квазіфункцій Гріна-Рвачова // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Луцьк – м. Київ, 7-10 жовтня 2017 р.). Т. 2. Київ: НТУУ «КП», 2017. С. 141-145.

37. Сидоров М. Метод двобічних наближень та метод прямих розв’язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі використання функції Гріна // Інформаційні системи та технології: матеріали статей 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції (с. Коблеве – м. Харків, 10-15 вересня 2018 р.). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 135-139.

## ЗМІСТ

Вступ .....	26
1 Аналіз сучасного стану проблеми математичного моделювання нелінійних процесів та постановка задач дослідження .....	33
1.1 Нелінійні задачі математичної фізики як математичні моделі нелінійних процесів .....	33
1.2 Методи чисельного аналізу нелінійних задач математичної фізики .....	43
1.3 Основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах .....	55
1.4 Постановка задач дослідження .....	66
2 Побудова двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з використанням функції Гріна .....	68
2.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна .....	68
2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання функції Гріна .....	89
2.3 Способи побудови сильно інваріантного конусного відрізка при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна .....	108
2.4 Приклади розв'язання тестових задач методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна .....	113
2.4.1 Тестова задача для напівлінійного звичайного диференціального рівняння .....	113
2.4.2 Тестові задачі для напівлінійного еліптичного рівняння .....	119
Висновки за розділом 2 .....	133

3 Побудова двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова .....	136
3.1 Заміна задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння еквівалентним інтегральним рівнянням методом квазіфункцій Гріна-Рвачова .....	136
3.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	146
3.3 Способи побудови сильно інваріантного конусного відрізка при реалізації метода двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	158
3.4 Приклад розв'язання тестової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	161
Висновки за розділом 3 .....	172
4 Застосування методів двобічних наближень до дослідження задач Діріхле для еліптичних рівнянь зі степеневими нелінійностями .....	174
4.1 Ізотонний випадок $f(u) = \lambda u^p$ , $\lambda > 0$ , $p > 0$ .....	174
4.2 Антитонний випадок $f(u) = \mu u^{-q}$ , $\mu > 0$ , $q > 0$ .....	190
4.3 Гетеротонний випадок $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ , $\lambda, \mu > 0$ , $p, q > 0$ .....	205
Висновки за розділом 4 .....	217
5 Побудова двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова .....	218
5.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання функції Гріна .....	218
5.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	233

5.3	Результати обчислювальних експериментів для систем напівлінійних еліптичних рівнянь .....	245
5.3.1	Розв'язання тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна .....	245
5.3.2	Розв'язання тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	251
	Висновки за розділом 5 .....	257
6	Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова у комбінації з методом прямих для побудови двобічних наближень до розв'язку першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння .....	260
6.1	Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання функції Гріна ...	260
6.2	Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання функції Гріна ...	271
6.3	Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова .....	283
6.4	Результати обчислювальних експериментів для напівлінійного рівняння теплопровідності .....	292
6.4.1	Розв'язання тестової задачі для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна .....	292
6.4.2	Розв'язання тестової задачі для багатовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова .....	297

	25
Висновки за розділом 6 .....	309
7 Застосування методів двобічних наближень до розв'язання нелінійного рівняння теплопровідності та нелінійної задачі Нав'є ...	311
7.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності .....	311
7.2 Розв'язання тестової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом методом двобічних наближень .....	319
7.3 Метод двобічних наближень розв'язання нелінійної задачі Нав'є .....	328
7.4 Розв'язання тестової задачі Нав'є методом двобічних наближень .....	337
Висновки за розділом 7 .....	341
Висновки .....	342
Список використаних джерел .....	346
Додаток А Список публікацій здобувача і відомості про апробацію результатів дисертації .....	376
Додаток Б Акт впровадження .....	384
Додаток В Функції Гріна операторів Лапласа $\Delta u$ і Гельмгольца $\Delta u - \kappa^2 u$ для деяких областей .....	386
Додаток Г Результати обчислювальних експериментів для еліптичних рівнянь зі степеневими нелінійностями .....	394

## ВСТУП

**Актуальність теми.** На сьогодні все більш актуальним стає дослідження складних явищ та процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо методами математичного моделювання. Це призводить до необхідності аналізу крайових або початково-крайових задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Існуючі аналітичні методи розв'язання таких рівнянь не дозволяють проводити дослідження всього різноманіття задач, що виникають на практиці, тому зазвичай для цього використовуються обчислювальні методи. Серед чисельних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики можна виділити методи скінченних різниць, скінченних елементів, варіаційні та проєкційні, а також ітераційні методи. Методи останньої групи є найбільш привабливими з точки зору простоти алгоритмізації та програмної реалізації, а також завдяки властивості самовиправності. Особливе місце серед ітераційних методів належить методам двобічних наближень, які дозволяють апроксимувати невідомий розв'язок знизу та зверху двома послідовностями, а отже, надають можливість отримати для похибки наближеного розв'язку зручну апостеріорну оцінку і довести існування розв'язку вихідної задачі.

Історично першим методом з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку був метод, запропонований у 1919 р. С.О. Чаплигіним. Подальший розвиток двобічних ітераційних методів пов'язаний з використанням теорії напівупорядкованих просторів, основи якої були закладені в роботах Л.В. Канторовича, Б.З. Вуліха, М.Г. Крейна, М.А. Рутмана та ін. Цю теорію розвинули М.О. Красносельський, В.І. Опойцев, І.О. Бахтін, Н. Amann, D. Guo, V. Lakshmikantham та їх учні у застосуванні до дослідження питань додатної розв'язності операторних рівнянь, при цьому для доведення відповідних теорем існування та єдиності використовувалися двобічні ітераційні схеми. Проте автори розглядали ці ітераційні процеси як допоміжний засіб при доведенні теорем і відповідні обчислювальні схеми не було реалізовано.

У останні десятиріччя значний внесок в розробку двобічних ітераційних методів розв'язання задач для різних класів функціональних рівнянь внесли Ю.І. Ковач, А.І. Колосов, М.І. Копач, М.С. Курпель, Й.Й. Лучко, І.М. Майборода, В.В. Маринець, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта, М.Й. Ронто, А.М. Самойленко, Б.А. Шувар, G. Chen, C.V. Rao, M.-D. Rus та ін. В їх роботах в основному були розглянуті задачі для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем (багато-точкова крайова задача, задача з вільною межею, задача Коші), задачі для звичайних диференціальних рівнянь з запізнюванням, крайові задачі для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу, інтегральні рівняння Фредгольма, нелінійні інтегральні рівняння Вольтерри, нелінійні інтегродиференціальні рівняння Вольтерри тощо.

Незважаючи на значні успіхи в розробці двобічних ітераційних методів було виявлено протиріччя, пов'язане з тим, що відсутнє систематичне дослідження двобічних ітераційних методів розв'язання крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь, а також застосування двобічних ітераційних методів до розв'язання початково-крайових задач для напівлінійних параболічних рівнянь. Крім того, практична реалізація відомих двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду  $-\Delta u = f(x, u)$ ,  $x \in \Omega$ , потребує знання функції Гріна оператора  $-\Delta$ , що обмежує кількість областей  $\Omega$ , для яких фактично може бути знайдений розв'язок задачі. Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих двобічних ітераційних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики є актуальною науковою проблемою.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалася в період з 2014 р. по 2018 р. відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ ДР 0115U001522), у розробці якої автор брав участь як виконавець.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розробка двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння та системи напівлінійних еліптичних рівнянь і методу розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного застосування методів Рунге і двобічних наближень.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану проблеми чисельного аналізу нелінійних задач математичної фізики методами двобічних наближень;
- розробити метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння на основі використання функції Гріна;
- розробити методи двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використань функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова;
- розробити методи двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використань функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова;
- розробити на основі сумісного використання методів Рунге та двобічних наближень напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;
- застосувати розроблені методи двобічних наближень до розв'язання першої крайової задачі для рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x},\theta)$  та нелінійної задачі Нав'є.

*Об'єктом дослідження* є процеси, математичними моделями яких є задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь, систем напівлінійних еліптичних рівнянь і напівлінійних параболічних рівнянь.

*Предметом дослідження* є перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь, перша початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння та двобічні ітераційні методи їх чисельного аналізу.



**Методи дослідження.** У роботі використовуються методи теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах і методи математичної фізики для теоретичного дослідження розглянутих задач та запропонованих двобічних ітераційних методів їх розв'язання; апарат теорії  $R$ -функцій для побудови нормалізованих рівнянь меж областей, в яких розглядаються задачі, при знаходженні кінців сильно інваріантного конусного відрізка та для побудови квазіфункції Гріна-Рвачова.

**Наукова новизна отриманих результатів.** У результаті виконання дисертаційного дослідження розроблено двобічні ітераційні методи розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. При цьому отримано такі нові наукові результати:

- вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для не виродженого еліптичного оператора  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$  і з її допомогою отримано інтегральне рівняння, еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, та систему інтегральних рівнянь, еквівалентну першій крайовій задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, у областях, геометрію яких можна аналітично описати за допомогою конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій;

- вперше виділено клас напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, і клас напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, що дозволяє будувати двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв'язків цих задач;

- отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (a, b);$$

– отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

– вперше розроблено метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше розроблено методи двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень розроблено напівдискретний метод розв’язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

– вперше з рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$  виділено клас рівнянь, розв’язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методом двобічних наближень, що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– вперше до розв’язання нелінійної задачі Нав’є застосовано метод двобічних наближень, на основі чого отримано умови існування єдиного додатного розв’язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– удосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка в частині використання апарату теорії  $R$ -функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців, які обираються за початкові наближення при реалізації двобічних ітераційних методів.

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.** Розроблені в дисертаційній роботі двобічні ітераційні методи розширюють множину чисельних методів, які застосовуються для розв’язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики, мають простий обчислювальний алгоритм та зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв’язку, що виділяє їх серед інших методів. Вони можуть бути використані при математичному моделюванні про-

цесів, що описуються першою крайовою задачею для напівлінійного еліптичного рівняння та системою напівлінійних еліптичних рівнянь і першою початково-крайовою задачею для напівлінійного параболічного рівняння.

Практичне значення отриманих у роботі результатів підтверджується їх впровадженням в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки при викладанні дисципліни «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь» та при підготовці атестаційних робіт здобувачами першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів вищої освіти.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем і опубліковані в роботах [10, 43, 44, 48 – 54, 56, 57, 59 – 61, 63, 64, 143 – 157, 254, 288 – 291]. У роботах, опублікованих зі співавторами, здобувачу належать такі результати: [43, 49, 59, 60] – дослідження задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та антитонною експоненціальною нелінійністю, двобічний ітераційний метод її розв'язання та результати обчислювального експерименту; [49, 51 – 54, 56, 57, 61] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та степеневими нелійнностями (ізотонними чи антитонними); [254] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та ізотонною експоненціальною нелінійністю; [63, 64, 157] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння, що моделює мікроелектромеханічну систему; [10] – двобічний ітераційний метод розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та відповідний обчислювальний експеримент; [48] – дослідження нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння та двобічний ітераційний метод її розв'язання; [44, 50] – застосування методу квазіфункцій Гріна до аналізу ітераційними методами нелінійної еліптичної крайової задачі. Роботи [143 – 156, 288 – 291] опубліковано без співавторів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: Науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» (Україна, Львів, 2010 р.); XV Міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (Україна, Херсон, 2011 р.); Одинадцятій

Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (Україна, Одеса, 2012 р.); VII Міжнародній науково-технічній конференції молодих спеціалістів, аспірантів та студентів «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (Росія, Пенза, 2013 р.); I Міжнародній науково-практичній конференції «Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності» (Румунія, Бухарест, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозиумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Україна, Харків-Херсон, 2013 р.); Дванадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (Україна, Одеса, 2014 р.); XXI Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – „APAMCS-2015” (Україна, Львів, 2015 р.); Міжнародній конференції „Ukrainian Conference on Applied Mathematics” (Україна, Львів, 2017 р.); III Всеукраїнській науково-практичній конференції «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (КМПЗ-2017) (Україна, Рівне, 2017 р.); Вісімнадцятій міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Україна, Луцьк-Київ, 2017 р.); 7-й Міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)» (Україна, Коблеве-Харків, 2018 р.); наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, 2015, 2017, 2018 рр.), кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О.М. Бекетова (Харків, 2017 р.), кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2018 р.).

**Публікації.** Матеріали дисертації викладені у 37 наукових роботах: 22 статті, з яких 21 стаття у наукових виданнях, зазначених в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук (4 статті включено до наукометричної бази Web of Science), 1 стаття у закордонному фаховому науковому виданні, та 15 тез доповідей, опублікованих в матеріалах 12 наукових конференцій, з яких 7 міжнародних.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота є рукописом і складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел з 320 найменувань (30 с.), чотирьох додатків (111 с.), 132 рисунки (37 с.) та 115 (92 с.) таблиць. Повний обсяг роботи становить 486 сторінок, з них 320 сторінок основного тексту.

# 1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Нелінійні задачі математичної фізики як математичні моделі нелінійних процесів

Найбільш потужним інструментом аналізу різноманітних явищ та процесів на сьогодні є математичне моделювання. Серед існуючих математичних моделей можна виділити два великих класи – класи лінійних та нелінійних моделей. Лінійні математичні моделі характеризуються тим, що для них має місце принцип суперпозиції: будь-яка лінійна комбінація розв’язків рівнянь, що входять до моделі, також є їх розв’язком. Лінійні моделі прості для аналізу, для них розроблено багато методів як аналітичного, так і чисельного дослідження. Проте більшість реальних процесів і відповідних їм математичних моделей є нелійними, а їх лінеаризація може слугувати лише першим наближенням до дійсності. Крім того, існують нелінійні математичні моделі, лінеаризація яких принципово неможлива.

Математичне моделювання процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології, екології тощо призводить до необхідності дослідження задач для нелінійних рівнянь математичної фізики [8, 16, 32, 101, 126, 141, 158, 162, 167, 276].

Одним з базових принципів побудови математичних моделей різних процесів є використання законів збереження енергії [101, 126, 141, 276]. Якщо розглядається явище, що включає в себе протікання якоїсь реакції, яка супроводжується дифузиею, то на підставі принципів збереження енергії можна отримати рівняння чи систему рівнянь з частинними похідними для характеристик розглядуваного процесу. Цими характеристиками, зокрема, можуть бути температура в задачах теплопровідності, масові концентрації у хімічній кінетиці, щільність потоку нейтронів в ядерних реакторах.

Для конкретизації розглядатимемо процес теплопровідності. Отже, нехай функція  $u(\mathbf{x}, t)$  задає температуру в точці  $\mathbf{x}$  області  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  в момент часу  $t$  ( $t \geq 0$ ). У загальному випадку крім залежності від  $\mathbf{x}$  і  $t$  треба враховувати зале-

жність щільності  $\rho$ , питомої теплоємності  $c$ , коефіцієнта теплопровідності середовища  $k$  та потужності теплових джерел  $F$  від температури  $u$ . Це призводить до того, що математичною моделлю розглядуваного теплофізичного процесу буде квазілінійне рівняння теплопровідності вигляду [101]

$$\rho(\mathbf{x}, t, u)c(\mathbf{x}, t, u)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t, u)\operatorname{grad} u) = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0. \quad (1.1)$$

У роботах Г.І. Баренблатта, Я.Б. Зельдовича, С.П. Курдюмова, Л.К. Мартінсона, О.А. Самарського та інших [14, 22, 100, 108, 135] знайдено точні аналітичні розв'язки деяких задач нелінійної теплопровідності. Аналіз властивостей цих розв'язків дозволив виявити ряд важливих нелінійних ефектів при розповсюдженні теплових збурень в середовищах з залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності.

Квазілінійні параболічні рівняння другого порядку лежать також в основі математичних моделей різних явищ і процесів в механіці, фізиці, біології, екології, технології та інших галузях знань [101, 276, 99]. Зокрема, рівняння нелінійної теплопровідності (1.1) за певних умов описує фільтрацію рідини і газу в пористих матеріалах, дифузію нейтронів, нелінійний скін-ефект при проникненні магнітного поля в провідне середовище [141]. Це рівняння також може бути застосовано при математичному описі процесів горіння і детонації, хімічної кінетики, процесу зростання і міграції біологічних популяцій, поширенні забруднень в навколишньому середовищі [8, 162, 167]. Такий широкий діапазон застосувань рівняння (1.1) обумовлений тим, що в його основі лежать фундаментальні закони збереження енергії, маси або кількості частинок.

Коли  $c = \operatorname{const}$ ,  $\rho = \operatorname{const}$ , рівняння (1.1) спрощується і набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t, u)\operatorname{grad} u) = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (1.2)$$

де через  $k$  та  $F$  перепозначено відповідно функції  $\frac{k}{c\rho}$  та  $\frac{F}{c\rho}$ .

Якщо припустити, що нелінійність рівняння (1.2) викликана лише потужності теплових джерел  $F$  (тобто  $k = \operatorname{const}$ ), то рівняння (1.2) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Типовою є ситуація, коли в області  $\Omega$  ще наявні джерела (або стоки) тепла, пропорційні температурі. Тоді замість рівняння (1.3) матимемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u + q(\mathbf{x}, t)u = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

(при  $q(\mathbf{x}, t) > 0$  у точці  $\mathbf{x} \in \Omega$  в момент часу  $t$  маємо стік, а при  $q(\mathbf{x}, t) < 0$  – джерело тепла).

Для стаціонарного процесу, коли величина  $u$  та інші характеристики процесу не залежать від часу  $t$ , рівняння (1.2) – (1.4) набувають відповідно вигляду

$$-\operatorname{div}(k(\mathbf{x}, u)\operatorname{grad} u) = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$-k\Delta u = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.6)$$

$$-k\Delta u + q(\mathbf{x})u = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.7)$$

Після ділення обох частин рівнянь (1.6), (1.7) на  $k > 0$  і позначення  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{F(\mathbf{x}, u)}{k}$ ,  $\kappa^2(\mathbf{x}) = \pm \frac{q(\mathbf{x})}{k}$  (знак «+» відповідає стоку, а знак «-» – джерелу) отримаємо рівняння

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$-\Delta u \pm \kappa^2(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.9)$$

Розглядувані рівняння у нестационарному випадку ще слід доповнити початковими та крайовими умовами, а у стаціонарному випадку – тільки крайовими [101, 276]. Початкова умова матиме вигляд

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (1.10)$$

і відповідатиме задаванню в  $\bar{\Omega}$  розподілу температур в момент часу  $t = 0$ .

Крайові умови задають зазвичай одного з наступних трьох типів. Перша крайова умова (умова Діріхле) відповідатиме задаванню на  $\partial\Omega$  розподілу температур при  $t \geq 0$ , друга крайова умова (умова Неймана) – задаванню на  $\partial\Omega$  теплового потоку при  $t \geq 0$ , а третя крайова умова (умова Ньютона або Робена) – задаванню на  $\partial\Omega$  лінійної комбінації температури і теплового потоку при  $t \geq 0$ . Однорідна умова Діріхле, наприклад, має вигляд

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.11)$$

Можливими є також різні нелінійні крайові умови, зокрема, якщо на  $\partial\Omega$  відбувається перенесення енергії випромінюванням.

Задача (1.8), (1.11) є типовим прикладом нелінійної еліптичної крайової задачі, що виникає в багатьох прикладних областях. Зокрема, ця задача зустрічається в задачах теорії нелінійної дифузії [13, 213, 247, 248], теорії хімічних реакцій та теорії горіння [13, 167, 232, 249], теорії зоряних структур [207, 243, 266], в задачах ріманової геометрії [13, 194, 212, 251], в задачах згину мембран [202], в задачах моделювання мікроелектромеханічних систем [201, 228, 234, 239, 240, 261, 267, 305], в магнітній гідродинаміці [6], в задачах кінетики ферментів [276]. При цьому розглядаються нелінійності  $f(\mathbf{x}, u)$  як у загальному випадку, так і конкретного вигляду [226]. Зокрема, в теорії хімічних реакцій та теорії горіння розглядається задача (1.8), (1.11) (так звана задача Гельфанда) з  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda e^u$  ( $\lambda > 0$ ) або  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda \rho(\mathbf{x}) e^u$  ( $\lambda > 0$ ,  $\rho(\mathbf{x}) > 0$  – неперервна у  $\bar{\Omega}$  функція) [13, 167, 195]; в задачах магнітної гідродинаміки –  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  [6]; в задачах ріманової геометрії –  $f(\mathbf{x}, u) = K e^{2u} - k$  ( $K$  – гауссова кривизна деякої ріманової метрики,  $k$  – гауссова кривизна) [251]; в задачах теорії зоряних структур –  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$  ( $p > 1$ ) [207],  $f(\mathbf{x}, u) = |\mathbf{x}|^l u^p$  ( $p > 1$ ,  $l > 0$ ) [243],  $f(\mathbf{x}, u) = 4\pi(2u + u^2)^{\frac{3}{2}}$  [266]; в задачах моделювання мікроелектромеханічних систем –  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda |\mathbf{x}|^\alpha}{(1-u)^2}$ , якщо ураховується лише сила Кулона, і  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \frac{\mu}{(1-u)^4}$ , якщо ураховуються сили Кулона і Казіміра ( $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ) [201, 216, 234, 239, 240, 261, 305]. При цьому зазвичай фізичний



сенс мають лише додатні розв'язки розглядуваних задач, тому постановка задачі (1.8), (1.11) доповнюється умовою  $u(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Також розглядаються задачі з неоднорідними крайовими умовами. Наприклад, у роботі [249] для стаціонарного процесу «реакція-дифузія», розглядуваного у неізотермальній проникній каталітичній гранулі за умови, що кінетика описується законом Арреніуса першого порядку, досліджується така крайова задача:

$$-\Delta u = \lambda^2(1 + \beta - u)e^{\gamma \frac{u-1}{u}}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.12)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 1. \quad (1.13)$$

У задачі (1.12), (1.13)  $\Omega$  – внутрішність гранули,  $\partial\Omega$  – її зовнішня поверхня,  $u$  – температура частинок, що приймають участь у хімічній реакції, а невід'ємні  $\beta$ ,  $\gamma$  і  $\lambda$  є хімічне тепловиділення, енергія активації реакції і модуль Тіле відповідно (змінні обрані безрозмірними).

Ще однією з фізичних постановок, що зводяться до задач розглядуваного вигляду, є задача про розподіл температури в тілі, якщо крізь нього пропускається сталий електричний струм  $i = \sqrt{\lambda}$ , тобто відбувається так званий джоулів підогрів [213]. Якщо тіло неоднорідне і має теплопровідність  $K(\mathbf{x})$ , а його електричний опір  $R(\mathbf{x}, T)$  є функцією температури  $T(\mathbf{x}, t)$  і випромінюванням можна знехтувати, то відповідна задача у безрозмірній формі зводиться до рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} T) = \lambda R(\mathbf{x}, T)$$

з відповідними початковою та крайовою умовами. Зокрема, якщо для дослідника інтерес представляють стаціонарні стани, їх стійкість і залежність від струму  $\lambda$ , то приходять до рівняння вигляду

$$-\operatorname{div}(K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} T) = \lambda R(\mathbf{x}, T)$$

з відповідною крайовою умовою.

Крім рівнянь з частинними похідними також при математичному моделюванні різних процесів використовують і крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. У роботі [234] розглядається одновимірна нелінійна крайова задача

$$-u'' = \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

$$0 < u(x) < 1, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

$$u\left(-\frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

яка виступає в ролі математичної моделі найпростішої одновимірної мікроелектромеханічної системи, а роботі [226] розглядається одновимірна задача Гельфанда

$$-u'' = \lambda e^u, \quad x \in (-1; 1),$$

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

При розгляді задачі про критичність плоского гомогенного реактора товщини  $l$  без рефлектора у роботі [112] використовується наступна математична модель:

$$-u'' = a(u)u, \quad x \in (0; l),$$

$$u(0) = u(l) = 0,$$

де  $a(u) = a_0 + \alpha u - \frac{Au}{B+u}$ , а  $a_0$ ,  $\alpha$ ,  $A$ ,  $B$  – сталі, а при розгляді у роботі [116]

задачі про визначення стаціонарного розподілу нейтронів в плоскому одновимірному ядерному реакторі з оберненим зв'язком між потоком нейтронів та властивостями середовища, що пов'язані розмноженням, ставиться крайова задача

$$-\frac{d}{dx} \left( D(u) \frac{du}{dx} \right) = a(u)u, \quad x \in (0; l),$$

$$u(0) = u(l) = 0,$$

де  $u(x)$  – щільність потоку нейтронів в точці  $x$ ;

$l$  – ширина реактора;

залежність функцій  $D(u)$  і  $a(u)$  від потоку нейтронів описують обернений зв'язок.

Всі ці задачі є одновимірними аналогами задач (1.8), (1.11) та (1.5), (1.11).

Серед задач для нестационарних рівнянь вигляду (1.3) виділимо дві задачі. Перша з них є математичною моделлю процесу дифузії, що виникає при поляризаційних явищах у іонних провідниках, і має вигляд [250]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{1-u}, \quad x \in (-l; l), \quad t > 0, \\ u(-l, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Друга задача має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= \frac{\lambda \rho(\mathbf{x})}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0; T), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

і виникає при моделюванні мікроелектромеханічних систем [305]. Тут  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – обмежена область,  $\lambda > 0$ ,  $\rho(\mathbf{x})$  – неперервна невід'ємна у  $\Omega$  функція, а  $u_0(\mathbf{x})$  така, що  $u_0 \in L_1(\Omega)$ ,  $0 \leq u_0(\mathbf{x}) \leq a < 1$ , якщо  $\mathbf{x} \in \Omega$ , і  $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ .

Також при моделюванні мікроелектромеханічних систем виникають задачі для напівлінійних рівнянь четвертого порядку. Зокрема, у [298] при моделюванні найпростішої мікроелектромеханічної системи у кулі  $B \subset \mathbb{R}^n$  розглядається задача

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} \in B, \\ u|_{\partial B} &= \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} = 0,\end{aligned}$$

а у роботі [238] – задача з крайовими умовами Нав'є

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - B \Delta^2 u + \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0; T),$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(\mathbf{x})$$

$$(0 \leq u_0(\mathbf{x}) < 1, \quad u_1(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \text{якщо } \mathbf{x} \in \Omega)$$

та її стаціонарний аналог

$$-\Delta u + B \Delta^2 u = \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тут  $u$  є відхиленням від положення рівноваги пружної пластини, що займає область  $\Omega$ , параметр  $\mu > 0$  описує масові фактори пружної пластини, параметр  $B > 0$  – відношення натягу та жорсткості в пружній пластині, а параметр  $\lambda > 0$  характеризує відношення електростатичних та механічних сил у системі.

До розв'язання початково-крайових задач для системи квазілінійних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \sum_{j=1}^N D_{ij} \operatorname{grad} u_j \right) = f_i(\mathbf{x}, t, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.14)$$

приходять при моделюванні різноманітних процесів в фізичних, хімічних і біологічних системах.

Системи рівнянь вигляду (1.14) узагальнюють рівняння (1.2) та описують нестационарні дифузійно-кінетичні процеси в багатокомпонентних розподілених системах, тобто еволюцію широкого класу нелінійних активних систем з дифузиею.

Математичні моделі, побудовані на основі системи (1.14), знаходять широке застосування при дослідженні задач, які виникають у біології, екології, економіки

тощо [32, 90, 99, 158]. Цими системами рівнянь описуються, зокрема, процеси поширення нервових імпульсів, хвиль епідемій, популяцій рослин і тварин та інші еволюційні процеси [4, 99, 161, 276]. Найширше системи рівнянь вигляду (1.14) використовуються в хімічній кінетиці при описі процесів типу «реакція-дифузія». У цьому випадку коефіцієнти  $D_{ij}$  називаються коефіцієнтами власної (при  $i = j$ ) і взаємної (при  $i \neq j$ ) дифузії. Молодші члени рівнянь при цьому описують кінетичні процеси в системі, тобто взаємодію (реакції) всіх  $N$  компонентів такої системи зі швидкістю, яка залежить від концентрації компонентів. Одним з найпростішим прикладом функцій  $f_i$ , що описують кінетику процесів, є функції

$$f_i(\mathbf{x}, t, u_1, \dots, u_N) = k_i u_1^{\alpha_{i1}} \dots u_N^{\alpha_{iN}}, \quad \alpha_{ij} = \text{const} > 0.$$

Такий зв'язок швидкостей хімічних реакцій і концентрацій реагуючих речовин визначається за законом діючих мас. Коефіцієнти  $k_i$  при цьому є константами швидкостей реакцій, а  $\alpha_{ij}$  – стехіометричними коефіцієнтами.

Точні розв'язки задач для рівнянь вигляду (1.14) в загальному випадку знайти не вдається через нелінійності, обумовлені молодшими членами рівнянь.

Якщо всі коефіцієнти взаємної дифузії дорівнюють нулю, то система (1.14) спрощується і набуває вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \text{div}(D_i \text{grad } u_i) = f_i(\mathbf{x}, t, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.15)$$

де через  $D_i$  позначено коефіцієнт власної дифузії  $D_{ii}$ .

Подальше спрощення системи (1.15) може бути виконано за припущення, що всі  $D_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . У цьому випадку отримаємо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i = f_i(\mathbf{x}, t, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.16)$$

Якщо ж до того у системі відбувається виділення або поглинання речовин, пропорційне концентрації, то у лівій частині рівнянь (1.14) – (1.16) можуть

з'явитися доданки вигляду  $\sum_{j=1}^N q_j u_j$ , де додатні значення  $q_j$  відповідають поглинанню  $j$ -ї речовини, а від'ємні – її виділенню.

Стационарні аналоги систем рівнянь (1.14) – (1.16) мають відповідно вигляд:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^N D_{ij} \operatorname{grad} u_j\right) &= f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ -\operatorname{div}(D_i \operatorname{grad} u_i) &= f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ -D_i \Delta u_i &= f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Наведемо деякі приклади систем рівнянь типу «реакція-дифузія». Спочатку розглянемо задачу про теплове самозаймання хімічно активної суміші газів у посудині [13, 167]. Нехай деяка посудина довільної форми заповнена такою сумішшю. Протягом реакції, що протікає в посудині, відбувається знищення деяких компонент суміші, за рахунок чого і відбувається тепловиділення. Якщо вважати, що швидкість реакції залежить тільки від температури  $T$  суміші і концентрації  $n$  однієї з компонент суміші, що знищується у ході реакції, то для опису цього процесу ми отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T + q f(T, n), \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D \Delta n - \varepsilon f(T, n), \end{aligned}$$

де  $\varepsilon f(T, n)$  – швидкість реакції, причому тепловий ефект реакції вважається пропорційним  $\frac{q}{\varepsilon}$ , а коефіцієнти теплопровідності  $k$  та дифузії  $D$  вважаються сталими. Крайові умови на стінках посудини задаються у вигляді  $T = T_0 = \text{const}$  і нормальна похідна концентрації  $n$  дорівнює нулю (стінки непроникні).

Іншою задачею, яка призводить до систем розглянутого вигляду, є задача, пов'язана з ядерними реакціями [113, 117]. Якщо розглянути гомогенний реактор  $\Omega$  скінченних розмірів без рефлекторів, у якому перенесення тепла

відбувається шляхом теплопровідності, то для потоку нейтронів  $\Phi$  та температури  $T$  можна поставити таку стаціонарну задачу:

$$\Delta\Phi + \mu a(T)\Phi = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.17)$$

$$\Delta T + b(T)\Phi = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.18)$$

$$\Phi|_{\partial\Omega} = 0, T|_{\partial\Omega} = T_0. \quad (1.19)$$

Багато прикладів задач для рівнянь (1.14) – (1.16) та їх стаціонарних аналогів із застосуваннями у хімічній кінетиці, теорії горіння, біології міститься у [276], математичні моделі різних процесів за наявності магнітної взаємодії розглянуто у [23, 24, 107]. Наведений огляд нелінійних математичних моделей, звичайно, не є вичерпним. Розглянуті рівняння можна уточнювати, наприклад, за рахунок введення градієнтних членів, які будуть враховувати конвективні явища [193, 235, 227, 276].

## 1.2 Методи чисельного аналізу нелінійних задач математичної фізики

На сьогодні для розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики зазвичай використовують скінченно-різницеві методи, метод скінченних елементів, варіаційні та проєкційні методи і різні ітераційні методи. Проаналізуємо стан розвитку кожної з цих груп наближених методів аналізу математичних моделей, розглянутих у п. 1.1.

У [137] розглянуто застосування методу сіток до розв'язання тестової задачі

$$-u'' = f(u), 0 < x < 1, \quad (1.20)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1. \quad (1.21)$$

Для задачі (1.20), (1.21) побудовано нелінійну різницеву схему другого порядку відносно кроку сітки та доведено її збіжність за умови, що  $f'(u) \leq 0$ .

У [140] розглянуто застосування методу сіток до розв'язання задачі пошуку в області  $G(0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2)$  з межею  $\Gamma$  розв'язку слабо нелінійного еліптичного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2, u), \quad (1.22)$$

що задовольняє крайову умову

$$u(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (1.23)$$

де  $\mu(x_1, x_2)$  – задана функція.

Для задачі (1.22), (1.23) побудовано різницеву схему другого порядку відносно кроку сітки та доведено її збіжність за умови, що  $f'_u(x_1, x_2, u) \leq 0$ .

Для однорідної задачі Діріхле для рівняння  $-\Delta u = \lambda f(\mathbf{x})g(u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , у [179] запропоновано використання методу скінченних різниць. Його роботу продемонстровано при  $g(u) = u(1 + u)$  для одновимірного, коли  $\Omega = (0; 1)$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} - x$ , та двовимірних випадків, коли  $\Omega = (0; 1) \times (0; 1)$ ,  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} - xy$ . В роботі [181] методом скінченних різниць у одиничному кубі  $\Omega = (0; 1) \times (0; 1) \times (0; 1)$  чисельно досліджено задачу (1.8), (1.11) при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(1 + u)^q$  та  $\lambda > 0$ ,  $q > 1$ , зроблено висновки про існування розв'язку задачі в залежності від параметра  $\lambda$  та висновок про монотонну залежність розв'язку від параметра  $q$ . Також метод скінченних різниць до задачі (1.8), (1.11), розглядуваної у одиничному кубі, було застосовано у [178] при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(u - u^2 + au^4 - bu^5)$  і різних значень параметрів  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ . На підставі отриманих числових даних було побудовано біфуркаційну діаграму залежності  $\|u\|$  від  $\lambda$ . Аналіз задачі (1.8), (1.11) з логістичною правою частиною  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(g(\mathbf{x})u - u^2)$  методом скінченних різниць було зроблено у роботі [180]. Обчислювальний експеримент проведено у одно-, дво- та тривимірному випадках для одиничного інтервалу, одиничного квадрата та одиничного куба відповідно при знакозмінних функціях  $g(x) = \frac{1}{2} - x$ ,  $g(\mathbf{x}) = 0,1 - xy$  та  $g(\mathbf{x}) = 0,1 - xyz$  і різних значеннях  $\lambda$ , що дало можливість побудувати біфуркаційну залежності  $\|u\|$  від  $\lambda$ . Метод скінченних різниць до розв'язання задачі (1.8), (1.11) у одиничному квадраті



та одиничному кубі при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} u^{\frac{3}{4}} \right)$  застосовано у [270]. Було отримано чисельний розв'язок розглядуваної задачі для різних значень  $\lambda$  і побудовано залежність  $\|u\|$  від  $\lambda$ . У роботі [186] запропоновано для апроксимації оператора Лапласа у рівнянні (1.8) використати тринадцятиточковий шаблон, що дало можливість отримати різницеву схему п'ятого порядку точності відносно кроку сітки. Роботу запропонованої схеми продемонстровано на двох задачах, розглянутих у одиничному квадраті: однорідній задачі Діріхле для рівняння Гінзбурга-Ландау (рівняння (1.8) при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(u^3 - u)$ ) та однорідній задачі Діріхле для рівняння (1.8) з  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda \left( \frac{1}{2} - xy \right) (u^2 - u)$ . На підставі даних обчислювального експерименту відтворено залежність  $\|u\|$  від  $\lambda$ .

Застосування методу скінченних різниць до крайових задач для еліптичних рівнянь четвертого порядку розглянуто у [277, 282, 307, 308]. Особливістю сіткових методів з цих робіт є те, що побудовані різницеві схеми двобічно наближують шуканий розв'язок.

У [277] за допомогою запропонованого сіткового методу досліджується тестова задача, пов'язана зі статичним прогином пружної пластини:

$$u^{(4)} = \sigma \frac{u}{1+u} + q(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.24)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u''(0) = u''(1) = 0, \quad (1.25)$$

де  $\sigma$  – довільна стала (додатна чи від'ємна),  $\sigma < \pi^4$ ;

$$q(x) = \left( \pi^4 - \frac{\sigma}{1 + \sin \pi x} \right) \sin \pi x - \text{додатна при } x \in (0; 1) \text{ функція.}$$

За такого вибору  $q(x)$  точним розв'язком задачі (1.24), (1.25) буде функція  $u^*(x) = \sin \pi x$ .

Робота розглянутих у [282, 307, 308] алгоритмів була продемонстрована на нелінійних задачах Нав'є вигляду

$$\Delta^2 u = f(x, y, u, \Delta u) + q(x, y), (x, y) \in \Omega, \quad (1.26)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.27)$$

де  $\Omega$  – одиничний квадрат, причому функція  $q(x, y)$  була обрана так, щоб точним розв'язком задачі (1.26), (1.27) була функція  $u^*(x, y) = \kappa \sin \pi x \sin \pi y$ ,  $\kappa > 0$ :

$$q(x, y) = \Delta^2 u^* - f(x, y, u^*, \Delta u^*).$$

Вибір функцій  $f(x, y, u, \Delta u)$  був такий:

$$f(x, y, u, \Delta u) = \frac{\sigma u}{1+u}, \quad f(x, y, u, \Delta u) = \frac{\sigma \Delta u}{1+u}, \quad f(x, y, u, \Delta u) = \frac{\sigma \Delta u}{1+e^{-u}}.$$

Продовження досліджень, пов'язаних із застосуванням сіткових методів до розв'язання крайових задач для рівнянь вищих порядків міститься у [171, 279, 280, 297, 316].

Застосування методу сіток до розв'язання задач для квазілінійного рівняння теплопровідності розглянуто у [140, 137]: на прикладі першої початково-крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u)$$

побудовано чисто неявні різницеві схеми, лінійні і нелінійні відносно шуканих сіткових функцій. Застосуванню методу сіток до чисельного дослідження задач конвекції-дифузії та різних задач теплопровідності присвячені роботи [138, 139, 205].

У роботі [216] для задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \frac{\mu}{(1-u)^4}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

що є математичної моделлю мікроелектромеханічної системи, у якій ураховані дії сили Кулона і сили Казіміра, побудовано тришарову різницеву схему на основі схеми Кранка-Ніколсон, роботу якої продемонстровано при тестових значеннях параметрів  $\kappa$ ,  $\lambda$  і  $\mu$ .

Застосування блочно-монотонних різницевих схем до розв'язання задач для рівняння вигляду (1.3) розглянуто у [278]. Розроблені тут схеми дозволяють будувати двобічні апроксимації шуканого розв'язку. Їх роботу продемонстровано декількома обчислювальними експериментами для задач, розглядуваних у прямокутній,  $L$ -подібній та трапецієвидній областях.

В усіх наведених вище роботах метод скінченних різниць показав досить непогані результати при розв'язанні тестових задач. Проте до його загального недоліку слід віднести те, що обчислювальна реалізація виконувалася в основному для відрізка, квадрата чи куба, тому що при реалізації метода в областях з криволінійними ділянками межі відбудеться неминуча їх заміна на скінченну множину точок, причому не обов'язково таких, що належать розглядуваним ділянкам. Це неминуче призведе до втрат точності методу. Крім того, основна маса різницевих схем має другий порядок точності відносно кроку сітки, для чого потрібно існування принаймні четвертих неперервних похідних шуканого розв'язку. Також (крім двобічних ітераційних схем) оцінки похибки мають лише теоретичний характер і для практичного оцінювання точності наближеного розв'язку необхідно проводити, наприклад, подвійний перерахунок відповідно до правила Рунге.

Варіаційні і проєкційні методи розв'язання нелінійних рівнянь описані у [1, 130]. Суть варіаційних методів полягає у заміні вихідної диференціальної задачі задачею знаходження мінімуму деякого функціоналу. Мінімум побудованого функціоналу може бути знайдений, наприклад, методом найскорішого спуску [26]. Варіаційні методи широко застосовуються при дослідженні задач для рівнянь еліптичного типу через те, що їх застосування ще й дозволяє зробити висновок про існування розв'язку диференціальної задачі.

У роботі [184] варіаційними методами чисельно досліджується задача (1.8), (1.11) з  $f(x, u) = \lambda(u + u^2 + u^3)$ : на основі варіаційного формулювання досліджується питання єдиності розв'язку та будується алгоритм його чисельного знахо-

дження методом спуску. Обчислювальний експеримент проведено для випадку відрізка одиничної довжини та одиничного квадрату при різних значеннях  $\lambda$ .

Серед інших виділимо метод декомпозиції області, який теж заснований на переході від вихідної диференціальної задачі до її варіаційного формулювання з подальшою мінімізацією отриманого функціоналу. Застосування методу декомпозиції області до розв'язання контактних задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема, містяться у роботах [17, 18, 159].

Іншим широко поширеним методом чисельного аналізу задач для рівнянь у частинних похідних є метод скінченних елементів, який за своєю сутністю є різновидом проекційного методу Гальоркіна. Обґрунтуванню застосування методу скінченних елементів до розв'язання еліптичних крайових задач присвячено роботи [169, 160].

У роботі [257] метод скінченних елементів застосовується до задачі (1.8), (1.11), розглядуваної у одиничному квадраті, з  $f(x, u) = \lambda \left( \frac{1}{2} - xy \right) u(1 + u)$ . Наведено програмну реалізацію метода у пакеті MATLAB та результати обчислювального експерименту для одиничного квадрата при різних значеннях параметра  $\lambda$ .

Робота [318] присвячена застосуванню метода скінченних елементів до дослідження задач вигляду

$$-\nu \Delta u + \beta f(u) = g, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.28)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.29)$$

де  $\nu$  – малий параметр.

Для задачі (1.28), (1.29) отримано варіаційну постановку, доведено існування єдиного розв'язку та досліджено стійкість та збіжність відповідних скінченно-елементних гальоркінських апроксимацій. Результати роботи метода показано для двох тестових задач, розглядуваних у одиничному квадраті і одиничному кубі, зі степеневими нелінійностями та відомим точним розв'язком.

Проблему математичного моделювання нелінійної масової дифузії розширеним методом скінченних елементів розглянуто у [294] на прикладі задачі для рівняння  $-\nabla(k(u)\nabla u) = 0$ , причому область, у якій розглядається задача складається з двох під областей, у яких  $k(u)$  приймає різні значення. Роботу запропонованого алгоритму продемонстровано на розв'язанні тестової задачі.

У роботі [198] до задачі моделювання мікроелектромеханічної системи застосовується безсітковий локальний метод Петрова-Гальоркіна. За його допомогою проводиться чисельний аналіз відповідної нелінійної крайової задачі у прямокутнику, крузі, кільці та еліпсі.

У наведених вище роботах метод скінченних елементів показав свою ефективність при розв'язанні тестових задач. Однак до загальних його недоліків можна віднести те, що при його реалізації у областях з криволінійною межею відбувається заміна її на вписану ламану, що призводить до втрат точності методу. Також при реалізації варіаційних та проєкційних методів ще залишаються відкритими питання практичної оцінки похибки і, крім того, ці методи не є ітераційними: відшукання кожного наступного наближення не використовує інформацію про попередні наближення. Проте у роботі [3] побудовано прості апостеріорні оцінювачі похибки апроксимацій методу скінченних елементів, здатних надавати двосторонні оцінки похибок таких наближень до розв'язків еліптичних крайових задач.

Застосування варіаційних методів (іноді у комбінації з іншими методами) та різних варіаційних і диференціальних нерівностей до аналізу задачі (1.8), (1.11) з метою з'ясування умов існування додатного розв'язку міститься в роботах [192, 196, 197, 200, 206, 221, 223 – 225, 229, 231, 244, 268, 273 – 275, 304, 309, 310, 313, 320]. Також цими методами досліджуються питання існування і єдиності додатного розв'язку задач для відповідних (1.8), (1.11) одновимірних задач (зокрема, таких, які отримані при пошуку радіальних розв'язків рівняння (1.8)) [242, 245, 246, 300, 319], для напівлінійних еліптичних рівнянь з градієнтними членами [12, 292, 293, 317], задач для рівнянь з  $p$ -лапласіаном [222, 256], задач для систем рівнянь [173, 190, 203, 204, 209, 214, 217 – 219, 252, 255, 262, 269, 284, 301, 302, 312, 315], рівнянь вищих порядків [172, 220, 230, 233, 236, 241, 271, 281, 283, 299, 303, 306] тощо.

Важливим з точки зору побудови чисельного методу розв'язання нелінійної задачі математичної фізики є наявність в неї деякої властивості монотонності. Це дає можливість будувати і обґрунтовувати, зокрема, гальоркінські апроксимації [9, 82, 211, 210] і проєкційні ітераційні методи розв'язання рівнянь та варіаційних нерівностей з нелінійними операторами [166].

Більш ефективними з точки зору обчислювальної реалізації є ітераційні методи. Вони полягають у виконанні однотипних обчислень за ітераційною формулою вигляду  $u_n = T(u_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , починаючи з деякого початкового наближення  $u_0$ . Серед ітераційних методів можна виділити метод лінеаризації (метод Ньютона-Канторовича), який зводить розв'язання нелінійної задачі до розв'язання послідовності лінійних задач. Цей метод має квадратичну швидкість збіжності, але існують певні проблеми з вибором початкового наближення [130, 26]. Інший клас ітераційних методів складають методи двобічних наближень. Ці методи дозволяють будувати дві послідовності функцій, які є наближеннями знизу і зверху до шуканого розв'язку задачі. Відмітимо, що при застосуванні двобічних ітерацій ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку, а також у ряді випадків можемо зробити висновок про існування розв'язку.

Одним з варіантів методу двобічних наближень є метод верхніх та нижніх розв'язків [68, 276]. Його суть полягає у побудові для даної задачі (стаціонарної або не-стаціонарної) двох послідовностей задач, розв'язки яких наближають шуканий розв'язок відповідно знизу та зверху. Цей метод успішно застосовується не тільки для отримання чисельного розв'язку задачі, але й для доведення існування і єдиності її розв'язку. У роботі [174] метод верхніх та нижніх розв'язків застосовано до аналізу задачі (1.8), (1.11) при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(u - u^2 + au^4 - bu^5)$ , де  $\lambda > 0$ ,  $0 < a \ll b \ll 1$ . Обчислювальний експеримент проведено для одиничного квадрату і побудовано біфуркаційну діаграму залежності  $\|u\|$  від  $\lambda$ . До тієї ж задачі, але при  $f(\mathbf{x}, u) = \mu u - u^3$ , метод верхніх та нижніх розв'язків застосовано у [182], а у [185] – при  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda a(\mathbf{x})g(u) - c$ . Також метод верхніх та нижніх розв'язків застосовуюся до аналізу систем напівлінійних еліптичних рівнянь. Так, у роботі [177] досліджено задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(v) + m\psi_p(v), \quad -\Delta v = \mu g(u) + m\psi_q(u) \quad \text{у } \Omega, \\ u &= v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

де  $\Omega$  – обмежена область у  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\psi_r(z) = |z|^{r-1} z;$$

$$f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(\mathbf{x}) \sim x^{p-1}, \quad g(\mathbf{x}) \sim x^{q-1} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Для цієї задачі доведено існування єдиного додатного розв'язку для додатних  $p, q$ , таких, що  $pq < 1$ , великих додатних  $\lambda, \mu$  і  $m \geq 0$ .

Роботу [183] присвячено дослідженню методом верхніх та нижніх розв'язків системи рівнянь

$$-\Delta u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u), \quad -\Delta v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \gamma(v) \text{ у } \Omega, \quad (1.30)$$

$$u = v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (1.31)$$

де  $\Omega$  – обмежена область у  $\mathbb{R}^n$  з гладкою межею  $\partial\Omega$ ;

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  – невід'ємні параметри.

Чисельно задача (1.30), (1.31) досліджується у одиничному інтервалі та одиничному квадраті для  $f(v) = v^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{3}} - 1$ ,  $h(u) = u^{\frac{1}{5}} + u^{\frac{1}{3}} - 3$ ,  $g(u) = u^{\frac{1}{4}} + u - 2$ ,  $\gamma(v) = 2v^{\frac{1}{2}} + 3v^{\frac{1}{4}} - 4$  та різних значень числових параметрів.

Крім цього, методом верхніх та нижніх розв'язків (у поєднанні, зокрема, з принципом максимуму) можна досліджувати еліптичні рівняння і системи еліптичних рівнянь з  $p$ -лапласіаном [175, 176, 189].

Для побудови ітераційних методів з двобічним характером збіжності використовуються методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [71, 122, 123, 191, 199, 237], основи якої було закладено в роботах Л.В. Канторовича, Б.З. Вуліха, М.Г. Крейна, М.А. Рутмана [11, 25, 72, 136] та ін.

Першим методом з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку був, запропонований у 1919 р. С.О. Чаплигіним, метод розв'язання задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь [168]. Його суть полягає у побудові за деяких припущень (наприклад, опуклості функцій правих частин системи) двох послідовностей функцій, які є розв'язками задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь і охоплюють на заданому відрізку знизу та зверху невідомий розв'язок вихідної задачі. Серед безумовних переваг методу Чаплигіна слід відзначити його квадратичну збіжність, доведену М.М. Лузіним [85], але істотним недоліком методу є складність реалізації обчислювальної процедури, бо лінеаризо-

вані рівняння для наближень вдається розв'язати точно лише у виняткових випадках. Наприкінці 1960-х років М.С. Курпелем було на основі методу Чаплигіна розроблено двосторонній метод розв'язання рівнянь з неопуклими операторами, який теж мав квадратичну швидкість збіжності і двобічно апроксимував шуканий розв'язок [74, 75, 77, 79]. Подальший розвиток методів курпелівського типу пов'язаний з роботами Б.А. Шуvara, М.І. Копача, А.Ф. Обшти, В.В. Маринця та ін. [15, 98, 120]. Двобічні ітераційні методи, запропоновані у [65 – 67, 70, 89, 96, 97, 109, 121, 124, 125, 127], базуються на результатах, отриманих М.С. Курпелем та його учнями, і застосовуються до задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем (багатоточкова крайова задача, задача Коші), задач для звичайних диференціальних рівнянь з післядією, крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу, інтегральних рівнянь Фредгольма, нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри, нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри тощо.

У [142] викладено конструктивні чисельно-аналітичні методи дослідження проблеми існування та наближеної побудови періодичних розв'язків автономних систем диференціальних рівнянь і розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, а також запропоновано матрично-векторний апарат реалізації методу послідовних поліноміальних наближень при дослідженні розв'язків періодичних і двоточкових крайових задач.

Крім того, серед ітераційних методів розв'язання операторних рівнянь слід відзначити проекційно-ітеративні [76] та агрегаційно-ітеративні методи [170] і двобічні методи, запропоновані Ю.І. Ковачем, і застосовані до знаходження двобічних апроксимацій розв'язку задачі Гурса [27, 28], розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь параболічного та гіперболічного типів [31], розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними [29], розв'язку нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння із запізнюванням [30].

Іншим напрямком розвитку двобічних ітераційних методів є використання методів теорії нелінійних операторних рівнянь, розробленої М.О. Красносельським, В.І. Опойцевим, І.О. Бахтіним та їх учнями [5, 71, 122, 123], в частині використання тверджень про розв'язність рівнянь з монотонними та гетеротонними операторами.



Методами теорії монотонних увігнутих операторів, розробленої М.О. Красносельським, у роботах [112 – 118] було досліджено низку задач ядерної фізики, які зводяться до інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, а також до систем еліптичних рівнянь. Крім того, питання розв’язності рівнянь з гетеротонним оператором (чи з оператором мішаної монотонності) були досліджені у роботі [286]. Як приклади застосувань отриманих теорем про існування нерухомої точки, зокрема, було розглянуто задачу пошуку неперервного додатного розв’язку нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма та додатного розв’язку двоточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Також у роботах [187, 208, 215, 287, 296] методами монотонних чи мішано-монотонних ітерацій [188, 191, 199, 237, 272] з’ясувати питання розв’язності і вдається отримати нижню та верхню оцінки шуканого розв’язку нелінійних крайових задач.

Деякі узагальнення теорії гетеротонних операторів та їх застосування до розв’язання нелінійних задач математичної фізики були зроблені у роботах А.І. Колосова [38, 39, 40, 46]. Розроблений ним метод подвійного відображення було застосовано до розв’язання задач для звичайних диференціальних рівнянь з вільною межею та на півосі, зокрема, до задач, які виникають у газовій динаміці, у статистичній теорії атома, у нелінійній теплопровідності, у теорії магнітогідродинамічного граничного шару, у теорії хімічних реакцій, у теорії теплового вибуху тощо. Тим самим вдалося з двобічними наближеннями отримати розв’язки задач Томаса-Фермі, Фокнера-Скен, Пуасона-Больцмана, Лагерстрома та деяких інших [34 – 37, 42, 45, 47, 119, 164]. Також теорія двобічної розв’язності рівнянь з гетеротонним оператором була розвинута у роботах [78, 91 – 95].

Незважаючи на успіхи у розробці методів двобічних наближень та їх застосувань у чисельному аналізі задач для звичайних диференціальних рівнянь, вивчення задач для рівнянь з частинними похідними довгий час обмежувалося лише поодинокими роботами [19, 41, 62]. Планомірне дослідження методами двобічних наближень задач вигляду (1.8), (1.11) проведено у роботах [55, 86 – 88, 253]. Було розглянуто задачі з правими частинами з різним характером монотонності, зокрема, вигляду  $f(x, u) = \lambda u^q + u^p$  ( $\lambda > 0$ ,  $0 < q < 1 < p$ ),  $f(x, u) = au^{-q} + bu^p$

( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $q \in (0; 1)$ ,  $p \in (0; 1)$ ),  $f(x, u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$  ( $\lambda > 0$ ,  $\gamma > 0$ ), і основний акцент було зроблено на отримання умов, яким повинні задовольняти параметри, що входять до  $f(x, u)$ , щоб крайова задача мала єдиний додатний розв'язок, до якого двобічно збігатимуться послідовні наближення.

Двобічні оцінки знаходять своє застосування і при розв'язанні задач варіаційними методами [69]. Вони базуються на побудові для основного функціоналу (яким була замінена вихідна диференціальна задача) двоїстого функціонала, за допомогою якого і знаходиться двобічна оцінка похибки. Це дозволяє отримати апостеріорні оцінки похибки варіаційних розв'язків основних задач теорії теплопровідності, теорії пружності та поперечного вигину тонких пластин теорії типу С.П. Тимошенка та моделі Кірхгофа-Лява.

Нелінійні задачі математичної фізики також чисельно досліджувалися структурним методом (методом  $R$ -функцій). Зокрема, у роботі [134] методом  $R$ -функцій здійснено математичне моделювання теплового самозаймання для стаціонарних умов і знайдено для прямокутної та хрестоподібної областей критичне значення параметра Франк-Каменецького. Багато застосувань структурно-варіаційного методу до розв'язання нелінійних задач теплопровідності розглянуто у [133]. Застосування цього методу у нелінійних задачах дає гарні результати, що підтверджується фізичними експериментами, але є не достатньо теоретично обґрунтованим.

О.М. Литвином у роботі [83] наведено аналіз проблем, що виникають при застосуванні методу  $R$ -функцій, і задач, які в рамках цієї теорії не були вирішені. Зокрема, це проблема кутових точок, проблема продовження слідів функцій і їх нормальних похідних з межі у внутрішні точки області інтегрування зі збереженням класу диференційовності, проблема зміни типу крайових умов у деяких довільних точках межі та інші. Можливе вирішення цих проблем запропоновано здійснити за допомогою інтерлінації або інтерфлетації функцій. Перспективним є також розв'язання нелінійних крайових та початково-крайових задач різними безсітковими схемами на основі застосування теорії атомарних функцій [33].

В [68] викладено основні методи нелінійного функціонального аналізу, а також їх застосування до конкретних крайових та початково-крайових задач для рі-

внянь з частинними похідними. В ній описані варіаційні, топологічні методи, методи компактності і монотонності, а також метод верхніх та нижніх розв'язків.

Загальний огляд постановок задач для нелінійних еліптичних рівнянь та опис методів їх чисельного аналізу проведено у роботах [258 – 260].

Серед іншого відзначимо роботу [311], у якій для знаходження чисельного розв'язку одновимірних задач  $u'' + \lambda e^{\frac{u}{1+\alpha u}} = 0$ ,  $x \in (0; 1)$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , і  $u'' = \lambda u e^{\frac{\gamma\beta(1-u)}{1+\beta(1-u)}}$ ,  $x \in (0; 1)$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u(1) = 1$ , які моделюють процеси хімічних реакцій, застосовується штучна нейронна мережа.

### 1.3 Основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах

Розглянемо основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [71, 122, 123, 191], які є теоретичним підґрунтям побудови двобічних ітераційних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики.

Нехай  $\mathcal{E}$  – дійсний банахів (повний нормований) простір,  $\theta$  – нульовий елемент простору  $\mathcal{E}$ .

Відрізком  $[u, w]$ , що з'єднує точки  $u$  і  $w$  банахового простору  $\mathcal{E}$ , називають сукупність елементів вигляду  $tu + (1-t)w$  при  $0 \leq t \leq 1$ . Променем, що проходить через точку  $u \in \mathcal{E}$ ,  $u \neq \theta$ , називають сукупність точок  $tu$  при  $t \geq 0$ .

Множину  $M \subset \mathcal{E}$  називають опуклою, якщо разом з кожними двома точками вона повністю містить відрізок, що з'єднує ці дві точки.

Замкнена опукла множина  $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$  називається конусом, коли виконуються наступні умови:

- а) якщо  $u \in \mathcal{K}$  і  $u \neq \theta$ , то  $\gamma u \in \mathcal{K}$  для будь-якого  $\gamma \geq 0$ ;
- б) якщо  $u \in \mathcal{K}$  і  $u \neq \theta$ , то  $-u \notin \mathcal{K}$ .

Конусами, наприклад, є сукупності невід'ємних функцій у просторах  $C(\bar{\Omega})$ ,  $L_p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ), де  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  – вимірна область, та конуси векторів з невід'ємними координатами у  $\mathbb{R}^m$ .

Простір  $\mathcal{E}$  називають напівупорядкованим, якщо для деяких пар елементів  $v, w \in \mathcal{E}$  визначено бінарне відношення  $\leq$  таке, що:

а) з  $u \leq v$  випливає, що  $\alpha u \leq \alpha v$  при  $\alpha \geq 0$  і  $\alpha v \leq \alpha u$  при  $\alpha < 0$ ;

б) з  $u \leq v$  і  $u \geq v$  випливає, що  $u = v$ ;

в) з  $u_1 \leq v_1$  і  $u_2 \leq v_2$  випливає, що  $u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$ ;

г) з  $u \leq v$  і  $v \leq w$  випливає, що  $u \leq w$ .

Будь-який конус  $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$  дозволяє ввести у просторі  $\mathcal{E}$  напівупорядкованість за правилом:  $u \leq w := w - u \in \mathcal{K}$ . Зокрема, напівупорядкованість, що вводиться у  $C(\bar{\Omega})$  конусом  $\mathcal{K}$  невід'ємних функцій, означає, що  $u(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x})$  для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ .

Можна також ввести позначення  $\leq$  та  $\bar{\leq}$ :

$$u \bar{\leq} w := w - u \notin \mathcal{K}, \quad u < w := u \leq w \wedge u \neq w.$$

Аналогічно вводяться позначення  $\geq$ ,  $\bar{\geq}$ .

Елементи  $u \geq \theta$  (тобто  $u \in \mathcal{K}$ ) називають додатними.

Конусним відрізком у напівупорядкованому за конусом  $\mathcal{K}$  просторі  $\mathcal{E}$  є множина елементів вигляду  $\langle v, w \rangle := \{u \in \mathcal{E} : v \leq u \leq w\}$ , тобто

$$u \in \langle v, w \rangle := (u - v \in \mathcal{K} \wedge w - u \in \mathcal{K}).$$

Із замкненості конуса  $\mathcal{K}$  випливає можливість граничного переходу у нерівностях: якщо  $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ ,  $\|v_k - v\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  і  $u_k \leq v_k$  для всіх  $k = 1, 2, \dots$ , то  $u \leq v$ .

Незважаючи на схожість властивостей знаків  $\leq$  і  $\leq$ , заміна в загальному випадку  $\leq$  на  $\leq$  неприпустима. У той же час в кожному конкретному випадку специфіка конуса, що використовується, може призвести до появи додаткових властивостей у відношення  $\leq$ .

Послідовність  $\{u_k\}$  називають монотонно зростаючою за конусом  $\mathcal{K}$ , якщо  $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$ . Послідовність  $\{u_k\}$  називають обмеженою зверху, якщо  $u_k \leq z$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $z$  – фіксований елемент.

Важливий клас конусів для застосувань теорії напівупорядкованих просторів у обчислювальній математиці складають нормальні конуси.

Конус  $\mathcal{K}$  називається нормальним, якщо існує таке число  $N(\mathcal{K}) > 0$ , що з  $\theta \leq u \leq w$  випливає  $\|u\| \leq N(\mathcal{K})\|w\|$ . У цьому випадку кажуть, що норма напівмонотонна. Якщо  $N(\mathcal{K}) = 1$ , то конус називають гострим і кажуть, що норма монотонна.

Всі конуси в  $\mathbb{R}^m$  нормальні. Конуси  $\mathcal{K}_+$  невід'ємних функцій у  $C(\bar{\Omega})$  або у  $L_p(\Omega)$  також нормальні.

Множину  $M \subset \mathcal{E}$  називають обмеженою за конусом  $\mathcal{K}$ , якщо  $u \leq z_0$  для всіх  $u \in M$  і деякого фіксованого  $z_0 \in \mathcal{E}$ . Елемент  $z_0$  називається верхньою межею множини  $M$ .

Конус  $\mathcal{K}$  називається правильним, якщо будь-яка неспадна обмежена зверху за конусом послідовність  $u_k$  ( $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k \leq \dots \leq z_0$ ) збігається за нормою простору  $\mathcal{E}$ .

Кожний правильний конус є нормальним. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $L_p(\Omega)$  є правильним, а  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  властивості правильності не має.

Елемент  $w \in \mathcal{E}$  називається точною верхньою межею (супремумом) для пари елементів  $u$  і  $v$  з  $\mathcal{E}$ , якщо  $u \leq w$ ,  $v \leq w$  і якщо з нерівностей  $u \leq w_1$ ,  $v \leq w_1$  випливає, що  $w \leq w_1$ .

Конус  $\mathcal{K}$  називається мініедральним, якщо кожна його пара елементів має супремум.

Конус  $\mathcal{K}_+$  в  $\mathbb{R}^m$  є мініедральним. Конуси  $\mathcal{K}_+$  в просторах  $C(\bar{\Omega})$  і  $L_p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ) також є мініедральними.

Той факт, що простір  $\mathcal{E}$  напівупорядковано деяким конусом  $\mathcal{K}$ , може ефективно використовуватися при вивченні оператора  $T$ , що діє в  $\mathcal{E}$ , лише в тому випадку, коли  $T$  має ті чи інші властивості, що пов'язані з напівупорядкованістю. Розглянемо означення основних типів операторів, які використовуватимуться у подальшому.

Оператор  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  називається додатним, якщо він залишає інваріантним (перетворює в себе) конус  $\mathcal{K}$ .

Іншими словами, оператор  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  є додатним, якщо  $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ , тобто  $T(u) \in \mathcal{K}$  при будь-якому  $u \in \mathcal{K}$ . Також умову додатності оператора  $T$  можна записати у вигляді: з  $u \geq \theta$  випливає, що  $T(u) \geq \theta$ .

Часто не суттєво, що оператор  $T$  визначений на всьому просторі  $\mathcal{E}$ , і тоді додатним називають будь-який оператор  $T$ , що визначений на конусі  $\mathcal{K}$  та перетворює  $\mathcal{K}$  в себе.

Важливий підклас додатних операторів утворюють так звані  $u_0$ -додатні оператори, які визначаються так. Нехай зафіксований деякий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ . Позначимо через  $K(u_0)$  множину тих елементів  $u \in \mathcal{K}$ , для яких можна вказати такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$ .

Додатний оператор  $T$ , який переводить ненульові елементи конуса  $\mathcal{K}$  в елементи з  $K(u_0)$  називається  $u_0$ -додатним оператором, тобто для будь-якого ненульового  $u \in \mathcal{K}$  у випадку  $u_0$ -додатного оператора знайдуться такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$ .

Означення багатьох різновидів операторів, що діють в напівупорядкованому просторі, так чи інакше пов'язані з властивістю монотонності.

Оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{E}$ , називається ізотонним (монотонним), якщо з  $u, v \in \mathcal{E}$ ,  $u \geq v$  випливає  $T(u) \geq T(v)$

Оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{E}$ , називається антитонним (антимонотонним), якщо з  $u, v \in \mathcal{E}$ ,  $u \geq v$  випливає  $T(u) \leq T(v)$ .

Зупинимося на визначенні ще одного досить загального класу операторів, пов'язаного з властивістю своєрідною узагальненої монотонності.

Оператор  $T$ , що діє в  $\mathcal{E}$ , називається гетеротонним, якщо він допускає діагональне подання  $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$ , причому супровідний оператор  $\hat{T}$  визначений на  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  і  $\hat{T}(v, w)$  монотонно зростає по  $v$  та спадає по  $w$ , тобто:

а) із  $v_1, v_2 \in \mathcal{E}$ ,  $v_1 \geq v_2$  випливає  $\hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w)$ ;

б) із  $w_1, w_2 \in \mathcal{E}$ ,  $w_1 \geq w_2$  випливає  $\hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2)$ .

Легко бачити, що вибір супутнього оператора  $\hat{T}(v, w)$  завжди неоднозначний: наприклад, якщо  $\hat{T}(v, w)$  супутній оператор для  $T$ , то супутнім буде та-

кож оператор  $\hat{T}(v, w) + v - w$ . При розв'язання конкретних задач з цієї свободи вибору можна отримувати певні вигоди. Проте, коли мова йде про гетеротонний оператор  $T$ , завжди мається на увазі, що супровідний йому оператор  $\hat{T}$  уже конкретно вказано (фіксований) [123].

Монотонний і антимонотонний оператори є частинними випадками гетеротонного. Для монотонного оператора за супровідний можна обрати  $\hat{T}(v, w) \equiv T(v)$ , для антимонотонного –  $\hat{T}(v, w) \equiv T(w)$ . Саме ці оператори в монотонному і антимонотонном випадках вважатимемо за супровідні.

Наступні різновиди операторів, що діють в просторі з конусом, пов'язані з характером росту (зміни) значення оператора по відношенню до тих чи інших класів збільшень аргументу. Найбільш важливі (за кількістю застосувань) типи операторів визначаються зростанням значень оператора уздовж променів, що лежать в конусі  $\mathcal{K}$ .

Оператор  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  називається увігнутих, якщо він  $u_0$ -додатний і для будь-яких  $u \in K(u_0)$  та  $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad (1.32)$$

причому в (1.32) неможлива рівність.

Отже, для увігнутого оператора  $T$  існує такий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ , що виконуються наступні умови:

а) для будь-якого  $u \in \mathcal{K}$  справедливі нерівності  $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$ , де  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ ;

б) для всіх  $u \in \mathcal{K}$  таких, що  $\alpha_1 u_0 \leq u \leq \beta_1 u_0$  ( $\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$ ), виконуються нерівності  $T(\tau u) \geq \tau T(u)$ ,  $T(\tau u) \neq \tau T(u)$ , де  $\tau \in (0, 1)$ .

Увігнутий оператор  $T$  називається  $u_0$ -увігнутих, якщо він  $u_0$ -додатний та для будь-яких  $u \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0, 1)$  знайдеться таке  $\eta = \eta(u, \tau) > 0$ , що

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u).$$

Близьке до увігнутості поняття можна ввести для гетеротонних операторів.

Додатний гетеротонний оператор називається псевдоувігнутиим, якщо  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  для будь-яких ненульових  $v, w \in \mathcal{K}$  і для будь-яких  $v, w \in K(u_0)$  та  $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad (1.33)$$

причому в (1.33) неможлива рівність.

Отже, для псевдоувігнутого оператора  $T$  існує такий ненульовий елемент  $u_0 \in \mathcal{K}$ , що виконуються наступні умови:

а) для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}$  ( $v \neq \theta$ ,  $w \neq \theta$ ) справедливі нерівності  $\alpha u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta u_0$ , де  $\alpha = \alpha(v, w) > 0$ ,  $\beta = \beta(v, w) > 0$ ;

б) для кожних таких  $v, w \in K(u_0)$ , що  $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$ ,  $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$  ( $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$ ,  $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$ ), виконуються нерівності  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w)$ ,  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \neq \tau \hat{T}(v, w)$ , де  $\tau \in (0, 1)$ .

Псевдоувігнутий оператор  $T$  називається  $u_0$ -псевдоувігнутиим, якщо для будь-яких  $v, w \in K(u_0)$  и  $\tau \in (0, 1)$  можна вказати таке  $\eta(v, w, \tau) > 0$ , що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau [1 + \eta(v, w, \tau)] \hat{T}(v, w).$$

Зауважимо, що якщо для ізотонного оператора  $T$  супровідним оператором обрано  $\hat{T}(v, w) = T(v)$ , то означення псевдоувігнутого ( $u_0$ -псевдоувігнутого) оператора переходить в означення увігнутого ( $u_0$ -увігнутого) оператора.

Конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$ , якщо

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \quad (1.34)$$

Введемо таку умову (A) [122, 123]: система рівнянь

$$\hat{T}(v, w) = v, \quad \hat{T}(w, v) = w \quad (1.35)$$



на множині  $M \subset \mathcal{E}$  не має розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

Має місце така теорема [122, 123].

*Теорема 1.1.* Нехай конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$  і на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  виконується умова (А). Нехай, крім того, виконується принаймні одна з наступних умов:

- а) конус  $\mathcal{K}$  є правильним, оператор  $\hat{T}$  є неперервним;
- б) конус  $\mathcal{K}$  є нормальним, оператор  $\hat{T}$  є цілком неперервним;
- в) конус  $\mathcal{K}$  є мініедральним.

Тоді у оператора  $T$  існує нерухома точка  $x^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ .

Якщо мають місце умови б), то вимога виконання умови (А) виявляється зайвою: з сильної інваріантності  $\langle v_0, w_0 \rangle$  випливає звичайна інваріантність  $\langle v_0, w_0 \rangle$  для  $T$ , тому у випадку б) існування нерухомої точки у  $T$  випливає з принципу Шаудера.

При вивченні збіжності ітераційних процесів вигляду  $u_{n+1} = T(u_n)$ , де  $T$  – гетеротонний оператор, зручно розглядати допоміжний ітераційний процес

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \quad (1.36)$$

який починається в точці  $(v_0, w_0)$ .

Має місце таке твердження [122, 123].

*Теорема 1.2.* Нехай конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$  і виконана принаймні одна з наступних умов:

- а) конус  $\mathcal{K}$  є правильним;
- б) конус  $\mathcal{K}$  є нормальним, оператор  $\hat{T}$  є цілком неперервним.

Тоді ітераційний процес (1.36) збігається, тобто  $v_n \rightarrow v^*$ ,  $w_n \rightarrow w^*$ , причому

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

Крім того, якщо  $y_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ ,  $z_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$  і  $y_{n+1} = \hat{T}(y_n, z_n)$ ,  $z_{n+1} = \hat{T}(z_n, y_n)$ , то для будь-якого  $n \geq 0$  мають місце нерівності  $v_n \leq y_n \leq w_n$ ,  $v_n \leq z_n \leq w_n$ .

Нехай оператор  $\hat{T}$  є неперервним. Тоді пара  $(v^*, w^*)$  є розв'язком системи (1.35). Якщо до того ж виконується умова (A), то виключена можливість  $v^* \neq w^*$ . Це означає, що  $u^* := v^* = w^*$  є нерухомою точкою оператора  $T$ , тобто розв'язком рівняння  $u = T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$ , і ми приходимо до наступного результату [122, 123].

*Теорема 1.3.* Нехай виконані умови теореми 1.2. Крім того, нехай оператор  $\hat{T}$  є неперервним і на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  виконується умова (A). Тоді у  $T$  на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  існує єдина нерухома точка  $x^*$ , до якої збігаються послідовні ітерації  $T^n(u)$  незалежно від  $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$ .

Зазначимо, що за виконання умов теореми 1.3  $v_n \rightarrow u^*$ ,  $w_n \rightarrow u^*$ , причому

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0. \quad (1.37)$$

Якщо для послідовностей  $\{v_n\}$ ,  $\{w_n\}$  справджується ланцюг нерівностей (1.37), то казатимемо, що ітераційний процес (1.36) двобічно збігається до  $u^*$ , а відповідний ітераційний метод називатимемо методом двобічних наближень.

Зауважимо також [122, 123], що якщо за реалізацією процесу (1.36) або з якихось інших міркувань вдається встановити існування і рівність границь  $v^*$  і  $w^*$ , то необхідність у будь-яких припущеннях (крім нормальності  $\mathcal{K}$ ) відпадає.

Перевірка умови (A) може виявитися складною задачею. Наведемо деякі достатні умови її виконання [122, 123].

*Теорема 1.4.* Нехай виконані умови теореми 1.2, оператор  $\hat{T}$  є неперервним і має місце така умова:

$$\hat{T}(v + u, w - u) \bar{\geq} \hat{T}(v, w) + u, \quad (1.38)$$

де  $u > \theta$ ,  $v < w$ ,  $v, w, v + u, w - u \in \langle v_0, w_0 \rangle$ .

Тоді на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  виконано умову (A).

Зауважимо також, що достатньою умовою виконання умови (A) є умова [237] існування такого  $\gamma \in (0; 1)$ , що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\| \text{ для всіх } v, w \in \langle v_0, w_0 \rangle. \quad (1.39)$$

І нарешті зазначимо, що умова (А) автоматично виконується для  $u_0$ -псевдо-увігнутих операторів, а саме, можна стверджувати наступне [122, 123].

*Теорема 1.5.* Нехай для  $u_0$ -псевдоувігнутого оператора  $T$  існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$  і виконується хоча б одна з умов а) – в) теореми 1.1. Тоді оператор  $T$  має єдину нерухому точку  $u^* \in K(u_0)$ .

*Теорема 1.6.* Нехай  $u_0$ -псевдоувігнутий оператор  $T$  є неперервним, має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$  і виконується хоча б одна з умов а), б) теореми 1.2. Тоді оператор  $T$  має єдину нерухому точку  $u^* \in K(u_0)$ , до якої збігаються послідовні ітерації  $T^n(u)$  при будь-якому  $u \in \mathcal{K}$ ,  $u \neq \theta$ .

При побудові методу двобічних наближень розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь чи для рівнянь еліптичного типу з частинними похідними необхідно виконати перехід від диференціальної задачі  $Au = f$  до операторного рівняння вигляду  $u = T(u)$ . Це можна зробити, наприклад, за допомогою функції Гріна.

Як відомо [163, 295], функція Гріна  $G(x, s)$  першої крайової задачі для оператора  $Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u$ ,  $x \in (a, b)$ , визначається такими умовами:

$$1) \quad G(x, s) \text{ задовольняє однорідне рівняння } -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0$$

всюди крім точки  $x = s$  ( $s$  – довільна, але фіксована точка з  $(a, b)$ );

$$2) \quad G(x, s) \text{ задовольняє крайовим умовам } u(a) = 0, u(b) = 0;$$

$$3) \quad G(x, s) \text{ неперервна за } x \text{ при будь-якому фіксованому } s;$$

$$4) \text{ має місце співвідношення } G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Доведено [163], що цим умовам задовольняє функція

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & a \leq x \leq s, \\ -\frac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s < x \leq b, \end{cases}$$

де  $u_1(x)$  – нетривіальний розв’язок задачі  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right) + q(x)u_1 = 0$ ,  $u_1(a) = 0$ ;

$u_2(x)$  – нетривіальний розв’язок задачі  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right) + q(x)u_2 = 0$ ,  $u_2(b) = 0$ ;

$|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix}$  – визначник Вронського функцій  $u_1, u_2$ .

Тоді крайова задача

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)u = f(x, u), \quad x \in (a, b), \quad (1.40)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \quad (1.41)$$

еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(x, u(s))ds.$$

Функція Гріна задачі (1.40), (1.41) існуватиме, якщо  $p(x) > 0$  на  $[a, b]$ ,  $r(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  і  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$  неперервні на  $[a, b]$ , вона є симетричною функцією:  $G(x, s) = G(s, x)$ , причому  $G(x, s) \geq 0$ , якщо  $a \leq x, s \leq b$  [163].

Розглянемо тепер у обмеженій області  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ) першу крайову задачу вигляду

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.42)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.43)$$

Функцією Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  першої крайової задачі для оператора  $Lu \equiv -\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$  називатимемо розв’язок задачі [111]

$$-LG = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\mathbf{s} \in \Omega),$$

$$G|_{\partial\Omega} = 0,$$

неперервний у  $\bar{\Omega}$  всюди, окрім точки  $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ . Тут  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  –  $\delta$ -функція Дірака з особливістю у точці  $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ .

Якщо  $p(\mathbf{x}) > 0$  у  $\bar{\Omega}$ ,  $q(\mathbf{x}) \geq 0$  у  $\bar{\Omega}$  і  $p(\mathbf{x})$  неперервно диференційована у  $\bar{\Omega}$ ,  $q(\mathbf{x})$  неперервна у  $\bar{\Omega}$ , то функція Гріна задачі (1.18), (1.19) існуватиме [73, 111]. Вона є симетричною функцією:  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = G(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ , причому  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ , якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$  [111].

Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (1.42), (1.43), то ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (1.44)$$

Недоліком подання (1.44) є те, що у явному вигляді функція Гріна може бути побудована лише для невеликої кількості областей.

У випадку  $Au \equiv -\Delta u$  для зведення крайової задачі (1.42), (1.43) до еквівалентного інтегрального рівняння можна скористатися підходом на основі використання квазіфункції Гріна, яка будується за допомогою конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій. У [131, 132] було отримано, що лінійна крайова задача

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

зводиться до інтегрального рівняння

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u(\boldsymbol{\xi}) K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (1.45)$$

де у випадку  $\mathbb{R}^2$

$$u_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} \ln[r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\boldsymbol{\xi})], \quad G_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \ln \frac{1}{r} - q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2},$$

а у випадку  $\mathbb{R}^3$

$$u_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} G_3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} \right) q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\boldsymbol{\xi})]^{-\frac{1}{2}}, \quad G_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} - q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

Тут  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  – нормалізоване до першого порядку рівняння  $\partial\Omega$ .

Також у [131, 132] було показано, що за рахунок вибору функції  $\omega(\mathbf{x})$  можна ядро  $K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  зробити неперервним.

Ці ідеї були перенесені на нестационарні задачі у роботах [20, 102 – 106], а також використані у [263 – 265, 314] при розв'язанні лінійних задач теорії пластин для рівнянь з бігармонічним оператором. Також метод квазіфункцій Гріна застосовувався при розв'язанні задач для нелінійних рівнянь, коли інтегральне рівняння (1.45) розв'язувалося методом послідовних наближень у поєднанні з методом Бубнова-Гальоркіна [55, 58, 253]. Двобічні послідовні наближення на основі методу квазіфункцій Гріна у цих роботах побудовані не були.

#### 1.4 Постановка задач дослідження

З наведеного аналізу методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики випливає, що при їх чисельному дослідженні найбільш ефективним є використання двобічних ітераційних методів, побудованих з використанням теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Проте двобічні ітераційні схеми розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння відомі лише для частинних випадків рівнянь вигляду  $-u'' = f(x, u)$  та  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$ . Крім того, розв'язання задачі Діріхле для рівняння  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  двобічними методами є неможливим в області, для якої невідомий явний вираз для

функції Гріна, а застосування двобічних ітераційних методів при розв'язанні першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь та першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння невідомі.

Виходячи з цього, задачами дисертаційної роботи є:

а) виділення з множини напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь класу таких рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання за допомогою функції Гріна у вигляді рівняння з гетеротонним оператором, і на основі цього розробка двобічного ітераційного метода її розв'язання;

б) на основі використання конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій розробка метода заміни першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння еквівалентним інтегральним рівнянням (методом квазіфункції Гріна-Рвачова);

в) виділення з множини напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь класу таких рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова у вигляді рівняння з гетеротонним оператором, і на основі цього розробка двобічного ітераційного метода її розв'язання;

г) застосування розроблених двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння до чисельного аналізу рівнянь з степеневими нелінійностями;

д) розробка на основі сумісного використання модифікованого метода Рунге і метода двобічних наближень напівдискретного метода розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

е) застосування розроблених методів до розв'язання задач нелінійної теплопровідності з залежним від температури коефіцієнтом та застосування до розв'язання нелінійної задачі Нав'є;

ж) перевірка ефективності розроблених двобічних ітераційних методів шляхом розв'язання тестових задач.

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1, 3 – 6, 8, 9, 11 – 20, 22 – 47, 58, 62, 65 – 79, 82, 83, 85 – 109, 111 – 127, 130 – 142, 158 – 164, 166 – 253, 255 – 284, 286, 287, 292 – 320].

## 2 ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ГРІНА

2.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна

Розглянемо крайову задачу

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (a, b), \quad (2.1)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (2.2)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \quad (2.3)$$

Вважатимемо, що

$$p(x) > 0 \text{ на } [a, b], \quad q(x) \geq 0 \text{ на } [a, b], \quad (2.4)$$

$$p(x), \quad p'(x), \quad q(x) \text{ неперервні на } [a, b],$$

$$f(x, u) \text{ неперервна і додатна при } x \in [a, b], \quad u > 0. \quad (2.5)$$

Задача (2.1) – (2.3) за зазначених умов є типовим прикладом задачі Діріхле для одновимірного напівлінійного еліптичного рівняння, що виникає при математичному моделюванні багатьох важливих процесів. Наприклад, рівняння (2.1) є одновимірним стаціонарним рівнянням теплопровідності й описує усталений розподіл температури  $u(x)$  у теплопровідному стрижні довжиною  $l = b - a$ . Тут  $p(x)$  – коефіцієнт теплопровідності,  $-p(x) \frac{du}{dx}$  – щільність потоку тепла,  $q(x)$  – коефіцієнт тепловіддачі, а  $f(x, u)$  – нелінійна щільність джерел тепла. Крайові умови (2.3) означають, що на торцях стрижня підтримується нульова температура. Умова додатності (2.2) природно виникає з фізичного сенсу шуканої функції



$u$ . Також рівняння (2.1) описує процеси одновимірної дифузії та інші [21, 141].

Нехай  $G(x, s)$  – функція Гріна задачі (2.1) – (2.3). Тоді задача (2.1) – (2.3) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(s, u(s))ds. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) розглядатимемо у банаховому просторі  $C[a, b]$  функцій, неперервних на відрізку  $[a, b]$ . Норма у  $C[a, b]$  вводиться за правилом  $\|u\| = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$ . Виділимо у  $C[a, b]$  конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C[a, b] : u(x) \geq 0, x \in [a, b]\}$  невід’ємних функцій. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C[a, b]$  є нормальним (і навіть гострим). За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C[a, b]$  введемо напівопорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C[a, b] \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in [a, b].$$

Якщо існує класичний розв’язок задачі (2.1) – (2.3), тобто така функція  $u^* \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ , яка задовольняє рівняння (2.1) і умови (2.2), (2.3), то ця функція також задовольняє і інтегральне рівняння (2.6). Якщо ж класичний розв’язок відсутній, то рівняння (2.6) можна покласти в основу означення узагальненого розв’язку задачі (2.1) – (2.3).

*Означення 2.1.* Розв’язком (узагальненим) крайової задачі (2.1) – (2.3) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв’язком інтегрального рівняння (2.6).

З рівнянням (2.6) пов’яжемо нелінійний інтегральний оператор  $T$ , що діє у  $C[a, b]$  за правилом

$$T(u)(x) = \int_a^b G(x, s)f(s, u(s))ds. \quad (2.7)$$

Дослідимо властивості оператора  $T$  вигляду (2.7).

По-перше, оператор  $T$  вигляду (2.5) є додатним, тобто залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ :  $T(\mathcal{K}_+) \subset \mathcal{K}_+$ . Дійсно, за означенням функція Гріна неперервна у квадраті  $a \leq x, s \leq b$ , а за умов (2.4) – невід’ємна. Тоді з урахуванням умов (2.5) для будь-якої  $u \in C[a, b]$  підінтегральна функція у (2.7) неперервна і невід’ємна при  $a \leq x, s \leq b$ , а отже, функція  $T(u)(x)$  неперервна і невід’ємна на відрізку  $[a, b]$ , тобто з  $u \in \mathcal{K}_+$  випливає, що  $T(u) \in \mathcal{K}_+$ .

По-друге, оператор  $T$  вигляду (2.5) є  $u_0$ -додатним оператором з

$$u_0(x) = \int_a^b G(x, s) ds, \quad (2.8)$$

якщо функція Гріна задачі (2.1) – (2.3) допускає оцінку

$$\varphi(s)u_0(x) \leq G(x, s) \leq \psi(s)u_0(x), \quad a \leq x, s \leq b, \quad (2.9)$$

де  $\varphi(s), \psi(s)$  – невід’ємні неперервні на  $[a, b]$  функції, відмінні від тотожного нуля.

Дійсно, якщо  $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , то має місце нерівність

$$\alpha u_0(x) \leq \int_a^b G(x, s) f(s, u(s)) ds \leq \beta u_0(x), \quad (2.10)$$

де  $\alpha = \int_a^b \varphi(s) f(s, u(s)) ds > 0$ ,  $\beta = \int_a^b \psi(s) f(s, u(s)) ds > 0$ .

Отже, якщо  $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , то  $T(u) \in K(u_0)$ , тобто  $T(u) \in \mathcal{K}_+$  і існують такі  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u) > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$ .

Зауважимо, що функція  $u_0(x)$  вигляду (2.8) належить  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$  та є розв’язком задачі

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = 1, \quad x \in (a, b),$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Ефективне дослідження рівняння (2.6) (а отже, і задачі (2.1) – (2.3)) і побудова двобічних наближень до його додатного розв'язку стає можливим, якщо функція  $f(x, u)$  має властивість монотонності.

Припустимо, що функція  $f(x, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, u) = \hat{f}(x, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $x, v, w$  невід'ємна функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (a, b)$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (2.7) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds. \quad (2.11)$$

Очевидно, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Якщо функція  $f(x, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $x \in (a, b)$ , то можна обрати  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , а для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(x, u)$  можна покласти  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$ .

Доведемо, що гетеротонний оператор  $T$  вигляду (2.7), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (2.11) є супровідним, буде псевдоувігнутих і навіть  $u_0$ -псевдоувігнутих з функцією  $u_0(x)$  вигляду (2.8) за умови: для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x, v, w), \quad x \in (a, b). \quad (2.12)$$

Нехай  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ . Тоді з нерівності (2.9) випливає, що

$$\alpha u_0(x) \leq \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds \leq \beta u_0(x), \quad (2.13)$$

де  $\alpha = \int_a^b \varphi(s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds > 0$ ,  $\beta = \int_a^b \psi(s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds > 0$ .

Це і означає, що  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ .

Нехай тепер  $v, w \in K(u_0)$ , тобто існують  $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$ ,  $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$  такі, що  $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$ ,  $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ . При  $\tau \in (0, 1)$  розглянемо різницю  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w)$ :

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(x) - \tau \hat{T}(v, w)(x) = \\ &= \int_a^b G(x, s) \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) ds - \tau \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds = \\ &= \int_a^b G(x, s) \left[ \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) - \tau \hat{f}(s, v(s), w(s)) \right] ds. \end{aligned}$$

Тоді з нерівності (2.12) і умови неперервності функції  $\hat{f}(x, v, w)$  випливає, що  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \geq \theta$ , причому  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \neq \theta$ . Це і означає псевдоувігнутість оператора  $T$ .

Далі, з нерівностей (2.12), (2.13) випливає, що для всіх  $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(x) - \tau \hat{T}(v, w)(x) = \\ &= \int_a^b G(x, s) \left[ \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) - \tau \hat{f}(s, v(s), w(s)) \right] ds \geq \alpha_1 u_0(x), \end{aligned}$$

де  $\alpha_1 = \int_a^b \varphi(s) \left[ \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) - \tau \hat{f}(s, v(s), w(s)) \right] ds > 0$ .

Звідси матимемо

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) ds \geq \tau \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + \alpha_1 u_0(x).$$

Знову застосовуючи нерівність (2.13), дістанемо, що для всіх  $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
& \tau \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + \alpha_1 u_0(x) \geq \\
& \geq \tau \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + \frac{\alpha_1}{\beta} \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds = \\
& \geq \tau \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \tau} \right) \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds.
\end{aligned}$$

Тоді для всіх  $x \in [a, b]$  має місце нерівність

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}\left(s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right) ds \geq \tau \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\beta \tau} \right) \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds,$$

тобто  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau(1 + \eta)\hat{T}(v, w)$  для будь-яких  $v, w \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0, 1)$ , де

$$\eta = \eta(v, w, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta \tau} > 0.$$

Отже, оператор  $T \in u_0$ -псевдоувігнутим.

Таким чином, має місце таке твердження.

*Лема 2.1.* Оператор  $T$  вигляду (2.7), де  $G(x, s)$  – функція Гріна задачі (2.1) – (2.3), що розглядається у просторі  $C[a, b]$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних функцій, має такі властивості:

- а) є додатним оператором;
- б) за виконання умови (2.9) є  $u_0$ -додатним оператором, де функція  $u_0(x)$  визначається рівністю (2.8);
- в) є гетеротонним оператором, для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (2.11) є супровідним, якщо функція  $f(x, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, u) = \hat{f}(x, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $x, v, w$  функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (a, b)$ ;
- г) якщо виконується нерівність (2.12), є псевдоувігнутим і навіть  $u_0$ -псевдо-

увігнутиим оператором, де функція  $u_0(x)$  має вигляд (2.8).

Зауважимо, що у випадку монотонно зростаючої за  $u$  функції  $f(x, u)$ , коли обрано  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , умова (2.12) набуває вигляду: для будь-якого додатного числа  $u$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$f(x, \tau u) > \tau f(x, u), \quad x \in (a, b), \quad (2.14)$$

а для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(x, u)$ , коли обрано  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$ , умова (2.12) набуває такого вигляду: для будь-якого додатного числа  $u$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$f\left(x, \frac{1}{\tau} u\right) > \tau f(x, u), \quad x \in (a, b). \quad (2.15)$$

Далі вважатимемо, що оператор  $T$  є гетеротонним з супровідним оператором вигляду (2.11). Перейдемо до побудови методу двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (2.7) (а отже, і крайової задачі (2.1) – (2.3)).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  умовами (1.34), які для оператора  $\hat{T}$ , що визначається рівністю (2.11), набувають вигляду

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v^0(s), w^0(s)) ds \geq v^0(x) \quad \text{для всіх } x \in [a, b], \quad (2.16)$$

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, w^0(s), v^0(s)) ds \leq w^0(x) \quad \text{для всіх } x \in [a, b]. \quad (2.17)$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою (1.36):

$$v^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x,s) \hat{f}(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w^0(x). \quad (2.20)$$

Помітимо, що оскільки функція Гріна  $G(x, s)$  задовольняє умовам  $G(a, s) = 0$ ,  $G(b, s) = 0$ , то з (2.18), (2.19) випливає, що функції  $v^{(k)}(x)$ ,  $w^{(k)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задовольняють однорідні крайові умови:  $v^{(k)}(a) = v^{(k)}(b) = 0$ ,  $w^{(k)}(a) = w^{(k)}(b) = 0$ , навіть, якщо  $v^0(a) \neq 0$  та/або  $v^0(b) \neq 0$  чи  $w^0(a) \neq 0$  та/або  $w^0(b) \neq 0$ .

З огляду на сильну інваріантність конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  та гетеротонність оператора  $T$ , для якого оператор  $\hat{T}$  є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v^{(k)}(x)\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x)\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{T}$  випливає існування границь  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Тут можливі два випадки:  $v^* < w^*$  і  $v^* = w^*$ . У другому випадку  $u^* := v^* = w^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  додатний розв'язок крайової задачі (2.1) – (2.3).

Функції  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$  є розв'язком системи рівнянь (1.35), яка для розглядуваної задачі має вигляд:

$$v(x) = \int_a^b G(x,s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds, \quad (2.21)$$

$$w(x) = \int_a^b G(x,s) \hat{f}(s, w(s), v(s)) ds. \quad (2.22)$$

Умовою того, що  $v^* = w^*$ , є вимога, щоб система (2.21), (2.22) не мала на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $v \neq w$ .

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 2.1.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11) і система рівнянь (2.21), (2.22) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (2.18) – (2.20) збігається за нормою простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\ \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Зауважимо, що з нерівностей (2.23) випливає, що кожен з конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , є сильно інваріантним конусним відрізком для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11).

Умови існування єдиного додатного розв'язку крайової задачі (2.1) – (2.3) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (2.18) – (2.20) можуть бути уточнені за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (2.22), (2.23) не має на деякому з сильно інваріантних конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

Спочатку використаємо умову (1.38). Перевіримо, що вона буде виконана для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11), якщо для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $x \in (a, b)$  має місце нерівність

$$\hat{f}(x, v + u, w - u) < \hat{f}(x, v, w) + uM^{-1}, \quad (2.25)$$

де  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x)$ .



Нехай  $u$  і  $w - v$  є такими функціями з  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , що

$$v, w, v + u, w - u \in \langle v^{(1)}, w^{(1)} \rangle. \quad (2.26)$$

Оскільки  $v^{(1)}(a) = w^{(1)}(a) = 0$ ,  $v^{(1)}(b) = w^{(1)}(b) = 0$ , то з умов (2.26) витікає, що  $u(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  і  $u(a) = u(b) = 0$ . Отже, якщо функція  $u(x)$  набуває максимальне значення у точці  $x_0$ , то  $x_0 \in (a, b)$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_a^b G(x_0, s) \hat{f}(x, v(s) + u(s), w(s) - u(s)) ds < \\ & < \int_a^b G(x_0, s) [\hat{f}(s, v(s), w(s)) + u(s)M^{-1}] ds = \\ & = \int_a^b G(x_0, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + M^{-1} \int_a^b G(x_0, s) u(s) ds \leq \\ & \leq \int_a^b G(x_0, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + M^{-1} \max_{x \in [a, b]} u(x) \int_a^b G(x_0, s) ds \leq \\ & \leq \int_a^b G(x_0, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds + u(x_0), \end{aligned}$$

тобто має місце умова (1.38).

Таким чином, справджується теорема.

*Теорема 2.2.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11) і має місце умова (2.25). Тоді ітераційний процес (2.18) – (2.20) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3).

Іншою умовою, яка забезпечить рівність  $v^* = w^*$ , є умова (1.39). Нехай існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{f}(x, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{x \in [a, b]} w^0(x)$ , і для всіх  $x \in (a, b)$  задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(x, w, v) - \hat{f}(x, v, w)| \leq L|w - v|. \quad (2.27)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|\hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) - \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})\| = \\ &= \max_{x \in [a, b]} [\hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})(x) - \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})(x)] = \\ &= \max_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, s) [\hat{f}(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) - \hat{f}(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s))] ds \leq \\ &\leq LM \max_{x \in [a, b]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді рівність  $v^* = w^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = LM < 1$ . Отже, справджується теорема.

*Теорема 2.3.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11) і має місце умова (2.27), причому  $\gamma = LM < 1$ , де  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x)$ . Тоді ітеративний процес (2.18) – (2.20) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3).

І, нарешті, третьою умовою того, що система рівнянь (2.22), (2.23) не має на сильно інваріантному конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ , є умова  $u_0$ -псевдоувігнутості гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11). Тоді з огляду на твердження г) леми 2.1 приходимо до такого результату.

*Теорема 2.4.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle \subset K(u_0)$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором

ром  $\hat{T}$  вигляду (2.11) і має місце умова (2.12). Тоді ітераційний процес (2.18) – (2.20) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3).

Якщо функція  $f(x, u)$  монотонно зростає за  $u$  (тобто є ізотонною за  $u$ ) і обрано  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , то супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, v(s)) ds, \quad (2.28)$$

а умови (2.16), (2.17), що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  (у цьому випадку сильна інваріантність співпадає зі звичайною інваріантністю для оператора  $T$ ) набувають вигляду

$$\int_a^b G(x, s) f(s, v^0(s)) ds \geq v^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b], \quad (2.29)$$

$$\int_a^b G(x, s) f(s, w^0(s)) ds \leq w^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b]. \quad (2.30)$$

Як бачимо, кожна з нерівностей (2.29), (2.30) незалежно від іншої виділяє свій кінець конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ .

Система рівнянь (2.21), (2.22) для ізотонної за  $u$  функції  $f(x, u)$  має вигляд

$$v(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, v(s)) ds, \quad (2.31)$$

$$w(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, w(s)) ds \quad (2.32)$$

і умова, що ця система не має  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $v \neq w$ , перетворюється на умову існування єдиного розв'язку рівняння (2.6).

Умова (2.25) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $v, u$  і для

всіх  $x \in (a, b)$  має місце нерівність

$$f(x, v + u) < f(x, v) + uM^{-1}, \quad (2.33)$$

де  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x)$ .

Умова (2.7) перетвориться на звичайну умову Ліпшиця для функції  $f(x, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(x, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{x \in [a, b]} w^0(x)$ , і для всіх  $x \in (a, b)$  задовольняє нерівність

$$|f(x, v) - f(x, w)| \leq L|v - w|, \quad (2.34)$$

а умова  $u_0$ -псевдоувігнутості набуде вигляду (2.14).

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (2.29), (2.30), і виконується хоча одна з умов (2.33), (2.34) чи (2.14), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.35)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.36)$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w^0(x), \quad (2.37)$$

двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3).

Як бачимо, для монотонної за  $u$  функції  $f(x, u)$  нижні  $\{v^{(k)}(x)\}$  та верхні  $\{w^{(k)}(x)\}$  наближення утворюють дві незалежні послідовності і при обчислювальній організації процесу (2.35) – (2.37) їх формування можна проводити з використанням технологій розпаралелювання обчислень.

Для функція  $f(x, u)$ , яка монотонно спадає за  $u$  (тобто є антитонною за  $u$ ),

якщо обрано  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$ , супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, w(s)) ds, \quad (2.38)$$

а умови (2.16), (2.17), що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  набувають вигляду

$$\int_a^b G(x, s) f(s, w^0(s)) ds \geq v^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b], \quad (2.39)$$

$$\int_a^b G(x, s) f(s, v^0(s)) ds \leq w^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b]. \quad (2.40)$$

Система рівнянь (2.21), (2.22) для антитонної за  $u$  функції  $f(x, u)$  має вигляд

$$v(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, w(s)) ds, \quad (2.41)$$

$$w(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, u(s)) ds. \quad (2.42)$$

Умова (2.25) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $w, u$  таких, що  $0 < u < w$ , і для всіх  $x \in (a, b)$  має місце нерівність

$$f(x, w - u) < f(x, w) + uM^{-1}, \quad (2.43)$$

де  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x)$ .

Умова (2.27), як і в монотонному випадку, перетвориться на звичайну умову Ліпшиця для функції  $f(x, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(x, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{x \in [a, b]} w^0(x)$ , і для всіх  $x \in (a, b)$  задовольняє нерівність

$$|f(x, w) - f(x, v)| \leq L|v - w|, \quad (2.44)$$

а умова  $u_0$ -псевдоувігнутості набуде вигляду (2.15).

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (2.39), (2.40), і виконується хоча одна з умов (2.43), (2.44) чи (2.15), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.46)$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w^0(x), \quad (2.47)$$

двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.1) – (2.3).

За наближений розв'язок крайової задачі (2.1) – (2.3) на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (2.48)$$

Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (2.48):

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)). \quad (2.49)$$

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [a, b]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$ .

За умов теореми 2.3 можна навести і апріорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in [a, b]} (w^0(x) - v^0(x)). \quad (2.50)$$

З (2.50) можна отримати оцінку для кількості ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності. А саме, з нерівності

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in [a, b]} (w^0(x) - v^0(x)) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{x \in [a, b]} (w^0(x) - v^0(x))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{LM}} \right\rceil + 1 \quad (2.51)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  можна розглядати як апріорну оцінку невідомого точного розв'язку  $u^*$ . Умови існування сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , який виділяється умовами (2.16), (2.17), та способи його побудови будуть розглянуті у п. 2.3.

Розглянемо тепер застосування методу двобічних наближень до розв'язання перших крайових задач для двох найбільш уживаних у математичному моделюванні звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$-u'' = f(x, u), \quad x \in (a, b), \quad (2.52)$$

$$-u'' + \kappa^2 u = f(x, u), \quad x \in (a, b). \quad (2.53)$$

Оператор  $u''$  є одновимірним випадком оператора Лапласа, а оператор

$u'' - \kappa^2 u$  є одновимірним випадком оператора Гельмгольца. Рівняння вигляду (2.52), (2.53) часто зустрічаються в механіці, теорії горіння та теорії масоперенесення з хімічними реакціями, коли розглядаються нелінійні стаціонарні процеси, які можуть бути описані функціями однієї незалежної змінної [21].

Задача (2.52), (2.2), (2.3) еквівалентна інтегральному рівнянню (2.6), де функція Гріна має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(x-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq x \leq s, \\ \frac{(s-a)(b-x)}{b-a}, & s \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.54)$$

Як бачимо,  $G(x, s) \geq 0$  для всіх  $a \leq x, s \leq b$ .

Функція  $u_0(x)$  у цьому випадку має вигляд

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x) \quad (2.55)$$

і справджується нерівність (2.9), у якій

$$\varphi(s) = \frac{2}{(b-a)^2} \min\{s-a, b-s\}, \quad \psi(s) = \frac{2}{b-a}.$$

Отже, застосовна лема 2.1 і оператор  $T$  вигляду (2.7), де  $G(x, s)$  – функція Гріна (2.54), є додатним,  $u_0$ -додатним, гетеротонним (за умови можливості діагонального подання функції  $f(x, u)$ ), псевдоувігнутим та  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (2.12)) оператором. Тоді, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , будуть застосовні теореми 2.1 – 2.4 і єдиний додатний розв'язок  $u^*(x)$  задачі (2.52), (2.2), (2.3) можна побудувати методом двобічних наближень за ітераційною схемою (2.18) – (2.20).

Для задачі (2.53), (2.2), (2.3) функція Гріна існує для будь-якого  $\kappa > 0$  і має вигляд



$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \kappa(x-a) \operatorname{sh} \kappa(b-s)}{\kappa \operatorname{sh} \kappa(b-a)}, & a \leq x \leq s, \\ \frac{\operatorname{sh} \kappa(s-a) \operatorname{sh} \kappa(b-x)}{\kappa \operatorname{sh} \kappa(b-a)}, & s \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.56)$$

З (2.56) бачимо, що  $G(x, s) \geq 0$  для всіх  $a \leq x, s \leq b$ .

Для функції Гріна (2.56) функція  $u_0(x)$  має вигляд

$$u_0(x) = \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa(x-a)}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa(b-x)}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa(b-a)}{2}} \quad (2.57)$$

і справджується нерівність (2.9), у якій

$$\varphi(s) = \frac{\kappa}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\kappa(b-a)}{2}} \min\{\operatorname{sh} \kappa(s-a), \operatorname{sh} \kappa(b-s)\},$$

$$\psi(s) = \frac{\kappa \operatorname{ch} \frac{\kappa(s-a)}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa(b-s)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa(b-a)}{2}}.$$

Тоді відповідно до леми 2.1 і оператор  $T$  вигляду (2.7), де  $G(x, s)$  – функція Гріна (2.56), є додатним,  $u_0$ -додатним, гетеротонним (за умови можливості діагонального подання функції  $f(x, u)$ ), псевдоувігнутим та  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (2.12)) оператором. Отже, за умови існування сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , застосовні теореми 2.1 – 2.4 і єдиний додатний розв’язок  $u^*(x)$  задачі (2.49), (2.2), (2.3) можна знайти методом двобічних наближень (2.18) – (2.20).

Обмеженість застосування описаного методу двобічних наближень пов’язана з необхідністю побудови функції Гріна задачі (2.1) – (2.3) для переходу до інтегрального рівняння (2.6). Функцію Гріна можна побудувати, якщо буде відома фундаментальна система розв’язків однорідного рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0. \quad (2.58)$$

Ця функція Гріна має вигляд [163]

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & a \leq x \leq s, \\ -\frac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s < x \leq b, \end{cases}$$

де  $u_1(x)$  – нетривіальний розв’язок задачі  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right) + q(x)u_1 = 0$ ,  $u_1(a) = 0$ ;

$u_2(x)$  – нетривіальний розв’язок задачі  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right) + q(x)u_2 = 0$ ,  $u_2(b) = 0$ ;

$|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix}$  – визначник Вронського функцій  $u_1, u_2$ .

Багато точних розв’язків рівнянь вигляду (2.58) міститься у довіднику [21]. Якщо ж фундаментальна система розв’язків рівняння (2.58) не відома, то можна рекомендувати наступний підхід для отримання апіорної оцінки додатного розв’язку задачі (2.1) – (2.3).

У задачі (2.1) – (2.3) (за додаткової умови неперервності  $p''(x)$  на  $[a, b]$ ) зробимо заміну  $u(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{p(x)}}$ , де  $z(x)$  – нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$-z'' + K(x)z = F(x, z), \quad x \in (a, b), \quad (2.59)$$

$$z(x) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (2.60)$$

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0, \quad (2.61)$$

де  $K(x) = \frac{2p(x)p''(x) - p'^2(x) + 4p(x)q(x)}{4p^2(x)}$ ,  $F(x, z) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} f\left(x, \frac{z}{\sqrt{p(x)}}\right)$ .

Нехай  $0 \leq \underline{K} \leq K(x) \leq \bar{K}$ ,  $x \in [a, b]$ . Тоді розв’язок  $z^*(x)$  задачі (2.59) –

(2.61), якщо він існує, задовольнятиме нерівність

$$\underline{z}(x) \leq z^*(x) \leq \bar{z}(x), \quad x \in [a, b],$$

де  $\underline{z}(x)$  – додатний розв’язок задачі  $-z'' = F(x, z)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = 0$  (якщо  $\underline{K} = 0$ ) чи задачі  $-z'' + \underline{K}z = F(x, z)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = 0$  (якщо  $\underline{K} > 0$ );

$\bar{z}(x)$  – додатний розв’язок задачі  $-z'' + \bar{K}z = F(x, z)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = 0$ .

Розв’язки  $\underline{z}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  можна отримати методом двобічних наближень, якщо для відповідних задач виконуються умови хоча б однієї з теорем 2.1 – 2.4. Тоді для розв’язку  $u^*(x)$  вихідної задачі (2.1) – (2.3) має місце апріорна оцінка

$$\frac{\underline{z}(x)}{\sqrt{p(x)}} \leq u^*(x) \leq \frac{\bar{z}(x)}{\sqrt{p(x)}}, \quad x \in [a, b].$$

Метод двобічних наближень розв’язання задачі (2.1) – (2.3) було розроблено у припущенні однорідності крайових умов (2.3). У випадку ж задачі з неоднорідними крайовими умовами

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dz}{dx} \right) + q(x)z = f(x, z), \quad x \in (a, b),$$

$$z(a) = A, \quad z(b) = B,$$

можна зробити заміну  $z(x) = z^*(x) + u(x)$ , де  $z^*(x)$  – така функція з  $C^2(a, b) \cap C[a, b]$ , що  $z^*(a) = A$ ,  $z^*(b) = B$ , а  $u(x)$  – нова невідома функція. Тоді для  $u(x)$  отримуємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = F(x, u), \quad x \in (a, b),$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

де  $F(x, u) = f(x, z^* + u) + \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dz^*}{dx} \right) - q(x)z^*$ .

Функцію  $z^*(x)$  можна взяти у вигляді  $z^*(x) = A + \frac{x-a}{b-a}(B-A)$  і тоді

$$F(x, u) = f \left( x, A + \frac{x-a}{b-a}(B-A) + u \right) + \frac{1}{b-a} \frac{dp(x)}{dx} - q(x) \left( A + \frac{x-a}{b-a}(B-A) \right),$$

або ж взяти за  $z^*(x)$  розв'язок лінійної задачі

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dz}{dx} \right) + q(x)z = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$z(a) = A, \quad z(b) = B,$$

який відповідно до методу функцій Гріна запишеться у вигляді

$$z^*(a) = \int_a^b G(x, s) \left[ \frac{1}{b-a} \frac{dp(s)}{dx} - q(s) \left( A + \frac{s-a}{b-a}(B-A) \right) \right] ds.$$

У цьому випадку

$$F(x, u) = f(x, z^* + u).$$

Додатний розв'язок отриманої задачі для  $u(x)$  можна знайти описаними методами двобічних наближень за виконання умов хоча б однієї з теорем 2.1 – 2.4.

Зазначимо також, що рівняння вигляду

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + p_0(x) \frac{du}{dx} + p_1(x)u = g(x, u)$$

множенням обох його частин на функцію  $p(x) = e^{-\int p_0(x) dx}$  зводиться до самоспряженого вигляду (2.1).

## 2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання функції Гріна

Розглянемо тепер крайову задачу

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.62)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.63)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.64)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Вважатимемо, що

$$p(\mathbf{x}) > 0 \text{ у } \bar{\Omega}, q(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ у } \bar{\Omega}, \quad (2.65)$$

$p(\mathbf{x})$  неперервно диференційовна у  $\bar{\Omega}$ ,  $q(\mathbf{x})$  неперервна у  $\bar{\Omega}$ ,

$$f(\mathbf{x}, u) \text{ неперервна і додатна при } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, u > 0. \quad (2.66)$$

Задача Діріхле (2.62), (2.64) часто зустрічається у математичному моделюванні нелінійних стаціонарних процесів, що розглядаються у теплофізиці, електромагнетизмі, біології, хімічній кінетиці тощо [101, 126, 141]. При цьому умова додатності (2.63) природно виникає з сенсу функції  $u$  у тій чи іншій прикладній галузі.

Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.62) – (2.64), то задача (2.62) – (2.64) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (2.67)$$

Розглядатимемо рівняння (2.67) у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . Норма у  $C(\bar{\Omega})$  вводиться за правилом  $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . У просторі  $C(\bar{\Omega})$  виділимо конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  невід'ємних функцій. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим). За допомогою ко-

нуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Наразі існування класичного розв'язку задачі (2.62) – (2.64), тобто такої функції  $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , яка задовольняє рівняння (2.62) і умови (2.63), (2.64), ця функція також задовольняє і рівняння (2.67). Якщо ж класичного розв'язку немає, то інтегральне рівняння (2.67) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (2.62) – (2.64).

*Означення 2.2.* Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (2.62) – (2.64) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.67).

З рівнянням (2.67) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds. \quad (2.68)$$

З'ясуємо, які властивості має оператор  $T$  вигляду (2.68).

Функція Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  неперервна при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ , і мають місце оцінки [71]

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right| \text{ у } \mathbb{R}^2,$$

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \frac{k_0}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \text{ у } \mathbb{R}^3,$$

де  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$  – відстань між точками  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{s}$ .

З цих оцінок та з умови (2.66) випливає, що оператор  $T$  вигляду (2.68) діє

у просторі  $C(\bar{\Omega})$  і залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ , тобто  $T$  – додатний оператор.

Також оператор  $T$  вигляду (2.4) є  $u_0$ -додатним оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  належить  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$  та визначається рівністю

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \quad (2.69)$$

і є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u &= 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Властивість  $u_0$ -додатності впливає з такого факту [71]: якщо  $\Omega_0$  – деяка підобласть області  $\Omega$ , причому  $\mu(\Omega_0) > 0$ , то знайдеться таке  $\gamma = \gamma(\Omega_0) > 0$ , що матиме місце нерівність

$$\gamma \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Якщо  $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , то для деякого  $\alpha_0 > 0$  знайдеться множина  $\Omega_0 \subset \Omega$  така, що  $\mu(\Omega_0) > 0$  і  $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \geq \alpha_0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ . Тоді для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \geq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \geq \\ &\geq \alpha_0 \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq \alpha_0 \gamma \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \alpha_0 \gamma u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

З іншого боку, для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \leq \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Отже, для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  матиме місце подвійна нерівність

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds \leq \beta u_0(\mathbf{x}), \quad (2.70)$$

де  $\alpha = \alpha_0 \gamma > 0$ ,  $\beta = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) > 0$ , яка і є означенням  $u_0$ -додатності оператора  $T$ .

Конструктивне дослідження рівняння (2.67) (а отже, і задачі (2.62) – (2.64)) з можливістю побудови двобічних наближень до його додатного розв'язку можливе, якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  має властивість монотонності.

Нехай функція  $f(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$  невід'ємна функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (2.68) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (2.71)$$

Очевидно, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то можна обрати  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$  і супровідний оператор визначиться рівністю

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) ds. \quad (2.72)$$

Для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  можна покласти  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$  і тоді супровідний оператор матиме вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) ds. \quad (2.73)$$

Якщо для будь-яких додатних чисел  $v$ ,  $w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$



$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.74)$$

то гетеротонний оператор  $T$  вигляду (2.68), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (2.70) є супровідним, буде псевдоувігнутим і навіть  $u_0$ -псевдоувігнутим з функцією  $u_0(\mathbf{x})$  вигляду (2.69).

Дійсно, для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$  з нерівності (2.70) випливає, що

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds \leq \beta u_0(\mathbf{x}), \quad (2.75)$$

де  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , тобто  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ .

Нехай тепер  $v, w \in K(u_0)$ , тобто існують  $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$ ,  $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$  такі, що  $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$ ,  $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ . Розглянемо при  $\tau \in (0, 1)$  різницю  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w)$ :

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] ds. \end{aligned}$$

Тоді з нерівності (2.74) і умови неперервності функції  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  випливає, що  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \geq \theta$ , причому  $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \neq \theta$ , що і означає псевдоувігнутість оператора  $T$ .

Далі, з нерівностей (2.74), (2.75) випливає, що для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] ds \geq \alpha_1 u_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

де  $\alpha_1 > 0$ .

Тоді, застосовуючи знову нерівність (2.75), дістанемо, що для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \\ \geq \tau \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s} + \alpha_1 u_0(\mathbf{x}) \geq \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}.$$

Отже, для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  має місце нерівність

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \tau(1 + \eta) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

де  $\eta = \eta(v, w, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta\tau} > 0$ , яка і означає  $u_0$ -псевдоувігнутість оператора  $T$ .

Таким чином, має місце таке твердження.

*Лема 2.2.* Оператор  $T$  вигляду (2.68), де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (2.62) – (2.64), що розглядається у просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних функцій, має такі властивості:

- а) є додатним оператором;
- б) є  $u_0$ -додатним оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  визначається рівністю (2.69);
- в) є гетеротонним оператором, для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (2.71) є супровідним, якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$  функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
- г) якщо виконується нерівність (2.74), є псевдоувігнутим і навіть  $u_0$ -псевдоувігнутим оператором, де функція  $u_0(\mathbf{x})$  має вигляд (2.69).

Далі вважатимемо, що оператор  $T$  вигляду (2.68) є гетеротонним з супровідним оператором вигляду (2.71). Побудуємо метод двобічних наближень

знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (2.67) (а отже, і крайової задачі (2.62) – (2.64)).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  умовами (1.34), які для оператора  $\hat{T}$ , що визначається рівністю (2.68), набувають вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.76)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.77)$$

За схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.78)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.79)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \quad (2.80)$$

Оскільки  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , то з (2.78), (2.79) випливає, що функції  $v^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задовольняють однорідні крайові умови:  $v^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $w^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ , навіть, якщо  $v^0|_{\partial\Omega} \neq 0$  чи  $w^0|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

Через сильну інваріантність конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  та гетеротонність оператора  $T$ , для якого оператор  $\hat{T}$  є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{T}$  випливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Можливими є два випадки:  $v^* < w^*$  і  $v^* = w^*$ . У другому випадку  $u^* := v^* = w^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв’язок розглядуваної крайової задачі.

Функції  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  є розв’язком системи рівнянь (1.35), яка для крайової задачі (2.62) – (2.64) має вигляд:

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (2.81)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds. \quad (2.82)$$

Рівність  $v^* = w^*$  буде виконана, якщо система (2.81), (2.82) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв’язків, що  $v \neq w$ .

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 2.5.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71) і система рівнянь (2.81), (2.82) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв’язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (2.78) – (2.80) збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв’язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} v^0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\ &\leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Як бачимо, з ланцюга нерівностей (2.83) випливає, що кожен з конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , є сильно інваріантним конусним відрізком для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71).

Умови існування єдиного додатного розв’язку крайової задачі (2.62) – (2.64) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (2.78) – (2.80)

можуть бути уточнені за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (2.81), (2.82) не має на деякому з сильно інваріантних конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

Спочатку використаємо умову (1.38). Вона буде виконуватися для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71), якщо для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1}, \quad (2.84)$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ .

Нехай  $u$  і  $w - v$  – такі функції з  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , що

$$v, w, v + u, w - u \in \langle v^{(1)}, w^{(1)} \rangle. \quad (2.85)$$

Оскільки  $v^{(1)}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $w^{(1)}|_{\partial\Omega} = 0$ , то з умов (2.85) випливає, що  $u(\mathbf{x}) \geq 0$  на  $\bar{\Omega}$  і  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Отже, якщо функція  $u(\mathbf{x})$  набуває максимального значення у точці  $\mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}) + u(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s})) ds < \\ & < \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) [\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) + u(\mathbf{s})M^{-1}] ds \leq \\ & \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds + M^{-1} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) ds \leq \\ & \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds + u(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

тобто має місце умова (1.38).

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 2.6.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71) і має місце умова (2.84). Тоді ітераційний процес (2.78) – (2.80) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64).

Другою умовою, яка забезпечить рівність  $v^* = w^*$ , є умова (1.39). Нехай існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)| \leq L|w - v|. \quad (2.86)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|\hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) - \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})\| = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [\hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})(\mathbf{x}) - \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) - \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))] ds \leq \\ &\leq LM \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Звідси матимемо, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Отже, рівність  $v^* = w^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = LM < 1$ , і тоді справджується теорема.

*Теорема 2.7.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71) і має місце умова (2.86), причому  $\gamma = LM < 1$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ .

Тоді ітераційний процес (2.78) – (2.80) двобічно збігається у нормі простору

$C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64).

Ще однією умовою того, що система рівнянь (2.81), (2.82) не має на сильно інваріантному конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ , є умова  $u_0$ -псевдоувігнутості гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71). Тоді з огляду на твердження г) леми 2.2 приходимо до такого результату.

*Теорема 2.8.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle \subset K(u_0)$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71) і має місце умова (2.74). Тоді ітераційний процес (2.78) – (2.80) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64).

Розглянемо тепер частинні випадки, коли функція  $f(x, u)$  тільки монотонно зростає чи тільки монотонно спадає за  $u$ .

Якщо функція  $f(x, u)$  монотонно зростає за  $u$  і обрано  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , то супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю (2.72), а умови (2.77), (2.76), що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  (у цьому випадку сильна інваріантність співпадає зі звичайною інваріантністю для оператора  $T$ ) набувають вигляду

$$\int_{\Omega} G(x, s) f(s, v^0(s)) ds \geq v^0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}, \quad (2.87)$$

$$\int_{\Omega} G(x, s) f(s, w^0(s)) ds \leq w^0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.88)$$

Як бачимо, кожна з нерівностей (2.87), (2.88) незалежно від іншої виділяє свій кінець конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ .

Для ізотонної за  $u$  функції  $f(x, u)$  система рівнянь (2.81), (2.82) має вигляд

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(s, v(s)) ds, \quad (2.89)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \quad (2.90)$$

і умова, що ця система не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $v \neq w$ , перетворюється на умову існування єдиного розв'язку рівняння (2.67).

Умова (2.84) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $v, u$  і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$f(\mathbf{x}, v + u) < f(\mathbf{x}, v) + uM^{-1}, \quad (2.91)$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ .

Умова (2.86) перетвориться на звичайну умову Ліпшиця для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|f(\mathbf{x}, v) - f(\mathbf{x}, w)| \leq L|v - w|, \quad (2.92)$$

а умова (2.74)  $u_0$ -псевдоувігнутості набуде такого вигляду: для будь-якого додатного числа  $u$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$f(\mathbf{x}, \tau u) > \tau f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.93)$$

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (2.87), (2.88), і виконується хоча одна з умов (2.91) – (2.93), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.94)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.95)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \quad (2.96)$$



двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64).

Як бачимо з (2.94) – (2.96), для монотонної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  нижні  $\{v^{(k)}(x)\}$  та верхні  $\{w^{(k)}(x)\}$  наближення утворюють дві незалежні послідовності і при обчислювальній організації ітераційного процесу їх формування можна проводити з використанням технологій розпаралелювання обчислень.

Для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ , яка монотонно спадає за  $u$ , якщо обрано  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ , супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю (2.73), а умови (2.77), (2.76), що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , набувають вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s})) ds \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2.97)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s})) ds \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.98)$$

Система рівнянь (2.81), (2.82) для антитонної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  має вигляд

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) ds, \quad (2.99)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) ds. \quad (2.100)$$

Для розглядуваного випадку умова (2.84) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $w, u$  таких, що  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$f(\mathbf{x}, w - u) < f(\mathbf{x}, w) + uM^{-1}, \quad (2.101)$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ .

Умова (2.86), як і в монотонному випадку, перетвориться на звичайну умову Ліпшиця для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх

$\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| \leq L|v - w|, \quad (2.102)$$

а умова (2.74)  $u_0$ -псевдоувігнутості набуває такого вигляду: для будь-якого додатного числа  $u$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$f\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\tau}u\right) > \tau f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.103)$$

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (2.97), (2.98), і виконується хоча одна з умов (2.101) – (2.103), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.104)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.105)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \quad (2.106)$$

двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (2.62) – (2.64).

На  $k$ -й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (2.62) – (2.64) приймаємо функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (2.107)$$

Тоді ми матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (2.107):

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})), \quad (2.108)$$

що є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ .

Крім того, за умов теореми 2.7 можна записати і апіорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})). \quad (2.109)$$

Тоді з нерівності

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{LM}} \right\rceil + 1 \quad (2.110)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , який виділяється умовами (2.76), (2.77), є апіорною оцінкою невідомого точного розв'язку  $u^*$ . Умови існування та способи його побудови будуть розглянуті у наступному пункті.

Розглянемо тепер застосування методу двобічних наближень до розв'язання перших крайових задач для двох еліптичних рівнянь другого порядку

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.111)$$

$$-\Delta u + \kappa^2 u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.112)$$

Оператор  $\Delta u$  називається оператором Лапласа, а оператор  $\Delta u - \kappa^2 u$  – оператором Гельмгольца. Оператор Лапласа часто зустрічається в рівняннях теорії тепло- і масоперенесення, гідро- і аеромеханіки, теорії пружності, електростатики та інших областей механіки, фізики, біології, хімії тощо [129]. Оператор Гельмгольца входить, наприклад, до рівнянь, що описують процеси масоперенесення з об'ємною хімічною реакцією першого порядку. Крім того, до оператора Гельмгольца зводиться будь-який еліптичний оператор зі сталими коефіцієнтами [128].

Проте, на відміну від одновимірного випадку, функції Гріна задач (2.111), (2.63), (2.64) та (2.112), (2.63), (2.64) відома лише для певної кількості областей  $\Omega$ .

У деяких випадках вдається побудувати функцію Гріна у вигляді розв'язання за власними функціями [7, 128]. Якщо відомі власні функції оператора Лапласа для розглядуваної області, то функцію Гріна рівняння (2.111) можна побудувати у вигляді ряду [7]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{s})}{\lambda_k}, \quad (2.113)$$

де  $\{\lambda_k\}$  і  $\{\varphi_k\}$  – власні числа та відповідні їм власні функції оператора Лапласа в області  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= \lambda\varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \|\varphi\| = 1, \end{aligned}$$

а якщо для розглядуваної області відомі власні функції оператора Гельмгольца, то функцію Гріна рівняння (2.112) можна побудувати у вигляді ряду [128]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{s})}{\lambda_k + \kappa^2}, \quad (2.114)$$

де  $\{\lambda_k\}$  і  $\{\varphi_k\}$  – власні числа та відповідні їм власні функції оператора Гельм-

гольця в області  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi + \kappa^2\varphi &= \lambda\varphi, \mathbf{x} \in \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} &= 0, \|\varphi\| = 1. \end{aligned}$$

Функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа на площині у деяких випадках можна побудувати за допомогою конформних відображень [2]. Якщо плоску область  $\Omega$  площини  $Z$  можна конформно відобразити на одиничний круг  $|w| \leq 1$  площини  $W$ , функція  $w = \psi(z, \zeta)$  здійснює це відображення і точка  $z = \zeta$  переходить при цьому у центр круга  $w = 0$ , тобто  $\psi(\zeta, \zeta) = 0$ , то функцією Гріна буде функція

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\psi(z, \zeta)|},$$

в якій  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = s_1 + is_2$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ .

Якщо  $w = w(z)$  – будь-яке конформне відображення області  $\Omega$  на круг  $|w| \leq 1$ , то функцію  $\psi(z, \zeta)$  знаходять за формулою

$$\psi(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(z)}w(\zeta)}.$$

Якщо ж функція  $w = w(z)$  конформно відображає область  $\Omega$  площини  $Z$  на верхню півплощину  $\text{Im } w \geq 0$  площини  $W$ , то функцією Гріна буде функція

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - \overline{w(\zeta)}}{w(z) - w(\zeta)} \right|.$$

У таблиці В.1 наведено функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (2.111) [128], а у таблиці В.2 наведено функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (2.112) [128]. Для наведених у таблиці В.2 областей функція Гріна існує для будь-яких  $\kappa > 0$ .

Кожна з задач (2.111), (2.63), (2.64) та (2.112), (2.63), (2.64), що розглядаються у областях, функції Гріна для яких наведені у таблицях В.1 та В.2 відповідно, еквівалентна інтегральному рівнянню вигляду (2.67), причому для кожного випадку  $G(\mathbf{x}, s) \geq 0$  при  $\mathbf{x}, s \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq s$ . Відповідно до леми 2.2 оператор  $T$  вигляду (2.68), де функція  $u_0(\mathbf{x})$  визначається формулою (2.69), є додатним,  $u_0$ -додатним, гетеротонним (за умови можливості діагонального подання функції  $f(\mathbf{x}, u)$ ), псевдоувігнутих та  $u_0$ -псевдоувігнутих (за умови (2.74)) оператором. Тоді, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , будуть застосовні теореми 2.5 – 2.8 і єдиний додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$  кожної з задач (2.111), (2.63), (2.64) та (2.112), (2.63), (2.64) можна побудувати методом двобічних наближень за ітераційною схемою (2.78) – (2.80).

Обмеженість застосовності описаного методу двобічних наближень пов'язана з необхідністю побудови функції Гріна задачі (2.62) – (2.64) для переходу до інтегрального рівняння (2.67). Тому, незважаючи на теоретичний факт існування функції Гріна для досить широкого класу областей [73, 110], практичне застосування описаного методу обмежується лише випадками, наведеними у таблицях В.1 і В.2, а також у довідниках [128].

Дамо деякі рекомендації для загального випадку. Якщо у рівнянні (2.62)  $p(\mathbf{x}) \equiv p_0 > 0$ , то приходимо до задачі

$$-\Delta u + K(\mathbf{x})u = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.115)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.116)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.117)$$

де  $K(\mathbf{x}) = \frac{q(\mathbf{x})}{p_0}$ ,  $F(\mathbf{x}, u) = \frac{1}{p_0} f(\mathbf{x}, u)$ .

Нехай  $0 \leq \underline{K} \leq K(\mathbf{x}) \leq \bar{K}$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Тоді розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$  задачі (2.115) – (2.117), якщо він існує, задовольнятиме нерівність

$$\underline{u}(\mathbf{x}) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

де  $\underline{u}(\mathbf{x})$  – додатний розв’язок задачі  $-\Delta u = F(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (якщо  $\underline{K} = 0$ ) чи задачі  $-\Delta u + \kappa^2 u = F(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (якщо  $\underline{K} > 0$ ) при  $\kappa^2 = \underline{K}$ ;

$\bar{u}(\mathbf{x})$  – розв’язок задачі  $-\Delta u + \kappa^2 u = F(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  при  $\kappa^2 = \bar{K}$ .

Розв’язки  $\underline{u}(\mathbf{x})$ ,  $\bar{u}(\mathbf{x})$  можна отримати методом двобічних наближень, якщо для відповідних задач виконуються умови хоча б однієї з теорем 2.5 – 2.8, а отже, у цьому випадку можна побудувати апіорну оцінку невідомого розв’язку.

Особливістю постановки крайової задачі (2.62) – (2.64) є те, що крайова умова (2.64) є однорідною. Якщо ж маємо крайову задачу з неоднорідною крайовою умовою

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla z) + q(\mathbf{x})z = f(\mathbf{x}, z), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.118)$$

$$z|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.119)$$

то можна зробити заміну, що зводить до задачі з однорідною крайовою умовою. Дійсно, нехай  $z^*(\mathbf{x})$  – розв’язок лінійної задачі

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla z) + q(\mathbf{x})z = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$z|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

(цю задачу можна наближено розв’язати для областей довільної геометрії, наприклад, структурно-варіаційним методом (методом  $R$ -функцій) [131] або ж

скористатися формулою  $z^*(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s})\varphi(\mathbf{s})\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}d_s\sigma$ , де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль-

но до  $\partial\Omega$ ). У задачі (2.118), (2.119) зробимо заміну  $z(\mathbf{x}) = z^*(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})$ , де  $u(\mathbf{x})$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $u(\mathbf{x})$  отримаємо задачу з однорідною крайовою умовою:

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

де  $F(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}, z^* + u)$ .

Додатний розв'язок отриманої задачі можна знайти описаними методами двобічних наближень за виконання умов хоча б однієї з теорем 2.5 – 2.8.

2.3 Способи побудови сильно інваріантного конусного відрізка при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна

Окрім необхідності будувати функцію Гріна для переходу до еквівалентного інтегрального рівняння при практичній реалізації двобічних ітераційних методів певною проблемою є також побудова сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , який задає початкові наближення.

Розглянемо спочатку задачу (2.1) – (2.3). Можливими є три випадки поведінки функції  $f(x, u)$ , якщо  $u = 0$ :  $f(x, 0) > 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ ,  $f(x, 0) = 0$  для всіх  $x \in (a, b)$  і  $f(x, u)$  невизначена при  $u = 0$ .

У випадку, коли  $f(x, 0) > 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ , цю властивість повинна мати також функція  $\hat{f}(x, v, w)$ , тобто  $\hat{f}(x, 0, w) > 0$  при  $w > 0$  і  $\hat{f}(x, v, 0) > 0$  при  $v > 0$ . Тоді кінці сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v^0 = 0$ ,  $w^0 = \beta > 0$  і нерівності (2.16), (2.17) набувають вигляду

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, 0, \beta) ds \geq 0 \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, \beta, 0) ds \leq \beta \text{ для всіх } x \in [a, b].$$

Перша з цих нерівностей виконується для будь-якого  $\beta > 0$ , а другу (з урахуванням (2.8) і того, що  $\hat{f}(x, \beta, 0) > 0$  для всіх  $x \in [a, b]$ ,  $\beta > 0$ ) можна замінити нерівністю

$$u_0(x) \leq \frac{\beta}{\max_{s \in [a, b]} \hat{f}(s, \beta, 0)} \text{ для всіх } x \in [a, b].$$



Тоді, якщо  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x)$ , для визначення  $\beta$  отримаємо незалежну від  $x$  нерівність

$$M \leq \frac{\beta}{\max_{x \in [a, b]} \hat{f}(x, \beta, 0)}. \quad (2.120)$$

Отже, якщо нерівність (2.120) має розв'язок  $\beta > 0$ , то конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$  є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.7) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11).

Для більш швидкої збіжності ітерацій величина  $\max_{x \in [a, b]} (w^0(x) - v^0(x)) = \beta$  має бути якомога меншою, тому при практичній реалізації ітераційного процесу (2.18) – (2.20) слід взяти найменше  $\beta$ , що задовольняє нерівність (2.120).

Конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$  є не дуже вдалою апіорною оцінкою для розв'язку  $u^*(x)$  задачі (2.1) – (2.3), оскільки його кінці є сталими. Кращу апостеріорну оцінку дають функції  $v^{(1)}(x)$  та  $w^{(1)}(x)$ : для всіх  $x \in [a, b]$

$$v^{(1)}(x) = \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, 0, \beta) ds \leq u^*(x) \leq \int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, \beta, 0) ds = w^{(1)}(x).$$

Аналогічний висновок про існування сильно інваріантного конусного відрізка для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (2.68) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.71) можна зробити і для задачі (2.78) – (2.80): для визначення  $\beta$  маємо нерівність

$$M \leq \frac{\beta}{\max_{s \in \Omega} \hat{f}(s, \beta, 0)}, \quad (2.121)$$

де  $M = \max_{x \in \Omega} u_0(x)$ , а  $u_0(x)$  визначається формулою (2.69). Апіорна оцінка розв'язку  $u^*(x)$  задачі (2.78) – (2.80) тоді визначається наступною нерівністю:

для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$v^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, 0, \beta) ds \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \beta, 0) ds = w^{(1)}(\mathbf{x}).$$

Якщо ж  $f(x, 0) = 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ , то  $\hat{f}(x, 0, 0) = 0$ ,  $x \in (a, b)$ , і  $\hat{f}(x, 0, w) = 0$  при  $w > 0$ . Отже, при виборі  $v^0(x) = 0$  ми отримуємо, що  $v^{(k)}(x) = 0$  для всіх  $k = 1, 2, \dots$ , що робить неможливим побуду послідовності нижніх наближень  $\{v^{(k)}(x)\}$ . У випадку, коли  $f(x, u)$  невизначена при  $u = 0$ , взагалі вибір  $v^0(x) = 0$  є неможливим. Оскільки має місце нерівність (2.13), яка означає, що  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  для будь-яких  $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v^0(x) = \alpha u_0(x)$ ,  $w^0(x) = \beta u_0(x)$ , де  $0 < \alpha < \beta$ , а функція  $u_0(x)$  визначається рівністю (2.69). Тоді нерівності (2.16), (2.17) набувають вигляду

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds \geq \alpha u_0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b], \quad (2.122)$$

$$\int_a^b G(x, s) \hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds \leq \beta u_0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b]. \quad (2.123)$$

Оскільки  $u_0(a) = u_0(b) = 0$  і  $G(a, s) = G(b, s) = 0$ , то ці нерівності в точках  $x = a$ ,  $x = b$  виконуються як рівності. Крім того, точки  $x = a$ ,  $x = b$  є для функцій  $u_0(x)$  і  $G(x, s)$  (при фіксованому  $s \in (a, b)$ ) простими нулями, а отже, для кожного  $s \in (a, b)$  існують скінченні додатні границі  $\lim_{x \rightarrow a} \hat{G}(x, s)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} \hat{G}(x, s)$ , де  $\hat{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ , а  $\hat{G}(x, a) = \hat{G}(x, b) = 0$ . Тоді функція  $\hat{G}(x, s)$ , довизначена при  $x = a$ ,  $x = b$  і  $s \in (a, b)$  своїми граничними значеннями, буде неперервною у квадраті  $a \leq x, s \leq b$  всюди за винятком кутових точок, де матиме скінченні розриви, а функції

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \int_a^b \hat{G}(x, s) \hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds,$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \int_a^b \hat{G}(x, s) \hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds$$

будуть неперервними при  $x \in [a, b]$ . Звідси випливає, що нерівності (2.122), (2.123) можна записати у вигляді

$$\alpha \leq h_1(x; \alpha, \beta) \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

$$\beta \geq h_2(x; \alpha, \beta) \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

або

$$\alpha \leq \min_{x \in [a, b]} h_1(x; \alpha, \beta), \quad \beta \geq \max_{x \in [a, b]} h_2(x; \alpha, \beta). \quad (2.124)$$

Оскільки величина  $\max_{x \in [a, b]} (w^0(x) - v^0(x)) = (\beta - \alpha)M$  має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, то при практичній реалізації ітераційного процесу (2.18) – (2.20) слід взяти найбільше  $\alpha$  і найменше  $\beta$ , що задовольняють нерівності (2.124).

У випадку одновимірної задачі (2.1) – (2.3) функція  $u_0(x)$  зазвичай може бути записана у елементарних функціях (див., наприклад, формули (2.55) і (2.57)) і побудова та дослідження функцій  $h_1(x; \alpha, \beta)$ ,  $h_2(x; \alpha, \beta)$  може виявитися відносно простою задачею. Ситуація суттєво ускладнюється при переході до багатовимірної задачі (2.78) – (2.80). Тут функція  $u_0(\mathbf{x})$  вигляду (2.69) для багатьох функцій Гріна з таблиць В.1 і В.2 не може бути записана у скінченному вигляді, а отже, задача відшукування кінців конусного відрізка у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ , де  $0 < \alpha < \beta$ , значно ускладниться. Оскільки функція  $u_0(\mathbf{x})$  на межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  набуває нульове значення, то можна скористатися таким підходом. Нехай межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається зі скінченної

кількості кусків ліній  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , де кожна  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – елементарна функція. Тоді за допомогою методу  $R$ -функцій [131] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(\mathbf{x})$  таку, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

З умови  $u_0|_{\partial\Omega} = 0$  випливає, що функція  $u_0(\mathbf{x})$  належить жмутку функцій  $\omega(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})$ , де  $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$  – деяка обмежена функція. Можна поставити задачу відшукування такої функції  $\Phi$  (наприклад, у вигляді полінома), щоб вираз  $\omega(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})$  як найкраще апроксимував функцію  $u_0(\mathbf{x})$  (можна для цього скористатися апаратом інтерполяції або середньоквадратичної чи рівномірної апроксимації). У найпростішому випадку можна покласти  $\Phi \equiv 1$  і кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукати у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ , де  $0 < \alpha < \beta$ . Тоді нерівності (2.76), (2.77) набудуть вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \alpha\omega(\mathbf{s}), \beta\omega(\mathbf{s})) ds \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \beta\omega(\mathbf{s}), \alpha\omega(\mathbf{s})) ds \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Аналогічно до міркувань одновимірного випадку ці нерівності можна звести до вигляду

$$\alpha \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta), \quad \beta \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta), \quad (2.125)$$

де

$$h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, \alpha\omega(\mathbf{s}), \beta\omega(\mathbf{s})) ds,$$

$$h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, \beta\omega(\mathbf{s}), \alpha\omega(\mathbf{s})) ds.$$

Величина

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = (\beta - \alpha) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x})$$

має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, а отже, при практичній реалізації ітераційного процесу (2.78) – (2.80) слід взяти найбільше  $\alpha$  і найменше  $\beta$ , що задовольняють нерівності (2.125).

2.4 Приклади розв'язання тестових задач методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна

2.4.1 Тестова задача для напівлінійного звичайного диференціального рівняння

Використання методу двобічних наближень, розробленого у п. 2.1, розглянемо на прикладі тестової задачі

$$-\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{du}{dx} \right) + 2u = x\sqrt[4]{u} + \frac{1}{\sqrt[4]{u^3}}, \quad x \in (1, 2), \quad (2.126)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (1, 2), \quad (2.127)$$

$$u(1) = 0, \quad u(2) = 0. \quad (2.128)$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння  $-\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{du}{dx} \right) + 2u = 0$  утворюють функції  $\frac{1}{x^2}$  і  $x$ . Тоді розв'язок  $u_1(x)$  цього рівняння, що задовольняє умові  $u_1(1) = 0$ , можна обрати у вигляді  $u_1(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ , а розв'язок  $u_2(x)$ , що задовольняє умові  $u_2(2) = 0$ , – у вигляді  $u_2(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$ . При цьому

$$|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{s^3 - 1}{s^2} & \frac{s^3 - 8}{s^2} \\ \frac{s^3 + 2}{s^3} & \frac{s^3 + 16}{s^3} \end{vmatrix} = \frac{21}{s^2}.$$

Тоді функція Гріна задачі (2.126) – (2.128) матиме вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 1)(8 - s^3)}{21x^2s^2}, & 1 \leq x \leq s, \\ \frac{(s^3 - 1)(8 - x^3)}{21x^2s^2}, & s < x \leq 2, \end{cases} \quad (2.129)$$

і задача (2.126) – (2.128) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_1^2 G(x, s) \left( s^4 \sqrt[4]{u(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{u^3(s)}} \right) ds, \quad (2.130)$$

яке ми розглядатимемо у просторі  $C[1, 2]$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$ .

Функцію  $u_0(x)$  за формулою (2.8) отримаємо у вигляді

$$u_0(x) = \frac{7x^2 - 4 - 3x^3}{14x^2}.$$

Тоді для функції Гріна (2.129) матиме місце оцінка (2.9), у якій

$$\varphi(s) = \min \left\{ \frac{2(8 - s^3)}{s^2(3s + 2)}, \frac{(s^3 - 1)(s^2 + 2s + 4)}{12s^2} \right\},$$

$$\psi(s) = \max \left\{ \frac{2(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 4)}{15s^2}, \frac{8(s^2 + s + 1)}{s^2(3s + 2)} \right\}.$$

Помітимо, що функція  $f(x, u) = x^4 \sqrt[4]{u} + \frac{1}{\sqrt[4]{u^3}}$  дозволяє діагональне подання за допомогою функції  $\hat{f}(x, v, w) = x^4 \sqrt[4]{v} + \frac{1}{\sqrt[4]{w^3}}$ , причому вона зростає за  $v$  і спадає за  $w$  для всіх  $x \in [1; 2]$ , а отже, оператор  $T$ , що визначається правою частиною рівняння (2.130) є гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_1^2 G(x, s) \left( s^4 \sqrt[4]{v(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{w^3(s)}} \right) ds.$$

Функція  $f(x, u) = x\sqrt[4]{u} + \frac{1}{\sqrt[4]{u^3}}$  невизначена при  $u = 0$ , тому згідно з рекомендаціями п. 2.3 сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$ , де  $0 < \alpha < \beta$ . Нерівності (2.122), (2.123), що його визначають, набувають вигляду

$$\int_1^2 G(x, s) \left( s\sqrt[4]{\alpha u_0(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{\beta^3 u_0^3(s)}} \right) ds \geq \alpha u_0(x) \text{ для всіх } x \in [1, 2],$$

$$\int_1^2 G(x, s) \left( s\sqrt[4]{\beta u_0(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3 u_0^3(s)}} \right) ds \leq \beta u_0(x) \text{ для всіх } x \in [1, 2].$$

Останні нерівності можна звести до вигляду

$$\sqrt[4]{\alpha} m_1 + \frac{m_2}{\sqrt[4]{\beta^3}} \geq \alpha, \quad \sqrt[4]{\beta} M_1 + \frac{M_2}{\sqrt[4]{\alpha^3}} \leq \beta, \quad (2.131)$$

де

$$m_1 = \min_{x \in [1; 2]} \int_1^2 \frac{sG(x, s)\sqrt[4]{u_0(s)}}{u_0(x)} ds, \quad m_2 = \min_{x \in [1; 2]} \int_1^2 \frac{G(x, s)}{u_0(x)\sqrt[4]{u_0^3(s)}} ds,$$

$$M_1 = \max_{x \in [1; 2]} \int_1^2 \frac{sG(x, s)\sqrt[4]{u_0(s)}}{u_0(x)} ds, \quad M_2 = \max_{x \in [1; 2]} \int_1^2 \frac{G(x, s)}{u_0(x)\sqrt[4]{u_0^3(s)}} ds.$$

Знаходимо, що  $m_1 = 0,5547$ ,  $m_2 = 11,0371$ ,  $M_1 = 0,6848$ ,  $M_2 = 26,6867$ .

Область площини змінних  $\alpha$  і  $\beta$ , що визначається нерівностями (2.131), наведена на рис. 2.1. Як бачимо з рис. 2.1, найбільше значення  $\alpha$  і найменше значення  $\beta$ , що задовольняють системі нерівностей (2.131), є розв'язком відповідної (2.131) системи рівнянь. Отже, слід обрати  $\alpha = 1,935$ ,  $\beta = 17,672$ .

Обираючи за початкові наближення кінці побудованого сильно інваріантного конусного відрізка, відповідно до (2.18) – (2.20) формуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \int_1^2 G(x, s) \left( s\sqrt[4]{v^{(k)}(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{[w^{(k)}(s)]^3}} \right) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.132)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_1^2 G(x, s) \left( s\sqrt[4]{w^{(k)}(s)} + \frac{1}{\sqrt[4]{[v^{(k)}(s)]^3}} \right) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.133)$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = \beta u_0(x). \quad (2.134)$$

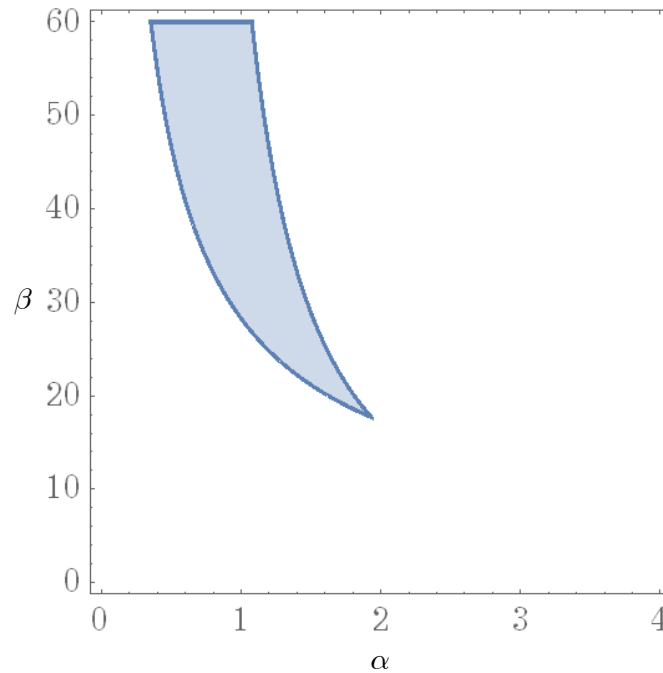


Рисунок 2.1 – Множина розв'язків системи (2.131)

Помітимо, що для функції  $\hat{f}(x, v, w) = x\sqrt[4]{v} + \frac{1}{\sqrt[4]{w^3}}$  виконується нерівність

(2.12). Дійсно, для всіх  $v, w > 0$ ,  $x \in [1; 2]$  і  $\tau \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{f}(x, v, w) &= \left( x\sqrt[4]{\tau v} + \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{\tau^3} w^3}} \right) - \tau \left( x\sqrt[4]{v} + \frac{1}{\sqrt[4]{w^3}} \right) = \\ &= x\sqrt[4]{v}(\sqrt[4]{\tau} - \tau) + \frac{1}{\sqrt[4]{w^3}}(\sqrt[4]{\tau^3} - \tau) > 0. \end{aligned}$$

Тоді на підставі теореми 2.5 можна зробити висновок, що ітераційний



процес (2.132) – (2.134) двобічно збігається до єдиного (узагальненого) розв’язку задачі (2.126) – (2.128).

Для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  було зроблено 19 ітерацій. У табл. 2.1 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in [1, 2]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x))$ , де  $k$  – номер ітерації.

У табл. 2.2 наведено значення наближеного розв’язку  $u^{(19)}(x)$  задачі (2.126) – (2.128), отриманого за формулою (2.48), на сітці, що складається з вузлів  $x_i = 1 + 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ , при цьому  $\|u^{(19)}\|_{C[1, 2]} = 0,2411$ .

На рис. 2.2 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень (штрихована лінія),  $k = 0, 1, \dots, 6$ .

Таблиця 2.1 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (2.132) – (2.134)

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_k$	$0,43 \cdot 10^0$	$0,16 \cdot 10^0$	$0,12 \cdot 10^0$	$0,69 \cdot 10^{-1}$	$0,46 \cdot 10^{-1}$	$0,29 \cdot 10^{-1}$	$0,19 \cdot 10^{-1}$
$k$	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_k$	$0,12 \cdot 10^{-1}$	$0,80 \cdot 10^{-2}$	$0,52 \cdot 10^{-2}$	$0,34 \cdot 10^{-2}$	$0,22 \cdot 10^{-2}$	$0,14 \cdot 10^{-2}$	$0,92 \cdot 10^{-3}$
$k$	14	15	16	17	18	19	
$\varepsilon_k$	$0,60 \cdot 10^{-3}$	$0,39 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,68 \cdot 10^{-4}$	

Таблиця 2.2 – Значення наближеного розв’язку  $u^{(19)}(x)$  задачі (2.126) – (2.128) на сітці з кроком 0,1

$x_i$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$u^{(11)}(x_i)$	0	0,13264	0,19992	0,23233	0,24112	0,23245
$x_i$	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
$u^{(11)}(x_i)$	0,20996	0,17576	0,13078	0,07441	0	

Аналізуючи табл. 2.1 бачимо, що для тестової задачі у наближеному

розв'язку встановлюється один вірний знак після коми приблизно за п'ять ітерацій. Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 18$ , за даними тієї ж табл. 2.1, отримаємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,649$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. Рис. 2.2 наочно демонструє двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(x)\}$  та  $\{w^{(k)}(x)\}$  відповідно до ланцюга нерівностей (2.23): на кожній  $k$ -й ітерації невідомий точний розв'язок  $u^*(x)$  задачі знаходиться вище наближення  $v^{(k)}(x)$  і нижче наближення  $w^{(k)}(x)$ .

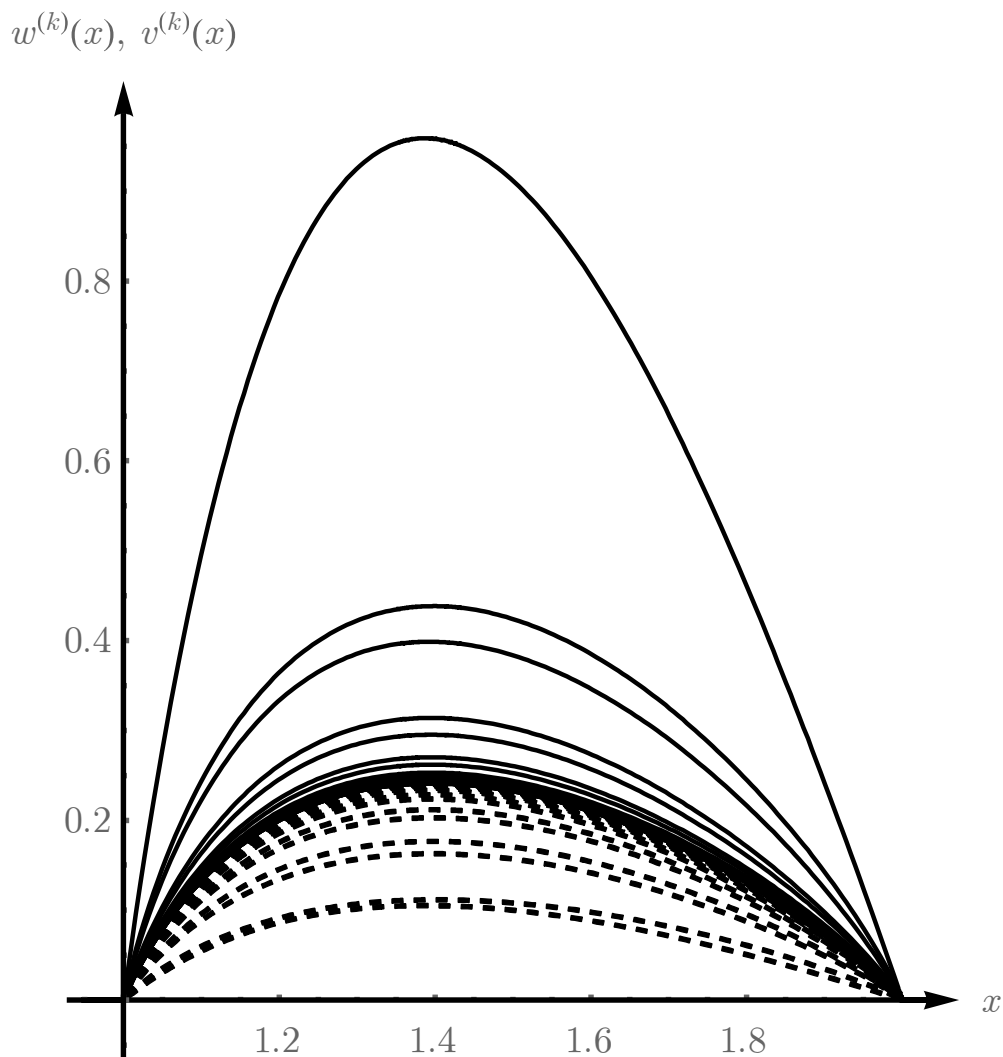


Рисунок 2.2 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (2.126) – (2.128)

### 2.4.2 Тестові задачі для напівлінійного еліптичного рівняння

Математичне моделювання течії провідного середовища у циліндрі з непроникними стінками [6] та математичне моделювання теплового самозаймання хімічно активної суміші газів у сосуді [167] призводить до необхідності розв'язання крайової задачі

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = e^\theta, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.135)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.136)$$

Відомо [128], що у випадку, коли  $\Omega$  – круг одиничного радіуса, задача (2.135), (2.136) має єдиний обмежений розв'язок

$$\theta^*(x, y) = \ln(8k) - \ln(1 - k(x^2 + y^2))^2, \quad k = 5 - 2\sqrt{6}. \quad (2.137)$$

Також у випадку, коли  $\Omega$  – прямокутник, що визначається нерівностями  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $0 < y < \frac{1}{4}$ , відомо [6] значення (з чотирма вірними знаками) наближеного розв'язку в точці  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ :  $\theta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = -0,007071$ .

Для зведення рівняння задачі (2.135), (2.136) до вигляду (2.111) зробимо заміну  $\theta = -u$ . Тоді для функції  $u$  отримаємо задачу

$$-\Delta u = e^{-u}, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.138)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.139)$$

Далі для змінних  $(x, y)$  використовуватимемо позначення  $(x_1, x_2)$ . Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  в області  $\Omega$ , то задача (2.138), (2.139) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \quad (2.140)$$

Отже, знаходження додатного розв'язку задачі (2.138), (2.139) замінено на задачу знаходження у  $\mathcal{K}_+$  розв'язку інтегрального рівняння (2.140).

Оскільки функція  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  є антитонною за  $u$ , то можна обрати  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = e^{-w}$  і оператор  $T$ , що породжується правою частиною рівняння (2.140), буде гетеротонним з супровідним оператором вигляду

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) e^{-w(s)} ds.$$

Функція  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  додатна при  $u = 0$ , тому відповідно до рекомендацій п. 2.3 сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ . Тоді відповідно до (2.121) для  $\beta$  отримаємо нерівність  $\beta \geq M$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) ds$ . Оскільки для більш швидкої збіжності ітерацій треба брати якомога менше значення  $\beta$ , то слід обрати  $\beta = M$ . Відповідно до (2.104) – (2.106) сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) e^{-w^{(k)}(s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.141)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) e^{-v^{(k)}(s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.142)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = M. \quad (2.143)$$

Крім того, помітимо, що функція  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  задовольняє на  $\langle 0, \beta \rangle$  нерівність (2.102) з  $L = 1$ . Дійсно, якщо  $0 < v, w < \beta$ , то

$$|f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| = |e^{-w} - e^{-v}| \leq |v - w|.$$

Тоді на підставі теореми 2.7 можна зробити висновок, що за умови  $M < 1$  ітераційний процес (2.141) – (2.143) двобічно збігається до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку задачі (2.138) – (2.139), при цьому (див. (2.110)) для

досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити  $k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{M}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{M}} \right\rceil + 1$  ітерацію.

Нехай  $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – круг одиничного радіусу. Тоді функція Гріна (див. табл. В.1) має вигляд

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + 1}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2}, \quad (2.144)$$

де  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $s_1 = \rho \cos \psi$ ,  $s_2 = \rho \sin \psi$ .

Для функції Гріна (2.144) знаходимо, що  $M = \frac{1}{4}$ , а отже, умова  $M < 1$  виконується та ітераційний процес (2.141) – (2.143) є збіжним.

Для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  відповідно до (2.110) необхідно зробити 6 ітерацій, проте фактично ця точність була досягнута за 4 ітерації. У табл. 2.3 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації.

У табл. 2.4 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139), отриманого за формулою (2.107), на промені  $\varphi = 0$  для значень  $\rho_i = 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$  ( $(\rho, \varphi)$  – полярні координати точки  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ), при цьому  $\|u^{(4)}\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,2130$ . У табл. 2.4 також наведено для порівняння значення точного розв'язку  $u^*(x_1, x_2) = -\theta^*(x_1, x_2)$  у тих саме точках. Фактична похибка наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  складає  $\|u^{(4)} - u^*\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,48 \cdot 10^{-5}$ .

Таблиця 2.3 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (2.141) – (2.143)

$k$	0	1	2	3	4
$\varepsilon_k$	$0,13 \cdot 10^0$	$0,28 \cdot 10^{-1}$	$0,43 \cdot 10^{-2}$	$0,64 \cdot 10^{-3}$	$0,94 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 2.4 – Значення наближеного розв’язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139) на промені  $\varphi = 0$  з кроком 0,1

$\rho_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(4)}(\rho_i, 0)$	0,212985	0,210964	0,204888	0,194720	0,180397	0,161830
$u^*(\rho_i, 0)$	0,212990	0,210969	0,204892	0,194723	0,180399	0,161831
$\rho_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$u^{(4)}(\rho_i, 0)$	0,138900	0,111456	0,079315	0,042253	0	
$u^*(\rho_i, 0)$	0,138900	0,111456	0,079314	0,042252	0	

На рис. 2.3 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень (штрихована лінія),  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , у перерізі  $x_2 = 0$ , а на рис. 2.4 наведено поверхню наближеного розв’язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

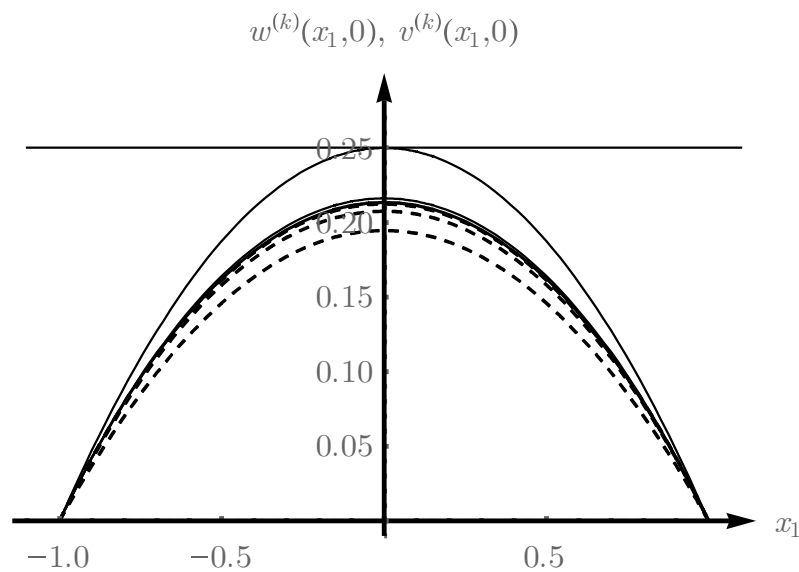


Рисунок 2.3 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв’язку задачі (2.138), (2.139) у перерізі  $x_2 = 0$

Аналіз табл. 2.3 показує, що для задачі (2.138), (2.139) у наближеному розв’язку за кожну ітерацію встановлюється один вірний знак після коми. Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , за даними тієї ж табл. 2.3, маємо, що

$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,146$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної по-

слідовності з відповідним показником. Рис. 2.3 наочно демонструє двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  відповідно до ланцюга нерівностей (2.83): на кожній  $k$ -й ітерації точний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139) знаходиться вище наближення  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  і нижче наближення  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ .

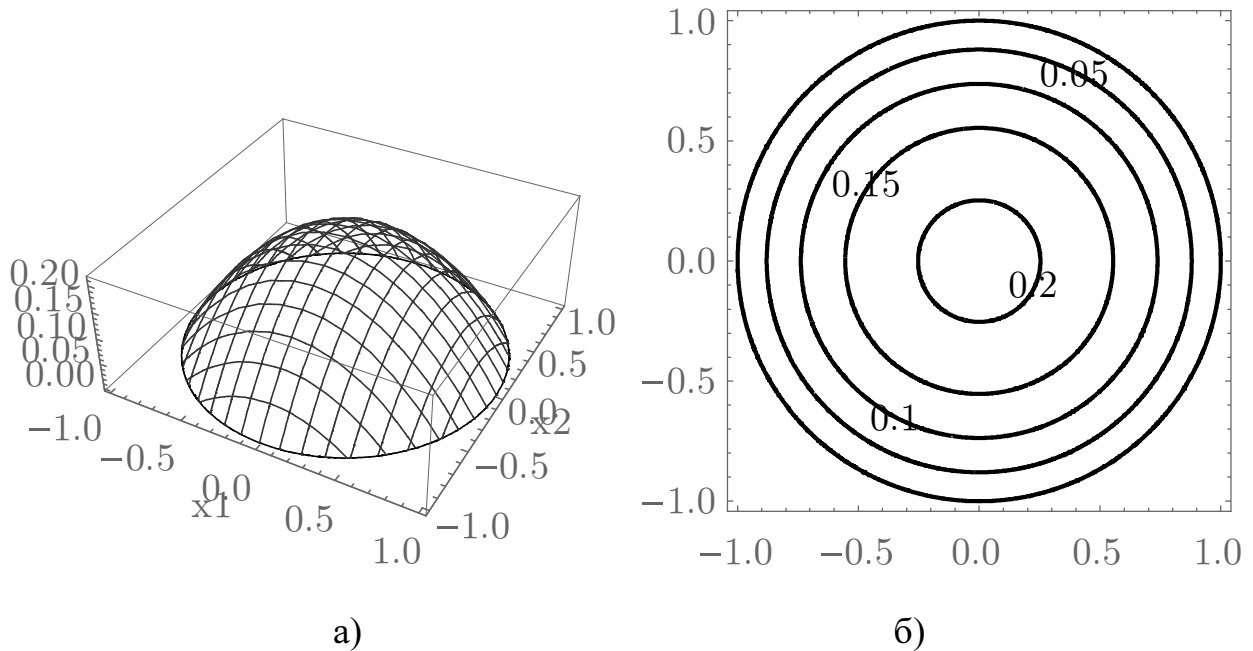


Рисунок 2.4 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  (а)  
та його лінії рівня (б)

Нехай тепер  $\Omega = \left\{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < \frac{1}{2}, 0 < x_2 < \frac{1}{4} \right\}$  – прямокутник. Тоді функція Гріна (див. табл. В.1) має вигляд

$$G(x_1, x_2, s_2, s_2) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x_1 \sin 4\pi m x_2 \sin 2\pi n s_1 \sin 4\pi m s_2}{n^2 + 4m^2}. \quad (2.145)$$

Для функції Гріна (2.145) знаходимо, що  $M = 0,00711\dots$ , а отже, умова  $M < 1$  виконується і ітераційний процес (2.141) – (2.143) є збіжним.

Точність  $\varepsilon = 10^{-6}$  було досягнуто за дві ітерації, що співпадає зі значенням, яке розраховане за формулою (2.110). У табл. 2.5 наведено значення оцін-

ки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації.

У табл. 2.6 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139), отриманого за формулою (2.107), на лінії  $x_2 = 0,125$  з кроком 0,1 за змінною  $x_1$  та відповідні цим точкам значення верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, 2$ , а у табл. 2.7 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  в точках  $(0,1i; 0,05j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ . При цьому  $\|u^{(2)}\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = 0,007078$ , що добре узгоджується зі значенням, отриманим у [6] (відносне відхилення складає 0,1%). На рис. 2.5 наведено поверхню наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

Таблиця 2.5 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (2.141) – (2.143)

$k$	0	1	2
$\varepsilon_k$	$0,36 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-4}$	$0,14 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 2.6 – Значення наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139) та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  і нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, 2$ , на лінії  $x_2 = 0,125$  з кроком 0,1 за змінною  $x_1$

$x_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$w^{(0)}(x_1, 0,125)$	0,0071172	0,0071172	0,0071172	0,0071172	0,0071172	0,0071172
$w^{(1)}(x_1, 0,125)$	0	0,0054758	0,0069751	0,0069751	0,0054758	0
$w^{(2)}(x_1, 0,125)$	0	0,0054500	0,0069374	0,0069374	0,0054500	0
$u^{(2)}(x_1, 0,125)$	0	0,0054499	0,0069373	0,0069373	0,0054499	0
$v^{(2)}(x_1, 0,125)$	0	0,0054498	0,0069372	0,0069372	0,0054498	0
$v^{(1)}(x_1, 0,125)$	0	0,0054369	0,0069257	0,0069257	0,0054369	0
$v^{(0)}(x_1, 0,125)$	0	0	0	0	0	0



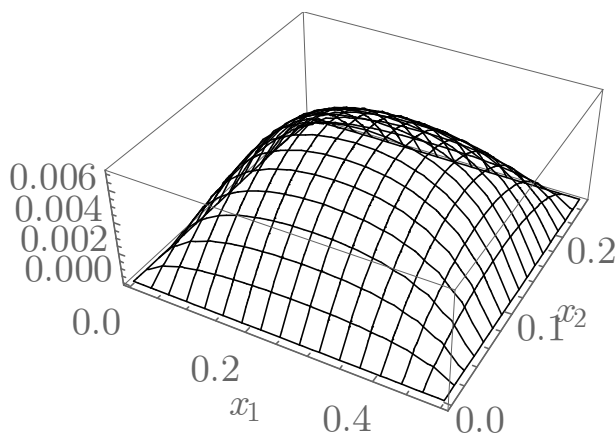
З табл. 2.5 видно, що, що для задачі (2.138), (2.139), що розглядається у прямокутнику, за кожену ітерацію у наближеному розв'язку усталюються два вірних знаки після коми. Розглядаючи далі відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1$ , за дани-

ми тієї ж табл. 2.5, маємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,00551$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

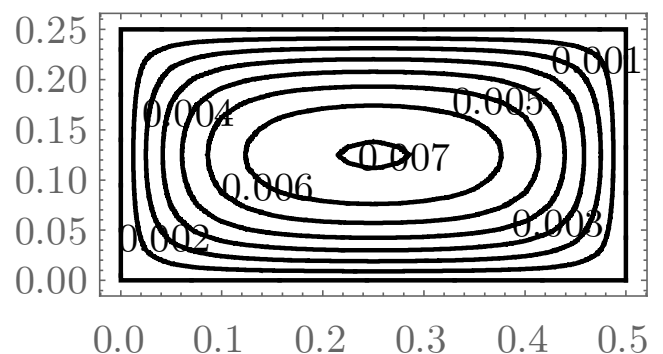
Табл. 2.6 ілюструє двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  відповідно до ланцюга нерівностей (2.83).

Таблиця 2.7 – Значення наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139) в точках  $(0,1i; 0,05j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$

$x_1 \backslash x_2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,05	0	0,003600	0,004485	0,004485	0,003600	0
0,1	0	0,005251	0,006667	0,006667	0,005251	0
0,15	0	0,005251	0,006667	0,006667	0,005251	0
0,2	0	0,003600	0,004485	0,004485	0,003600	0
0,25	0	0	0	0	0	0



а)



б)

Рисунок 2.5 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(2)}(\mathbf{x})$  (а)

та його лінії рівня (б)

Використання апарату математичного моделювання при дослідженні мікросистемної техніки, зокрема, моделювання роботи актюатора електростатичної мікроелектромеханічної системи призводить до наступної першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння [201, 212]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.146)$$

$$0 < u(\mathbf{x}) < 1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.147)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.148)$$

Задача (2.146) – (2.148) описує прогин тонкої еластичної діелектричної мембрани, яка займає область  $\Omega$ , закріплена на своїй межі та розташована над жорсткою нееластичною пластинкою, яка добре проводить електричний струм. Тут  $u(\mathbf{x})$  – величина деформації мембрани,  $\lambda$  – додатний параметр, що характеризує діелектричні властивості процесу.

Застосуємо до задачі (2.146) – (2.148) розроблений у п. 2.2 метод двобічних наближень. Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  в області  $\Omega$ , то задача (2.146) – (2.148) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} ds. \quad (2.149)$$

Тоді задача знаходження розв'язку розглядуваної задачі зводиться до задачі знаходження у  $\mathcal{K}_+$  розв'язку інтегрального рівняння (2.149).

Функція  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2}$  є ізотонною за  $u$ , тому можна обрати

$\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \frac{\lambda}{(1-v)^2}$  і оператор  $T$ , що породжується правою частиною рівняння

(2.149), буде гетеротонним з супровідним оператором вигляду

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-v(\mathbf{s}))^2} ds.$$

Оскільки  $f(\mathbf{x}, 0) = \lambda > 0$ , то за рекомендаціями п. 2.3 сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ , причому, як випливає з (2.147), слід додати умову  $0 < \beta < 1$ . Тоді відповідно до (2.121) для  $\beta$  отримаємо нерівність  $\lambda M \leq \beta(1 - \beta)^2$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ . Типовий вигляд області, що визначається нерівностями  $\lambda M \leq \beta(1 - \beta)^2$ ,  $0 < \beta < 1$ , у площині координат  $(\beta, \lambda)$  наведено на рис. 2.6.

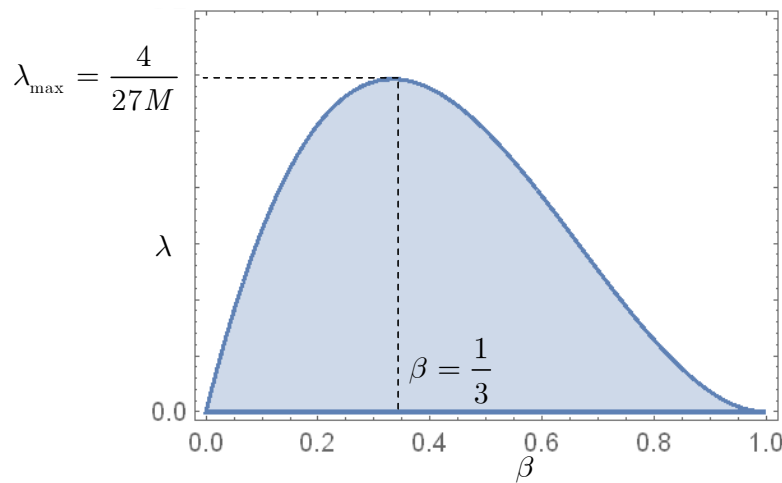


Рисунок 2.6 – Множина розв’язків системи  $\lambda M \leq \beta(1 - \beta)^2$ ,  $0 < \beta < 1$

Як бачимо з рис. 2.6, розглядувана система нерівностей має розв’язки лише при  $\lambda \leq \lambda_{\max} = \frac{4}{27M}$ . При цьому значенню  $\lambda = \frac{4}{27M}$  відповідає єдине значення  $\beta = \frac{1}{3}$ , а при  $\lambda < \frac{4}{27M}$  множина розв’язків для  $\beta$  утворює інтервал  $(\underline{\beta}, \bar{\beta})$ , де  $\underline{\beta}$  і  $\bar{\beta}$  – відповідно найменший та найбільший з коренів рівняння  $\beta(1 - \beta)^2 = \lambda M$  на інтервалі  $(0; 1)$ , причому  $\underline{\beta} < \frac{1}{3}$ . Оскільки для більш швидкої збіжності ітерацій треба брати якомога менше значення  $\beta$ , то слід обрати  $\beta = \underline{\beta}$ .

Відповідно до (2.94) – (2.96) сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.150)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.151)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \underline{\beta}. \quad (2.152)$$

Оскільки для  $0 < v, w < \beta$  має місце оцінка

$$|f(\mathbf{x}, v) - f(\mathbf{x}, w)| = \left| \frac{\lambda}{(1 - v)^2} - \frac{\lambda}{(1 - w)^2} \right| \leq \frac{2\lambda}{(1 - \underline{\beta})^3} |v - w|,$$

то функція  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1 - u)^2}$  задовольняє на  $\langle 0, \underline{\beta} \rangle$  нерівність (2.92) з

$L = \frac{2\lambda}{(1 - \underline{\beta})^3}$ . При  $\lambda < \frac{4}{27M}$  маємо, що  $\underline{\beta} < \frac{1}{3}$ , а отже, нерівність  $LM < 1$  з те-

ореми 2.7 завжди виконуватиметься. Тоді на підставі цієї теореми можна зроби-

ти висновок, що для  $\lambda < \frac{4}{27M}$  ітераційний процес (2.150) – (2.152) двобічно

збігається до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку задачі (2.146) – (2.148), при цьому (див. (2.110)) для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\beta}{2\varepsilon}}{\ln \frac{(1 - \underline{\beta})^3}{2\lambda M}} \right\rceil + 1 \text{ ітерацію.}$$

Нехай  $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – круг одиничного радіусу. Тоді функція Гріна має вигляд (2.144) і для неї  $M = \frac{1}{4}$ . Отже, ітераційний процес (2.150) – (2.152) збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (2.146) – (2.148) при

$\lambda < \lambda_{\max} = \frac{16}{27} = 0,59(259)$ . Цей результат співпадає з умовою існування єдиного розв'язку задачі (2.146) – (2.148), отриманою у [201].

Розрахунки було проведено для  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Знайдено, що  $\underline{\beta} = 0,19098$ . Відповідно до (2.110) необхідно зробити 10 ітерацій для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Фактично ця точність була досягнута на 6-й ітерації. Таблиця 2.8 містить значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації.

Таблиця 2.8 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (2.150) – (2.152)

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_k$	$0,95 \cdot 10^{-1}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$	$0,94 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$

Аналізуючи дані табл. 2.8, ми бачимо, що для задачі (2.146) – (2.148) у наближеному розв’язку один вірний знак після коми встановлюється за кожні дві ітерації. Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ , за даними тієї ж таблиці, маємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,260$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

Наближений розв’язок  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  має радіальну симетрію, тому у табл. 2.9 наведено значення наближеного розв’язку  $u^{(4)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148), отриманого за формулою (2.107), в точках області  $\bar{\Omega}$  з полярними координатами  $(\rho_i, 0) = (0, 1i, 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . При цьому  $\|u^{(6)}\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,1620$ .

Таблиця 2.9 – Значення наближеного розв’язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148) на промені  $\varphi = 0$  з кроком 0,1

$\rho_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(4)}(\rho_i, 0)$	0,16200	0,16022	0,15491	0,14613	0,13399	0,11863
$\rho_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$u^{(4)}(\rho_i, 0)$	0,10021	0,07894	0,05501	0,02862	0	

На рис. 2.7 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень (штрихована лінія),  $k = 0, 1, \dots, 6$ , у перерізі  $x_2 = 0$ , а на рис. 2.8 наведено поверхню наближеного розв’язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

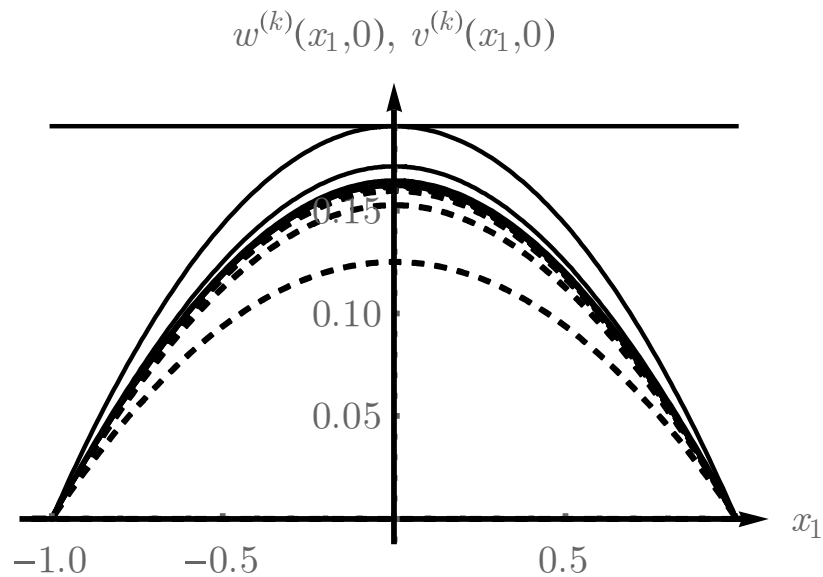


Рисунок 2.7 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (2.146) – (2.148) у перерізі  $x_2 = 0$

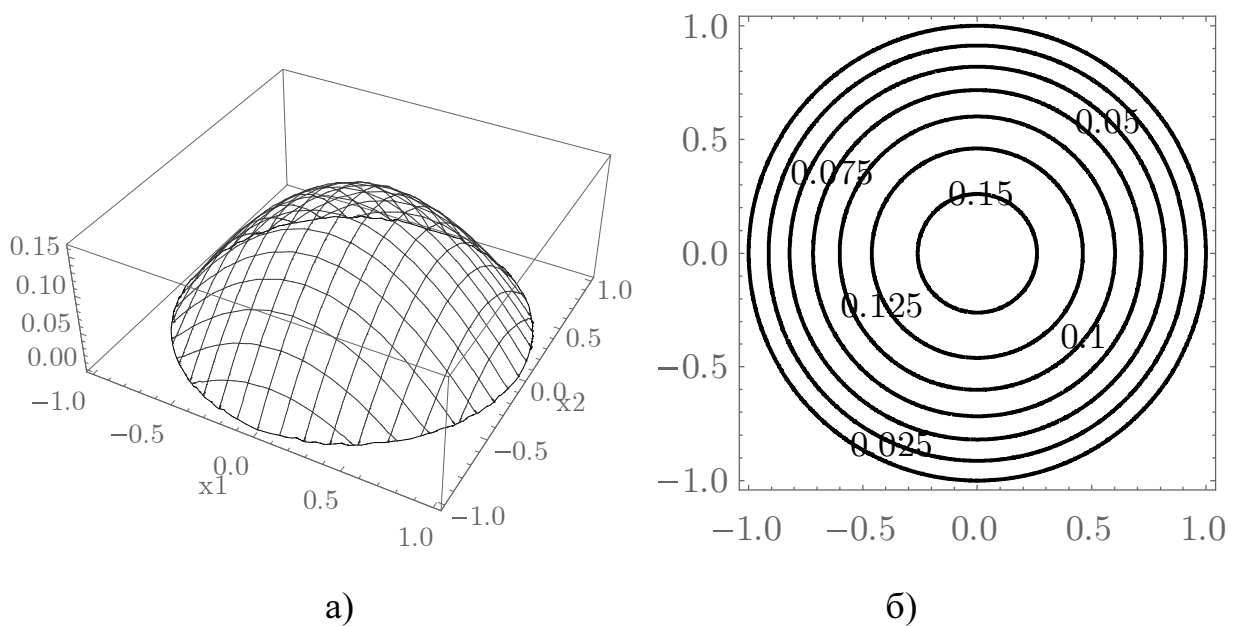


Рисунок 2.8 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б)

Рис. 2.7 ілюструє двобічну (відповідно до ланцюга нерівностей (2.83)) збіжність побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ : на кожній  $k$ -й ітерації точний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148) знаходиться вище наближення  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  і нижче наближення  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ .

Нехай тепер  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \sqrt{\pi}, 0 < x_2 < \sqrt{\pi}\}$  – квадрат зі стороною  $\sqrt{\pi}$ . Тоді функція Гріна (див. табл. В.1) має вигляд

$$G(x_1, x_2, s_2, s_2) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\pi} n x_1 \sin \sqrt{\pi} m x_2 \sin \sqrt{\pi} n s_1 \sin \sqrt{\pi} m s_2}{n^2 + m^2}. \quad (2.153)$$

Для функції Гріна (2.153) знаходимо, що  $M = 0,23144\dots$ . Тоді при  $\lambda < \lambda_{\max} = 0,6101\dots$  існує єдиний додатний розв'язок задачі (2.146) – (2.148), до якого двобічно збігається ітераційний процес (2.150) – (2.152).

Розрахунки було проведено для  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Отримано, що  $\underline{\beta} = 0,16662$ . Відповідно до (2.110) знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  необхідно зробити 8 ітерацій. Фактично точність  $\varepsilon = 10^{-4}$  була досягнута за 5 ітерацій. У табл. 2.10 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації.

Таблиця 2.10 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (2.150) – (2.152)

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon_k$	$0,83 \cdot 10^{-1}$	$0,25 \cdot 10^{-1}$	$0,63 \cdot 10^{-2}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,34 \cdot 10^{-3}$	$0,76 \cdot 10^{-4}$

Аналіз даних табл. 2.10 показує, що для задачі (2.146) – (2.148) у наближеному розв'язку один вірний знак після коми встановлюється за дві ітерації. Розглядаючи далі відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4$ , маємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,228$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

На рис. 2.9 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень,  $k = 0, 1, \dots, 5$ , у перерізі  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , а на рис. 2.10 наведено поверхню наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

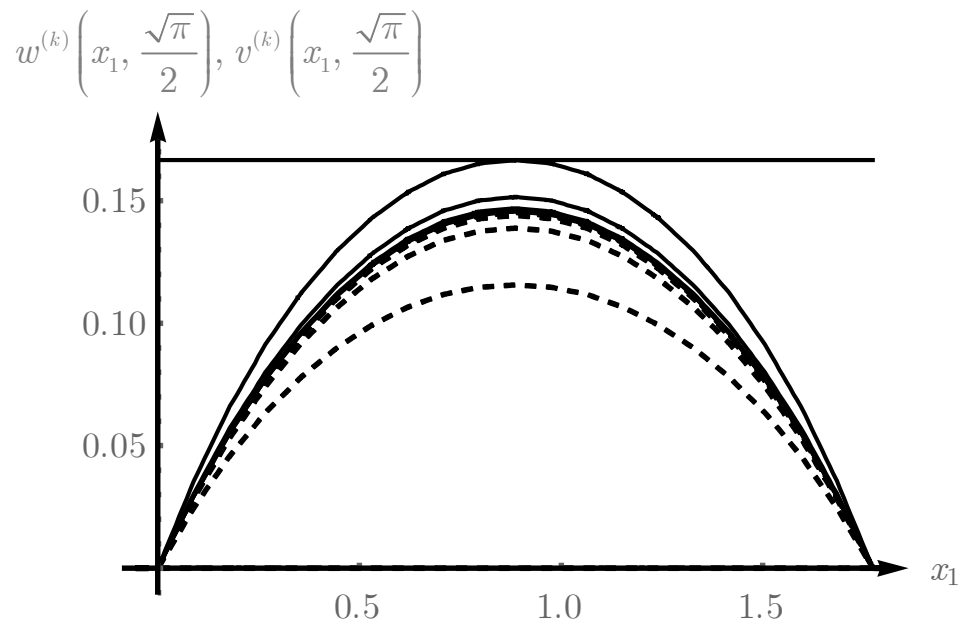


Рисунок 2.9 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (2.146) – (2.148) у перерізі  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

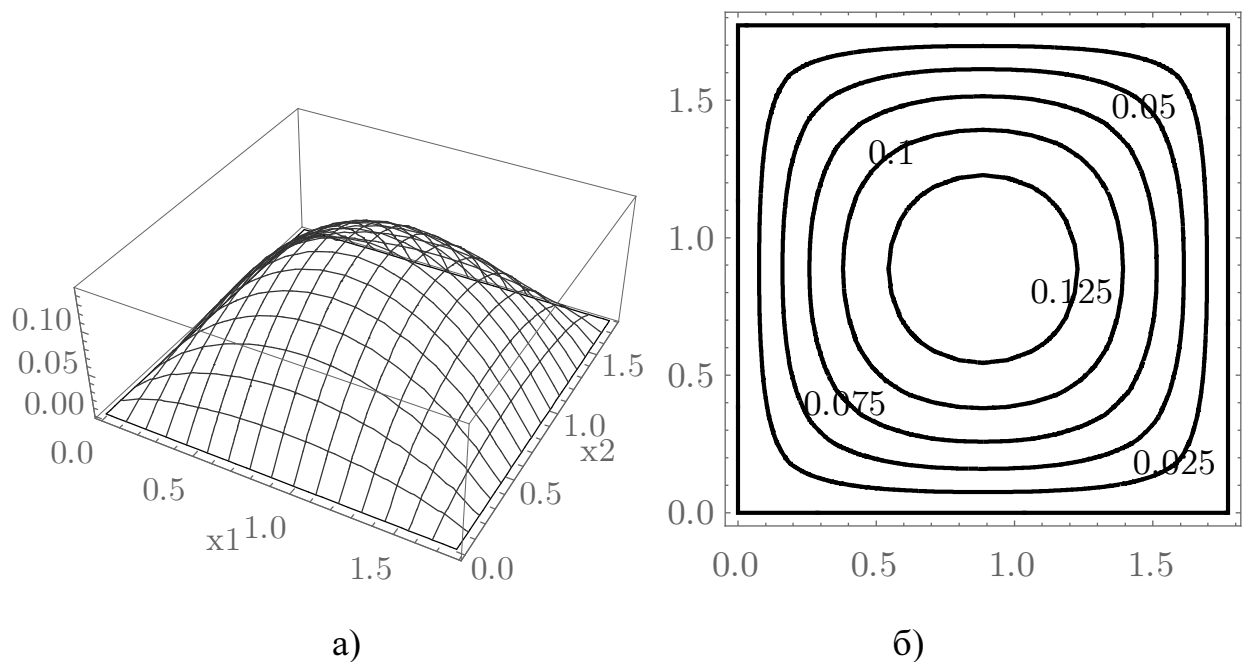


Рисунок 2.10 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б)

Рис. 2.9 ілюструє двобічний характер (у відповідності до (2.83)) збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ .



У табл. 2.11 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148) в точках  $(0, 2\sqrt{\pi}i; 0, 2\sqrt{\pi}j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ . При цьому

$$\|u^{(5)}\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(5)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 0,1456.$$

Таблиця 2.11 – Значення наближеного розв'язку  $u^{(5)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148) в точках  $(0, 2\sqrt{\pi}i; 0, 2\sqrt{\pi}j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$

$x_1 \backslash x_2$	0	$0, 2\sqrt{\pi}$	$0, 4\sqrt{\pi}$	$0, 6\sqrt{\pi}$	$0, 8\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$
0	0	0	0	0	0	0
$0, 2\sqrt{\pi}$	0	0,06477	0,09227	0,09227	0,06477	0
$0, 4\sqrt{\pi}$	0	0,09227	0,13530	0,13530	0,09227	0
$0, 6\sqrt{\pi}$	0	0,09227	0,13530	0,13530	0,09227	0
$0, 8\sqrt{\pi}$	0	0,06477	0,09227	0,09227	0,06477	0
$\sqrt{\pi}$	0	0	0	0	0	0

Для обчислювального експерименту в задачі (2.146) – (2.148) було обрано дві області (одиничний круг та квадрат зі стороною  $\sqrt{\pi}$ ), які були розглянуті у [201]. Результати, отримані запропонованим методом двобічних наближень, добре узгоджуються з результатами з [201].

## Висновки за розділом 2

1. Розглянуті першу крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння за допомогою функції Гріна зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна, що дозволило для кожної з цих крайових задач на основі побудованого еквівалентного інтегрального рівняння ввести поняття узагальненого розв'язку.

2. Розгляд отриманого інтегрального рівняння як операторного рівняння вигляду  $u = T(u)$  у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій, дозволив дослідити оператор  $T$  методами нелінійно-

го функціонального аналізу і встановити, зокрема, такі його властивості, як додатність,  $u_0$ -додатність, гетеротонність (як частинні випадки – ізотонність та антитонність), псевдоувігнутість та  $u_0$ -псевдоувігнутість.

3. Вперше з крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь та напівлінійних еліптичних рівнянь виділено клас, задачі з якого за допомогою функції Гріна можуть бути подані у вигляді нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором, що дозволило побудувати двобічні ітераційні методи знаходження їх додатних розв'язків.

4. Подальший розвиток отримали методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна у частині їх застосування до розв'язання перших крайових задач для напівлінійного звичайного диференціального рівняння вигляду  $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u)$ ,  $x \in (a, b)$ , та напівлінійного еліптичного рівняння вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Серед переваг запропонованих методів слід зазначити простоту обчислювальної схеми та зручну апостеріорну оцінку похибки.

5. Розглянуто застосування розроблених методів двобічних наближень до розв'язання задач Діріхле для напівлінійних рівнянь з операторами Лапласа та Гельмгольца, а також надано рекомендації щодо отримання апіорних оцінок розв'язків задач, для яких функція Гріна невідома.

6. Удосконалено методи побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , кінці якого обираються початковими наближеннями при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Надано рекомендації щодо побудови  $\langle v^0, w^0 \rangle$  для випадків різної поведінки правої частини диференціальних рівнянь при  $u = 0$ , зокрема, у багатовимірному випадку запропоновано шукати функції  $v^0$ ,  $w^0$  у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  ( $0 < \alpha < \beta$ ), де функція  $\omega(\mathbf{x})$  будується з використанням конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій і описує геометрію області, у якій розглядається крайова задача.

7. Проведені обчислювальні експерименти для тестових задач для напівлінійного звичайного диференціального рівняння зі степеневою нелінійністю та напівлінійного еліптичного рівняння з експоненціальною нелінійністю продемонстрували роботу та підтвердили ефективність запропонованих методів. При цьому для задачі Діріхле для рівняння  $-\Delta u = e^{-u}$ , що розглядається у одиничному крузі, при точності методу двобічних наближень  $\varepsilon = 10^{-4}$  фактична похибка (у нормі простору неперервних функцій) при порівнянні з відомим точним розв'язком склала  $0,48 \cdot 10^{-5}$ , а для тієї ж задачі, що розглядається у прямокутнику, що визначається нерівностями  $0 < x_1 < 0,5$ ,  $0 < x_2 < 0,25$ , при точності методу двобічних наближень  $\varepsilon = 10^{-6}$  відносна похибка при порівнянні з відомим значенням наближеного розв'язку у точці  $(0,25; 0,125)$  склала  $0,1\%$ .

Основні результати другого розділу опубліковані у роботах [10, 43, 48, 49, 51 – 53, 60, 63, 64, 144 – 146, 151, 157, 254].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [2, 6, 7, 10, 21, 43, 48, 49, 51 – 53, 60, 63, 64, 71, 73, 101, 110, 126, 128, 129, 131, 141, 144 – 146, 151, 157, 163, 167, 201, 212, 254].

### 3 ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА

3.1 Заміна задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння еквівалентним інтегральним рівнянням методом квазіфункцій Гріна-Рвачова

Щоб подолати обмеженість використання методу двобічних наближень, заснованого на заміні крайової задачі (2.62) – (2.64) інтегральним рівнянням за допомогою функції Гріна, отримаємо інше інтегральне рівняння, еквівалентне розглядуваній крайовій задачі, ядро якого може бути побудовано в явному вигляді для більш широкого класу областей  $\Omega$ , ніж функція Гріна. Цей підхід базуватиметься на ідеях робіт [131, 132] і узагальнить їх.

Продовжимо розглядати крайову задачу (2.62) – (2.64):

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.3)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Вважатимемо також, що

$$p(\mathbf{x}) > 0 \text{ у } \bar{\Omega}, q(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ у } \bar{\Omega}, \quad (3.4)$$

$p(\mathbf{x})$  неперервно диференційовна у  $\bar{\Omega}$ ,  $q(\mathbf{x})$  неперервна у  $\bar{\Omega}$ ,

$$f(\mathbf{x}, u) \text{ неперервна і додатна при } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, u > 0. \quad (3.5)$$

Позначимо диференціальний оператор у лівій частині рівняння (3.1) через  $A$ :

$$Au \equiv -\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u. \quad (3.6)$$

Областю визначення цього оператора вважатимемо множину функцій  $D_A$ , яка складається з функцій  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  таких, що  $u|_{\partial\Omega} = 0$  і  $Au \in L_2(\Omega)$ .

Параметріком [110, 111] рівняння (3.1) у випадку простору  $\mathbb{R}^2$  буде функція

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi p(\mathbf{s})} \ln \frac{\sqrt{p(\mathbf{s})}}{r}, \quad (3.7)$$

де  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2},$$

а у випадку простора  $\mathbb{R}^3$  – функція

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi p(\mathbf{s})} \cdot \frac{1}{r}, \quad (3.8)$$

де  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}.$$

При фіксованому  $\mathbf{s} \in \Omega$  кожна з функцій  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  вигляду (3.7) і (3.8) задовольняє по змінній  $\mathbf{x}$  рівняння

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{s})\nabla u) = 0.$$

Фундаментальним (сингулярним) розв'язком рівняння

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.9)$$

називається функція  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , яка має наступні властивості [110, 111]:

а) функція  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  може бути подана у вигляді

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

де при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}$  у випадку  $\mathbb{R}^2$

$$\psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O\left(\left(\ln \frac{C}{r}\right)^\nu\right), \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O(r^{\nu-1}), k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O(r^{\nu-2}), j, k = 1, 2, \nu = \text{const} > 0;$$

а у випадку  $\mathbb{R}^3$

$$\psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O(r^{\nu-1}), \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O(r^{\nu-2}), k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = O(r^{\nu-3}), j, k = 1, 2, 3, \nu = \text{const} > 0;$$

б) при фіксованому  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s} \neq \mathbf{x}$ , функція  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  задовольняє рівнянню (3.9).

Існування фундаментального розв'язку доведено у роботах [81, 110, 165], крім того, доведено, що існують симетричні відносно  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{s}$  фундаментальні розв'язки. Далі вважатимемо, що фундаментальний розв'язок  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  є симетричним:  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ .

*Означення 3.1.* Нехай  $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – фундаментальний розв'язок рівняння (3.9). Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора  $A$  вигляду (3.6) назвемо функцію

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \quad (3.10)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  у випадку  $\mathbb{R}^2$  і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  у випадку  $\mathbb{R}^3$ ;

$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \tilde{g}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція така, що  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Безпосередньо з означення 3.1 випливає симетричність квазіфункції Гріна-Рвачова:  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = Q(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  та те, що  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$  на  $\partial\Omega$ . Інші властивості квазіфу-

нкції Гріна-Рвачова будуть уточнені при дослідженні конкретних операторів  $A$ .

Для функції  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  такої, що  $Au \in L_2(\Omega)$ , має місце інтегральне подання [110, 111]

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s}) \left[ g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} \right] d_s \sigma + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) A_s u(\mathbf{s}) ds, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.11)$$

а для функцій  $u, \tilde{g} \in C^2(\bar{\Omega})$  має місце друга формула Гріна

$$\int_{\Omega} [\tilde{g}(\mathbf{s}) A_s u(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s}) A_s \tilde{g}(\mathbf{s})] ds = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s}) \left[ u(\mathbf{s}) \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} - \tilde{g}(\mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} \right] d_s \sigma. \quad (3.12)$$

У формулах (3.11), (3.12)  $\mathbf{n}_s$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль у змінних  $\mathbf{s}$ ,  $d_s \sigma$  означає, що інтегрування за  $\mathbf{s}$  ведеться вздовж  $\partial\Omega$ ,  $A_s u \equiv -\operatorname{div}(p(\mathbf{s})\nabla u) + q(\mathbf{s})u$ .

Нехай  $u$  – класичний розв'язок задачі (3.1) – (3.3), тобто функція з  $D_A$ , що задовольняє рівняння (3.1), а функцію  $\tilde{g}$  у (3.12) оберемо таку, як в означенні 3.1. Додаючи рівності (3.11) і (3.12), отримаємо

$$\begin{aligned} & u(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} [\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) A_s u(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s}) A_s \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds = \\ &= \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s}) \left[ g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} \right] d_s \sigma + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) A_s u(\mathbf{s}) ds + \\ & \quad + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s}) \left[ u(\mathbf{s}) \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} - \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}_s} \right] d_s \sigma, \end{aligned}$$

або

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} A_s \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot u(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} [g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})] A_s u(\mathbf{s}) ds +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} p(s) \left[ [g(\mathbf{x}, s) - \tilde{g}(\mathbf{x}, s)] \frac{\partial u(s)}{\partial \mathbf{n}_s} - u(s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_s} [g(\mathbf{x}, s) - \tilde{g}(\mathbf{x}, s)] \right] d_s \sigma. \quad (3.13)$$

З урахуванням означення 3.1 рівняння (3.13) можна переписати у вигляді

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} A_s \tilde{g}(\mathbf{x}, s) \cdot u(s) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, s) \cdot A_s u(s) ds + \\ + \int_{\partial\Omega} p(s) \left[ Q(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u(s)}{\partial \mathbf{n}_s} - u(s) \frac{\partial Q(\mathbf{x}, s)}{\partial \mathbf{n}_s} \right] d_s \sigma.$$

Тоді з огляду на те, що  $Q(\mathbf{x}, s) = 0$  і  $u(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ , а також з урахуванням рівняння (3.1), остаточно отримаємо інтегральне рівняння для функції  $u$  у вигляді

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, s) u(s) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, s) f(s, u(s)) ds, \quad (3.14)$$

де позначено  $K(\mathbf{x}, s) = A_s \tilde{g}(\mathbf{x}, s)$ .

Нелінійне інтегральне рівняння (3.14) можна також подати у вигляді рівняння Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, s, u(s)) ds, \quad (3.15)$$

де  $P(\mathbf{x}, s, u(s)) = K(\mathbf{x}, s) u(s) + Q(\mathbf{x}, s) f(s, u(s))$ .

Отже, якщо задача (3.1) – (3.3) має класичний розв'язок, то він задовольняє також рівняння (3.14) (чи (3.15)). Якщо ж класичного розв'язку задачі не існує, то рівняння (3.14) можна використати для введення поняття узагальненого розв'язку задачі (3.1) – (3.3).

Рівняння (3.14) розглядатимемо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  функцій, неперервних у  $\bar{\Omega}$ . Норма у  $C(\bar{\Omega})$  вводиться за правилом  $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . У просторі  $C(\bar{\Omega})$  виділимо конус  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  невід'ємних



функцій. Конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим). За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

*Означення 3.2.* Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (3.1) – (3.3) називатимемо функцію  $u^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (3.14).

Конкретизуємо означення квазіфункції Гріна-Рвачова та її властивості для двох найпоширеніших у математичному моделюванні диференціальних операторів – оператора Лапласа  $Au = -\Delta u$  та оператора Гельмгольца  $Au = -\Delta u + \kappa^2 u$ .

Для оператора Лапласа  $-\Delta u$  фундаментальні розв'язки мають такий вигляд:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \text{ у просторі } \mathbb{R}^2,$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \text{ у просторі } \mathbb{R}^3$$

і залежать лише від відстані  $r$  між точками  $\mathbf{x}$  та  $\mathbf{s}$ . Тому надалі позначатимемо їх  $g_2(r)$  та  $g_3(r)$  відповідно, де нижній індекс означатиме вимірність розглядуваного простору. Тоді можна рекомендувати обрати функцію  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у вигляді

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_m \left( \sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})} \right), \quad m = 2, 3, \quad (3.16)$$

де двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  симетрична:  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ , додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Отже, для квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа можна дати такі означення.

*Означення 3.3.* Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа у  $\mathbb{R}^2$  назвемо функцію

$$\begin{aligned} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{r^2}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2};$$

$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція, додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

*Означення 3.4.* Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа у  $\mathbb{R}^3$  назвемо функцію

$$\begin{aligned} Q_3(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})} - r}{r\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2};$$

$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція, додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Для оператора Гельмгольца  $-\Delta u + \kappa^2 u$  фундаментальні розв'язки мають такий вигляд:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa r) \text{ у просторі } \mathbb{R}^2,$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\kappa r} \text{ у просторі } \mathbb{R}^3,$$

де  $K_0(z)$  – модифікована функція Бесселя другого роду.

Як бачимо, ці фундаментальні розв’язки теж залежать лише від відстані  $r$  між точками  $\mathbf{x}$  та  $\mathbf{s}$ . Тому надалі позначатимемо їх  $g_2^{(\kappa)}(r)$  та  $g_3^{(\kappa)}(r)$  відповідно, де нижній індекс означатиме вимірність розглядуваного простору, а верхній – параметр у операторі Гельмгольца. Функцію  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  можна рекомендувати обрати у вигляді

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_m^{(\kappa)}\left(\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}\right), \quad m = 2, 3, \quad (3.19)$$

де двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  симетрична:  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ , додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Тоді для квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Гельмгольца можна дати такі означення.

*Означення 3.5.* Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Гельмгольца у  $\mathbb{R}^2$  назвемо функцію

$$\begin{aligned} Q_2^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa r) - \frac{1}{2\pi} K_0\left(\kappa\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( K_0(\kappa r) - K_0\left(\kappa\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2};$$

$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція, додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

*Означення 3.6.* Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Гельмгольца у  $\mathbb{R}^3$  назвемо функцію

$$Q_3^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\kappa r} - \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}} e^{-\kappa\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})} e^{-\kappa r} - r e^{-\kappa \sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}}}{r \sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}}, \quad (3.21)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2};$$

$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція, додатна, якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ , та дорівнює нулю, якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

*Лема 3.1.* Кожна з квазіфункцій Гріна-Рвачова (3.17), (3.18), (3.20), (3.21) має такі властивості:

- а)  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- б) є симетричною функцією:  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = Q(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ;
- в) має таку ж особливість при  $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ , що і звичайна функція Гріна;
- г) додатна в області  $\Omega$ :  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ .

*Доведення.* Властивості а) – в) очевидно випливають із властивостей функції  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , а властивість г) випливає з додатності функції  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у  $\Omega$  та подань (3.17), (3.18), (3.20), (3.21).

Як бачимо, завдяки асимптотикам фундаментальних розв'язків при  $r \rightarrow +\infty$  можливий такий вибір функції  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , що відповідна квазіфункція Гріна-Рвачова буде мати властивість г) з леми 3.1. Надалі вважатимемо, що здійснено саме такий вибір  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ .

Для побудови функції  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  можна застосувати підхід, заснований на використанні теорії  $R$ -функцій. Нехай межа області  $\partial\Omega$  складається зі скінченної кількості кусків ліній  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , де кожна  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – елементарна функція. Тоді за допомогою методу  $R$ -функцій [131] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(\mathbf{x})$  таку, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Також функція  $\omega(\mathbf{x})$  може мати певні властивості диференційовності, завдяки використанню різних достатньо повних систем  $R$ -функцій [131]. Завдяки цьому можна зробити ядро  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , зокрема, неперервним [131, 132].

Тоді за функцію  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  можна узяти, наприклад, функції вигляду ( $\alpha > 2$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ )

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \beta \omega^\alpha(\mathbf{x})\omega^\alpha(\mathbf{s}), \\ \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= \beta \ln(1 + \gamma\omega^\alpha(\mathbf{x})\omega^\alpha(\mathbf{s})), \\ \chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= 1 - \beta e^{\pm\gamma\omega^\alpha(\mathbf{x})\omega^\alpha(\mathbf{s})},\end{aligned}$$

чи функцію

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s}), \quad (3.22)$$

яка приводить до квазіфункції першої крайової задачі для оператора Лапласа, запропонованої в роботах [131, 132].

Далі функцію  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  обиратимемо у вигляді (3.22). Це призводить до наступних квазіфункцій Гріна-Рвачова:

а) для оператора Лапласа  $-\Delta u$

$$Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}} \text{ у просторі } \mathbb{R}^2; \quad (3.23)$$

$$Q_3(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})} - r}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}} \text{ у просторі } \mathbb{R}^3; \quad (3.24)$$

б) для оператора Гельмгольца  $-\Delta u + \kappa^2 u$

$$Q_2^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left( K_0(\kappa r) - K_0\left(\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right) \right) \text{ у просторі } \mathbb{R}^2, \quad (3.25)$$

$$Q_3^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}e^{-\kappa r} - re^{-\kappa\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}} \text{ у просторі } \mathbb{R}^3. \quad (3.26)$$

3.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Для інтегрального рівняння (3.14) (чи (3.15)) побудуємо процес двобічних наближень знаходження його розв'язку (а отже, і розв'язку крайової задачі (3.1) – (3.3)). Введемо до розгляду нелінійний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s} = \\ &= \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Оператор  $T$  є сумою лінійного інтегрального оператора  $T_1$  з ядром  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  і нелінійного оператора Гаммерштейна  $T_2$  з ядром  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ . Через умову (3.5) і додатність квазіфункції Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , якщо  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ), можна стверджувати, що оператор  $T_2$  залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ , тобто  $T_2$  – додатний оператор. Проте ми не можемо бути впевненими щодо знаку функції  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ), а отже, не можемо стверджувати, що додатним є і оператор  $T$ .

Позначимо

$$K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Тоді  $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ ,  $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ), причому

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) &= K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \\ |K(\mathbf{x}, \mathbf{s})| &= K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \end{aligned}$$

і оператор  $T$  вигляду (3.27) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
T(u)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Припустимо, що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , причому неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$  невід'ємна функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (3.28) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned}
\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Зрозуміло, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Зауважимо, що для випадку, коли функція  $f(\mathbf{x}, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , можна обрати  $\hat{f}(x, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$  і тоді супровідний оператор матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}))d\mathbf{s},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

а для  $f(\mathbf{x}, u)$  монотонно спадної за  $u$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  можна покласти  $\hat{f}(x, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$  і тоді супровідним оператором буде оператор

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (3.31)$$

Виділимо у конусі  $\mathcal{K}_+$  сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  умовами (1.34), які для оператора  $\hat{T}$ , що визначається рівністю (3.29), набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Далі за схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} w^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \quad (3.36)$$

Оскільки конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$ , для якого оператор  $\hat{T}$  є супровідним, то послідовність  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора



$\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Можливими є два випадки:  $v^* < w^*$  і  $v^* = w^*$ . У другому випадку  $u^* := v^* = w^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв’язок крайової задачі (3.1) – (3.3).

Функції  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  є розв’язком системи рівнянь (1.35), яка у розглядуваному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})ds + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))ds, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})ds + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s}))ds. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Умовою виконання рівності  $v^* = w^*$  є те, що система (3.37), (3.38) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  таких розв’язків, що  $v \neq w$ .

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 3.1.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29) і система рівнянь (3.37), (3.38) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв’язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (3.34) – (3.36) збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв’язку  $u^*$  крайової задачі (3.1) – (3.3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq$$

$$\leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \quad (3.39)$$

Зауважимо, що з ланцюга нерівностей (3.39) випливає, що кожен з конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29).

Уточнимо умови існування єдиного додатного розв'язку крайової задачі (3.1) – (3.3) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (3.34) – (3.36) за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (3.37), (3.38) не має на деякому з сильно інваріантних конусних відрізків  $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

*Теорема 3.2.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29) і має місце умова: для будь-яких чисел  $v$ ,  $w$ ,  $u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + \frac{u}{M + M_1}, \quad (3.40)$$

де

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \quad (3.41)$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds. \quad (3.42)$$

Тоді ітераційний процес (3.34) – (3.36) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (3.1) – (3.3).

*Доведення.* Нехай  $u$  і  $w - v$  – такі функції з  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ , що

$$v, w, v + u, w - u \in \langle v^{(1)}, w^{(1)} \rangle. \quad (3.43)$$

З умов (3.43) випливає, що  $u(\mathbf{x}) \geq 0$  у  $\bar{\Omega}$  і  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Отже, якщо функція  $u(\mathbf{x})$  набуває максимального значення у точці  $\mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Тоді

$$\begin{aligned}
& \hat{T}(v + u, w - u)(\mathbf{x}_0) = \\
& = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[v(\mathbf{s}) + u(\mathbf{s})]d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[w(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s})]d\mathbf{s} + \\
& \quad + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{x}, v(\mathbf{s}) + u(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s}))d\mathbf{s} < \\
& < \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})]u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\
& \quad + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\left[\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) + \frac{u(\mathbf{s})}{M + M_1}\right]d\mathbf{s} \leq \\
& \leq \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + \\
& \quad + \frac{1}{M + M_1} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) \left[ \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})]d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})d\mathbf{s} \right] \leq \\
& \leq \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + u(\mathbf{x}_0) = \\
& = \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}_0) + u(\mathbf{x}_0),
\end{aligned}$$

тобто має місце умова (1.38), а отже, система рівнянь (3.37), (3.38) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ , і справджуватиметься теорема 3.1. Теорема доведена.

Іншою умовою, яка забезпечить рівність  $v^* = w^*$ , є умова (1.39). Нехай існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)| \leq L|w - v|. \quad (3.44)$$

Розглянемо різницю  $w^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v^{(k+1)}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
w^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})(\mathbf{x}) - \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})(\mathbf{x}) = \\
&= \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w^{(k)}(\mathbf{s}) - v^{(k)}(\mathbf{s})]d\mathbf{s} + \\
&+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[\hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) - \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))]d\mathbf{s}.
\end{aligned}$$

Тоді з урахуванням нерівності (3.44) і позначень (3.41), (3.42) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v^{(k+1)}(\mathbf{x})] = \\
&= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w^{(k)}(\mathbf{s}) - v^{(k)}(\mathbf{s})]d\mathbf{s} + \\
&+ \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[\hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) - \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))]d\mathbf{s} \leq \\
&\leq M_1 \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] + LM \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] = (M_1 + LM) \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.
\end{aligned}$$

Звідси матимемо, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (M_1 + LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Отже, рівність  $v^* = w^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = M_1 + LM < 1$ , і тоді справджується наступна теорема.

*Теорема 3.3.* Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29) і має місце умова (3.44), причому  $\gamma = M_1 + LM < 1$ , де сталі  $M$  і  $M_1$  визначаються рівностями (3.41) і (3.42) відповідно. Тоді ітераційний процес (3.34) – (3.36) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (3.1) – (3.3).

Проте не всі умови збіжності двобічного ітераційного процесу з п. 2.2 можна перенести на випадок рівняння (3.14). Так, гетеротонний оператор  $T$  ви-

гляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29) не буде навіть псевдоувігнутим, бо нерівність (1.33), що визначає псевдоувігнутість, для нього приймає вигляд

$$\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) \int_{\Omega} K^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] d\mathbf{s} > 0$$

і не буде виконуватися для значень  $\tau$  близьких до нуля навіть, якщо

$$\hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) > 0.$$

Розглянемо тепер частинні випадки, коли функція  $f(\mathbf{x}, u)$  за  $u$  тільки монотонно зростає чи тільки монотонно спадає.

Для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ , що монотонно зростає за  $u$ , якщо обрано  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$ , то супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю (3.30), а умови (3.32), (3.33), які виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , набувають вигляду

$$\int_{\Omega} K^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.45)$$

$$\int_{\Omega} K^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (3.46)$$

Система рівнянь (3.37), (3.38) для ізотонної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  має вигляд

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}))d\mathbf{s},$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}.$$

Умова (3.40) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $v, u$  і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$f(\mathbf{x}, v + u) < f(\mathbf{x}, v) + \frac{u}{M + M_1}, \quad (3.47)$$

$$\text{де } M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s};$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})]d\mathbf{s}.$$

Умова (3.44) стане звичайною умовою Ліпшиця для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|f(\mathbf{x}, v) - f(\mathbf{x}, w)| \leq L|v - w|. \quad (3.48)$$

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (3.45), (3.46), і виконується хоча одна з умов (3.47) чи (3.48), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.49)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.50)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \quad (3.51)$$

двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (3.1) – (3.3).

Для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$ , якщо обрано  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ , супровідний оператор  $\hat{T}$  задається рівністю (3.31), а умови (3.32), (3.33), що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Система рівнянь (3.37), (3.38) для антитонної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  має вигляд

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \\ w(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Для розглядуваного антитонного випадку умова (3.40) набуває вигляду: для будь-яких додатних чисел  $w, u$  таких, що  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$f(\mathbf{x}, w - u) < f(\mathbf{x}, w) + \frac{u}{M + M_1}, \quad (3.54)$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s}$ ;

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds.$$

Умова (3.44), як і у попередньому монотонному випадку, перетвориться на умову Ліпшиця для функції  $f(\mathbf{x}, u)$ : існує таке число  $L > 0$ , що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| \leq L|v - w|. \quad (3.55)$$

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , що виділяється умовами (3.52), (3.53), і виконується хоча одна з умов (3.54) чи (3.55), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}))ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}))ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \quad (3.58)$$

двобічно збігаються до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (3.1) – (3.3).

Якщо виконано  $k$  ітерацій, то за наближений розв'язок крайової задачі (3.1) – (3.3) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (3.59)$$

Тоді для похибки для наближеного розв'язку (3.59) ми матимемо зручну



апостеріорну оцінку:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})). \quad (3.60)$$

Наявність оцінки вигляду (3.60) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ .

Крім того, за умов теореми 3.3 можна вказати і апіорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})). \quad (3.61)$$

Тоді з нерівності

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{M_1 + LM}} \right\rceil + 1 \quad (3.62)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

3.3 Способи побудови сильно інваріантного конусного відрізка при реалізації метода двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , який виділяється умовами (3.32), (3.33), є апіорною оцінкою невідомого точного розв'язку  $u^*$ . Розглянемо умови існування та способи його побудови.

Можливі три випадки поведінки функції  $f(\mathbf{x}, u)$ , якщо  $u = 0$ :  $f(\mathbf{x}, 0) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f(\mathbf{x}, 0) = 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  і  $f(\mathbf{x}, u)$  невизначена при  $u = 0$ .

Якщо  $f(\mathbf{x}, 0) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то ж цю властивість повинна мати також функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ , тобто  $\hat{f}(\mathbf{x}, 0, w) > 0$  при  $w > 0$  і  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, 0) > 0$  при  $v > 0$ . Тоді кінці сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v^0 = 0$ ,  $w^0 = \beta > 0$  і нерівності (3.32), (3.33) набувають вигляду

$$-\beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, 0, \beta) ds \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.63)$$

$$\beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \beta, 0) ds \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (3.64)$$

Нерівність (3.64) можна замінити нерівністю

$$\beta M_1^+ + M \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, \beta, 0) \leq \beta,$$

де  $M_1^+ = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ ;

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

і звести до вигляду

$$\frac{M}{1 - M_1^+} \leq \frac{\beta}{\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, \beta, 0)}, \quad (3.65)$$

якщо  $M_1^+ < 1$ .

Тоді сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$  для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29) буде знайдений, якщо нерівність (3.65) має розв'язок  $\beta > 0$ , при якому справджується нерівність (3.63).

Величина  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \beta$  має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, тому при практичній реалізації обчислювального процесу (3.34) – (3.36) слід взяти найменше  $\beta$ , що задовольняє нерівності (3.65) і (3.63).

Конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$  є не дуже вдалою апіорною оцінкою для розв'язку  $u^*(\mathbf{x})$  задачі (3.1) – (3.3), оскільки його кінці є сталими. Кращу апостеріорну оцінку дають функції  $v^{(1)}(\mathbf{x})$  та  $w^{(1)}(\mathbf{x})$ : для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, 0, \beta) ds \leq \\ &\leq u^*(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, \beta, 0) ds = w^{(1)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

У випадку, коли  $f(\mathbf{x}, 0) = 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то  $\hat{f}(\mathbf{x}, 0, 0) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , і  $\hat{f}(\mathbf{x}, 0, w) = 0$  при  $w > 0$ . Тоді при виборі  $v^0(\mathbf{x}) = 0$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta > 0$  нерівність (3.32) набуде вигляду  $-\beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) ds \geq 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  і, очевидно, не може бути виконана. Якщо ж  $f(\mathbf{x}, u)$  невизначена при  $u = 0$ , то взагалі вибір  $v^0(\mathbf{x}) = 0$  є неможливим.

Оскільки шуканий розв'язок задачі дорівнює нулю на межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$ , то у цих випадках можна запропонувати шукати кінці сильно інваріантного конусного відрізка у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  ( $0 < \alpha < \beta$ ), де функція  $\omega(\mathbf{x})$ , побудована методом  $R$ -функцій, є такою, що  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ,

$\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ,  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ . Тоді відповідно до (3.32), (3.33) для визначення  $\alpha$ ,  $\beta$  отримаємо систему нерівностей

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, \alpha\omega(\mathbf{s}), \beta\omega(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, \beta\omega(\mathbf{s}), \alpha\omega(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Отже, якщо система нерівностей (3.66), (3.67) має розв'язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 < \alpha < \beta$ , то конусний відрізок  $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$  буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (3.28) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (3.29).

Оскільки для більш швидкої збіжності ітерацій величина  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = (\beta - \alpha) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x})$  має бути якомога меншою, то при практичній реалізації ітераційного процесу (3.34) – (3.36) слід взяти найбільше  $\alpha$  і найменше  $\beta$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , що задовольняють нерівностям (3.66), (3.65).

На межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  також дорівнюватиме нулю функція  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s}$ , тому кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна шукати і у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$  ( $0 < \alpha < \beta$ ), але через неможливість явної побудови функції  $u_0(\mathbf{x})$  замість неї можна використати або її інтерполянту, або апроксимувати її виразом вигляду  $\omega(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})$ . Нерівності для визначення сталих  $\alpha$  і  $\beta$  у цьому випадку співпадатимуть за формою з нерівностями (3.66), (3.67).

3.4 Приклади розв'язання тестових задач для напівлінійного еліптичного рівняння методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Застосуємо розроблений метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для розв'язання задачі (2.138), (2.139), що розглядається в прямокутнику  $\Omega = \left\{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < \frac{1}{2}, 0 < x_2 < \frac{1}{4} \right\}$ .

Логіку формування області  $\Omega$  визначає предикат  $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ , де  $\Sigma_1 = \left[ 2x_1 \left( \frac{1}{2} - x_1 \right) \geq 0 \right]$ ,  $\Sigma_2 = \left[ 4x_2 \left( \frac{1}{4} - x_2 \right) \geq 0 \right]$ . Тоді нормалізоване рівняння межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  можна записати у вигляді

$$\omega(x_1, x_2) \equiv \left[ 2x_1 \left( \frac{1}{2} - x_1 \right) \right] \wedge_0 \left[ 4x_2 \left( \frac{1}{4} - x_2 \right) \right] = 0,$$

де  $\wedge_0$  – знак  $\mathcal{R}_0$ -кон'юнкції.

Виключаючи знак  $\mathcal{R}_0$ -кон'юнкції  $\wedge_0$  за формулою [131]

$$u \wedge_0 v \equiv u + v - \sqrt{u^2 + v^2},$$

остаточно отримаємо функцію  $\omega(x_1, x_2)$  у вигляді

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2) = & 2x_1 \left( \frac{1}{2} - x_1 \right) + 4x_2 \left( \frac{1}{4} - x_2 \right) - \\ & - \sqrt{4x_1^2 \left( \frac{1}{2} - x_1 \right)^2 + 16x_2^2 \left( \frac{1}{4} - x_2 \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Тоді квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q_2(\mathbf{x}, s)$  задачі (2.138), (2.139) у прямокутнику  $\Omega$  визначається формулою (3.23), де функція  $\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2)$  матиме вигляд (3.68), і задача (2.138), (2.139) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})e^{-u(\mathbf{s})}d\mathbf{s}, \quad (3.69)$$

$$\text{де } K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$\tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}.$$

Отже, знаходження додатного розв'язку задачі (2.138), (2.139), що розглядається у прямокутнику  $\Omega$ , замінено на задачу знаходження у  $\mathcal{K}_+$  розв'язку інтегрального рівняння (3.69).

Функція  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  є антитонною за  $u$ , тому можна обрати  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = e^{-w}$  і пов'язати з рівнянням (3.69) гетеротонний оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})e^{-u(\mathbf{s})}d\mathbf{s}, \quad (3.70)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})e^{-w(\mathbf{s})}d\mathbf{s},$$

де

$$K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Для оператора  $T$  вигляду (3.70) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , де  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , а  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s}$ . Для цих функцій  $v^0, w^0$  система нерівностей (3.52), (3.53) призводить до наступної системи нерівностей для визначення сталих  $\alpha, \beta$ : для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-\beta u_0(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \geq \alpha u_0(\mathbf{x}),$$

$$\beta \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-\alpha u_0(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \leq \beta u_0(\mathbf{x}).$$

Ітераційний процес (3.56) – (3.58) для розглядуваної задачі має вигляд

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-w^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.71)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-v^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.72)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x}). \quad (3.73)$$

Помітимо, що при  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \beta \max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ , функція  $f(\mathbf{x}, u) = e^{-u}$  задовольняє нерівність (3.55) з  $L = 1$ .

Підібрано, що системі нерівностей для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$  задовольняють значення  $\alpha = 0,7$ ,  $\beta = 1,9$ . Далі знаходимо

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0,004400,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})| d\mathbf{s} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s} = 0,656106,$$

$$\gamma = M_1 + LM = 0,660506.$$

Отже,  $\gamma < 1$  і за теоремою 3.3 послідовні наближення, які формуються за схемою (3.71) – (3.73) двобічно збігаються до розв'язку задачі (2.138), (2.139), що розглядається у прямокутнику  $\Omega$ .

Оберемо  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Тоді відповідно до (3.62) для досягнення цієї точності

треба зробити  $k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{(\beta - \alpha)M}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right\rceil + 1 = 19$  ітерацій. Фактично точність

$\varepsilon = 10^{-6}$  була досягнута на десятій ітерації. Як бачимо, теоретична оцінка похибки виявилася сильно завищеною.

За наближений розв'язок задачі (2.138), (2.139), що розглядається у прямокутнику  $\Omega$ , беремо функцію  $u^{(10)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(10)}(\mathbf{x}) + w^{(10)}(\mathbf{x})}{2}$ .

У табл. 3.1 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації. Як бачимо з табл. 3.1 один знак після коми в наближеному розв'язку встановлюється приблизно за 2-3 ітерації. Розглядаючи далі відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 9$ , за даними тієї ж таблиці, маємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,435$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

Таблиця 3.1 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (3.71) – (3.73)

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon_k$	$0,26 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$0,22 \cdot 10^{-3}$	$0,94 \cdot 10^{-4}$	$0,41 \cdot 10^{-4}$
$k$	6	7	8	9	10	
$\varepsilon_k$	$0,18 \cdot 10^{-4}$	$0,77 \cdot 10^{-5}$	$0,34 \cdot 10^{-5}$	$0,15 \cdot 10^{-5}$	$0,63 \cdot 10^{-6}$	

На рис. 3.1 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень (штрихована лінія),  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , у перерізі  $x_2 = 0,125$ , отриманих за формулами (3.71) – (3.73). Цей рисунок ілюструє двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  відповідно до ланцюга нерівностей (3.39).



$$w^{(k)}(x_1, 0.125), v^{(k)}(x_1, 0.125)$$

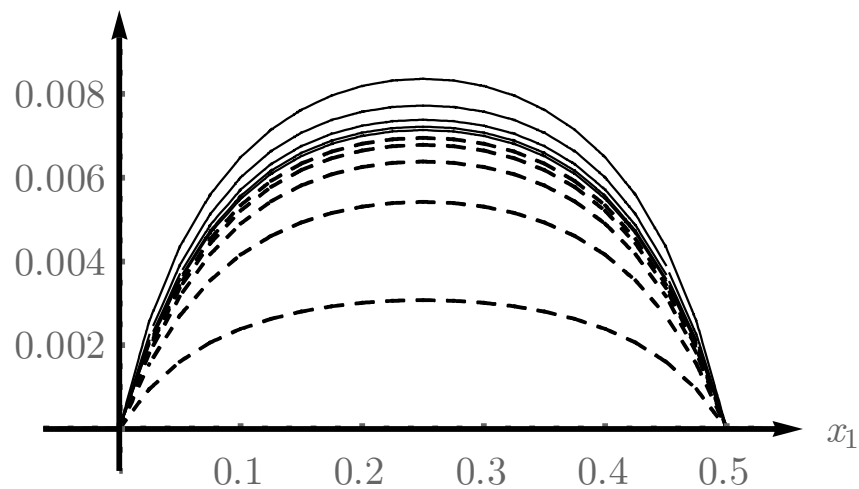


Рисунок 3.1 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (2.138), (2.139) у перерізі  $x_2 = 0,125$

У табл. 3.2 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  в точках  $(0,1i; 0,05j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ . При цьому  $\|u^{(10)}\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(10)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = 0,007070$ , що дуже добре узгоджується зі значенням, отриманим у [6] (відносне відхилення складає 0,014%). На рис. 3.2 наведено поверхню наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

Таблиця 3.2 – Значення наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  задачі (2.138), (2.139) в точках  $(0,1i; 0,05j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$

$x_1 \backslash x_2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,05	0	0,003591	0,004480	0,004480	0,003591	0
0,1	0	0,005237	0,006660	0,006660	0,005237	0
0,15	0	0,005237	0,006660	0,006660	0,005237	0
0,2	0	0,003591	0,004480	0,004480	0,003591	0
0,25	0	0	0	0	0	0

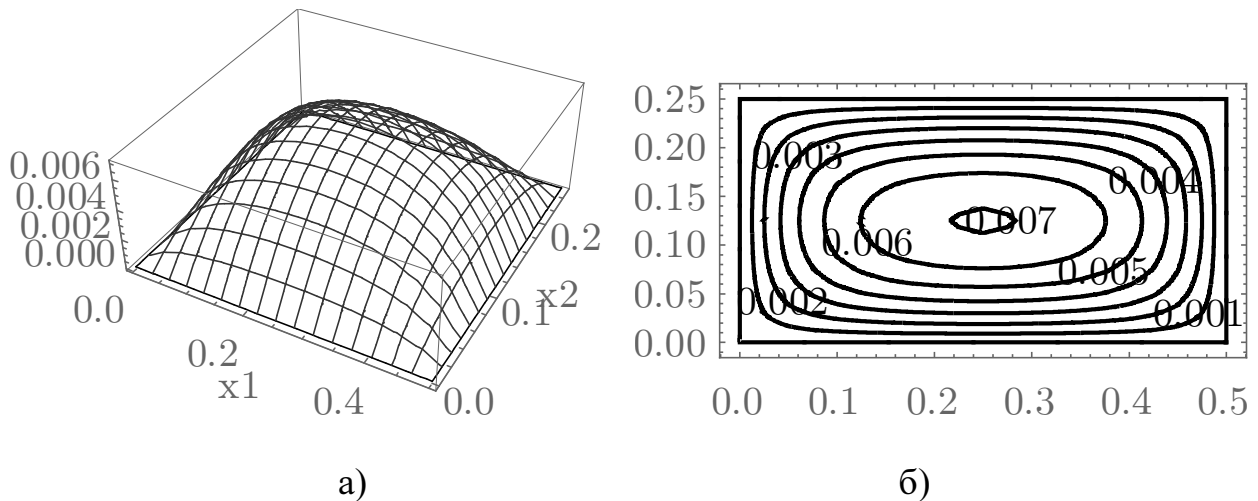


Рисунок 3.2 – Графік поверхні наближеного розв’язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  (а)  
та його лінії рівня (б)

Наближені розв’язки  $u^{(2)}(\mathbf{x})$ , отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, та  $u^{(10)}(\mathbf{x})$ , отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, добре узгоджені між собою: норма різниці між ними у просторі  $C(\bar{\Omega})$  складає  $0,15 \cdot 10^{-4}$ .

Застосуємо тепер розроблений метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для розв’язання задачі (2.146) – (2.148), що розглядається в прямокутнику  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \sqrt{\pi}, 0 < x_2 < \sqrt{\pi}\}$ .

Логіку формування області  $\Omega$  визначатиме предикат  $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ , де  $\Sigma_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_1 (\sqrt{\pi} - x_1) \geq 0 \right]$ ,  $\Sigma_2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_2 (\sqrt{\pi} - x_2) \geq 0 \right]$ . Тоді нормалізоване рівняння межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  можна записати у вигляді

$$\omega(x_1, x_2) \equiv \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_1 (\sqrt{\pi} - x_1) \geq 0 \right] \wedge_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_2 (\sqrt{\pi} - x_2) \geq 0 \right] = 0,$$

де  $\wedge_0$  – знак  $\mathcal{R}_0$ -кон’юнкції.

Виключивши знак  $\mathcal{R}_0$ -кон’юнкції  $\wedge_0$  за формулою [131]

$$u \wedge_0 v \equiv u + v - \sqrt{u^2 + v^2},$$

остаточно отримаємо функцію  $\omega(x_1, x_2)$  у вигляді

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_1(\sqrt{\pi} - x_1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_2(\sqrt{\pi} - x_2) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x_1^2(\sqrt{\pi} - x_1)^2 + x_2^2(\sqrt{\pi} - x_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Тоді квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  задачі (2.146) – (2.148), що розглядається у квадраті  $\Omega$ , визначається за формулою (3.23) з функцією  $\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2)$  вигляду (3.74), а сама крайова задача (2.146) – (2.148) еквівалентна інтегральному рівнянню Урсона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad (3.75)$$

$$\text{де } K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$\tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}.$$

Отже, знаходження додатного розв'язку задачі (2.146) – (2.148), що розглядається у квадраті  $\Omega$ , замінено на задачу знаходження у  $\mathcal{K}_+$  розв'язку інтегрального рівняння (3.75).

Через ізотонність за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1 - u)^2}$  можна обрати  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \frac{\lambda}{(1 - v)^2}$ . Тоді з рівнянням (3.75) можна пов'язати гетеротонний оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad (3.76)$$

для якого супровідний оператор матиме вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - v(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s},$$

де

$$K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Для оператора  $T$  вигляду (3.76) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , де  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , а  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s}$ . Для таких функцій  $v^0$ ,  $w^0$  система нерівностей (3.45), (3.46) зводиться до системи нерівностей для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$  наступного вигляду: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - \alpha u_0(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s} \geq \alpha u_0(\mathbf{x}),$$

$$\beta \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - \beta u_0(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s} \leq \beta u_0(\mathbf{x}).$$

Ітераційний процес (3.49) – (3.51) для розглядуваної задачі має вигляд

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x}). \quad (3.79)$$

Помітимо, що функція  $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1 - u)^2}$  задовольняє з  $L = \frac{2\lambda}{(1 - M_0)^3}$  не-

рівність (3.48) при  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \beta \max_{x \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ .

Оберемо,  $\lambda = \frac{1}{2}$  як у обчислювальному експерименті, який описано у п. 2.4.2. Підібрано, що системі нерівностей для визначення сталих  $\alpha, \beta$  задовольняють значення  $\alpha = 0,4, \beta = 1,3$ . Далі знаходимо

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = 0,12859,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} |K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})| ds = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds = 0,70819,$$

$$M_0 = \beta M = 0,16716;$$

$$L = \frac{2\lambda}{(1 - M_0)^3} = 1,73109;$$

$$\gamma = M_1 + LM = 0,93079.$$

Отже,  $\gamma < 1$  і за теоремою 3.3 послідовні наближення, які формуються за схемою (3.77) – (3.79) двобічно збігаються до розв’язку задачі (2.138), (2.139), що розглядається у прямокутнику  $\Omega$ .

Для проведення обчислень оберемо  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Тоді відповідно до (3.62)

для досягнення цієї точності треба зробити  $k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{(\beta - \alpha)M}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right\rceil + 1 = 89$  іте-

рацій. Фактично ж точність  $\varepsilon = 10^{-4}$  була досягнута на тринадцятій ітерації. Як бачимо, теоретична оцінка кількості ітерацій виявилася сильно завищеною.

За наближений розв’язок задачі (2.146) – (2.148), що розглядається у квадраті  $\Omega$ , беремо функцію  $u^{(13)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(13)}(\mathbf{x}) + w^{(13)}(\mathbf{x})}{2}$ .

У табл. 3.3 наведено значення оцінки похибки  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , де  $k$  – номер ітерації. Як бачимо з табл. 3.3 один знак після коми в наближеному розв’язку встановлюється приблизно за чотири

ітерації. Розглядаючи далі за даними тієї ж таблиці відношення  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , маємо, що  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx 0,574$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

Таблиця 3.3 – Значення оцінки похибки  $\varepsilon_k$  для ітераційного процесу (3.77) – (3.79)

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_k$	$0,58 \cdot 10^{-1}$	$0,36 \cdot 10^{-1}$	$0,21 \cdot 10^{-1}$	$0,13 \cdot 10^{-1}$	$0,74 \cdot 10^{-2}$	$0,43 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$
$k$	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_k$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,86 \cdot 10^{-3}$	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,10 \cdot 10^{-3}$	$0,58 \cdot 10^{-4}$

На рис. 3.3 наведено графіки (у перерізі  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ) верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень (штрихована лінія),  $k = 0, 1, \dots, 13$ , отриманих за ітераційними формулами (3.77) – (3.79). Цей рисунок ілюструє двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  та  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  відповідно до ланцюга нерівностей (3.39).

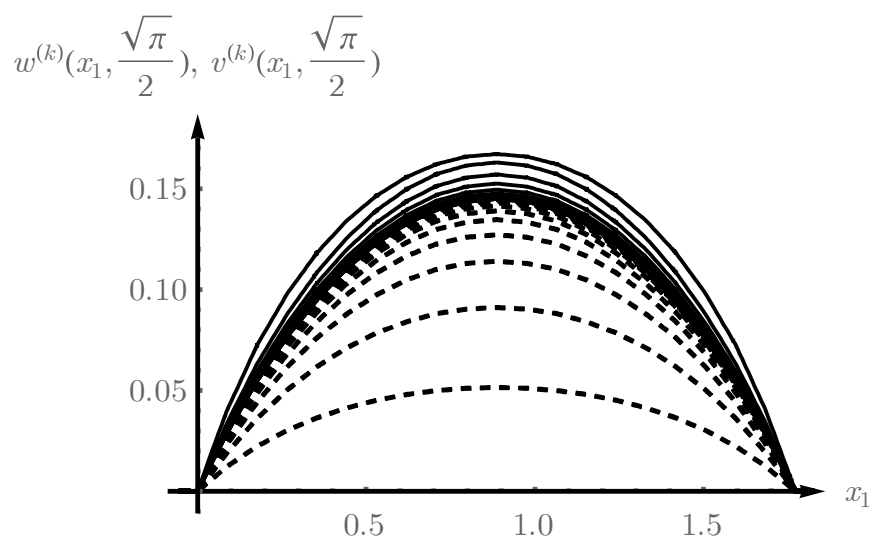


Рисунок 3.3 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень

до розв'язку задачі (2.146) – (2.148) у перерізі  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

У табл. 3.4 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(13)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146) – (2.148) в точках  $(0, 2\sqrt{\pi}i; 0, 2\sqrt{\pi}j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ . При цьому  $\|u^{(13)}\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(13)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 0,1449$ . На рис. 3.4 наведено поверхню наближеного розв'язку  $u^{(13)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б).

Таблиця 3.4 – Значення наближеного розв'язку  $u^{(13)}(\mathbf{x})$  задачі (2.146), (2.148) в точках  $(0, 2\sqrt{\pi}i; 0, 2\sqrt{\pi}j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$

$x_1 \backslash x_2$	0	$0, 2\sqrt{\pi}$	$0, 4\sqrt{\pi}$	$0, 6\sqrt{\pi}$	$0, 8\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$
0	0	0	0	0	0	0
$0, 2\sqrt{\pi}$	0	0,06437	0,09185	0,09185	0,06437	0
$0, 4\sqrt{\pi}$	0	0,09185	0,13460	0,13460	0,09185	0
$0, 6\sqrt{\pi}$	0	0,09185	0,13460	0,13460	0,09185	0
$0, 8\sqrt{\pi}$	0	0,06437	0,09185	0,09185	0,06437	0
$\sqrt{\pi}$	0	0	0	0	0	0

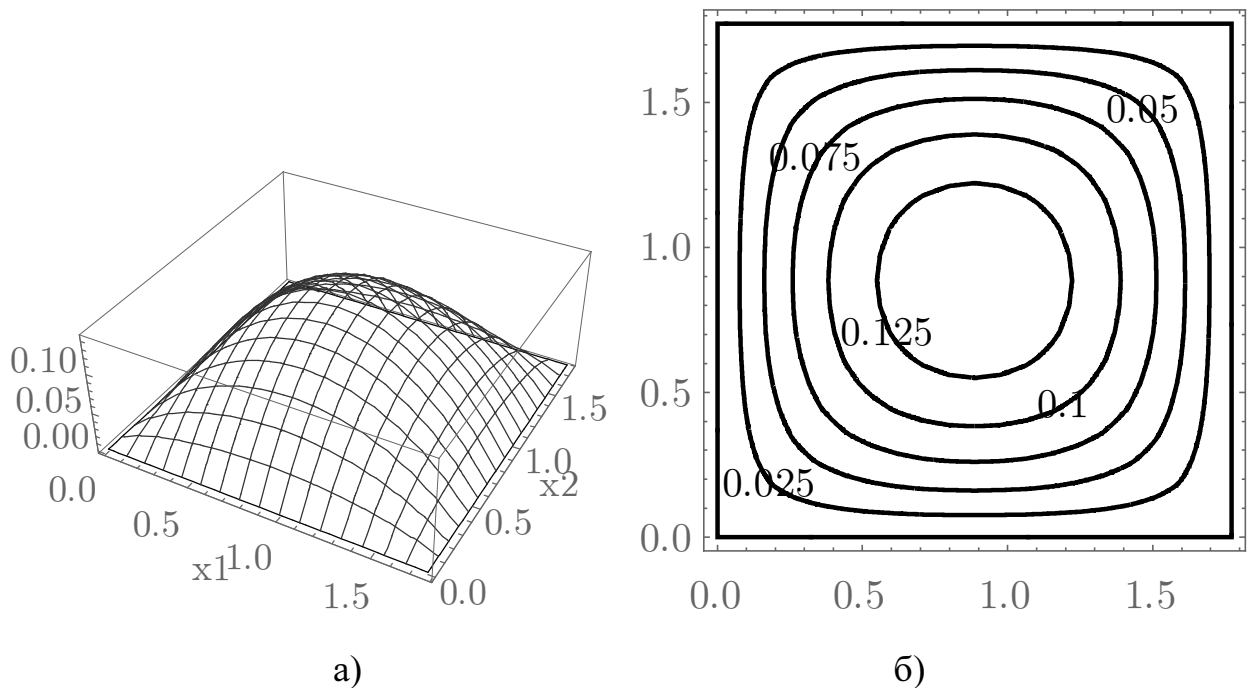


Рисунок 3.4 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(13)}(\mathbf{x})$  (а) та його лінії рівня (б)

Наближений розв'язок  $u^{(5)}(\mathbf{x})$ , отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, та наближений розв'язок  $u^{(13)}(\mathbf{x})$ , отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, добре узгоджені між собою: норма різниці між ними у просторі  $C(\bar{\Omega})$  складає  $0,80 \cdot 10^{-3}$ .

Як бачимо, швидкість збіжності ітераційних процесів (3.71) – (3.73) і (3.77) – (3.79), побудованих з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова, більш повільна, ніж ітераційних процесів (2.141) – (2.143) і (2.150) – (2.152), побудованих з використанням функції Гріна, але їх точність виявилася більш високою. На нашу думку, це пов'язано перш за все з тим, що усі функції, які входять до підінтегральних виразів у (3.70) та (3.75), мають замкнену форму на відміну від функцій Гріна (2.145) і (2.153), які подаються подвійним рядом Фур'є і при обчислювальній реалізації ітераційних процесів (2.141) – (2.143) і (2.150) – (2.152) неминуче мають бути замінені лише якоюсь частковою сумою.

### Висновки за розділом 3

1. Вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для невідроджуваного еліптичного оператора  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$ , що дозволило отримати інтегральне рівняння Урисона, еквівалентне першій крайовій задачі для відповідного напівлінійного еліптичного рівняння і ввести поняття її узагальненого розв'язку.

2. Для операторів Лапласа та Гельмгольца в областях, геометрія яких може бути описана за допомогою конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій, на підставі введеного означення отримано явні вирази для квазіфункцій Гріна-Рвачова першої крайової задачі.

3. Вперше з крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь виділено клас, задачі з якого за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова можуть бути подані у вигляді нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором, що дозволило побудувати двобічні ітераційні методи знаходження їх додатних розв'язків.



4. На основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова вперше побудовано метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду  $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Безумовними перевагами запропонованого метода є простоту обчислювальної схеми, зручну апостеріорну оцінку похибки, а також його більша універсальність, ніж у метода двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

5. Вдосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , кінці якого є початковими наближеннями при реалізації методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, зокрема, запропоновано шукати функції  $v^0$ ,  $w^0$  у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  ( $0 < \alpha < \beta$ ), де функція  $\omega(\mathbf{x})$  описує геометрію області, у якій розглядається крайова задача, і будується з використанням конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій.

6. Проведені обчислювальні експерименти для тестової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння з експоненціальною нелінійністю продемонстрували роботу запропонованого метода двобічних наближень та підтвердили його ефективність. Для задачі, що розглядається у прямокутнику, який визначається нерівностями  $0 < x_1 < 0,5$ ,  $0 < x_2 < 0,25$ , при точності методу двобічних наближень  $\varepsilon = 10^{-6}$  відносна похибка при порівнянні з відомим значенням наближеного розв'язку у точці  $(0,25; 0,125)$  склала  $0,014\%$ , а відхилення від наближеного розв'язку, отриманого методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, склало  $0,15 \cdot 10^{-4}$ .

Основні результати третього розділу опубліковані у роботах [44, 50, 51, 145, 154, 155, 146, 290].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [6, 44, 50, 51, 81, 110, 111, 131, 132, 145, 154, 155, 146, 165, 290].

**4 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ  
ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ  
ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ**

4.1 Ізотонний випадок  $f(u) = \lambda u^p$ ,  $\lambda > 0$ ,  $p > 0$

Спочатку розглянемо дві задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$-u'' = \lambda u^p, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.1)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.2)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (4.3)$$

i

$$-u'' + \kappa^2 u = \lambda u^p, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.4)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.5)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (4.6)$$

Кожна з задач (4.1) – (4.3), (4.4) – (4.6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) u^p(s) ds, \quad (4.7)$$

де для задачі (4.1) – (4.3) функція Гріна  $G(x, s)$  має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(1+x)(1-s)}{2}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{(1+s)(1-x)}{2}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

а для задачі (4.4) – (4.6)

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \kappa(1+x) \operatorname{sh} \kappa(1-s)}{\kappa \operatorname{sh} 2\kappa}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{\operatorname{sh} \kappa(1+s) \operatorname{sh} \kappa(1-x)}{\kappa \operatorname{sh} 2\kappa}, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Функції  $u_0(x)$  вигляду (2.8) для задач (4.1) – (4.3), (4.4) – (4.6) відповідно дорівнюють:

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad (4.10)$$

$$u_0(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\kappa(1+x)}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa(1-x)}{2}}{\kappa^2 \operatorname{ch} \kappa}. \quad (4.11)$$

Оскільки  $f(u) = \lambda u^p$  – монотонно зростаюча за  $u$  функція при  $\lambda > 0$  і  $p > 0$ , то обираємо  $\hat{f}(x, v, w) = \lambda v^p$  і умова  $u_0$ -псевдоувігнутості має вигляд (2.14). Тоді матимемо: для всіх  $\tau \in (0, 1)$

$$\lambda(\tau u)^p > \tau \cdot \lambda u^p, \quad \tau^p > \tau,$$

звідки отримаємо умову на параметр  $p$  ( $\lambda > 0$  – довільне):

$$0 < p < 1. \quad (4.12)$$

Тоді, як впливає з результатів п. 2.1, оператор

$$T(u)(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) u^p(s) ds, \quad (4.13)$$

що породжується правою частиною рівняння (4.7) є додатним,  $u_0$ -додатним, псевдоувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.12)) та гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.28):

$$\hat{T}(v, w)(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) v^p(s) ds. \quad (4.14)$$

Оскільки  $f(0) = 0$ , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(x) = \alpha u_0(x)$ ,  $w^0(x) = \beta u_0(x)$ , а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначатимемо з системи нерівностей (2.124).

Для випадку крайової задачі (4.1) – (4.3)

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\alpha u_0(s)]^p ds = \lambda \alpha^p \Psi(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\beta u_0(s)]^p ds = \lambda \beta^p \Psi(x),$$

де

$$\Psi(x) = \frac{1}{2^p} \left( \int_{-1}^x \frac{(1+s)(1-s^2)^p}{1+x} ds + \int_x^1 \frac{(1-s)(1-s^2)^p}{1-x} ds \right), \quad (4.15)$$

і система (2.124) приймає вигляд

$$\alpha \leq \lambda \alpha^p \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x), \quad \beta \geq \lambda \beta^p \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x),$$

або

$$\alpha^{1-p} \leq \lambda \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x), \quad \beta^{1-p} \geq \lambda \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x). \quad (4.16)$$

Оскільки

$$m_1 = \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) = \Psi(\pm 1) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)}, \quad (4.17)$$

$$M_1 = \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) = \Psi(0) = \frac{1}{2^p} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)} - \frac{1}{1+p} \right), \quad (4.18)$$

де  $\Gamma(z)$  – гамма-функція,  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ , то система (4.16) має розв'язок

$$\alpha \leq (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta \geq (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Побудований конусний відрізок  $\langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$  матиме найменшу ширину, якщо останні нерівності виконуватимуться як рівності.

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.1.* Крайова задача (4.1) – (4.3) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) [v^{(k)}(s)]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.18)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) [w^{(k)}(s)]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.19)$$

з початкового наближення

$$v^{(0)}(x) = \frac{\alpha}{2}(1 - x^2), \quad w^{(0)}(x) = \frac{\beta}{2}(1 - x^2), \quad (4.20)$$

де функція Гріна  $G(x, s)$  визначається рівністю (4.8), а

$$\alpha = (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left( \frac{\lambda \sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta = (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left[ \frac{\lambda}{2^p} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)} - \frac{1}{1+p} \right) \right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

З теореми 4.1 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.1) – (4.3) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda \sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)} \right)^{\frac{1}{1-p}} (1 - x^2) \leq u^*(x) \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda}{2^p} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right)} - \frac{1}{1+p} \right) \right]^{\frac{1}{1-p}} (1 - x^2).$$

Обчислювальний експеримент для задачі (4.1) – (4.3) було проведено при значеннях  $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0, 9$  і  $\lambda = 1$ ). В таблиці Г.1 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ . На рис. Г.1 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . На рис. Г.2 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 9$ , до розв'язку задачі (4.1) – (4.3) при  $p = 0, 5$ ,  $\lambda = 1$ , а в таблиці Г.2 наведено значення цих функцій на сітці  $x_i = 0, 1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.3 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.1) – (4.3) для значень  $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  на тій же сітці (значення у точках  $x_i = -0, 1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Для випадку крайової задачі (4.4) – (4.6)

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\alpha u_0(s)]^p ds = \lambda \alpha^p \Psi(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\beta u_0(s)]^p ds = \lambda \beta^p \Psi(x),$$

де

$$\Psi(x) = \frac{2^{p-1}}{\kappa^{2p-1} \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch}^p \kappa} \left( \int_{-1}^x \frac{\operatorname{sh} \kappa(1+s) \operatorname{ch} \frac{\kappa(1-x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa(1+x)}{2}} \operatorname{sh}^p \frac{\kappa(1+s)}{2} \operatorname{sh}^p \frac{\kappa(1-s)}{2} ds + \right. \\ \left. + \int_x^1 \frac{\operatorname{sh} \kappa(1-s) \operatorname{ch} \frac{\kappa(1+x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa(1-x)}{2}} \operatorname{sh}^p \frac{\kappa(1+s)}{2} \operatorname{sh}^p \frac{\kappa(1-s)}{2} ds \right) \quad (4.21)$$

і система (2.124) приймає вигляд

$$\alpha^{1-p} \leq \lambda \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x), \quad \beta^{1-p} \geq \lambda \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x), \quad (4.22)$$

Оскільки

$$m_1 = \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) = \Psi(\pm 1), \quad M_1 = \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) = \Psi(0), \quad (4.23)$$

то система (4.22) має розв'язок

$$\alpha \leq (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta \geq (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Побудований конусний відрізок  $\langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$  матиме найменшу ширину, якщо останні нерівності виконуватимуться як рівності.

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.2.* Крайова задача (4.4) – (4.6) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.18), (4.19) з початкового наближення (4.20), де функція Гріна  $G(x, s)$  визначається рівністю (4.9), а

$$\alpha = (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}} = [\lambda \Psi(\pm 1)]^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta = (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}} = [\lambda \Psi(0)]^{\frac{1}{1-p}}.$$

З теореми 4.1 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.4) – (4.6) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2} [\lambda \Psi(\pm 1)]^{\frac{1}{1-p}} (1 - x^2) \leq u^*(x) \leq \frac{1}{2} [\lambda \Psi(0)]^{\frac{1}{1-p}} (1 - x^2).$$

Обчислювальний експеримент для задачі (4.4) – (4.6) було проведено при  $\kappa = 1$  і значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ , і  $\lambda = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-7}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 1$ ). В таблиці Г.4 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ , а на рис. Г.3 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . На рис. Г.4 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 8$ , до розв'язку задачі

(4.4) – (4.6) при  $p = 0, 5$ ,  $\lambda = 1$ , а в таблиці Г.5 наведено значення цих функцій на сітці  $x_i = 0, 1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.6 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.4) – (4.6) на тій же сітці для значень  $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  (значення у точках  $x_i = -0, 1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Розглянемо тепер дві задачі для рівнянь з частинними похідними:

$$-\Delta u = \lambda u^p, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.24)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.25)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.26)$$

і

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \lambda u^p, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.27)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.28)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.29)$$

Еквівалентне розглядуваним задачам інтегральне рівняння Гаммерштейна матиме вигляд

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^p(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (4.30)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (4.24) – (4.26) чи задачі (4.27) – (4.29) у області  $\Omega$ .

Для монотонної за  $u$  при  $\lambda > 0$  і  $p > 0$  функції  $f(u) = \lambda u^p$  обираємо  $\hat{f}(v, w) = \lambda v^p$  і умова  $u_0$ -псевдоувігнутості, що має вигляд (2.14), призводить до нерівності (4.12) для параметра  $p$  ( $\lambda > 0$  – довільне). Функція  $u_0(\mathbf{x})$  задається рівністю (2.69).

Тоді з результатів п. 2.2 випливає, що оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^p(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (4.31)$$

породжений правою частиною рівняння (4.30), є додатним,  $u_0$ -додатним, псев-



доувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.12)) та гетеротонним зі супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.72):

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^p(\mathbf{s}) ds. \quad (4.32)$$

Оскільки  $f(0) = 0$ , але функція  $u_0(\mathbf{x})$  у загальному випадку не виражається через елементарні функції, кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ , де побудована за допомогою методу  $R$ -функцій елементарна функція  $\omega(\mathbf{x})$  є такою, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ ;

а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначаються з системи нерівностей (2.125).

Для випадку крайових задач (4.24) – (4.26) і (4.27) – (4.29)

$$h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} [\alpha\omega(\mathbf{s})]^p ds = \lambda\alpha^p \Psi(\mathbf{x}),$$

$$h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} [\beta\omega(\mathbf{s})]^p ds = \lambda\beta^p \Psi(\mathbf{x}),$$

де

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \omega^p(\mathbf{s}) ds, \quad (4.33)$$

і система (2.125) зводиться до вигляду

$$\alpha^{1-p} \leq \lambda m_1, \quad \beta^{1-p} \geq \lambda M_1, \quad (4.34)$$

де

$$m_1 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \Psi(\mathbf{x}), \quad M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \Psi(\mathbf{x}). \quad (4.35)$$

З (4.34) матимемо  $\alpha \leq (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}}$ ,  $\beta \geq (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}}$ . Якщо останні нерівності виконуватимуться як рівності, то побудований конусний відрізок  $\langle \alpha\omega, \beta\omega \rangle$  матиме найменшу ширину. Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.3.* Кожна з крайових задач (4.24) – (4.26) і (4.27) – (4.29) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  має єдиний неперервний у  $\bar{\Omega}$  додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.36)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [w^{(k)}(\mathbf{s})]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.37)$$

з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x}), \quad (4.38)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна відповідної крайової задачі, а

$$\alpha = (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta = (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}}.$$

З теореми 4.3 випливає, що розв'язок кожної з крайових задач (4.24) – (4.26) і (4.27) – (4.29) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$(\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}} \omega(\mathbf{x}) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}} \omega(\mathbf{x}).$$

Обчислювальний експеримент проведемо для таких областей  $\Omega$ :

а) у випадку  $\mathbb{R}^2$ :

1) одиничний круг  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ ;

2) одиничний квадрат  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1\}$ ;

3) половина одиничного круга  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$ ;

б) у випадку  $\mathbb{R}^3$ :

1) одинична куля  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ ;

2) одиничний куб  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$ .

Вирази функцій Гріна кожної з задач (4.24) – (4.26) і (4.27) – (4.29) для перелічених областей наведено у табл. В.1, В.2. Відповідна функція  $u_0(\mathbf{x})$  задається рівністю (2.69).

Для розглядуваних областей  $\Omega$  функції  $\omega(\mathbf{x})$  наведено у табл. 4.1. Тут  $x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$  – знак  $\mathcal{R}_0$ -кон'юнкції [131].

Таблиця 4.1 – Вигляд функцій  $\omega(\mathbf{x})$  для різних областей  $\Omega$

№	Область $\Omega$	Функція $\omega(\mathbf{x})$
1	Одиничний круг $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$	$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2)$
2	Одиничний квадрат $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1\}$	$\omega(\mathbf{x}) = [x_1(1 - x_1)] \wedge_0 [x_2(1 - x_2)]$
3	Половина одиничного круга $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$	$\omega(\mathbf{x}) = \left[ \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) \right] \wedge_0 x_2$
4	Одинична куля $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$	$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$
5	Одиничний куб $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$	$\omega(\mathbf{x}) = \{[x_1(1 - x_1)] \wedge_0 [x_2(1 - x_2)]\} \wedge_0 \wedge_0 [x_3(1 - x_3)]$

Через складний аналітичний вигляд відповідних функцій Гріна безпосереднє знаходження величин  $\alpha$ ,  $\beta$  у (4.38) для більшості областей  $\Omega$  ускладнено. Відмітимо випадок крайової задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному крузі та одиничній кулі.

Для випадку  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  матимемо

$$m_1 = \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{1+p}, \quad M_1 = \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{H_{1+p}}{1+p},$$

де  $H_x$  – гармонічне число,  $H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ .

Отже, матиме місце таке твердження.

*Теорема 4.4.* Крайова задача (4.24) – (4.26) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  має у одиничному крузі єдиний неперервний додатний розв’язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.36), (4.37) ( $G(\mathbf{x}, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у одиничному крузі) з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

де

$$\alpha = (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left( \frac{\lambda}{2^{p+1}(1+p)} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta = (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left( \frac{\lambda H_{1+p}}{2^{p+1}(1+p)} \right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Тоді з теореми 4.4 випливає, що розв’язок крайової задачі (4.20) – (4.22) у одиничному крузі для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{2^{p+1}(1+p)} \right)^{\frac{1}{1-p}} (1 - x_1^2 - x_2^2) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda H_{1+p}}{2^{p+1}(1+p)} \right)^{\frac{1}{1-p}} (1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Для задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному крузі, було проведено обчислювальний експеримент при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-9}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 2$ ). В таблиці Г.7 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв’язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.5 наведено графіки залежності норми наближеного розв’язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . Усі

наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.6 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 7$ , до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.8 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.7 та Г.8 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ . В таблиці Г.9 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Також обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному крузі, при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ ), ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-6}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 3$ ). В таблиці Г.10 наведено значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв'язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.9 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.10 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 7$ , до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.11 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.11 та Г.12 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ . В таблиці Г.12 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Для випадку  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$  матимемо

$$m_1 = \frac{1}{2^{p+2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)}, \quad M_1 = \frac{1}{2^{p+1}} \left( \frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)} \right),$$

де  $\Gamma(z)$  – гамма-функція,  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ .

Отже, матиме місце таке твердження.

*Теорема 4.5.* Крайова задача (4.24) – (4.26) для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  має у одиничній кулі єдиний неперервний додатний розв’язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.36), (4.37) ( $G(\mathbf{x}, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у одиничній кулі) з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2),$$

де

$$\alpha = (\lambda m_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left( \frac{\lambda \sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{2^{p+2} \Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)} \right)^{\frac{1}{1-p}},$$

$$\beta = (\lambda M_1)^{\frac{1}{1-p}} = \left[ \frac{1}{2^{p+1}} \left( \frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)} \right) \right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Тоді з теореми 4.5 випливає, що розв’язок крайової задачі (4.24) – (4.26) у одиничній кулі для всіх  $\lambda > 0$  і  $0 < p < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda \sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{2^{p+2} \Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)} \right)^{\frac{1}{1-p}} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \leq$$

$$\leq u^*(\mathbf{x}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2^{p+1}} \left( \frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} + p\right)} \right) \right]^{\frac{1}{1-p}} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Обчислювальний експеримент для задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничній кулі, було проведено при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,7$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-11}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 3$ ). В таблиці Г.13 наведено інформацію про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.13 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.14 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 6$ , до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.14 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0,1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.15 наведено поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ . В таблиці Г.15 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Обчислювальний експеримент було також проведено для задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничній кулі, при  $\kappa = 1$  і значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,7$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-11}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  при  $p = 0,8$  і  $\lambda = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$  при  $p = 0,9$  і  $\lambda = 3$ ). В таблиці Г.16 наведено значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв'язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.16 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  для значень  $\lambda = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.17 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 6$ , до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.17 наведено значення цих функ-

цій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.18 наведено поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ . В таблиці Г.18 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Як бачимо з наведених результатів, збіжність ітераційних процесів у одно-, дво- та тривимірному випадках уповільнюється як зі збільшенням  $\lambda$ , так і з наближенням  $p$  до одиниці.

Реалізація ітераційного процесу (4.36), (4.37) для задачі (4.27) – (4.29) виявилася дещо складнішою, ніж для задачі (4.24) – (4.26), через те, що функції Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца у крузі та кулі подаються відповідно подвійним та потрійним рядами Фур'є (див. табл. В.2). Проте ж використання квазіфункції Гріна-Рвачова дозволяє будувати еквівалентне інтегральне рівняння з ядром, яке має вигляд скінченного виразу. Порівняємо результати, отримані методом двобічних наближень, заснованому на використанні функції Гріна, з результатами роботи методу квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень для задач (4.24) – (4.26) та (4.27) – (4.29) при  $p = \frac{1}{2}$  і  $\lambda = 1$  у областях з табл. 4.1 (оскільки для круга та кулі квазіфункція Гріна-Рвачова для задачі (4.24) – (4.26) співпадає з точною функцією Гріна, то для цієї задачі порівняння проведемо тільки для півкруга, квадрата та куба).

Ітераційні формули методу двобічних наближень для задач (4.24) – (4.26) та (4.27) – (4.29) на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова мають вигляд:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\ + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[v^{(k)}(\mathbf{s})]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.39)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\ + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[w^{(k)}(\mathbf{s})]^p ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.40)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x}). \quad (4.41)$$



Тут для задачі (4.24) – (4.26) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.23), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.24), для задачі (4.27) – (4.29) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.25), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.26), а функції  $\omega(\mathbf{x})$  наведені в табл. 4.1. Сталі  $\alpha$  і  $\beta$  у початковому наближенні (4.41) визначаються на підставі нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda\alpha^p \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^p(\mathbf{s})d\mathbf{s} \geq \alpha\omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda\beta^p \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^p(\mathbf{s})d\mathbf{s} \leq \beta\omega(\mathbf{x}).$$

У таблиці 4.2 наведено порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.24) – (4.26), а у таблиці 4.3 – для задачі (4.27) – (4.29). Тут  $u_G$  – розв’язок відповідної крайової задачі, отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, а  $u_Q$  – розв’язок, отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова,  $N_G$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.36), (4.37), а  $N_Q$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.39), (4.40) до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Таблиця 4.2 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.24) – (4.26)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна	Відносна похибка
					похибка $\ u_G - u_Q\ $	$\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний квадрат	7	0,0037	14	0,0038	$0,12 \cdot 10^{-3}$	3,19%
Половина одиничного круга	9	0,0067	9	0,0067	$0,13 \cdot 10^{-4}$	0,19%
Одиничний куб	7	0,0013	12	0,0012	$0,14 \cdot 10^{-3}$	11,67%

Таблиця 4.3 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.27) – (4.29)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна похибка $\ u_G - u_Q\ $	Відносна похибка $\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний круг	7	0,0314	9	0,0314	$0,60 \cdot 10^{-4}$	0,19%
Одиничний квадрат	7	0,0033	13	0,0033	$0,42 \cdot 10^{-4}$	1,25%
Половина одиничного круга	9	0,0058	9	0,0058	$0,11 \cdot 10^{-3}$	1,88%
Одинична куля	6	0,0142	7	0,0140	$0,30 \cdot 10^{-3}$	2,10%
Одиничний куб	7	0,0014	12	0,0013	$0,14 \cdot 10^{-3}$	10,77%

Як бачимо, результати, отримані обома методами двобічних наближень, добре узгоджені між собою і дозволяють знайти розв'язок поставленої задачі із заданою точністю, але, на нашу думку, перевагу слід віддати методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, оскільки при її реалізації всі структурні елементи розрахункових формул враховуються точно на відміну від методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна, де функція Гріна (за умови, що вона відома) при обчисленнях замінюється частковою сумою відповідного ряду Фур'є.

У таблицях Г.19 – Г.24 наведено значення наближених розв'язків задач (4.24) – (4.26) і (4.27) – (4.29) у деяких точках відповідних областей (наведено значення однієї з симетричних частин розв'язків), а на рис. Г.19 – Г.28 наведено їх поверхні та лінії рівня (для двовимірних задач) і поверхні рівня (для тривимірних задач).

#### 4.2 Антитонний випадок $f(u) = \mu u^{-q}$ , $\mu > 0$ , $q > 0$

Розглянемо спочатку задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$-u'' = \mu u^{-q}, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.42)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.43)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (4.44)$$

i

$$-u'' + \kappa^2 u = \mu u^{-q}, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.45)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.46)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (4.47)$$

Кожна з задач (4.42) – (4.44), (4.45) – (4.47) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \mu \int_{-1}^1 G(x, s) u^{-q}(s) ds, \quad (4.48)$$

де для задачі (4.42) – (4.44) функція Гріна  $G(x, s)$  має вигляд (4.8), а для задачі (4.45) – (4.47) має вигляд (4.9).

Функції  $u_0(x)$  вигляду (2.8) для задач (4.42) – (4.44), (4.45) – (4.47) відповідно дорівнюють функціям (4.10) та (4.11).

Оскільки функція  $f(u) = \mu u^{-q}$  монотонно спадає за  $u$  при  $\mu > 0$  і  $q > 0$ , то обираємо  $\hat{f}(v, w) = \mu w^{-q}$  і тоді умова  $u_0$ -псевдоувігнутості має вигляд (2.15). Отже, матимемо: для всіх  $\tau \in (0, 1)$

$$\mu \left( \frac{1}{\tau} u \right)^{-q} > \tau \cdot \mu u^{-q}, \quad \tau^q > \tau,$$

звідки отримаємо умову на параметр  $q$  ( $\mu > 0$  – довільне):

$$0 < q < 1. \quad (4.49)$$

Тоді, як впливає з результатів п. 2.1, оператор

$$T(u)(x) = \mu \int_{-1}^1 G(x, s) u^{-q}(s) ds, \quad (4.50)$$

що породжується правою частиною рівняння (4.48) є додатним,  $u_0$ -додатним, псевдоувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.49)) та гетеротонним з су-

провідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.38):

$$\hat{T}(v, w)(x) = \mu \int_{-1}^1 G(x, s) w^{-q}(s) ds. \quad (4.51)$$

Оскільки  $f(u)$  не визначена при  $u = 0$ , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(x) = \alpha u_0(x)$ ,  $w^0(x) = \beta u_0(x)$ , а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначатимемо з системи нерівностей (2.124).

Для випадку крайової задачі (4.42) – (4.44) знаходимо

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \mu \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\beta u_0(s)]^{-q} ds = \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \mu \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\alpha u_0(s)]^{-q} ds = \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(x),$$

де

$$\Theta(x) = 2^q \left( \int_{-1}^x \frac{1+s}{(1+x)(1-s^2)^q} ds + \int_x^1 \frac{1-s}{(1-x)(1-s^2)^q} ds \right), \quad (4.52)$$

і система (2.124) приймає вигляд

$$\alpha \leq \frac{\mu}{\beta^q} \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x), \quad \beta \geq \frac{\mu}{\alpha^q} \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x),$$

або

$$\alpha \beta^q \leq \mu \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x), \quad \beta \alpha^q \geq \mu \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x). \quad (4.53)$$

Оскільки

$$m_2 = \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x) = \Theta(0) = 2^q \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-q\right)} - \frac{1}{1-q} \right), \quad (4.54)$$

$$M_2 = \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x) = \Theta(\pm 1) = \frac{2^{q-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)}, \quad (4.55)$$

то максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.53), є розв'язками відповідної системи рівнянь і дорівнюють

$$\alpha = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{M_2^{\frac{q}{1-q^2}}} = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ 2^q \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} - \frac{1}{1-q} \right) \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ \frac{2^{q-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} \right]^{-\frac{q}{1-q^2}}, \quad (4.56)$$

$$\beta = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{m_2^{\frac{q}{1-q^2}}} = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ \frac{2^{q-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ 2^q \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} - \frac{1}{1-q} \right) \right]^{-\frac{q}{1-q^2}}. \quad (4.57)$$

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.6.* Крайова задача (4.42) – (4.44) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \mu \int_{-1}^1 G(x, s) [w^{(k)}(s)]^{-q} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.58)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \mu \int_{-1}^1 G(x, s) [v^{(k)}(s)]^{-q} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.59)$$

з початкового наближення (4.20), де функція Гріна  $G(x, s)$  визначається рівністю (4.8), а числа  $\alpha$ ,  $\beta$  визначаються за формулами (4.56), (4.57).

З теореми 4.6 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.42) – (4.44) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ 2^q \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} - \frac{1}{1-q} \right) \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ \frac{2^{q-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - q\right)} \right]^{-\frac{q}{1-q^2}} (1-x^2) \leq$$

$$\leq u^*(x) \leq \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ \frac{2^{q-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-q\right)} \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ 2^q \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-q\right)} - \frac{1}{1-q} \right) \right]^{-\frac{q}{1-q^2}} (1-x^2).$$

Для задачі (4.42) – (4.44) обчислювальний експеримент було проведено при значеннях  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таблиця Г.25 містить дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ . На рис. Г.29 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . На рис. Г.30 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.42) – (4.44) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ , а в таблиці Г.26 наведено значення цих функцій на сітці  $x_i = 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.27 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.42) – (4.44) для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  на тій же сітці (значення у точках  $x_i = -0,1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Для випадку крайової задачі (4.45) – (4.47)

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \mu \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\alpha u_0(s)]^{-q} ds = \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \mu \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} [\beta u_0(s)]^{-q} ds = \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(x),$$

де

$$\Theta(x) = \frac{\kappa^{1+2q} \operatorname{ch}^q \kappa}{2^{1+q} \operatorname{sh} \kappa} \left( \int_{-1}^x \frac{\operatorname{sh} \kappa(1+s) \operatorname{ch} \frac{\kappa(1-x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa(1+x)}{2}} \operatorname{sh}^{-q} \frac{\kappa(1+s)}{2} \operatorname{sh}^{-q} \frac{\kappa(1-s)}{2} ds + \right. \\ \left. + \int_x^1 \frac{\operatorname{sh} \kappa(1-s) \operatorname{ch} \frac{\kappa(1+x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa(1-x)}{2}} \operatorname{sh}^{-q} \frac{\kappa(1+s)}{2} \operatorname{sh}^{-q} \frac{\kappa(1-s)}{2} ds \right) \quad (4.60)$$

і система (2.124) приймає вигляд

$$\alpha\beta^q \leq \mu \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x), \quad \beta\alpha^q \geq \mu \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x), \quad (4.61)$$

Оскільки

$$m_2 = \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x) = \Theta(0), \quad M_2 = \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x) = \Theta(\pm 1), \quad (4.62)$$

то максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.61), є розв'язками відповідної системи рівнянь і дорівнюють

$$\alpha = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{M_2^{\frac{q}{1-q^2}}}, \quad \beta = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{m_2^{\frac{q}{1-q^2}}}. \quad (4.63)$$

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.7.* Крайова задача (4.45) – (4.47) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.58), (4.59) з початкового наближення (4.20), де функція Гріна визначається рівністю (4.9), а числа  $\alpha$ ,  $\beta$  визначаються за формулами (4.63).

З теореми 4.7 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.45) – (4.47) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{M_2^{\frac{q}{1-q^2}}} (1 - x^2) \leq u^*(x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{m_2^{\frac{q}{1-q^2}}} (1 - x^2),$$

де числа  $m_2$ ,  $M_2$  визначаються рівностями (4.62).

Обчислювальний експеримент для задачі (4.45) – (4.47) було проведено при  $\kappa = 1$  і значеннях  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ , і  $\mu = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . В таблиці Г.28 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ , а на рис. Г.31 наведено графіки залежності норми наближе-

ного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . На рис. Г.32 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.45) – (4.47) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ , а таблиця Г.29 містить значення цих функцій на сітці  $x_i = 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.30 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.45) – (4.47) на тій же сітці для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  (значення у точках  $x_i = -0,1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Розглянемо тепер дві задачі для рівнянь з частинними похідними:

$$-\Delta u = \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.64)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.65)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.66)$$

і

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.67)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.68)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.69)$$

Еквівалентне розглядуваним задачам інтегральне рівняння Гаммерштейна матиме вигляд

$$u(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^{-q}(\mathbf{s}) ds, \quad (4.70)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (4.64) – (4.66) чи (4.67) – (4.69) для області  $\Omega$ .

Для антитонної за  $u$  при  $\mu > 0$  і  $q > 0$  функції  $f(u) = \mu u^{-q}$  обираємо  $\hat{f}(v, w) = \mu w^{-q}$  і умова  $u_0$ -псевдоувігнутості має вигляд (2.15), що призводить до умови (4.49) для параметра  $q$  ( $\mu > 0$  – довільне). Функція  $u_0(\mathbf{x})$  задається рівністю (2.69). Тоді з результатів п. 2.2 випливатиме, що оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^{-q}(\mathbf{s}) ds, \quad (4.71)$$

породжений правою частиною рівняння (4.70) є додатним,  $u_0$ -додатним, псев-



доувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.49)) та гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.73):

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{-q}(\mathbf{s}) ds. \quad (4.72)$$

Оскільки  $f(0)$  не існує і функція  $u_0(\mathbf{x})$  не виражається через елементарні функції, кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ , де побудована за допомогою методу  $R$ -функцій елементарна функція  $\omega(\mathbf{x})$  така, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ ;

а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначаються з системи нерівностей (2.125).

Для випадку крайових задач (4.64) – (4.66) і (4.67) – (4.69)

$$h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \mu \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} [\beta\omega(\mathbf{s})]^{-q} ds = \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

$$h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \mu \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} [\alpha\omega(\mathbf{s})]^{-q} ds = \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

де

$$\Theta(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \omega^{-q}(\mathbf{s}) ds, \quad (4.73)$$

і система (2.125) зводиться до вигляду

$$\alpha\beta^q \leq \mu m_2, \quad \beta\alpha^q \geq \mu M_2, \quad (4.74)$$

де

$$m_2 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \Theta(\mathbf{x}), \quad M_2 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \Theta(\mathbf{x}). \quad (4.75)$$

Максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.74), є розв'язками відповідної системи рівнянь і дорівнюють

$$\alpha = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}, \quad \beta = \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}. \quad (4.76)$$

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.8.* Кожна з крайових задач (4.64) – (4.66) і (4.67) – (4.69) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний у  $\bar{\Omega}$  додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.77)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [v^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.78)$$

з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha \omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta \omega(\mathbf{x}), \quad (4.79)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна відповідної крайової задачі, а числа  $\alpha$  і  $\beta$  визначаються рівностями (4.76).

З теореми 4.8 випливає, що розв'язок кожної з крайових задач (4.64) – (4.66) і (4.67) – (4.69) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} m_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{M_2^{\frac{1}{1-q^2}}} \omega(\mathbf{x}) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \frac{\mu^{\frac{1}{1+q}} M_2^{\frac{1}{1-q^2}}}{m_2^{\frac{1}{1-q^2}}} \omega(\mathbf{x}).$$

Обчислювальний експеримент проведемо для тих саме областей  $\Omega$ , що були розглянуті у п. 4.1. Вирази функцій Гріна кожної з задач (4.64) – (4.66) і (4.67) – (4.69) для цих областей наведено у табл. В.1, В.2, відповідна функція

$u_0(\mathbf{x})$  задається рівністю (2.69), а функції  $\omega(\mathbf{x})$  наведено у табл. 4.1.

Через складний аналітичний вигляд відповідних функцій Гріна безпосереднє знаходження величин  $\alpha$ ,  $\beta$  у (4.75) для більшості областей  $\Omega$  ускладнено. Відмітимо випадок крайової задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному крузі та одиничній кулі.

Для випадку  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  матимемо

$$m_2 = \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{H_{1-q}}{1-q}, \quad M_2 = \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{1}{1-q},$$

де  $H_x$  – гармонічне число,  $H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ .

Отже, матиме місце таке твердження.

*Теорема 4.9.* Крайова задача (4.64) – (4.66) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  має у одиничному крузі єдиний неперервний додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.77), (4.78) ( $G(\mathbf{x}, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у одиничному крузі) з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

де

$$\alpha = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{H_{1-q}}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q^2}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{1}{1-q} \right)^{-\frac{q}{1-q^2}},$$

$$\beta = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q^2}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{H_{1-q}}{1-q} \right)^{-\frac{q}{1-q^2}}.$$

Тоді з теореми 4.9 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.64) – (4.66) у одиничному крузі для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{H_{1-q}}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q^2}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{1}{1-q} \right)^{-\frac{q}{1-q^2}} (1 - x_1^2 - x_2^2) &\leq \\ &\leq u^*(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q^2}} \left( \frac{1}{2^{1-q}} \cdot \frac{H_{1-q}}{1-q} \right)^{-\frac{q}{1-q^2}} (1 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$

Для розглядуваної у одиничному крузі задачі (4.64) – (4.66) було проведено обчислювальний експеримент для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . В таблиці Г.31 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.33 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.34 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.32 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.35 та Г.36 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.33 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Обчислювальний експеримент також було проведено для розглядуваної у одиничному крузі задачі (4.67) – (4.69) при значеннях  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ ), ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таблиця Г.34 містить значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв'язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.37 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.38 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.35 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.39 та Г.40 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку

$u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.36 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Для випадку  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$  матимемо

$$m_2 = \frac{1}{2^{1-q}} \left[ \frac{2}{1-q} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right], \quad M_2 = \frac{1}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)},$$

де  $\Gamma(z)$  – гамма-функція,  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ .

Отже, матиме місце таке твердження.

*Теорема 4.10.* Крайова задача (4.64) – (4.66) для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  має у одиничній кулі єдиний неперервний додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.77), (4.78) ( $G(\mathbf{x}, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у одиничній кулі) з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2),$$

де

$$\alpha = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ \frac{1}{2^{1-q}} \left( \frac{2}{1-q} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right) \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ \frac{1}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right]^{-\frac{q}{1-q^2}},$$

$$\beta = \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ \frac{1}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ \frac{1}{2^{1-q}} \left( \frac{2}{1-q} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right) \right]^{-\frac{q}{1-q^2}}.$$

Тоді з теореми 4.10 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.64) – (4.66) у одиничній кулі для всіх  $\mu > 0$  і  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left[ \frac{1}{2^{1-q}} \left( \frac{2}{1-q} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right) \right]^{\frac{1}{1-q^2}} \left( \frac{1}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right)^{-\frac{q}{1-q^2}} (1-x_1^2-x_2^2-x_3^2) \leq \\ & \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{1+q}} \left( \frac{1}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right)^{\frac{1}{1-q^2}} \left[ \frac{1}{2^{1-q}} \left( \frac{2}{1-q} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right) \right]^{-\frac{q}{1-q^2}} (1-x_1^2-x_2^2-x_3^2). \end{aligned}$$

Для задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничній кулі, обчислювальний експеримент було проведено при значеннях  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Інформацію про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$  наведено в таблиці Г.37. На рис. Г.41 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.42 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.38 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.43 наведено поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.39 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Також обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничній кулі, при  $\kappa = 1$  і значеннях  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таблиця Г.40 містить значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв'язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.44 наведено графіки залежності норми наближеного розв'язку від  $q$  для значень  $\mu = 1, 2, 3$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.45 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 11$ , до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) при

$q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.41 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.46 наведено поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(11)}(\mathbf{x})$  задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.42 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\mu = 1, 2, 3$  на тій же сітці.

Як бачимо з наведених результатів, збіжність ітераційних процесів для одно-, дво- та тривимірних задач, як і для ізотонного випадку, уповільнюється як зі збільшенням  $\mu$ , так і з наближенням  $q$  до одиниці, проте характер зміни норми розв'язку відрізняється.

Порівняємо результати, отримані методом двобічних наближень, заснованому на використанні функції Гріна, з результатами роботи методу квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень для задач (4.64) – (4.66) та (4.67) – (4.69) при  $q = \frac{1}{2}$  і  $\mu = 1$  у областях з табл. 4.1 (для круга та кулі квазіфункція Гріна-Рвачова для задачі (4.64) – (4.66) співпадає з точною функцією Гріна, тому для цієї задачі проведемо порівняння тільки для півкруга, квадрата та куба).

Ітераційні формули методу двобічних наближень для задач (4.64) – (4.66) та (4.67) – (4.69) на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова мають вигляд:

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \mu \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \mu \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})[v^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x}). \quad (4.82)$$

У формулах (4.80), (4.81) для задачі (4.64) – (4.66) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.23), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.24), для задачі (4.67) – (4.69) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.25), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.26), а функції  $\omega(\mathbf{x})$  наведені в табл. 4.1. Сталі  $\alpha$  і  $\beta$  у початковому наближенні (4.82) визначаються на підставі нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \mu\beta^{-q} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^{-q}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \geq \alpha\omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \mu\alpha^{-q} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^{-q}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \leq \beta\omega(\mathbf{x}).$$

Таблиця 4.4 містить порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.64) – (4.66), а таблиця 4.5 містить аналогічне порівняння для задачі (4.67) – (4.69). Тут  $u_G$  – розв’язок відповідної крайової задачі, отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, а  $u_Q$  – розв’язок, отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова,  $N_G$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.77), (4.78), а  $N_Q$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.80), (4.81) до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Таблиця 4.4 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.64) – (4.66)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна похибка $\ u_G - u_Q\ $	Відносна похибка $\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний квадрат	10	0,1990	27	0,1985	$0,94 \cdot 10^{-3}$	0,48%
Половина одиничного круга	10	0,2371	19	0,2379	$0,89 \cdot 10^{-3}$	0,38%
Одиничний куб	11	0,1497	28	0,1545	$0,48 \cdot 10^{-2}$	3,11%

З таблиць бачимо, що отримані обома методами двобічних наближень результати добре узгоджені між собою і дозволяють знайти розв’язок поставленої задачі із заданою точністю. Проте, на нашу думку, перевагу слід віддати методу



двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, оскільки при її обчислювальній реалізації всі вирази у розрахункових формул враховуються точно на відміну від методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна, де функція Гріна (за умови, що вона відома) при обчисленнях замінюється частковою сумою відповідного ряду Фур'є.

Таблиця 4.5 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.67) – (4.69)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна похибка $\ u_G - u_Q\ $	Відносна похибка $\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний круг	12	0,3922	13	0,3928	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,17%
Одиничний квадрат	10	0,1913	24	0,1903	$0,11 \cdot 10^{-2}$	0,58%
Половина одиничного круга	10	0,2244	17	0,2249	$0,48 \cdot 10^{-3}$	0,21%
Одинична куля	11	0,3194	12	0,3201	$0,72 \cdot 10^{-3}$	0,22%
Одиничний куб	11	0,1471	28	0,1494	$0,23 \cdot 10^{-2}$	1,54%

У таблицях Г.43 – Г.48 наведено значення наближених розв'язків задач (4.64) – (4.66) і (4.67) – (4.69) у деяких точках відповідних областей (наведено значення однієї з симетричних частин розв'язків), а на рис. Г.47 – Г.56 наведено їх поверхні та лінії рівня (для двовимірних задач) і поверхні рівня (для тривимірних задач).

#### 4.3 Гетеротонний випадок $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ , $\lambda, \mu > 0$ , $p, q > 0$

Перейдемо до розгляду загального випадку монотонності. Розглянемо спочатку задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.83)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.84)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (4.85)$$

i

$$-u'' + \kappa^2 u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.86)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4.87)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (4.88)$$

Кожна з задач (4.83) – (4.85), (4.86) – (4.88) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] ds, \quad (4.89)$$

де для задачі (4.83) – (4.85) функція Гріна  $G(x, s)$  має вигляд (4.8), а для задачі (4.86) – (4.88) має вигляд (4.9).

Функції  $u_0(x)$  вигляду (2.8) для задач (4.83) – (4.85), (4.86) – (4.88) відповідно дорівнюють функціям (4.10) та (4.11).

Для функції  $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$  обираємо  $\hat{f}(v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$  і тоді умова  $u_0$ -псевдоувігнутості має вигляд (2.12). Отже, матимемо: для всіх  $\tau \in (0, 1)$

$$\lambda(\tau u)^p + \mu \left(\frac{1}{\tau} u\right)^{-q} > \tau(\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad \lambda u^p(\tau^p - 1) + \mu u^{-q}(\tau^q - \tau) > 0,$$

звідки отримаємо умови на параметри  $p$  і  $q$  ( $\lambda, \mu > 0$  – довільні):

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \quad (4.90)$$

Тоді, як впливає з результатів п. 2.1, оператор

$$T(u)(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] ds, \quad (4.91)$$

що породжується правою частиною рівняння (4.89) є додатним,  $u_0$ -додатним, псевдоувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.90)) та гетеротонним з су-

провідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11):

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds. \quad (4.92)$$

Оскільки  $f(u)$  не визначена при  $u = 0$ , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(x) = \alpha u_0(x)$ ,  $w^0(x) = \beta u_0(x)$ , а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначатимемо з системи нерівностей (2.124).

Для випадку крайової задачі (4.83) – (4.85) знаходимо

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \{ \lambda [\alpha u_0(s)]^p + \mu [\beta u_0(s)]^{-q} \} ds = \lambda \alpha^p \Psi(x) + \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \{ \lambda [\beta u_0(s)]^p + \mu [\alpha u_0(s)]^{-q} \} ds = \lambda \beta^p \Psi(x) + \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(x),$$

де функції  $\Psi(x)$  і  $\Theta(x)$  визначаються формулами (4.15) і (4.52) відповідно.

Тоді система (2.124) приймає вигляд

$$\alpha \leq \lambda \alpha^p \min_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) + \frac{\mu}{\beta^q} \min_{x \in [-1, 1]} \Theta(x), \quad \beta \geq \lambda \beta^p \max_{x \in [-1, 1]} \Psi(x) + \frac{\mu}{\alpha^q} \max_{x \in [-1, 1]} \Theta(x),$$

або

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q \leq \mu t_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q \geq \mu M_2, \quad (4.93)$$

де числа  $m_1$ ,  $M_1$ ,  $t_2$ ,  $M_2$  визначаються рівностями (4.17), (4.18), (4.54), (4.55) відповідно.

Максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.93), є розв'язками відповідної системи рівнянь

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q = \mu t_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q = \mu M_2. \quad (4.94)$$

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.11.* Крайова задача (4.83) – (4.85) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) \{ \lambda [v^{(k)}(s)]^p + \mu [w^{(k)}(s)]^{-q} \} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.95)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) \{ \lambda [w^{(k)}(s)]^p + \mu [v^{(k)}(s)]^{-q} \} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.96)$$

з початкового наближення (4.20), де функція Гріна  $G(x, s)$  визначається рівністю (4.8), а числа  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) є розв'язком системи (4.94).

З теореми 4.11 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.83) – (4.85) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{\alpha}{2}(1 - x^2) \leq u^*(x) \leq \frac{\beta}{2}(1 - x^2).$$

Для задачі (4.83) – (4.85) обчислювальний експеримент було проведено при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . В таблиці Г.49 наведено дані про значення  $\alpha, \beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ . На рис. Г.57 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв'язку задачі (4.83) – (4.85) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  наведено на рис. Г.58, а в таблиці Г.50 наведено значення цих функцій на сітці  $x_i = 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.51 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.83) – (4.85) для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на тій же сітці (значення у точках  $x_i = -0,1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Для випадку крайової задачі (4.86) – (4.88)

$$h_1(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \{ \lambda [\alpha u_0(s)]^p + \mu [\beta u_0(s)]^{-q} \} ds = \lambda \alpha^p \Psi(x) + \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(x),$$

$$h_2(x; \alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{u_0(x)} \{ \lambda [\beta u_0(s)]^p + \mu [\alpha u_0(s)]^{-q} \} ds = \lambda \beta^p \Psi(x) + \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(x),$$

де функції  $\Psi(x)$  і  $\Theta(x)$  визначаються формулами (4.21) і (4.52) відповідно.

Система (2.124) тоді зводиться до вигляду (4.93), де числа  $m_1$ ,  $M_1$ ,  $m_2$ ,  $M_2$  визначаються рівностями (4.23), (4.62) відповідно. Максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.93), є розв'язками відповідної системи рівнянь (4.94).

*Теорема 4.12.* Крайова задача (4.86) – (4.88) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний на  $[-1, 1]$  додатний розв'язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (4.95), (4.96) з початкового наближення (4.20), де функція Гріна визначається рівністю (4.9), а числа  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) є розв'язком системи (4.94).

З теореми 4.12 випливає, що розв'язок крайової задачі (4.86) – (4.88) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $x \in [-1, 1]$

$$\frac{\alpha}{2}(1 - x^2) \leq u^*(x) \leq \frac{\beta}{2}(1 - x^2).$$

Обчислювальний експеримент для задачі (4.86) – (4.88) було проведено при  $\kappa = 1$  і значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . В таблиці Г.52 наведено дані про значення  $\alpha, \beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв'язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} u^{(N)}(x)$ , а на рис. Г.59 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . На рис. Г.60 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до

розв'язку задачі (4.86) – (4.88) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , а в таблиці Г.53 наведено значення цих функцій на сітці  $x_i = 0,1i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . В таблиці Г.54 наведено значення наближеного розв'язку задачі (4.4) – (4.6) на тій же сітці для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  (значення у точках  $x_i = -0,1i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , симетричні).

Розглянемо тепер дві задачі для рівнянь з частинними похідними:

$$-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.97)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.98)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.99)$$

і

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.100)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.101)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.102)$$

Еквівалентне розглядуваним задачам інтегральне рівняння Гаммерштейна матиме вигляд

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda u^p(\mathbf{s}) + \mu u^{-q}(\mathbf{s})] ds, \quad (4.103)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна, відповідна області  $\Omega$  і задачі (4.97) – (4.99) чи (4.100) – (4.102).

Для функції  $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$  обираємо  $\hat{f}(v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$  і тоді умова  $u_0$ -псевдоувігнутості має вигляд (2.12), що призводить до умови (4.90) для параметрів  $p$  і  $q$  ( $\lambda, \mu > 0$  – довільні). Функція  $u_0(\mathbf{x})$  задається рівністю (2.69).

Тоді з результатів п. 2.2 випливає, що оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda u^p(\mathbf{s}) + \mu u^{-q}(\mathbf{s})] ds, \quad (4.104)$$

породжений правою частиною рівняння (4.103) є додатним,  $u_0$ -додатним, псевдоувігнутим,  $u_0$ -псевдоувігнутим (за умови (4.90)) та гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (2.11):

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda v^p(\mathbf{s}) + \mu w^{-q}(\mathbf{s})] ds. \quad (4.105)$$

Значення  $f(0)$  не існує і функція  $u_0(\mathbf{x})$  не виражається через елементарні функції. Тоді кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ , де елементарна функція  $\omega(\mathbf{x})$ , побудована за допомогою методу  $R$ -функцій, така, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ ;

а сталі  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) визначаються з системи нерівностей (2.125).

Для випадку крайових задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102)

$$h_1(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \{ \lambda [\alpha\omega(\mathbf{s})]^p + \mu [\beta\omega(\mathbf{s})]^{-q} \} ds = \lambda\alpha^p \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{\beta^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

$$h_2(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \mu \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \{ \lambda [\beta\omega(\mathbf{s})]^p + \mu [\alpha\omega(\mathbf{s})]^{-q} \} ds = \lambda\beta^p \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{\alpha^q} \Theta(\mathbf{x}),$$

де функції  $\Psi(\mathbf{x})$  і  $\Theta(\mathbf{x})$  визначаються рівностями (4.33) і (4.73).

Тоді система (2.125) зводиться до вигляду (4.93), де числа  $m_1$ ,  $M_1$ ,  $m_2$ ,  $M_2$  визначаються рівностями (4.35), (4.75) відповідно. Максимальне значення  $\alpha$  і мінімальне значення  $\beta$ , які задовольняють системі нерівностей (4.93), є розв'язками відповідної системи рівнянь (4.94).

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

*Теорема 4.13.* Кожна з крайових задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  має єдиний неперервний у  $\bar{\Omega}$  додатний розв'язок  $u^*(\mathbf{x})$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.106)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \mu \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.107)$$

з початкового наближення

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha \omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta \omega(\mathbf{x}), \quad (4.108)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна відповідної крайової задачі, а числа  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) є розв’язком системи (4.94).

З теореми 4.13 випливає, що розв’язок кожної з крайових задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102) для всіх  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  апіорно оцінюється такими нерівностями: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \omega(\mathbf{x}) \leq u^*(\mathbf{x}) \leq \beta \omega(\mathbf{x}).$$

Для задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному крузі, обчислювальний експеримент було проведено для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . В таблиці Г.55 наведено дані про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв’язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.61 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв’язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Усі наближені розв’язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.62 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв’язку задачі (4.97) – (4.99) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.56 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.63 та Г.64 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв’язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.97) – (4.99) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.57 наведено значення наближеного розв’язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на тій же сітці.

Обчислювальний експеримент також було проведено для розглядуваної у



одиничному крузі задачі (4.100) – (4.102) при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ), ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таблиця Г.58 містить значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв’язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.65 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв’язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Усі наближені розв’язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.66 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв’язку задачі (4.100) – (4.102) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ , а в таблиці Г.59 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0) = (0,1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.67 та Г.68 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв’язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.100) – (4.102) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.60 наведено значення наближеного розв’язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на тій же сітці.

Для задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничній кулі, обчислювальний експеримент було проведено при значеннях  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Інформацію про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норму наближеного розв’язку  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u^{(N)}(\mathbf{x})$  наведено в таблиці Г.61. На рис. Г.69 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв’язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Усі наближені розв’язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.70 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 12$ , до розв’язку задачі (4.97) – (4.99) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.62 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0,1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.71 наведено поверхні рівня наближеного розв’язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.97) – (4.99) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.63 наведено значення наближеного розв’язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ,  $q = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на тій же сітці.

Також обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4.100) – (4.102),

що розглядається у одиничній кулі, при  $\kappa = 1$  і значеннях  $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$ ,  $q = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , ітерації проводилися до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Таблиця Г.64 містить інформацію про значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  та норми наближених розв'язків  $\|u^{(N)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u^{(N)}(\mathbf{x})$ . На рис. Г.72 наведено лінії рівня залежності норми наближеного розв'язку від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Усі наближені розв'язки мають радіальну симетрію. На рис. Г.73 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень,  $k = 0, 1, \dots, 11$ , до розв'язку задачі (4.100) – (4.102) при  $p = 0, 5$ ,  $q = 0, 5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , а в таблиці Г.65 наведено значення цих функцій у точках з координатами  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ . На рис. Г.74 наведено поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.100) – (4.102) при  $p = 0, 5$ ,  $q = 0, 5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . В таблиці Г.66 наведено значення наближеного розв'язку розглядуваної задачі для значень  $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$ ,  $q = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на тій же сітці.

Як бачимо з наведених результатів, збіжність ітераційних процесів для одно-, дво- та тривимірних задач уповільнюється як з наближенням  $p$ , так і з наближенням  $q$  до одиниці.

Порівняємо результати, отримані методом двобічних наближень, заснованому на використанні функції Гріна, з результатами роботи методу квазіфункцій Гріна-Рвачова побудови двобічних наближень для задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102) при  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у областях з табл. 4.1 (для круга та кулі квазіфункція Гріна-Рвачова для задачі (4.97) – (4.99) співпадає з точною функцією Гріна, тому для цієї задачі проведемо порівняння тільки для півкруга, квадрата та куба).

Ітераційні формули методу двобічних наближень для задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102) на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова мають вигляд:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\{\lambda[v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu[w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q}\}ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.109)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\{\lambda[v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu[w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q}\}d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.110)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x}). \quad (4.111)$$

У формулах (4.109), (4.110) для задачі (4.97) – (4.99) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.23), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.24), для задачі (4.100) – (4.102) квазіфункція Гріна-Рвачова  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд (3.25), у випадку  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – вигляд (3.26), а функції  $\omega(\mathbf{x})$  наведені в табл. 4.1. Сталі  $\alpha$  і  $\beta$  у початковому наближенні (4.111) визначаються на підставі нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda\alpha^p \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^p(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \mu\beta^{-q} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^{-q}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \geq \alpha\omega(\mathbf{x}), \\ \beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda\beta^p \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^p(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \mu\alpha^{-q} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega^{-q}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \leq \beta\omega(\mathbf{x}).$$

Таблиця 4.6 містить порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.97) – (4.99), а таблиця 4.7 містить аналогічне порівняння для задачі (4.100) – (4.102). Тут  $u_G$  – розв’язок відповідної крайової задачі, отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, а  $u_Q$  – розв’язок, отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова,  $N_G$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.106), (4.107), а  $N_Q$  – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (4.109), (4.110) до досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Як бачимо з таблиць 4.6 і 4.7, результати, отримані обома методами двобічних наближень, добре узгоджені між собою і дозволяють знайти розв’язок поставленої задачі із заданою точністю. Але все ж таки, на нашу думку, перевагу

слід віддати методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, оскільки при її обчислювальній реалізації всі вирази у розрахункових формул враховуються точно на відміну від методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна, де функція Гріна (за умови, що вона відома) при обчисленнях замінюється частковою сумою відповідного ряду Фур'є.

Таблиця 4.6 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.97) – (4.99)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна похибка $\ u_G - u_Q\ $	Відносна похибка $\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний квадрат	11	0,2202	28	0,2194	$0,97 \cdot 10^{-3}$	0,44%
Половина одиничного круга	10	0,2582	17	0,2533	$0,94 \cdot 10^{-2}$	3,64%
Одиничний куб	11	0,1575	29	0,1651	$0,76 \cdot 10^{-2}$	4,60%

Таблиця 4.7 – Порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна-Рвачова для задачі (4.100) – (4.102)

Область $\Omega$	$N_G$	$\ u_G\ $	$N_Q$	$\ u_Q\ $	Абсолютна похибка $\ u_G - u_Q\ $	Відносна похибка $\frac{\ u_G - u_Q\ }{\ u_Q\ } \cdot 100\%$
Одиничний круг	12	0,4853	14	0,4857	$0,52 \cdot 10^{-3}$	0,11%
Одиничний квадрат	11	0,1901	25	0,1903	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,15%
Половина одиничного круга	10	0,2582	17	0,2533	$0,94 \cdot 10^{-2}$	3,64%
Одинична куля	12	0,3194	12	0,3217	$0,74 \cdot 10^{-2}$	2,30%
Одиничний куб	11	0,1512	28	0,1595	$0,83 \cdot 10^{-2}$	5,20%

У таблицях Г.67 – Г.72 наведено значення наближених розв'язків задач (4.97) – (4.99) і (4.100) – (4.102) у деяких точках відповідних областей (наведено значення однієї з симетричних частин розв'язків), а на рис. Г.75 – Г.84 наведено їх поверхні та лінії рівня (для двовимірних задач) і поверхні рівня (для тривимірних задач).

## Висновки за розділом 4

1. Розглянуті перші крайові задачі для напівлінійних звичайного диференціального рівняння та дво- і тривимірного еліптичного рівнянь з операторами Лапласа і Гельмгольца та різними типами степеневих нелінійностей (ізотонною, антитонною та гетеротонною) зведено до інтегральних рівнянь, що дозволило провести їх аналіз методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах.

2. Для крайових задач з різними типами нелінійностей (ізотонною  $f(u) = \lambda u^p$ , антитонною  $f(u) = \mu u^{-q}$  та гетеротонною  $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ ) застосування розроблених у другому розділі методів двобічних наближень дозволило встановити умови існування єдиного додатного розв'язку, двобічної збіжності до нього послідовних наближень і у випадку відрізка, круга та шару отримати апріорні оцінки невідомого розв'язку. Проведені для відрізка, круга та шару обчислювальні експерименти дозволили чисельно дослідити швидкість збіжності послідовних наближень та залежність розв'язку від параметрів, що входять до правої частини рівняння задач для кожного з типів нелінійностей.

3. Для розглядуваних у одиничному квадраті, половині одиничного круга і одиничному кубі еліптичних задач з оператором Лапласа та розглядуваних у одиничному крузі, одиничному квадраті, половині одиничного круга, одиничній кулі і одиничному кубі еліптичних задач з оператором Гельмгольца проведено порівняння роботи методів двобічних наближень, заснованих на використанні функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова. Проведені дослідження показали, що при використанні квазіфункції збіжність послідовних наближень уповільнюється, але беззаперечною перевагою є скінченність виразів, що визначають квазіфункцію Гріна-Рвачова на відміну від функції Гріна, а отже, і більша точність методу.

Основні результати четвертого розділу опубліковані у роботах [51, 52, 54, 56, 57, 59, 61].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [51, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 131].

**5 ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ  
ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ  
РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА  
ТА КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА**

5.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання функції Гріна

Розглянемо однорідну задачу Діріхле для системи  $n$  напівлінійних еліптичних рівнянь:

$$-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$u_i(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.2)$$

$$u_i|_{\partial\Omega} = 0, i = 1, \dots, n, \quad (5.3)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Вважатимемо, що для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$

$$p_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ у } \bar{\Omega}, q_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ у } \bar{\Omega}, \quad (5.4)$$

$p_i(\mathbf{x})$  неперервно диференційовні у  $\bar{\Omega}$ ,  $q_i(\mathbf{x})$  неперервні у  $\bar{\Omega}$ ,

$f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$  неперервні і додатні при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $u_1, \dots, u_n > 0$ . (5.5)

У векторній формі задача (5.1) – (5.3) запишеться у вигляді

$$-\operatorname{div}(\mathbf{p}(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{q}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{u} > \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\theta}.$$

Тут  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_1(\mathbf{x}), \dots, q_n(\mathbf{x}))$ ,  
 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (0, \dots, 0)$ .

Нерівність  $\mathbf{u} > \boldsymbol{\theta}$  та подібні до них нерівності розумітимемо у тому сенсі, що  $u_i > 0$  для всіх  $i = 1, \dots, n$ .

Задача (5.1) – (5.3) є математичною моделлю багатьох стаціонарних процесів, що розглядаються у хімічній кінетиці, біології, теорії горіння тощо [101, 126, 141, 158].

Від задачі (5.1) – (5.3) перейдемо до еквівалентної системи з  $n$  інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.6)$$

де  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $A_i u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u) + q_i(\mathbf{x})u$  у області  $\Omega$ ;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Функцією Гріна задачі (5.1) – (5.3) вважатимемо вектор-функцію

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \dots, G_n(\mathbf{x}, \mathbf{s})),$$

яка складається з функцій Гріна першої крайової задачі для операторів  $A_i u$ ,  $i = 1, \dots, n$ , у області  $\Omega$ .

У векторній формі запису система (5.6) запишеться у вигляді

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

де  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_1(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})), \dots, G_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_n(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})))$ .

Систему рівнянь (5.6) розглядатимемо у банаховому просторі  $C_n(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in C(\bar{\Omega}), i = 1, \dots, n\}$  вектор-функцій, неперервних

у  $\bar{\Omega}$ , з нормою  $\|\mathbf{u}\|_n = \max\{\|u_1\|, \dots, \|u_n\|\}$ , де  $\|u_i\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u_i(\mathbf{x})|$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Виділимо у  $C_n(\bar{\Omega})$  конус  $\mathcal{K}_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in C_n(\bar{\Omega}) : u_i(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, i = 1, \dots, n\}$  вектор-функцій з невід'ємними координатами. Зазначимо, що конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C_n(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим).

За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C_n(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_n(\bar{\Omega}) \quad \mathbf{u} \leq \mathbf{v}, \text{ якщо } \mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v}, \text{ якщо } u_i(\mathbf{x}) \leq v_i(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \text{ і всіх } i = 1, \dots, n.$$

Якщо існує класичний розв'язок задачі (5.1) – (5.3), тобто така вектор-функція  $\mathbf{u}^* \in C_n^2(\Omega) \cap C_n(\bar{\Omega})$ , яка задовольняє систему рівнянь (5.1) і умови (5.2), (5.3), то ця ж функція також задовольняє і систему рівнянь (5.6). Якщо ж класичний розв'язок не існує, то систему інтегральних рівнянь (5.6) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (5.1) – (5.3).

*Означення 5.1.* Розв'язком (узагальненим) задачі (5.1) – (5.3) називатимемо вектор-функцію  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (5.6).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $\mathbf{T}$ , який діє у  $C_n(\bar{\Omega})$  за правилом, що визначається правою частиною системи рівнянь (5.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \\ &= \left( \int_{\Omega} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_1(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \dots, \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_n(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Використовуючи результати, отримані у п. 2.2, з'ясуємо, які властивості має



оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7). Позначимо через  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , частковий оператор

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})) ds. \quad (5.8)$$

Кожна з функцій Гріна  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , неперервна при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ , і справджуються оцінки [71]

$$0 \leq G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right| \text{ у } \mathbb{R}^2,$$

$$0 \leq G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \frac{k_0}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \text{ у } \mathbb{R}^3,$$

де  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$  – відстань між точками  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{s}$ .

Тоді, з урахуванням умови (5.5), можна зробити такий висновок: кожен з операторів  $T_i$  вигляду (5.8) діє з  $C_n(\bar{\Omega})$  в  $C(\bar{\Omega})$  і, якщо  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}_+$ , то  $T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \geq 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а отже, оператор  $\mathbf{T}$  діє у  $C_n(\bar{\Omega})$  і  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) \in \mathcal{K}_+$ , тобто оператор  $\mathbf{T}$  є додатним, бо залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ .

Введемо до розгляду вектор-функцію  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  за формулою

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (u_0^1(\mathbf{x}), \dots, u_0^n(\mathbf{x})) = \left( \int_{\Omega} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \dots, \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \right). \quad (5.9)$$

Зазначимо, що вектор-функція  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  є розв'язком задачі

$$-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x}) \nabla u_i) + q_i(\mathbf{x}) u_i = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

З огляду на результати п. 2.2 (формула (2.70)) можна зробити висновок, що для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  значення кожного з операторів (5.8) оцінюється нерівністю

$$\alpha_i u_0^i(\mathbf{x}) \leq T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \leq \beta_i u_0^i(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

де  $\alpha_i = \alpha_0^i \gamma_i > 0$ ,  $\beta_i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} f_i(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})) > 0$ .

Тут  $\alpha_0^i > 0$  таке, що існує множина  $\Omega_0^i \subset \Omega$  така, що  $\mu(\Omega_0^i) > 0$  і  $f_i(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})) \geq \alpha_0^i$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega_0^i$ , а  $\gamma_i > 0$  таке, що

$$\gamma_i \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \int_{\Omega_0^i} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Тоді для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  матиме місце подвійна нерівність

$$\alpha \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) ds \leq \beta \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (5.11)$$

де  $\alpha = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} > 0$ ,  $\beta = \max\{\beta_1, \dots, \beta_n\} > 0$ .

Нерівність (5.11) і означає, що оператор  $\mathbf{T} \in \mathbf{u}_0$ -додатним.

Припустимо, що вектор-функція  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  дозволяє діагональне подання  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \dots, \hat{f}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}))$ , де неперервні за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  функції  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$  монотонно зростають за всіма  $v_i$  і монотонно спадають за всіма  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) ds = \\ &= \left( \int_{\Omega} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_1(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) ds, \dots, \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_n(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) ds \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Очевидно, що оператори  $\mathbf{T}$  і  $\hat{\mathbf{T}}$  є цілком неперервними.

Позначимо також через  $\hat{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , оператори

$$\begin{aligned}\hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) ds.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Зрозуміло, що оператор  $T_i$  вигляду (5.8) буде гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}_i$  вигляду (5.13).

Нехай для всіх додатних чисел  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  і будь-якого  $\tau \in (0, 1)$  виконуються нерівності

$$\hat{f}_i\left(\mathbf{x}, \tau \mathbf{v}, \frac{1}{\tau} \mathbf{w}\right) > \tau \hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.14)$$

Доведемо, що за виконання умов (5.14) гетеротонний оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) є супровідним, буде псевдоувігнутиим і навіть  $\mathbf{u}_0$ -псевдоувігнутиим з вектор-функцією  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  вигляду (5.9).

Позначимо через  $\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  множину вектор-функцій  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  таких, для яких існують числа  $\alpha, \beta > 0$  такі, що  $\alpha \mathbf{u}_0 \leq \mathbf{u} \leq \beta \mathbf{u}_0$ , тобто  $\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  складається з тих вектор-функцій  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , в яких  $u_i \in K(u_0^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Для будь-яких  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ , з нерівності (5.11) випливає, що

$$\alpha \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) ds \leq \beta \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

де  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Отже,  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  для будь-яких  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$ .

Далі, з леми 2.2 та її доведення випливає, що за виконання умов (5.14) для

будь-яких  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  і для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  має місце нерівність

$$\begin{aligned} \hat{T}_i\left(\tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i\left(\mathbf{s}, \tau\mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} > \\ &> \tau \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \tau \hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а отже, для будь-яких  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  і для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  матиме місце і нерівність

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}\left(\tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}\left(\mathbf{s}, \tau\mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} > \\ &> \tau \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \tau \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

яка і означає псевдоувігнутість оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) є супровідним.

Крім того, для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  і  $\tau \in (0, 1)$  матиме місце нерівність

$$\begin{aligned} \hat{T}_i\left(\tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i\left(\mathbf{s}, \tau\mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \\ &\geq \tau(1 + \eta_i) \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \tau(1 + \eta_i) \hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

де  $\eta_i = \eta_i(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \tau) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Тоді для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  і  $\tau \in (0, 1)$  матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\left(\tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}\left(\mathbf{s}, \tau\mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s} \geq \\ &\geq \tau(1 + \eta) \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \tau(1 + \eta) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

де  $\eta = \min\{\eta_1, \dots, \eta_n\} > 0$ .

Отже, оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) є  $\mathbf{u}_0$ -псевдоувігнутим оператором.

Таким чином, має місце таке твердження.

*Лема 5.1.* Оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7), де  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна задачі (5.1) – (5.3), що розглядається у просторі  $C_n(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є  $\mathbf{u}_0$ -додатним оператором, де вектор-функція  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  визначається рівністю (5.9);

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) є супровідним, якщо вектор-функція  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  дозволяє діагональне подання  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \dots, \hat{f}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}))$ , де неперервні за сукупністю змінних  $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  функції  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$  монотонно зростають за всіма  $v_i$  і монотонно спадають за всіма  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

г) якщо виконуються нерівності (5.14), є псевдоувігнутим і навіть  $\mathbf{u}_0$ -псевдоувігнутим оператором, де функція  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  має вигляд (5.9).

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв’язку системи інтегральних рівнянь (5.6) (а отже, і крайової задачі (5.1) – (5.3)), вважаючи, що оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) є гетеротонним з супровідним оператором вигляду (5.12).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ ,  $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$ ,  $\mathbf{w}^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)$ , умовами (1.34), які для оператора  $\hat{\mathbf{T}}$ , що визначається рівністю (5.7), набувають такого вигляду: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^0(\mathbf{s}), \dots, v_n^0(\mathbf{s}), w_1^0(\mathbf{s}), \dots, w_n^0(\mathbf{s})) ds \geq v_i^0(\mathbf{x}), \quad (5.15)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^0(\mathbf{s}), \dots, w_n^0(\mathbf{s}), v_1^0(\mathbf{s}), \dots, v_n^0(\mathbf{s})) ds \leq w_i^0(\mathbf{x}), \quad (5.16)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою (1.36)

$$v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (5.17)$$

$$w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (5.18)$$

$$i = 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = v_i^0(\mathbf{x}), w_i^{(0)}(\mathbf{x}) = w_i^0(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n. \quad (5.19)$$

З (5.17), (5.18) випливає, оскільки  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то функції  $v_i^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w_i^{(k)}(\mathbf{x})$  задовольняють однорідні крайові умови:  $v_i^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $w_i^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, \dots, n$ , навіть, якщо ці умови не задовольняють всі або деякі початкові наближення (5.19).

З сильної інваріантності конусного відрізка  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  та гетеротонності оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) є супровідним, випливає, що послідовність  $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Тоді з огляду на нормальність конуса  $\mathcal{K}_+$  і повну неперервність оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  можна зробити висновок про існування границь  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

При цьому можливі два випадки:  $\mathbf{v}^* < \mathbf{w}^*$  і  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ . У другому випадку  $\mathbf{u}^* := \mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $\mathbf{T}$ , а отже,  $\mathbf{u}^*$  – єдиний на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язок розглядуваної крайової задачі (5.1) – (5.3).

Вектор-функції  $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  і  $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$  є розв'язком системи рівнянь (1.35), яка у розглядуваному випадку призводить до системи  $2n$  нелінійних інтегральних рівнянь

$$v_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.20)$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}), v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.21)$$

Рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  буде виконана, якщо система (5.20), (5.21) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ .

Отже, має місце така теорема.

*Теорема 5.1.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) і система рівнянь (5.20), (5.21) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ . Тоді ітераційний процес (5.17) – (5.19) збігається у нормі простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} &\leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{u}^* \leq \\ &\leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

З ланцюга нерівностей (5.22) бачимо, що кожен з конусних відрізків  $\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , є сильно інваріантним конусним відрізком для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12).

Теорема 5.1 може бути уточнена за рахунок використання різних умов, за виконання яких система рівнянь (5.20), (5.21) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ .

Розглянемо спочатку умову (1.38). Нехай існує такий номер  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$ , що для будь-яких чисел  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n$ , таких, що  $0 < v_i < w_i, 0 < u_i < w_i, i = 1, \dots, n$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n, w_1 - u_1, \dots, w_n - u_n) <$$

$$\langle \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) + u_{i_0} M_{i_0}^{-1}, \quad (5.23)$$

де  $M_{i_0} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_{i_0}(\mathbf{x})$ .

Візьмемо вектор-функції  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  і  $\mathbf{w} - \mathbf{v} = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n)$  з  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$  такі, що

$$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle. \quad (5.24)$$

З умов (5.24) випливає, що  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq \theta$  на  $\bar{\Omega}$  і  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \theta$ . Тоді, якщо функція  $u_{i_0}(\mathbf{x})$  набуває максимального значення у точці  $\mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Отже, матимемо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G_{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1(\mathbf{s}) + u_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}) + u_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}) - u_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}) - u_n(\mathbf{s})) ds < \\ & < \int_{\Omega} G_{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) [\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) + u_{i_0}(\mathbf{s}) M_{i_0}^{-1}] ds \leq \\ & \leq \int_{\Omega} G_{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) ds + \\ & \quad + M_{i_0}^{-1} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_{i_0}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} G_{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) ds \leq \\ & \leq \int_{\Omega} G_{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) ds + u_{i_0}(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

тобто

$$\hat{T}_{i_0}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})(\mathbf{x}_0) < \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}_0) + u_{i_0}(\mathbf{x}_0),$$

і не може бути виконана нерівність  $\hat{T}_{i_0}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geq \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + u_{i_0}$ , а тим більше не виконується нерівність  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geq \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{u}$ . Отже, має місце умова (1.38) і справджується така теорема.

*Теорема 5.2.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  ви-



гляду (5.12) і має місце умова (5.23). Тоді ітераційний процес (5.17) – (5.19) двобічно збігається у нормі простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3).

Рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  також забезпечить умова (1.39). Нехай функції  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для всіх чисел  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  таких, що  $0 < v_i, w_i < M_0^i$ , де  $M_0^i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w_i^0(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n) \right| \leq \\ \leq L_i \max\{|v_1 - w_1|, \dots, |v_n - w_n|\}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

де  $L_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right\|_n &= \left\| \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}) - \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}) \right\|_n = \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [\hat{T}_i(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})(\mathbf{x}) - \hat{T}_i(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)})(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{s}), \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{s})) - \hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{s}), \mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{s}))] ds \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \left[ L_i \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \right] \cdot \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \{L_i M_i\} \cdot \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)} \right\|_n, \end{aligned}$$

де  $M_i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ .

Звідси матимемо, що

$$\left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right\|_n \leq \gamma^{k+1} \left\| \mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{v}^{(0)} \right\|_n,$$

де  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{L_i M_i\}$ .

Отже, рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{L_i M_i\} < 1$ , і тоді справджується наступна теорема.

*Теорема 5.3.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) і має місце умова (5.25), причому  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{L_i M_i\} < 1$ , де  $M_i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^i(\mathbf{x})$ . Тоді ітераційний процес (5.17) – (5.19) двобічно збігається у нормі простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв’язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3).

І нарешті, ще однією умовою того, що система рівнянь (5.20), (5.21) не має на сильно інваріантному конусному відрізку  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв’язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ , є умова  $\mathbf{u}_0$ -псевдоувігнутості гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12). Тоді з огляду на твердження г) леми 5.1 приходимо до такого результату.

*Теорема 5.4.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle \subset \mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.7) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.12) і має місце умова (5.14). Тоді ітераційний процес (5.17) – (5.19) двобічно збігається у нормі простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв’язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3).

Якщо деякі з функцій  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , монотонно спадають чи монотонно зростають за якимось зі змінних  $u_1, \dots, u_n$ , то залишаються в силі усі зроблені у розділі 2 зауваження щодо вибору функцій  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  та супровідного оператора  $\hat{\mathbf{T}}$ .

На  $k$ -й ітерації за наближений розв’язок крайової задачі (5.1) – (5.3) приймаємо вектор-функцію

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})). \quad (5.26)$$

З огляду на ланцюг нерівностей (5.22) ми матимемо оцінку похибки для

наближеного розв'язку (5.26):

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_n \leq \frac{1}{2} \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})). \quad (5.27)$$

Наявність зручної апостеріорної оцінки вигляду (5.27) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$ .

Крім того, за умов теореми 5.3 можна записати і апіорну оцінку похибки:

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_n \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x})). \quad (5.27)$$

Тоді з нерівності

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_n \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\max_{i=1, \dots, n} \{L_i M_i\}}} \right\rceil + 1 \quad (5.28)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , який виділяється умовами (5.15), (5.16), є апіорною оцінкою невідомого точного розв'язку  $\mathbf{u}^*$ . Для його побудови можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 2.3.

Оскільки шуканий розв'язок  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  задовольняє умову (5.3) і вектор-функція  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  теж набуває на  $\partial\Omega$  нульові значення, то сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  можна було б шукати у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}_0 \rangle$ , де  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $0 < \alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Але, навіть, коли вираз для функції Гріна відомий, вектор-функція  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  не виражатиметься у елементарних функціях, тому цей підхід до пошуку сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  виявляється невдалим. Тоді можна скористатися якоюсь апроксимацією вектор-функції  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ , виконаною за допомогою конструктивного апарату теорії методу  $R$ -функцій (див. п. 2.3). Нехай межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається зі скінченної кількості кусків ліній  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , де кожна  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – елементарна функція. Тоді можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(\mathbf{x})$  таку, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Отже, сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  при реалізації методу двобічних наближень розв'язання задачі (5.1) – (5.3) можна шукати у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{x}), \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{x}) \rangle$ , де  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $0 < \alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Умови (5.15), (5.16) призводять до системи нерівностей

$$\int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \alpha_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \alpha_n\omega(\mathbf{s}), \beta_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \beta_n\omega(\mathbf{s})) ds \geq \alpha_i\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \beta_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \beta_n\omega(\mathbf{s}), \alpha_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \alpha_n\omega(\mathbf{s})) ds \leq \beta_i\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Аналогічно тому, як це було зроблено у п. 2.3, останню систему нерівностей можна привести до вигляду

$$\alpha_i \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \beta_i \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.29)$$

де

$$h_1^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Omega} \frac{G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{s}), \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{s})) ds,$$

$$h_2^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Omega} \frac{G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{s}), \boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{s})) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для більш швидкої збіжності ітераційного процесу (5.17) – (5.19) величина  $\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \max_{i=1, \dots, n} (\beta_i - \alpha_i) \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x})$  має бути якомога меншою, а отже, при практичній реалізації ітерацій для кожного  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , слід взяти найбільше  $\alpha_i$  і найменше  $\beta_i$ , що задовольняють нерівності (5.29).

5.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Розроблений у п. 5.1 метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь має багато переваг (зокрема, проста обчислювальна схема, зручна апостеріорна оцінка похибки тощо), але його суттєвим недоліком є необхідність знати аналітичний вираз для функції Гріна, що можливо лише для обмеженої кількості еліптичних диференціальних операторів у невеликій кількості областей. Щоб подолати цей недолік розробимо метод двобічних наближень, який базується на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова, що була введена у п. 3.1.

Нехай  $Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – квазіфункція Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора  $A_i$ , що задається рівністю

$$A_i u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x}) \nabla u) + q_i(\mathbf{x}) u, \quad i = 1, \dots, n.$$

Областю визначення оператора  $A_i$  вважатимемо множину функцій  $D_{A_i}$ , яка складається з функцій  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  таких, що  $u|_{\partial\Omega} = 0$  і  $A_i u \in L_2(\Omega)$ .

Отже,

$$Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \quad i = 1, \dots, n,$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  у випадку  $\mathbb{R}^2$  і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  у випадку  $\mathbb{R}^3$ ;

$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – фундаментальний розв’язок рівняння  $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u) + q_i(\mathbf{x})u = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

$\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \tilde{g}_i(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційовна у  $\Omega \times \Omega$  функція така, що  $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Тоді відповідно до (3.14), замінюючи кожне з рівнянь системи (5.1) – (5.3) еквівалентним інтегральним рівнянням, отримаємо, що задача (5.1) – (5.3) еквівалентна системі  $n$  інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.30)$$

де позначено  $K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = A_{i,s}\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ;

$$A_{i,s}u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{s})\nabla u) + q_i(\mathbf{s})u.$$

Систему нелінійних інтегральних рівнянь (5.30) можна також подати у вигляді векторного рівняння Урисона

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (5.31)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) &= (P_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})), \dots, P_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))), \\ P_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})) &= K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_i(\mathbf{s}) + Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s})), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Якщо крайова задача (5.1) – (5.3) має класичний розв’язок, то він задово-

льняє також систему рівнянь (5.30). Якщо ж класичний розв'язок задачі не існує, то систему рівнянь (5.30) можна використати для введення поняття узагальненого розв'язку крайової задачі (5.1) – (5.3).

Систему рівнянь (5.30) розглядатимемо у банаховому просторі  $C_n(\bar{\Omega})$ , напівопорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  (див. п. 5.1).

*Означення 5.2.* Розв'язком (узагальненим) задачі (5.1) – (5.3) називатимемо вектор-функцію  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$ , яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (5.30).

Побудуємо процес двобічних наближень знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь (5.30) (а отже, і розв'язку крайової задачі (5.1) – (5.3)).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $\mathbf{T}$ , що діє у  $C_n(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (5.30) (чи (5.31))

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s}))d\mathbf{s} = (T_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}), \dots, T_n(\mathbf{u})(\mathbf{x})), \quad (5.32)$$

де

$$\begin{aligned} T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} P_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} = \\ &= \int_{\Omega} K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) можна подати у вигляді суми лінійного інтегрального оператора  $\mathbf{T}_1$ , що діє у  $C_n(\bar{\Omega})$  за правилом

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} K^1(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_1(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \dots, \int_{\Omega} K^n(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_n(\mathbf{s})d\mathbf{s} \right),$$

і нелінійного оператора Гаммерштейна  $\mathbf{T}_2$ , що діє у  $C_n(\bar{\Omega})$  за правилом

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} Q^1(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_1(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \dots, \int_{\Omega} Q^n(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_n(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \right).$$

Завдяки умовам (5.5) та додатності кожної з квазіфункцій Гріна-Рвачова  $Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ),  $i = 1, \dots, n$ , можна стверджувати, що оператор  $\mathbf{T}_2$  є додатним оператором, бо він залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ , але через те, що не має впевненості у знаку функцій  $K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ),  $i = 1, \dots, n$ , питання про додатність оператора  $\mathbf{T}_1$  є відкритим. Отже, ми не можемо стверджувати, що оператор  $\mathbf{T}$  є додатним. Проте ж оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) можна подати у вигляді різниці додатних операторів.

Для кожного  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , позначимо

$$K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Зрозуміло, що  $K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$  і  $K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$  при  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ ),  $i = 1, \dots, n$ .

Тоді

$$K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$|K^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})| = K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \quad i = 1, \dots, n,$$

і оператори  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вигляду (5.33) запишуться у вигляді

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), \dots, u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (5.34)$$

Нехай вектор-функція  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  дозволяє діагональне подання  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \dots, \hat{f}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}))$ , причому неперервні за сукупністю змінних  $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  функції  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$  монотонно зростають за всіма  $v_i$  і монотонно спадають за всіма  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = (\hat{T}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \dots, \hat{T}_n(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x})), \quad (5.35)$$



де

$$\begin{aligned} \hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Зрозуміло, що оператори  $\mathbf{T}$  і  $\hat{\mathbf{T}}$  є цілком неперервними, а оператор  $T_i$  вигляду (5.34) буде гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}_i$  вигляду (5.36).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ ,  $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$ ,  $\mathbf{w}^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)$ , умовами (1.34), які для оператора  $\hat{\mathbf{T}}$ , що визначається рівністю (5.35), матимуть вигляд: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^0(\mathbf{s}), \dots, v_n^0(\mathbf{s}), w_1^0(\mathbf{s}), \dots, w_n^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v_i^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^0(\mathbf{s}), \dots, w_n^0(\mathbf{s}), v_1^0(\mathbf{s}), \dots, v_n^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w_i^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

За схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned} v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$i = 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = v_i^0(\mathbf{x}), w_i^{(0)}(\mathbf{x}) = w_i^0(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n. \quad (5.41)$$

Оскільки  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35) є супровідним, то можна зробити висновок, що послідовність  $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Тоді через нормальність конуса  $\mathcal{K}_+$  і повну неперервність оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  існують границі  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

При цьому можливими є два випадки:  $\mathbf{v}^* < \mathbf{w}^*$  і  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ . У другому випадку  $\mathbf{u}^* := \mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $\mathbf{T}$ , а отже,  $\mathbf{u}^*$  – єдиний на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язок крайової задачі (5.1) – (5.3).

Вектор-функції  $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  і  $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$  є розв'язком системи рівнянь (1.35), яка у розглядуваному випадку є системою з  $2n$  нелінійних інтегральних рівнянь вигляду

$$v_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, i = 1, \dots, n, \quad (5.42)$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$

$$+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}), v_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, i = 1, \dots, n. \quad (5.43)$$

Умовою виконання рівності  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  буде те, що система (5.42), (5.43) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  таких розв'язків, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ .

Отже, має місце така теорема.

*Теорема 5.5.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35) і система рівнянь (5.42), (5.43) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв’язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ . Тоді ітераційний процес (5.39) – (5.41) збігається за нормою простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв’язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} &\leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{u}^* \leq \\ &\leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Як бачимо, з ланцюга нерівностей (5.44) випливає, що кожен з конусних відрізків  $\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , є сильно інваріантним конусним відрізком для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35).

Уточнимо теорему 5.5 за рахунок використання умов, за виконання яких система рівнянь (5.42), (5.43) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв’язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ .

*Теорема 5.6.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35) і має місце умова: існує такий номер  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$ , що для будь-яких чисел  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n$ , таких, що  $0 < v_i < w_i$ ,  $0 < u_i < w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n, w_1 - u_1, \dots, w_1 - u_1) &< \\ &< \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) + \frac{u_{i_0}}{M_{i_0} + M_{i_0}^1}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

де

$$M_{i_0} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \quad M_{i_0}^1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds.$$

Тоді ітераційний процес (5.39) – (5.41) двобічно збігається за нормою

простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3).

*Доведення.* Нехай  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  і  $\mathbf{w} - \mathbf{v} = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n)$  – такі вектор-функції з  $\mathcal{K}_+ \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$ , що

$$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle. \quad (5.46)$$

Тоді з умов (5.46) витікає, що  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq \boldsymbol{\theta}$  на  $\bar{\Omega}$  і  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\theta}$ . Отже, якщо функція  $u_{i_0}(\mathbf{x})$  набуває максимального значення у точці  $\mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})(\mathbf{x}_0) = \\ & = \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[v_{i_0}(\mathbf{s}) + u_{i_0}(\mathbf{s})]d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[w_{i_0}(\mathbf{s}) - u_{i_0}(\mathbf{s})]d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1(\mathbf{s}) + u_1(\mathbf{s}), \dots, v_n(\mathbf{s}) + u_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}) - u_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}) - u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} < \\ & < \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})]u_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s})) + \frac{u_{i_0}(\mathbf{s})}{M_{i_0} + M_{i_0}^1} \right] d\mathbf{s} \leq \\ & \leq \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + \\ & + \frac{1}{M_{i_0} + M_{i_0}^1} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_{i_0}(\mathbf{x}) \left[ \int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})]d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})d\mathbf{s} \right] \leq \\ & \leq \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})v_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})w_{i_0}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \dots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \dots, w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + u_{i_0}(\mathbf{x}_0) = \\ & = \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}_0) + u_{i_0}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  не може бути виконана нерівність  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geq \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{u}$ , тобто має місце умова (1.38). Отже, система рівнянь (5.42), (5.43) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ , і справджуватиметься теорема 5.5. Теорема доведена.

Використаємо тепер умову (1.39), яка теж забезпечить рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ . Нехай для кожного  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , існує таке число  $L_i > 0$ , що функція  $\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$  для всіх чисел  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  таких, що  $0 < v_i, w_i < M_0^i$ , де  $M_0^i = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_i^0(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} & \left| \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n) \right| \leq \\ & \leq L_i \max\{|v_1 - w_1|, \dots, |v_n - w_n|\}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

Розглянемо різницю  $w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \hat{T}_i(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})(\mathbf{x}) - \hat{T}_i(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)})(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\Omega} [K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w_i^{(k)}(\mathbf{s}) - v_i^{(k)}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s})) - \\ &- \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Тоді з урахуванням нерівності (5.47) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right\|_n = \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x})] \leq \\ & \leq \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w_i^{(k)}(\mathbf{s}) - v_i^{(k)}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} + \right. \\ & \left. + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s})) - \right. \\ & \left. - \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \dots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))] ds \right\} \leq \\
& \leq \max_{i=1, \dots, n} \{M_1^i + L_i M_i\} \cdot \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})] = \\
& = \max_{i=1, \dots, n} \{M_i^1 + L_i M_i\} \|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\|_n,
\end{aligned}$$

де

$$M_i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \quad (5.48)$$

$$M_i^1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.49)$$

Звідси матимемо, що

$$\|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}\|_n \leq \gamma^{k+1} \|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{v}^{(0)}\|_n,$$

де  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{M_i^1 + L_i M_i\}$ .

Отже, рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{M_i^1 + L_i M_i\} < 1$ , і тоді справджується така теорема.

*Теорема 5.7.* Нехай  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35) і має місце умова (5.47), причому  $\gamma = \max_{i=1, \dots, n} \{M_i^1 + L_i M_i\} < 1$ , де сталі  $M_i$  і  $M_i^1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , визначаються рівностями (5.48) і (5.49) відповідно. Тоді ітераційний процес (3.34) – (3.36) двобічно збігається у нормі простору  $C_n(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (5.1) – (5.3).

Зауважимо, що не всі умови збіжності двобічного ітераційного процесу з п. 5.1 переносяться на випадок системи рівнянь (5.30). Оскільки для кожного  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , різниця

$$\begin{aligned} \hat{T}_i\left(\tau \mathbf{v}, \frac{1}{\tau} \mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_i(\mathbf{s}) ds + \\ &+ \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \hat{f}_i\left(\mathbf{s}, \tau \mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} \mathbf{w}(\mathbf{s})\right) - \tau \hat{f}_i(\mathbf{s}, \mathbf{v}(\mathbf{s}), \mathbf{w}(\mathbf{s})) \right] ds \end{aligned}$$

для близьких до нуля  $\tau$  може приймати як завгодно великі за модулем від'ємні значення незалежно від знаку виразу у квадратних дужках під другим інтегралом, то гетеротонний оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35) не буде навіть псевдоувігнутим.

Як і у методі двобічних наближень на основі використання функції Гріна, якщо виконано  $k$  ітерацій, то за наближений розв'язок крайової задачі (5.1) – (5.3) слід взяти вектор-функцію (5.26). Тоді для похибки наближеного розв'язку  $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$  ми матимемо апостеріорну оцінку вигляду (5.27).

Якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$ .

Якщо ж виконуються умови теореми 5.7, то матиме місце і апіорна оцінка похибки:

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_n \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x})),$$

з якої знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\max_{i=1, \dots, n} \{M_1^i + L_i M_i\}}} \right\rceil + 1 \quad (5.50)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , який виділяється умовами (5.37), (5.38), є апіорною оцінкою невідомого точного розв'язку  $\mathbf{u}^*$ . Для його побудови можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 3.3.

Оскільки шуканий розв'язок  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  задовольняє умову (5.3), то сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle = \langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$ , де  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $0 < \alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а побудована методом  $R$ -функцій функція  $\omega(\mathbf{x})$  така, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Умови (5.37), (5.38) призводять до системи нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha_i \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \beta_i \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, \alpha_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \alpha_n\omega(\mathbf{s}), \beta_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \beta_n\omega(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq \alpha_i\omega(\mathbf{x}), \quad (5.51)$$

$$\beta_i \int_{\Omega} K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \alpha_i \int_{\Omega} K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\omega(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, \beta_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \beta_n\omega(\mathbf{s}), \alpha_1\omega(\mathbf{s}), \dots, \alpha_n\omega(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq \beta_i\omega(\mathbf{x}), \quad (5.52)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Отже, якщо система нерівностей (5.51), (5.52) має такий розв'язок  $(\alpha, \beta)$ , де  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , що,  $0 < \alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то конусний відрізок  $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$  буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.32) з супровідним оператором  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (5.35).

Нарешті зауважимо, що для більш швидкої збіжності ітераційного процесу (5.39) – (5.41) величина  $\max_{i=1, \dots, n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \max_{i=1, \dots, n} (\beta_i - \alpha_i) \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x})$  має бути якомога меншою, а тому при практичній реалізації ітерацій для кожного  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , слід взяти найбільше  $\alpha_i$  і найменше  $\beta_i$ , що задовольняють нерівності (5.51), (5.52).



### 5.3 Результати обчислювальних експериментів для систем напівлінійних еліптичних рівнянь

#### 5.3.1 Розв'язання тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна

Побудову двобічних наближень до додатного розв'язку крайової задачі (5.1) – (5.3) на основі використання функції Гріна продемонструємо на системі двох рівнянь Лане-Емдена з однорідною умовою Діріхле:

$$-\Delta u_1 = u_2^{p_1}, \quad -\Delta u_2 = u_1^{-p_2} \text{ у } \Omega, \quad (5.53)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.54)$$

де  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ .

Питання існування та єдності розв'язку задачі (5.53), (5.54) у випадку, коли  $\Omega$  – куля радіуса  $R$ ,  $p_1 > 0$ ,  $p_2 < 0$  були досліджені у роботі [219].

Функції  $f_1(\mathbf{x}, u_1, u_2) = u_2^{p_1}$ ,  $f_2(\mathbf{x}, u_1, u_2) = u_1^{-p_2}$  додатні та неперервні за сукупністю змінних, якщо  $u_1, u_2 > 0$ , і дозволяють діагональне подання за допомогою функцій

$$\hat{f}_1(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = v_2^{p_1}, \quad \hat{f}_2(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = w_1^{-p_2}. \quad (5.55)$$

Задачу (5.53), (5.54) замінюємо еквівалентною системою інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2^{p_1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1^{-p_2}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (5.56)$$

З системою (5.56) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$\mathbf{T}(u_1, u_2) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2^{p_1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1^{-p_2}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right), \quad (5.57)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{p_1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{-p_2}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right).$$

Умова (5.14) для функцій (5.55) приводить до нерівностей

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 \left( \mathbf{x}, \tau v_1, \tau v_2, \frac{1}{\tau} w_1, \frac{1}{\tau} w_2 \right) &= (\tau v_2)^{p_1} > \tau \hat{f}_1(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = \tau v_2^{p_1}, \\ \hat{f}_2 \left( \mathbf{x}, \tau v_1, \tau v_2, \frac{1}{\tau} w_1, \frac{1}{\tau} w_2 \right) &= \left( \frac{1}{\tau} w_1 \right)^{-p_2} > \tau \hat{f}_2(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = \tau w_1^{-p_2}, \end{aligned}$$

звідки  $\tau^{p_1-1} > 1$ ,  $\tau^{p_2-1} > 1$ , тобто  $0 < p_1 < 1$ ,  $0 < p_2 < 1$ .

Для оператора (5.57) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , де

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) &= (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})) = (\alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \alpha_2 \omega(\mathbf{x})), \\ \mathbf{w}^0(\mathbf{x}) &= (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) = (\beta_1 \omega(\mathbf{x}), \beta_2 \omega(\mathbf{x})), \\ 0 &< \alpha_1 < \beta_1, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2, \end{aligned}$$

а функція  $\omega(\mathbf{x})$  описує геометрію області  $\Omega$ .

Система нерівностей для визначення сталих  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_2^{p_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^{p_1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \\ \beta_1^{-p_2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^{-p_2}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq \alpha_2 \omega(\mathbf{x}), \\ \beta_2^{p_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^{p_1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\leq \beta_1 \omega(\mathbf{x}), \\ \alpha_1^{-p_2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^{-p_2}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\leq \beta_2 \omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Отже, має місце така теорема.

*Теорема 5.8.* Нехай  $0 < p_1 < 1$ ,  $0 < p_2 < 1$  і система (5.58) має розв'язок  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  такий, що  $0 < \alpha_1 < \beta_1$ ,  $0 < \alpha_2 < \beta_2$ . Тоді ітераційний процес

$$\begin{aligned} v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(v_2^{(k)}(\mathbf{s}))^{p_1} d\mathbf{s}, & v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(w_1^{(k)}(\mathbf{s}))^{-p_2} d\mathbf{s}, \\ w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(w_2^{(k)}(\mathbf{s}))^{p_1} d\mathbf{s}, & w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(v_1^{(k)}(\mathbf{s}))^{-p_2} d\mathbf{s}, \\ & & k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де  $v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1\omega(\mathbf{x})$ ,  $v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_2\omega(\mathbf{x})$ ,  $w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1\omega(\mathbf{x})$ ,  $w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2\omega(\mathbf{x})$ , збігається до єдиного додатного розв'язку  $(u_1^*(\mathbf{x}), u_2^*(\mathbf{x}))$  системи (5.53), (5.54), причому для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \alpha_1\omega(\mathbf{x}) &= v_1^{(0)}(\mathbf{x}) \leq v_1^{(1)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq u_1^*(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w_1^{(1)}(\mathbf{x}) \leq w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1\omega(\mathbf{x}), \\ \alpha_2\omega(\mathbf{x}) &= v_2^{(0)}(\mathbf{x}) \leq v_2^{(1)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq u_2^*(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w_2^{(1)}(\mathbf{x}) \leq w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2\omega(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Обчислювальний експеримент було проведено для значень  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ , якщо  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : |\mathbf{x}| < 1\}$  – одиничний круг. Для цієї області маємо  $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2)$ ,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}s^1}}{r_{\mathbf{x}s}}$ , де  $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , точки  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{s}^1$  симетричні відносно кола одиничного радіуса,  $r_{\mathbf{x}s}$ ,  $r_{\mathbf{x}s^1}$  – відстані між точками  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}^1$  відповідно. Розв'язком системи нерівностей (5.58) є, наприклад, числа  $\alpha_1 = 0,235$ ,  $\alpha_2 = 0,995$ ,  $\beta_1 = 0,374$ ,  $\beta_2 = 1,532$ . Точність  $\varepsilon = 10^{-4}$  була досягнута на восьмій ітерації.

Отриманий наближений розв'язок

$$u_1^{(8)}(\mathbf{x}) = \frac{v_1^{(8)}(\mathbf{x}) + w_1^{(8)}(\mathbf{x})}{2}, \quad u_2^{(8)}(\mathbf{x}) = \frac{v_2^{(8)}(\mathbf{x}) + w_2^{(8)}(\mathbf{x})}{2}$$

має радіальну симетрію. Через це у таблицях 5.1 та 5.2 наведено значення по-

слідовних верхніх наближень  $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$ , наближень  $u_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх наближень  $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, \dots, 8$ , в точках  $\mathbf{x}_i = (0, 25i; 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , розташованих на промені  $\varphi = 0$  (жирним в значеннях  $u_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(k)}(\mathbf{x})$  виділено цифри, які встановилися, тобто на наступних ітераціях залишаються незмінними).

Таблиця 5.1 – Значення послідовних наближень до функції  $u_1^*(\mathbf{x})$

Номер ітерації $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_1^{(k)}(0; 0)$	0,18700	0,18677	0,16517	0,16022	0,15970	0,15940	0,15887	0,15874	0,15873
$u_1^{(k)}(0; 0)$	0,15225	0,16864	0,15902	0,15739	0,15868	0,15892	0,15870	0,15866	0,15870
$v_1^{(k)}(0; 0)$	0,11750	0,15052	0,15286	0,15456	0,15765	0,15845	0,15853	0,15858	0,15870
$w_1^{(k)}(0, 25; 0)$	0,17531	0,17320	0,15262	0,14793	0,14741	0,14714	0,14666	0,14654	0,14652
$u_1^{(k)}(0, 25; 0)$	0,14273	0,15639	0,14694	0,14532	0,14647	0,14670	0,14650	0,14646	0,14650
$v_1^{(k)}(0, 25; 0)$	0,11016	0,13958	0,14125	0,14271	0,14552	0,14626	0,14634	0,14639	0,14647
$w_1^{(k)}(0, 5; 0)$	0,14025	0,13383	0,11634	0,11270	0,11227	0,11207	0,11170	0,11161	0,11160
$u_1^{(k)}(0, 5; 0)$	0,11419	0,12084	0,11201	0,11071	0,11155	0,11174	0,11158	0,11155	0,11158
$v_1^{(k)}(0, 5; 0)$	0,08812	0,10785	0,10767	0,10872	0,11083	0,11140	0,11146	0,11150	0,11156
$w_1^{(k)}(0, 75; 0)$	0,08181	0,07300	0,06127	0,05932	0,05907	0,05896	0,05877	0,05872	0,05872
$u_1^{(k)}(0, 75; 0)$	0,06661	0,06591	0,05899	0,05827	0,05869	0,05879	0,05871	0,05869	0,05871
$v_1^{(k)}(0, 75; 0)$	0,05141	0,05883	0,05670	0,05722	0,05831	0,05861	0,05865	0,05866	0,05870

В таблиці 5.3 наведено дані як в залежності від номера ітерації  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 8$ , змінюється оцінка  $\varepsilon_i^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \frac{1}{2} |w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})|$  норми похибки  $\|u_i^* - u_i^{(k)}\|$  наближеного розв'язку  $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ . В таблиці 5.4 наведено знайдені з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  значення наближеного розв'язку  $u_1^{(8)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(8)}(\mathbf{x})$  в точках, розташованих на промені  $\varphi = 0$ , при цьому отримано, що

$$\|u_1^{(8)}\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,1587, \quad \|u_2^{(8)}\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,5352.$$

Таблиця 5.2 – Значення послідовних наближень до функції  $u_2^*(\mathbf{x})$ 

Номер ітерації $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_2^{(k)}(0;0)$	0,76600	0,58110	0,54536	0,54193	0,53988	0,53633	0,53544	0,53534	0,53528
$u_2^{(k)}(0;0)$	0,63175	0,53941	0,52643	0,53502	0,53666	0,53518	0,53490	0,53515	0,53520
$v_2^{(k)}(0;0)$	0,49750	0,49772	0,50751	0,52811	0,53345	0,53403	0,53437	0,53496	0,53511
$w_2^{(k)}(0,25;0)$	0,71812	0,54903	0,51390	0,51098	0,50890	0,50553	0,50469	0,50460	0,50455
$u_2^{(k)}(0,25;0)$	0,59227	0,50964	0,49606	0,50447	0,50586	0,50445	0,50419	0,50442	0,50447
$v_2^{(k)}(0,25;0)$	0,46641	0,47025	0,47823	0,49796	0,50283	0,50336	0,50369	0,50424	0,50438
$w_2^{(k)}(0,5;0)$	0,57450	0,45061	0,41636	0,41415	0,41228	0,40954	0,40887	0,40880	0,40875
$u_2^{(k)}(0,5;0)$	0,47381	0,41828	0,40191	0,40887	0,40983	0,40866	0,40846	0,40865	0,40869
$v_2^{(k)}(0,5;0)$	0,37312	0,38595	0,38746	0,40359	0,40737	0,40779	0,40805	0,40850	0,40862
$w_2^{(k)}(0,75;0)$	0,33512	0,27748	0,24176	0,24054	0,23934	0,23774	0,23735	0,23731	0,23729
$u_2^{(k)}(0,75;0)$	0,27639	0,25757	0,23337	0,23748	0,23791	0,23723	0,23712	0,23723	0,23725
$v_2^{(k)}(0,75;0)$	0,21766	0,23766	0,22499	0,23441	0,23649	0,23672	0,23688	0,23714	0,23721

Таблиця 5.3 – Значення оцінки похибки  $(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)})$  наближеного розв'язку задачі (5.53), (5.54)

Номер ітерації $k$	0	1	2	3	4
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,35 \cdot 10^{-1}$	$0,18 \cdot 10^{-1}$	$0,62 \cdot 10^{-2}$	$0,28 \cdot 10^{-2}$	$0,10 \cdot 10^{-2}$
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,13 \cdot 10^0$	$0,42 \cdot 10^{-1}$	$0,19 \cdot 10^{-1}$	$0,69 \cdot 10^{-2}$	$0,32 \cdot 10^{-2}$
Номер ітерації $k$	5	6	7	8	
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,79 \cdot 10^{-4}$	$0,28 \cdot 10^{-4}$	
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$0,53 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,89 \cdot 10^{-4}$	

На рис. 5.1 наведено графіки перерізів верхніх  $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 2, 6, 8$ , а на рис. 5.2, 5.3 – поверхні наближених розв'язків  $u_1^{(8)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(8)}(\mathbf{x})$  та їх лінії рівня відповідно.

Таблиця 5.4 – Значення наближеного розв'язку задачі (5.53), (5.54) в точках  $\mathbf{x}_i = (0, 25i, 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$

$\mathbf{x}_i = (0, 25i, 0)$	(0; 0)	(0, 25; 0)	(0, 5; 0)	(0, 75; 0)
$u_1^{(8)}(\mathbf{x}_i)$	0,1587	0,1465	0,1116	0,0587
$u_2^{(8)}(\mathbf{x}_i)$	0,5352	0,5045	0,4087	0,2372

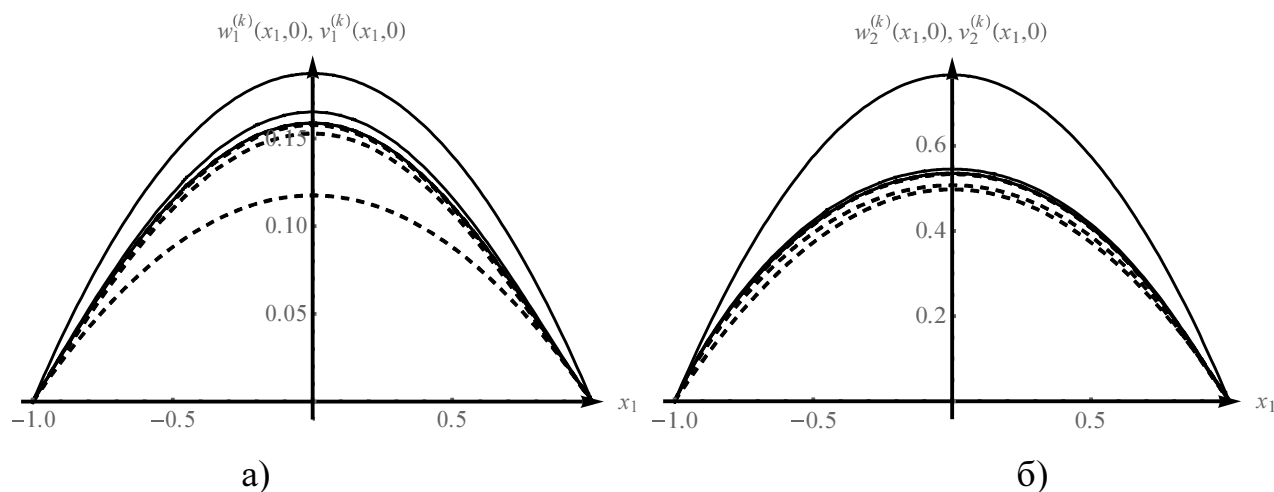


Рисунок 5.1 – Графіки перерізів верхніх та нижніх наближень  $w_1^{(k)}(x_1, 0)$ ,  $v_1^{(k)}(x_1, 0)$  (а) та  $w_2^{(k)}(x_1, 0)$ ,  $v_2^{(k)}(x_1, 0)$  (б),  $k = 0, 2, 6, 8$ , до розв'язку задачі (5.53), (5.54)

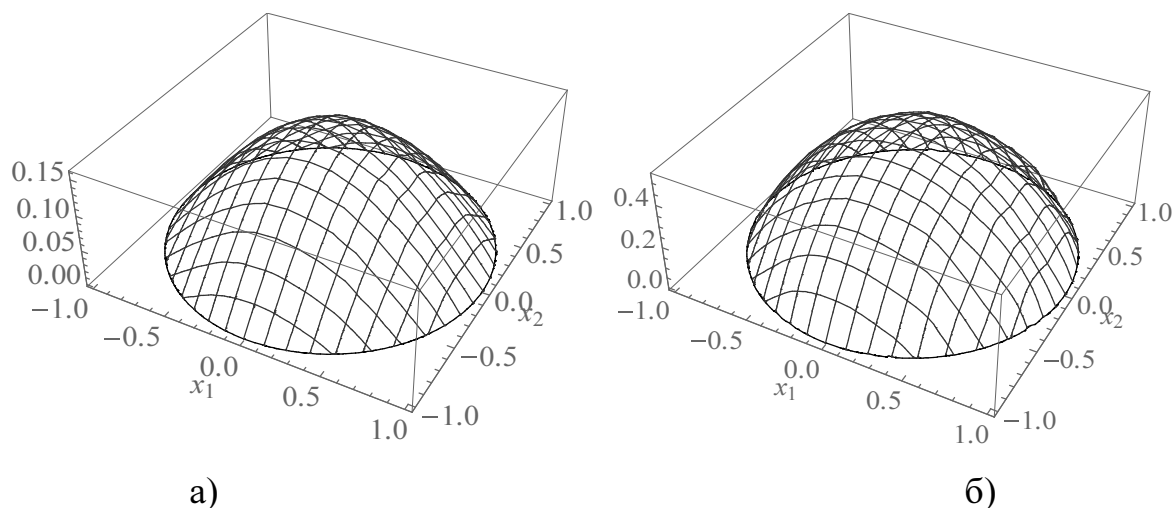


Рисунок 5.2 – Поверхні наближених розв'язків  $u_1^{(8)}(\mathbf{x})$  (а) та  $u_2^{(8)}(\mathbf{x})$  (б) задачі (5.53), (5.54)

Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon_i^{(k+1)}}{\varepsilon_i^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ ,  $i = 1, 2$ , за даними табл. 5.3,

отримаємо, що  $\frac{\varepsilon_1^{(k+1)}}{\varepsilon_1^{(k)}} \approx \frac{\varepsilon_2^{(k+1)}}{\varepsilon_2^{(k)}} \approx 0,382$ , що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

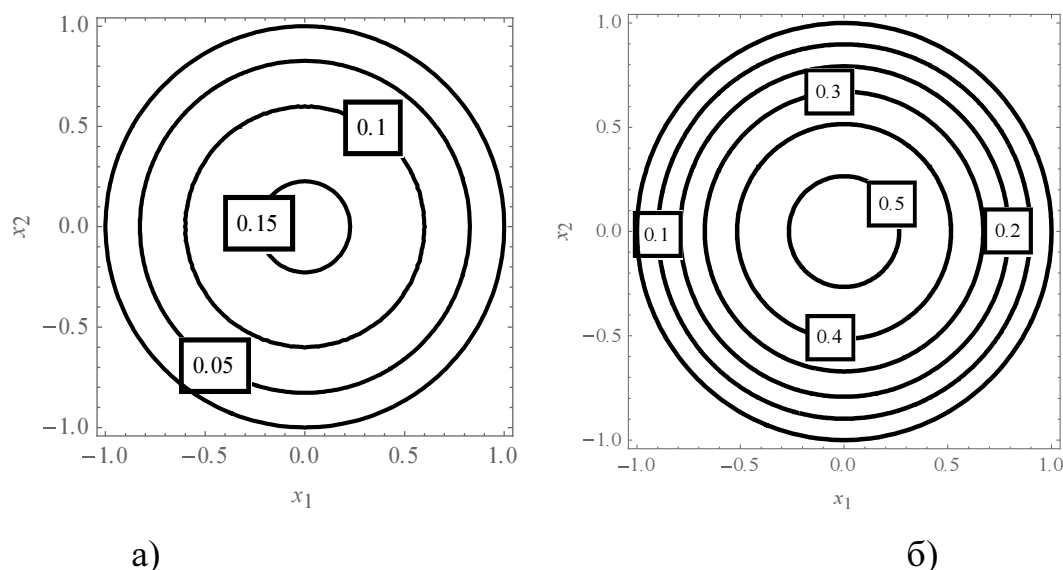


Рисунок 5.3 – Лінії рівня наближених розв’язків  $u_1^{(8)}(\mathbf{x})$  (а) та  $u_2^{(8)}(\mathbf{x})$  (б)

5.3.2 Розв’язання тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Побудову двобічних наближень до додатного розв’язку крайової задачі (5.1) – (5.3) на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова продемонструємо на системі двох рівнянь з експоненціальними нелінійностями:

$$-\Delta u_1 = e^{u_2}, \quad -\Delta u_2 = e^{-u_1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.59)$$

$$u_1(\mathbf{x}) > 0, \quad u_2(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.60)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.61)$$

де  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$ .

Функції  $f_1(\mathbf{x}, u_1, u_2) = e^{u_2}$ ,  $f_2(\mathbf{x}, u_1, u_2) = e^{-u_1}$  додатні та неперервні за сукупністю змінних, якщо  $u_1, u_2 > 0$ , і дозволяють діагональне подання за допомогою функцій

$$\hat{f}_1(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = e^{v_2}, \quad \hat{f}_2(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) = e^{-w_1}. \quad (5.62)$$

Задачу (5.59) – (5.61) замінюємо еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u_2(\mathbf{s})} ds, \quad (5.63)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u_1(\mathbf{s})} ds, \quad (5.64)$$

де  $Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  визначається формулою (3.23),

$$K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$\tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

$$\omega(\mathbf{x}) = [x_1(1-x_1)] \wedge_0 [x_2(1-x_2)] \equiv$$

$$\equiv x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2) - \sqrt{x_1^2(1-x_1)^2 + x_2^2(1-x_2)^2}.$$

З системою (5.63), (5.64) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$\mathbf{T}(u_1, u_2) = \left( \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u_2(\mathbf{s})} ds, \right. \\ \left. \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u_1(\mathbf{s})} ds \right), \quad (5.65)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \left( \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_2(\mathbf{s})} ds, \right. \\ \left. \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-w_1(\mathbf{s})} ds \right),$$

де



$$K_2^+(\mathbf{x}, s) = \max\{0, K_2(\mathbf{x}, s)\}, \quad K_2^-(\mathbf{x}, s) = \max\{0, -K_2(\mathbf{x}, s)\}.$$

Для оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (5.65) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , де

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})) = (\alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \alpha_2 \omega(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) = (\beta_1 \omega(\mathbf{x}), \beta_2 \omega(\mathbf{x})),$$

$$0 < \alpha_1 < \beta_1, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2.$$

Для обраних вектор-функцій  $\mathbf{v}^0$ ,  $\mathbf{w}^0$  система нерівностей (5.51), (5.52) для визначення сталих  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  має вигляд: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha_1 \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds - \beta_1 \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, s) e^{\alpha_2 \omega(s)} ds \geq \alpha_1 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\alpha_2 \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds - \beta_2 \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, s) e^{-\beta_1 \omega(s)} ds \geq \alpha_2 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_1 \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds - \alpha_1 \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, s) e^{\beta_2 \omega(s)} ds \leq \beta_1 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_2 \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds - \alpha_2 \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, s) \omega(s) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, s) e^{-\alpha_1 \omega(s)} ds \leq \beta_2 \omega(\mathbf{x}).$$

Цим нерівностям задовольняють, наприклад, числа  $\alpha_1 = 0,01$ ,  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $\beta_1 = 0,59$ ,  $\beta_2 = 0,55$ .

Знаходимо, що  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ . Оскільки для  $0 < v_1, w_1 < \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \beta_1$ ,

$$0 < v_2, w_2 < \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \beta_2$$

$$\begin{aligned} & \left| \hat{f}_1(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) - \hat{f}_1(\mathbf{x}, w_1, w_2, v_1, v_2) \right| = |e^{v_2} - e^{w_2}| \leq \\ & \leq e^{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \beta_2} |v_2 - w_2| \leq e^{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \beta_2} (|v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|) \leq 2e^{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \beta_2} \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \hat{f}_2(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) - \hat{f}_2(\mathbf{x}, w_1, w_2, v_1, v_2) \right| = |e^{-w_1} - e^{-v_1}| \leq \\ & \leq |v_2 - w_2| \leq |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \leq 2 \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\}, \end{aligned}$$

то

$$L = \max \left\{ 2e^{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\beta_2}, 2 \right\} = \max \{2,16776; 2\} = 2,16776.$$

Далі знаходимо

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = 0,04093,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds = 0,70819,$$

$$\gamma = M_1 + LM = 0,797.$$

Отже,  $\gamma < 1$  і за теоремою 5.7 послідовні наближення, що формуються за схемою

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_2^{(k)}(\mathbf{s})} ds,$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-w_2^{(k)}(\mathbf{s})} ds,$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w_2^{(k)}(\mathbf{s})} ds,$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-v_2^{(k)}(\mathbf{s})} ds,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_2 \omega(\mathbf{x}), w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1 \omega(\mathbf{x}), w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2 \omega(\mathbf{x}),$$

двобічно збігаються до розв'язку задачі (5.59) – (5.61).

Оберемо  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Тоді відповідно до (5.50) для досягнення цієї точності

треба зробити  $k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max\{\beta_1, \beta_2\}}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right\rceil + 1 = 28$  ітерацій. Фактично точність

$\varepsilon = 10^{-4}$  була досягнута на дев'ятій ітерації. Як бачимо, теоретична оцінка похибки виявилася сильно завищеною. За наближений розв'язок задачі (5.59) –

(5.61) беремо функції

$$u_1^{(9)}(\mathbf{x}) = \frac{v_1^{(9)}(\mathbf{x}) + w_1^{(9)}(\mathbf{x})}{2}, \quad u_2^{(9)}(\mathbf{x}) = \frac{v_2^{(9)}(\mathbf{x}) + w_2^{(9)}(\mathbf{x})}{2}.$$

В таблиці 5.5 наведено дані про те, як змінюється оцінка  $\varepsilon_i^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{2} (w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x}))$  норми похибки  $\|u_i^* - u_i^{(k)}\|$  наближеного розв'язку  $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ , в залежності від номера ітерації  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 9$ . В таблиці 5.6 наведено знайдені з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  значення наближеного розв'язку  $u_1^{(9)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(9)}(\mathbf{x})$  в точках, розташованих на прямій  $x_2 = 0,5$  з кроком 0,1, при цьому отримано, що  $\|u_1^{(9)}\| = 0,0628$ ,  $\|u_2^{(9)}\| = 0,0585$ .

Таблиця 5.5 – Значення оцінки похибки наближеного розв'язку задачі (5.59) – (5.61)

Номер ітерації $k$	0	1	2	3	4
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,42 \cdot 10^{-1}$	$0,23 \cdot 10^{-1}$	$0,12 \cdot 10^{-1}$	$0,57 \cdot 10^{-2}$	$0,27 \cdot 10^{-2}$
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,40 \cdot 10^{-1}$	$0,22 \cdot 10^{-1}$	$0,11 \cdot 10^{-1}$	$0,54 \cdot 10^{-2}$	$0,26 \cdot 10^{-2}$
Номер ітерації $k$	5	6	7	8	9
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,62 \cdot 10^{-3}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$	$0,28 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,63 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 5.6 – Значення наближеного розв'язку задачі (5.59) – (5.61) в точках  $\mathbf{x}_i = (0,1i; 0,5)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$\mathbf{x}_i = (0,1i; 0,5)$	(0; 0,5)	(0,1; 0,5)	(0,2; 0,5)	(0,3; 0,5)	(0,4; 0,5)	(0,5; 0,5)
$u_1^{(9)}(\mathbf{x}_i)$	0	0,0293	0,0507	0,0649	0,0729	0,0756
$u_2^{(9)}(\mathbf{x}_i)$	0	0,0269	0,0462	0,0587	0,0658	0,0680
$\mathbf{x}_i = (0,1i; 0,5)$	(0,6; 0,5)	(0,7; 0,5)	(0,8; 0,5)	(0,9; 0,5)	(1; 0,5)	
$u_1^{(9)}(\mathbf{x}_i)$	0,0729	0,0649	0,0507	0,0293	0	
$u_2^{(9)}(\mathbf{x}_i)$	0,0658	0,0587	0,0462	0,0269	0	

На рис. 5.4 наведено графіки перерізів верхніх  $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень при  $x_2 = 0,5$  для  $k = 0, 2, 6, 8$ , а на рис. 5.5, 5.6 – поверхні наближених розв'язків  $u_1^{(9)}(\mathbf{x})$ ,  $u_2^{(9)}(\mathbf{x})$  та їх лінії рівня (з кроком 0,01) відповідно.

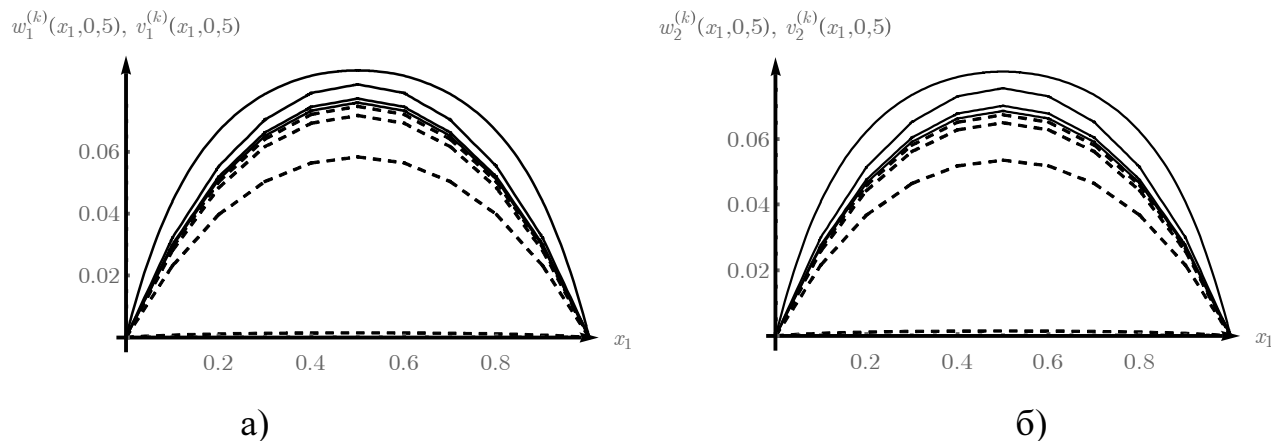


Рисунок 5.4 – Графіки перерізів верхніх та нижніх наближень  $w_1^{(k)}(x_1, 0, 5)$ ,  $v_1^{(k)}(x_1, 0, 5)$  (а) та  $w_2^{(k)}(x_1, 0, 5)$ ,  $v_2^{(k)}(x_1, 0, 5)$  (б),  $k = 0, 2, 6, 8$ , до розв'язку задачі (5.59) – (5.61)

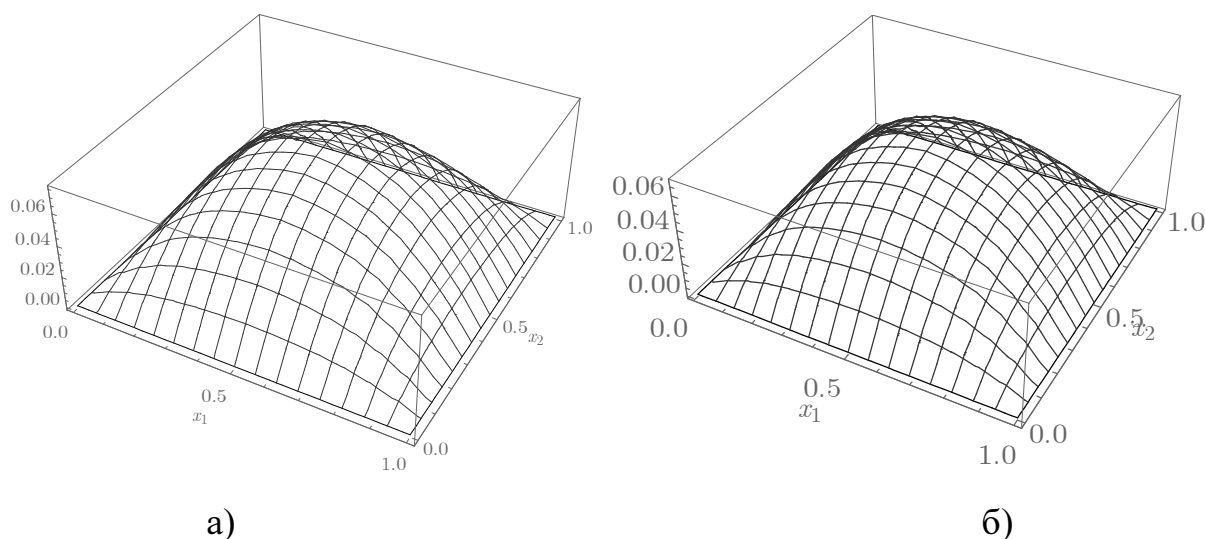


Рисунок 5.5 – Поверхні наближених розв'язків  $u_1^{(8)}(\mathbf{x})$  (а) та  $u_2^{(8)}(\mathbf{x})$  (б) задачі (5.59) – (5.61)

Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon_i^{(k+1)}}{\varepsilon_i^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 10$ ,  $i = 1, 2$ , за даними табл. 5.5, отримаємо, що  $\frac{\varepsilon_1^{(k+1)}}{\varepsilon_1^{(k)}} \approx \frac{\varepsilon_2^{(k+1)}}{\varepsilon_2^{(k)}} \approx 0,494$ , що свідчить про геометричну

швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. Відмітимо, що показник збіжності виявився меншим, ніж показник  $\gamma$ , оцінений відповідно до теореми 5.7.

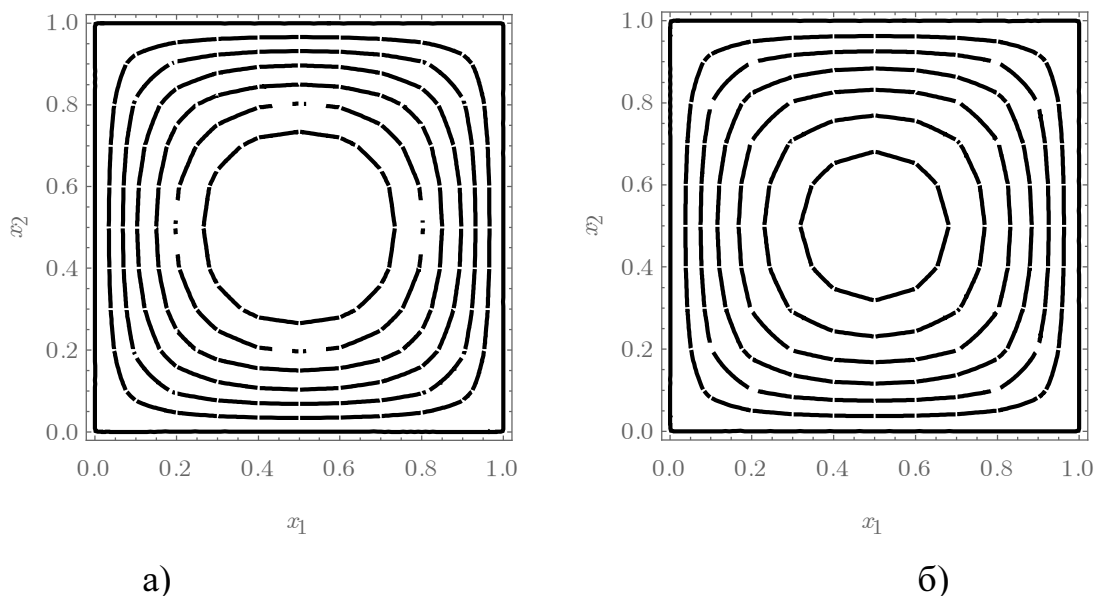


Рисунок 5.6 – Лінії рівня наближених розв’язків  $u_1^{(9)}(\mathbf{x})$  (а) та  $u_2^{(9)}(\mathbf{x})$  (б) задачі (5.59) – (5.61)

Також наближений розв’язок задачі (5.59) – (5.61) з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  було отримано методом двобічних наближень, заснованим на використанні функції Гріна. Абсолютна похибка двох наближених розв’язків при цьому склала  $0,12 \cdot 10^{-3}$ , а відносна – близько 0,21%.

### Висновки за розділом 5

1. Розглянуті першу крайову задачу для системи  $n$  напівлінійних еліптичних рівнянь за допомогою функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова зведено до системи  $n$  інтегральних рівнянь Гаммерштейна та системи  $n$  інтегральних рівнянь Урисона відповідно, що дозволило ввести поняття узагальненого розв’язку.

2. Розгляд отриманої за допомогою функції Гріна системи інтегральних рівнянь Гаммерштейна як нелінійного операторного рівняння вигляду  $\mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$  у просторі неперервних вектор-функцій, напівупорядкованому конусом вектор-

функцій з невід'ємними координатами, дозволило методами нелінійного функціонального аналізу дослідити властивості оператора  $\mathbf{T}$ , зокрема, додатність,  $\mathbf{u}_0$ -додатність, гетеротонність, увігнутість та  $\mathbf{u}_0$ -увігнутість.

3. Розгляд системи інтегральних рівнянь Урисона, отриманої за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова, як нелінійного операторного рівняння вигляду  $\mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$  у просторі неперервних вектор-функцій, напівупорядкованому конусом вектор-функцій з невід'ємними координатами, дозволило дослідити оператор  $\mathbf{T}$  на гетеротонність.

3. Вперше з крайових задач для системи  $n$  напівлінійних еліптичних рівнянь виділено клас, задачі з якого за допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова можуть бути подані у вигляді нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором, що дозволило побудувати двобічні ітераційні методи знаходження їх додатних розв'язків.

4. Вперше розроблено методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова для знаходження додатного розв'язку першої крайової задачі для системи  $n$  напівлінійних еліптичних рівнянь. Перевагами запропонованих методів є простота обчислювальної схеми та зручна апостеріорна оцінка похибки. Крім того, метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова може бути застосований до розв'язання крайових задач у більш широкому класі областей, ніж метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

5. Удосконалено методи побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , кінці якого обираються початковими наближеннями при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова. Зокрема, запропоновано шукати вектор-функції  $\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0$  у вигляді  $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}\omega(\mathbf{x}), \mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}\omega(\mathbf{x})$ , де  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $0 < \alpha_i < \beta_i, i = 1, \dots, n$ , а функція  $\omega(\mathbf{x})$  будується з використанням конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій. Це дозволило точно врахувати геометричну інформацію, що міститься у постановці крайової задачі при виборі початого наближення, а отже, отримати точнішу апіорну оцінку шуканого розв'язку.

6. Проведені обчислювальні експерименти розв'язання у одиничному крузі тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь зі степеневою нелінійністю методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна та розв'язання у одиничному квадраті тестової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь з експоненціальною нелінійністю методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова продемонстрували можливості запропонованих методів і підтвердили їх ефективність.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані у роботах [148, 288, 289, 291].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [71, 101, 126, 141, 148, 158, 219, 288, 289, 291].

**6 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФУНКЦІЙ ГРІНА  
ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА У КОМБІНАЦІЇ  
З МЕТОДОМ ПРЯМИХ ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ  
ДО РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ**

6.1 Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання функції Гріна

Розглянемо першу початково-крайову задачу для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u = f(x, t, u), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T_0], \quad (6.1)$$

$$u(x, t) > 0, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T_0], \quad (6.2)$$

$$u|_{x=a} = 0, \quad u|_{x=b} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (6.3)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (a, b). \quad (6.4)$$

Позначимо  $\bar{Q}_{T_0} = \{(x, t) \mid x \in [a, b], t \in [0, T_0]\}$ .

Вважатимемо, що

$$p(x, t) > 0, \quad q(x, t) \geq 0, \quad \text{якщо } (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad (6.5)$$

$$p(x, t), \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad q(x, t) \text{ неперервні, якщо } (x, t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$$f(x, t, u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (x, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad u > 0, \quad (6.6)$$

$$\varphi(x) \text{ неперервна і додатна, якщо } x \in (a, b), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (6.7)$$

Задача (6.1) – (6.4) за зазначених умов є типовим прикладом початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння, що



виникає при математичному моделюванні багатьох важливих процесів, зокрема, ця задача зустрічається при моделюванні хвильових процесів у біології, теорії горіння, хімічній кінетиці тощо [101, 126, 141, 158, 162, 276].

На відрізку  $[0, T_0]$  введемо сітку з кроком  $\tau$ , яка складається з точок

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = T_0,$$

і позначимо

$$U_j = U_j(x) = u(x, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Відповідно до методу прямих (методу Рунге) в рівнянні (6.1) диференціальний оператор  $\frac{\partial u}{\partial t}$  апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (6.1) – (6.4) шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ .

Рівняння (6.1) з похибкою  $O(\tau)$  замінимо на прямій  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - \frac{d}{dx} \left( p(x, t_j) \frac{dU_j}{dx} \right) + q(x, t_j) U_j = f(x, t_j, U_j). \quad (6.8)$$

Зауважимо, що на відміну від оригінального методу Рунге [285] у модифікованій схемі (6.8) нелінійність апроксимується на поточному, а не на попередньому часовому шарі.

На нульовому часовому шарі відповідно початковій умові (6.4) покладемо

$$U_0(x) = \varphi(x). \quad (6.9)$$

Рівняння (6.8) розглядаються при  $x \in (a, b)$ . Використовуючи крайові умови (6.3) вихідної задачі поставимо для кожного з рівнянь (6.8) першу крайову задачу, доповнивши його крайовими умовами

$$U_j(a) = 0, \quad U_j(b) = 0.$$

Тоді розв'язання початково-крайової задачі (6.1) – (6.4) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних крайових задач

$$-\frac{d}{dx} \left( P_j(x) \frac{dU_j}{dx} \right) + Q_j(x)U_j = \frac{1}{\tau} U_{j-1} + f(x, t_j, U_j), \quad x \in (a, b), \quad (6.10)$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (6.11)$$

$$U_j(a) = 0, \quad U_j(b) = 0, \quad (6.12)$$

$$j = 1, \dots, m;$$

$$U_0(x) = \varphi(x),$$

де позначено  $P_j(x) = p(x, t_j)$ ,  $Q_j(x) = q(x, t_j) + \frac{1}{\tau}$ .

Зауважимо, що  $Q_j(x) > 0$  на  $[a, b]$  при будь-якому  $\tau > 0$ .

Збіжність метода Роте при  $\tau \rightarrow 0$  доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (6.1) [80].

Оскільки крайові задачі (6.10) – (6.12) розв'язуються послідовно, то при знаходженні функції  $U_j(x)$  функція  $U_{j-1}(x)$  вже знайдена як розв'язок попередньої задачі, тому праву частину рівняння (6.10) позначимо через  $F(x, U_j)$ :

$$F_j(x, U_j) = \frac{1}{\tau} U_{j-1}(x) + f(x, t_j, U_j). \quad (6.13)$$

Для розв'язання кожної з задач (6.10) – (6.12) застосуємо розроблений у п. 2.1 метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Розглядатимемо задачу (6.10) – (6.12) для деякого фіксованого  $j$ . Нехай  $G_j(x, s)$  – функція Гріна розглядуваної крайової задачі. Тоді ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(x) = \int_a^b G_j(x, s) F_j(s, U_j(s)) ds. \quad (6.14)$$

Рівняння (6.14) розглядатимемо у банаховому просторі  $C[a, b]$ , напівупо-

рядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід'ємних на відрізку  $[a, b]$  неперервних функцій, і шукатимемо узагальнений (у сенсі означення 2.1) розв'язок  $U_j(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (6.14).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T_j$ , що діє у  $C[a, b]$  за правилом

$$T_j(U)(x) = \int_a^b G_j(x, s)F_j(s, U(s))ds. \quad (6.15)$$

Припустимо, що функція  $f(x, t, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, t, u) = \hat{f}(x, t, u, u)$ , де невід'ємна функція  $\hat{f}(x, t, v, w)$  є неперервною за сукупністю змінних  $x, t, v, w$ , монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (a, b)$ ,  $t \in (0, T_0]$ . Тоді діагональне подання дозволить і функція  $F_j(x, U_j)$  вигляду (6.13):  $F_j(x, U_j) = \hat{F}_j(x, U_j, U_j)$ , де функція  $\hat{F}_j(x, v, w)$  задається рівністю

$$\hat{F}_j(x, v, w) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(x) + \hat{f}(x, t_j, v, w). \quad (6.16)$$

Оскільки функція  $U_{j-1}(x)$  неперервна і невід'ємна на  $[a, b]$ , то й  $\hat{F}_j(x, v, w)$  буде неперервною за сукупністю змінних  $x, v, w$  невід'ємною функцією, яка монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (a, b)$ .

Отже, оператор  $T_j$  вигляду (6.15) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(x) = \int_a^b G_j(x, s)\hat{F}_j(s, v(s), w(s))ds. \quad (6.17)$$

Зрозуміло, що оператори  $T_j$  і  $\hat{T}_j$  є цілком неперервними.

Запишемо тепер нерівність (2.12) для функції  $\hat{F}_j(x, v, w)$  вигляду (6.16):

$$\hat{F}_j\left(x, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{F}_j(x, v, w), \quad x \in (a, b). \quad (6.18)$$

З урахуванням (6.16) нерівність (6.18) приймає вигляд

$$\frac{1}{\tau} U_{j-1}(x) + \hat{f}\left(x, t_j, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \left[ \frac{1}{\tau} U_{j-1}(x) + \hat{f}(x, t_j, v, w) \right], \quad x \in (a, b),$$

або

$$\frac{1}{\tau} (1 - \nu) U_{j-1}(x) + \hat{f}\left(x, t_j, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(x, t_j, v, w), \quad x \in (a, b).$$

Звідси бачимо, що нерівність (6.18) матимемо місце для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\nu \in (0, 1)$ , якщо для всіх  $v, w > 0$  і при будь-якому  $\nu \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(x, t, v, w), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T_0]. \quad (6.19)$$

Тоді з огляду на лему 2.1 можна зробити такий висновок.

*Лема 6.1.* Оператор  $T_j$  вигляду (6.15) буде:

а) додатним оператором;

б)  $u_0$ -додатним оператором з функцією  $u_0^j(x)$ , яка задається формулою

$$u_0^j(x) = \int_a^b G_j(x, s) ds, \quad (6.20)$$

якщо функція Гріна задачі (6.10) – (6.12) допускає оцінку

$$\varphi_j(s) u_0^j(x) \leq G_j(x, s) \leq \psi_j(s) u_0^j(x), \quad a \leq x, s \leq b, \quad (6.21)$$

де  $\varphi_j(s), \psi_j(s)$  – невід'ємні неперервні на  $[a, b]$  функції, відмінні від тотожного нуля;

в) гетеротонним оператором з супровідним оператором вигляду (6.17), якщо функція  $f(x, t, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, t, u) = \hat{f}(x, t, u, u)$ , де невід'ємна функція  $\hat{f}(x, t, v, w)$  є неперервною за сукупністю змінних  $x, t, v, w$ , монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (a, b)$ ,  $t \in (0, T_0]$ ;

г) псевдоувігнутим і навіть  $u_0$ -псевдоувігнутим оператором з функцією  $u_0^j(x)$ , яка має вигляд (6.20), якщо виконується умова (6.19).

Вважатимемо, що оператор  $T_j$  вигляду (6.15) є гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.17). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (6.14) (а отже, і крайової задачі (6.10) – (6.12)).

Для гетеротонного оператора  $T_j$  виділимо у конусі  $\mathcal{K}_+$  сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ . Відповідні умови (1.34) набувають вигляду

$$\int_a^b G_j(x, s) \hat{F}_j(s, v_j^0(s), w_j^0(s)) ds \geq v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

$$\int_a^b G_j(x, s) \hat{F}_j(s, w_j^0(s), v_j^0(s)) ds \leq w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

або (з урахуванням (6.16))

$$\varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, v_j^0(s), w_j^0(s)) ds \geq v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b], \quad (6.22)$$

$$\varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, w_j^0(s), v_j^0(s)) ds \leq w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [a, b], \quad (6.23)$$

де позначено

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\tau} \int_a^b G_j(x, s) U_{j-1}(s) ds. \quad (6.24)$$

Зауважимо, що  $\varphi_j(x) > 0$  для всіх  $x \in (a, b)$  і  $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$ .

Сформуємо ітераційний процес за схемою (1.36):

$$v^{(k+1)}(x) = \int_a^b G_j(x, s) \hat{F}_j(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_a^b G_j(x, s) \hat{F}_j(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x).$$

З урахуванням (6.16) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.25)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.26)$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x). \quad (6.27)$$

Відмітимо, що всі функції  $v^{(k)}(x)$ ,  $w^{(k)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задовольняють однорідні крайові умови:  $v^{(k)}(a) = v^{(k)}(b) = 0$ ,  $w^{(k)}(a) = w^{(k)}(b) = 0$ .

Послідовність  $\{v^{(k)}(x)\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x)\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , який є нормальним, та існують границі цих послідовностей  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$ . Для з'ясування умов збіжності цих послідовностей до єдиного неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12) застосуємо теореми 2.1 – 2.4.

З теореми 2.1 випливає такий факт.

*Теорема 6.1.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.15) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.17) і система рівнянь

$$v(x) = \varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, v(s), w(s)) ds, \quad (6.28)$$

$$w(x) = \varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, w(s), v(s)) ds, \quad (6.29)$$

не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (6.25) – (6.27) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (6.25) – (6.27) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq U_j^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \quad (6.30)$$

Як і у п. 2.1 ця теорема може бути уточнена за рахунок накладання додаткових умов, за виконання яких система рівнянь (6.28), (6.29) не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ , і ми отримаємо умови розв'язності задач (6.10) – (6.12) для всіх  $j = 1, \dots, m$ .

Нерівність (2.25) для функції  $\hat{F}_j(x, v, w)$  вигляду (6.16) запишеться так:

$$\frac{1}{\tau} U_{j-1}(x) + \hat{f}(x, t_j, v + u, w - u) < \frac{1}{\tau} U_{j-1}(x) + \hat{f}(x, t_j, v, w) + uM^{-1},$$

або

$$\hat{f}(x, t_j, v + u, w - u) < \hat{f}(x, t_j, v, w) + uM^{-1},$$

де  $M = \max_{x \in [a, b]} u_0^j(x)$ .

Тоді справджується така теорема.

*Теорема 6.2.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.15) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$

вигляду (6.17),  $j = 1, \dots, m$ , і для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w, 0 < u < w$ , і для всіх  $x \in (a, b), t \in (0, T_0]$  має місце нерівність

$$\hat{f}(x, t, v + u, w - u) < \hat{f}(x, t, v, w) + uM^{-1}, \quad (6.31)$$

де  $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{x \in [a, b]} u_0^j(x)$ .

Тоді при кожному  $j, j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.25) – (6.27) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12).

Нерівність (2.27), якщо її записати для функції  $\hat{F}_j(x, v, w)$  вигляду (6.16), набуде, очевидно, вигляду

$$|\hat{f}(x, t_j, w, v) - \hat{f}(x, t_j, v, w)| \leq L_j |w - v|.$$

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 6.3.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.15) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.17),  $j = 1, \dots, m$ , і існує така неперервна на  $(0, T_0]$  функція  $L(t) > 0$ , що функція  $\hat{f}(x, t, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{j=1, \dots, m} \max_{x \in [a, b]} w_j^0(x)$ , і для всіх  $x \in (a, b), t \in (0, T_0]$  задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(x, t, w, v) - \hat{f}(x, t, v, w)| \leq L(t) |w - v|. \quad (6.32)$$

Якщо  $\gamma = ML < 1$ , де  $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{x \in [a, b]} u_0^j(x)$ ,  $L = \max_{j=1, \dots, m} L(t_j)$ , то при кожному  $j, j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.25) – (6.27) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12). При цьому для  $j$ -ї задачі матиме місце оцінка



$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (L_j M^j)^{k+1} \|w_j^0 - v_j^0\|,$$

де  $L_j = L(t_j)$ ,  $M^j = \max_{x \in [a, b]} u_0^j(x)$ .

Використовуючи, нарешті, умова (6.19)  $u_0$ -псевдоувігнутості гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.15) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.17), приходимо до такого результату.

*Теорема 6.4.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle \subset K(u_0^j)$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.15) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.17),  $j = 1, \dots, m$ , і для всіх  $v, w > 0$  і при будь-якому  $\nu \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(x, t, v, w), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T_0].$$

Тоді при кожному  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.25) – (6.27) двобічно збігається у нормі простору  $C[a, b]$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(x)$  крайової задачі (6.10) – (6.12).

За наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (6.1) – (6.4) на  $j$ -му часовому шарі на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (6.33)$$

Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (6.33):

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес розв'язання  $j$ -ї задачі,  $j = 1, \dots, m$ , слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [a, b]} |w^{(k_j)}(x) - v^{(k_j)}(x)| < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що

$$u^*(x, t_j) = U_j^*(x) \approx U_j^{(k_j)}(x).$$

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(x) = \varphi(x), U_1^{(k_1)}(x), U_2^{(k_2)}(x), \dots, U_m^{(k_m)}(x). \quad (6.34)$$

З теорем 6.2 – 6.4 відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [80] впливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (6.1) – (6.4) при  $\tau \rightarrow 0$ .

За набором функцій (6.34) можна, використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [84], побудувати наближений розв'язок задач (6.1) – (6.4) у вигляді функції  $u_m(x, t)$ , визначеної при всіх  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [0, T_0]$ . Цей наближений розв'язок має точність  $O(\tau)$ . Якщо зробити розрахунки з кроком  $\frac{\tau}{2}$ , то отримаємо наближений розв'язок  $u_{2m}(x, t)$ , який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку  $O(\tau^2)$  за формулою

$$u(x, t) = 2u_{2m}(x, t) - u_m(x, t).$$

Для побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  при чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (6.10) – (6.12) можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 2.3.

Так, наприклад, якщо шукати відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  у вигляді  $v_j^0(x) = \alpha_j u_0^j(x)$ ,  $w_j^0(x) = \beta_j u_0^j(x)$ , то для визначення чисел  $\alpha_j, \beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) відповідно до (2.124) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq \min_{x \in [a, b]} h_1^j(x; \alpha_j, \beta_j), \quad \beta_j \geq \max_{x \in [a, b]} h_2^j(x; \alpha_j, \beta_j), \quad (6.35)$$

де

$$h_1^j(x; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int_a^b \frac{G_j(x, s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s, t_j, \alpha_j u_0^j(s), \beta_j u_0^j(s)) ds,$$

$$h_2^j(x; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int_a^b \frac{G_j(x, s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s, t_j, \beta_j u_0^j(s), \alpha_j u_0^j(s)) ds.$$

Якщо ж функція  $f(x, t, u)$  визначена при  $u = 0$ , то незалежно від того  $f(x, t, 0) > 0$  чи  $f(x, t, 0) = 0$ , конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v_j^0(x) = 0$ ,  $w_j^0(x) = \beta_j$ . Це призводить до нерівностей

$$\varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, 0, \beta) ds \geq 0 \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

$$\varphi_j(x) + \int_a^b G_j(x, s) \hat{f}(s, t_j, \beta, 0) ds \leq \beta \text{ для всіх } x \in [a, b],$$

перша з яких завжди виконуватиметься, а друга приводиться до вигляду

$$\max_{x \in [a, b]} \varphi_j(x) + M^j \max_{x \in [a, b]} \hat{f}(x, t_j, \beta, 0) \leq \beta, \quad (6.36)$$

де  $M^j = \max_{x \in [a, b]} u_0^j(x)$ .

**6.2** Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання функції Гріна

Аналогічно одновимірному випадку на основі використання відповідної функції Гріна можна побудувати метод прямих у комбінації з методом двобічних наближень для побудови наближеного розв'язку першої початково-

крайової задачі для багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння. Отже, розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p(\mathbf{x}, t)\nabla u) + q(\mathbf{x}, t)u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (6.37)$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (6.38)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (6.39)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.40)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Позначимо  $\bar{Q}_{T_0} = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, t \in [0, T_0]\}$ .

Вважатимемо, що

$$p(\mathbf{x}, t) > 0, \quad q(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \text{якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad (6.41)$$

$p(\mathbf{x}, t)$  неперервно диференційовна за змінними  $\mathbf{x}$ , якщо  $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}$ ,

$q(\mathbf{x}, t)$  неперервна, якщо  $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}$ ,

$$f(\mathbf{x}, t, u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad u > 0, \quad (6.42)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) \text{ неперервна і додатна, якщо } \mathbf{x} \in \Omega, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.43)$$

Задача (6.37) – (6.40) часто зустрічається у математичному моделюванні нелінійних нестационарних процесів, що розглядаються у біології, теорії горіння, хімічній кінетиці тощо [101, 126, 141, 158, 162, 276]. Умова додатності (6.38) при цьому є наслідком прикладного сенсу функції  $u$  у тій чи іншій галузі.

Як і у п. 6.1 на відрізку  $[0, T_0]$  введемо сітку з кроком  $\tau$ , яка складається з точок

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = T_0,$$

і позначимо

$$U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В рівнянні (6.37) відповідно до методу прямих (методу Роте) диференціальний оператор  $\frac{\partial u}{\partial t}$  апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (6.37) – (6.40) шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ .

Тоді з похибкою  $O(\tau)$  рівняння (6.37) на прямій  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , замінюється нелінійним еліптичним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - \text{div}(p(\mathbf{x}, t_j) \nabla U_j) + q(\mathbf{x}, t_j) U_j = f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (6.44)$$

Рівняння (6.44) є певною модифікацією класичного методу Роте [285], бо на  $j$ -му часовому шарі використовує поточне значення  $U_j$  при апроксимації нелінійності  $f(\mathbf{x}, t, u)$ , а не попереднє значення  $U_{j-1}$ .

Відповідно до початкової умови (6.40) на нульовому часовому шарі  $t_0 = 0$  матимемо

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}). \quad (6.45)$$

Використовуючи крайову умову (6.39) отримаємо крайову умову на функцію  $U_j(\mathbf{x})$ :

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отже, розв'язання початково-крайової задачі (6.37) – (6.40) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних еліптичних крайових задач

$$-\text{div}(P_j(\mathbf{x}) \nabla U_j) + Q_j(\mathbf{x}) U_j = \frac{1}{\tau} U_{j-1} + f(\mathbf{x}, t_j, U_j), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.46)$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.47)$$

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.48)$$

$$j = 1, \dots, m;$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),$$

де позначено

$$P_j(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_j), Q_j(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, t_j) + \frac{1}{\tau}.$$

Як бачимо,  $Q_j(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$  при будь-якому  $\tau > 0$ .

Збіжність метода Роте при  $\tau \rightarrow 0$  доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (6.37) [80].

Крайові задачі (6.46) – (6.48) розв'язуються послідовно, а отже, при розв'язанні задачі для  $U_j(\mathbf{x})$  функція  $U_{j-1}(\mathbf{x})$  буде вже відомою. Тому праву частину рівняння (6.46) позначимо через  $F(\mathbf{x}, U_j)$ :

$$F_j(\mathbf{x}, U_j) = \frac{1}{\tau} U_{j-1}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (6.49)$$

Застосуємо для розв'язання кожної з задач (6.46) – (6.48) метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна, розроблений у п. 2.2.

Розглянемо задачу (6.46) – (6.48) для деякого фіксованого  $j$ . Якщо  $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – відповідна функція Гріна, то ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (6.50)$$

Розглядатимемо рівняння (6.50) у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівопорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід'ємних у  $\bar{\Omega}$  неперервних функцій, і шукатимемо узагальнений (у сенсі означення 2.2) розв'язок  $U_j(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (6.50).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T_j$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T_j(U)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (6.51)$$

Нехай функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$ , де невід'ємна функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$  є неперервною за сукупністю змінних  $\mathbf{x}, t, v, w$ , монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$ . Тоді функція  $F_j(\mathbf{x}, U_j)$  вигляду (6.49) теж дозволить діагональне подання:  $F_j(\mathbf{x}, U_j) = \hat{F}_j(\mathbf{x}, U_j, U_j)$ , де функція  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  задаватиметься рівністю

$$\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{\tau} U_{j-1}(\mathbf{x}) + \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w). \quad (6.52)$$

Через неперервність і невід'ємність на  $\Omega$  функції  $U_{j-1}(\mathbf{x})$  функція  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  буде неперервною за сукупністю змінних  $\mathbf{x}, v, w$  невід'ємною функцією, що монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Отже, оператор  $T_j$  вигляду (6.51) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (6.53)$$

Оператори  $T_j$  і  $\hat{T}_j$  є цілком неперервними.

Аналізуючи нерівність (2.74), записану для функції  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ , як і в одновимірному випадку з п. 6.1, можемо зробити висновок, що вона матиме місце за умови: для всіх  $v, w > 0$  і при будь-якому  $\nu \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]. \quad (6.54)$$

Тоді з огляду на лему 2.2 можна зробити такий висновок.

Лема 6.2. Оператор  $T_j$  вигляду (6.51) буде:

а) додатним оператором;

б)  $u_0$ -додатним оператором з функцією  $u_0^j(\mathbf{x})$ , яка задається формулою

$$u_0^j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds; \quad (6.55)$$

в) гетеротонним оператором з супровідним оператором вигляду (6.53), якщо функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$ , де невід'ємна функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$  є неперервною за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $w$ , монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in (0, T_0]$ ;

г) псевдоувігнутим і навіть  $u_0$ -псевдоувігнутим оператором функцією  $u_0^j(\mathbf{x})$ , яка має вигляд (6.55), якщо виконується умова (6.54).

Далі вважатимемо, що оператор  $T_j$  вигляду (6.51) є гетеротонним з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (6.50) (а отже, і крайової задачі (6.46) – (6.48)).

Виділимо умовами (1.34) у конусі  $\mathcal{K}_+$  сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $T_j$  конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ . Це призводить до того, що для функцій  $v_j^0(\mathbf{x})$  і  $w_j^0(\mathbf{x})$  виконуватимуться нерівності

$$\int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

або (з урахуванням (6.52))

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (6.56)$$



$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (6.57)$$

де позначено

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (6.58)$$

Очевидно, що  $\varphi_j(\mathbf{x}) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  і  $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$ .

Тепер за схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}).$$

З урахуванням (6.52) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.59)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.60)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}). \quad (6.61)$$

З (6.59), (6.60) випливає, що  $v^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $w^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$  для всіх  $k = 1, 2, \dots$  незалежно від того  $v_j^0|_{\partial\Omega} = 0$  та/або  $w_j^0|_{\partial\Omega} = 0$  чи  $v_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$  та/або  $w_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

Послідовність функцій  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  є неспадною за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  є незростаючою за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Тоді з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  випливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Умови двобічної

збіжності цих послідовностей до єдиного неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48) можна отримати, застосовуючи теореми 2.5 – 2.9.

З теореми 2.5 випливає такий факт.

*Теорема 6.5.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.51) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53) і система рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (6.62)$$

$$w(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds, \quad (6.63)$$

не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (6.59) – (6.61) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (6.59) – (6.61) означає виконання ланцюга нерівностей

$$\begin{aligned} v^0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq U_j^* \leq \\ &\leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Теорему 6.5 можна уточнити за рахунок накладання додаткових умов на функцію  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ , за виконання яких система рівнянь (6.28), (6.29) не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

Нерівність (2.84), записана для функції  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  вигляду (6.52), призводить до такої умови: для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w) + uM^{-1},$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^j(\mathbf{x})$ .

Тоді справджується теорема.

*Теорема 6.6.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.51) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53),  $j = 1, \dots, m$ , і для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w, 0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) + uM^{-1}, \quad (6.65)$$

де  $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^j(\mathbf{x})$ .

Тоді при кожному  $j, j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.59) – (6.61) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48).

Записуючи нерівність (2.86) для функції  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  вигляду (6.16), приходимо до умови

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w) \right| \leq L_j |w - v|.$$

Отже, матиме місце така теорема.

*Теорема 6.7.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.51) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53),  $j = 1, \dots, m$ , і існує така неперервна на  $(0, T_0]$  функція  $L(t) > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w_j^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, t, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) \right| \leq L(t) |w - v|. \quad (6.66)$$

Якщо  $\gamma = ML < 1$ , де  $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^j(\mathbf{x})$ ,  $L = \max_{j=1, \dots, m} L(t_j)$ , то при ко-

жному  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.59) – (6.61) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48). При цьому для  $j$ -ї задачі матиме місце оцінка

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (L_j M^j)^{k+1} \|w_j^0 - v_j^0\|,$$

де  $L_j = L(t_j)$ ,  $M^j = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^j(\mathbf{x})$ .

Використання умови (6.54)  $u_0$ -псевдодувігнутості гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.51) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53) призводить до такого результату.

*Теорема 6.8.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle \subset K(u_0^j)$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.51) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.53),  $j = 1, \dots, m$ , і для всіх  $v, w > 0$  і при будь-якому  $\nu \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0].$$

Тоді при кожному  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.59) – (6.61) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48).

При реалізації розглянутого методу двобічних наближень за наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (6.37) – (6.40) на  $j$ -му часовому шарі на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (6.67)$$

На кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (6.67):

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

що є перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес розв'язання  $j$ -ї задачі,  $j = 1, \dots, m$ , слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що

$$u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x}).$$

Тоді, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \dots, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}). \quad (6.68)$$

Відповідно до загальних теорем збіжності метода Рунге [80] з теорем 6.6 – 6.8 випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (6.37) – (6.40) при  $\tau \rightarrow 0$ .

Використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [84], за набором функцій (6.68) можна побудувати наближений розв'язок задач (6.37) – (6.40) у вигляді функції  $u_m(\mathbf{x}, t)$ , визначеної при всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T_0]$ . Цей наближений розв'язок має точність  $O(\tau)$ . Якщо зробити розрахунки з кроком  $\frac{\tau}{2}$ , то отримаємо наближений розв'язок  $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$ , який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку  $O(\tau^2)$  за формулою

$$u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t).$$

При чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач

(6.46) – (6.48) для побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 2.3.

Якщо функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  визначена при  $u = 0$ , то незалежно від того  $f(\mathbf{x}, t, 0) > 0$  чи  $f(\mathbf{x}, t, 0) = 0$ , конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v_j^0(\mathbf{x}) = 0$ ,  $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j$ . Це призводить до нерівностей

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, 0, \beta) ds \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta, 0) ds \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Перша з цих нерівностей завжди виконуватиметься, а друга нерівність приводиться до вигляду

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \varphi_j(\mathbf{x}) + M^j \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, \beta, 0) \leq \beta, \quad (6.69)$$

де  $M^j = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^j(\mathbf{x})$ .

Оскільки шуканий розв'язок задачі (6.46) – (6.48) задовольняє однорідну крайову умову, то у загальному випадку незалежно від того, визначена функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  при  $u = 0$  чи ні, конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j \omega(\mathbf{x})$ ,  $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j \omega(\mathbf{x})$ , де  $\omega(\mathbf{x})$  – така функція, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Тоді для визначення чисел  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) відповідно до (2.125) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad \beta_j \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad (6.70)$$

де

$$h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{\omega(\mathbf{x})} + \int_{\Omega} \frac{G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \alpha_j \omega(\mathbf{s}), \beta_j \omega(\mathbf{s})) ds,$$

$$h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{\omega(\mathbf{x})} + \int_{\Omega} \frac{G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\omega(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta_j \omega(\mathbf{s}), \alpha_j \omega(\mathbf{s})) ds.$$

6.3 Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Якщо функція Гріна  $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  задачі (6.46) – (6.48) в області  $\Omega$  невідома або має складний аналітичний вираз (подається у вигляді ряду, містить спеціальні функції тощо), то двобічні наближення до розв'язку задачі можна отримати на основі інтегрального рівняння, побудованого за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова.

Нехай номер  $j$  задачі (6.46) – (6.48) фіксовано і  $Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – відповідна квазіфункція Гріна-Рвачова, тобто

$$Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  у випадку  $\mathbb{R}^2$  і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  у випадку  $\mathbb{R}^3$ ;

$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – фундаментальний розв'язок рівняння

$$-\operatorname{div}(P_j(\mathbf{x})\nabla U) + Q_j(\mathbf{x})U = 0, \mathbf{x} \in \Omega;$$

$\tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – симетрична ( $\tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \tilde{g}_j(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ) двічі диференційована у  $\Omega \times \Omega$  функція така, що  $\tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , якщо  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  чи  $\mathbf{s} \in \partial\Omega$ .

Тоді відповідно до (3.14) отримаємо, що задача (6.46) – (6.48) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})U_j(\mathbf{s})ds + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s}))ds, \quad (6.71)$$

де позначено  $K_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = A_{j,s} \tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ;

$$A_{j,s} U \equiv -\operatorname{div}(P_j(\mathbf{s}) \nabla U) + q_j(\mathbf{s}) U.$$

Рівняння (6.71) розглядатимемо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід'ємних у  $\bar{\Omega}$  неперервних функцій, і шукатимемо узагальнений (у сенсі означення 3.2) розв'язок  $U_j(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (6.71).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T_j$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T_j(U)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_j(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (6.72)$$

Як і у п. 6.2 припустимо, що функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$ , яке породжує діагональне подання функції  $F_j(\mathbf{x}, U_j)$  вигляду (6.49) за правилом (6.52). Позначимо далі

$$K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Тоді оператор  $T_j$  вигляду (6.72) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) ds + \\ &+ \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Оператори  $T_j$  і  $\hat{T}_j$  є цілком неперервними.

Перейдемо до побудови метода двобічних наближень розв'язання інтегрального рівняння (6.71), а отже, і крайової задачі (6.46) – (6.48).

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.73) конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ . Умови (1.34) призводять до то-



го, що для функцій  $v_j^0(x)$  і  $w_j^0(x)$  виконуватимуться нерівності

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}_j(\mathbf{s}, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ & \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}_j(\mathbf{s}, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

або (з урахуванням (6.52))

$$\begin{aligned} & \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_j^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w_j^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

де позначено

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})U_{j-1}(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \quad (6.76)$$

Зрозуміло, що  $\varphi_j(\mathbf{x}) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  і  $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$ .

Далі за схемою (1.36), беручи кінці побудованого конусного відрізка за початкове наближення, сформуємо ітераційний процес:

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}_j(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\
&+ \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}_j(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
v^{(0)}(\mathbf{x}) &= v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

З урахуванням (6.52) та позначення (6.76) ітераційні формули набувають вигляду

$$\begin{aligned}
v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\
&+ \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})ds + \\
&+ \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.78)
\end{aligned}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}). \quad (6.79)$$

Послідовність функцій  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  неспадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  незростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а отже, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  випливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Умови двобічної збіжності цих послідовностей до єдиного неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48) можна отримати, застосовуючи теореми 3.1 – 3.3.

З теореми 3.1 випливає наступне твердження.

*Теорема 6.9.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.72) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.73) і система рівнянь

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{x}) &= \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})ds + \\
&+ \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))ds, \quad (6.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) = & \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})ds - \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})ds + \\
& + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))ds, \tag{6.81}
\end{aligned}$$

не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (6.77) – (6.79) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (6.77) – (6.79) означає виконання ланцюга нерівностей

$$\begin{aligned}
v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq U_j^* \leq \\
\leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \tag{6.82}
\end{aligned}$$

Уточнимо теорему 6.9, накладаючи на функцію  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$  такі додаткові умови, за виконання яких система рівнянь (6.80), (6.81) не має на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ .

Нерівність (3.40), записана для функції  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  вигляду (6.52), призводить до такої умови: для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w) + \frac{u}{M^j + M_1^j},$$

де

$$M^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})ds, \tag{6.83}$$

$$M_1^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s})]ds. \tag{6.84}$$

Тоді справджується така теорема.

*Теорема 6.10.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.72) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.73),  $j = 1, \dots, m$ , і для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w, 0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) + \frac{u}{M + M_1}, \quad (6.85)$$

де  $M = \max_{j=1, \dots, m} M^j, M_1 = \max_{j=1, \dots, m} M_1^j$ , а числа  $M^j, M_1^j, j = 1, \dots, m$ , визначаються рівностями (6.83), (6.84) відповідно.

Тоді при кожному  $j, j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.77) – (6.79) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48).

Накладемо тепер на функцію  $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$  умову (3.44). Вона набуде такого вигляду: існує таке число  $L_j > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_j^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, t_j, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w)| \leq L_j |w - v|.$$

Отже, матиме місце така теорема.

*Теорема 6.11.* Нехай  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.72) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.73),  $j = 1, \dots, m$ , і існує така неперервна на  $(0, T_0]$  функція  $L(t) > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_j^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, t, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) \right| \leq L(t)|w - v|. \quad (6.86)$$

Якщо  $\gamma = M_1 + ML < 1$ , де  $M_1 = \max_{j=1, \dots, m} M_1^j$ ,  $M = \max_{j=1, \dots, m} M^j$ ,  $L = \max_{j=1, \dots, m} L(t_j)$ , то при кожному  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес (6.77) – (6.79) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $U_j^*(\mathbf{x})$  крайової задачі (6.46) – (6.48). При цьому для  $j$ -ї задачі матиме місце оцінка

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (M_1^j + L_j M^j)^{k+1} \|w_j^0 - v_j^0\|,$$

де  $L_j = L(t_j)$ , а числа  $M^j$ ,  $M_1^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , визначаються рівностями (6.83), (6.84) відповідно.

При реалізації методу двобічних наближень на основі використання методу квазіфункцій Гріна-Рвачова за наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (6.37) – (6.40) на  $j$ -му часовому шарі на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію вигляду (6.67), при цьому на кожній  $k$ -й ітерації має місце апостеріорна оцінка похибки

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , ітераційний процес розв'язання  $j$ -ї задачі,  $j = 1, \dots, m$ , слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що

$$u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x}).$$

Застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій вигляду (6.68). З теорем 6.10 – 6.11 відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [80] впливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (6.37) – (6.40) при  $\tau \rightarrow 0$ .

Використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [84], за набором функцій (6.68) можна, побудувати наближений розв'язок задач (6.37) – (6.40) у вигляді функції  $u_m(\mathbf{x}, t)$ , визначеної при всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T_0]$ . Цей наближений розв'язок має точність  $O(\tau)$ . Якщо зробити розрахунки з кроком  $\frac{\tau}{2}$ , то отримаємо наближений розв'язок  $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$ , який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку  $O(\tau^2)$  за формулою

$$u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t).$$

Для побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  при чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (6.46) – (6.48) на основі використання методу квазіфункцій Гріна-Рвачова можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 3.3.

Якщо функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  визначена при  $u = 0$  і конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  відшукується у вигляді  $v_j^0(\mathbf{x}) = 0$ ,  $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j$ , то це призводить до нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) - \beta \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, 0, \beta) ds \geq 0, \quad (6.87)$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \beta \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta, 0) ds \leq \beta. \quad (6.88)$$

Нерівність (6.88), очевидно, можна замінити нерівністю

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \varphi_j(\mathbf{x}) + M_1^+ \beta + M \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, \beta, 0) \leq \beta, \quad (6.89)$$

де  $M_1^+ = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ ,  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ .

Отже, якщо нерівність (6.89) має розв'язок  $\beta > 0$ , при якому справджується нерівність (6.87), то конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$  буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.72) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.73).

У загальному випадку незалежно від того, визначена функція  $f(\mathbf{x}, t, u)$  при  $u = 0$  чи ні, конусний відрізок  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  можна шукати у вигляді  $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j \omega(\mathbf{x})$ ,  $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j \omega(\mathbf{x})$ , де функція  $\omega(\mathbf{x})$  така, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Тоді для визначення чисел  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) відповідно до (3.66), (3.67) отримаємо систему нерівностей

$$\begin{aligned} & \varphi_j(\mathbf{x}) + \alpha_j \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) ds - \beta_j \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) ds + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \alpha_j \omega(\mathbf{s}), \beta_j \omega(\mathbf{s})) ds \geq \alpha_j \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_j(\mathbf{x}) + \beta_j \int_{\Omega} K_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) ds - \alpha_j \int_{\Omega} K_-^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) ds + \\ & + \int_{\Omega} Q^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta_j \omega(\mathbf{s}), \alpha_j \omega(\mathbf{s})) ds \leq \beta_j \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Отже, якщо система нерівностей (6.90), (6.91) має розв'язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 < \alpha < \beta$ , то конусний відрізок  $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$  буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T_j$  вигляду (6.72) з супровідним оператором  $\hat{T}_j$  вигляду (6.73).

## 6.4 Результати обчислювальних експериментів для напівлінійного рівняння теплопровідності

6.4.1 Розв'язання тестової задачі для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна

Роботу запропонованого у п. 6.1 методу продемонструємо на тестовій задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\delta x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \kappa^2 u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T_0], \quad (6.92)$$

$$u(x, t) > 0, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T_0], \quad (6.93)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (6.94)$$

$$u|_{t=0} = x(l-x), \quad x \in (0, l), \quad (6.95)$$

де  $p, q > 0$ ,  $\lambda, \mu > 0$ .

Для функції  $f(x, t, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$  обираємо  $\hat{f}(x, t, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$ . Умова  $u_0$ -псевдоувігнутості (6.19), записана для функції  $f(x, t, u)$ , призводить до нерівності  $\lambda \nu(\nu^{p-1} - 1)\nu^p + \mu \nu(\nu^{q-1} - 1)w^{-q} > 0$ , яка виконуватиметься для всіх  $\nu \in (0, 1)$ ,  $v, w > 0$  і для будь-яких  $\lambda, \mu > 0$ , якщо  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ .

Задача (6.10) – (6.12) для  $j$ -го часового шару відповідна нестационарній задачі (6.92) – (6.95) матиме вигляд

$$-\frac{d}{dx} \left( e^{\delta x} \frac{dU_j}{dx} \right) + \left( \kappa^2 + \frac{1}{\tau} \right) U_j = \frac{1}{\tau} U_{j-1} + \lambda U_j^p + \mu U_j^{-q}, \quad x \in (0, l), \quad (6.96)$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (0, l), \quad (6.97)$$

$$U_j(0) = 0, \quad U_j(l) = 0, \quad (6.98)$$

$$j = 1, \dots, m;$$

$$U_0(x) = x(l-x).$$



Фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння

$$-\frac{d}{dx} \left( e^{\delta x} \frac{dU}{dx} \right) + \left( \kappa^2 + \frac{1}{\tau} \right) U = 0$$

утворюють функції  $e^{-\frac{\delta}{2}x} I_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right)$  та  $e^{-\frac{\delta}{2}x} K_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right)$ , де  $I_1(z)$  і

$K_1(z)$  – модифіковані функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

Крайовій умові  $U(0) = 0$  задовольняє функція

$$g_1(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x} \frac{\left[ K_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) - I_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) \right]}{\left[ K_1 \left( \frac{2\sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) - I_1 \left( \frac{2\sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) \right]},$$

а крайовій умові  $U(l) = 0$  – функція

$$g_2(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x} \frac{\left[ I_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) - K_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) \right]}{\left[ I_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) - K_1 \left( \frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l} \sqrt{1 + \tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}} \right) \right]}.$$

Якщо  $|W(x)| = \begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$  – визначник Вронського функцій  $g_1(x)$  і

$g_2(x)$ , то функція Гріна задачі (6.96) – (6.98) матиме вигляд

$$G(x, s) = - \begin{cases} \frac{g_1(x)g_2(s)}{e^{\delta s} |W(s)|}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{g_1(s)g_2(x)}{e^{\delta s} |W(s)|}, & s \leq x \leq l. \end{cases}$$

Шукаючи на  $j$ -му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  у вигляді  $v_j^0(x) = \alpha_j u_0(x)$ ,  $w_j^0(x) = \beta_j u_0(x)$ , де

$$u_0(x) = \int_0^l G(x, s) ds, \text{ відповідно до (6.35) для визначення чисел } \alpha_j, \beta_j$$

( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq m_0^j + \lambda m_1 \alpha_j^p + \mu m_2 \beta_j^{-q}, \quad \beta_j \geq M_0^j + \lambda M_1 \alpha_j^p + \mu M_2 \beta_j^{-q}, \quad (6.99)$$

де

$$m_0^j = \min_{x \in [0, l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)}, \quad M_0^j = \max_{x \in [0, l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)},$$

$$m_1 = \min_{x \in [0, l]} \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} u_0^p(s) ds, \quad M_1 = \max_{x \in [0, l]} \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} u_0^p(s) ds,$$

$$m_2 = \min_{x \in [0, l]} \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s) ds, \quad M_2 = \max_{x \in [0, l]} \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s) ds.$$

Отже, для  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  згідно з теоремою 6.4 на кожному часовому шарі  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G(x, s) \{ \lambda [v^{(k)}(s)]^p + \mu [w^{(k)}(s)]^{-q} \} ds, \quad (6.100)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G(x, s) \{ \lambda [w^{(k)}(s)]^p + \mu [v^{(k)}(s)]^{-q} \} ds, \quad (6.101)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha_j u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = \beta_j u_0(x), \quad (6.102)$$

де  $\alpha_j, \beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) є розв'язком системи нерівностей (6.99), двобічно збігається до функції  $U_j^*(x)$ , яка є наближенням за модифікованим методом Роте для функції  $u(x, t_j)$ .

Для обчислювального експерименту оберемо  $l = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\lambda = \mu = 1$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$ ,  $T_0 = 0,3$ . Візьмемо крок сітки за часом  $\tau = 0,1$  і побудуємо на першому часовому шарі  $t = \tau$  з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  наближення  $U_1(x)$  до функції  $u(x, t)$ . Знаходимо

$$\varphi_1(x) = 10 \int_0^1 G(x, s) s(1-s) ds, \quad u_0(x) = \int_0^1 G(x, s) ds,$$

$$m_0^1 = 1,4539, \quad M_0^1 = 2,1171,$$

$$m_1 = 0,1554, \quad M_1 = 0,1942, \quad m_2 = 5,2837, \quad M_2 = 8,5482.$$

Множину значень  $(\alpha_1, \beta_1)$ , що задовольняють при  $j = 1$  систему нерівностей (6.99) наведено на рис. 6.1.

Для реалізації ітераційного процесу (6.100) – (6.102) обираємо  $\alpha_1 = 3,7444$ ,  $\beta_1 = 7,0503$ . Для досягнення заданої точності було зроблено шість ітерацій. На рис. 6.2 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(x)$  (штрихована лінія) наближень до  $U_1^*(x)$  для  $k = 0, 2, 4, 6$ .

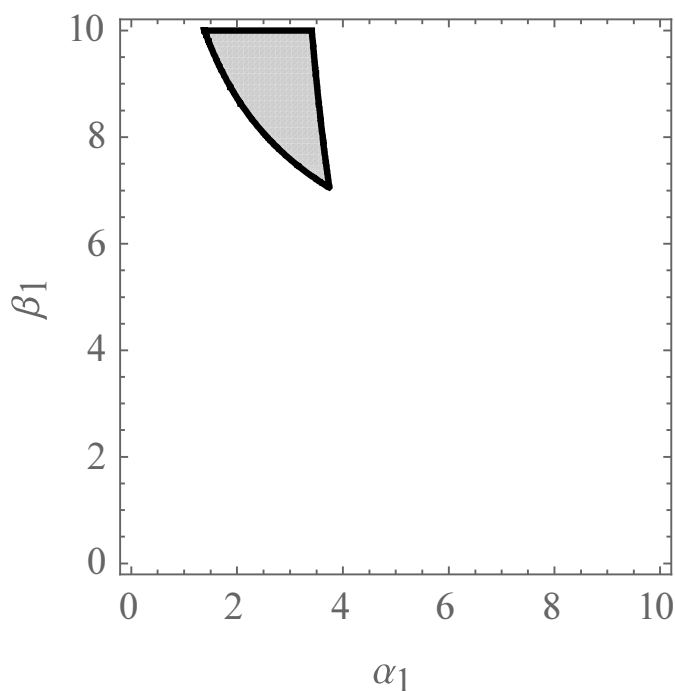


Рисунок 6.1 – Розв’язок системи нерівностей (6.99) при  $j = 1$  ( $\tau = 0,1$ )

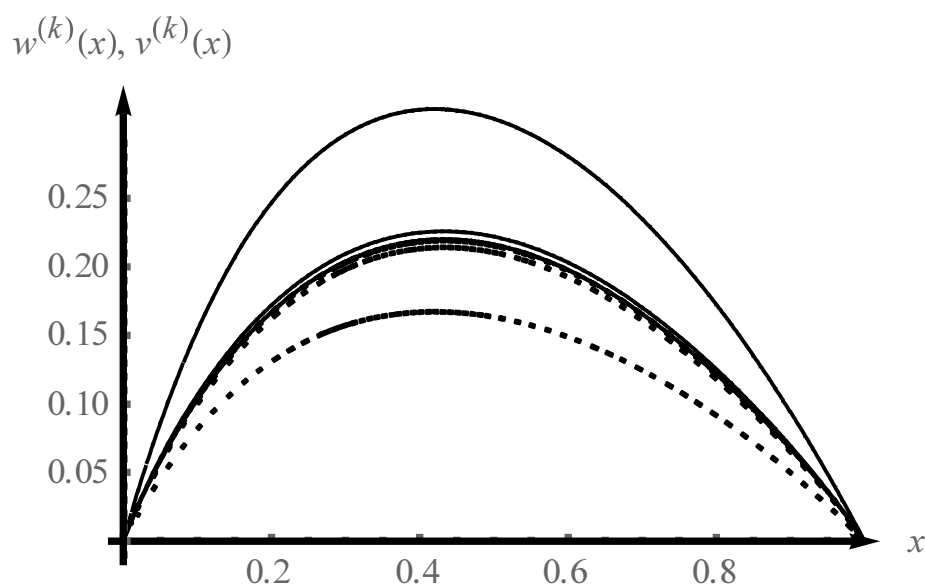


Рисунок 6.2 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень до  $U_1^*(x)$  для  $k = 0, 2, 4, 6$  ( $\tau = 0,1$ )

Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ , похибок

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)), \text{ отримали, що } \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,301. \text{ Це свідчить про гео-}$$

метричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з показником 0,301.

Аналогічно було знайдено з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  наближення до  $u(x, t)$  на часових шарах  $t_j = 0,1j$  при  $j = 2, 3$ . Отримані функції  $U_1(x)$ ,  $U_2(x)$ ,  $U_3(x)$  наближають з точністю  $O(\tau)$  значення  $u(x, t)$  у моменти часу  $t_1 = 0,1$ ,  $t_2 = 0,2$ ,  $t_3 = 0,3$  відповідно. Для їх уточнення до порядку  $O(\tau^2)$  було з тією ж самою точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  отримано розв'язки  $\tilde{U}_1(x)$ ,  $\tilde{U}_2(x)$ ,  $\tilde{U}_3(x)$ ,  $\tilde{U}_4(x)$ ,  $\tilde{U}_5(x)$ ,  $\tilde{U}_6(x)$  з кроком  $\tau = 0,05$  для відповідних моментів часу  $t_1 = 0,05$ ,  $t_2 = 0,1$ ,  $t_3 = 0,15$ ,  $t_4 = 0,2$ ,  $t_5 = 0,25$ ,  $t_6 = 0,3$ . З їх допомогою значення  $U_1(x)$ ,  $U_2(x)$ ,  $U_3(x)$  було уточнено за формулами

$$u(x, 0,1) \approx 2\tilde{U}_2(x) - U_1(x),$$

$$u(x, 0,2) \approx 2\tilde{U}_4(x) - U_2(x),$$

$$u(x, 0,3) \approx 2\tilde{U}_6(x) - U_3(x).$$

Значення функції  $u(x, 0) = x(1 - x)$  та наближень до  $u(x, 0, 1)$ ,  $u(x, 0, 2)$ ,  $u(x, 0, 3)$  у точках відрізка  $[0, 1]$  з кроком 0,1 наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Значення наближеного розв'язку задачі (6.92) – (6.95)

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u(x_i, 0)$	0	0,090	0,160	0,210	0,240	0,250	0,240	0,210	0,160	0,090	0
$u(x_i, 0, 1)$	0	0,104	0,167	0,201	0,213	0,208	0,188	0,157	0,115	0,064	0
$u(x_i, 0, 2)$	0	0,102	0,162	0,195	0,207	0,203	0,184	0,154	0,113	0,063	0
$u(x_i, 0, 3)$	0	0,101	0,162	0,195	0,207	0,202	0,184	0,154	0,113	0,063	0

6.4.2 Розв'язання тестової задачі для багатовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова

Розглянемо тепер задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0],$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0],$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_0],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

у одиничному квадраті  $\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$  з

$$f(\mathbf{x}, t, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad (6.103)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2),$$

де  $p, q > 0$ ,  $\lambda, \mu > 0$ .

Для функції  $f(\mathbf{x}, t, u)$  вигляду (6.103) обираємо  $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$ . Умова  $u_0$ -псевдоувігнутості (6.54), записана для функції  $f(\mathbf{x}, t, u)$  вигляду (6.103), призводить до нерівності

$$\lambda\nu(\tau^{p-1} - 1)v^p + \mu\nu(\tau^{q-1} - 1)w^{-q} > 0,$$

яка виконуватиметься для всіх  $\nu \in (0, 1)$ ,  $v, w > 0$  і для будь-яких  $\lambda, \mu > 0$ , якщо  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ .

Відповідно до модифікованого метода Роте розв'язання розглядуваної початково-крайової задачі зводиться до розв'язання послідовності нелінійних еліптичних крайових задач

$$\begin{aligned} -\Delta U_j + \frac{1}{a^2\tau}U_j &= \frac{1}{a^2\tau}U_{j-1} + \frac{1}{a^2}f(\mathbf{x}, t_j, U_j), \mathbf{x} \in \Omega, \\ U_j(\mathbf{x}) &> 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ U_j|_{\partial\Omega} &= 0, j = 1, \dots, m; \\ U_0(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца  $-\Delta + \frac{1}{a^2\tau}$  у одиничному квадраті  $\Omega$  має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi n s_1 \sin \pi m s_2}{\pi^2(n^2 + m^2) + \kappa^2},$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ,  $\kappa^2 = \frac{1}{a^2\tau}$ .

Шукаючи на  $j$ -му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$  у вигляді  $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x})$ ,  $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x})$ , відповідно до (6.70) для визначення чисел  $\alpha_j, \beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) отримуємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq m_0^j + \frac{\lambda m_1^j}{a^2} \alpha_j^p + \frac{\mu m_2^j}{a^2} \beta_j^{-q}, \quad \beta_j \geq M_0^j + \frac{\lambda M_1^j}{a^2} \beta_j^p + \frac{\mu M_2^j}{a^2} \alpha_j^{-q}, \quad (6.104)$$

де

$$m_0^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})}, \quad M_0^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})},$$

$$m_1^j = \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad M_1^j = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$$m_2^j = \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad M_2^j = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Отже, для  $\lambda, \mu > 0$  і  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$  згідно з теоремою 6.8 на кожному часовому шарі  $j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s}, \quad (6.105)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \{ \lambda [w^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [v^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \} d\mathbf{s}, \quad (6.106)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x}), \quad (6.107)$$

де  $\alpha_j, \beta_j$  ( $0 < \alpha_j < \beta_j$ ) є розв'язком системи нерівностей (6.104), двобічно збігається до функції  $U_j^*(\mathbf{x})$ , яка є наближенням за модифікованим методом Роте для  $u(\mathbf{x}, t_j)$ .

Застосуємо розроблений метод двобічних наближень до знаходження наближення  $U_1(\mathbf{x})$  до функції  $u(\mathbf{x}, t)$  на першому часовому шарі для  $\tau_1 = 0,1$ , якщо  $a = 1$ ,  $\lambda = \mu = 1$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$ . Знаходимо

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 10 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1 - s_1) (1 - s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,1241, \quad M_0^1 = 0,4682,$$

$$m_1^1 = 0,0921, \quad M_1^1 = 0,1908, \quad m_2^1 = 5,4310, \quad M_2^1 = 17,1891.$$

Розв'язок системи нерівностей (6.104) для обраних значень параметра наведено на рис. 6.3.

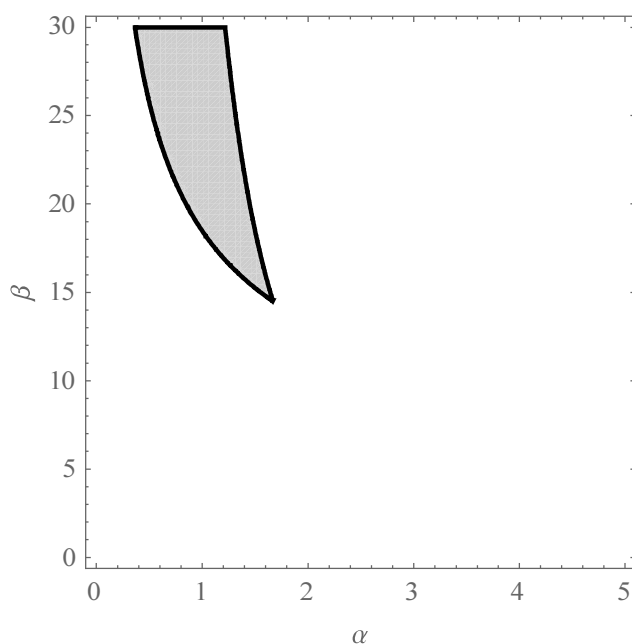


Рисунок 6.3 – Розв’язок системи нерівностей (6.104)  
для першого часового шару ( $\tau = 0,1$ )

Для реалізації ітераційного процесу (6.105) – (6.107) обираємо  $\alpha_1 = 1,6693$ ,  $\beta_1 = 14,4990$ . Для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  було зроблено десять ітерацій. На рис. 6.4 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_1^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$  у перерізі  $x_2 = 0,5$ . На рис. 6.5 наведено поверхню, а на рис. 6.6 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв’язку  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ , а у табл. 6.2 наведено значення  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$  у точках області  $\bar{\Omega}$  з координатами  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$ . Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 9$ , похибок  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , отримали  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,452$ , що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з таким показником.

Знайдемо тепер розробленим методом наближення  $U_1(\mathbf{x})$  і  $U_2(\mathbf{x})$  до функції  $u(\mathbf{x}, t)$  на першому та другому часових шарах для  $\tau_2 = 0,05$ , якщо  $a = 1$ ,  $\lambda = \mu = 1$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Для першого часового шару з  $\tau_2 = 0,05$  знаходимо



$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1 - s_1)(1 - s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,2083, \quad M_0^1 = 0,9649,$$

$$m_1^1 = 0,0770, \quad M_1^1 = 0,1666, \quad m_2^1 = 6,1659, \quad M_2^1 = 19,5828.$$

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), \quad v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

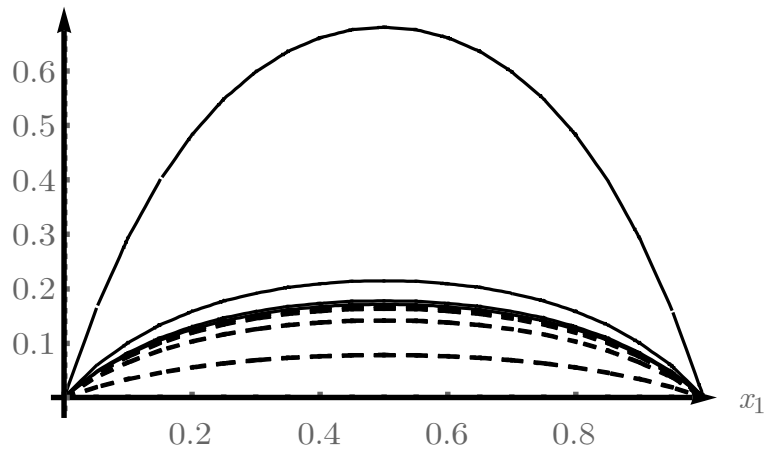


Рисунок 6.4 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_1^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$  у перерізі  $x_2 = 0,5$  для першого часового шару ( $\tau = 0,1$ )

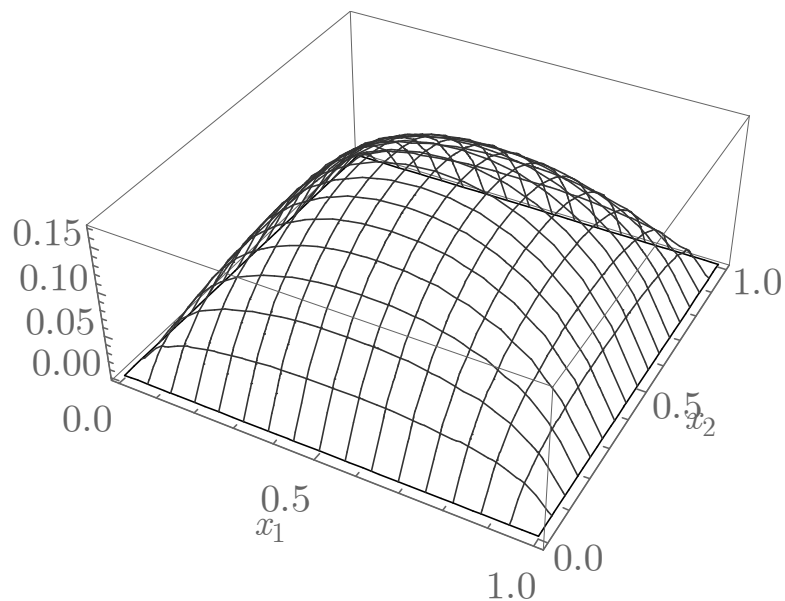


Рисунок 6.5 – Поверхня наближеного розв'язку  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$  для першого часового шару ( $\tau = 0,1$ )

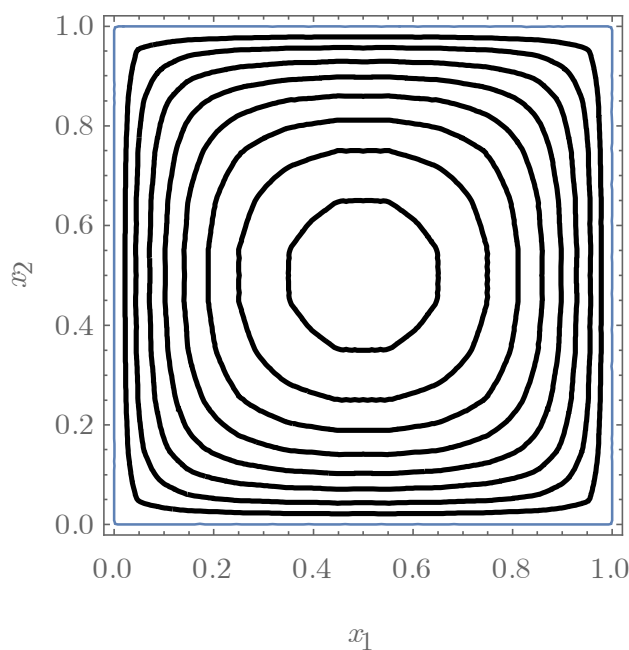


Рисунок 6.6 – Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв’язку  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$  для першого часового шару ( $\tau = 0,1$ )

Таблиця 6.2 – Значення функції  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$  у точках вигляду  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$  ( $\tau = 0,1$ )

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,2$	$x_1^2 = 0,4$	$x_1^3 = 0,6$	$x_1^4 = 0,8$	$x_1^5 = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,2$	0	0,0961	0,1218	0,1218	0,0961	0
$x_2^2 = 0,4$	0	0,1218	0,1613	0,1613	0,1218	0
$x_2^3 = 0,6$	0	0,1218	0,1613	0,1613	0,1218	0
$x_2^4 = 0,8$	0	0,0961	0,1218	0,1218	0,0961	0
$x_2^5 = 1$	0	0	0	0	0	0

Розв’язок системи нерівностей (6.104) для обраних значень параметра наведено на рис. 6.7. Для реалізації ітераційного процесу (6.105) – (6.107) обираємо  $\alpha_1 = 1,8539$ ,  $\beta_1 = 16,0138$ . Для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  було зроблено дев’ять ітерацій. На рис. 6.8 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_1^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$  у перерізі  $x_2 = 0,5$ . На рис. 6.9 наведено поверхню, а на рис. 6.10 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв’язку  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ , а у табл. 6.3 наведено значення  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$  у точках області  $\bar{\Omega}$  з координатами  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$ . Розгля-

даючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 8$ , похибок  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ ,

отримали  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,419$ , що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

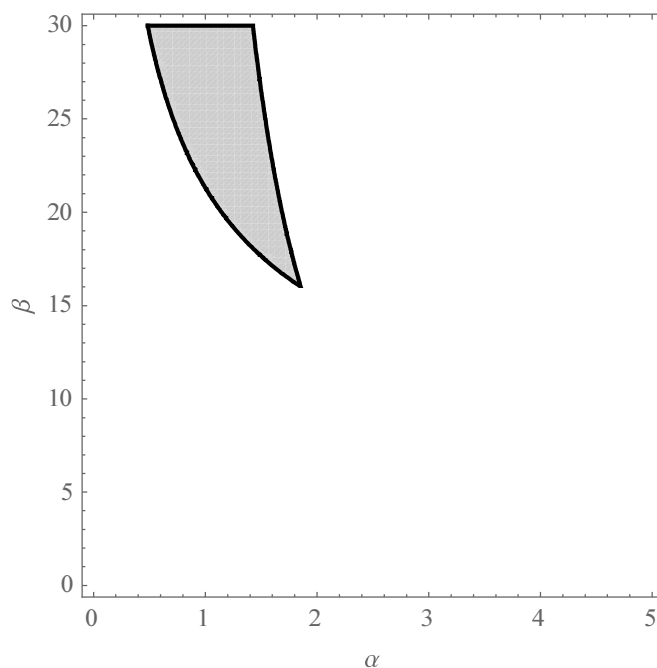


Рисунок 6.7 – Розв’язок системи нерівностей (6.104)  
для першого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$

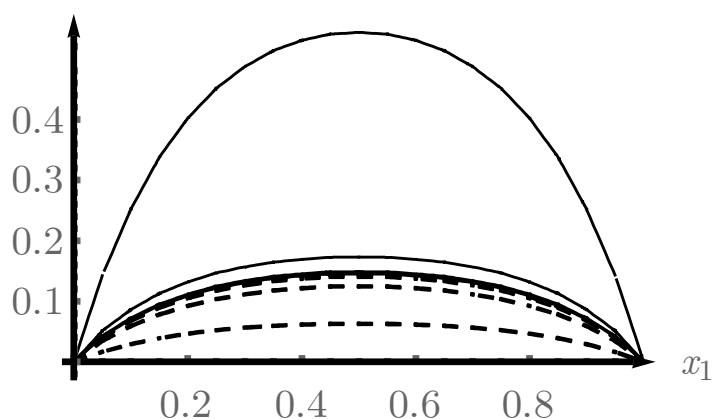


Рисунок 6.8 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія)  
та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_1^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$   
у перерізі  $x_2 = 0,5$  для першого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

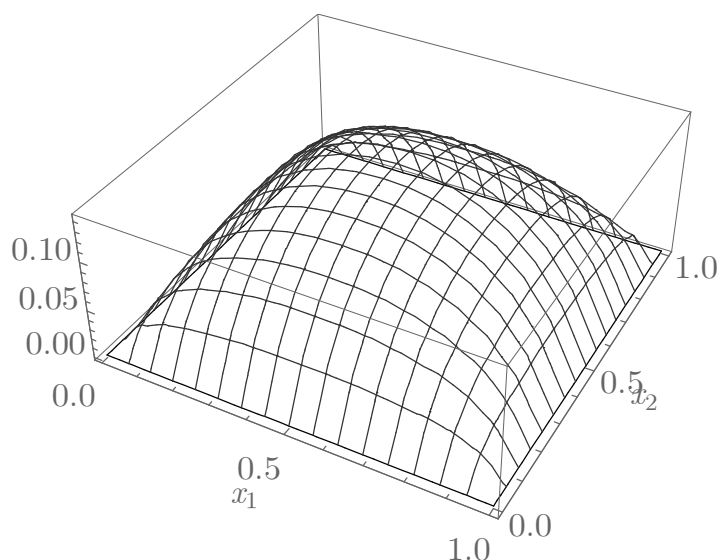


Рисунок 6.9 – Поверхня наближеного розв'язку  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$   
для першого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

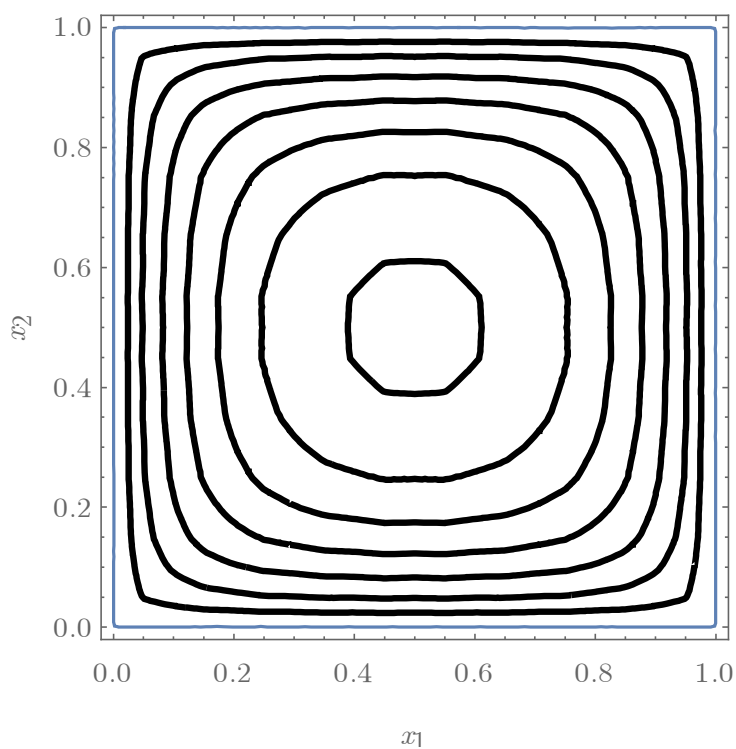


Рисунок 6.10 – Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$   
для першого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

Аналогічно для другого часового шару з  $\tau_2 = 0,05$  знаходимо

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_1^{(9)}(s_1, s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^2 = 0,4303, M_0^2 = 1,1886,$$

$$m_1^2 = 0,0921, M_1^2 = 0,1908, m_2^2 = 5,4310, M_2^2 = 17,1891.$$

Таблиця 6.3 – Значення функції  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$  у точках вигляду  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$  ( $\tau = 0,05$ )

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,2$	$x_1^2 = 0,4$	$x_1^3 = 0,6$	$x_1^4 = 0,8$	$x_1^5 = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,2$	0	0,0856	0,1061	0,1061	0,0856	0
$x_2^2 = 0,4$	0	0,1061	0,1376	0,1376	0,1061	0
$x_2^3 = 0,6$	0	0,1061	0,1376	0,1376	0,1061	0
$x_2^4 = 0,8$	0	0,0856	0,1061	0,1061	0,0856	0
$x_2^5 = 1$	0	0	0	0	0	0

Розв'язок системи нерівностей (6.104) для обраних значень параметра наведено на рис. 6.11.

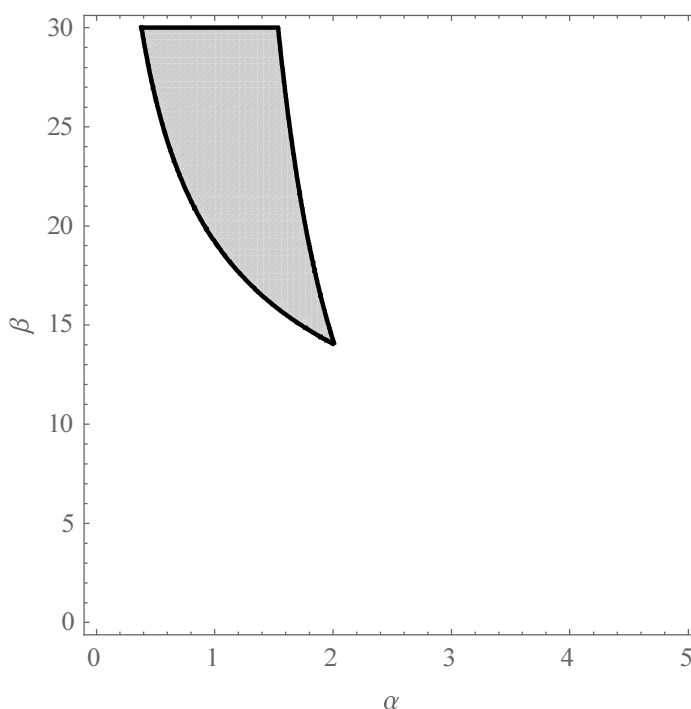


Рисунок 6.11 – Розв'язок системи нерівностей (6.104) для другого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

Для реалізації ітераційного процесу (6.105) – (6.107) обираємо  $\alpha_2 = 2,0111$ ,  $\beta_2 = 14,0242$ . Для досягнення точності  $\varepsilon = 10^{-4}$  було зроблено

вісім ітерацій. На рис. 6.12 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_2^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$  у перерізі  $x_2 = 0,5$ . На рис. 6.13 наведено поверхню, а на рис. 6.14 лінії рівня (з кроком  $0,02$ ) наближеного розв'язку  $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ , а у табл. 6.4 наведено значення  $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$  у точках області  $\bar{\Omega}$  з координатами  $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$ ,

$r, s = 0, 1, \dots, 10$ . Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ , похибок

$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ , отримали  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,385$ , що свідчить про геомет-

ричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

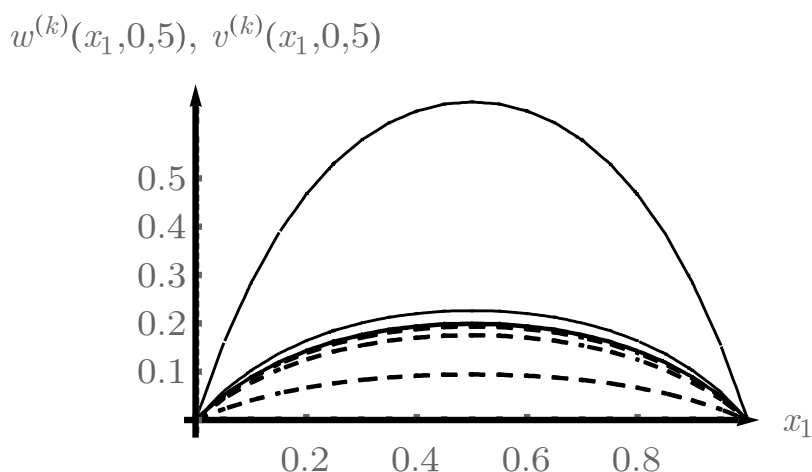


Рисунок 6.12 – Графіки верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія)

та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень до  $U_2^*(\mathbf{x})$  для  $k = 0, 2, 4, 6$

у перерізі  $x_2 = 0,5$  для другого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

Отримані функції  $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ ,  $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$  і  $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$  є розв'язками з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  відповідних крайових задач і наближають  $u(\mathbf{x}, 0,1)$ ,  $u(\mathbf{x}, 0,05)$  і  $u(\mathbf{x}, 0,1)$  відповідно, але їх точність відносно кроку за часом становить лише  $O(\tau)$ . На основі правила Рунге уточнене до  $O(\tau^2)$  значення  $u(\mathbf{x}, 0,1)$  розрахуємо за формулою

$$u(\mathbf{x}, 0,1) = 2U_2^{(8)}(\mathbf{x}) - U_1^{(10)}(\mathbf{x}).$$

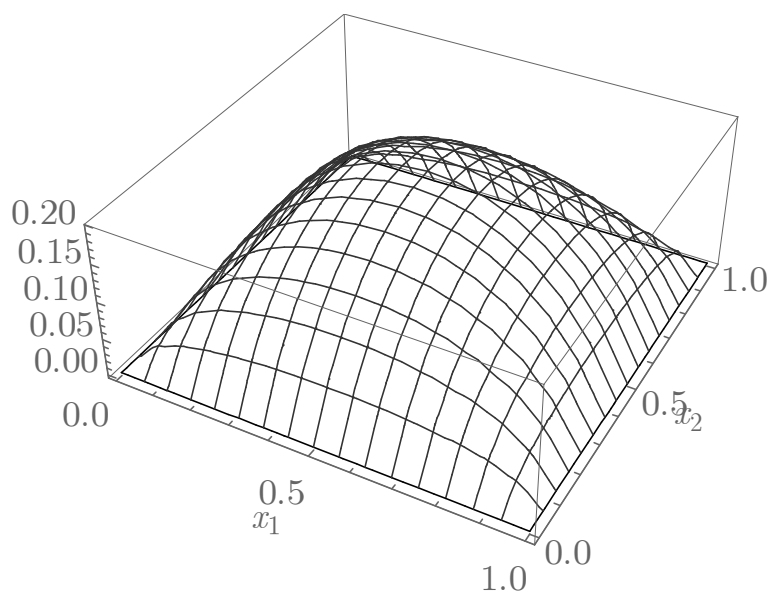


Рисунок 6.13 – Поверхня наближеного розв'язку  $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$   
для другого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

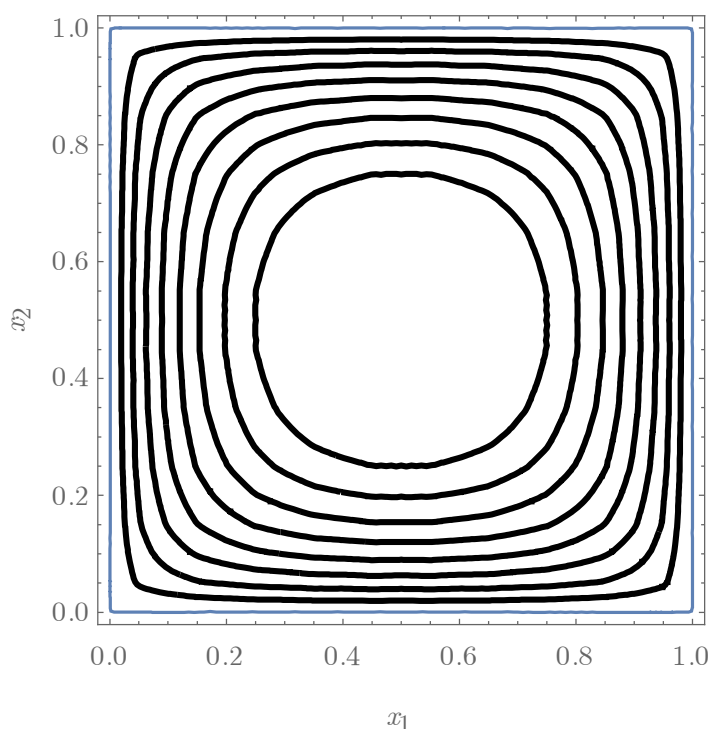


Рисунок 6.14 – Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку  $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$   
для другого часового шару ( $\tau = 0,05$ )

На рис. 6.15 наведено поверхню, а на рис. 6.16 лінії рівня (з кроком 0,02) наближення для  $u(\mathbf{x}, 0,1)$ , а у табл. 6.5 наведено значення цієї функції у точках області  $\bar{\Omega}$  з координатами  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$ .

Таблиця 6.4 – Значення функції  $U_2^{(s)}(\mathbf{x})$  у точках області  $\bar{\Omega}$  вигляду  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,2$	$x_1^2 = 0,4$	$x_1^3 = 0,6$	$x_1^4 = 0,8$	$x_1^5 = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,2$	0	0,1072	0,1382	0,1382	0,1072	0
$x_2^2 = 0,4$	0	0,1382	0,1862	0,1862	0,1382	0
$x_2^3 = 0,6$	0	0,1382	0,1862	0,1862	0,1382	0
$x_2^4 = 0,8$	0	0,1072	0,1382	0,1382	0,1072	0
$x_2^5 = 1$	0	0	0	0	0	0

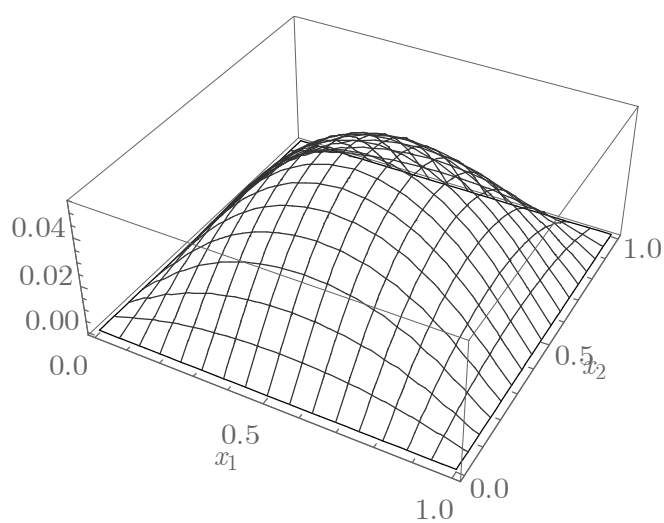


Рисунок 6.15 – Поверхня наближення для  $u(\mathbf{x}, 0, 1)$

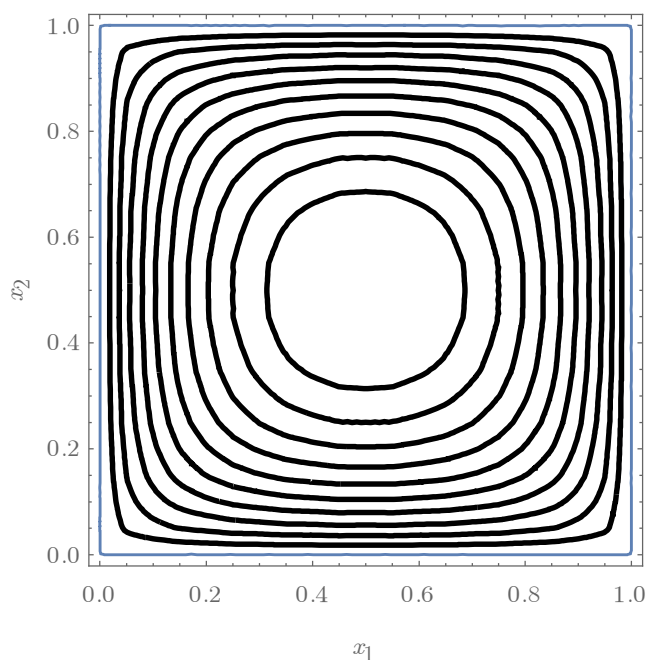


Рисунок 6.16 – Лінії рівня наближення для  $u(\mathbf{x}, 0, 1)$



Таблиця 6.5 – Значення наближення для  $u(\mathbf{x}, 0, 1)$  у точках області  $\bar{\Omega}$  вигляду  $(x_1^r, x_2^s) = (0, 2r; 0, 2s)$ ,  $r, s = 0, 1, \dots, 5$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0, 2$	$x_1^2 = 0, 4$	$x_1^3 = 0, 6$	$x_1^4 = 0, 8$	$x_1^5 = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0, 2$	0	0,1182	0,1546	0,1546	0,1182	0
$x_2^2 = 0, 4$	0	0,1546	0,2110	0,2110	0,1546	0
$x_2^3 = 0, 6$	0	0,1546	0,2110	0,2110	0,1546	0
$x_2^4 = 0, 8$	0	0,1182	0,1546	0,1546	0,1182	0
$x_2^5 = 1$	0	0	0	0	0	0

Аналогічні розрахунки було проведено і за допомогою методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Значення  $u(\mathbf{x}, 0, 1)$  співпали з точністю  $0,48 \cdot 10^{-3}$  у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$ , відносна похибка склала 0,23%.

## Висновки за розділом 6

1. Розглянуті першу початково-крайові задачі для одновимірного та багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння за допомогою модифікованого методу Роте зведено відповідно до послідовності перших крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь та напівлінійних еліптичних рівнянь.

2. Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до отриманої модифікованим методом Роте послідовності задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволило вперше розробити напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння з двобічною оцінкою похибки на кожному часовому шарі.

3. Застосування до послідовності задач для напівлінійних еліптичних рівнянь, які були отримані модифікованим методом Роте, методу двобічних набли-

жень на основі використання функції Гріна чи методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова дозволило вперше розробити напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для дво- та тривимірного напівлінійного параболічного рівняння, який відрізняється від відомих методів тим, що на кожному часовому шарі має двобічну оцінку похибки.

4. Отриманий комбінованим методом Рунге та двобічних наближень розв'язок розглядуваної першої початково-крайової задачі запропоновано уточнити за допомогою правила Рунге, що дозволило підвищити порядок апроксимації за часом з першого до другого.

5. Проведені обчислювальні експерименти для тестової задачі для одновимірного параболічного рівняння зі змінним коефіцієнтом та степеневою нелінійністю та для двовимірного параболічного рівняння зі степеневою нелінійністю, що розглядаються у одиничному квадраті, продемонстрували можливості запропонованих методів та підтвердили їх ефективність.

Основні результати шостого розділу опубліковані у роботах [143, 149, 152, 153].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [80, 84, 101, 126, 141, 143, 149, 152, 153, 158, 162, 276, 285].

## 7 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НАВ'Є

7.1 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності

Розглядатимемо проблему знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\operatorname{div}(k(T) \operatorname{grad} T) = \lambda f(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.1)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.2)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ;

$f(\mathbf{x}, T)$  – неперервна і додатна при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $T > 0$  функція;

$k(T) = k_0 T^\sigma$ ,  $\sigma > 0$  – параметри нелінійності середовища;

$\lambda > 0$  – стала.

Задача (7.1), (7.2) є математичною моделлю процесу теплопровідності, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури, а також коли в  $\Omega$  наявні джерела тепловиділення за нелінійним законом  $f(\mathbf{x}, T)$  (параметр  $\lambda$  характеризує їх потужність) [14, 100, 138, 141].

У задачі (7.1), (7.2) зробимо заміну  $T = \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$ , де  $u(\mathbf{x})$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $u$  отримаємо задачу

$$-\Delta u = \lambda F(\mathbf{x}, u) \text{ у } \Omega, \quad (7.3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.4)$$

$$\text{де } F(\mathbf{x}, u) = f\left(\mathbf{x}, \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\right).$$

До розв'язання задачі (7.3), (7.4) застосуємо розроблені у розділах 2 і 3 методи двобічних наближень.

Спочатку застосуємо метод двобічних наближень, заснований на використанні функції Гріна. Отже, нехай  $G(\mathbf{x}, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у області  $\Omega$ . Тоді задача (7.3), (7.4) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) F(s, u(s)) ds. \quad (7.5)$$

Узагальненим розв'язком задачі (7.3), (7.4) відповідно до означення 2.2 називатимемо функцію  $u^* \in C(\bar{\Omega})$ , яка є розв'язком рівняння (7.5). Тоді розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (7.1), (7.2) природно вважати функцію

$$T^* = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u^*\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}. \quad (7.6)$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T$ , який діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною інтегрального рівняння (7.5):

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) F(s, u(s)) ds. \quad (7.7)$$

Функція  $F(\mathbf{x}, u)$  неперервна і додатна при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $T > 0$ , оскільки таку властивість має функція  $f(\mathbf{x}, T)$ , а функція Гріна  $G(\mathbf{x}, s) \geq 0$ ,  $\mathbf{x}, s \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq s$ . Тоді оператор  $T$  є додатним, тобто залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ :  $T(\mathcal{K}_+) \subset \mathcal{K}_+$ .

Припустимо, що функція  $F(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $F(\mathbf{x}, u) = \hat{F}(\mathbf{x}, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$  функція

$\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (7.5) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (7.8)$$

Оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $T$  конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  умовами (1.34):

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v_0(\mathbf{s}), w_0(\mathbf{s})) ds \geq v_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w_0(\mathbf{s}), v_0(\mathbf{s})) ds \leq w_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Сформуємо далі за схемою (1.36) ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (7.9)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (7.10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \quad (7.11)$$

Оскільки конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є сильно інваріантним, а оператор  $T$  є гетеротонним, то утворені за формулами (7.10), (7.11) послідовність  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  і послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$  відповідно не спадає і не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. При цьому справджується наступний ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Граничні функції  $v^*$  і  $w^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (7.12)$$

$$w(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds. \quad (7.13)$$

Умовою того, що на конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  існує єдина нерухома точка  $u^*$  оператора  $T$  (а отже, і єдиний на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язок  $u^*$  крайової задачі (7.3), (7.4)) є виконання рівності  $v^* = w^*$ . З огляду на результати п. 2.2 достатніми умовами цього будуть такі умови:

(А) система (7.12), (7.13) не має на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язків  $(v, w)$  таких, що  $v \neq w$ ;

(Б) для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{F}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1},$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ ;

(В) існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{F}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) \right| \leq L|w - v|,$$

причому  $\gamma = \lambda LM < 1$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ ;

(Г) для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{F}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(\mathbf{x}, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тоді справджується така теорема.

*Теорема 7.1.* Нехай гетеротонний оператор  $T$  вигляду (7.7), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (7.8) є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  і виконується хоча б одна з умов (А) – (Г). Тоді ітераційний процес (7.9) – (7.11) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (7.3), (7.4), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Застосуємо тепер до розв'язання задачі (7.3), (7.4) метод двобічних наближень, заснований на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова. Нехай геометрія області  $\Omega$  може бути описана методом  $R$ -функцій за допомогою функції  $\omega(\mathbf{x})$ , а  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – квазіфункція Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у області  $\Omega$ , яка визначається формулою (3.23), якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і формулою (3.24), якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Тоді задача (7.3), (7.4) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})F(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (7.14)$$

де  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_{\mathbf{s}}\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , а  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}, \text{ якщо } \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T$ , який діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною інтегрального рівняння (7.14):

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})F(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (7.15)$$

Нехай як і раніше функція  $F(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $F(\mathbf{x}, u) = \hat{F}(\mathbf{x}, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$  функція  $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (7.15) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

де  $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ ,  $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ .

Оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Умовами (1.34) у конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $T$  конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$ : для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, v_0(\mathbf{s}), w_0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} & \geq v_0(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, w_0(\mathbf{s}), v_0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} & \leq w_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далі за схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес:

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \quad (7.19)$$

Через те, що конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  є сильно інваріантним, а оператор  $T$  є гетеротонним, послідовність  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ , утворена за правилом (7.17), не спадає і послідовність  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ , утворена за правилом (7.18), не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Тоді з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора



$\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей, при цьому справджується такий ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Граничні функції  $v^*$  і  $w^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s} = v(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{F}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s}))d\mathbf{s} = w(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7.21)$$

На конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  існуватиме єдина нерухома точка  $u^*$  оператора  $T$  (а отже, і єдиний на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язок  $u^*$  крайової задачі (7.3), (7.4)), якщо виконується рівність  $v^* = w^*$ . З огляду на результати п. 3.2 достатніми умовами цього будуть такі умови:

(А) система (7.20), (7.21) не має на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язків  $(v, w)$  таких, що  $v \neq w$ ;

(Б) для будь-яких чисел  $v, w, u$  таких, що  $0 < v < w$ ,  $0 < u < w$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{F}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) + \frac{u}{M + M_1},$$

де  $M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})]d\mathbf{s}$ ,  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})d\mathbf{s}$ ;

(В) існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{F}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) \right| \leq L|w - v|,$$

причому  $\gamma = M_1 + \lambda LM < 1$ , де  $M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds$ ,

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 7.2.* Нехай гетеротонний оператор  $T$  вигляду (7.15), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (7.16) є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  і виконується хоча б одна з умов (А) – (В). Тоді ітераційний процес (7.17) – (7.19) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (7.3), (7.4), причому справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Перевагою побудованих двобічних ітераційних процесів (7.9) – (7.11) і (7.17) – (7.19) є те, що на кожній  $k$ -й ітерації для наближеного розв'язку

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$$

ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Отже, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітерації слід проводити до виконання нерівності  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$ . Тоді з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що

$u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$ , а отже, відповідно до (7.6),

$$T^*(\mathbf{x}) \approx \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u^{(k)}(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

7.2 Розв'язання тестових задач для рівняння теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом методами двобічних наближень

Застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна до задачі (7.1), (7.2), що розглядається при  $k_0 = 1$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$ ,  $f(\mathbf{x}, u) = e^u$  у одиничному крузі  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ , тобто розглянемо задачу

$$-\operatorname{div}(\sqrt{T} \operatorname{grad} T) = \lambda e^T, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.22)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.23)$$

У задачі (7.22), (7.23) зробимо заміну  $T = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{u^2}$ , де  $u$  – нова невідома функція. Це призводить до задачі

$$-\Delta u = \lambda \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{u^2}\right\}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.24)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.25)$$

У просторі  $C(\bar{\Omega})$  задача (7.24), (7.25) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{[u(\mathbf{s})]^2}\right\} d\mathbf{s}, \quad (7.26)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}s^1}}{r_{\mathbf{x}s}}$ ,  $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , точки  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{s}^1$  симетричні відносно кола одиничного радіуса, а  $r_{\mathbf{x}s}$ ,  $r_{\mathbf{x}s^1}$  – відстані між точками  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}^1$  відповідно.

Функція  $F(\mathbf{x}, u) = \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{u^2}\right\}$  монотонно зростає за  $u$ , тому обираємо

$\hat{F}(\mathbf{x}, v, w) = \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{v^2}\right\}$  і оператор, супровідний для гетеротонного оператора

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{[u(\mathbf{s})]^2} \right\} ds, \quad (7.27)$$

має вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{[v(\mathbf{s})]^2} \right\} ds.$$

Сильно інваріантний для гетеротонного оператора (7.27) конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ . Тоді нерівності, які його визначають, приймають вигляд

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq 0, \quad \lambda \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{\beta^2} \right\} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta.$$

Перша з цих нерівностей завжди виконується, бо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ , а з другої нерівності, оскільки  $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \frac{1}{4}$ , отримуємо, що

$$\beta \exp \left\{ -\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{\beta^2} \right\} \geq \frac{\lambda}{4}. \quad (7.28)$$

Нерівність (7.28) має розв'язок відносно  $\beta$ , якщо  $\lambda \leq 1,0931$ .

Двобічний ітераційний процес послідовних наближень до розв'язку рівняння (7.26) (а отже, і задачі (7.24), (7.25)) сформуємо за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{[v^{(k)}(\mathbf{s})]^2} \right\} ds, \quad (7.29)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{[w^{(k)}(\mathbf{s})]^2} \right\} ds, \quad (7.30)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta.$$

Виконання умови  $\hat{F}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$  для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$  перевіряється безпосередньо:

$$\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{\tau^2 v^2}\right\} > \tau \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{v^2}\right\}.$$

Отже, справджується така теорема.

*Теорема 7.3.* Нехай  $\lambda \in (0; \approx 1,0931)$ , а  $\beta$  визначається нерівністю (7.28). Тоді ітераційний процес (7.29), (7.30) з  $v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta$  двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (7.24), (7.25), а отже, послідовність

$$T^{(k)}(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u^{(k)}(\mathbf{x})]^2},$$

де  $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(k)}(\mathbf{x}) + w^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$  збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (7.22), (7.23).

Обчислювальний експеримент було проведено для значення  $\lambda = 0,4$ . Для цього  $\lambda$  розв'язок нерівності (7.28) має вигляд  $0,14313 \leq \beta \leq 5,25829$ . Оскільки значення  $\beta$  слід обирати якомога меншим (щоб мати мінімальну довжину конусного відрізка), то обираємо  $\beta = 0,1432$ .

Оберемо  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Значення оцінки похибки  $\varepsilon^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{2} |w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})|$  наближеного розв'язку  $u^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , наведено в таблиці 7.1, а в таблиці 7.2 наведено значення наближень  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  та  $v^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , в точці  $(0; 0)$ . На рис. 7.1 наведено графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Розглядаючи за даними табл. 7.1 відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , отримуємо, що  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,178$ . Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником.

Таблиця 7.1 – Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0,72 \cdot 10^{-1}$	$0,22 \cdot 10^{-1}$	$0,41 \cdot 10^{-2}$	$0,73 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,23 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 7.2 – Значення послідовних наближень в точці  $(0; 0)$ 

$k$	0	1	2	3	4	5
$w^{(k)}(0, 0)$	0,14313	0,14313	0,13421	0,13240	0,13207	0,13202
$u^{(k)}(0, 0)$	0,07157	0,12156	0,13012	0,13167	0,13194	0,13199
$v^{(k)}(0, 0)$	0,00000	0,10000	0,12603	0,13094	0,13182	0,13197

Як бачимо, точність  $\varepsilon = 10^{-4}$  досягнута на п'ятій ітерації. Тоді

$$T^*(\mathbf{x}) \approx T^{(5)}(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \sqrt[3]{[u^{(5)}(\mathbf{x})]^2}},$$

$$\text{де } u^{(5)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(5)}(\mathbf{x}) + w^{(5)}(\mathbf{x})}{2}.$$

На рис. 7.2 і 7.3 наведено відповідно поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку  $T^{(5)}(\mathbf{x})$ , а у таблиці 7.3 через радіальну симетричність функції  $T^{(5)}(\mathbf{x})$  наведено значення  $T^{(5)}(\mathbf{x})$  в точках  $(0, 2i; 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

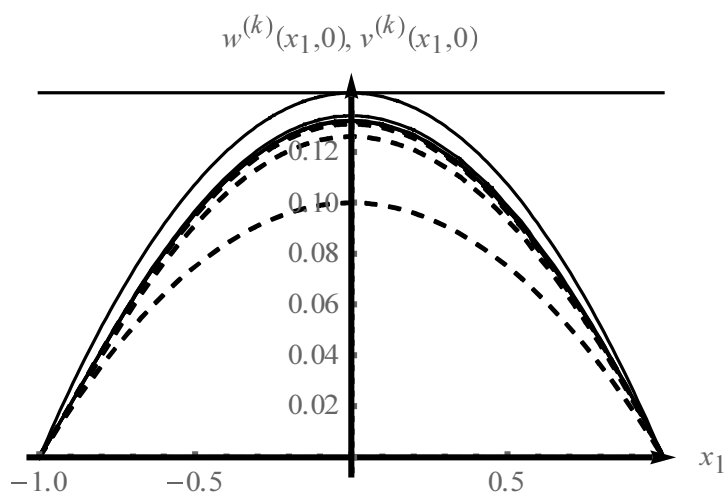


Рисунок 7.1 – Графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

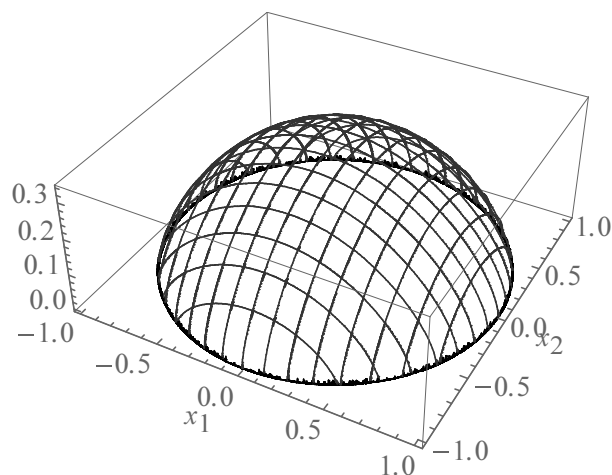


Рисунок 7.2 – Поверхня наближеного розв'язку  $T^{(5)}(\mathbf{x})$

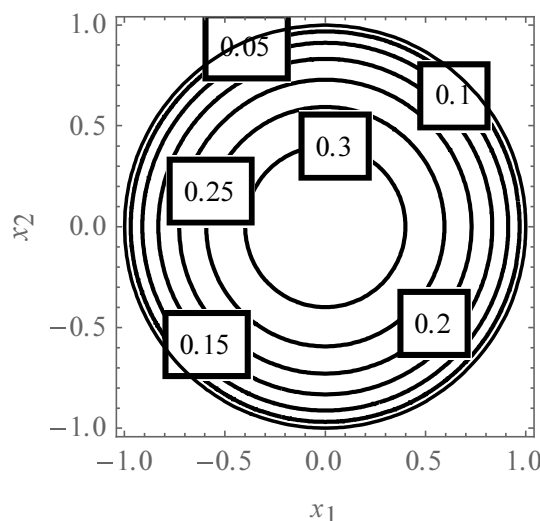


Рисунок 7.3 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $T^{(5)}(\mathbf{x})$

Таблиця 7.3 – Значення наближеного розв'язку  $T^{(5)}(\mathbf{x})$  в точках  $(0, 2i; 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$i$	0	1	2	3	4	5
$T^{(5)}(0, 2i, 0)$	0,3397	0,3300	0,2997	0,2477	0,1669	0,0000

Продемонструємо тепер застосування до розв'язання задачі (7.1), (7.2), що розглядається у одиничному квадраті  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$ , методу двобічних наближень, заснованого на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова. Для обчислювального експерименту оберемо  $f(\mathbf{x}, T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}}$ ,  $k_0 = 1$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ , тобто розглянемо задачу

$$-\operatorname{div}(\sqrt{T} \operatorname{grad} T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.31)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.32)$$

У задачі (7.31), (7.32) зробимо заміну  $T = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{u^2}$ , де  $u$  – нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$-\Delta u = e^{\frac{3}{2}u} + 3e^{-\frac{3}{2}u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.33)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.34)$$

Задачу (7.33), (7.34) замінюємо еквівалентним інтегральним рівнянням

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}u(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}u(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s}, \quad (7.35)$$

де

$$Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}, \quad K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$\tilde{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

$$\omega(\mathbf{x}) = [x_1(1-x_1)] \wedge_0 [x_2(1-x_2)] \equiv$$

$$\equiv x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2) - \sqrt{x_1^2(1-x_1)^2 + x_2^2(1-x_2)^2}.$$

Функції  $F(\mathbf{x}, u) = e^{\frac{3}{2}u} + 3e^{-\frac{3}{2}u}$  додатна та неперервні за сукупністю змінних, якщо  $u > 0$ , і дозволяє діагональне подання за допомогою функції

$$\hat{F}(\mathbf{x}, v, w) = e^{\frac{3}{2}v} + 3e^{-\frac{3}{2}v}.$$

Тоді з рівнянням (7.35) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}u(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}u(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s}, \quad (7.36)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}v(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}w(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s},$$

де  $K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ ,  $K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ .

Для оператора  $T$  вигляду (7.36) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , де  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ ,  $0 < \alpha < \beta$ ,



а  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ . Тоді для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$  ми приходимо до наступної системи нерівностей: для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}\alpha u_0(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}\beta u_0(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s} \geq \alpha u_0(\mathbf{x}),$$

$$\beta \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}\beta u_0(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}\alpha u_0(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s} \leq \beta u_0(\mathbf{x}).$$

Якщо  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \beta \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$ , то

$$|\Phi(\mathbf{x}, v, w) - \Phi(\mathbf{x}, w, v)| = \left| \left( e^{\frac{3}{2}v} + 3e^{-\frac{3}{2}w} \right) - \left( e^{\frac{3}{2}w} + 3e^{-\frac{3}{2}v} \right) \right| \leq \frac{3}{2} \left( 3 + e^{\frac{3}{2}M_0} \right) |v - w|.$$

Ітераційний процес (7.17) – (7.19) для розглядуваної задачі має вигляд

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}v^{(k)}(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}w^{(k)}(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.37)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ e^{\frac{3}{2}w^{(k)}(\mathbf{s})} + 3e^{-\frac{3}{2}v^{(k)}(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.38)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x}). \quad (7.39)$$

Знайдено, що системі нерівностей для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$  задовольняють значення  $\alpha = 2,2$ ,  $\beta = 8,3$ . Далі знаходимо:

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0,04093,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s} = 0,70819,$$

$$M_0 = \beta \max_{x \in \Omega} u_0(\mathbf{x}) = 0,33972, \quad L = \frac{3}{2} \left( 3 + e^{2M_0} \right) = 6,99690,$$

$$\gamma = M_1 + LM = 0,995.$$

Отже,  $\gamma < 1$  і за теоремою 7.2 послідовні наближення, які формуються за схемою (7.37) – (7.39) двобічно збігаються до розв’язку задачі (7.33), (7.34).

Оберемо  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Ця точність була досягнута на п’ятнадцятій ітерації. В таблиці 7.4 наведено значення  $\varepsilon^{(k)} = \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} |w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})|$  оцінки похибки наближеного розв’язку  $u^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, \dots, 15$ . Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,

$k = 0, 1, \dots, 14$ , за даними табл. 7.4, отримаємо, що  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,616$ , що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. На рис. 7.4 наведено графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0,5$  для  $k = 0, 2, 4, 6$ .

Таблиця 7.4 – Значення оцінки похибки наближеного розв’язку задачі (7.33), (7.34)

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^0$	$0,82 \cdot 10^{-1}$	$0,52 \cdot 10^{-1}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$	$0,20 \cdot 10^{-1}$	$0,12 \cdot 10^{-1}$
$k$	6	7	8	9	10	11
$\varepsilon^{(k)}$	$0,77 \cdot 10^{-2}$	$0,47 \cdot 10^{-2}$	$0,29 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$
$k$	12	13	14	15		
$\varepsilon^{(k)}$	$0,42 \cdot 10^{-3}$	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,99 \cdot 10^{-4}$		

За наближений розв’язок задачі (7.33), (7.34) візьмемо функцію  $u^{(15)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(v^{(15)}(\mathbf{x}) + w^{(15)}(\mathbf{x}))$ . Тоді

$$T^*(\mathbf{x}) \approx T^{(15)}(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \sqrt{[u^{(15)}(\mathbf{x})]^2}}.$$

$$w^{(k)}(x_1, 0, 5), v^{(k)}(x_1, 0, 5)$$

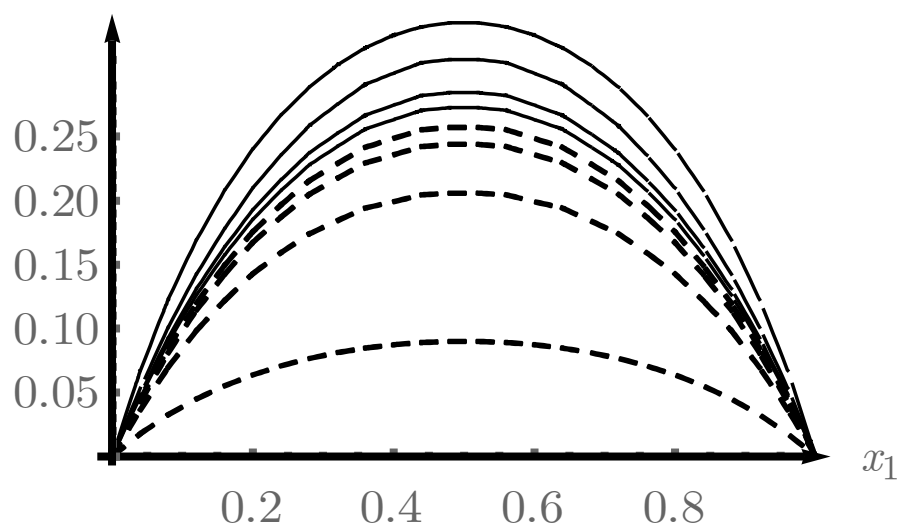


Рисунок 7.4 – Графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 2, 4, 6$

На рис. 7.5 і 7.6 наведені поверхня та лінії рівня (з кроком 0,05) наближеного розв'язку  $T^{(15)}(\mathbf{x})$  відповідно, а у таблиці 7.5 значення  $T^{(15)}(\mathbf{x})$  в точках  $(0, 2i; 0, 2j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

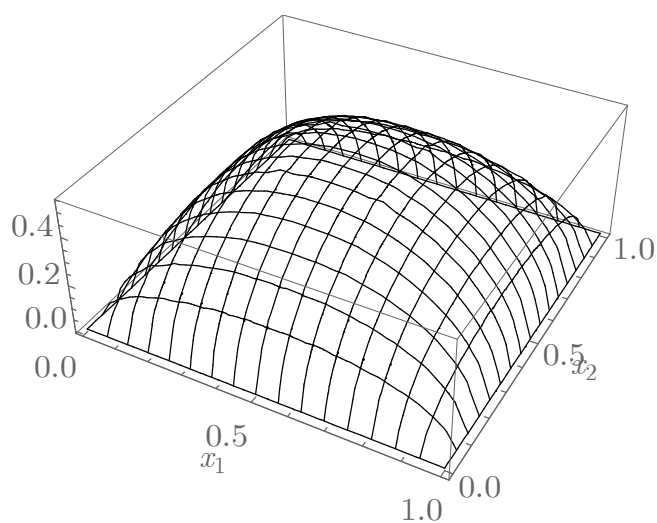


Рисунок 7.5 – Поверхня наближеного розв'язку  $T^{(15)}(\mathbf{x})$

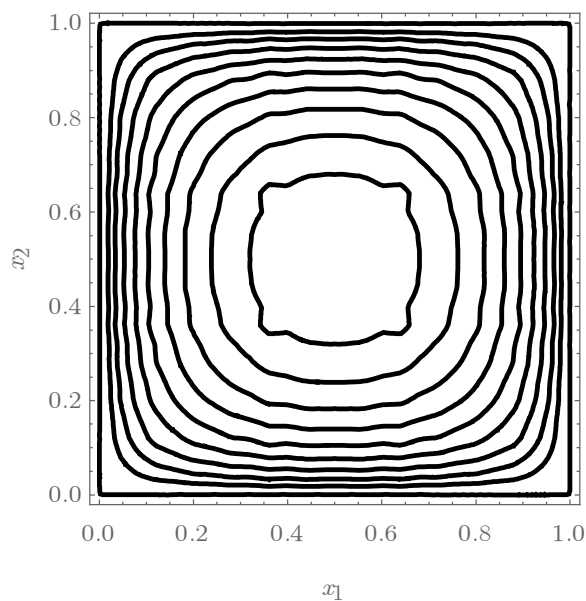


Рисунок 7.6 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $T^{(15)}(\mathbf{x})$

Таблиця 7.5 – Значення наближеного розв’язку в точках  $(0, 2i; 0, 2j)$ ,  
 $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$T^{(15)}(0, 2i, 0, 2j)$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$j = 0$	0	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 2$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 3$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 4$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 5$	0	0	0	0	0	0

### 7.3 Метод двобічних наближень розв’язання нелінійної задачі Нав’є

Розглянемо однорідну задачу Нав’є для напівлінійного рівняння четвертого порядку:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u, -\Delta u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.40)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.41)$$

де  $\Omega$  – обмежена область з  $\mathbb{R}^2$  чи  $\mathbb{R}^3$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ );

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ;

$\Delta$  – оператор Лапласа;

$\Delta^2$  – бігармонічний оператор.

Задача (7.40), (7.41) виникає, наприклад, при математичному моделюванні різних процесів теорії пружності [230, 236, 281].

Вважатимемо також, що функція  $f(\mathbf{x}, u, v)$  неперервна і додатна при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$ . Задачу (7.40), (7.41) замінимо еквівалентною системою напівлінійних еліптичних рівнянь. Для цього покладемо  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -\Delta u$ . Тоді отримаємо задачу

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad -\Delta u_2 = f(\mathbf{x}, u_1, u_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.42)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.43)$$

До розв'язання задачі (7.42), (7.43) застосуємо розроблені у розділі 5 методи двобічних наближень.

Застосуємо спочатку метод двобічних наближень, заснований на використанні функції Гріна. Нехай  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у області  $\Omega$ . Тоді від задачі (7.23), (7.24) можна перейти до системи інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (7.44)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), u_2(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (7.45)$$

Нехай  $C_2(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) : u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})\}$  – банахів простір неперервних у  $\bar{\Omega}$  вектор-функцій з нормою  $\|\mathbf{u}\|_2 = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}$ , де  $\|u_i\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u_i(\mathbf{x})|$ ,  $i = 1, 2$ . Виділимо у  $C_2(\bar{\Omega})$  конус

$$\mathcal{K}_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in C_2(\bar{\Omega}) : u_i(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, i = 1, 2\}$$

вектор-функцій з невід'ємними координатами. Зазначимо, що конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C_2(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим).

За допомогою конуса  $\mathcal{K}_+$  у просторі  $C_2(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом: для  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_2(\bar{\Omega})$   $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ , якщо  $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathcal{K}_+$ , тобто

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v}, \text{ якщо } u_1(\mathbf{x}) \leq v_1(\mathbf{x}), \quad u_2(\mathbf{x}) \leq v_2(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Розв'язком (узагальненим) задачі (7.42), (7.43) називатимемо вектор-функцію  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*) \in C_2(\bar{\Omega})$ , яка є розв'язком системи (7.44), (7.45). Тоді функцію  $u^*(\mathbf{x}) = u_1^*(\mathbf{x})$  природно називати узагальненим розв'язком задачі (7.21), (7.22).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $\mathbf{T}$ , який діє у  $C_2(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (7.44), (7.45):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) ds, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), u_2(\mathbf{s})) ds \right). \quad (7.46)$$

Функція  $f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$  неперервна і додатна при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $u_1, u_2 > 0$ , а функція Гріна  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ . Тоді оператор  $\mathbf{T}$  є додатним, тобто залишає інваріантним конус  $\mathcal{K}_+$ :  $\mathbf{T}(\mathcal{K}_+) \subset \mathcal{K}_+$ .

Припустимо, що функція  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$  монотонно зростає за  $v_1$ ,  $v_2$  і монотонно спадає за  $w_1$ ,  $w_2$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (7.46) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) ds, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s})) ds \right). \quad (7.47)$$

Оператори  $\mathbf{T}$  і  $\hat{\mathbf{T}}$  є цілком неперервними.

У конусі  $\mathcal{K}_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , де  $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x}))$ , умовами (1.34): для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^0(\mathbf{s}) ds \geq v_1^0(\mathbf{x}), \quad (7.48)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1^0(\mathbf{s}), v_2^0(\mathbf{s}), w_1^0(\mathbf{s}), w_2^0(\mathbf{s})) ds \geq v_2^0(\mathbf{x}), \quad (7.49)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^0(\mathbf{s}) ds \leq w_1^0(\mathbf{x}), \quad (7.50)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1^0(\mathbf{s}), w_2^0(\mathbf{s}), v_1^0(\mathbf{s}), v_2^0(\mathbf{s})) ds \leq w_2^0(\mathbf{x}). \quad (7.51)$$

Далі за схемою (1.36) сформуємо ітераційний процес:

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (7.52)$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), v_2^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), w_2^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (7.53)$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (7.54)$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), w_2^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), v_2^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (7.55)$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \quad (7.56)$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}). \quad (7.57)$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  та гетеротонність оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (7.46), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (7.47) є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  впливає існування границь  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Граничні функції  $\mathbf{v}^*$  і  $\mathbf{w}^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (7.58)$$

$$v_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (7.59)$$

$$w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (7.60)$$

$$w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s}), v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (7.61)$$

На конусному відрізку  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  існує єдина нерухома точка  $\mathbf{u}^*$  оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (7.46) (а отже, і єдиний на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язок  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (7.42), (7.43)), якщо виконується рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ . З огляду на результати п. 5.1 для цього достатньо виконання однієї з наступних умов:

(А) система (7.58) – (7.61) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язків  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ ;

(Б) для будь-яких чисел  $v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, u_2$ , таких, що  $0 < v_1 < w_1, 0 < u_1 < w_1, 0 < v_2 < w_2, 0 < u_2 < w_2$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v_1 + u_1, v_2 + u_2, w_1 - u_1, w_2 - u_2) < \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) + u_2 M^{-1},$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}), u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ ;

(В) існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$  для всіх чисел  $v_1, v_2, w_1, w_2$  таких, що  $0 < v_1, w_1 < M_0^1, 0 < v_2, w_2 < M_0^2$ , де  $M_0^1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_1^0(\mathbf{x}), M_0^2 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_2^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) - \hat{f}(\mathbf{x}, w_1, w_2, v_1, v_2) \right| \leq L \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\},$$

причому  $\gamma = M \max\{2, L\} < 1$ , де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}), u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$ .

Тоді справджується така теорема.

*Теорема 7.4.* Нехай гетеротонний оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (7.46), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (7.47) є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  і виконується хоча б одна з умов (А) – (В). Тоді ітераційний процес (7.52) – (7.57) двобічно збігається у нормі простору  $C_2(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (7.42), (7.43), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{u}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$



Тепер до розв'язання задачі (7.42), (7.43) застосуємо метод двобічних наближень, заснований на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова. Якщо геометрія області  $\Omega$  може бути описана методом  $R$ -функцій за допомогою функції  $\omega(\mathbf{x})$ , а  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  – квазіфункція Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у області  $\Omega$ , яка визначається формулою (3.23), якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і формулою (3.24), якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , то задача (7.42), (7.43) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_1(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_2(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad (7.62)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_2(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), u_2(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (7.63)$$

де  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_{\mathbf{s}}\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , а  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$ , якщо  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , і

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}, \text{ якщо } \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $\mathbf{T}$ , який діє у  $C_2(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною системи інтегральних рівнянь (7.62), (7.63):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_1(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_2(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \right. \\ \left. \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u_2(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), u_2(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \right). \quad (7.64)$$

Якщо функція  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ , де неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$  монотонно зростає за  $v_1, v_2$  і монотонно спадає за  $w_1, w_2$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (7.64) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = & \left( \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_1(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_1(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \right. \\ & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_2(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & \left. + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \right), \end{aligned} \quad (7.65)$$

де  $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ ,  $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ .

Оператори  $\mathbf{T}$  і  $\hat{\mathbf{T}}$  є цілком неперервними.

У конусі  $\mathcal{K}_+$  умовами (1.34) виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (7.64) конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , де  $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x}))$ : для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_1^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_1^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} \geq v_1^0(\mathbf{x}), \\ & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v_1^0(\mathbf{s}), v_2^0(\mathbf{s}), w_1^0(\mathbf{s}), w_2^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v_2^0(\mathbf{x}), \\ & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_1^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_1^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} \leq w_1^0(\mathbf{x}), \\ & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w_1^0(\mathbf{s}), w_2^0(\mathbf{s}), v_1^0(\mathbf{s}), v_2^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w_2^0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою (1.36):

$$\begin{aligned} v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_1^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_1^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad (7.66) \\ v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_2^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w_2^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), v_2^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), w_2^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (7.67)$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds, \quad (7.68)$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), w_2^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), v_2^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (7.69)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \quad (7.70)$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}). \quad (7.71)$$

Оскільки побудований конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  є сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (7.64), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (7.65) є супровідним, то послідовність  $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, через нормальність конуса  $\mathcal{K}_+$  і повну неперервність оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  існують границі  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$  послідовностей  $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$  і  $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ . Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Граничні функції  $\mathbf{v}^*$  і  $\mathbf{w}^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) ds, \quad (7.72)$$

$$v_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s})) ds, \quad (7.73)$$

$$w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1(\mathbf{s}) ds + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2(\mathbf{s}) ds, \quad (7.74)$$

$$w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1(\mathbf{s}), w_2(\mathbf{s}), v_1(\mathbf{s}), v_2(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (7.75)$$

Конусний відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  міститиме єдину нерухому точку  $\mathbf{u}^*$  оператора  $\mathbf{T}$  вигляду (7.64) (а отже, існуватиме єдиний на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язок  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (7.42), (7.43)), якщо виконується рівність  $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ . З огляду на результати п. 5.2 для цього достатньо виконання однієї з наступних умов:

(А) система (7.72) – (7.75) не має на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  розв'язків  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  таких, що  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ ;

(Б) для будь-яких чисел  $v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, u_2$ , таких, що  $0 < v_1 < w_1$ ,  $0 < u_1 < w_1$ ,  $0 < v_2 < w_2$ ,  $0 < u_2 < w_2$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v_1 + u_1, v_2 + u_2, w_1 - u_1, w_2 - u_2) < \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) + \frac{u_2}{M + M^1},$$

де  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ ,  $M^1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s}$ ;

(В) існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$  для всіх чисел  $v_1, v_2, w_1, w_2$  таких, що  $0 < v_1, w_1 < M_0^1$ ,  $0 < v_2, w_2 < M_0^2$ , де  $M_0^1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_1^0(\mathbf{x})$ ,

$M_0^2 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_2^0(\mathbf{x})$ , і для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) - \hat{f}(\mathbf{x}, w_1, w_2, v_1, v_2) \right| \leq L \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\},$$

причому  $\gamma = M^1 + M \max\{2, L\} < 1$ , де  $M^1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s}$ ,

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Тоді справджується така теорема.

*Теорема 7.5.* Нехай гетеротонний оператор  $\mathbf{T}$  вигляду (7.64), для якого оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  вигляду (7.65) є супровідним, має сильно інваріантний конусний

відрізок  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  і виконується хоча б одна з умов (А) – (В). Тоді ітераційний процес (7.66) – (7.71) двобічно збігається у нормі простору  $C_2(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  крайової задачі (7.42), (7.43), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leq \mathbf{v}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{v}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{u}^* \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(k)} \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(1)} \leq \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу перш за все є те, що на кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку  $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}))$ :

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\|_2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\|_2.$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності  $\max\{\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}}(w_1^{(k)}(\mathbf{x}) - v_1^{(k)}(\mathbf{x})), \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}}(w_2^{(k)}(\mathbf{x}) - v_2^{(k)}(\mathbf{x}))\} < 2\varepsilon$  і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}).$$

#### 7.4 Розв'язання тестових задач Нав'є методами двобічних наближень

Розглянемо застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна для розв'язання задачі Нав'є вигляду

$$\Delta^2 u = \sqrt{u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.76)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.77)$$

де  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .

Заміною  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -\Delta u$  задачу (7.76), (7.77) зводимо до системи напівлінійних еліптичних рівнянь

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad -\Delta u_2 = \sqrt{u_1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.78)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.79)$$

яку в свою чергу замінимо системою інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{u_1(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad (7.80)$$

де  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}}$ , де  $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , точки  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{s}^1$  симетричні відносно кола одиничного радіуса,  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$ ,  $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$  – відстані між точками  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  і  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}^1$  відповідно.

З системою (7.80) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$\mathbf{T}(u_1, u_2)(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{u_1(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \right), \quad (7.81)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}(v_1, v_2, w_1, w_2)(\mathbf{x}) = \left( \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{v_1(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \right).$$

Для оператора (7.81) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 \rangle$ , де

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})) = (\alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \alpha_2 \omega(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) = (\beta_1 \omega(\mathbf{x}), \beta_2 \omega(\mathbf{x})),$$

$$0 < \alpha_1 < \beta_1, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2,$$

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Система нерівностей для визначення сталих  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  має вигляд:  
для всіх  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\alpha_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\alpha_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{\omega(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \geq \alpha_2 \omega(\mathbf{x}),$$

$$\beta_2 \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta_1 \omega(\mathbf{x}), \quad \sqrt{\beta_1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{\omega(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \leq \beta_2 \omega(\mathbf{x}).$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є, наприклад, числа  $\alpha_1 = 0,000868$ ,  $\alpha_2 = 0,00694$ ,  $\beta_1 = 0,00321$ ,  $\beta_2 = 0,0171$ .

Було проведено десять ітерацій за схемою

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{v_1^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s},$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{w_1^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s},$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \omega(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_2 \omega(\mathbf{x}), \quad w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1 \omega(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_2 \omega(\mathbf{x}).$$

Дані як змінюється оцінка  $\varepsilon_i^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{2} |w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})|$  норми похибки  $\|u_i^* - u_i^{(k)}\|$  наближеного розв'язку  $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ , в залежності від номера ітерації  $k$ ,

$k = 0, 1, \dots, 10$ , наведено в табл. 7.6. Аналіз відношень  $\frac{\varepsilon_1^{(k+1)}}{\varepsilon_1^{(k)}}$ ,  $\frac{\varepsilon_2^{(k+1)}}{\varepsilon_2^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 9$ , за

даними цієї таблиці показує, що  $\frac{\varepsilon_1^{(k+1)}}{\varepsilon_1^{(k)}} \approx 0,730$ ,  $\frac{\varepsilon_2^{(k+1)}}{\varepsilon_2^{(k)}} \approx 0,728$ . Це свідчить про гео-

метричну швидкість збіжності ітераційних послідовностей  $\{u_1^{(k)}(\mathbf{x})\}$  і  $\{u_2^{(k)}(\mathbf{x})\}$  з відповідними показниками. На рис. 7.7 наведено графіки перерізів верхніх  $w_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $w_2^{(k)}(\mathbf{x})$  та нижніх  $v_1^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $v_2^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 2, 6, 8, 10$ .

Отже, з точністю  $0,27 \cdot 10^{-4}$  наближеним розв'язком задачі (7.76), (7.77) буде функція  $u^{(10)}(\mathbf{x}) = u_1^{(10)}(\mathbf{x}) = \frac{v_1^{(10)}(\mathbf{x}) + w_1^{(10)}(\mathbf{x})}{2}$ . На рис. 7.8 і 7.9 відповідно

наведено поверхню та лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$ . Зауважимо, що розв'язок  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  має радіальну симетрію. Через це у таблиці 7.7 наведено знайдені з точністю  $0,27 \cdot 10^{-4}$  значення наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  в точках  $\mathbf{x}_i = (0,25i; 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , розташованих на промені  $\varphi = 0$ , при цьому отримано, що  $\|u^{(10)}\| = 0,0013$ .

Таблиця 7.6 – Значення оцінки похибки наближеного розв'язку задачі (7.78), (7.79)

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$0,37 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,21 \cdot 10^{-2}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,79 \cdot 10^{-3}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$
$k$	6	7	8	9	10	
$\varepsilon_1^{(k)}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,73 \cdot 10^{-4}$	$0,54 \cdot 10^{-4}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$0,27 \cdot 10^{-4}$	
$\varepsilon_2^{(k)}$	$0,41 \cdot 10^{-3}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,10 \cdot 10^{-3}$	

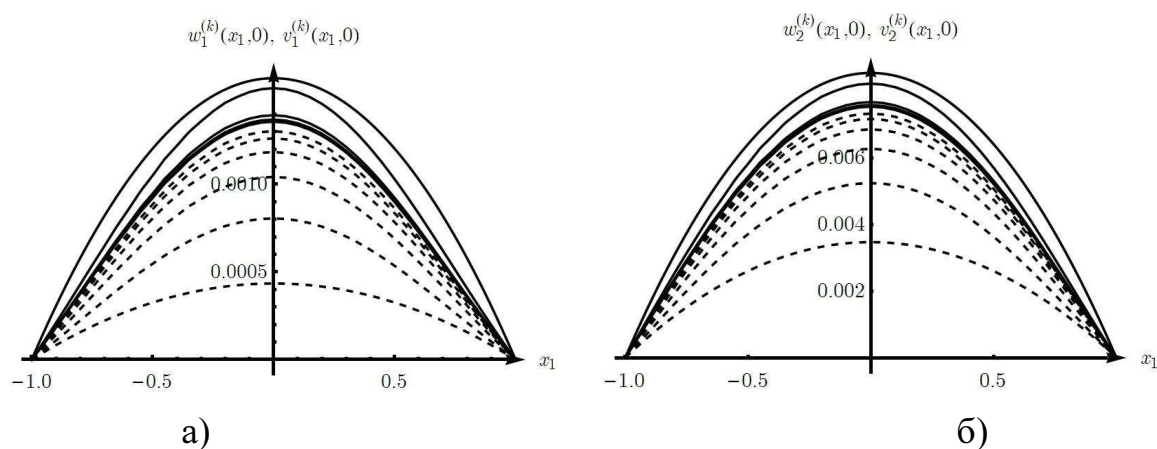


Рисунок 7.7 – Графіки перерізів верхніх та нижніх наближень  $w_1^{(k)}(x_1, 0)$ ,  $v_1^{(k)}(x_1, 0)$  (а) та  $w_2^{(k)}(x_1, 0)$ ,  $v_2^{(k)}(x_1, 0)$  (б),  $k = 0, 2, 6, 8, 10$ , до розв'язку задачі (7.78), (7.79)

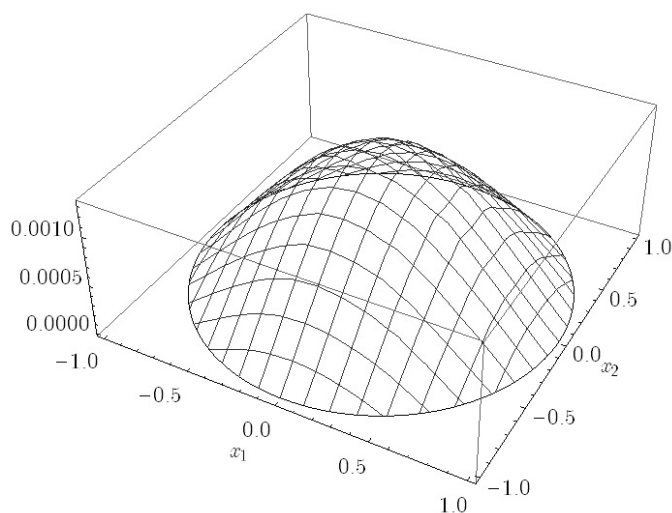


Рисунок 7.8 – Поверхня наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  задачі (7.76), (7.77)

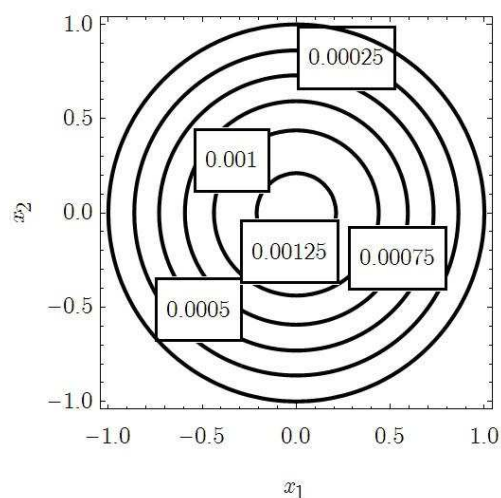


Рисунок 7.9 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(10)}(\mathbf{x})$  задачі (7.76), (7.77)



Таблиця 7.7 – Значення наближеного розв’язку задачі (7.76), (7.77) в точках  $\mathbf{x}_i = (0,25i; 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$\mathbf{x}_i = (0,25i; 0)$	(0; 0)	(0,25; 0)	(0,5; 0)	(0,75; 0)	(1; 0)
$u^{(10)}(\mathbf{x}_i)$	0,0013	0,0012	0,0009	0,0004	0

### Висновки за розділом 7

1. Вперше з рівнянь нелінійної стаціонарної теплопровідності вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x},\theta)$  виділено клас рівнянь, розв’язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методами двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв’язку задачі і двобічної збіжності до нього послідовних наближень.

2. Для нелінійного рівняння стаціонарної теплопровідності проведено обчислювальні експерименти для тестової задачі зі степеневим коефіцієнтом теплопровідності та експоненціально залежної від температури функції потужності джерел. Зроблений аналіз точності та швидкості збіжності для розглянутих тестових задач підтвердив ефективність застосування методів двобічних наближень.

3. Для нелінійної задачі Нав’є вперше для знаходження її розв’язку застосовано методи двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), на основі чого отримано умови існування єдиного додатного розв’язку задачі і збіжності до нього послідовних наближень.

4. Для нелінійної задачі Нав’є проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі зі степеневою нелінійністю. Зроблений аналіз точності та швидкості збіжності для підтвердив ефективність застосування запропонованих методів двобічних наближень.

Основні результати сьомого розділу опубліковані у роботах [147, 150, 156].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [14, 100, 138, 141, 147, 150, 156, 230, 236, 281].

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано результати, що в сукупності є розв'язанням наукової проблеми побудови методів двобічних наближень розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики, а саме, розроблено двобічні ітераційні методи розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння та системи напівлінійних еліптичних рівнянь і напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного використання методів Рунге та двобічних наближень.

1. Проведено аналіз сучасного стану проблеми чисельного аналізу задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Серед розглянутих методів виділено методи двобічних наближень через те, що вони дозволяють будувати дві послідовності функції, які знизу та зверху наближають шуканий розв'язок, а отже, мають зручні апостеріорну оцінку похибки і критерій закінчення ітерацій. Проте існуючі методи двобічних наближень, що побудовані на основі методів теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, потребують удосконалення та розширення кола їх застосування до задач більш загального вигляду та з меншими обмеженнями на геометрію області.

2. Розглянуто першу крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння, першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь. Кожну з цих задач за допомогою функції Гріна подано у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором і на основі цього, користуючись методами нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах, були розвинуті методи двобічних наближень їх розв'язання.

3. Вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова, яка є узагальненням квазіфункції, використовуваної в роботах акад. В.Л. Рвачова. Це дозволило звести до інтегрального рівняння Урисона першу крайову задачу для напівлі-

нійшого еліптичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, що розглядаються у областях, геометрія яких може бути описана за допомогою конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій.

4. Першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова подано у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором. На основі цього, застосовуючи методи нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах, вперше розроблено метод двобічних наближень розв'язання розглядуваних крайових задач. Запропонований метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова є більш універсальним порівняно з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, оскільки вирази для квазіфункції завжди мають скінченний вигляд на відміну від функції Гріна, яка навіть для областей простої геометрії зазвичай може бути подана лише рядом Фур'є. Крім того, клас областей, для яких може бути побудована квазіфункція, визначається можливістю їх аналітичного опису за допомогою  $R$ -функцій, у той час як функція Гріна відома лише для невеликої кількості областей.

5. Удосконалено методи побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , кінці якого обираються за початкові наближеннями при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова. Надано рекомендації щодо побудови  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , зокрема, у багатовимірному випадку запропоновано шукати функції  $v^0, w^0$  у вигляді  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  ( $0 < \alpha < \beta$ ), де функція  $\omega(\mathbf{x})$  описує геометрію області, у якій розглядається крайова задача, і будується з використанням конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій. Це дозволило формалізувати процедуру побудови початкового наближення при реалізації двобічних ітераційних схем та отримати апостеріорні оцінки розв'язку, які точно задовольняють крайовим умовам задачі.

6. Запропоновані методи двобічних наближень застосовані до аналізу першої крайової задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапла-

са та оператором Гельмгольца і степеневими нелінійностями (ізотонного, анти-тонного та гетеротонного типів), що дозволило дослідити питання існування єдиного додатного розв'язку, отримати для нього апріорні оцінки та обґрунтувати знаходження розв'язку з двобічним наближенням.

7. Розглянуто перші початково-крайові задачі для одновимірних та багатовимірних напівлінійних параболічних рівнянь і за допомогою модифікованого методу Роте їх зведено відповідно до послідовностей перших крайових задач для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та напівлінійного еліптичного рівняння. Для розв'язання отриманих нелінійних задач застосовано методи двобічних наближень (на основі застосування функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова). Отже, на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень вперше розроблено напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

8. З рівнянь вигляду  $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(x, \theta)$  вперше виділено клас рівнянь, розв'язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методами двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі і збіжності до нього послідовних наближень.

9. Для знаходження розв'язку нелінійної задачі Нав'є шляхом зведення її до системи двох еліптичних рівнянь застосовано методи двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), завдяки чому отримано умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень.

10. Роботу кожного з запропонованих чисельних методів проілюстровано розв'язанням тестових задач для рівнянь з оператором Лапласа та оператором Гельмгольца і степеневими чи експоненціальними нелінійностями, що підтвердило їх ефективність.

11. Коректність чисельних результатів підтверджується порівнянням з точними розв'язками та з чисельними розв'язками, отриманими різними методами.

12. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджені в освітній процес Харківського національного університету радіоелектроніки.

13. Отримані результати розширюють теоретичну та практичну основи для розв'язання прикладних задач математичного моделювання, які зводяться до розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь та першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

14. Напрями подальших досліджень за темою дисертаційної роботи можуть бути пов'язані з розробкою методів двобічних наближень розв'язання задач з крайовими умовами другого та третього типів, а також з застосуванням двобічних методів до задач з рівняннями, що містять градієнтні члени.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. Москва: Физматлит, 2002. 320 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва: Наука, 1984. 384 с.
3. Апостеріорні оцінювачі похибки серендипових квадратичних апроксимацій МСЕ для еліптичних крайових задач / Вовк О., Квасниця Г., Остапов О., Шинкаренко Г. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2014. Вип. 21. С. 67-78.
4. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Интеллект, 2009. 216 с.
5. Бахтин И.А., Красносельский М.А. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 3. С. 313-330.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.
7. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. Москва: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.
8. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
9. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Москва: Мир, 1974. 128 с.
10. Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
11. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва: ГИФМЛ, 1961. 260 с.
12. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 2. С. 202-211.

13. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 2 (86). С. 87-158.

14. Голайдо С.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 5. С. 1351-1356.

15. Двосторонні наближені методи / Б.А. Шувар, М.І. Копач, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта. Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. 515 с.

16. Демидов А.С., Кочуров А.С., Попов А.Ю. К задаче о реконструкции нелинейностей в уравнениях математической физики // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. № 27. С. 74-123.

17. Дияк І.І., Прокопишин І.І. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2016. Т. 52, № 3. С. 78-89.

18. Дияк І.І., Прокопишин І.І., Ящук Ю.О. Комбінований алгоритм декомпозиції області та  $h$ -адаптації для розв'язування контактних задач теорії пружності // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2015. Т. 56, № 4. С. 96-109.

19. Дорохов В.А. Метод  $R$ -функций в решении линейных и нелинейных краевых задач для уравнений с оператором Лапласа: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 «Вычислительная математика». Киев, 1974. 17 с.

20. Журавков М.А. Модификация метода квазифункций Грина (метода В.Л. Рвачева) для определения полей напряжений в упругом теле // Теоретическая и прикладная механика. 1987. Вып. 14. С. 65-68.

21. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.

22. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Москва: Физматлит, 2008. 656 с.

23. Зуб С.С. Математические модели динамики симметричного волчка во внешних аксиально симметричных полях // Доповіді Національної академії наук України. 2018. № 9. С. 12-20.

24. Зуб С.С., Ляшко С.И., Семёнов В.В. Математическая модель источника магнитного поля для магнитного сепаратора руды // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2018. № 1 (127). С. 40-47.

25. Канторович Л.В. О полуупорядоченных пространствах // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1937. Т. 1, вып. 1. С. 91-110.

26. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, Невский Диалект, 2004. 816 с.

27. Ковач Ю.И. Об одном методе исследования сходимости итерационного процесса для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Украинский математический журнал. 1978. Т. 30, № 2. С. 165-175.

28. Ковач Ю.И. Приближенное интегрирование задачи Гурса для общей  $2\pi$ -волновой системы дифференциальных уравнений методом двухстороннего приближения // Украинский математический журнал. 1965. Т. 17, № 4. С. 37-45.

29. Ковач Ю.И., Бойцун С.А. Аналитические двусторонние методы приближенного интегрирования задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными // Украинский математический журнал. 1985. Т. 37, № 4. С. 494-496.

30. Ковач Ю.И., Брич И.В. Исследование одной нелинейной краевой задачи аналитическим двусторонним методом // Украинский математический журнал. 1981. Т. 33, № 5. С. 675-678.

31. Ковач Ю.И., Савченко Л.И. О двустороннем итеративном методе решения краевой задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов // Украинский математический журнал. 1969. Т. 21, № 2. С. 252-260.

32. Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 648 с.

33. Колодяжний В.М., Лісіна О.Ю., Селищев В.С. Атомарні функції в задачах математичного моделювання. Харків: ХНАДУ, 2017. 376 с.

34. Колосов А.И. Методы математического моделирования в исследовании задачи Пуассона-Больцмана // Вестник Херсонского национального технического университета. 2011. № 3 (42). С. 248-250.



35. Колосов А.И. Методы математического моделирования в исследовании нелинейных задач математической физики // Вісник національного технічного університету «ХП». 2006. Т. 2. С. 235-237.

36. Колосов А.И. Методы математического моделирования в исследовании нелинейных задач, возникающих при рассмотрении эффектов образования структур в газовой динамике // Вестник Херсонского национального технического университета. 2008. № 2. С. 244-247.

37. Колосов А.И. Методы математического моделирования в исследовании течения несжимаемой жидкости в пограничном слое // Вестник Херсонского национального технического университета. 2010. № 3. С. 218-220.

38. Колосов А.И. Нелинейные краевые задачи со свободной границей для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики: дис. на соискание уч. степени доктора физ.-мат. наук: 01.01.03 «Математическая физика». Москва, 1991. 267 с.

39. Колосов А.И. Об одном классе краевых задач, приводимых к уравнению с гетеротонным оператором // Дифференциальные уравнения. 1985. № 11. С. 1884-1891.

40. Колосов А.И. Об одном классе краевых задач, приводимых к уравнению с гетеротонным оператором // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 1884-1891.

41. Колосов А.И., Дорохов В.А. О решении одной нелинейной задачи магнитной гидродинамики // Доклады АН УССР. Серия А. 1973. № 1. С. 74-77.

42. Колосов А.И., Колосова С.В. О двусторонних приближениях в решении задачи Фолкнер-Скэн // Математическая физика. 1978. Вып. 23. С. 63-67.

43. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50-57.

44. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода квази-функции Грина к построению итерационных методов решения некоторых нелинейных краевых задач // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць одинадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 21-23 листопада 2012 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2012. С. 101-102.

45. Колосов А.И., Колосова С.В., Тихонович А.Ю. О двусторонних приближениях в решении задачи Томаса-Ферми // Математическая физика. 1981. Вып. 31. С. 36-38.

46. Колосов А.И., Ли Мун Су. О двусторонней сходимости метода последовательных приближений // Математический сборник. Киев: Наукова думка, 1976. С. 178-181.

47. Колосов А.И., Мазур Е.Н., Чалый А.В. О двусторонних приближениях в решении нелинейных задач математической физики // Вопросы атомной науки и техники. 2000. № 1. С. 234-237.

48. Колосов А.И., Сидоров М.В. Идеи М. А. Красносельского в исследовании нелинейных краевых задач математической физики // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 215-217.

49. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Деякі питання побудови двобічних наближень до розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь // «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: збірник праць науково-технічної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2010 р.). Львів: ФМІ НАНУ, 2010. С. 37-39.

50. Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В. Об одном конструктивном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 218-221.

51. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (г. Херсон, 10-15 июня 2013 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. С. 205-208.

52. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120.

53. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42.

54. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції (Румунія, м. Бухарест, 17 травня 2013 р.). Ч. I. Бухарест: Бухарест. ун-т, 2013. С. 16-24.

55. Колосова С.В., Луханин В.С. Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Вип. 31. С. 59-72.

56. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Ланге-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 362-365.

57. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 185-188.

58. Колосова С.В., Марченко С.Н., Сидоров М.В. Применение метода квазифункций Грина к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений в областях сложной геометрии // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 142. С. 63-68.

59. Колосова С.В., Сидоров М.В. Некоторые вопросы, связанные с построением итерационных методов решения нелинейных краевых задач // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28-31 мая 2013 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. С. 52-58.

60. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31.

61. Колосова С.В., Сидоров М.В. Про побудову ітераційного процесу для рівняння з антитонним оператором // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць дванадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 11-12 листопада 2014 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2014. С. 37-38.

62. Колосова С.В., Чалий А.В. Про двобічні наближення додатних розв'язків одного класу нелінійних крайових задач для еліптичних рівнянь // Доповіді НАН України. 1999. № 11. С. 28-30.

63. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. 2017. № 1 (88). С. 60-64.

64. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 39. С. 33-41.

65. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією // Карпатські математичні публікації. 2012. V. 4, № 2. С. 268-274.

66. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Двостороння апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації. 2009. Т. 1, № 2. С. 172-179.

67. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації. 2010. Т. 2, № 2. С. 48-54.

68. Корпусов М.О., Свешников А.Г. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике: Методы исследования нелинейных операторов. Москва: КРАСАНД, 2011. 480 с.

69. Коций А.Ф., Ропавка А.И. Неклассические двойственные методы решения краевых задач. Харьков: ФОП Шейнина, СУФ МСУ, 2011. 175 с.

70. Кравець І.Т. Двосторонні методи для розв'язування диференціальних рівнянь першого та другого порядків із змінними операторними коефіцієнтами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.07 «Обчислювальна математика» / Львівський держ. ун-т ім. Івана Франка. Львів, 1999. 15 с.

71. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.

72. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. Т. 3, вып. 1 (23). С. 3-95.

73. Курант Р. Уравнения с частными производными. Москва: Мир, 1964. 832 с.

74. Курпель М.С. Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1969. № 4. С. 303-306.

75. Курпель Н.С. Некоторые модификации и обобщения метода С.А. Чаплыгина // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1971. С. 51-72.

76. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968. 244 с.

77. Курпель Н.С., Курченко Т.С. Двусторонние методы решения систем уравнений. Киев: Наук. думка, 1975. 184 с.

78. Курпель Н.С., Майборода И.Н. Об одном способе построения двусторонних приближений к решению операторных уравнений // Украинский математический журнал. 1976. Т. 28, № 5. С. 603-611.

79. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. Киев: Наукова думка, 1980. 268 с.

80. Ладыженская О.А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. Труды Московского математического общества. 1958. Т. 7. С. 149-177.

81. Леви Е.Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных // Успехи математических наук. 1941. № 8. С. 249-292.

82. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972. 588 с.

83. Литвин О.М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2007. Т. 50. № 4. С. 61-82.

84. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.

85. Лузин Н.Н. О методе приближенного интегрирования акад. С.А. Чаплыгина // Успехи математических наук. 1951. Т. 6, вып. 6. С. 3-27.

86. Луханін В.С. Додатні розв'язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радиоэлектроника и информатика. 2015. № 4 (71). С. 24-27.

87. Луханін В.С. Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: [спец.] 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Харківський національний ун-т радіоелектроніки. Харків, 2019. 273 с.

88. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радиоэлектроника и информатика. 2015. № 2 (69). С. 16-18.

89. Лучко Й.Й., Пелех Р.Я. Двосторонні методи розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2008. Т. 13, № 2. С. 134-141.

90. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.

91. Майборода И.Н. О построении нижних и верхних функций для краевой задачи системы квазилинейных параболических уравнений второго порядка // Известия вузов. Математика. 1983. № 8. С. 41-44.

92. Майборода И.Н. О построении нижних и верхних функций для краевой задачи системы нелинейных параболических уравнений второго порядка // Известия вузов. Математика. 1986. № 12. С. 51-55.

93. Майборода И.Н., Островецкий Л.А. О двустороннем методе решения нелинейных уравнений // Известия вузов. Математика. 1998. № 4. С. 53-59.

94. Майборода И.Н., Островецкий Л.А. О неподвижных точках операторов с гетеротонной производной // Известия вузов. Математика. 2001. № 10 С. 53-57.

95. Майборода И.Н., Шпортюк Г.А. Об одном способе двусторонней аппроксимации решений операторных уравнений // Известия вузов. Математика. 1978. № 3. С. 116-119.

96. Маринець В.В., Добридень А.В. Про один конструктивний метод дослідження крайової задачі у випадку системи квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика. 2009. Вип. 19. С. 64-70.

97. Маринець В.В., Питювка О.Ю. Один підхід побудови двосторонніх наближень до розв'язку крайової задачі у випадку диференціально-функціонального рівняння гіперболічного типу // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика. 2011. Вип. 22, № 2. С. 101 –109.

98. Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. 196 с.

99. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Москва: Мир, 1983. 400 с.

100. Мартинсон Л.К. Нелинейные эффекты в процессе эволюции тепловых структур // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 3. С. 462-467.

101. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.

102. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. Минск: Университетское, 1993. 180 с.

103. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Решение методом квазифункций Грина одной задачи геомеханики. // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат.наук. 1988. Вып. 4. С. 30-33.

104. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Решение смешанной задачи теории упругости методом В.Л. Рвачева квазифункций Грина. // Математические методы анализа динамических систем. 1985. С. 137-141.

105. Мартыненко М.Д., Журавков М.А., Гусак Е.А. Метод квазифункций Грина для нестационарной нелинейной задачи теплоизлучения // Инженерно-физический журнал. 1988. Т. 55, № 6. С. 1021-1024.

106. Мартыненко М.Д., Журавков М.А., Гусак Е.А. Решение задачи термоупругости методом квазифункций Грина // Математическая физика. 1987. С. 84-47.

107. Математическая модель взаимодействия симметричного волчка с аксиально-симметричным магнитным полем / Зуб С.И., Зуб С.С., Ляшко В.С., Ляшко Н.И., Ляшко С.И. // Кібернетика та системний аналіз. 2017. Т. 53, № 3. С. 3-17.

108. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович [и др.]. Москва: Наука, 1980. 480 с.

109. Ментинський С.М. Застосування двосторонніх ітерацій до наближеного розв'язання крайових задач // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». 2000. № 411: Прикладна математика. С. 254-257.

110. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва: Иностранная литература, 1957. 256 с.

111. Михлин С.Г. Курс математической физики. Москва: Лань, 2002. 576 с.

112. Москалев О.Б. Возможность существования нескольких стационарных распределений нейтронов в энергетическом ядерном реакторе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 920-923.

113. Москалев О.Б. Критический режим реактора при наличии нелинейной связи между температурой и потоком нейтронов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3, № 2. С. 327-336.

114. Москалев О.Б. Критический режим реактора с нелинейной связью между потоком нейтронов и температурой в многогрупповом приближении // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 599-604.

115. Москалев О.Б. Критический режим реактора с нелинейной связью между температурой и потоком нейтронов в приближении односкоростного уравнения переноса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 1. С. 166-168.

116. Москалев О.Б. О решениях квазилинейных стационарных уравнений диффузии нейтронов в плоском слое // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 3. С. 724-729.

117. Москалев О.Б. Приближенный метод решения нелинейного уравнения переноса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 561-565.



118. Москалев О.Б., Чуянов В.А. О существовании и единственности решения некоторых нелинейных задач теории ядерных реакторов // Доклады АН СССР. 1963. Т. 153. № 5. С. 1030-1032.

119. Об одной задаче химических реакций / Колосов А.И., Васильев А.В., Ермаков А.Е., Колосова С.В. // Нелинейная механика. 1985. С. 11-17.

120. Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Двосторонні інтегральні і диференціальні нерівності та їхнє застосування. Львів: Каменярь, 2011. 259 с.

121. Обшта А.Ф., Шувар Б.А., Ментинський С.М. Побудова двосторонніх наближень до розв'язків одного класу крайових задач // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. 2012. № 9. С. 95-99.

122. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Тр. ММО. 1978. Т. 36. С. 237-273.

123. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

124. Пелех Р.Я., Лучко Й.Й. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2009. Т. 14, № 2. С. 136-142.

125. Пелех Я.М., Лучко Й.Й. Двосторонні обчислювальні схеми розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з оцінкою головного члена похибки // Наука і прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна. 2011. № 39. С. 131-137.

126. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ: Либідь, 2014. 363 с.

127. Питьовка О.Ю. Двосторонні методи дослідження крайових задач: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Диференціальні рівняння» / Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2009. 19 с.

128. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.

129. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник нелинейные уравнения математической физики: точные решения. Москва: Физматлит, 2002. 432 с.

130. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. Москва: Наука, 1969. 456 с.

131. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые её приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

132. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Метод квазифункций Грина // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1979. С. 188-196.

133. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев: Наукова думка, 1976. 288 с.

134. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Математическое моделирование теплового самовоспламенения для стационарных условий методом  $R$ -функций // Доклады Академии наук Украины. 1992. № 12. С. 24-27.

135. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов [и др.]. Москва: Наука, 1987. 478 с.

136. Рутман М.А. Операторные уравнения в полуупорядоченных пространствах и некоторые качественные теоремы для линейных дифференциальных уравнений с частными производными // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, вып. 1 (73). С. 234-238.

137. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.

138. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. Москва: URSS, 2014. 784 с.

139. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва: URSS, 2015. 248 с.

140. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. Москва: Научный мир, 2003. 316 с.

141. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.

142. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наукова думка, 1985. 224 с.

143. Сидоров М. Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі використання функції Гріна // Інформаційні системи та технології: матеріали статей 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції (с. Коблеве – м. Харків, 10-15 вересня 2018 р.). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 135-139.

144. Сидоров М.В. Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 3 (82). С. 50-56.

145. Сидоров М.В. Застосування конструктивних методів теорії  $R$ -функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів // Бионика интеллекта. 2017. № 2 (89). С. 43-49.

146. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259.

147. Сидоров М.В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 146-161.

148. Сидоров М.В. Метод двобічних ітерацій у чисельному аналізі першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь // Бионика интеллекта. 2018. № 1 (90). С. 53-61.

149. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85.

150. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157-167.

151. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радиоэлектроника, информатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66.

152. Сидоров М.В. Метод Рунге та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 38. С. 55-63.

153. Сидоров М.В. Метод Рунге у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 108-127.

154. Сидоров М.В. Нові конструктивні методи дослідження нелінійних крайових задач // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 65-67.

155. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатних розв'язків нелінійних крайових задач методом квазіфункцій Гріна-Рвачова // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Луцьк – м. Київ, 7-10 жовтня 2017 р.). Т. 2. Київ: НТУУ «КПІ», 2017. С. 141-145.

156. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2017. Вип. 34. С. 58-66.

157. Сидоров М.В., Кончаковська О.С. Побудова двобічних наближень до розв'язку однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 71-73.

158. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. Москва: Физматлит, 2007. 560 с.

159. Стягар А.О., Савула Я.Г., Дияк І.І. Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіла з тонким включенням методом декомпозиції області // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2015. Т. 57, № 3. С. 119-131.

160. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980. 512 с.
161. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва: Эдиториал УРСС, 2001. 318 с.
162. Темам Р., Миранвиль А. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 320 с.
163. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. Москва: Физматлит, 2005. 254 с.
164. Тихонович А.Ю. Численное решение нелинейных краевых задач на множестве кусочно монотонных функций: дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук: 01.05.02 «Математическое моделирование, численные методы в научных исследованиях». Харьков, 1994. 99 с.
165. Феллер В. О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа // Успехи математических наук. 1941. № 8. С. 232-248.
166. Фонарёв А.А. Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов. Москва: ИНФРА-М, 2014. 202 с.
167. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.
168. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Москва: Гостехиздат, 1950. 102 с.
169. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. Москва: Наука, 1989. 288 с.
170. Шувар Б.А., Обшта А.Ф. Агрегаційно-ітеративні методи розв'язання операторних рівнянь. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. 432 с.
171. A D.Q., Long D.Q., Quy N.T. A novel efficient method for nonlinear boundary value problems // Numerical Algorithms. 2017. V. 76, № 2. P. 427-439.
172. A monotonicity formula and a Liouville-type theorem for a fourth order supercritical problem / Dávila J., Dupaigne L., Wang K. [and others] // Advances in Mathematics. 2014. V. 258. P. 240-285.

173. Abid I., Saanouni S., Trabelsi N. Singular limit solutions for a two-dimensional semilinear elliptic Yamabe system // *Wseas Transactions on Mathematics*. 2017. V. 16. P. 202-215.

174. Afrouzi G. A., Naghizadeh Z., Mahdavi S. Numerical methods for finding multiple solutions of a Dirichlet problem with nonlinear terms // *International Journal of Nonlinear Science*. 2006. V. 2, № 3. P. 147-152.

175. Afrouzi G.A., Graily E. Uniqueness of positive solutions for a class of  $p$ -Laplacian systems with multiple parameters // *International Journal of Mathematical Analysis*. 2008. V. 2, № 21. P. 1005-1013.

176. Afrouzi G.A., Graily E. Uniqueness of positive solutions for a class of quasilinear problems with multiple parameters // *International Journal of Nonlinear Science*. 2009. V. 7, № 4. P. 405-413.

177. Afrouzi G.A., Graily E. Uniqueness results for a class of semilinear elliptic systems // *International Journal of Nonlinear Science*. 2010. V. 9, № 3. P. 259-264.

178. Afrouzi G.A., Khademloo S. A numerical method for finding positive solutions of a superlinear Dirichlet problem // *Applied mathematics and computation*. 2006. V. 181, № 2. P. 1513-1518.

179. Afrouzi G.A., Khademloo S. A numerical method to find positive solution of semilinear elliptic Dirichlet problems // *Applied mathematics and computation*. 2006. V. 174, № 2. P. 1408-1415.

180. Afrouzi G.A., Khademloo S. Numerical solutions of diffusive logistic equation // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2007. V. 31, № 1. P. 112-118.

181. Afrouzi G.A., Khademloo S. Some numerical results on a convex nonlinear elliptic problem // *Applied mathematics and computation*. 2006. V. 175, № 1. P. 465-471.

182. Afrouzi G.A., Naghizadeh Z., Mahdavi S. Monotone methods in nonlinear elliptic boundary value problem // *International Journal of Nonlinear Science*. 2009. V. 7. P. 283-289.

183. Afrouzi G.A., Naghizadeh Z., Mahdavi S. Numerical approach to obtain positive solution for classes of Laplacian systems // *International Journal of Nonlinear Science*. 2009. V. 7, № 4. P. 462-466.

184. Afrouzi G.A., Naghizadeh Z., Mahdavi S.A. Numerical algorithm for finding positive solutions of superlinear Dirichlet problem // International Journal of Nonlinear Science. 2007. V. 3, № 1. P. 27-31.

185. Afrouzi G.A., Rasouli S.H. A note on the existence and stability properties of positive solution for some Dirichlet problems // International Mathematical Forum. 2007. V. 2, № 4. P. 195-201.

186. Albadarneh R.B., Shawagfeh N.T., Hammour Z.S.A. Numerical solution of semilinear elliptic equations using 13-points FDM // International Mathematical Forum. 2010. V. 5, № 11. P. 527-536.

187. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations, Part II: Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions and problems in 3D / Chen G., Ni W.M., Perronnet A., Zhou J. // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2001. V. 11, № 07. P. 1781-1799.

188. Ali J., Brown K., Shivaji R. Positive solutions for  $n \times n$  elliptic systems with combined nonlinear effects // Differential and Integral Equations. 2011. V. 24, № 3/4. P. 307-324.

189. Ali J., Shivaji R. Positive solutions for a class of  $p$ -Laplacian systems with multiple parameters // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 335, № 2. P. 1013-1019.

190. Ali J., Shivaji R., Ramaswamy M. Multiple positive solutions for classes of elliptic systems with combined nonlinear effects // Differential and Integral Equations. 2006. V. 19, № 6. P. 669-680.

191. Amann H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces // SIAM Review. 1976. Vol. 18, № 4. P. 620-709.

192. Ambrosetti A., Brezis H., Cerami G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // Journal of Functional Analysis. 1994. V. 122, № 2. P. 519-543.

193. Arcoya D., de León S.S. Uniqueness of solutions for some elliptic equations with a quadratic gradient term // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2010. V. 16, № 2. P. 327-336.

194. Aubin T. Some nonlinear problems in Riemannian geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 398 p.

195. Bandle C. Existence theorems, qualitative results and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1975. V. 58, № 3. P. 219-238.

196. Baraket S., Bazarbacha I., Trabelsi N. Construction of singular limits for four-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 2007. V. 131, № 7. P. 670-685.

197. Baraket S., Ye D. Singular limit solutions for two-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // *Chinese Annals of Mathematics. Series B*. 2001. V. 22, № 03. P. 287-296.

198. Batra R.C., Porfiri M., Spinello D. Analysis of electrostatic MEMS using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006. V. 30, № 11. P. 949-962.

199. Bernfeld S. R., Lakshmikantham V. Monotone methods for nonlinear boundary value problems in Banach spaces // *Nonlinear Analysis*. 1979. V. 3. P. 303-316.

200. Bozhkov Y. Noether symmetries and critical exponents // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. 2005. V. 1, № 022. P. 1-12.

201. Brubaker N.D., Pelesko J.A. Non-linear effects on canonical MEMS models // *European Journal of Applied Mathematics*. 2011. V. 22, № 5. P. 455-470.

202. Callegari A.J., Reiss E.L., Keller H.B. Membrane buckling: A study of solution multiplicity // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1971. V. 24, № 4. P. 499-527.

203. Carioli A., Musina R. The Hénon-Lane-Emden system: A sharp nonexistence result // *Advanced Nonlinear Studies*. 2017. V. 17, № 3. P. 517-526.

204. Carioli A., Musina R. The homogeneous Hénon-Lane-Emden system // *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2015. V. 22, № 5. P. 1445-1459.

205. Carl S. A monotone iterative scheme for nonlinear reaction-diffusion systems having nonmonotone reaction terms // *Journal of mathematical analysis and applications*. 1988. V. 134, № 1. P. 81-93.

206. Castorina D. Uniqueness of positive radial solutions for quasilinear elliptic equations in an annulus // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2010. V. 72, № 5. P. 2195-2203.



207. Chandrasekar S. An Introduction to the Theory of Stellar Structures. Dover, New York, 1957. 518 p.
208. Chen G., Zhou J., Ni W.M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10, № 07. P. 1565-1612.
209. Choi Q.H., Jung T. Elliptic system with some singular nonlinearity // Complex Variables and Elliptic Equations. 2018. V. 63, № 2. P. 250-265.
210. Ciarlet P.G., Natterer F., Varga R.S. Numerical methods of high-order accuracy for singular nonlinear boundary value problems // Numerische Mathematik. 1970. V. 15, № 2. P. 87-99.
211. Ciarlet P.G., Varga R.S., Schultz M.H. Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems. V. Monotone Operator Theory // Numerische Mathematik. 1969. V. 13. P. 51-77.
212. Clemente R.G., Marcos do Ó J. Regularity of stable solutions to quasilinear elliptic equations on Riemannian models // arXiv preprint arXiv:1901.02409. 2019. 18 p.
213. Cohen D.S., Keller H.B. Some positive problems suggested by nonlinear heat generation // Journal of Mathematics and Mechanics. 1967. V. 16. P. 1361-1376.
214. Cowan C. Regularity of stable solutions of a Lane-Emden type system // Methods and Applications of Analysis. 2015. V. 22, № 3. P. 301-312.
215. Cowan C., Fazly M. On stable entire solutions of semi-linear elliptic equations with weights // Proceedings of the American Mathematical Society. 2012. V. 140, № 6. P. 2003-2012.
216. Critical pull-in curves of MEMS actuators in presence of Casimir force / McLellan B., Medina L., Xu C., Yang Y. // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2016. V. 96, № 12. P. 1406-1422.
217. Cui R., Li P., Shi J., Wang Y. Existence, uniqueness and stability of positive solutions for a class of semilinear elliptic systems // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2013. V. 42, № 1. P. 91-104.

218. Cui R., Wang Y., Shi J. Uniqueness of the positive solution for a class of semilinear elliptic systems // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2007. V. 67, № 6. P. 1710-1714.

219. Dalmaso R. Existence and uniqueness of positive radial solutions for the Lane-Emden system // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2004. V. 57, № 3. P. 341-348.

220. Dalmaso R. Uniqueness theorems for some fourth-order elliptic equations // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1995. V. 123, № 4. P. 1177-1183.

221. Dammak M., Ouni T. Singular limits for 4-dimensional semilinear elliptic problems with exponential nonlinearity adding a singular source term given by Dirac masses // *Differential and Integral Equations*. 2008. V. 21, № 11-12. P. 1019-1036.

222. Dkhil A.B., Zeddini N. Bounded and large radially symmetric solutions for some  $(p, q)$ -Laplacian stationary systems // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2012. V. 2012, № 71. P. 1-9.

223. Domingos A.R., Ramos M. Solutions of semilinear elliptic equations with superlinear sign changing nonlinearities // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2002. V. 50, № 2. P. 149-161.

224. Dridi S., Khamessi B. Asymptotic behavior of positive solutions of a semilinear Dirichlet problem in the annulus // *Opuscula Mathematica*. 2015. V. 35, № 1. P. 21-36.

225. Duo J., Shi J., Wang Y. Structure of the solution set for a class of semilinear elliptic equations with asymptotic linear nonlinearity // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2008. V. 69, № 8. P. 2369-2378.

226. Dupaigne L. Stable solutions of elliptic partial differential equations. Boca Raton, Chapman and Hall / CRC, 2011. 318 p.

227. Ebde M. A., Zaag H. Construction and stability of a blow up solution for a nonlinear heat equation with a gradient term // *SeMA Journal*. 2011. V. 55, № 1. P. 5-21.

228. Esposito P. Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity // *Communications in Contemporary Mathematics*. 2008. V. 10, № 1. P. 17-45.

229. Felipe-Sosa R., Felipe R. Boundary value problems for nonlinear elliptic equations with two parameters // *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2014. V. 22, № 1. P. 1-13.

230. Ferrero A., Grunau H.C. The Dirichlet problem for supercritical biharmonic equations with power-type nonlinearity // *Journal of differential equations*. 2007. V. 234, № 2. P. 582-606.

231. Franca M. Positive solutions of semilinear elliptic equations: a dynamical approach // *Differential and Integral Equations*. 2013. V. 26, № 5/6. P. 505-554.

232. Gavalas G.R. Nonlinear differential equations of chemically reacting systems. Springer Tracts in Natural Philosophy. V. 17. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1968. 117 p.

233. Gazzola F., Sweers G. On positivity for the biharmonic operator under Steklov boundary conditions // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2008. V. 188, № 3. P. 399-427.

234. Ghossoub N., Guo Y. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2007. V. 38, № 5. P. 1423-1449.

235. Giachetti D., Petitta F., De León S.S. Elliptic equations having a singular quadratic gradient term and a changing sign datum // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2012. V. 11. P. 1875-1895.

236. Giacomoni J., Warnault G., Prashanth S. Existence and global analytic bifurcation for singular biharmonic equation with Navier boundary condition // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2017. V. 145, №. 1. P. 151-164.

237. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987. V. 11, № 5. P. 623-632.

238. Guo Y. Dynamical solutions of singular wave equations modeling electrostatic MEMS // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2010. V. 9, № 4. P. 1135-1163.

239. Guo Y., Pan Z., Ward M.J. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2005. V. 66, № 1. P. 309-338.

240. Guo Z., Wei J. Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular non-linearity // *Journal of the London Mathematical Society*. 2008. V. 78, № 1. P. 21-35.

241. Guo Z., Wei J. Liouville type results and regularity of the extremal solutions of biharmonic equation with negative exponents // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2014. V. 34, № 6. P. 2561-2580.

242. Haussermann J., Van Gorder R.A. Efficient low-error analytical-numerical approximations for radial solutions of nonlinear Laplace equations // *Numerical Algorithms*. 2015. V. 70, № 2. P. 227-248.

243. Hénon M. Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems // *Astronomy and astrophysics*. 1973. V. 24. P. 229-238.

244. Hsu C.-H., Shih Y.-W. Solutions of semilinear elliptic equations with asymptotic linear nonlinearity // *Nonlinear Analysis*. 2002. V. 50, № 2. P. 275-283.

245. Iaia J.A., Gadam S. Exact multiplicity of positive solutions in semipositone problems with concave-convex type nonlinearities // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2001. V. 2001, № 4. P. 1-9.

246. Jator S., Sinkala Z. Uniqueness of positive radial solutions for  $\Delta u + f(u) = 0$  on the annulus // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2004. V. 12, № 1. P. 23-31.

247. Joseph D. D. Non-linear heat generation and stability of the temperature distribution in conducting solids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1965. V. 8, № 2. P. 281-288.

248. Joseph D.D., Sparrow E.M. Nonlinear diffusion induced by nonlinear sources // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1970. V. 28, № 3. P. 327-342.

249. Kapila A.K., Matkowsky B.J., Vega J. Reactive-diffusive system with Arrhenius kinetics: peculiarities of the spherical geometry // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. V. 38, № 3. P. 382-401.

250. Kawarada H. On solutions of initial-boundary problem for  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$  // *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*. 1975. V. 10, № 3. P. 729-736.

251. Kazdan J.L., Warner F.W. Curvature functions for compact 2-manifolds // *Annals of Mathematics, Second Series*. 1974. V. 99, № 1. P. 14-47.

252. Klimsiak T. Semilinear elliptic systems with measure data // *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (1923-). 2015. V. 194, № 1. P. 55-76.

253. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes*. 2016. V. 5. №. 4. P. 11-19.

254. Kolosova S.V., Lukhanin V.S., Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика*. 2018. № 3 (99). С. 78-91.

255. Korman P., Shi J. On Lane-Emden type systems // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2005. P. 510-517.

256. Kristály A., Rădulescu V.D., Varga C. Variational principles in mathematical physics, geometry, and economics: Qualitative analysis of nonlinear equations and unilateral problems. New York: Cambridge University Press, 2010. 410 p.

257. Kumar M., Kumar P. A finite element approach for finding positive solutions of semilinear elliptic Dirichlet problems // *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 2009. V. 25, № 5. P. 1119-1128.

258. Kumar M., Mishra G. A review on nonlinear elliptic partial differential equations and approaches for solution // *International Journal of Nonlinear Science*. 2012. V. 13, № 4. P. 401-418.

259. Kumar M., Mishra G. An introduction to numerical methods for the solutions of partial differential equations // *Applied Mathematics*. 2011. V. 2, № 11. P. 1327-1338.

260. Kumar M., Singh P., Kumar P. A survey on various computational techniques for nonlinear elliptic boundary value problems // *Advances in Engineering Software*. 2008. V. 39, № 9. P. 725-736.

261. Lai B. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force // *Annales Henri Poincare*. 2015. V. 16. P. 239–253.

262. Li C., Villavert J. A degree theory framework for semilinear elliptic systems // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2016. V. 144, № 9. P. 3731-3740.

263. Li S., Yuan H. Green quasifunction method for free vibration of clamped thin plates // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2012. V. 25, № 1. P. 37-45.

264. Li S., Yuan H. Quasi-Green's function method for free vibration of clamped thin plates on Winkler foundation // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. V. 32, № 3. P. 265-276.

265. Li S., Yuan H. Quasi-Green's function method for free vibration of simply-supported trapezoidal shallow spherical shell // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. V. 31, № 5. P. 635-642.

266. Lieb E. H., Yau H.-T. The Chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics // *Communications in Mathematical Physics*. 1987. V. 112. P. 147-174.

267. Lin F., Yang Y. Nonlinear non-local elliptic equation modelling electrostatic actuation // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 2007. V. 463, № 2081. P. 1323-1337.

268. Makhlof S.B., Zribi M. Existence and boundary behaviour of solutions for a nonlinear Dirichlet problem in the annulus // *Differential and Integral Equations*. 2017. V. 30, № 11/12. P. 929-946.

269. Maniwa M. Uniqueness and existence of positive solutions for some semilinear elliptic systems // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2004. V. 59, № 6. P. 993-999.

270. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem // *International Mathematical Forum*. 2008. V. 3, № 17. P. 811-816.

271. McKenna P.J., Reichel W. Radial solutions of singular nonlinear biharmonic equations and applications to conformal geometry // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2003. V. 2003. Paper No. 37, 13 p.

272. Moore J. Existence of multiple quasifixed points of mixed monotone operators by iterative techniques // *Applied Mathematics and Computation*. 1981. V. 9, № 2. P. 135-141.

273. Omrane I.B., Dammak M.A Generalized four dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // *Communications in Applied Analysis*. 2009. V. 13, № 3. P. 431.

274. Ouni T. Blow-up Solution for 4-dimensional Generalized Emden-Fowler Equation with Exponential Nonlinearity // *Taiwanese Journal of Mathematics*. 2018. V. 22, № 1. P. 125-155.

275. Pacella F. Uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic equations and related eigenvalue problems // *Milan Journal of Mathematics*. 2005. V. 73, № 1. P. 221-236.

276. Pao C.V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York: Plenum Press, 1992. 794 p.

277. Pao C.V. Numerical methods for fourth-order nonlinear elliptic boundary value problems // *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 2001. V. 17, № 4. P. 347-368.

278. Pao C.V., Lu X. Block monotone iterative method for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2010. V. 47, № 6. P. 4581-4606.

279. Pao C.V., Wang Y.M. Nonlinear fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2010. V. 372, № 2. P. 351-365.

280. Pao C.V., Wang Y.M. Numerical methods for fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016. V. 292. P. 447-468.

281. Peletier L. A., Van der Vorst R. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation // *Differential and Integral Equations*. 1992. V. 5, № 4. P. 747-767.

282. Quang A.D., Hai T.H. Computational method for a fourth order nonlinear elliptic boundary value problem // *3rd National Foundation for Science and Technology Development Conference on Information and Computer Science (NICS)*. 2016. P. 62-67.

283. Reichel W. Uniqueness results for semilinear polyharmonic boundary value problems on conformally contractible domains. II // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. V. 287, № 1. P. 75-89.

284. Rigoli M., Zamperlin S. “A priori” estimates, uniqueness and existence of positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds // *Journal of Functional Analysis*. 2007. V. 245, № 1. P. 144-176.

285. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // *Mathematische Annalen*. 1930. V. 102, № 1. P. 650-670.

286. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators: Ph.D. Thesis Summary. Cluj-Napoca, 2010. 47 p.

287. Shi J., Yao M. Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2005. V. 2005. № 04. P. 1-11.

288. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2017. № 3 (126). P. 110-123.

289. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problem for nonlinear elliptic systems // *Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiyy (Lviv, 28-30 september 2017)*. Lviv: PAIS, 2017. P. 102-103.

290. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. T. 10. №. 2. C. 360-375.

291. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2018. № 2 (128). P. 96-113.

292. Singular limiting solutions for elliptic problem involving exponentially dominated nonlinearity and convection term / Baraket S., Abid I., Ouni T. [and others] // *Boundary Value Problems*. 2011. V. 2011, № 1. P. 1-17.

293. Singular limits for 2-dimensional elliptic problem with exponentially dominated nonlinearity and a quadratic convection term / Baraket S., Bazarbacha I., Kharrati S., Ouni T. // *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta – Seria Matematica*. 2013. V. 21, № 1. P. 19-50.

294. Srivastava A., Shah N.H. Mathematical modelling of nonlinear mass diffusion problem by extended finite element method // *Journal of Applied Science and Computations*. 2019. V. 6, № 5. P. 559-567.

295. Stakgold I., Holst M.J. Green's functions and boundary value problems. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 880 p.



296. Sun Y., Wu S. Iterative solution for a singular nonlinear elliptic problem // *Applied Mathematics and Computation*. 2001. V. 118, № 1. P. 53-62.

297. Sunny L.A., Vijesh V.A. A monotone iterative technique for nonlinear fourth order elliptic equations with nonlocal boundary conditions // *Journal of Scientific Computing*. 2018. V. 76, № 1. P. 275-298.

298. The critical dimension for a fourth order elliptic problem with singular nonlinearity / Cowan C., Esposito P., Ghossoub N., Moradifam A. // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2010. V. 198, № 3. P. 763-787.

299. The Gel'fand problem for the biharmonic operator / L. Dupaigne, Ghergu M., Goubet O. [and others] // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2013. V. 208, № 3. P. 725-752.

300. The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations / Zhang X., Liu L., Wu Y. [and others] // *Applied Mathematics and Computation*. 2013. V. 219, № 9. P. 4680-4691.

301. Trabelsi M., Trabelsi N. Singular limit solutions for a 2-dimensional semilinear elliptic system of Liouville type // *Advances in Nonlinear Analysis*. 2016. V. 5, № 4. C. 315-329.

302. Troy W.C. Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations // *Journal of Differential Equations*. 1981. V. 42, № 3. P. 400-413.

303. Van der Vorst R. Fourth order elliptic equations with critical growth // *Comptes Rendus-Academie des Sciences Paris Serie 1*. 1995. V. 320. P. 295-295.

304. Villavert J. A Refined approach for non-negative entire solutions of  $\Delta u + u^p = 0$  with subcritical Sobolev growth // *Advanced Nonlinear Studies*. 2017. V. 17, № 4. P. 691-703.

305. Wang Q. Dynamical solutions of singular parabolic equations modeling electrostatic MEMS // *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2015. V. 22, № 4. P. 629-650.

306. Wang W.X., Liu X.L. Positive solutions of operator equations and nonlinear beam equations with a perturbed loading force // *Wseas Transactions on Mathematics*. 2012. V. 3, № 11. P. 252-261.

307. Wang Y.M. Error and stability of monotone method for numerical solutions of fourth-order semilinear elliptic boundary value problems // *Journal of computational and applied mathematics*. 2007. V. 200, № 2. P. 503-519.

308. Wang Y.M. Monotone iterative technique for numerical solutions of fourth-order nonlinear elliptic boundary value problems // *Applied numerical mathematics*. 2007. V. 57, № 10. P. 1081-1096.

309. Xu B. Exact multiplicity and global structure of solutions for a class of semilinear elliptic equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008. V. 341, № 2. P. 783-790.

310. Xu B. Multiplicity and bifurcation of solutions for a class of asymptotically linear elliptic problems on the unit ball // *Journal of Function Spaces and Applications*. 2013. V. 2013. 8 p.

311. Yadav N., Yadav A., Deep K. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems // *Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving*. New Delhi: Springer, 2015. P. 113-121.

312. Yang Y., Zhang X. Entire blow-up solutions of semilinear elliptic systems with quadratic gradient terms // *Abstract and Applied Analysis*. 2012. V. 2012. 15 p.

313. Ye D., Zhou F. A generalized two dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2001. V. 13, № 2. P. 141-158.

314. Yuan H., Li S., Liu R. Green quasifunction method for vibration of simply-supported thin polygonic plates on Pasternak foundation // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2007. V. 28, № 7. P. 847-853.

315. Zeddini N., Dkhil A.B. Positive solutions for semilinear elliptic systems with sign-changing potentials // *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta – Seria Matematica*. 2016. V. 24, № 1. P. 383-390.

316. Zhai S., Feng X. A new coupled high-order compact method for the three-dimensional nonlinear biharmonic equations // *International Journal of Computer Mathematics*. 2014. V. 91, № 10. P. 2307-2325.

317. Zhang X., Liu L. The existence and nonexistence of entire positive solutions of semilinear elliptic systems with gradient term // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2010. V. 371, № 1. P. 300-308.

318. Zhang Y., He Y. Stability and convergence of a finite element method for a semilinear elliptical problem with small viscosity // *Computers & Mathematics with Applications*. 2019. V. 05, № 09. P. 302-315.

319. Zhang Z., Wang J. The upper and lower solution method for a class of singular nonlinear second order three-point boundary value problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2002. V. 147, № 1. P. 41-52.

320. Zhao P., Zhong C., Zhu J. Positive solutions for a nonhomogeneous semilinear elliptic problem with supercritical exponent // *Journal of Mathematical Analysis and Application*. 2001. V. 254. P. 335-347.

## ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача і  
відомості про апробацію результатів дисертації

## А.1 Список публікацій здобувача

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

*Статті*

1. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50-57. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. 2017. № 1 (88). С. 60-64. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2017. Вип. 34. С. 58-66. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157-167. DOI: 10.32626/2308-5878.2017-16.157-167. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

9. Сидоров М.В. Застосування конструктивних методів теорії  $R$ -функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів // Бионика интеллекта. 2017. № 2 (89). С. 43-49. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

10. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2017. № 3 (126). P. 110-123. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

11. Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

12. Сидоров М.В. Метод Рунге та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 38. С. 55-63. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

13. Сидоров М.В. Метод двобічних ітерацій у чисельному аналізі першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь // Бионика интеллекта. 2018. № 1 (90). С. 53-61. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

14. Сидоров М.В. Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 108-127. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12.

15. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96-113. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

16. Kolosova S.V., Lukhanin V.S., Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78 – 91. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

17. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85. DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2\(32\).149705](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2(32).149705) [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar, Index Copernicus.]

18. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. 2018. Т. 10. №. 2. С. 360-375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, Index Copernicus.]

19. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 39. С. 33-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

20. Сидоров М.В. Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 3 (82). С. 50-56. DOI: 10.30837/1563-0064.3.2018.162782 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

21. Сидоров М.В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 146-161. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161.

22. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, WorldCat.]

#### Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

23. Колосов А.І., Колосова С.В., Сидоров М.В. Деякі питання побудови двобічних наближень до розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь // «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: збірник праць науково-технічної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2010 р.). Львів: ФМІ НАНУ, 2010. С. 37-39.

24. Колосов А.И., Сидоров М.В. Идеи М. А. Красносельского в исследовании нелинейных краевых задач математической физики // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 215-217.

25. Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В. Об одном конструктивном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 218-221.

26. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода квази-функции Грина к построению итерационных методов решения некоторых нелинейных краевых задач // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць одинадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 21-23 листопада 2012 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2012. С. 101-102.

27. Колосова С.В., Сидоров М.В. Некоторые вопросы, связанные с построением итерационных методов решения нелинейных краевых задач // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28-31 мая 2013 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. С. 52-58.

28. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції (Румунія, м. Бухарест, 17 травня 2013 р.). Ч. I. Бухарест: Бухарест. ун-т, 2013. С. 16-24.

29. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (г. Херсон, 10-15 июня 2013 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. С. 205-208.

30. Колосова С.В., Сидоров М.В. Про побудову ітераційного процесу для рівняння з антитонним оператором // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць дванадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 11-12 листопада 2014 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2014. С. 37-38.

31. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 185-188.

32. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Ланге-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 362-365.



33. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problem for nonlinear elliptic systems // Proceedings of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied Mathematics” dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy (Lviv, 28-30 september 2017). Lviv: PAIS, 2017. P. 102-103.

34. Сидоров М.В. Нові конструктивні методи дослідження нелінійних крайових задач // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 65-67.

35. Сидоров М.В., Кончаковська О.С. Побудова двобічних наближень до розв'язку однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 71-73.

36. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатних розв'язків нелінійних крайових задач методом квазіфункцій Гріна-Рвачова // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Луцьк – м. Київ, 7-10 жовтня 2017 р.). Т. 2. Київ: НТУУ «КПІ», 2017. С. 141-145.

37. Сидоров М. Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі використання функції Гріна // Інформаційні системи та технології: матеріали статей 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції (с. Коблеве – м. Харків, 10-15 вересня 2018 р.). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 135-139.

## А.2 Відомості про апробацію результатів дисертації

Таблиця А.1 – Відомості про апробацію результатів дисертації

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
1.	Науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»	Україна, м. Львів, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України	7 – 8 жовтня 2010 р.	очна
2.	XV Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011)	Україна, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет	13 – 18 червня 2011 р.	очна
3.	Одинадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології»	Україна, м. Одеса, Одеська національна академія харчових технологій	21 – 23 листопада 2012 р.	очна
4.	VII Международная научно-техническая конференция молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем»	Росія, м. Пенза, Пензенський державний університет	28 – 31 травня 2013 р.	заочна
5.	I Міжнародна науково-практична конференція «Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності»	Румунія, м. Бухарест, Бухарестський університет	17 травня 2013 р.	заочна
6.	XVI Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013)	Україна, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет	10 – 15 червня 2013 р.	очна

## Кінець таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
7.	Дванадцята Всеукраїнська науково-технічна конференція «Математичне моделювання та інформаційні технології»	Україна, м. Одеса, Одеська національна академія харчових технологій	11 – 12 листопада 2014 р.	очна
8.	XXI Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – „APAMCS-2015”	Україна, м. Львів, Львівський національний університет імені Івана Франка	24 – 25 вересня 2015 р.	очна
9.	International conference „Ukrainian Conference on Applied Mathematics”	Україна, м. Львів, Львівський національний університет імені Івана Франка	28 – 30 вересня 2017 р.	заочна
10.	III Всеукраїнська науково-практична конференція «Комп’ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (КМПЗ-2017)	Україна, м. Рівне, Національний університет водного господарства та природокористування	28 – 30 вересня 2017 р.	очна
11.	Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука	Україна, м. Луцьк – м. Київ, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»	7 – 10 жовтня 2017 р.	очна
12.	Сьома Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології (ICT-2018)»	Україна, с. Коблеве – м. Харків, Харківський національний університет радіоелектроніки	10-15 вересня 2018 р.	очна

ДОДАТОК Б  
Акт впровадження

## ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор  
Харківського національного  
університету радіоелектроніки

\_\_\_\_\_ І.В. Рубан

« 23 » \_\_\_\_\_ 2019 р.

## АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук Сидорова Максима Вікторовича «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики» у навчальному процесі Харківського національного університету радіоелектроніки

Комісія у складі начальника навчального відділу ХНУРЕ Міхнової А.В., завідувача кафедри прикладної математики Тевяшева А.Д., професора кафедри прикладної математики Колосової С.В. виконали перевірку та склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Сидорова Максима Вікторовича впроваджені у навчальний процес на кафедрі прикладної математики.

Комісія визначає, що результати дисертаційної роботи використано:

- у змістовному модулі 2 «Ітераційні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь» дисципліни «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь»;
- у дипломному проектуванні.

Начальник  
навчального відділу

\_\_\_\_\_ А.В. Міхнова

Завідувач кафедри  
прикладної математики

\_\_\_\_\_ А.Д. Тевяшев

Професор кафедри  
прикладної математики

\_\_\_\_\_ С.В. Колосова

З оригіналом згідно  
Секретар вченої ради Д 64.052.02

\_\_\_\_\_ Л.В. Колесник



## ДОДАТОК В

Функції Гріна операторів Лапласа  $\Delta u$  і Гельмгольца  $\Delta u - \kappa^2 u$ 

для деяких областей

Таблиця В.1 – Функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (2.111)

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
1	Прямокутник $0 < x_1 < a,$ $0 < x_2 < b$	$G(x_1, x_2, s_2, s_2) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin p_n x_1 \sin q_m x_2 \sin p_n s_1 \sin q_m s_2}{p_n^2 + q_m^2},$ $p_n = \frac{\pi n}{a}, q_m = \frac{\pi m}{b}$
2	Круг $0 \leq r < R,$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\varphi - \psi) + R^4}{R^2 [r^2 - 2r \rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2]},$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
3	Півкруг $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \pi$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\varphi - \psi) + R^4}{R^2 [r^2 - 2r \rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2]} -$ $- \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\varphi + \psi) + R^4}{R^2 [r^2 - 2r \rho \cos(\varphi + \psi) + \rho^2]},$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
4	Чверть круга $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = G_1(r, \varphi, \rho, \psi) - G_1(r, \varphi, \rho, 2\pi - \psi) -$ $- G_1(r, \varphi, \rho, \pi - \psi) + G_1(r, \varphi, \rho, \pi + \psi),$ $G_1(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\varphi - \psi) + R^4}{R^2 [r^2 - 2r \rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2]},$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
5	Сектор круга $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \frac{\pi}{n},$ $n \in \mathbb{N}$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ G_1 \left( r, \varphi, \rho, \frac{2k\pi}{n} + \psi \right) - G_1 \left( r, \varphi, \rho, \frac{2k\pi}{n} - \psi \right) \right],$ $G_1(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\varphi - \psi) + R^4}{R^2 [r^2 - 2r \rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2]},$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$

## Продовження таблиці В.1

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
6	Сектор круга $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \beta,$ $\beta$ – довільне	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\left  z^{\frac{\pi}{\beta}} - \bar{\zeta}^{\frac{\pi}{\beta}} \right  \left  R^{\frac{2\pi}{\beta}} - (\bar{\zeta} z)^{\frac{\pi}{\beta}} \right }{\left  z^{\frac{\pi}{\beta}} - \zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \right  \left  R^{\frac{2\pi}{\beta}} - (\zeta z)^{\frac{\pi}{\beta}} \right },$ $z = r e^{i\varphi}, \zeta = \rho e^{i\psi}, \bar{\zeta} = \rho e^{-i\psi}, i^2 = -1$
7	Паралелепіпед $0 < x_1 < a,$ $0 < x_2 < b,$ $0 < x_3 < c$	$G(x_1, x_2, x_3, s_2, s_2, s_3) =$ $= \frac{8}{abc} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin p_n x_1 \sin q_m x_2 \sin r_k x_3 \sin p_n s_1 \sin q_m s_2 \sin r_k s_3}{p_n^2 + q_m^2 + r_k^2},$ $p_n = \frac{\pi n}{a}, q_m = \frac{\pi m}{b}, r_k = \frac{\pi k}{c}$
8	Циліндр скінченної товщини $0 \leq r < R,$ $0 \leq \varphi < 2\pi,$ $0 < x_3 < a$	$G(r, \varphi, x_3, \rho, \psi, s_3) =$ $= \frac{2a}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_n}{[J'_n(\mu_{nm} R)]^2 [(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2]} \times$ $\times J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \rho) \cos[n(\varphi - \psi)] \sin \frac{\pi k x_3}{a} \sin \frac{\pi k s_3}{a},$ $A_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} J_n(z) - \text{функція Бесселя,}$ $\mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_n(\mu R) = 0,$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$

Кінець таблиці В.1

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
9	Циліндричний сектор скінченної товщини $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \varphi_0,$ $0 < x_3 < a$	$G(r, \varphi, x_3, \rho, \psi, s_3) =$ $= \frac{8a}{R^2 \varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_{nm} r) J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_{nm} \rho)}{\left[ J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_{nm} R) \right]^2 [(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2]} \times$ $\times \sin \frac{\pi n \varphi}{\varphi_0} \sin \frac{\pi n \psi}{\varphi_0} \sin \frac{\pi k x_3}{a} \sin \frac{\pi k s_3}{a},$ $J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(z) - \text{функція Бесселя,}$ $\mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu R) = 0,$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
10	Куля $0 \leq r < R,$ $0 \leq \theta \leq \pi,$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) =$ $= \frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \gamma + \rho^2}} - \frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos \gamma + R^4}},$ $\cos \gamma = \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi),$ $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = r \cos \theta,$ $s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi, s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, s_3 = \rho \cos \vartheta$
11	Півкуля $0 < r < R,$ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) = G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) - G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \pi - \vartheta, \psi),$ $G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) - \text{функція Гріна для кулі (п. 10),}$ $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = r \cos \theta,$ $s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi, s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, s_3 = \rho \cos \vartheta$
12	Чверть кулі $0 < r < R,$ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$ $0 < \varphi < \pi$	$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) = G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) - G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \pi - \vartheta, \psi) +$ $+ G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \pi - \vartheta, 2\pi - \psi) - G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, 2\pi - \psi),$ $G_1(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) - \text{функція Гріна для кулі (п. 10),}$ $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = r \cos \theta,$ $s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi, s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, s_3 = \rho \cos \vartheta$



Таблиця В.2 – Функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (2.112)

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
1	Прямокутник $0 < x_1 < a,$ $0 < x_2 < b$	$G(x_1, x_2, s_2, s_2) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin p_n x_1 \sin q_m x_2 \sin p_n s_1 \sin q_m s_2}{p_n^2 + q_m^2 + \kappa^2},$ $p_n = \frac{\pi n}{a}, q_m = \frac{\pi m}{b}$
2	Круг $0 \leq r < R,$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{nm}^{(1)}(r, \varphi) w_{nm}^{(1)}(\rho, \psi) + w_{nm}^{(2)}(r, \varphi) w_{nm}^{(2)}(\rho, \psi)}{\ w_{nm}\ ^2 (\lambda_{nm} + \kappa^2)},$ $\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}, \mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_n(\mu) = 0,$ $w_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \cos n\varphi, w_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\varphi,$ $w_{nm}^{(1)}(\rho, \psi) = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}) \cos n\psi, w_{nm}^{(2)}(\rho, \psi) = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\psi,$ $\ w_{nm}\ ^2 = \frac{\pi R^2}{2} (1 + \delta_{n0}) [J'_n(\mu_{nm})]^2, \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
3	Півкруг $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \pi$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{nm}(r, \varphi) w_{nm}(\rho, \psi)}{\ w_{nm}\ ^2 (\lambda_{nm} + \kappa^2)},$ $\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}, \mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_n(\mu) = 0,$ $w_{nm}(r, \varphi) = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\varphi, w_{nm}(\rho, \psi) = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}) \sin n\psi,$ $\ w_{nm}\ ^2 = \frac{\pi R^2}{4} [J'_n(\mu_{nm})]^2$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$

## Продовження таблиці В.2

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
4	Сектор круга $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \alpha$	$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{nm}(r, \varphi) w_{nm}(\rho, \psi)}{\ w_{nm}\ ^2 (\lambda_{nm} + \kappa^2)},$ $\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}, \mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_n(\mu) = 0,$ $w_{nm}(r, \varphi) = J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(r \sqrt{\lambda_{nm}}) \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha},$ $w_{nm}(\rho, \psi) = J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\rho \sqrt{\lambda_{nm}}) \sin \frac{\pi n \psi}{\alpha},$ $\ w_{nm}\ ^2 = \frac{\alpha R^2}{4} \left[ J'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu_{nm}) \right]^2$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$
5	Паралелепіпед $0 < x_1 < a,$ $0 < x_2 < b,$ $0 < x_3 < c$	$G(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) =$ $= \frac{8}{abc} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin p_n x_1 \sin q_m x_2 \sin r_k x_3 \sin p_n s_1 \sin q_m s_2 \sin r_k s_3}{p_n^2 + q_m^2 + r_k^2 + \kappa^2},$ $p_n = \frac{\pi n}{a}, q_m = \frac{\pi m}{b}, r_k = \frac{\pi k}{c}$

## Продовження таблиці В.2

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
6	Циліндр скінченної товщини $0 \leq r < R,$ $0 \leq \varphi < 2\pi,$ $0 < x_3 < a$	$G(r, \varphi, x_3, \rho, \psi, s_3) =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}^{(1)}(r, \varphi, x_3) w_{nmk}^{(1)}(\rho, \psi, s_3) + w_{nmk}^{(2)}(r, \varphi, x_3) w_{nmk}^{(2)}(\rho, \psi, s_3)}{\ w_{nmk}\ ^2 (\lambda_{nmk} + \kappa^2)},$ $\lambda_{nmk} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 k^2}{a^2},$ $\mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_n(\mu) = 0,$ $w_{nmk}^{(1)}(r, \varphi, x_3) = J_n\left(\mu_{nm} \frac{r}{R}\right) \cos n\varphi \sin \frac{\pi k x_3}{a},$ $w_{nmk}^{(2)}(r, \varphi, x_3) = J_n\left(\mu_{nm} \frac{r}{R}\right) \sin n\varphi \sin \frac{\pi k x_3}{a}$ $w_{nmk}^{(1)}(\rho, \theta, s_3) = J_n\left(\mu_{nm} \frac{\rho}{R}\right) \cos n\theta \sin \frac{\pi k s_3}{a},$ $w_{nmk}^{(2)}(\rho, \theta, s_3) = J_n\left(\mu_{nm} \frac{\rho}{R}\right) \sin n\theta \sin \frac{\pi k s_3}{a},$ $\ w_{nmk}\ ^2 = \frac{\pi R^2 a}{4} (1 + \delta_{n0}) [J'_n(\mu_{nm})]^2, \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$

## Продовження таблиці В.2

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
7	Циліндричний сектор скінченної товщини $0 < r < R,$ $0 < \varphi < \varphi_0,$ $0 < x_3 < a$	$G(r, \varphi, x_3, \rho, \psi, s_3) =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}(r, \varphi, x_3) w_{nmk}(\rho, \psi, s_3)}{\ w_{nmk}\ ^2 (\lambda_{nmk} + \kappa^2)},$ $\lambda_{nmk} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 k^2}{a^2},$ $\mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu) = 0,$ $w_{nmk}(r, \varphi, x_3) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_{nm} \frac{r}{R}\right) \sin \frac{\pi n \varphi}{\varphi_0} \sin \frac{\pi k x_3}{a},$ $w_{nmk}(\rho, \psi, s_3) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_{nm} \frac{\rho}{R}\right) \sin \frac{\pi n \psi}{\varphi_0} \sin \frac{\pi k s_3}{a},$ $\ w_{nmk}\ ^2 = \frac{a R^2 \varphi_0}{8} \left[ J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_{nm}) \right]^2,$ $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, s_1 = \rho \cos \psi, s_2 = \rho \sin \psi$

## Кінець таблиці В.2

№	Область $\Omega$	Функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
8	<p>Куля</p> $0 \leq r < R,$ $0 \leq \theta \leq \pi,$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	$G(r, \theta, \varphi, \rho, \vartheta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}^{(1)}(r, \theta, \varphi) w_{nmk}^{(1)}(\rho, \vartheta, \psi)}{\ w_{nmk}\ ^2 (\lambda_{nk} + \kappa^2)} +$ $+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{nmk}^{(2)}(r, \theta, \varphi) w_{nmk}^{(2)}(\rho, \vartheta, \psi)}{\ w_{nmk}\ ^2 (\lambda_{nk} + \kappa^2)},$ <p><math>\lambda_{nk} = \frac{\mu_{nk}^2}{R^2}</math>, <math>\mu_{nk}</math> – <math>k</math>-й додатний корінь рівняння <math>J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0</math>,</p> $w_{nmk}^{(1)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi,$ $w_{nmk}^{(2)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nk} \frac{r}{R}\right) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi,$ $w_{nmk}^{(1)}(\rho, \vartheta, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nk} \frac{\rho}{R}\right) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi,$ $w_{nmk}^{(2)}(\rho, \vartheta, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nk} \frac{\rho}{R}\right) P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\psi,$ <p><math>P_n^m(z)</math> – приєднані функції Лежандра,</p> $\ w_{nmk}^{(1)}\ ^2 = \ w_{nmk}^{(2)}\ ^2 = \frac{\pi R^2 (1 + \delta_{m0})(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \left[ J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nk}) \right]^2,$ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$ $s_1 = \rho \sin \vartheta \cos \psi, \quad s_2 = \rho \sin \vartheta \sin \psi, \quad s_3 = \rho \cos \vartheta$

## ДОДАТОК Г

Результати обчислювальних експериментів для еліптичних рівнянь  
зі степеневими нелінійностями

Таблиця Г.1 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.1) – (4.3) при різних  $p$  та  $\lambda$

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,86803	0,90336	2	0,4514	1,87505	1,95137	3	0,9752	2,94218	3,06194	3	1,5302
0,2	0,73255	0,79668	4	0,3975	1,74231	1,89484	4	0,9455	2,89227	3,14548	5	1,5696
0,3	0,59298	0,67878	5	0,3377	1,59618	1,82714	6	0,9091	2,84866	3,26086	6	1,6225
0,4	0,45032	0,54909	7	0,2719	1,42970	1,74324	8	0,8633	2,81015	3,42644	9	1,6968
0,5	0,30842	0,40873	9	0,2008	1,23370	1,63490	11	0,8035	2,77583	3,67853	12	1,8079
0,6	0,17609	0,26299	11	0,1276	0,99612	1,48768	15	0,7221	2,74500	4,09955	17	1,9901
0,7	0,06978	0,12641	15	0,0600	0,70330	1,27410	22	0,6051	2,71712	4,92238	25	2,3380
0,8	0,01108	0,02930	19	0,0132	0,35447	0,937526	35	0,4256	2,69176	7,11934	44	3,2325
0,9	0,00005	0,00037	26	0,00014	0,04628	0,37574	70	0,1486	2,66856	21,6670	109	8,5718

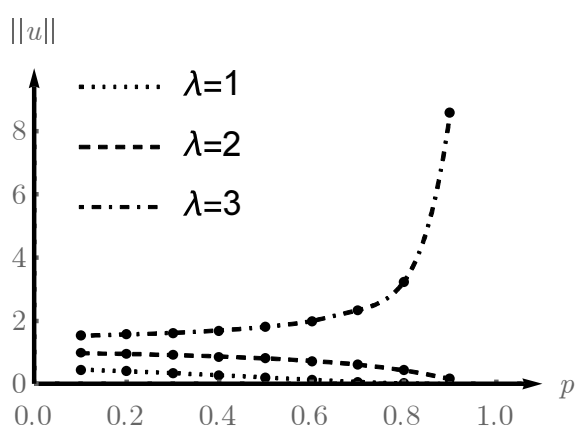


Рисунок Г.1 – Графіки норми  $\|u\|$   
розв'язку задачі (4.1) – (4.3)  
в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$

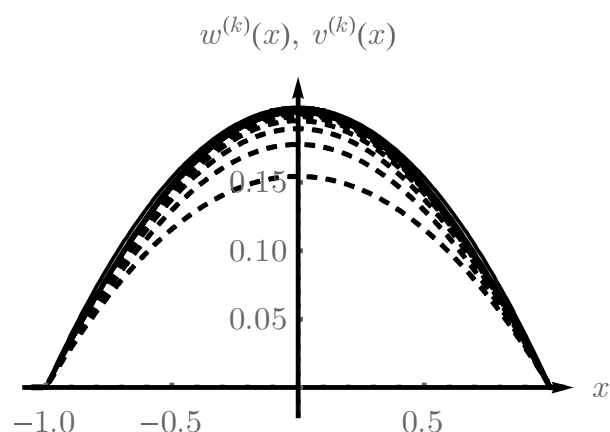


Рисунок Г.2 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$   
та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до  
розв'язку задачі (4.1) – (4.3)  
при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

Таблиця Г.2 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.1) – (4.3) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	0,20436	0,20232	0,19619	0,18597	0,17166	0,15327	0,13079	0,10422	0,07357	0,03883	0
$w^{(1)}(x_i)$	0,20435	0,20210	0,19534	0,18417	0,16868	0,14906	0,12552	0,09838	0,06802	0,03497	0
$w^{(2)}(x_i)$	0,20274	0,20048	0,19373	0,18257	0,16711	0,14756	0,12415	0,09721	0,06714	0,03448	0
$w^{(3)}(x_i)$	0,20182	0,19957	0,19285	0,18173	0,16634	0,14687	0,12357	0,09674	0,06682	0,03431	0
$w^{(4)}(x_i)$	0,20135	0,19911	0,19240	0,18131	0,16595	0,14653	0,12328	0,09652	0,06666	0,03423	0
$w^{(5)}(x_i)$	0,20112	0,19888	0,19218	0,18110	0,16576	0,14636	0,12313	0,09641	0,06658	0,03419	0
$w^{(6)}(x_i)$	0,20100	0,19876	0,19207	0,18099	0,16567	0,14627	0,12306	0,09635	0,06654	0,03418	0
$w^{(7)}(x_i)$	0,20094	0,19870	0,19201	0,18094	0,16562	0,14623	0,12303	0,09632	0,06653	0,03417	0
$w^{(8)}(x_i)$	0,20091	0,19867	0,19198	0,18091	0,16559	0,14621	0,12301	0,09631	0,06652	0,03416	0
$w^{(9)}(x_i)$	0,20090	0,19866	0,19197	0,18090	0,16558	0,14620	0,12300	0,09630	0,06651	0,03415	0
$u^{(9)}(x_i)$	0,20084	0,19861	0,19192	0,18085	0,16554	0,14616	0,12297	0,09628	0,06649	0,03415	0
$v^{(9)}(x_i)$	0,20079	0,19855	0,19186	0,18080	0,16549	0,14612	0,12293	0,09625	0,06647	0,03414	0
$v^{(8)}(x_i)$	0,20069	0,19846	0,19177	0,18071	0,16541	0,14605	0,12287	0,09620	0,06644	0,03412	0
$v^{(7)}(x_i)$	0,20050	0,19827	0,19159	0,18054	0,16525	0,14591	0,12276	0,09611	0,06638	0,03409	0
$v^{(6)}(x_i)$	0,20012	0,19789	0,19122	0,18020	0,16494	0,14563	0,12252	0,09593	0,06625	0,03402	0
$v^{(5)}(x_i)$	0,19936	0,19713	0,19049	0,17951	0,16431	0,14508	0,12206	0,09556	0,06600	0,03389	0
$v^{(4)}(x_i)$	0,19784	0,19563	0,18904	0,17814	0,16306	0,14397	0,12113	0,09483	0,06550	0,03363	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,19484	0,19267	0,18618	0,17544	0,16059	0,14179	0,11929	0,09340	0,06450	0,03312	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,18896	0,18685	0,18056	0,17016	0,15576	0,13753	0,11572	0,09060	0,06258	0,03214	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,17752	0,17556	0,16969	0,15998	0,14653	0,12948	0,10904	0,08546	0,05909	0,03038	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,15421	0,15267	0,14804	0,14033	0,12954	0,11566	0,09870	0,07865	0,05552	0,02930	0

Таблиця Г.3 – Значення наближених розв'язків задачі (4.1) – (4.3) при різних  $p$  та  $\lambda$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,4514	0,4468	0,4329	0,4099	0,3777	0,3365	0,2863	0,2273	0,1596	0,0837	0
0,2	0,3975	0,3934	0,38094	0,3602	0,3314	0,2945	0,2499	0,1976	0,1381	0,0720	0
0,3	0,3377	0,3341	0,3233	0,3054	0,2805	0,2487	0,2104	0,1658	0,1154	0,0598	0
0,4	0,2719	0,2689	0,2600	0,2453	0,2249	0,1990	0,1679	0,13189	0,0914	0,0471	0
0,5	0,2008	0,1986	0,1919	0,1808	0,1655	0,1462	0,1230	0,0963	0,0665	0,0341	0
0,6	0,1276	0,1261	0,1218	0,1147	0,1048	0,0923	0,0775	0,0605	0,0416	0,0213	0
0,7	0,0600	0,0593	0,0572	0,0538	0,0491	0,0431	0,0361	0,0281	0,0193	0,0098	0
0,8	0,0132	0,0131	0,0126	0,0118	0,0108	0,0095	0,0079	0,0061	0,0042	0,0021	0
0,9	0,00014	0,00014	0,00013	0,00012	0,00011	0,00010	0,00008	0,00006	0,00004	0,00002	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,9752	0,9652	0,9353	0,8856	0,8161	0,7270	0,6185	0,4910	0,3448	0,1808	0
0,2	0,9455	0,9356	0,9060	0,8568	0,7882	0,7005	0,5943	0,4700	0,3286	0,1712	0
0,3	0,9091	0,8994	0,8703	0,8221	0,7550	0,6695	0,5664	0,4463	0,3107	0,1610	0
0,4	0,8633	0,8538	0,8257	0,7790	0,7142	0,6320	0,5331	0,4187	0,2903	0,1497	0
0,5	0,8035	0,7945	0,7678	0,7235	0,6622	0,5847	0,4919	0,3852	0,2660	0,1366	0
0,6	0,7221	0,7139	0,6894	0,6489	0,5930	0,5224	0,4384	0,3422	0,2355	0,1205	0
0,7	0,6051	0,5981	0,5771	0,5426	0,4950	0,4352	0,3643	0,2836	0,1945	0,0992	0
0,8	0,4256	0,4206	0,4056	0,3808	0,3469	0,3044	0,2542	0,1973	0,1350	0,0686	0
0,9	0,1486	0,1468	0,1414	0,1327	0,1206	0,1056	0,0880	0,0681	0,0465	0,0236	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	1,5302	1,5146	1,4677	1,3896	1,2805	1,1407	0,9705	0,7704	0,5411	0,2836	0
0,2	1,5696	1,5532	1,5040	1,4223	1,3085	1,1630	0,9865	0,7802	0,5455	0,2842	0
0,3	1,6225	1,6051	1,5533	1,4671	1,3474	1,1949	1,0108	0,7966	0,5544	0,2873	0
0,4	1,6968	1,6783	1,6229	1,5312	1,4038	1,2422	1,0479	0,8231	0,5706	0,2942	0
0,5	1,8079	1,7878	1,7276	1,6279	1,4901	1,3157	1,1069	0,8666	0,5985	0,3074	0
0,6	1,9901	1,9674	1,8998	1,7882	1,6341	1,4397	1,2082	0,9430	0,6491	0,3321	0
0,7	2,3380	2,3109	2,2299	2,0964	1,9126	1,6816	1,4076	1,0956	0,7517	0,3833	0
0,8	3,2325	3,1943	3,0801	2,8924	2,6345	2,3117	1,9304	1,4984	1,0250	0,5213	0
0,9	8,5718	8,4683	8,1599	7,6536	6,9602	6,0952	5,0780	3,9315	2,6825	1,3608	0



Таблиця Г.4 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.4) – (4.6) при різних  $p$  та  $\lambda$  ( $\kappa = 1$ )

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,82848	0,87110	2	0,3064	1,78961	1,88169	3	0,6619	2,80812	2,95260	3	1,0385
0,2	0,66020	0,73396	4	0,2577	1,57023	1,74566	4	0,6129	2,60662	2,89783	4	1,0174
0,3	0,49687	0,58959	5	0,2062	1,33748	1,58706	6	0,5552	2,38697	2,83239	6	0,9909
0,4	0,34273	0,44085	6	0,1533	1,08809	1,39961	8	0,4868	2,13870	2,75101	8	0,9568
0,5	0,20534	0,29386	8	0,1012	0,82136	1,17545	10	0,4049	1,84805	2,64477	11	0,9111
0,6	0,09602	0,16019	10	0,0543	0,54315	0,90618	14	0,3073	1,49675	2,49713	16	0,8469
0,7	0,02731	0,05839	13	0,0192	0,27525	0,58852	19	0,1941	1,06340	2,27370	23	0,7501
0,8	0,00224	0,00778	13	0,0024	0,07158	0,24893	28	0,0775	0,54356	1,89028	37	0,5887
0,9	0,0000013	0,000018	40	0,0000048	0,00129	0,01893	40	0,0049	0,07422	1,09180	79	0,2851

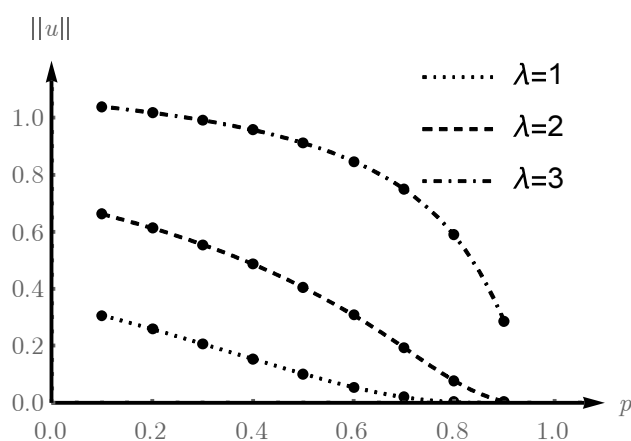


Рисунок Г.3 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.4) – (4.6) в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

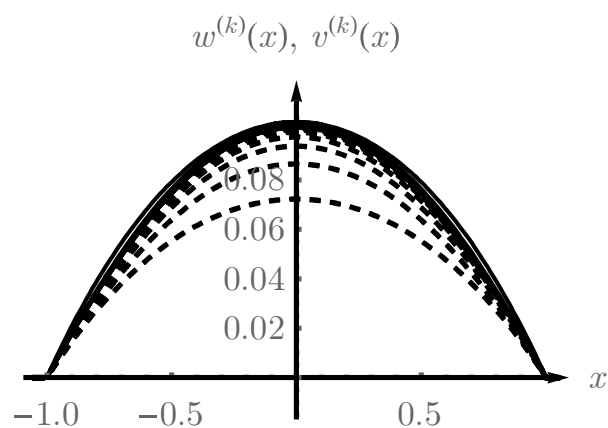


Рисунок Г.4 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.4) – (4.6) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.5 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.4) – (4.6) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  на сітці з кроком 0,1 ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	0,10342	0,10247	0,09960	0,09479	0,08798	0,07912	0,06810	0,05483	0,03916	0,02095	0
$w^{(1)}(x_i)$	0,10342	0,10233	0,09906	0,09363	0,08606	0,07638	0,06466	0,05097	0,03546	0,01834	0
$w^{(2)}(x_i)$	0,10243	0,10134	0,09806	0,09261	0,08503	0,07537	0,06371	0,05014	0,03482	0,01798	0
$w^{(3)}(x_i)$	0,10184	0,10075	0,09749	0,09207	0,08453	0,07492	0,06331	0,04982	0,03460	0,01786	0
$w^{(4)}(x_i)$	0,10154	0,10046	0,09720	0,09179	0,08428	0,07469	0,06312	0,04967	0,03449	0,01781	0
$w^{(5)}(x_i)$	0,10139	0,10031	0,09706	0,09166	0,08415	0,07458	0,06303	0,04960	0,03444	0,01778	0
$w^{(6)}(x_i)$	0,10132	0,10023	0,09698	0,09159	0,08409	0,07453	0,06298	0,04956	0,03442	0,01777	0
$w^{(7)}(x_i)$	0,10128	0,10019	0,09695	0,09156	0,08406	0,07450	0,06296	0,04954	0,03441	0,01776	0
$w^{(8)}(x_i)$	0,10126	0,10018	0,09693	0,09154	0,08404	0,07449	0,06295	0,04953	0,03440	0,01776	0
$u^{(9)}(x_i)$	0,10119	0,10011	0,09686	0,09148	0,08398	0,07443	0,06290	0,04950	0,03437	0,01775	0
$v^{(8)}(x_i)$	0,10112	0,10004	0,09679	0,09141	0,08392	0,07438	0,06286	0,04947	0,03435	0,01773	0
$v^{(7)}(x_i)$	0,10100	0,09991	0,09668	0,09130	0,08382	0,07429	0,06278	0,04940	0,03431	0,01771	0
$v^{(6)}(x_i)$	0,10075	0,09967	0,09644	0,09108	0,08362	0,07411	0,06263	0,04929	0,03422	0,01767	0
$v^{(5)}(x_i)$	0,10026	0,09919	0,09597	0,09064	0,08321	0,07375	0,06233	0,04905	0,03406	0,01758	0
$v^{(4)}(x_i)$	0,09929	0,09823	0,09505	0,08976	0,08241	0,07304	0,06173	0,04857	0,03373	0,01741	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,09738	0,09634	0,09322	0,08803	0,08082	0,07163	0,06054	0,04764	0,03308	0,01708	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,09365	0,09265	0,08965	0,08467	0,07774	0,06891	0,05825	0,04584	0,03184	0,01644	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,08645	0,08554	0,08281	0,07827	0,07194	0,06385	0,05405	0,04261	0,02965	0,01533	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,07227	0,07160	0,06960	0,06623	0,06148	0,05528	0,04759	0,03831	0,02737	0,01464	0

Таблиця Г.6 – Значення наближених розв'язків задачі (4.1) – (4.3) при різних  $p$  та  $\lambda$  на сітці з кроком 0,1 ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,3064	0,3034	0,2947	0,2800	0,2594	0,2326	0,1994	0,1598	0,1134	0,0601	0
0,2	0,2577	0,2552	0,2476	0,2349	0,2171	0,1941	0,1658	0,1322	0,0933	0,0491	0
0,3	0,2062	0,2042	0,1979	0,1875	0,1729	0,1541	0,1312	0,1041	0,0731	0,0382	0
0,4	0,1533	0,1517	0,1469	0,1389	0,1279	0,1136	0,0964	0,0762	0,0532	0,0276	0
0,5	0,1012	0,1001	0,0969	0,0915	0,0840	0,0744	0,0629	0,0495	0,0344	0,0177	0
0,6	0,0543	0,0537	0,0519	0,0489	0,0448	0,0396	0,0334	0,0261	0,0181	0,0093	0
0,7	0,0192	0,0190	0,0183	0,0173	0,0158	0,0139	0,0117	0,0091	0,0063	0,0032	0
0,8	0,0024	0,0023	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0014	0,0011	0,0008	0,0004	0
0,9	0,0000048	0,0000047	0,0000045	0,0000043	0,0000039	0,0000034	0,0000028	0,0000022	0,0000015	0,0000008	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,6619	0,6556	0,6367	0,6050	0,5603	0,5024	0,4308	0,3452	0,2450	0,1300	0
0,2	0,6129	0,6069	0,5888	0,5587	0,5163	0,4616	0,3944	0,3145	0,2219	0,1168	0
0,3	0,5552	0,5496	0,5328	0,5047	0,4655	0,4149	0,3532	0,2803	0,1967	0,1028	0
0,4	0,4868	0,4817	0,4665	0,4413	0,4060	0,3609	0,3061	0,2419	0,1688	0,0876	0
0,5	0,4049	0,4006	0,3876	0,3660	0,3361	0,2978	0,2517	0,1981	0,1375	0,0710	0
0,6	0,3073	0,3039	0,2938	0,2770	0,2538	0,2243	0,1889	0,1480	0,1023	0,0526	0
0,7	0,1941	0,1919	0,1853	0,1745	0,1595	0,1405	0,1180	0,0921	0,0634	0,0324	0
0,8	0,0775	0,0766	0,0739	0,0694	0,0633	0,0556	0,0466	0,0362	0,0248	0,0126	0
0,9	0,0049	0,0048	0,0046	0,0044	0,0040	0,0035	0,0029	0,0022	0,0015	0,0008	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	1,0385	1,0287	0,9990	0,9493	0,8792	0,7884	0,6760	0,5416	0,3845	0,2039	0
0,2	1,0174	1,0074	0,9774	0,9274	0,8571	0,7663	0,6547	0,5220	0,3683	0,1938	0
0,3	0,9909	0,9809	0,9509	0,9008	0,8307	0,7405	0,6303	0,5003	0,3510	0,1834	0
0,4	0,9568	0,9468	0,9170	0,8674	0,7981	0,7094	0,6016	0,4755	0,3318	0,1723	0
0,5	0,9111	0,9014	0,8721	0,8236	0,7562	0,6702	0,5664	0,4457	0,3095	0,1598	0
0,6	0,8469	0,8376	0,8097	0,7634	0,6993	0,6181	0,5205	0,4079	0,2819	0,1448	0
0,7	0,7501	0,7416	0,7162	0,6742	0,6162	0,5431	0,4558	0,3558	0,2449	0,1252	0
0,8	0,5887	0,5819	0,5614	0,5277	0,4812	0,4229	0,3538	0,2751	0,1886	0,0961	0
0,9	0,2851	0,2817	0,2715	0,2547	0,2318	0,2032	0,1694	0,1313	0,0897	0,0455	0

Таблиця Г.7 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $p$  та  $\lambda$

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,38555	0,41244	2	0.2059	0.83284	0.89092	3	0.4449	1.30682	1.39796	3	0.6982
0,2	0,28150	0,32489	3	0.1616	0.66952	0.77272	4	0.3844	1.11142	1.28272	4	0.6381
0,3	0,18974	0,23956	5	0.1183	0.51075	0.64484	5	0.3184	0.91153	1.15084	6	0.5683
0,4	0,11325	0,15994	6	0.0780	0.35956	0.50778	7	0.2476	0.70673	0.99807	8	0.4866
0,5	0,05556	0,09108	7	0.0435	0.22222	0.36430	9	0.1739	0.50000	0.81968	10	0.3914
0,6	0,01930	0,03925	9	0.0181	0.10918	0.22201	12	0.1024	0.30087	0.61178	14	0.2822
0,7	0,00336	0,00968	9	0.0041	0.03384	0.09759	16	0.0423	0.13074	0.37702	19	0.1635
0,8	0,00010	0,00059	14	0.00022	0.00331	0.01895	19	0.0072	0.02512	0.14388	28	0.0548
0,9	0,0000000031	0,00000014	40	0,000000034	0,0000032	0,00014	40	0,000035	0,00018	0,00807	35	0,0020

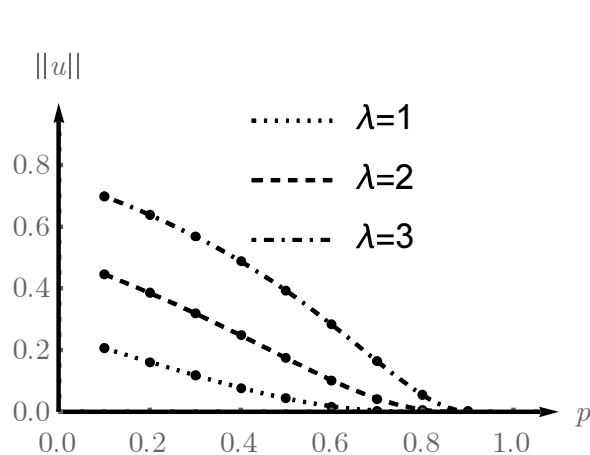


Рисунок Г.5 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.24) – (4.26) в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$

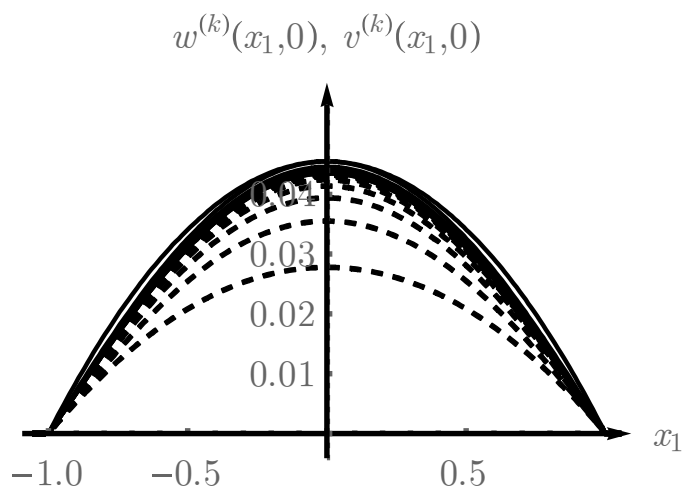


Рисунок Г.6 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$

Таблиця Г.8 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04554	0,04508	0,04372	0,04144	0,03825	0,03415	0,02914	0,02322	0,01639	0,00865	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04553	0,04500	0,04341	0,04079	0,03718	0,03263	0,02723	0,02110	0,01437	0,00723	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04463	0,04410	0,04251	0,03989	0,03630	0,03179	0,02647	0,02044	0,01388	0,00697	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04407	0,04355	0,04197	0,03939	0,03583	0,03137	0,02611	0,02016	0,01368	0,00687	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04379	0,04326	0,04170	0,03913	0,03559	0,03117	0,02594	0,02003	0,01359	0,00682	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04364	0,04312	0,04156	0,03900	0,03548	0,03106	0,02585	0,01996	0,01355	0,00680	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04357	0,04305	0,04149	0,03893	0,03542	0,03101	0,02581	0,01993	0,01352	0,00679	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04354	0,04301	0,04146	0,03890	0,03539	0,03099	0,02579	0,01992	0,01351	0,00678	0
$u^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04345	0,04293	0,04138	0,03883	0,03532	0,03093	0,02574	0,01988	0,01349	0,00677	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04337	0,04285	0,04130	0,03875	0,03525	0,03087	0,02569	0,01984	0,01346	0,00675	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04324	0,04272	0,04118	0,03864	0,03515	0,03077	0,02561	0,01978	0,01342	0,00673	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04297	0,04246	0,04093	0,03840	0,03493	0,03059	0,02546	0,01966	0,01334	0,00669	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04246	0,04195	0,04043	0,03794	0,03451	0,03022	0,02515	0,01942	0,01318	0,00661	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,04143	0,04094	0,03946	0,03703	0,03368	0,02949	0,02455	0,01896	0,01286	0,00645	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03944	0,03897	0,03757	0,03525	0,03208	0,02809	0,02339	0,01807	0,01226	0,00616	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03557	0,03515	0,03391	0,03186	0,02903	0,02548	0,02127	0,01648	0,01122	0,00565	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,02778	0,02750	0,02667	0,02528	0,02333	0,02083	0,01778	0,01417	0,01000	0,00528	0

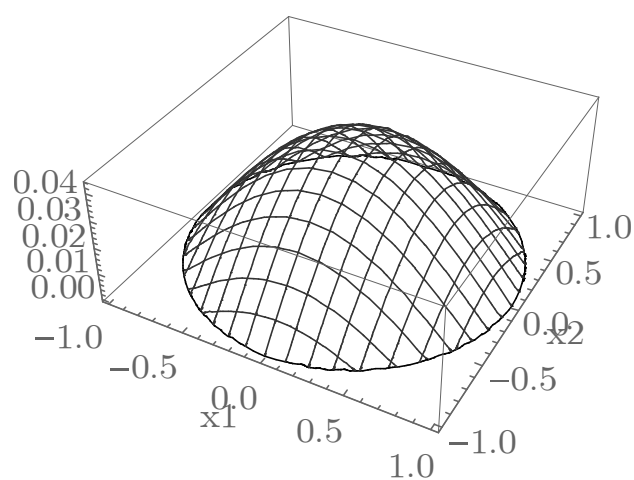


Рисунок Г.7 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

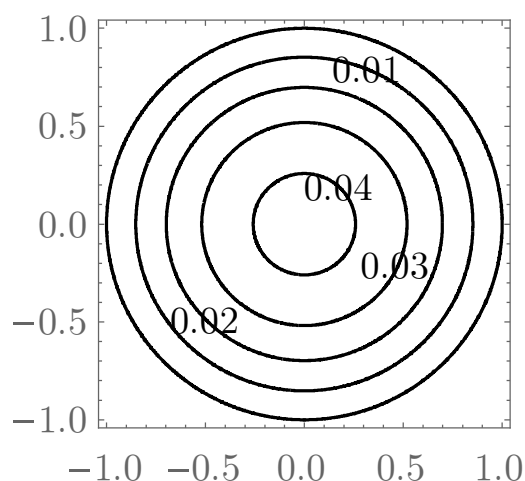


Рисунок Г.8 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

Таблиця Г.9 – Значення наближених розв'язків задачі (4.24) – (4.26) у  
 одиничному крузі при різних  $p$  та  $\lambda$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,2059	0,2038	0,1974	0,1868	0,1719	0,1530	0,1299	0,1029	0,0720	0,0376	0
0,2	0,1616	0,1598	0,1547	0,1460	0,1341	0,1188	0,1004	0,0790	0,0548	0,0283	0
0,3	0,1183	0,1170	0,1130	0,1065	0,0975	0,0861	0,0724	0,0566	0,0390	0,0199	0
0,4	0,0780	0,0771	0,0744	0,0699	0,0638	0,0561	0,0469	0,0365	0,0249	0,0126	0
0,5	0,0435	0,0429	0,0414	0,0388	0,0353	0,0309	0,0257	0,0199	0,0135	0,0068	0
0,6	0,0181	0,0178	0,0172	0,0161	0,0146	0,0127	0,0105	0,0081	0,0054	0,0027	0
0,7	0,0041	0,0041	0,0039	0,0037	0,0033	0,0029	0,0024	0,0018	0,0012	0,0006	0
0,8	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00018	0,00015	0,00012	0,00009	0,00006	0,00003	0
0,9	0,000000034	0,000000033	0,000000032	0,000000030	0,000000027	0,000000023	0,000000019	0,000000014	0,000000009	0,000000005	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,4449	0,4403	0,4265	0,4035	0,3715	0,3305	0,2806	0,2222	0,1556	0,0811	0
0,2	0,3844	0,3803	0,3679	0,3474	0,3189	0,2826	0,2388	0,1879	0,1305	0,0673	0
0,3	0,3184	0,3148	0,3042	0,2867	0,2624	0,2316	0,1948	0,1523	0,1049	0,0536	0
0,4	0,2476	0,2447	0,2362	0,2221	0,2027	0,1782	0,1491	0,1158	0,0792	0,0401	0
0,5	0,1739	0,1719	0,1657	0,1554	0,1414	0,1238	0,1030	0,0796	0,0540	0,0271	0
0,6	0,1024	0,1011	0,0973	0,0911	0,0826	0,0720	0,0597	0,0458	0,0309	0,0154	0
0,7	0,0423	0,0417	0,0401	0,0375	0,0339	0,0294	0,0242	0,0185	0,0124	0,0061	0
0,8	0,0072	0,0071	0,0068	0,0063	0,0057	0,0049	0,0040	0,0031	0,0020	0,0010	0
0,9	0,000035	0,000035	0,000033	0,000031	0,000028	0,000024	0,000019	0,000015	0,000010	0,000005	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	0,6982	0,6909	0,6693	0,6332	0,5829	0,5185	0,4403	0,3487	0,2441	0,1273	0
0,2	0,6381	0,6313	0,6108	0,5767	0,5294	0,4692	0,3964	0,3119	0,2166	0,1118	0
0,3	0,5683	0,5619	0,5430	0,5117	0,4684	0,4134	0,3476	0,2718	0,1872	0,0956	0
0,4	0,4866	0,4810	0,4643	0,4366	0,3984	0,3503	0,2930	0,2277	0,1556	0,0788	0
0,5	0,3914	0,3868	0,3728	0,3498	0,3182	0,2786	0,2319	0,1791	0,1215	0,0610	0
0,6	0,2822	0,2787	0,2683	0,2512	0,2278	0,1986	0,1644	0,1262	0,0850	0,0423	0
0,7	0,1635	0,1614	0,1551	0,1449	0,1309	0,1137	0,0937	0,0714	0,0478	0,0236	0
0,8	0,0548	0,0540	0,0519	0,0483	0,0435	0,0376	0,0308	0,02339	0,0156	0,0076	0
0,9	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0016	0,0014	0,0011	0,0008	0,0006	0,0003	0

Таблиця Г.10 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $p$  та  $\lambda$  ( $\kappa = 1$ )

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,33777	0,34058	2	0,1703	0,72963	0,73569	3	0,3680	1,14488	1,15440	3	0,5774
0,2	0,24101	0,26236	3	0,1309	0,57323	0,62399	4	0,3114	0,95157	1,03584	4	0,5169
0,3	0,15782	0,18796	4	0,0932	0,42482	0,50596	5	0,2510	0,75817	0,90297	6	0,4480
0,4	0,09069	0,12076	6	0,0593	0,28793	0,38338	7	0,1882	0,56594	0,75356	8	0,3699
0,5	0,04222	0,06515	7	0,0314	0,16886	0,26061	9	0,1256	0,37994	0,58637	10	0,2825
0,6	0,01357	0,02589	8	0,0120	0,07675	0,14646	11	0,0683	0,21149	0,40359	13	0,1884
0,7	0,00207	0,00558	8	0,0024	0,02091	0,05624	14	0,0247	0,08078	0,21727	18	0,0956
0,8	0,000049	0,00026	21	0,00010	0,00158	0,00833	16	0,0032	0,01200	0,06326	25	0,0246
0,9	0,00000000069	0,00000007	48	0,000000070	0,00000071	0,000027	25	0,000067	0,00004	0,00158	43	0,00041

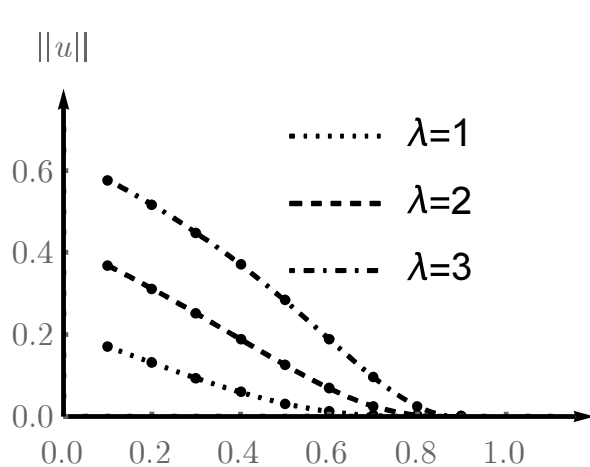


Рисунок Г.9 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.27) – (4.29) в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

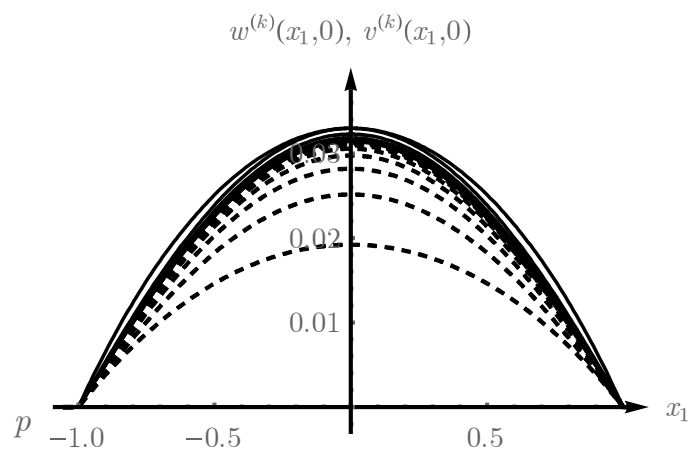


Рисунок Г.10 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у перерізі  $x_2 = 0$

Таблиця Г.11 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03298	0,03267	0,03174	0,03018	0,02797	0,02511	0,02157	0,01733	0,01234	0,00658	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03298	0,03261	0,03150	0,02966	0,02712	0,02389	0,02004	0,01561	0,01069	0,00541	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03229	0,03192	0,03080	0,02896	0,02642	0,02322	0,01941	0,01506	0,01028	0,00518	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03185	0,03148	0,03038	0,02856	0,02605	0,02289	0,01912	0,01483	0,01011	0,00510	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03163	0,03126	0,03017	0,02836	0,02586	0,02272	0,01898	0,01472	0,01004	0,00506	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03151	0,03115	0,03006	0,02825	0,02577	0,02264	0,01891	0,01467	0,01000	0,00505	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03146	0,03109	0,03000	0,02820	0,02572	0,02260	0,01888	0,01464	0,00999	0,00504	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03143	0,03106	0,02997	0,02818	0,02570	0,02258	0,01886	0,01463	0,00998	0,00503	0
$u^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03136	0,03100	0,02991	0,02812	0,02564	0,02253	0,01882	0,01460	0,00995	0,00502	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03129	0,03093	0,02985	0,02806	0,02559	0,02248	0,01878	0,01457	0,00993	0,00501	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03119	0,03083	0,02975	0,02797	0,02551	0,02241	0,01872	0,01452	0,00990	0,00499	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03098	0,03062	0,02955	0,02778	0,02534	0,02226	0,01860	0,01443	0,00984	0,00496	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,03057	0,03022	0,02916	0,02741	0,02500	0,02196	0,01835	0,01423	0,00971	0,00489	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,02977	0,02942	0,02839	0,02669	0,02434	0,02139	0,01787	0,01386	0,00945	0,00477	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,02820	0,02787	0,02690	0,02529	0,02308	0,02028	0,01695	0,01316	0,00897	0,00453	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,02516	0,02487	0,02403	0,02263	0,02068	0,01823	0,01528	0,01190	0,00815	0,00413	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,01919	0,01901	0,01847	0,01756	0,01628	0,01461	0,01255	0,01008	0,00718	0,00383	0

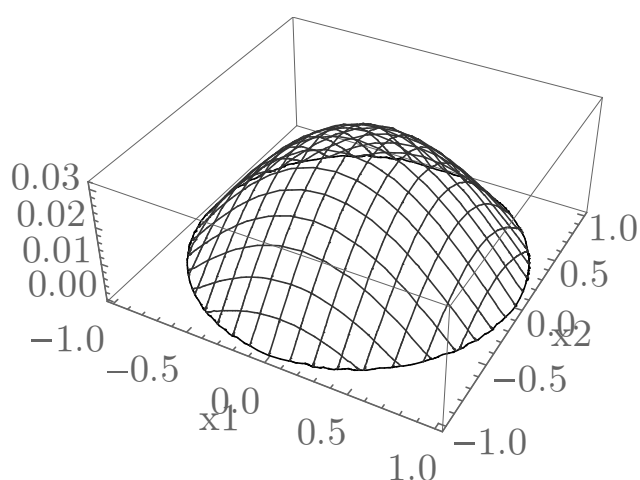


Рисунок Г.11 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.27)–(4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

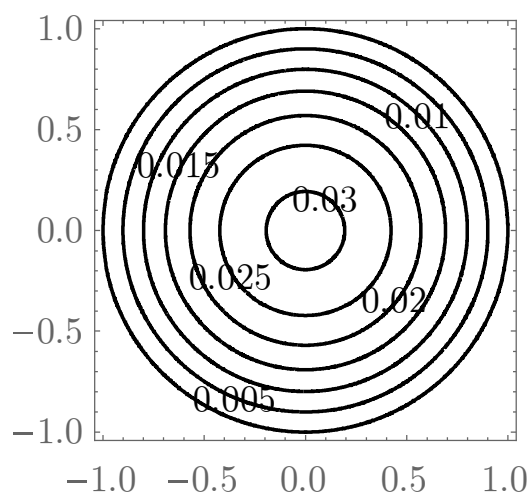


Рисунок Г.12 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(7)}(\mathbf{x})$  задачі (4.27)–(4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )



Таблиця Г.12 – Значення наближених розв’язків задачі (4.27) – (4.29) у  
 одиничному крузі при різних  $p$  та  $\lambda$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,1703	0,1686	0,1636	0,1553	0,1435	0,1283	0,1096	0,0874	0,0617	0,0325	0
0,2	0,1309	0,1295	0,1255	0,1189	0,1095	0,0975	0,0829	0,0656	0,0459	0,0239	0
0,3	0,0932	0,0922	0,0892	0,0843	0,0774	0,0686	0,0580	0,0456	0,0316	0,0163	0
0,4	0,0593	0,0586	0,0566	0,0534	0,0488	0,0431	0,0362	0,0283	0,0195	0,0099	0
0,5	0,0314	0,0310	0,0299	0,0281	0,0256	0,0225	0,0188	0,0146	0,0100	0,0050	0
0,6	0,0120	0,0119	0,0115	0,0107	0,0098	0,0085	0,0071	0,0055	0,0037	0,0018	0
0,7	0,0024	0,0024	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0014	0,0011	0,0007	0,0004	0
0,8	0,00010	0,00010	0,00010	0,00009	0,00008	0,00007	0,00006	0,00004	0,00003	0,00001	0
0,9	0,000000070	0,000000069	0,000000066	0,000000062	0,000000055	0,000000048	0,000000039	0,000000029	0,000000019	0,000000010	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,3680	0,3644	0,3535	0,3354	0,3100	0,2772	0,2368	0,1889	0,1333	0,0702	0
0,2	0,3114	0,3082	0,2987	0,2828	0,2605	0,2320	0,1971	0,1561	0,1092	0,0568	0
0,3	0,2510	0,2483	0,2403	0,2270	0,2085	0,1848	0,1562	0,1229	0,0852	0,0438	0
0,4	0,1882	0,1861	0,1798	0,1695	0,1551	0,1369	0,1150	0,0899	0,0618	0,0314	0
0,5	0,1256	0,1241	0,1198	0,1126	0,1027	0,0902	0,0754	0,0585	0,0399	0,0201	0
0,6	0,0683	0,0675	0,0650	0,0610	0,0554	0,0484	0,0402	0,0310	0,0210	0,0105	0
0,7	0,0247	0,0244	0,0235	0,0219	0,0199	0,0173	0,0143	0,0109	0,0073	0,0036	0
0,8	0,0032	0,0032	0,0030	0,0028	0,0025	0,0022	0,0018	0,0014	0,00092	0,0005	0
0,9	0,0000067	0,0000066	0,0000063	0,0000059	0,0000053	0,0000046	0,0000037	0,0000028	0,0000019	0,0000009	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	0,5774	0,5717	0,5547	0,5263	0,4865	0,4349	0,3716	0,2964	0,2092	0,1102	0
0,2	0,5169	0,5116	0,4958	0,4694	0,4325	0,3851	0,3272	0,2592	0,1813	0,0943	0
0,3	0,4480	0,4433	0,4290	0,4052	0,3721	0,3299	0,2788	0,2193	0,1521	0,0782	0
0,4	0,3699	0,3658	0,3535	0,3331	0,3049	0,2691	0,2261	0,1766	0,1214	0,0618	0
0,5	0,2825	0,2793	0,2695	0,2533	0,2310	0,2030	0,1696	0,1315	0,0897	0,0452	0
0,6	0,1884	0,1861	0,1793	0,1681	0,1527	0,1336	0,1109	0,0855	0,0578	0,0289	0
0,7	0,0956	0,0944	0,0908	0,0849	0,0769	0,0669	0,0553	0,0423	0,0284	0,0141	0
0,8	0,0246	0,0243	0,0233	0,0217	0,0196	0,0170	0,0139	0,0106	0,0070	0,0035	0
0,9	0,00041	0,00041	0,00039	0,00036	0,00033	0,00028	0,00023	0,00017	0,00011	0,00006	0

Таблиця Г.13 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $p$  та  $\lambda$

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,23837	0,26046	2	0,1300	0,51491	0,56261	3	0,2808	0,80796	0,88281	3	0,4406
0,2	0,15867	0,19181	3	0,0951	0,37738	0,45621	4	0,2263	0,62646	0,75732	4	0,3757
0,3	0,09513	0,12978	4	0,0636	0,25607	0,34933	5	0,1712	0,45701	0,62344	6	0,3056
0,4	0,04867	0,07729	5	0,0371	0,15450	0,24539	7	0,1178	0,30368	0,48232	7	0,2316
0,5	0,01928	0,03753	6	0,0174	0,07711	0,15012	8	0,0696	0,17349	0,33776	10	0,1567
0,6	0,00487	0,01274	7	0,00555	0,02755	0,07208	10	0,0315	0,07593	0,19863	12	0,0870
0,7	0,00050	0,00211	12	0,00083	0,00504	0,02131	18	0,0084	0,01947	0,08234	16	0,0324
0,8	0,000005	0,000059	14	0,000018	0,00017	0,00187	20	0,00059	0,00131	0,01424	18	0,0044
0,9	0,00000000007	0,0000000013	38	0,0000000019	0,000000071	0,0000013	38	0,0000020	0,0000041	0,000074	33	0,000011

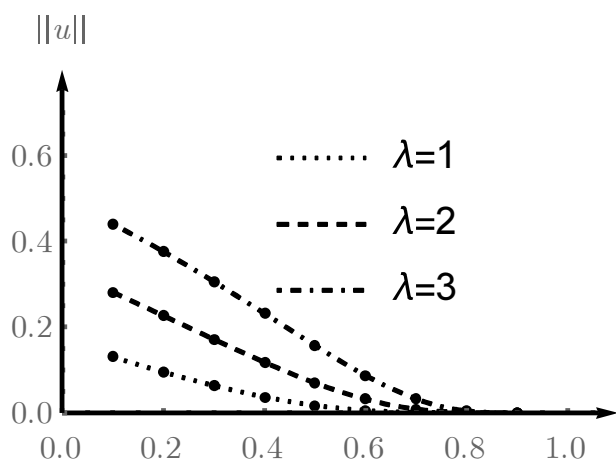


Рисунок Г.13 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.24) – (4.26) в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$

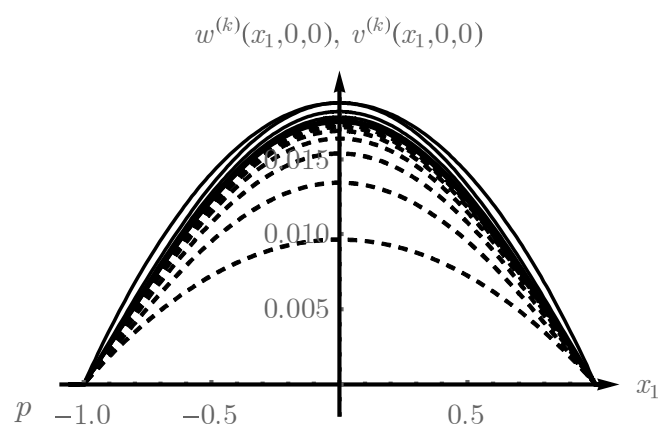


Рисунок Г.14 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

Таблиця Г.14 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.24) – (4.26) у одиничній кулі при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01876	0,01858	0,01801	0,01708	0,01576	0,01407	0,01201	0,00957	0,00676	0,00357	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01875	0,01854	0,01786	0,01674	0,01520	0,01328	0,01101	0,00846	0,00569	0,00282	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01818	0,01795	0,01728	0,01616	0,01464	0,01274	0,01052	0,00804	0,00538	0,00265	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01781	0,01759	0,01692	0,01582	0,01432	0,01246	0,01028	0,00785	0,00525	0,00258	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01761	0,01739	0,01673	0,01565	0,01416	0,01232	0,01017	0,00776	0,00519	0,00255	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01752	0,01729	0,01664	0,01556	0,01408	0,01225	0,01011	0,00772	0,00516	0,00254	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01747	0,01725	0,01659	0,01551	0,01404	0,01222	0,01008	0,00770	0,00515	0,00253	0
$u^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01738	0,01716	0,01650	0,01543	0,01397	0,01215	0,01003	0,00766	0,00512	0,00252	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01728	0,01707	0,01642	0,01535	0,01390	0,01209	0,00998	0,00762	0,00509	0,00250	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01715	0,01694	0,01629	0,01524	0,01379	0,01200	0,00990	0,00756	0,00505	0,00248	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01690	0,01668	0,01605	0,01501	0,01359	0,01182	0,00975	0,00745	0,00498	0,00245	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01639	0,01618	0,01557	0,01456	0,01318	0,01146	0,00946	0,00722	0,00483	0,00238	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01539	0,01520	0,01462	0,01368	0,01239	0,01079	0,00890	0,00680	0,00455	0,00224	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01345	0,01328	0,01280	0,01200	0,01089	0,00952	0,00789	0,00606	0,00408	0,00202	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,00964	0,00954	0,00925	0,00877	0,00810	0,00723	0,00617	0,00492	0,00347	0,00183	0

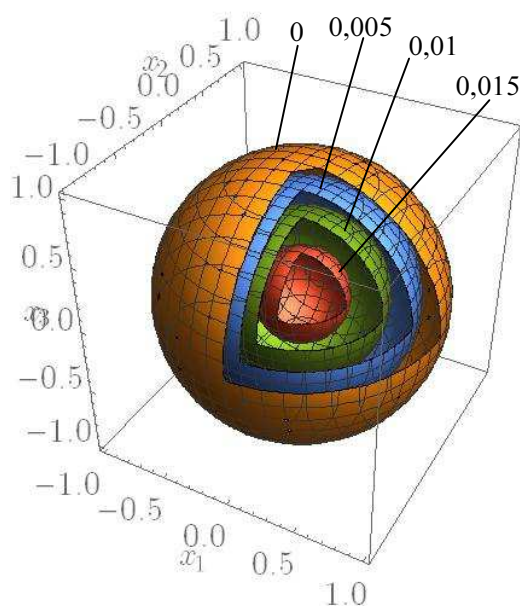


Рисунок Г.15 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  задачі (4.24) – (4.26) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

Таблиця Г.15 – Значення наближених розв’язків задачі (4.24) – (4.26) у  
 одиничній кулі при різних  $p$  та  $\lambda$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0; 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,1300	0,1286	0,1245	0,1178	0,1083	0,0963	0,0817	0,0645	0,0451	0,0234	0
0,2	0,0951	0,0941	0,0910	0,0858	0,0787	0,0696	0,0586	0,0459	0,0317	0,0162	0
0,3	0,0636	0,0629	0,0607	0,0571	0,0521	0,0458	0,0384	0,0298	0,0204	0,0103	0
0,4	0,0371	0,0366	0,0353	0,0331	0,0301	0,0263	0,0219	0,0169	0,0114	0,0057	0
0,5	0,0174	0,0172	0,0165	0,0154	0,0140	0,0122	0,0100	0,0077	0,0051	0,0025	0
0,6	0,0055	0,0054	0,0053	0,0049	0,0044	0,0038	0,0031	0,0024	0,0016	0,0008	0
0,7	0,00083	0,00082	0,00078	0,00073	0,00065	0,00056	0,00046	0,00034	0,00022	0,00011	0
0,8	0,000018	0,000018	0,000017	0,000016	0,000014	0,000012	0,000010	0,000007	0,000005	0,000002	0
0,9	0,0000000019	0,0000000019	0,0000000018	0,0000000017	0,0000000015	0,0000000013	0,0000000010	0,0000000007	0,0000000005	0,0000000002	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,2808	0,2779	0,2691	0,2545	0,2341	0,2080	0,1764	0,1394	0,0974	0,0506	0
0,2	0,2263	0,2238	0,2164	0,2042	0,1871	0,1655	0,1394	0,1093	0,0755	0,0387	0
0,3	0,1712	0,1693	0,1634	0,1537	0,1403	0,1235	0,1033	0,0803	0,0549	0,0277	0
0,4	0,1178	0,1164	0,1122	0,1052	0,0957	0,0837	0,0696	0,0536	0,0362	0,0180	0
0,5	0,0696	0,0687	0,0661	0,0618	0,0560	0,0487	0,0402	0,0307	0,0205	0,0101	0
0,6	0,0315	0,0311	0,0299	0,0278	0,0251	0,0217	0,0178	0,0134	0,0089	0,0043	0
0,7	0,0084	0,0083	0,0079	0,0074	0,0066	0,0057	0,0046	0,0035	0,0023	0,0011	0
0,8	0,00059	0,00058	0,00055	0,00051	0,00046	0,00039	0,00031	0,00023	0,00015	0,00007	0
0,9	0,00000020	0,00000020	0,00000019	0,00000017	0,00000015	0,00000013	0,00000010	0,00000008	0,00000005	0,00000002	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	0,4406	0,4360	0,4222	0,3993	0,3673	0,3264	0,2768	0,2188	0,1528	0,0794	0
0,2	0,3757	0,3716	0,3593	0,3389	0,3106	0,2747	0,2315	0,1814	0,1253	0,0642	0
0,3	0,3056	0,3021	0,2916	0,2744	0,2505	0,2204	0,1844	0,1433	0,0979	0,0494	0
0,4	0,2316	0,2288	0,2205	0,2069	0,1881	0,1645	0,1368	0,1054	0,0712	0,0355	0
0,5	0,1567	0,1547	0,1489	0,1392	0,1260	0,1096	0,0904	0,0691	0,0462	0,0227	0
0,6	0,0870	0,0858	0,0824	0,0768	0,0692	0,0598	0,0490	0,0371	0,0245	0,0119	0
0,7	0,0324	0,0320	0,0306	0,0285	0,0255	0,0219	0,0178	0,0134	0,0087	0,0042	0
0,8	0,0044	0,0044	0,0042	0,0039	0,0035	0,0030	0,0024	0,0018	0,0011	0,0005	0
0,9	0,000011	0,000011	0,000011	0,000010	0,000009	0,000007	0,000006	0,000004	0,000003	0,000001	0

Таблиця Г.16 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $p$  та  $\lambda$  ( $\kappa = 1$ )

$p$	$\lambda = 1$				$\lambda = 2$				$\lambda = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,22139	0,230436	2	0,1152	0,47822	0,49777	3	0,2488	0,75039	0,78106	3	0,3904
0,2	0,14538	0,167387	3	0,0833	0,34577	0,39812	4	0,1981	0,57399	0,66088	4	0,3289
0,3	0,08569	0,111255	4	0,0548	0,23066	0,29948	5	0,1475	0,41165	0,53447	6	0,2633
0,4	0,04286	0,06471	5	0,0313	0,13609	0,20543	6	0,0993	0,26748	0,40379	7	0,1953
0,5	0,01646	0,03039	6	0,0142	0,06584	0,12155	8	0,0569	0,14815	0,27350	9	0,1281
0,6	0,00397	0,00981	7	0,0043	0,02247	0,05551	10	0,0246	0,06192	0,15298	12	0,0679
0,7	0,00038	0,00150	11	0,00060	0,00381	0,01510	11	0,0060	0,01471	0,05833	15	0,0234
0,8	0,0000035	0,000035	23	0,000011	0,00011	0,00112	18	0,00036	0,00085	0,00853	16	0,0027
0,9	0,000000000029	0,00000000046	29	0,00000000072	0,000000029	0,00000047	29	0,00000073	0,0000017	0,000027	46	0,000044

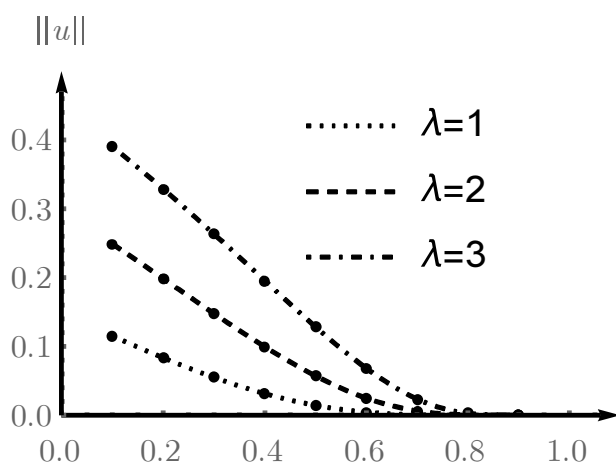


Рисунок Г.16 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.27) – (4.29) в залежності від  $p$  при  $\lambda = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

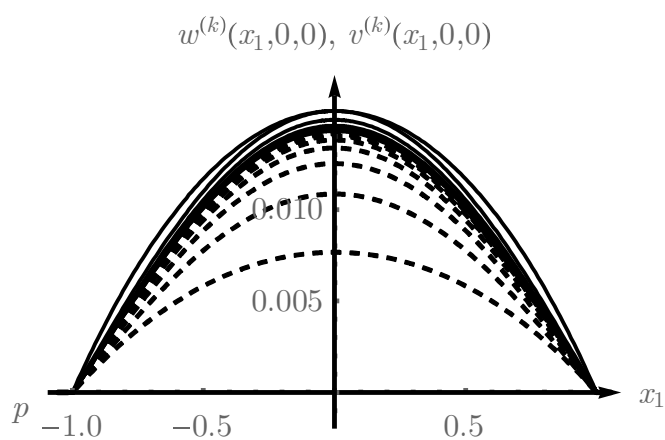


Рисунок Г.17 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

Таблиця Г.17 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.27) – (4.29) у одиничній кулі при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0,1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01538	0,01523	0,01479	0,01406	0,01302	0,01168	0,01002	0,00803	0,00571	0,00304	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01538	0,01520	0,01466	0,01377	0,01254	0,01099	0,00915	0,00706	0,00478	0,00238	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01489	0,01471	0,01417	0,01328	0,01206	0,01053	0,00872	0,00669	0,00450	0,00222	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01458	0,01440	0,01387	0,01299	0,01179	0,01028	0,00852	0,00653	0,00438	0,00217	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01441	0,01424	0,01371	0,01284	0,01165	0,01016	0,00841	0,00645	0,00433	0,00214	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01433	0,01415	0,01363	0,01276	0,01158	0,01010	0,00836	0,00641	0,00431	0,00213	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01428	0,01411	0,01359	0,01273	0,01155	0,01007	0,00834	0,00639	0,00429	0,00212	0
$u^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01421	0,01403	0,01351	0,01266	0,01148	0,01002	0,00829	0,00636	0,00427	0,00211	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01413	0,01396	0,01344	0,01259	0,01142	0,00996	0,00825	0,00632	0,00425	0,00210	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01402	0,01385	0,01333	0,01249	0,01133	0,00989	0,00818	0,00627	0,00421	0,00208	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01380	0,01363	0,01312	0,01229	0,01115	0,00973	0,00806	0,00618	0,00415	0,00205	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01336	0,01320	0,01271	0,01191	0,01080	0,00943	0,00780	0,00598	0,00402	0,00198	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01251	0,01236	0,01190	0,01115	0,01013	0,00884	0,00733	0,00562	0,00378	0,00187	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,01085	0,01072	0,01034	0,00971	0,00885	0,00775	0,00646	0,00498	0,00337	0,00168	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,00765	0,00758	0,00736	0,00700	0,00648	0,00581	0,00499	0,00400	0,00284	0,00151	0

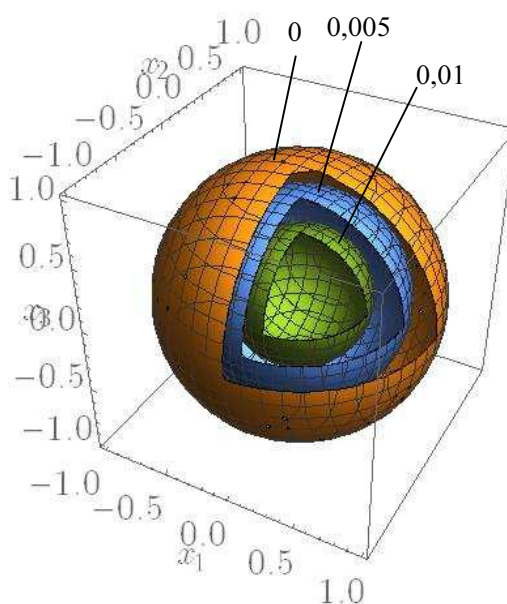


Рисунок Г.18 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(6)}(\mathbf{x})$  задачі (4.27) – (4.29) при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.18 – Значення наближених розв'язків задачі (4.27) – (4.29) у одиничній кулі при різних  $p$  та  $\lambda$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$p$	$\lambda = 1$										
0,1	0,11516	0,11401	0,11056	0,10479	0,09671	0,08631	0,07357	0,05850	0,04113	0,02154	0
0,2	0,08328	0,08240	0,07978	0,07542	0,06934	0,06156	0,05212	0,04108	0,02855	0,01472	0
0,3	0,05478	0,05418	0,05237	0,04936	0,04520	0,03990	0,03354	0,02620	0,01800	0,00914	0
0,4	0,03127	0,03090	0,02981	0,02802	0,02554	0,02242	0,01871	0,01448	0,00983	0,00492	0
0,5	0,0142	0,0140	0,0135	0,0127	0,0115	0,0100	0,0083	0,0064	0,0043	0,0021	0
0,6	0,00433	0,00427	0,00410	0,00383	0,00346	0,00300	0,00246	0,00187	0,00124	0,00060	0
0,7	0,00060	0,00059	0,00056	0,00053	0,00047	0,00041	0,00033	0,00025	0,00016	0,00008	0
0,8	0,000011	0,000011	0,000011	0,000010	0,000009	0,000008	0,000006	0,000005	0,000003	0,000001	0
0,9	0,00000000072	0,00000000071	0,00000000067	0,00000000062	0,00000000055	0,00000000047	0,00000000037	0,00000000027	0,00000000018	0,00000000008	0
$p$	$\lambda = 2$										
0,1	0,2488	0,2463	0,2389	0,2264	0,2090	0,1865	0,1590	0,1264	0,0889	0,0465	0
0,2	0,1981	0,1960	0,1898	0,1794	0,1650	0,1464	0,1240	0,0977	0,0679	0,0350	0
0,3	0,1475	0,1459	0,1410	0,1329	0,1217	0,1075	0,0903	0,0706	0,0485	0,0246	0
0,4	0,0993	0,0982	0,0947	0,0890	0,0811	0,0712	0,0594	0,0460	0,0312	0,0156	0
0,5	0,0569	0,0562	0,0542	0,0507	0,0460	0,0401	0,0332	0,0255	0,0171	0,0084	0
0,6	0,0246	0,0243	0,0233	0,0218	0,0197	0,0170	0,0140	0,0106	0,0071	0,0034	0
0,7	0,0060	0,0059	0,0057	0,0053	0,0048	0,0041	0,0033	0,0025	0,0016	0,0008	0
0,8	0,00036	0,00035	0,00034	0,00031	0,00028	0,00024	0,00019	0,00014	0,00009	0,00004	0
0,9	0,000000073	0,000000072	0,000000069	0,000000063	0,000000056	0,000000048	0,000000038	0,000000028	0,000000018	0,0000000085	0
$p$	$\lambda = 3$										
0,1	0,3904	0,3865	0,3748	0,3553	0,3279	0,2926	0,2494	0,1983	0,1394	0,0730	0
0,2	0,3289	0,3254	0,3151	0,2979	0,2738	0,2431	0,2058	0,1622	0,1128	0,0581	0
0,3	0,2633	0,2604	0,2517	0,2373	0,2172	0,1918	0,1612	0,1259	0,0865	0,0440	0
0,4	0,1953	0,1930	0,1862	0,1750	0,1595	0,1400	0,1168	0,0904	0,0614	0,0307	0
0,5	0,1281	0,1266	0,1219	0,1142	0,1036	0,0904	0,0748	0,0573	0,0385	0,0190	0
0,6	0,0679	0,0670	0,0644	0,0601	0,0542	0,0470	0,0386	0,0293	0,0195	0,0095	0
0,7	0,0234	0,0231	0,0221	0,0206	0,0185	0,0159	0,0129	0,0097	0,0064	0,0031	0
0,8	0,0027	0,0027	0,0026	0,0024	0,0021	0,0018	0,0015	0,0011	0,0007	0,0003	0
0,9	0,0000044	0,0000044	0,0000042	0,0000038	0,0000034	0,0000029	0,0000023	0,0000017	0,0000011	0,0000005	0

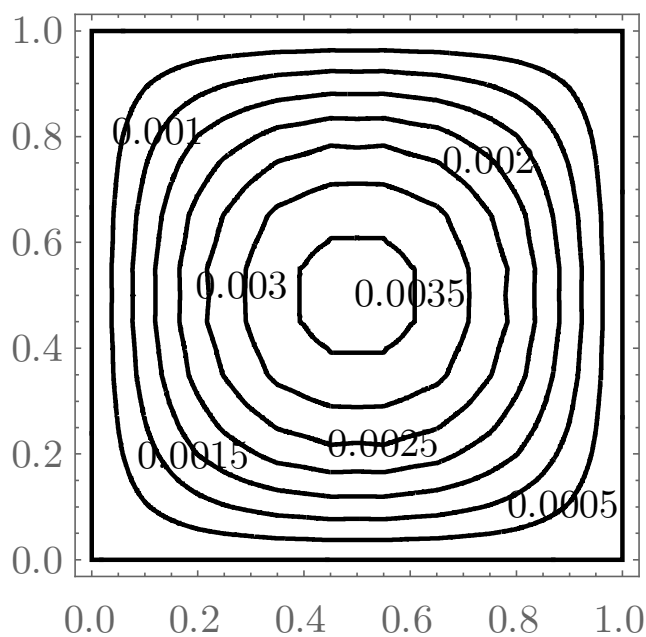
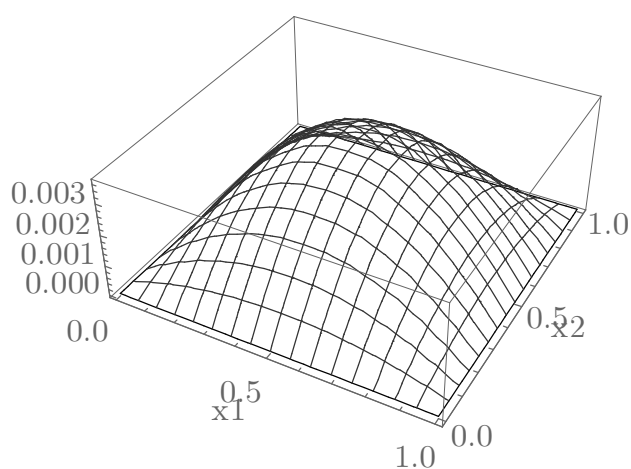


Рисунок Г.19 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

Рисунок Г.20 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

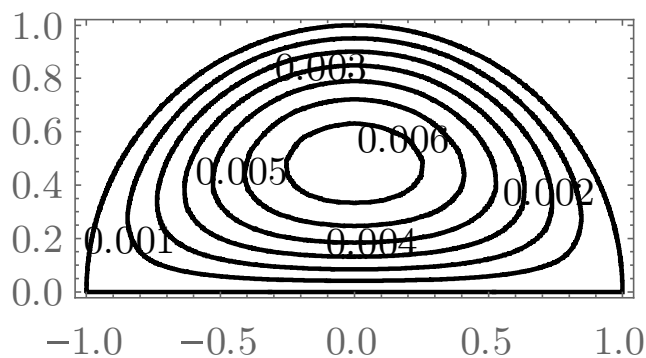
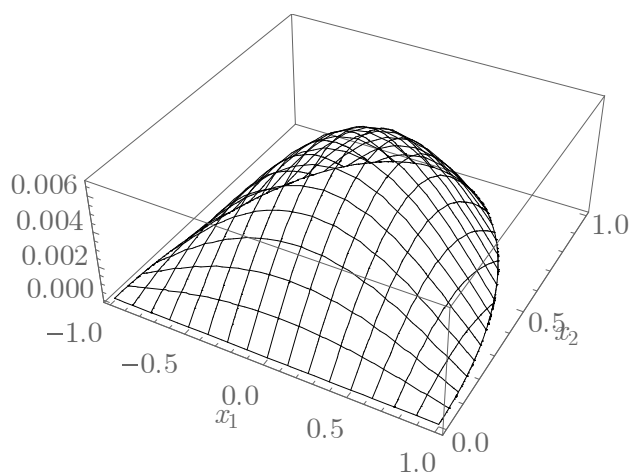


Рисунок Г.21 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

Рисунок Г.22 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$



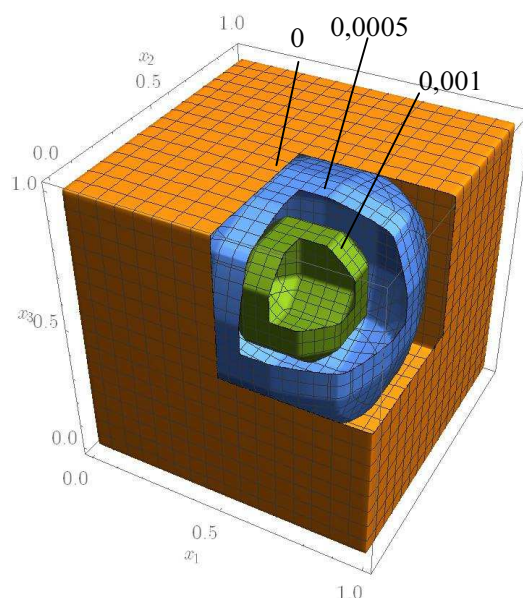


Рисунок Г.23 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному кубі, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

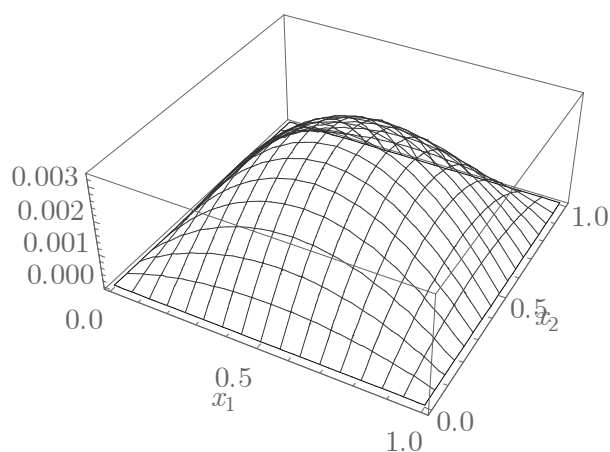


Рисунок Г.24 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

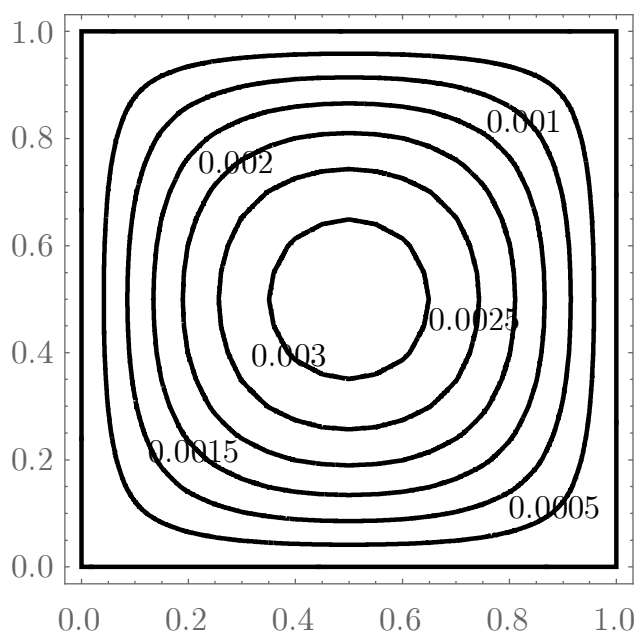


Рисунок Г.25 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

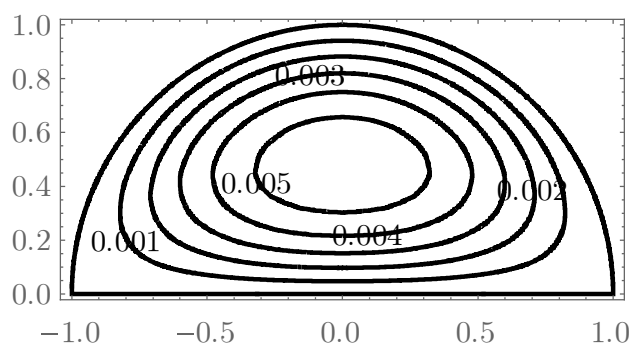
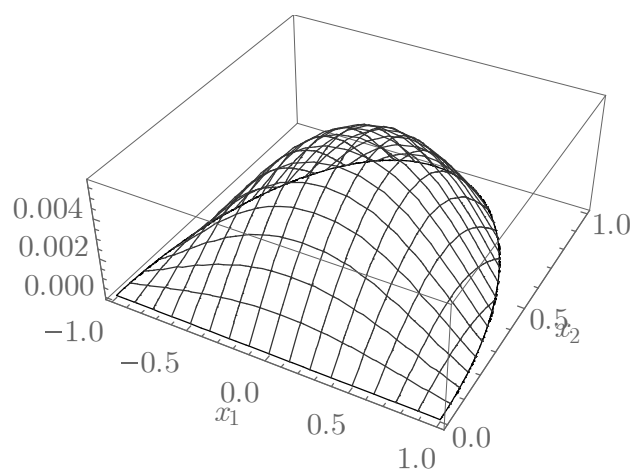


Рисунок Г.26 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Рисунок Г.27 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

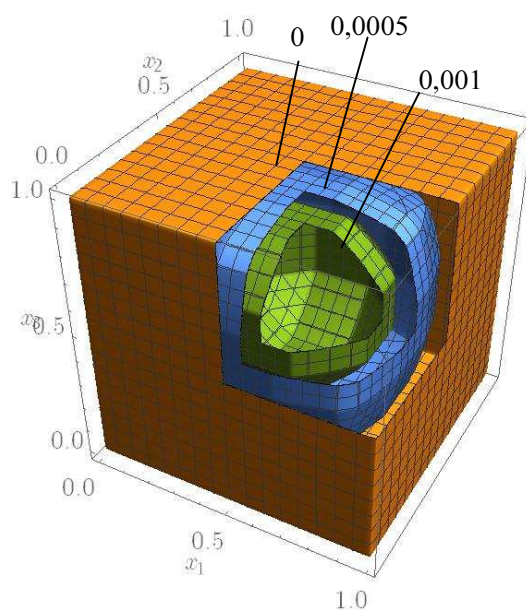


Рисунок Г.28 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному кубі, при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.19 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0005	0,0008	0,0011	0,0012	0,0013
0,2	0	0,0008	0,0015	0,0020	0,0023	0,0024
0,3	0	0,0011	0,0020	0,0026	0,0030	0,0032
0,4	0	0,0013	0,0023	0,0030	0,0035	0,0036
0,5	0	0,0013	0,0024	0,0032	0,0036	0,0038

Таблиця Г.20 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0012	0,0023	0,0031	0,0036	0,0039	0,0037	0,0032	0,0024	0,0013	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0020	0,0038	0,0050	0,0058	0,0060	0,0056	0,0048	0,0035	0,0018	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,0024	0,0043	0,0057	0,0065	0,0067	0,0063	0,0053	0,0038	0,0020	0

Таблиця Г.21 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.24) – (4.26), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3=0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3=0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	$x_2 = 0,2$	0	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,3$	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,4$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,5$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
$x_3=0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,2$	0	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006
	$x_2 = 0,3$	0	0,0002	0,0005	0,0006	0,0007	0,0007
	$x_2 = 0,4$	0	0,0003	0,0005	0,0007	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,5$	0	0,0003	0,0005	0,0007	0,0008	0,0008
$x_3=0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,2$	0	0,0002	0,0005	0,0006	0,0007	0,0007
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,4$	0	0,0003	0,0007	0,0008	0,0010	0,0010
	$x_2 = 0,5$	0	0,0003	0,0007	0,0008	0,0010	0,0010
$x_3=0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,2$	0	0,0003	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0007	0,0008	0,0010	0,0010
	$x_2 = 0,4$	0	0,0004	0,0008	0,0010	0,0012	0,0012
	$x_2 = 0,5$	0	0,0004	0,0008	0,0010	0,0012	0,0012
$x_3=0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,2$	0	0,0003	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0007	0,0008	0,0010	0,0010
	$x_2 = 0,4$	0	0,0004	0,0008	0,0010	0,0012	0,0012
	$x_2 = 0,5$	0	0,0004	0,0008	0,0010	0,0012	0,0012

Таблиця Г.22 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0004	0,0007	0,0010	0,0011	0,0012
0,2	0	0,0007	0,0013	0,0018	0,0020	0,0021
0,3	0	0,0010	0,0018	0,0023	0,0027	0,0028
0,4	0	0,0011	0,0020	0,0027	0,0030	0,0032
0,5	0	0,0012	0,0021	0,0028	0,0032	0,0033

Таблиця Г.23 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0011	0,0020	0,0027	0,0032	0,0034	0,0033	0,0029	0,0021	0,0011	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0018	0,0033	0,0044	0,0051	0,0052	0,0049	0,0042	0,0031	0,0016	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,0021	0,0038	0,0050	0,0057	0,0058	0,0055	0,0046	0,0034	0,0018	0

Таблиця Г.24 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.27) – (4.29), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3 = 0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	$x_2 = 0,2$	0	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,3$	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,4$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,5$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
$x_3 = 0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,2$	0	0,0002	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005
	$x_2 = 0,3$	0	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006
	$x_2 = 0,4$	0	0,0003	0,0005	0,0006	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,5$	0	0,0003	0,0005	0,0006	0,0008	0,0008
$x_3 = 0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003
	$x_2 = 0,2$	0	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0005	0,0007	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,4$	0	0,0003	0,0006	0,0008	0,0009	0,0009
	$x_2 = 0,5$	0	0,0003	0,0006	0,0008	0,0009	0,0009
$x_3 = 0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,2$	0	0,0003	0,0005	0,0006	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0006	0,0008	0,0009	0,0009
	$x_2 = 0,4$	0	0,0004	0,0008	0,0009	0,0011	0,0011
	$x_2 = 0,5$	0	0,0004	0,0008	0,0009	0,0011	0,0011
$x_3 = 0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0001	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
	$x_2 = 0,2$	0	0,0003	0,0005	0,0006	0,0008	0,0008
	$x_2 = 0,3$	0	0,0003	0,0006	0,0008	0,0009	0,0009
	$x_2 = 0,4$	0	0,0004	0,0008	0,0009	0,0011	0,0011
	$x_2 = 0,5$	0	0,0004	0,0008	0,0009	0,0011	0,0011

Таблиця Г.25 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.42) – (4.44) при різних  $q$  та  $\mu$

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,08333	1,13487	3	0,5437	2,03434	2,13113	3	1,0211	2,94107	3,08101	3	1,4762
0,2	1,14636	1,28501	4	0,5832	2,04257	2,28962	4	1,0392	2,86365	3,21001	5	1,4571
0,3	1,18220	1,46696	6	0,6192	2,01489	2,50023	6	1,0550	2,75237	3,41534	7	1,4412
0,4	1,17832	1,71420	8	0,6516	1,93323	2,81244	9	1,0692	2,58264	3,75719	9	1,4284
0,5	1,11244	2,10618	12	0,6815	1,76590	3,34335	12	1,0818	2,31398	4,38103	13	1,4173
0,6	0,94736	2,88018	17	0,7086	1,46103	4,44185	18	1,0930	1,88241	5,72297	18	1,4080
0,7	0,63607	5,07777	26	0,7338	0,95627	7,63395	27	1,1032	1,21385	9,69020	27	1,4000
0,8	0,20812	19,1566	44	0,7567	0,30588	28,1551	46	1,1121	0,38316	35,2684	47	1,3931
0,9	0,00164	3384,26	104	0,7781	0,00237	4874,16	108	1,1208	0,00293	6033,64	110	1,3874

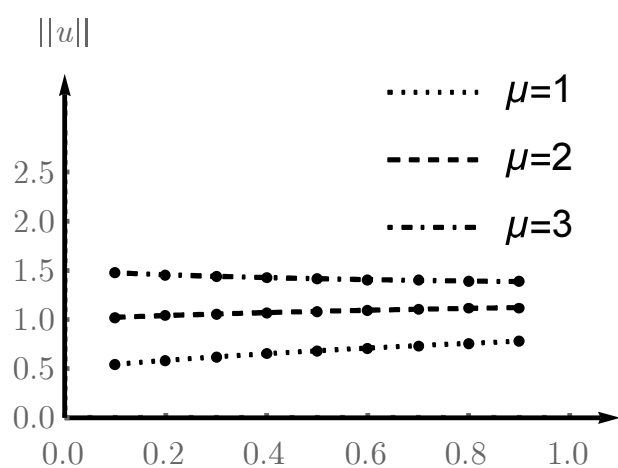


Рисунок Г.29 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.42) – (4.44) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$

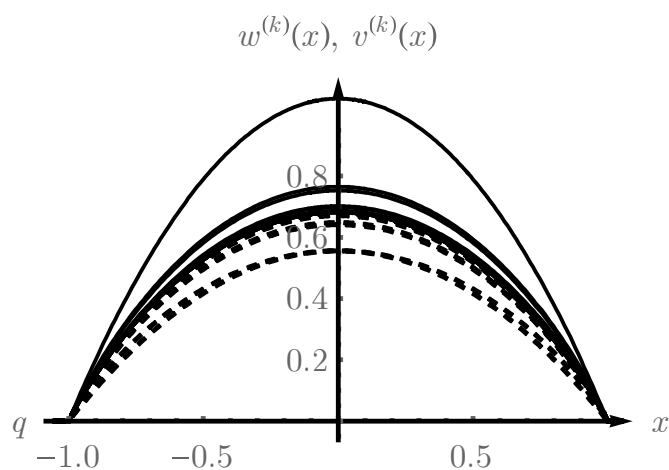


Рисунок Г.30 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.42) – (4.44) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

Таблиця Г.26 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.42) – (4.44) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	1,05309	1,04256	1,01097	0,95831	0,88460	0,78982	0,67398	0,53708	0,37911	0,20009	0
$w^{(1)}(x_i)$	0,76539	0,75868	0,73848	0,70458	0,65661	0,59399	0,51585	0,42089	0,30702	0,17046	0
$w^{(2)}(x_i)$	0,75302	0,74631	0,72612	0,69227	0,64443	0,58210	0,50451	0,41054	0,29838	0,16475	0
$w^{(3)}(x_i)$	0,70224	0,69599	0,67720	0,64569	0,60114	0,54308	0,47080	0,38322	0,27864	0,15394	0
$w^{(4)}(x_i)$	0,69860	0,69239	0,67369	0,64233	0,59801	0,54025	0,46833	0,38120	0,27716	0,15311	0
$w^{(5)}(x_i)$	0,68660	0,68049	0,66212	0,63130	0,58774	0,53097	0,46029	0,37466	0,27240	0,15048	0
$w^{(6)}(x_i)$	0,68570	0,67960	0,66125	0,63047	0,58697	0,53027	0,45969	0,37416	0,27204	0,15028	0
$w^{(7)}(x_i)$	0,68274	0,67666	0,65839	0,62775	0,58443	0,52798	0,45770	0,37255	0,27087	0,14963	0
$w^{(8)}(x_i)$	0,68251	0,67644	0,65817	0,62754	0,58424	0,52781	0,45755	0,37242	0,27078	0,14959	0
$w^{(9)}(x_i)$	0,68177	0,67571	0,65746	0,62686	0,58361	0,52724	0,45705	0,37202	0,27048	0,14942	0
$w^{(10)}(x_i)$	0,68172	0,67565	0,65741	0,62681	0,58356	0,52719	0,45702	0,37199	0,27046	0,14941	0
$w^{(11)}(x_i)$	0,68153	0,67547	0,65723	0,62664	0,58340	0,52705	0,45689	0,37189	0,27039	0,14937	0
$w^{(12)}(x_i)$	0,68152	0,67546	0,65722	0,62663	0,58339	0,52704	0,45688	0,37188	0,27038	0,14937	0
$u^{(12)}(x_i)$	0,68147	0,67541	0,65717	0,62658	0,58334	0,52700	0,45685	0,37185	0,27036	0,14936	0
$v^{(12)}(x_i)$	0,68141	0,67535	0,65711	0,62653	0,58330	0,52696	0,45681	0,37182	0,27034	0,14934	0
$v^{(11)}(x_i)$	0,68132	0,67526	0,65703	0,62645	0,58322	0,52689	0,45675	0,37177	0,27030	0,14932	0
$v^{(10)}(x_i)$	0,68129	0,67523	0,65700	0,62642	0,58320	0,52686	0,45673	0,37176	0,27029	0,14932	0
$v^{(9)}(x_i)$	0,68093	0,67487	0,65664	0,62608	0,58288	0,52658	0,45648	0,37156	0,27015	0,14924	0
$v^{(8)}(x_i)$	0,68081	0,67476	0,65654	0,62598	0,58278	0,52649	0,45641	0,37150	0,27010	0,14921	0
$v^{(7)}(x_i)$	0,67934	0,67330	0,65512	0,62462	0,58152	0,52535	0,45542	0,37069	0,26952	0,14889	0
$v^{(6)}(x_i)$	0,67890	0,67286	0,65469	0,62421	0,58114	0,52501	0,45512	0,37045	0,26934	0,14879	0
$v^{(5)}(x_i)$	0,67304	0,66705	0,64904	0,61883	0,57613	0,52048	0,45120	0,36726	0,26702	0,14751	0
$v^{(4)}(x_i)$	0,67128	0,66531	0,64734	0,61721	0,57462	0,51912	0,45002	0,36629	0,26632	0,14712	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,64838	0,64262	0,62527	0,59617	0,55504	0,50144	0,43470	0,35384	0,25727	0,14213	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,64195	0,63623	0,61902	0,59016	0,54938	0,49624	0,43010	0,34999	0,25437	0,14045	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,55625	0,55138	0,53670	0,51206	0,47720	0,43169	0,37490	0,30588	0,22313	0,12388	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,55622	0,55066	0,53397	0,50616	0,46723	0,41717	0,35598	0,28367	0,20024	0,10568	0



Таблиця Г.27 – Значення наближених розв'язків задачі (4.42) – (4.44) при різних  $q$  та  $\mu$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,5438	0,5384	0,5225	0,4959	0,4585	0,4103	0,3512	0,2810	0,1994	0,1060	0
0,2	0,5832	0,5777	0,5609	0,5330	0,4936	0,4428	0,3802	0,3054	0,2180	0,1169	0
0,3	0,6192	0,6134	0,5960	0,5670	0,5261	0,4730	0,4074	0,3287	0,2360	0,1277	0
0,4	0,6516	0,6456	0,6278	0,5979	0,5557	0,5008	0,4327	0,3507	0,2533	0,1384	0
0,5	0,6815	0,6754	0,6572	0,6266	0,5833	0,5270	0,4568	0,3719	0,2704	0,1494	0
0,6	0,7086	0,7024	0,6839	0,6528	0,6088	0,5513	0,4795	0,3920	0,2869	0,1603	0
0,7	0,7338	0,7276	0,7089	0,6774	0,6328	0,5744	0,5012	0,4117	0,3034	0,1715	0
0,8	0,7567	0,7504	0,7316	0,6999	0,6549	0,5958	0,5215	0,4304	0,3194	0,1829	0
0,9	0,7781	0,7719	0,7530	0,7211	0,6758	0,6163	0,5412	0,4487	0,3353	0,1945	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	1,0211	1,0111	0,9811	0,9311	0,8610	0,7705	0,6595	0,5277	0,3745	0,1991	0
0,2	1,0392	1,0293	0,9994	0,9496	0,8796	0,7890	0,6774	0,5442	0,3884	0,2083	0
0,3	1,0550	1,0452	1,0156	0,9661	0,8964	0,8060	0,6942	0,5601	0,4021	0,2176	0
0,4	1,0692	1,0595	1,0302	0,9811	0,9118	0,8218	0,7101	0,5754	0,4157	0,2272	0
0,5	1,0818	1,0722	1,0432	0,9947	0,9260	0,8366	0,7252	0,5903	0,4292	0,2371	0
0,6	1,0930	1,0835	1,0550	1,0070	0,9391	0,8504	0,7396	0,6047	0,4426	0,2473	0
0,7	1,1032	1,0939	1,0657	1,0184	0,9514	0,8635	0,7535	0,6189	0,4561	0,2579	0
0,8	1,1121	1,1029	1,0752	1,0286	0,9625	0,8756	0,7665	0,6325	0,4694	0,2688	0
0,9	1,1208	1,1118	1,0845	1,0387	0,9734	0,8877	0,7795	0,6463	0,4830	0,2801	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	1,4762	1,4618	1,4185	1,3462	1,2447	1,1140	0,9535	0,7629	0,5414	0,2879	0
0,2	1,4571	1,4432	1,4014	1,3315	1,2333	1,1063	0,9499	0,7631	0,5446	0,2921	0
0,3	1,4412	1,4278	1,3873	1,3197	1,2245	1,1010	0,9483	0,7651	0,5492	0,2972	0
0,4	1,4284	1,4154	1,3762	1,3107	1,2181	1,0979	0,9487	0,7687	0,5553	0,3035	0
0,5	1,4173	1,4047	1,3668	1,3032	1,2133	1,0961	0,9501	0,7734	0,5623	0,3106	0
0,6	1,4080	1,3957	1,3589	1,2972	1,2097	1,0954	0,9527	0,7790	0,5701	0,3185	0
0,7	1,4000	1,3882	1,3524	1,2924	1,2073	1,0958	0,9561	0,7854	0,5788	0,3272	0
0,8	1,3931	1,3816	1,3469	1,2885	1,2056	1,0969	0,9602	0,7923	0,5880	0,3367	0
0,9	1,3874	1,3762	1,3425	1,2857	1,2050	1,0988	0,9650	0,8000	0,5979	0,3468	0

Таблиця Г.28 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.45) – (4.47) при різних  $q$  та  $\mu$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,11472	1,18120	3	0,3942	2,09328	2,21814	3	0,7402	3,02629	3,2068	3	1,0702
0,2	1,20460	1,38776	4	0,4333	2,14636	2,47271	4	0,7720	3,00915	3,46669	5	1,0823
0,3	1,25927	1,64279	6	0,4693	2,14625	2,79991	8	0,8245	2,93181	3,82471	7	1,0926
0,4	1,26165	1,99524	8	0,5026	2,06995	3,27353	9	0,8245	2,76528	4,37317	9	1,1015
0,5	1,18373	2,56540	12	0,5333	1,87905	4,07232	12	0,8465	2,46226	5,33625	13	1,1092
0,6	0,98348	3,72712	17	0,5616	1,51673	5,74800	17	0,8661	1,95419	7,40583	18	1,1159
0,7	0,62121	7,22342	25	0,5878	0,93393	10,8597	27	0,8837	1,18549	13,7849	27	1,1217
0,8	0,17434	32,8217	44	0,6121	0,25623	48,2392	46	0,8996	0,32097	60,4266	47	1,1268
0,9	0,00081	10205,3	104	0,6346	0,00116	14698,1	107	0,9139	0,00144	18194,6	109	1,1313

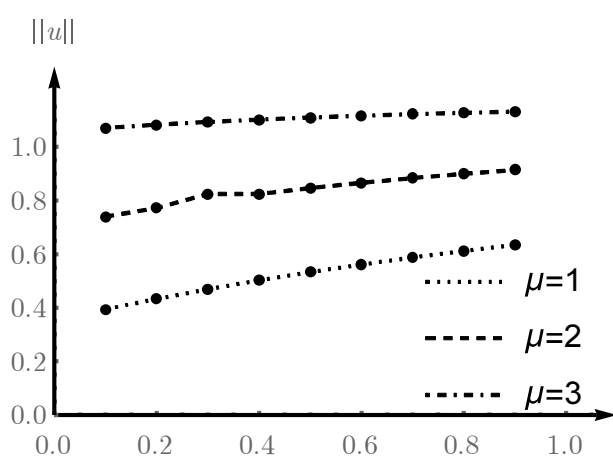


Рисунок Г.31 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.45) – (4.47) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

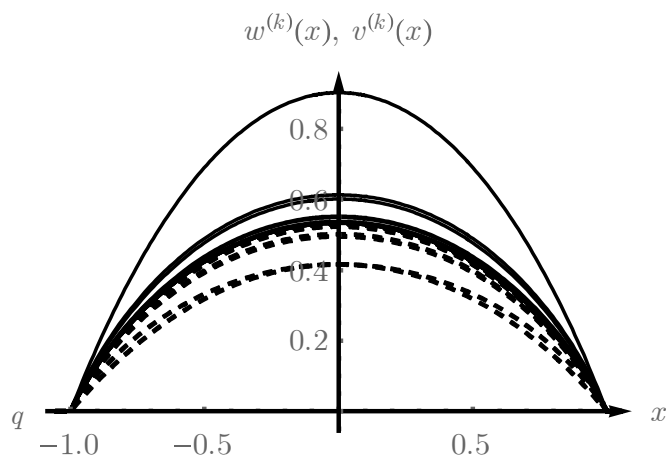


Рисунок Г.32 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.45) – (4.47) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.29 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.45) – (4.47) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком  $0,1$  ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	0,90288	0,89456	0,86952	0,82751	0,76810	0,69070	0,59454	0,47866	0,34189	0,18287	0
$w^{(1)}(x_i)$	0,61335	0,60866	0,59447	0,57041	0,53585	0,48981	0,43091	0,35715	0,26553	0,15097	0
$w^{(2)}(x_i)$	0,60183	0,59708	0,58274	0,55846	0,52368	0,47753	0,41878	0,34566	0,25557	0,14414	0
$w^{(3)}(x_i)$	0,55307	0,54873	0,53560	0,51338	0,48153	0,43925	0,38538	0,31828	0,23550	0,13296	0
$w^{(4)}(x_i)$	0,54950	0,54518	0,53213	0,51004	0,47838	0,43635	0,38281	0,31613	0,23389	0,13204	0
$w^{(5)}(x_i)$	0,53815	0,53392	0,52114	0,49951	0,46850	0,42735	0,37492	0,30961	0,22907	0,12932	0
$w^{(6)}(x_i)$	0,53726	0,53304	0,52028	0,49868	0,46773	0,42664	0,37429	0,30910	0,22869	0,12910	0
$w^{(7)}(x_i)$	0,53446	0,53026	0,51757	0,49609	0,46530	0,42442	0,37235	0,30749	0,22750	0,12843	0
$w^{(8)}(x_i)$	0,53424	0,53004	0,51736	0,49588	0,46510	0,42424	0,37219	0,30736	0,22741	0,12838	0
$w^{(9)}(x_i)$	0,53355	0,52935	0,51668	0,49524	0,46450	0,42369	0,37171	0,30696	0,22711	0,12821	0
$w^{(10)}(x_i)$	0,53349	0,52930	0,51663	0,49519	0,46445	0,42365	0,37167	0,30693	0,22709	0,12820	0
$w^{(11)}(x_i)$	0,53332	0,52913	0,51646	0,49502	0,46430	0,42351	0,37155	0,30683	0,22701	0,12816	0
$w^{(12)}(x_i)$	0,53330	0,52911	0,51645	0,49501	0,46429	0,42350	0,37154	0,30682	0,22701	0,12815	0
$u^{(12)}(x_i)$	0,53325	0,52906	0,51640	0,49496	0,46424	0,42346	0,37150	0,30680	0,22698	0,12814	0
$v^{(12)}(x_i)$	0,53320	0,52901	0,51635	0,49492	0,46420	0,42342	0,37147	0,30677	0,22696	0,12813	0
$v^{(11)}(x_i)$	0,53312	0,52893	0,51627	0,49484	0,46412	0,42335	0,37141	0,30672	0,22693	0,12811	0
$v^{(10)}(x_i)$	0,53309	0,52890	0,51624	0,49481	0,46410	0,42333	0,37139	0,30670	0,22691	0,12810	0
$v^{(9)}(x_i)$	0,53274	0,52856	0,51590	0,49449	0,46380	0,42305	0,37115	0,30650	0,22677	0,12802	0
$v^{(8)}(x_i)$	0,53263	0,52845	0,51580	0,49439	0,46370	0,42296	0,37107	0,30644	0,22672	0,12799	0
$v^{(7)}(x_i)$	0,53124	0,52707	0,51445	0,49310	0,46249	0,42186	0,37010	0,30564	0,22613	0,12766	0
$v^{(6)}(x_i)$	0,53080	0,52663	0,51403	0,49269	0,46211	0,42151	0,36980	0,30539	0,22594	0,12755	0
$v^{(5)}(x_i)$	0,52530	0,52117	0,50869	0,48758	0,45732	0,41714	0,36596	0,30222	0,22360	0,12623	0
$v^{(4)}(x_i)$	0,52357	0,51945	0,50702	0,48597	0,45581	0,41576	0,36475	0,30121	0,22285	0,12581	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,50211	0,49816	0,48624	0,46607	0,43716	0,39877	0,34986	0,28894	0,21380	0,12071	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,49602	0,49211	0,48028	0,46027	0,43161	0,39357	0,34515	0,28489	0,21063	0,11880	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,41663	0,41345	0,40381	0,38747	0,36399	0,33272	0,29271	0,24261	0,18037	0,10255	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,41661	0,41277	0,40121	0,38183	0,35442	0,31870	0,27433	0,22086	0,15776	0,08438	0

Таблиця Г.30 – Значення наближених розв’язків задачі (4.45) – (4.47) при різних  $q$  та  $\mu$  на сітці з кроком 0,1 ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,3942	0,3907	0,3801	0,3622	0,3370	0,3039	0,2626	0,2124	0,1527	0,0825	0
0,2	0,4333	0,4295	0,4182	0,3992	0,3721	0,3366	0,2919	0,2374	0,1718	0,0937	0
0,3	0,4693	0,4654	0,4535	0,4335	0,4049	0,3673	0,3198	0,2614	0,1906	0,1051	0
0,4	0,5026	0,4985	0,4862	0,4654	0,4356	0,3962	0,3463	0,2845	0,2089	0,1165	0
0,5	0,5333	0,5291	0,5164	0,4950	0,4642	0,4235	0,3715	0,3068	0,2270	0,1281	0
0,6	0,5616	0,5573	0,5444	0,5225	0,4910	0,4491	0,3955	0,3283	0,2448	0,1399	0
0,7	0,5878	0,5835	0,5704	0,5481	0,5161	0,4734	0,4184	0,3491	0,2623	0,1520	0
0,8	0,6121	0,6077	0,5945	0,5721	0,5397	0,4963	0,4403	0,3693	0,2795	0,1642	0
0,9	0,6345	0,6302	0,6169	0,5944	0,5618	0,5179	0,4611	0,3887	0,2966	0,1767	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	0,7402	0,7336	0,7137	0,6802	0,6327	0,5706	0,4931	0,3989	0,2868	0,1549	0
0,2	0,7720	0,7653	0,7452	0,7113	0,6630	0,5997	0,5201	0,4229	0,3062	0,1670	0
0,3	0,8245	0,8178	0,7976	0,7635	0,7146	0,6500	0,5681	0,4667	0,3428	0,1912	0
0,4	0,8245	0,8178	0,7976	0,7635	0,7146	0,6500	0,5681	0,4667	0,3428	0,1912	0
0,5	0,8465	0,8398	0,8197	0,7857	0,7369	0,6722	0,5897	0,4870	0,3603	0,2034	0
0,6	0,8661	0,8595	0,8396	0,8058	0,7573	0,6926	0,6100	0,5063	0,3775	0,2158	0
0,7	0,8837	0,8772	0,8575	0,8241	0,7760	0,7117	0,6290	0,5249	0,3943	0,2285	0
0,8	0,8996	0,8932	0,8738	0,8408	0,7932	0,7294	0,6471	0,5427	0,4108	0,2413	0
0,9	0,9139	0,9076	0,8885	0,8561	0,8091	0,7460	0,6641	0,5599	0,4271	0,2544	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	1,0702	1,0606	1,0318	0,9834	0,9148	0,8250	0,7128	0,5767	0,4147	0,2239	0
0,2	1,0823	1,0729	1,0447	0,9971	0,9295	0,8407	0,7292	0,5929	0,4292	0,2341	0
0,3	1,0926	1,0835	1,0558	1,0092	0,9427	0,8551	0,7445	0,6085	0,4436	0,2446	0
0,4	1,1015	1,0925	1,0655	1,0199	0,9547	0,8684	0,7590	0,6235	0,4579	0,2554	0
0,5	1,1092	1,1005	1,0741	1,0295	0,9656	0,8808	0,7727	0,6381	0,4721	0,2665	0
0,6	1,1159	1,1074	1,0817	1,0382	0,9757	0,8925	0,7859	0,6524	0,4863	0,2781	0
0,7	1,1217	1,1135	1,0885	1,0461	0,9850	0,9034	0,7985	0,6663	0,5005	0,2900	0
0,8	1,1268	1,1188	1,0945	1,0532	0,9936	0,9137	0,8105	0,6798	0,5146	0,3023	0
0,9	1,1313	1,1235	1,0999	1,0597	1,0016	0,9234	0,8221	0,6931	0,5287	0,3150	0

Таблиця Г.31 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $q$  та  $\mu$

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,58219	0,62853	3	0,2928	1,09328	1,18029	3	0,5499	1,58057	1,70636	3	0,7950
0,2	0,65013	0,78250	4	0,3340	1,15840	1,39426	4	0,5952	1,62406	1,95473	5	0,8343
0,3	0,69502	0,98080	6	0,3732	1,18457	1,67164	6	0,6361	1,61814	2,28348	7	0,8689
0,4	0,70380	1,26547	8	0,4104	1,15470	2,07622	9	0,6733	1,54258	2,77366	9	0,8994
0,5	0,65709	1,74463	12	0,4454	1,04306	2,76943	12	0,7071	1,36680	3,62898	13	0,9265
0,6	0,52997	2,77319	17	0,4784	0,81732	4,27684	18	0,7378	1,05305	5,51036	18	0,9506
0,7	0,30981	6,14900	26	0,5094	0,46577	9,24445	27	0,7659	0,59123	11,7345	27	0,9722
0,8	0,07144	35,9443	44	0,5385	0,10499	52,8286	46	0,7915	0,13152	66,1755	47	0,9915
0,9	0,00017	23242,1	104	0,5659	0,00024	33474,3	107	0,8150	0,00030	41437,3	109	1,0088

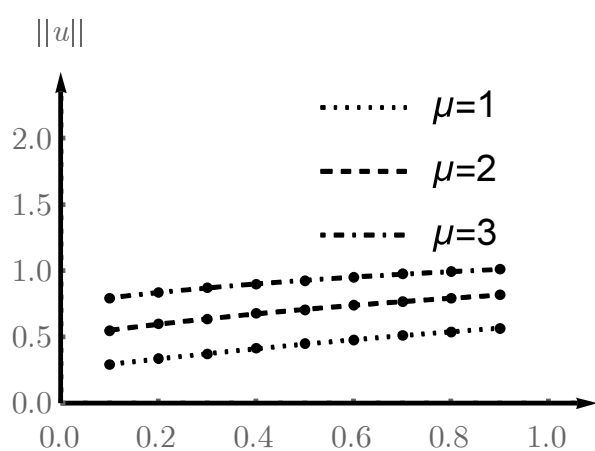


Рисунок Г.33 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.64) – (4.66) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$

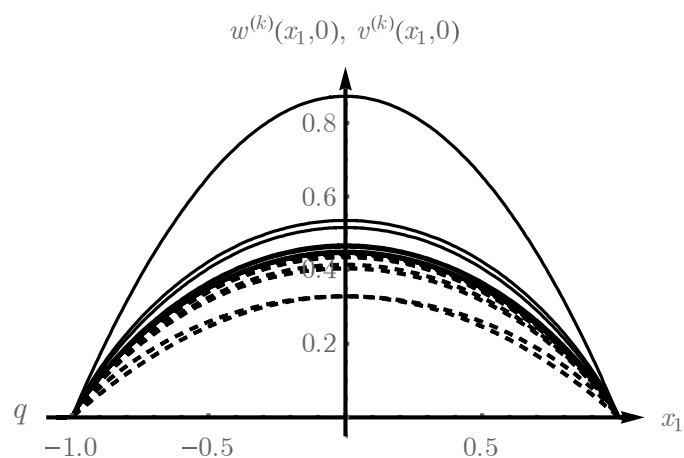


Рисунок Г.34 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$

Таблиця Г.32 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) у одиничному крузі при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,87231	0,86359	0,83742	0,79381	0,73274	0,65424	0,55828	0,44488	0,31403	0,16574	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,53535	0,53099	0,51782	0,49564	0,46409	0,42258	0,37024	0,30572	0,22680	0,12929	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,51606	0,51170	0,49854	0,47644	0,44508	0,40399	0,35247	0,28943	0,21309	0,12009	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,46789	0,46395	0,45209	0,43216	0,40386	0,36676	0,32019	0,26315	0,19396	0,10950	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,46189	0,45800	0,44628	0,42658	0,39862	0,36198	0,31599	0,25966	0,19136	0,10800	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,45097	0,44717	0,43573	0,41650	0,38921	0,35343	0,30853	0,25354	0,18685	0,10546	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44947	0,44569	0,43429	0,41512	0,38792	0,35226	0,30751	0,25269	0,18623	0,10511	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44680	0,44304	0,43171	0,41265	0,38561	0,35016	0,30568	0,25119	0,18512	0,10449	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44643	0,44267	0,43135	0,41231	0,38529	0,34987	0,30542	0,25098	0,18497	0,10440	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44576	0,44201	0,43070	0,41169	0,38472	0,34935	0,30497	0,25061	0,18469	0,10424	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44567	0,44192	0,43061	0,41161	0,38464	0,34928	0,30491	0,25056	0,18465	0,10422	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44550	0,44175	0,43045	0,41146	0,38449	0,34915	0,30479	0,25046	0,18458	0,10418	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44548	0,44173	0,43043	0,41143	0,38447	0,34913	0,30478	0,25045	0,18457	0,10417	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44543	0,44168	0,43038	0,41139	0,38443	0,34909	0,30474	0,25042	0,18455	0,10416	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44538	0,44163	0,43033	0,41134	0,38438	0,34905	0,30470	0,25039	0,18453	0,10415	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44529	0,44154	0,43025	0,41126	0,38431	0,34898	0,30465	0,25034	0,18450	0,10413	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44525	0,44150	0,43020	0,41122	0,38427	0,34895	0,30462	0,25032	0,18448	0,10412	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44491	0,44117	0,42988	0,41091	0,38398	0,34869	0,30439	0,25013	0,18434	0,10404	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44473	0,44099	0,42970	0,41074	0,38382	0,34854	0,30426	0,25003	0,18426	0,10400	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44340	0,43967	0,42842	0,40952	0,38268	0,34750	0,30336	0,24928	0,18371	0,10369	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44267	0,43894	0,42771	0,40884	0,38204	0,34692	0,30285	0,24887	0,18341	0,10352	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,43741	0,43373	0,42264	0,40398	0,37751	0,34281	0,29926	0,24592	0,18123	0,10229	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,43454	0,43088	0,41986	0,40133	0,37502	0,34055	0,29728	0,24428	0,18003	0,10161	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,41413	0,41064	0,40015	0,38250	0,35745	0,32461	0,28340	0,23291	0,17167	0,09692	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,40428	0,40086	0,39056	0,37324	0,34867	0,31648	0,27612	0,22673	0,16693	0,09408	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,32855	0,32587	0,31779	0,30418	0,28482	0,25934	0,22722	0,18762	0,13919	0,07935	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,32854	0,32526	0,31540	0,29898	0,27598	0,24641	0,21027	0,16756	0,11828	0,06242	0

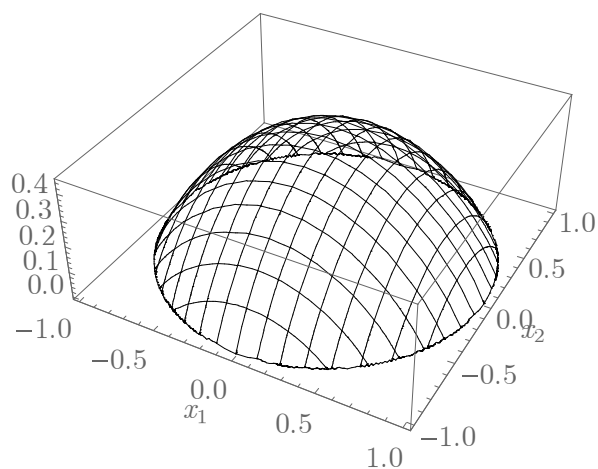


Рисунок Г.35 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

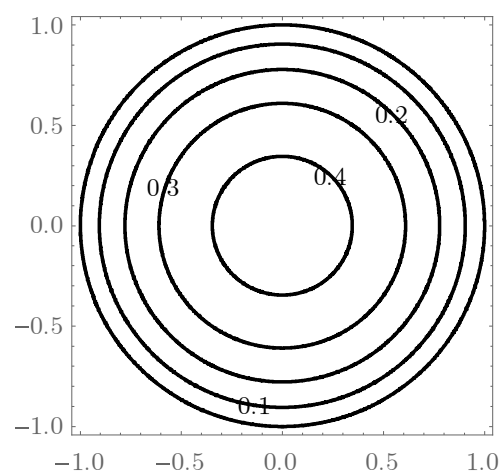


Рисунок Г.36 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

Таблиця Г.33 – Значення наближених розв'язків задачі (4.64) – (4.66) у  
 одиничному крузі при різних  $q$  та  $\mu$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,2928	0,2900	0,2815	0,2673	0,2474	0,2217	0,1901	0,1524	0,1085	0,0580	0
0,2	0,3340	0,3309	0,3215	0,3059	0,2838	0,2552	0,2198	0,1774	0,1274	0,0690	0
0,3	0,3732	0,3699	0,3598	0,3428	0,3189	0,2877	0,2490	0,2021	0,1464	0,0803	0
0,4	0,4104	0,4068	0,3961	0,3780	0,3524	0,3190	0,2773	0,2265	0,1655	0,0921	0
0,5	0,4454	0,4417	0,4304	0,4114	0,3844	0,3491	0,3047	0,2504	0,1846	0,1042	0
0,6	0,4784	0,4745	0,4628	0,4430	0,4149	0,3779	0,3313	0,2738	0,2035	0,1166	0
0,7	0,5094	0,5054	0,4933	0,4729	0,4438	0,4054	0,3568	0,2966	0,2224	0,1293	0
0,8	0,5385	0,5344	0,5220	0,5011	0,4712	0,4317	0,3814	0,3188	0,2410	0,1422	0
0,9	0,5659	0,5617	0,5490	0,5277	0,4972	0,4567	0,4051	0,3404	0,2595	0,1553	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	0,5499	0,5446	0,5286	0,5020	0,4646	0,4163	0,3570	0,2863	0,2038	0,1089	0
0,2	0,5952	0,5896	0,5729	0,5450	0,5057	0,4547	0,3917	0,3161	0,2270	0,1229	0
0,3	0,6361	0,6304	0,6131	0,5843	0,5434	0,4903	0,4243	0,3445	0,2495	0,1369	0
0,4	0,6733	0,6674	0,6497	0,6201	0,5782	0,5234	0,4549	0,3716	0,2715	0,1511	0
0,5	0,7071	0,7011	0,6832	0,6530	0,6102	0,5541	0,4837	0,3975	0,2930	0,1654	0
0,6	0,7378	0,7318	0,7137	0,6832	0,6398	0,5828	0,5109	0,4223	0,3139	0,1798	0
0,7	0,7659	0,7598	0,7416	0,7109	0,6672	0,6095	0,5365	0,4459	0,3343	0,1943	0
0,8	0,7915	0,7855	0,7672	0,7365	0,6926	0,6344	0,5606	0,4686	0,3542	0,2090	0
0,9	0,8150	0,8089	0,7908	0,7600	0,7161	0,6578	0,5834	0,4903	0,3737	0,2237	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	0,7950	0,7873	0,7643	0,7258	0,6717	0,6019	0,5161	0,4139	0,2946	0,1574	0
0,2	0,8343	0,8266	0,8032	0,7640	0,7089	0,6375	0,5491	0,4431	0,3182	0,1722	0
0,3	0,8689	0,8611	0,8375	0,7981	0,7423	0,6698	0,5796	0,4706	0,3408	0,1870	0
0,4	0,8994	0,8916	0,8680	0,8284	0,7724	0,6992	0,6077	0,4964	0,3627	0,2018	0
0,5	0,9265	0,9187	0,8952	0,8557	0,7996	0,7261	0,6339	0,5209	0,3839	0,2167	0
0,6	0,9506	0,9429	0,9196	0,8803	0,8244	0,7509	0,6582	0,5441	0,4044	0,2316	0
0,7	0,9722	0,9645	0,9414	0,9024	0,8469	0,7737	0,6810	0,5661	0,4243	0,2466	0
0,8	0,9915	0,9839	0,9611	0,9225	0,8675	0,7947	0,7022	0,5870	0,4437	0,2618	0
0,9	1,0088	1,0014	0,9789	0,9408	0,8864	0,8142	0,7222	0,6069	0,4626	0,2770	0

Таблиця Г.34 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $q$  та  $\mu$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,49316	0,57409	3	0,2494	0,92608	1,07806	3	0,4683	1,33885	1,55857	3	0,6771
0,2	0,55237	0,73127	4	0,2875	0,98421	1,30297	4	0,5123	1,37985	1,82674	5	0,7182
0,3	0,58925	0,93940	6	0,3242	1,00429	1,60107	6	0,5525	1,37187	2,18709	7	0,7546
0,4	0,59150	1,24716	8	0,3591	0,97046	2,04618	9	0,5891	1,29645	2,73353	9	0,7870
0,5	0,54220	1,78275	12	0,3922	0,86069	2,82994	12	0,6226	1,12782	3,70827	13	0,8158
0,6	0,42249	2,98150	17	0,4235	0,65157	4,59810	17	0,6531	0,83950	5,92428	18	0,8415
0,7	0,23116	7,17223	25	0,4530	0,34752	10,7828	27	0,6811	0,44113	13,6872	27	0,8645
0,8	0,04608	49,2064	44	0,4808	0,06773	72,3203	46	0,7067	0,08484	90,5917	47	0,8852
0,9	0,000068	51333,7	103	0,5070	0,000098	73933,2	107	0,7302	0,00012	91520,6	109	0,9038

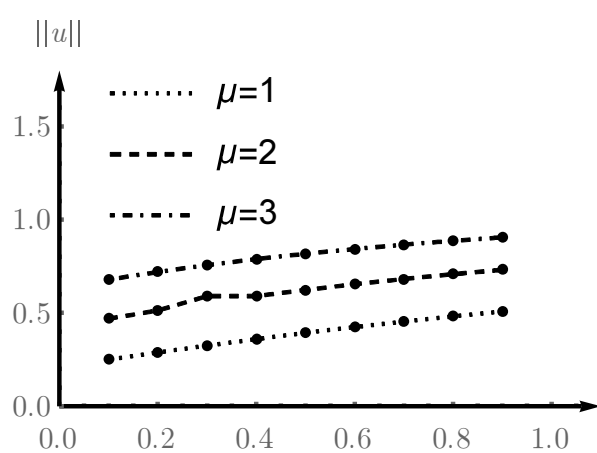


Рисунок Г.37 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.67) – (4.69) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

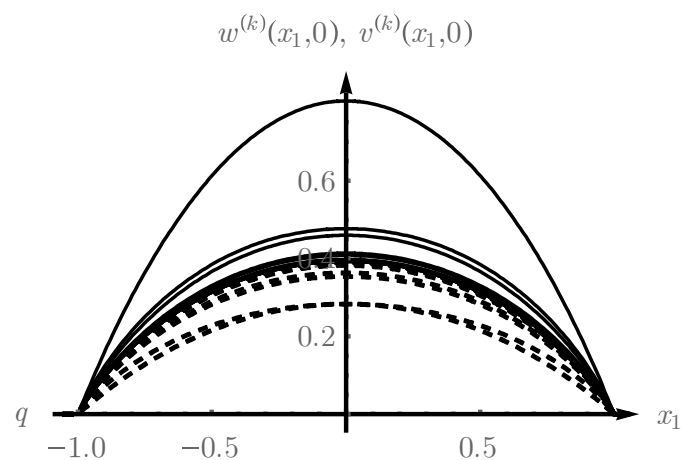


Рисунок Г.38 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у перерізі  $x_2 = 0$



Таблиця Г.35 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) у одиничному крузі при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,80500	0,79743	0,77467	0,73654	0,68276	0,61293	0,52651	0,42286	0,30120	0,16060	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,47711	0,47359	0,46295	0,44489	0,41890	0,38420	0,33962	0,28345	0,21297	0,12330	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,45926	0,45570	0,44494	0,42674	0,40066	0,36605	0,32193	0,26691	0,19876	0,11357	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,41344	0,41026	0,40066	0,38440	0,36109	0,33012	0,29059	0,24119	0,17987	0,10299	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,40770	0,40457	0,39508	0,37903	0,35601	0,32544	0,28643	0,23769	0,17722	0,10144	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39743	0,39437	0,38513	0,36948	0,34705	0,31725	0,27923	0,23173	0,17278	0,09890	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39600	0,39295	0,38374	0,36815	0,34580	0,31610	0,27822	0,23088	0,17215	0,09854	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39349	0,39046	0,38131	0,36582	0,34361	0,31410	0,27646	0,22942	0,17106	0,09792	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39313	0,39010	0,38096	0,36548	0,34329	0,31382	0,27620	0,22921	0,17090	0,09783	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39250	0,38948	0,38036	0,36490	0,34275	0,31332	0,27577	0,22885	0,17063	0,09767	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39242	0,38940	0,38027	0,36482	0,34267	0,31325	0,27570	0,22880	0,17059	0,09765	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39226	0,38924	0,38012	0,36467	0,34254	0,31312	0,27559	0,22871	0,17053	0,09761	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39224	0,38922	0,38010	0,36465	0,34252	0,31310	0,27558	0,22869	0,17052	0,09761	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39219	0,38917	0,38005	0,36461	0,34247	0,31306	0,27554	0,22866	0,17049	0,09760	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39214	0,38912	0,38000	0,36456	0,34243	0,31302	0,27551	0,22863	0,17047	0,09758	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39206	0,38904	0,37992	0,36449	0,34236	0,31296	0,27545	0,22859	0,17044	0,09756	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39201	0,38900	0,37988	0,36445	0,34232	0,31293	0,27542	0,22856	0,17042	0,09755	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39170	0,38869	0,37958	0,36416	0,34205	0,31268	0,27520	0,22838	0,17028	0,09747	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39153	0,38851	0,37941	0,36399	0,34189	0,31254	0,27508	0,22828	0,17021	0,09743	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,39028	0,38728	0,37820	0,36284	0,34081	0,31154	0,27421	0,22755	0,16967	0,09712	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,38957	0,38658	0,37752	0,36218	0,34019	0,31098	0,27371	0,22714	0,16936	0,09694	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,38465	0,38169	0,37274	0,35760	0,33589	0,30705	0,27025	0,22427	0,16722	0,09572	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,38190	0,37896	0,37007	0,35504	0,33348	0,30484	0,26830	0,22264	0,16600	0,09502	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,36276	0,35997	0,35154	0,33728	0,31682	0,28965	0,25496	0,21162	0,15782	0,09037	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,35356	0,35082	0,34254	0,32852	0,30845	0,28180	0,24784	0,20548	0,15301	0,08743	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,28277	0,28068	0,27437	0,26367	0,24827	0,22770	0,20128	0,16799	0,12622	0,07307	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,28276	0,28010	0,27210	0,25871	0,23982	0,21529	0,18494	0,14853	0,10580	0,05641	0

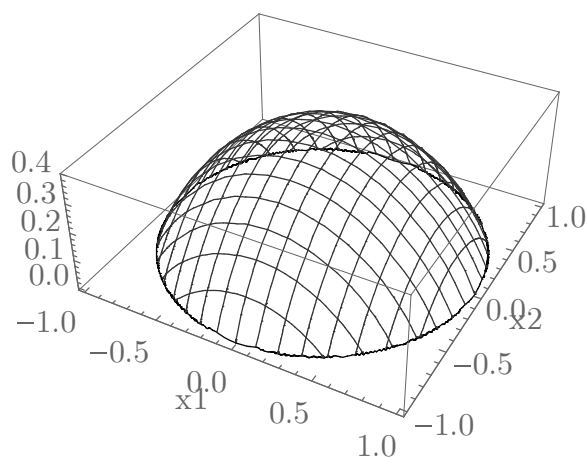


Рисунок Г.39 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

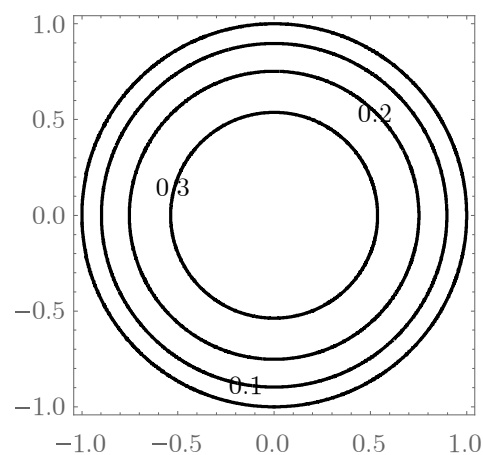


Рисунок Г.40 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.36 – Значення наближених розв’язків задачі (4.67) – (4.69) у  
 одиничному крузі при різних  $q$  та  $\mu$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,2494	0,2472	0,2404	0,2290	0,2129	0,1919	0,1657	0,1340	0,0963	0,0520	0
0,2	0,2875	0,2850	0,2775	0,2649	0,2469	0,2234	0,1939	0,1578	0,1145	0,0627	0
0,3	0,3242	0,3215	0,3133	0,2996	0,2800	0,2542	0,2217	0,1817	0,1330	0,0739	0
0,4	0,3591	0,3562	0,3475	0,3329	0,3119	0,2842	0,2490	0,2053	0,1517	0,0856	0
0,5	0,3922	0,3892	0,3800	0,3646	0,3425	0,3131	0,2755	0,2287	0,1705	0,0976	0
0,6	0,4235	0,4203	0,4109	0,3948	0,3717	0,3408	0,3013	0,2516	0,1893	0,1100	0
0,7	0,4530	0,4498	0,4400	0,4234	0,3995	0,3675	0,3263	0,2740	0,2079	0,1227	0
0,8	0,4808	0,4775	0,4675	0,4505	0,4260	0,3930	0,3503	0,2959	0,2265	0,1357	0
0,9	0,5070	0,5036	0,4935	0,4762	0,4511	0,4174	0,3735	0,3172	0,2448	0,1489	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	0,4683	0,4641	0,4514	0,4300	0,3998	0,3603	0,3111	0,2516	0,1808	0,0977	0
0,2	0,5123	0,5079	0,4945	0,4720	0,4400	0,3980	0,3454	0,2812	0,2040	0,1118	0
0,3	0,5525	0,5479	0,5340	0,5106	0,4772	0,4333	0,3778	0,3096	0,2267	0,1260	0
0,4	0,5891	0,5844	0,5701	0,5461	0,5117	0,4662	0,4085	0,3368	0,2489	0,1404	0
0,5	0,6226	0,6178	0,6033	0,5788	0,5436	0,4970	0,4374	0,3630	0,2706	0,1549	0
0,6	0,6531	0,6483	0,6336	0,6088	0,5732	0,5257	0,4647	0,3880	0,2919	0,1696	0
0,7	0,6811	0,6762	0,6615	0,6366	0,6006	0,5525	0,4905	0,4119	0,3126	0,1844	0
0,8	0,7067	0,7018	0,6872	0,6622	0,6261	0,5776	0,5149	0,4349	0,3329	0,1994	0
0,9	0,7302	0,7253	0,7107	0,6858	0,6497	0,6011	0,5379	0,4569	0,3526	0,2144	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	0,6771	0,6710	0,6526	0,6217	0,5780	0,5209	0,4497	0,3637	0,2614	0,1413	0
0,2	0,7182	0,7120	0,6932	0,6617	0,6168	0,5580	0,4842	0,3942	0,2860	0,1567	0
0,3	0,7546	0,7484	0,7294	0,6974	0,6519	0,5918	0,5161	0,4229	0,3096	0,1721	0
0,4	0,7870	0,7807	0,7616	0,7295	0,6836	0,6228	0,5457	0,4500	0,3325	0,1875	0
0,5	0,8158	0,8095	0,7905	0,7584	0,7123	0,6512	0,5731	0,4756	0,3546	0,2030	0
0,6	0,8415	0,8353	0,8164	0,7845	0,7385	0,6773	0,5987	0,4999	0,3761	0,2185	0
0,7	0,8645	0,8584	0,8397	0,8080	0,7624	0,7013	0,6226	0,5229	0,3968	0,2341	0
0,8	0,8852	0,8791	0,8607	0,8295	0,7843	0,7235	0,6449	0,5448	0,4170	0,2498	0
0,9	0,9038	0,8979	0,8798	0,8489	0,8043	0,7441	0,6659	0,5655	0,4365	0,2654	0

Таблиця Г.37 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $q$  та  $\mu$

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,40504	0,44721	3	0,2040	0,76061	0,83980	3	0,3832	1,09963	1,21412	3	0,5539
0,2	0,46653	0,59159	4	0,2413	0,83126	1,05409	4	0,4300	1,16541	1,47782	5	0,6028
0,3	0,50858	0,78724	6	0,2779	0,86681	1,34173	6	0,4737	1,18407	1,83282	7	0,6470
0,4	0,51848	1,08206	8	0,3135	0,85066	1,77530	9	0,5143	1,13641	2,37166	9	0,6870
0,5	0,47918	1,60455	12	0,3477	0,76066	2,54707	12	0,5519	0,99674	3,33761	13	0,7232
0,6	0,37261	2,80093	17	0,3805	0,57465	4,31962	18	0,5868	0,74039	5,56548	18	0,7560
0,7	0,19977	7,13891	25	0,4117	0,30034	10,7327	27	0,6190	0,38124	13,6236	27	0,78581
0,8	0,03738	54,0425	44	0,4415	0,05494	79,4281	46	0,6489	0,06882	99,4953	47	0,81282
0,9	0,00004	73531,4	103	0,4697	0,00006	105903,	107	0,6765	0,00008	131096,	109	0,83748

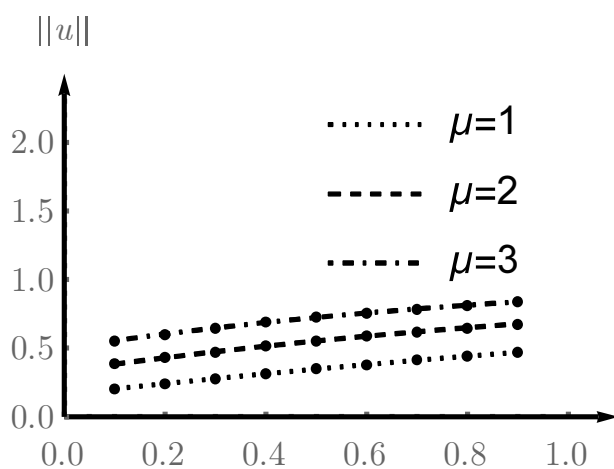


Рисунок Г.41 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.64) – (4.66) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$

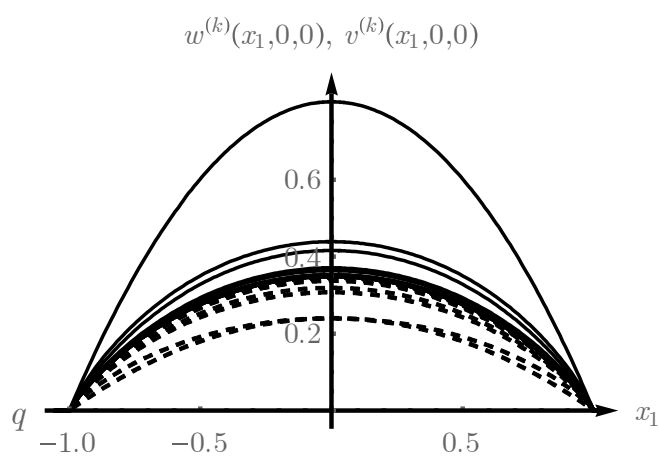


Рисунок Г.42 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наблизень до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

Таблиця Г.38 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.64) – (4.66) у одиничній кулі при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,80228	0,79425	0,77019	0,73007	0,67391	0,60171	0,51346	0,40916	0,28882	0,15243	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,43844	0,43503	0,42473	0,40736	0,38257	0,34979	0,30820	0,25646	0,19238	0,11164	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41541	0,41200	0,40172	0,38443	0,35985	0,32756	0,28690	0,23687	0,17579	0,10039	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37051	0,36750	0,35842	0,34313	0,32138	0,29278	0,25671	0,21224	0,15780	0,09036	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,36315	0,36019	0,35128	0,33627	0,31492	0,28685	0,25147	0,20785	0,15449	0,08842	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,35332	0,35045	0,34178	0,32718	0,30641	0,27911	0,24469	0,20226	0,15034	0,08605	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,35148	0,34862	0,33999	0,32547	0,30482	0,27765	0,24341	0,20120	0,14955	0,08560	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34909	0,34625	0,33768	0,32326	0,30274	0,27577	0,24175	0,19983	0,14853	0,08502	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34863	0,34580	0,33724	0,32284	0,30235	0,27540	0,24144	0,19957	0,14834	0,08491	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34804	0,34521	0,33667	0,32229	0,30183	0,27493	0,24103	0,19923	0,14809	0,08476	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34793	0,34509	0,33656	0,32218	0,30173	0,27484	0,24095	0,19917	0,14804	0,08474	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34778	0,34495	0,33641	0,32204	0,30161	0,27473	0,24084	0,19908	0,14798	0,08470	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34775	0,34492	0,33639	0,32202	0,30158	0,27470	0,24082	0,19906	0,14796	0,08469	0
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34770	0,34487	0,33634	0,32197	0,30154	0,27466	0,24079	0,19903	0,14794	0,08468	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34765	0,34482	0,33629	0,32192	0,30149	0,27462	0,24075	0,19901	0,14792	0,08467	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34757	0,34474	0,33621	0,32185	0,30143	0,27457	0,24070	0,19896	0,14789	0,08465	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34752	0,34469	0,33616	0,32180	0,30138	0,27452	0,24066	0,19893	0,14786	0,08464	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34722	0,34439	0,33587	0,32153	0,30112	0,27429	0,24046	0,19876	0,14774	0,08456	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34699	0,34417	0,33565	0,32132	0,30092	0,27411	0,24030	0,19863	0,14764	0,08451	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34581	0,34300	0,33451	0,32022	0,29990	0,27317	0,23948	0,19795	0,14714	0,08422	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34491	0,34210	0,33363	0,31938	0,29911	0,27246	0,23886	0,19744	0,14675	0,08400	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34023	0,33746	0,32911	0,31505	0,29506	0,26876	0,23562	0,19476	0,14477	0,08286	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,33673	0,33399	0,32572	0,31180	0,29201	0,26598	0,23317	0,19273	0,14325	0,08199	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31856	0,31597	0,30817	0,29502	0,27632	0,25173	0,22072	0,18248	0,13567	0,07769	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,30709	0,30457	0,29697	0,28419	0,26602	0,24214	0,21209	0,17510	0,12995	0,07421	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,23960	0,23773	0,23211	0,22262	0,20907	0,19116	0,16842	0,14015	0,10513	0,06101	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,23959	0,23720	0,23001	0,21803	0,20126	0,17969	0,15334	0,12219	0,08625	0,04552	0

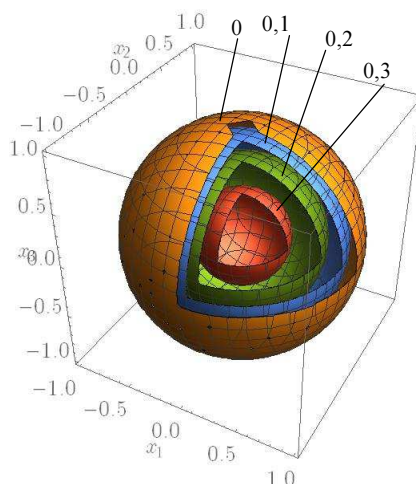


Рисунок Г.43 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.64) – (4.66) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

Таблиця Г.39 – Значення наближених розв'язків задачі (4.64) – (4.66) у  
 одиничній кулі при різних  $q$  та  $\mu$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0; 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,2040	0,2021	0,1962	0,1864	0,1726	0,1548	0,1329	0,1067	0,0762	0,0408	0
0,2	0,2413	0,2391	0,2325	0,2213	0,2056	0,1851	0,1598	0,1293	0,0933	0,0508	0
0,3	0,2779	0,2755	0,2681	0,2557	0,2382	0,2154	0,1870	0,1524	0,1111	0,0615	0
0,4	0,3135	0,3108	0,3028	0,2894	0,2703	0,2454	0,2140	0,1757	0,1293	0,0728	0
0,5	0,3477	0,3449	0,3363	0,3220	0,3015	0,2747	0,2408	0,1990	0,1479	0,0847	0
0,6	0,3805	0,3775	0,3685	0,3533	0,3317	0,3032	0,2670	0,2222	0,1667	0,0970	0
0,7	0,4117	0,4086	0,3993	0,3834	0,3608	0,3308	0,2926	0,2450	0,1856	0,1097	0
0,8	0,4415	0,4383	0,4286	0,4122	0,3887	0,3575	0,3176	0,2674	0,2044	0,1228	0
0,9	0,4697	0,4664	0,4564	0,4396	0,4153	0,3831	0,3417	0,2894	0,2231	0,1362	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	0,3832	0,3795	0,3685	0,3501	0,3242	0,2907	0,2496	0,2004	0,1430	0,0767	0
0,2	0,4300	0,4261	0,4142	0,3943	0,3663	0,3299	0,2848	0,2305	0,1662	0,0906	0
0,3	0,4737	0,4695	0,4569	0,4359	0,4061	0,3672	0,3187	0,2598	0,1893	0,1048	0
0,4	0,5143	0,5099	0,4968	0,4748	0,4435	0,4025	0,3512	0,2883	0,2122	0,1195	0
0,5	0,5519	0,5474	0,5339	0,5111	0,4787	0,4360	0,3822	0,3159	0,2348	0,1344	0
0,6	0,5868	0,5822	0,5683	0,5449	0,5116	0,4676	0,4118	0,3426	0,2571	0,1496	0
0,7	0,6190	0,6144	0,6003	0,5764	0,5424	0,4973	0,4400	0,3683	0,2790	0,1650	0
0,8	0,6489	0,6441	0,6299	0,6058	0,5712	0,5254	0,4667	0,3931	0,3004	0,1805	0
0,9	0,6765	0,6717	0,6574	0,6331	0,5982	0,5517	0,4921	0,4168	0,3213	0,1961	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	0,5539	0,5486	0,5327	0,5061	0,4687	0,4203	0,3608	0,2898	0,2068	0,1109	0
0,2	0,6028	0,5973	0,5806	0,5528	0,5135	0,4624	0,3992	0,3231	0,2330	0,1269	0
0,3	0,6470	0,6413	0,6242	0,5954	0,5547	0,5015	0,4353	0,3549	0,2585	0,1432	0
0,4	0,6870	0,6812	0,6637	0,6342	0,5925	0,5377	0,4691	0,3851	0,2835	0,1596	0
0,5	0,7232	0,7173	0,6996	0,6697	0,6272	0,5713	0,5008	0,4140	0,3077	0,1761	0
0,6	0,7560	0,7501	0,7322	0,7021	0,6591	0,6024	0,5306	0,4415	0,3313	0,1928	0
0,7	0,7858	0,7798	0,7619	0,7317	0,6885	0,6313	0,5585	0,4675	0,3541	0,2094	0
0,8	0,8128	0,8069	0,7890	0,7588	0,7155	0,6581	0,5846	0,4924	0,3763	0,2261	0
0,9	0,8374	0,8315	0,8137	0,7837	0,7405	0,6830	0,6092	0,5160	0,3978	0,2427	0

Таблиця Г.40 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $q$  та  $\mu$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$\mu = 1$				$\mu = 2$				$\mu = 3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,36356	0,42625	2	0,1839	0,68272	0,80043	3	0,3453	0,98702	1,15720	3	0,4993
0,2	0,41891	0,57242	4	0,2188	0,74642	1,01993	4	0,3899	1,04646	1,42993	5	0,5467
0,3	0,45526	0,77433	6	0,2533	0,77594	1,31974	6	0,4317	1,05994	1,80279	6	0,5898
0,4	0,46062	1,08503	8	0,2869	0,75572	1,78018	9	0,4707	1,00958	2,37817	9	0,6288
0,5	0,41972	1,64898	11	0,3194	0,66626	2,61760	12	0,5070	0,87304	3,43002	13	0,6643
0,6	0,31826	2,97973	17	0,3506	0,49083	4,59537	17	0,5406	0,63239	5,92076	18	0,6966
0,7	0,16285	8,02679	25	0,3804	0,24482	12,0675	26	0,5719	0,31077	15,3180	27	0,7259
0,8	0,02757	67,7100	44	0,4088	0,04051	99,5158	45	0,6008	0,05075	124,658	46	0,7526
0,9	0,000024	127065	103	0,4357	0,000034	183004	106	0,6276	0,000042	226538	108	0,7768

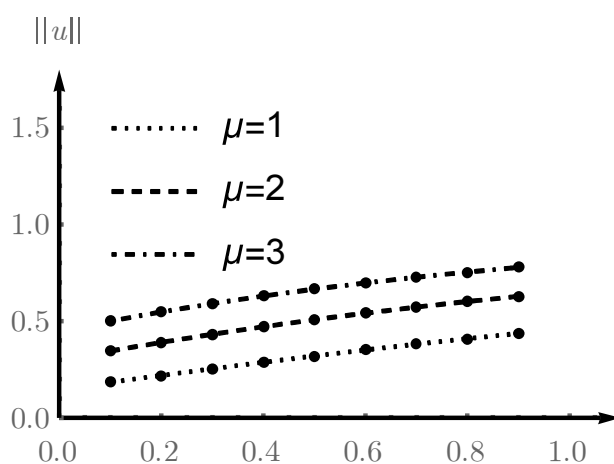


Рисунок Г.44 – Графіки норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.67) – (4.69) в залежності від  $q$  при  $\mu = 1, 2, 3$  ( $\kappa = 1$ )

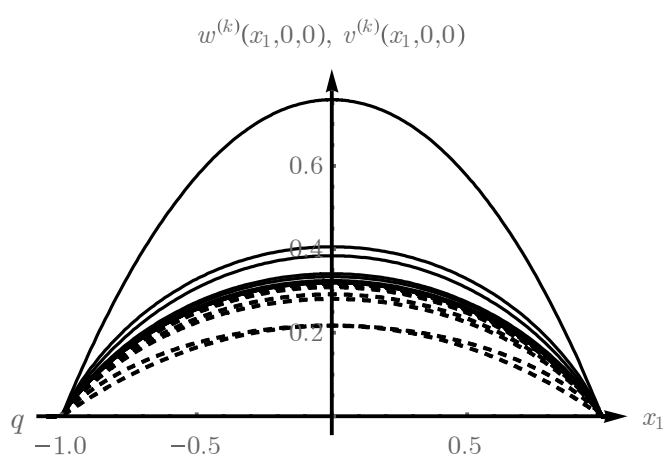


Рисунок Г.45 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

Таблиця Г.41 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.67) – (4.69) у одиничній кулі при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0, 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,75820	0,75099	0,72930	0,69300	0,64187	0,57562	0,49383	0,39602	0,28159	0,14985	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,40560	0,40270	0,39389	0,37894	0,35740	0,32860	0,29149	0,24453	0,18519	0,10869	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,38409	0,38115	0,37225	0,35721	0,33566	0,30706	0,27059	0,22503	0,16844	0,09717	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34111	0,33853	0,33073	0,31752	0,29858	0,27340	0,24123	0,20094	0,15073	0,08722	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,33407	0,33154	0,32388	0,31092	0,29233	0,26763	0,23609	0,19660	0,14741	0,08525	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,32475	0,32229	0,31484	0,30225	0,28419	0,26018	0,22953	0,19115	0,14333	0,08290	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,32298	0,32053	0,31313	0,30060	0,28263	0,25876	0,22827	0,19010	0,14255	0,08245	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,32072	0,31828	0,31093	0,29849	0,28065	0,25695	0,22667	0,18877	0,14155	0,08187	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,32028	0,31785	0,31051	0,29808	0,28027	0,25660	0,22636	0,18851	0,14135	0,08176	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31971	0,31729	0,30996	0,29756	0,27978	0,25615	0,22596	0,18818	0,14111	0,08161	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31960	0,31718	0,30986	0,29746	0,27968	0,25606	0,22589	0,18811	0,14106	0,08159	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31946	0,31704	0,30972	0,29733	0,27956	0,25594	0,22579	0,18803	0,14099	0,08155	0
$u^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31937	0,31694	0,30962	0,29724	0,27947	0,25587	0,22572	0,18797	0,14095	0,08153	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31927	0,31685	0,30953	0,29715	0,27939	0,25579	0,22565	0,18792	0,14091	0,08150	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31921	0,31679	0,30948	0,29709	0,27934	0,25574	0,22561	0,18788	0,14088	0,08149	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31893	0,31651	0,30921	0,29683	0,27909	0,25552	0,22541	0,18772	0,14076	0,08141	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31871	0,31630	0,30899	0,29663	0,27890	0,25534	0,22526	0,18759	0,14066	0,08136	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31760	0,31519	0,30791	0,29559	0,27792	0,25445	0,22447	0,18693	0,14017	0,08107	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31673	0,31432	0,30707	0,29478	0,27716	0,25375	0,22385	0,18642	0,13979	0,08085	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,31230	0,30993	0,30277	0,29066	0,27329	0,25021	0,22073	0,18382	0,13784	0,07972	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,30894	0,30660	0,29952	0,28753	0,27034	0,24750	0,21833	0,18181	0,13632	0,07884	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,29172	0,28952	0,28284	0,27155	0,25535	0,23382	0,20631	0,17185	0,12890	0,07459	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,28092	0,27877	0,27226	0,26126	0,24550	0,22458	0,19791	0,16459	0,12319	0,07107	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,21698	0,21542	0,21071	0,20271	0,19119	0,17578	0,15593	0,13081	0,09907	0,05815	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,21697	0,21490	0,20870	0,19831	0,18368	0,16472	0,14132	0,11333	0,08058	0,04288	0

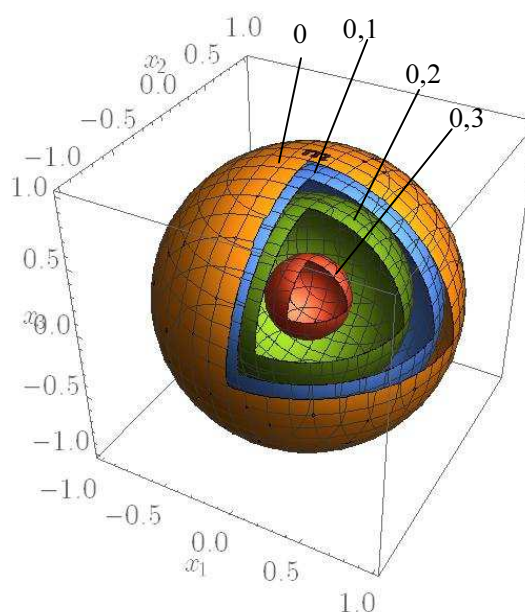


Рисунок Г.46 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(11)}(\mathbf{x})$  задачі (4.67) – (4.69) при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.42 – Значення наближених розв’язків задачі (4.67) – (4.69) у  
 одиничній кулі при різних  $q$  та  $\mu$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0; 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$\mu = 1$										
0,1	0,1839	0,1823	0,1772	0,1688	0,1569	0,1413	0,1220	0,0986	0,0709	0,0384	0
0,2	0,2188	0,2170	0,2112	0,2016	0,1880	0,1701	0,1477	0,1204	0,0875	0,0481	0
0,3	0,2533	0,2512	0,2449	0,2342	0,2190	0,1990	0,1738	0,1427	0,1048	0,0586	0
0,4	0,2869	0,2846	0,2778	0,2662	0,2496	0,2277	0,1999	0,1653	0,1227	0,0698	0
0,5	0,3194	0,3169	0,3096	0,2972	0,2795	0,2559	0,2257	0,1880	0,1410	0,0815	0
0,6	0,3506	0,3480	0,3403	0,3272	0,3084	0,2834	0,2512	0,2106	0,1594	0,0938	0
0,7	0,3804	0,3777	0,3697	0,3560	0,3364	0,3101	0,2761	0,2329	0,1780	0,1064	0
0,8	0,4088	0,4060	0,3977	0,3836	0,3633	0,3359	0,3003	0,2549	0,1966	0,1194	0
0,9	0,4357	0,4329	0,4244	0,4100	0,3890	0,3607	0,3239	0,2765	0,2151	0,1327	0
$q$	$\mu = 2$										
0,1	0,3453	0,3422	0,3328	0,3169	0,2946	0,2654	0,2291	0,1852	0,1332	0,0720	0
0,2	0,3899	0,3866	0,3764	0,3593	0,3350	0,3031	0,2632	0,2145	0,1559	0,0857	0
0,3	0,4317	0,4282	0,4174	0,3992	0,3733	0,3392	0,2962	0,2432	0,1787	0,0999	0
0,4	0,4707	0,4670	0,4557	0,4367	0,4095	0,3736	0,3279	0,2712	0,2013	0,1145	0
0,5	0,5070	0,5032	0,4915	0,4719	0,4437	0,4062	0,3583	0,2984	0,2238	0,1294	0
0,6	0,5406	0,5367	0,5248	0,5047	0,4757	0,4370	0,3874	0,3247	0,2459	0,1446	0
0,7	0,5719	0,5679	0,5558	0,5353	0,5057	0,4662	0,4151	0,3502	0,2676	0,1600	0
0,8	0,6008	0,5967	0,5846	0,5638	0,5339	0,4936	0,4414	0,3746	0,2890	0,1755	0
0,9	0,6276	0,6235	0,6113	0,5904	0,5602	0,5195	0,4664	0,3982	0,3098	0,1911	0
$q$	$\mu = 3$										
0,1	0,4993	0,4947	0,4811	0,4582	0,4258	0,3837	0,3312	0,2678	0,1926	0,1041	0
0,2	0,5467	0,5419	0,5276	0,5036	0,4696	0,4249	0,3689	0,3006	0,2185	0,1202	0
0,3	0,5898	0,5849	0,5701	0,5453	0,5099	0,4633	0,4046	0,3322	0,2440	0,1365	0
0,4	0,6288	0,6238	0,6088	0,5834	0,5471	0,4990	0,4380	0,3623	0,2689	0,1530	0
0,5	0,6643	0,6593	0,6441	0,6183	0,5813	0,5322	0,4695	0,3910	0,2932	0,1696	0
0,6	0,6966	0,6915	0,6762	0,6502	0,6129	0,5631	0,4991	0,4184	0,3168	0,1863	0
0,7	0,7259	0,7208	0,7055	0,6795	0,6420	0,5917	0,5269	0,4445	0,3397	0,2031	0
0,8	0,7525	0,7475	0,7323	0,7063	0,6688	0,6183	0,5529	0,4693	0,3620	0,2199	0
0,9	0,7768	0,7718	0,7567	0,7309	0,6935	0,6431	0,5774	0,4929	0,3835	0,2366	0



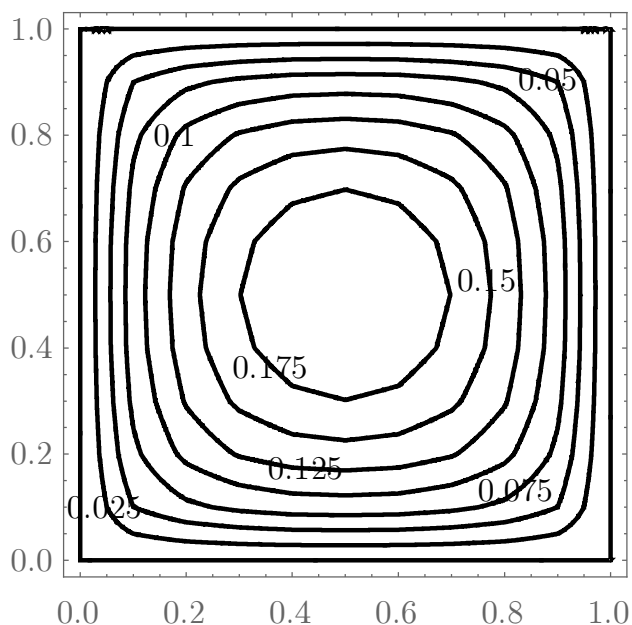
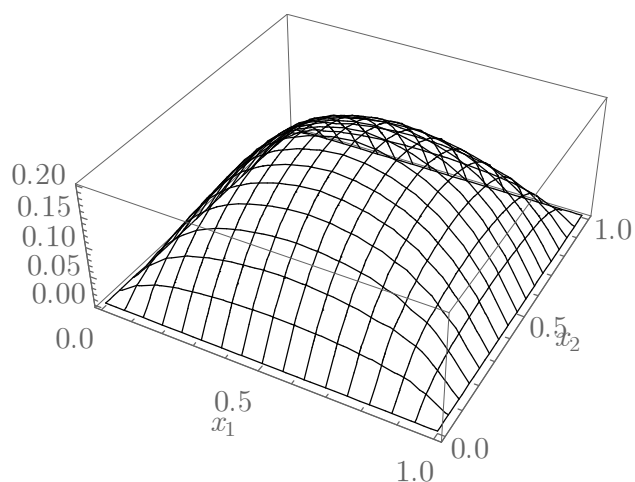


Рисунок Г.47 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному квадраті, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

Рисунок Г.48 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному квадраті, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

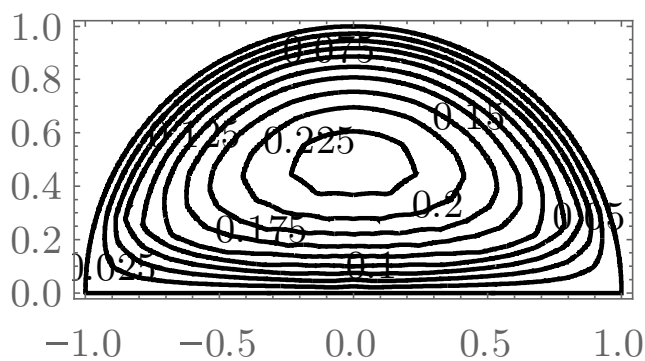
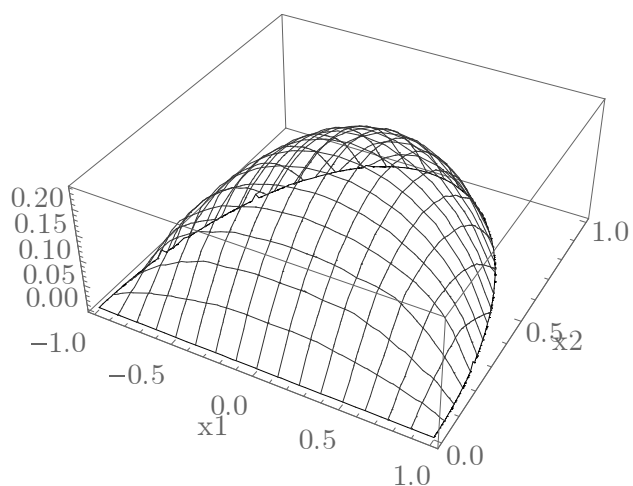


Рисунок Г.49 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у половині одиничного кола, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

Рисунок Г.50 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у половині одиничного кола, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

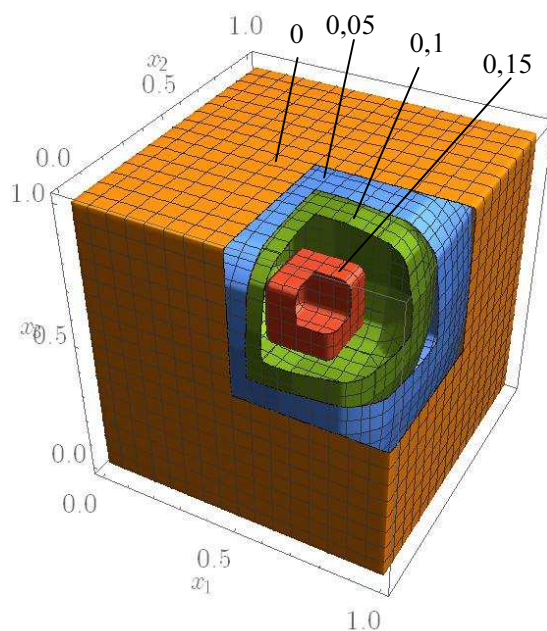


Рисунок Г.51 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному кубі, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

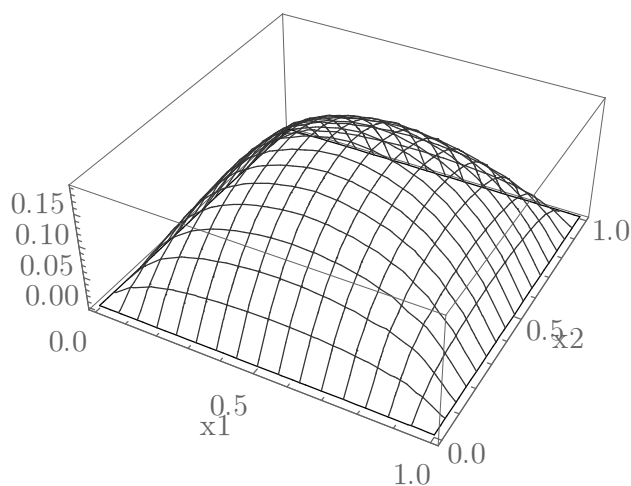


Рисунок Г.52 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному квадраті, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

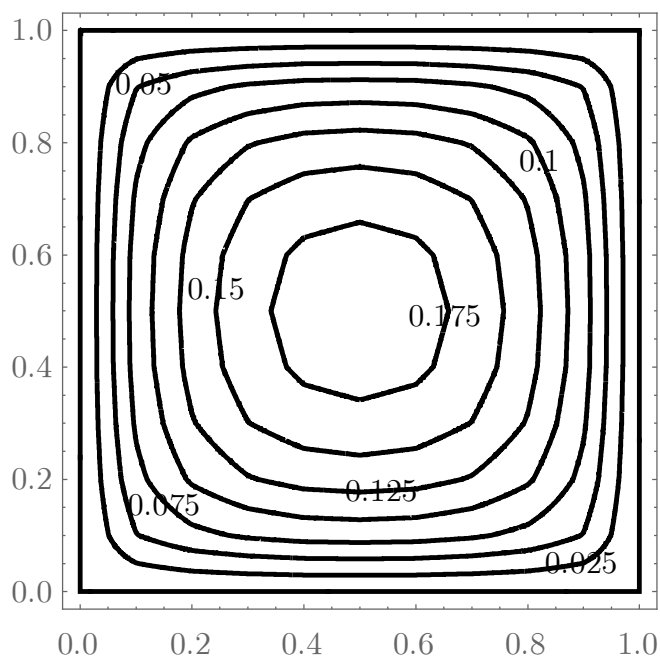


Рисунок Г.53 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному квадраті, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

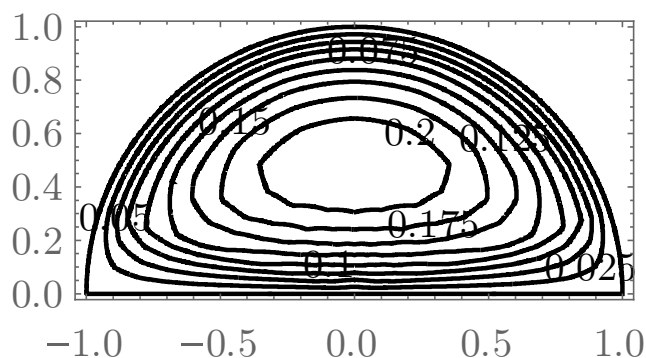
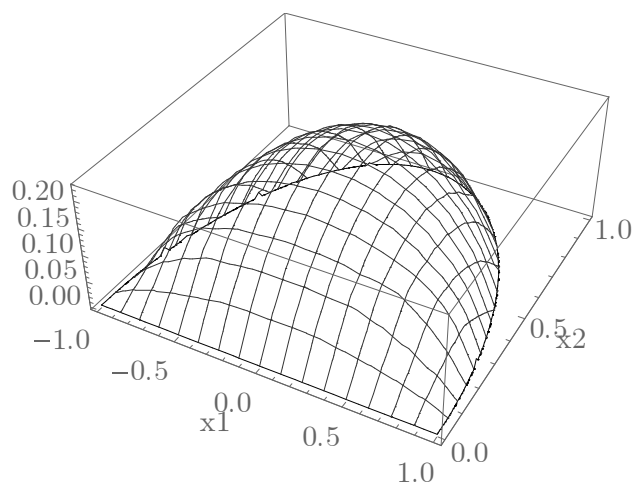


Рисунок Г.54 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у половині одиничного кола, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Рисунок Г.55 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у половині одиничного кола, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

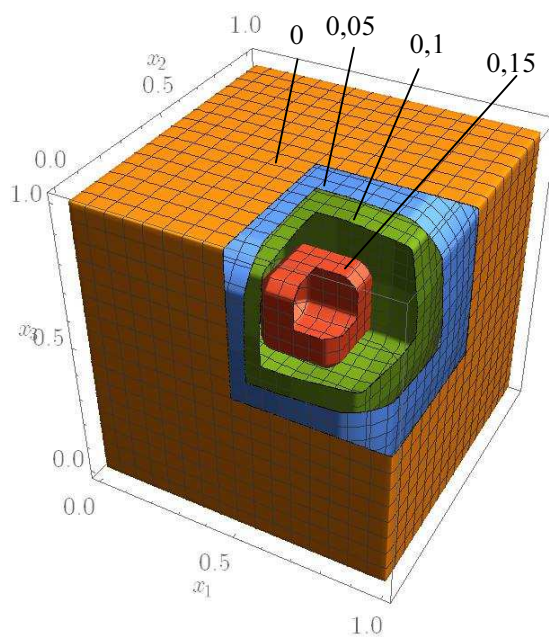


Рисунок Г.56 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному кубі, при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.43 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0499	0,0697	0,0806	0,0867	0,0882
0,2	0	0,0697	0,1064	0,1272	0,1381	0,1415
0,3	0	0,0806	0,1272	0,1550	0,1699	0,1746
0,4	0	0,0867	0,1381	0,1699	0,1876	0,1929
0,5	0	0,0882	0,1415	0,1746	0,1929	0,1985

Таблиця Г.44 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0555	0,0977	0,1305	0,1537	0,1663	0,1675	0,1551	0,1270	0,0787	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0890	0,1498	0,1912	0,2154	0,2230	0,2149	0,1905	0,1492	0,0884	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,1010	0,1671	0,2098	0,2329	0,2379	0,2266	0,1988	0,1545	0,0918	0

Таблиця Г.45 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.64) – (4.66), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3 = 0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0105	0,0210	0,0224	0,0238	0,0238
	$x_2 = 0,2$	0	0,0210	0,0419	0,0447	0,0475	0,0475
	$x_2 = 0,3$	0	0,0224	0,0447	0,0490	0,0533	0,0533
	$x_2 = 0,4$	0	0,0237	0,0475	0,0533	0,0591	0,0591
	$x_2 = 0,5$	0	0,0237	0,0475	0,0533	0,0591	0,0591
$x_3 = 0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0210	0,0419	0,0447	0,0475	0,0475
	$x_2 = 0,2$	0	0,0419	0,0839	0,0895	0,0951	0,0951
	$x_2 = 0,3$	0	0,0447	0,0894	0,0980	0,1067	0,1067
	$x_2 = 0,4$	0	0,0475	0,0949	0,1066	0,1183	0,1183
	$x_2 = 0,5$	0	0,0475	0,0949	0,1066	0,1183	0,1183
$x_3 = 0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0224	0,0447	0,0491	0,0534	0,0534
	$x_2 = 0,2$	0	0,0447	0,0895	0,0981	0,1068	0,1068
	$x_2 = 0,3$	0	0,0490	0,0980	0,1098	0,1216	0,1216
	$x_2 = 0,4$	0	0,0533	0,1066	0,1215	0,1364	0,1364
	$x_2 = 0,5$	0	0,0533	0,1066	0,1215	0,1364	0,1364
$x_3 = 0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0238	0,0475	0,0534	0,0592	0,0592
	$x_2 = 0,2$	0	0,0475	0,0951	0,1068	0,1185	0,1185
	$x_2 = 0,3$	0	0,0533	0,1067	0,1216	0,1365	0,1365
	$x_2 = 0,4$	0	0,0591	0,1183	0,1364	0,1545	0,1545
	$x_2 = 0,5$	0	0,0591	0,1183	0,1364	0,1545	0,1545
$x_3 = 0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0238	0,0475	0,0534	0,0592	0,0592
	$x_2 = 0,2$	0	0,0475	0,0951	0,1068	0,1185	0,1185
	$x_2 = 0,3$	0	0,0533	0,1067	0,1216	0,1365	0,1365
	$x_2 = 0,4$	0	0,0591	0,1183	0,1364	0,1545	0,1545
	$x_2 = 0,5$	0	0,0591	0,1183	0,1364	0,1545	0,1545

Таблиця Г.46 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0490	0,0682	0,0785	0,0843	0,0857
0,2	0	0,0682	0,1034	0,1232	0,1334	0,1366
0,3	0	0,0785	0,1232	0,1495	0,1635	0,1679
0,4	0	0,0843	0,1334	0,1635	0,1802	0,1851
0,5	0	0,0857	0,1366	0,1679	0,1851	0,1903

Таблиця Г.47 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0535	0,0938	0,1249	0,1471	0,1591	0,1605	0,1491	0,1227	0,0765	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0855	0,1430	0,1818	0,2043	0,2114	0,2040	0,1814	0,1429	0,0853	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,0970	0,1592	0,1989	0,2203	0,2249	0,2146	0,1889	0,1476	0,0884	0

Таблиця Г.48 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.67) – (4.69), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $q = 0,5$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3 = 0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0103	0,0206	0,0219	0,0232	0,0232
	$x_2 = 0,2$	0	0,0206	0,0412	0,0438	0,0464	0,0464
	$x_2 = 0,3$	0	0,0219	0,0437	0,0478	0,0519	0,0519
	$x_2 = 0,4$	0	0,0232	0,0463	0,0519	0,0575	0,0575
	$x_2 = 0,5$	0	0,0232	0,0463	0,0519	0,0575	0,0575
$x_3 = 0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0206	0,0412	0,0438	0,0464	0,0464
	$x_2 = 0,2$	0	0,0412	0,0823	0,0875	0,0928	0,0928
	$x_2 = 0,3$	0	0,0437	0,0875	0,0957	0,1038	0,1038
	$x_2 = 0,4$	0	0,0463	0,0926	0,1038	0,1149	0,1149
	$x_2 = 0,5$	0	0,0463	0,0926	0,1038	0,1149	0,1149
$x_3 = 0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0219	0,0438	0,0479	0,0520	0,0520
	$x_2 = 0,2$	0	0,0438	0,0875	0,0957	0,1039	0,1039
	$x_2 = 0,3$	0	0,0478	0,0957	0,1069	0,1180	0,1180
	$x_2 = 0,4$	0	0,0519	0,1038	0,1180	0,1322	0,1322
	$x_2 = 0,5$	0	0,0519	0,1038	0,1180	0,1322	0,1322
$x_3 = 0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0232	0,0464	0,0520	0,0575	0,0575
	$x_2 = 0,2$	0	0,0464	0,0928	0,1039	0,1151	0,1151
	$x_2 = 0,3$	0	0,0519	0,1038	0,1180	0,1322	0,1322
	$x_2 = 0,4$	0	0,0575	0,1149	0,1322	0,1494	0,1494
	$x_2 = 0,5$	0	0,0575	0,1149	0,1322	0,1494	0,1494
$x_3 = 0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0232	0,0464	0,0520	0,0575	0,0575
	$x_2 = 0,2$	0	0,0464	0,0928	0,1039	0,1151	0,1151
	$x_2 = 0,3$	0	0,0519	0,1038	0,1180	0,1322	0,1322
	$x_2 = 0,4$	0	0,0575	0,1149	0,1322	0,1494	0,1494
	$x_2 = 0,5$	0	0,0575	0,1149	0,1322	0,1494	0,1494

Таблиця Г.49 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.83) – (4.85) при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,96296	2,04988	3	1,0009	1,90920	2,03322	4	0,9902	1,85814	2,01623	4	0,9790
0,2	1,97805	2,13677	4	1,0128	1,92504	2,12814	4	1,0034	1,87469	2,11983	5	0,9937
0,3	1,98324	2,24555	5	1,0242	1,92939	2,24674	5	1,0161	1,87792	2,24913	6	1,0077
0,4	1,97396	2,39022	6	1,0353	1,91710	2,40460	6	1,0281	1,86208	2,42160	7	1,0209
0,5	1,94249	2,59789	7	1,0459	1,87958	2,63212	8	1,0397	1,81753	2,67163	9	1,0335
0,6	1,87562	2,92789	8	1,0562	1,80217	2,99654	10	1,0509	1,72795	3,07634	11	1,0455
0,7	1,75071	3,53506	10	1,0663	1,66028	3,67586	12	1,0617	1,56655	3,84380	14	1,0572
0,8	1,53362	4,94689	13	1,0760	1,41892	5,28808	15	1,0722	1,29757	5,71695	17	1,0684
0,9	1,20569	10,0777	16	1,0856	1,06817	11,3104	19	1,0824	0,92231	13,0087	22	1,0792
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,80914	1,99878	5	0,9674	1,76178	1,98078	6	0,9551	1,71581	1,96209	6	0,9423
0,2	1,82633	2,11185	6	0,9837	1,77953	2,10420	7	0,9732	1,73399	2,09687	7	0,9622
0,3	1,82813	2,25292	7	0,9990	1,77952	2,25833	8	0,9900	1,73170	2,2656	9	0,9807
0,4	1,80808	2,44177	8	1,0134	1,75444	2,46579	10	1,0057	1,70068	2,49448	11	0,9978
0,5	1,75530	2,71776	10	1,0271	1,69205	2,77223	12	1,0205	1,62699	2,83735	14	1,0138
0,6	1,65161	3,17065	13	1,0401	1,57190	3,28414	15	1,0345	1,48762	3,42348	17	1,0289
0,7	1,46768	4,04907	16	1,0526	1,36188	4,30685	18	1,0479	1,24744	4,64104	22	1,0432
0,8	1,16725	6,27719	20	1,0645	1,02588	7,04347	24	1,0607	0,87206	8,15306	29	1,0568
0,9	0,76644	15,5121	27	1,0761	0,60030	19,5505	32	1,0729	0,42685	26,9617	40	1,0698
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,67113	1,94257	7	0,9288	1,62772	1,92210	8	0,9146	1,58569	1,90050	9	0,8996
0,2	1,68957	2,08986	8	0,9508	1,64622	2,08314	9	0,9389	1,60401	2,07668	10	0,9264
0,3	1,68447	2,27505	10	0,9710	1,63768	2,28704	12	0,9609	1,59129	2,30203	13	0,9504
0,4	1,64638	2,52894	13	0,9896	1,59122	2,57061	14	0,9811	1,53492	2,62150	16	0,9723
0,5	1,55940	2,91633	16	1,0069	1,48857	3,01380	18	0,9998	1,41367	3,13692	21	0,9924
0,6	1,39754	3,59867	20	1,0231	1,30034	3,82562	23	1,0172	1,19436	4,13191	27	1,0111
0,7	1,12276	5,09137	26	1,0384	0,98643	5,72954	31	1,0334	0,83712	6,70163	38	1,0284
0,8	0,70600	9,88240	35	1,0528	0,53122	12,8608	44	1,0488	0,35638	18,8202	58	1,0447
0,9	0,25599	43,5620	52	1,0666	0,11038	95,7651	70	1,0634	0,02375	407,200	104	1,0601



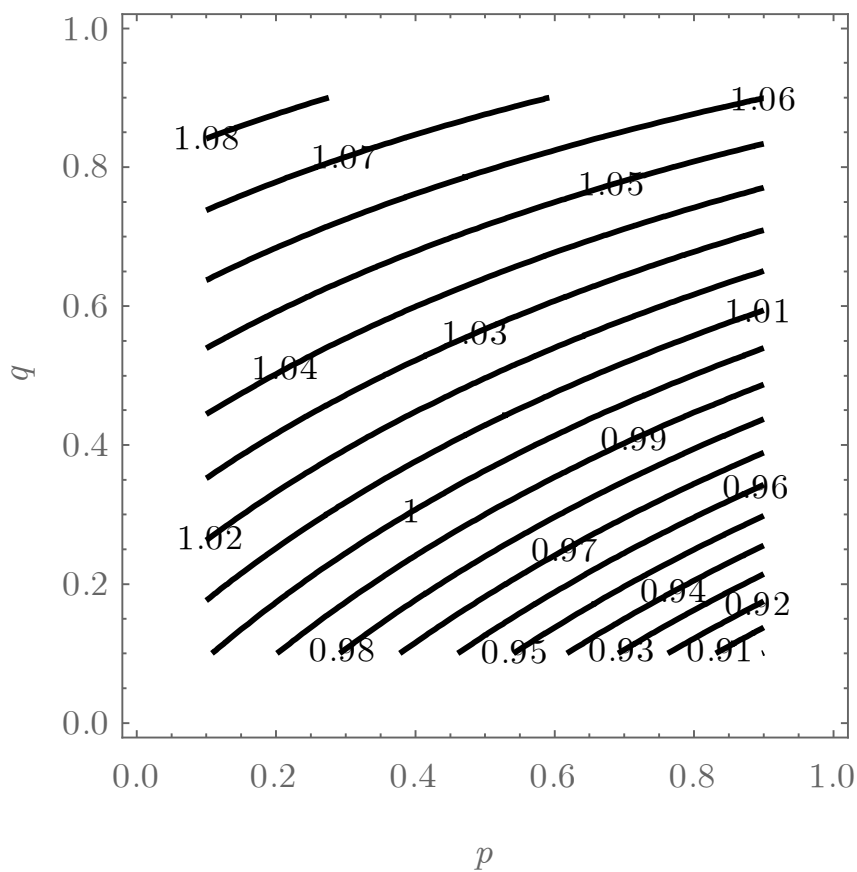


Рисунок Г.57 – Лінії рівня норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.83) – (4.85) в залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

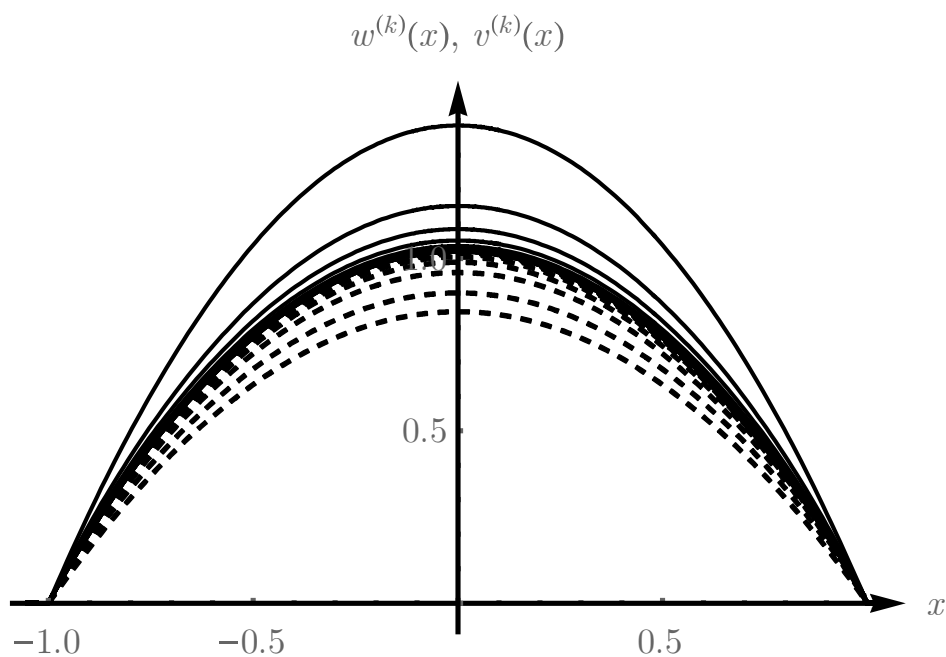


Рисунок Г.58 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.83) – (4.85) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

Таблиця Г.50 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.83) – (4.85) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	1,38611	1,37225	1,33067	1,26136	1,16434	1,03959	0,88711	0,70692	0,49900	0,26336	0
$w^{(1)}(x_i)$	1,15281	1,14149	1,10753	1,05093	0,97171	0,86982	0,74518	0,59749	0,42610	0,22929	0
$w^{(2)}(x_i)$	1,08560	1,07497	1,04306	0,98987	0,91539	0,81958	0,70229	0,56323	0,40175	0,21618	0
$w^{(3)}(x_i)$	1,05248	1,04216	1,01122	0,95965	0,88744	0,79454	0,68082	0,54600	0,38944	0,20954	0
$w^{(4)}(x_i)$	1,03638	1,02622	0,99575	0,94497	0,87387	0,78239	0,67041	0,53765	0,38349	0,20634	0
$w^{(5)}(x_i)$	1,02841	1,01833	0,98810	0,93771	0,86715	0,77637	0,66526	0,53352	0,38054	0,20476	0
$w^{(6)}(x_i)$	1,02445	1,01441	0,98430	0,93410	0,86381	0,77338	0,66269	0,53147	0,37907	0,20397	0
$w^{(7)}(x_i)$	1,02248	1,01246	0,98240	0,93230	0,86215	0,77189	0,66142	0,53044	0,37834	0,20358	0
$w^{(8)}(x_i)$	1,02149	1,01148	0,98145	0,93140	0,86132	0,77115	0,66078	0,52993	0,37798	0,20338	0
$w^{(9)}(x_i)$	1,02100	1,01100	0,98098	0,93095	0,86090	0,77078	0,66046	0,52968	0,37780	0,20328	0
$w^{(10)}(x_i)$	1,02075	1,01075	0,98074	0,93073	0,86069	0,77059	0,66030	0,52955	0,37771	0,20323	0
$w^{(11)}(x_i)$	1,02063	1,01063	0,98063	0,93062	0,86059	0,77050	0,66022	0,52949	0,37766	0,20321	0
$w^{(12)}(x_i)$	1,02057	1,01057	0,98057	0,93056	0,86054	0,77045	0,66018	0,52945	0,37764	0,20320	0
$u^{(12)}(x_i)$	1,02052	1,01051	0,98051	0,930501	0,86049	0,77041	0,66014	0,52942	0,37762	0,20318	0
$v^{(12)}(x_i)$	1,02045	1,01045	0,98045	0,93045	0,86043	0,77036	0,66010	0,52939	0,37759	0,20317	0
$v^{(11)}(x_i)$	1,02039	1,01039	0,98039	0,93039	0,86038	0,77031	0,66006	0,52936	0,37757	0,20316	0
$v^{(10)}(x_i)$	1,02026	1,01026	0,98027	0,93028	0,86028	0,77022	0,65998	0,52929	0,37752	0,20313	0
$v^{(9)}(x_i)$	1,02002	1,01002	0,98003	0,93006	0,86007	0,77003	0,65982	0,52917	0,37743	0,20308	0
$v^{(8)}(x_i)$	1,01953	1,00953	0,97956	0,92961	0,85966	0,76966	0,65951	0,52891	0,37725	0,20299	0
$v^{(7)}(x_i)$	1,01854	1,00856	0,97862	0,92871	0,85883	0,76892	0,65887	0,52840	0,37689	0,20279	0
$v^{(6)}(x_i)$	1,01658	1,00662	0,97673	0,92692	0,85717	0,76744	0,65760	0,52738	0,37616	0,20240	0
$v^{(5)}(x_i)$	1,01267	1,00274	0,97297	0,92335	0,85387	0,76449	0,65507	0,52535	0,37471	0,20162	0
$v^{(4)}(x_i)$	1,00489	0,99504	0,96550	0,91626	0,84731	0,75861	0,65004	0,52132	0,37184	0,20007	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,98949	0,97979	0,95070	0,90222	0,83433	0,74699	0,64007	0,51333	0,36613	0,19700	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,95955	0,95015	0,92194	0,87493	0,80910	0,72441	0,62074	0,49784	0,35510	0,19108	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,90064	0,89179	0,86526	0,82104	0,75915	0,67955	0,58217	0,46679	0,33289	0,17913	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,84602	0,83756	0,81218	0,76988	0,71066	0,63452	0,54146	0,43147	0,30457	0,16074	0

Таблиця Г.51 – Значення наближених розв’язків задачі (4.83) – (4.85) при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком 0,1

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,1$										
0,1	1,0009	0,9909	0,9609	0,9109	0,8409	0,7509	0,6408	0,5108	0,3607	0,1905	0
0,2	1,0128	1,0028	0,9728	0,9228	0,8527	0,7624	0,6518	0,5208	0,3689	0,1958	0
0,3	1,0242	1,0143	0,9843	0,9343	0,8642	0,7737	0,6627	0,5308	0,3774	0,2014	0
0,4	1,0353	1,0253	0,9954	0,9455	0,8754	0,7849	0,6736	0,5410	0,3861	0,2073	0
0,5	1,0459	1,0360	1,0062	0,9564	0,8865	0,7961	0,6845	0,5513	0,3951	0,2137	0
0,6	1,0562	1,0464	1,0167	0,9671	0,8973	0,8070	0,6955	0,5618	0,4045	0,2205	0
0,7	1,0663	1,0564	1,0269	0,9776	0,9081	0,8179	0,7065	0,5725	0,4142	0,2278	0
0,8	1,0760	1,0663	1,0370	0,9879	0,9187	0,8288	0,7175	0,5834	0,4243	0,2356	0
0,9	1,0856	1,0759	1,0468	0,9980	0,9291	0,8397	0,7286	0,5945	0,4348	0,2440	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,9902	0,9802	0,9502	0,9003	0,8305	0,7408	0,6315	0,5025	0,3542	0,1866	0
0,2	1,0034	0,9934	0,9634	0,9134	0,8434	0,7534	0,6434	0,5132	0,3629	0,1921	0
0,3	1,0161	1,0061	0,9761	0,9261	0,85560	0,7657	0,6551	0,5239	0,3718	0,1980	0
0,4	1,0281	1,0182	0,9882	0,9382	0,8681	0,7777	0,6667	0,5347	0,3810	0,2042	0
0,5	1,0397	1,0298	0,9999	0,9501	0,8800	0,7896	0,6783	0,5456	0,3904	0,2108	0
0,6	1,0509	1,0410	1,0113	0,9615	0,8916	0,8012	0,6898	0,5566	0,4002	0,2178	0
0,7	1,0617	1,0519	1,0222	0,9727	0,9030	0,8128	0,7014	0,5678	0,4103	0,2253	0
0,8	1,0722	1,0624	1,0329	0,9837	0,9143	0,8243	0,7130	0,5791	0,4207	0,2334	0
0,9	1,0824	1,0727	1,0434	0,9944	0,9253	0,8357	0,7246	0,5906	0,4315	0,2419	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,9790	0,9691	0,9391	0,8894	0,8198	0,7306	0,6221	0,4943	0,3478	0,1828	0
0,2	0,9937	0,9837	0,9538	0,9038	0,8340	0,7443	0,6349	0,5058	0,3571	0,1887	0
0,3	1,0077	0,9977	0,9677	0,9176	0,8476	0,7576	0,6475	0,5172	0,3665	0,1948	0
0,4	1,0209	1,0109	0,9809	0,9309	0,8608	0,7705	0,6599	0,5286	0,3761	0,2013	0
0,5	1,0335	1,0235	0,9936	0,9436	0,8735	0,7832	0,6722	0,5401	0,3860	0,2081	0
0,6	1,0455	1,0356	1,0058	0,9559	0,8860	0,7956	0,6843	0,5516	0,3961	0,2153	0
0,7	1,0572	1,0473	1,0175	0,9679	0,8981	0,8078	0,6965	0,5633	0,4066	0,2231	0
0,8	1,0684	1,0585	1,0290	0,9795	0,9099	0,8198	0,7086	0,5750	0,4173	0,2313	0
0,9	1,0792	1,0695	1,0400	0,9909	0,9216	0,8318	0,7206	0,5869	0,4284	0,2400	0

Продовження таблиці Г.51

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,9674	0,9574	0,9276	0,8780	0,8088	0,7202	0,6125	0,4861	0,3415	0,1792	0
0,2	0,9837	0,9737	0,9438	0,8940	0,8244	0,7351	0,6264	0,4984	0,3514	0,1854	0
0,3	0,9990	0,9890	0,9590	0,9090	0,8392	0,7494	0,6399	0,5106	0,3613	0,1918	0
0,4	1,0134	1,0034	0,9734	0,9234	0,8534	0,7633	0,6531	0,5226	0,3714	0,1985	0
0,5	1,0271	1,0171	0,9871	0,9371	0,8670	0,7768	0,6661	0,5347	0,3817	0,2056	0
0,6	1,0401	1,0301	1,0002	0,9503	0,8803	0,7899	0,6790	0,5468	0,3922	0,2130	0
0,7	1,0526	1,0426	1,0128	0,9630	0,8931	0,8028	0,6917	0,5589	0,4030	0,2210	0
0,8	1,0645	1,0547	1,0250	0,9754	0,9056	0,8155	0,7043	0,5711	0,4141	0,2294	0
0,9	1,0761	1,0662	1,0367	0,9873	0,9179	0,8279	0,7168	0,5834	0,4255	0,2383	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,9551	0,9452	0,9156	0,8662	0,7975	0,7095	0,6028	0,4779	0,3353	0,1757	0
0,2	0,9732	0,9632	0,9334	0,8837	0,8145	0,7257	0,6178	0,4911	0,3458	0,1822	0
0,3	0,9900	0,9800	0,9500	0,9002	0,8305	0,7412	0,6323	0,5040	0,3563	0,1889	0
0,4	1,0057	0,9957	0,9657	0,9157	0,8458	0,7561	0,6464	0,5168	0,3669	0,1959	0
0,5	1,0205	1,0105	0,9805	0,9305	0,8605	0,7704	0,6601	0,5294	0,3776	0,2032	0
0,6	1,0345	1,0246	0,9946	0,9446	0,8746	0,7843	0,6736	0,5420	0,3885	0,2109	0
0,7	1,0479	1,0379	1,0081	0,9582	0,8882	0,7979	0,6869	0,5547	0,3997	0,2190	0
0,8	1,0607	1,0508	1,0210	0,9712	0,9014	0,8112	0,7001	0,5673	0,4111	0,2276	0
0,9	1,0729	1,0630	1,0334	0,9838	0,9142	0,8242	0,7131	0,5800	0,4228	0,2367	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,9423	0,9324	0,9029	0,8539	0,7857	0,6986	0,5930	0,4696	0,3291	0,1723	0
0,2	0,9622	0,9523	0,9226	0,8732	0,8043	0,7162	0,6092	0,4838	0,3403	0,1791	0
0,3	0,9807	0,9707	0,9408	0,8911	0,8217	0,7329	0,6247	0,4975	0,3514	0,1861	0
0,4	0,9978	0,9878	0,9578	0,9079	0,8382	0,7488	0,6397	0,5110	0,3625	0,1934	0
0,5	1,0138	1,0038	0,9738	0,9238	0,8539	0,7640	0,6542	0,5243	0,3737	0,2009	0
0,6	1,0289	1,0189	0,9889	0,9389	0,8689	0,7788	0,6684	0,5374	0,3850	0,2088	0
0,7	1,0432	1,0332	1,0032	0,9533	0,8833	0,7930	0,6823	0,5505	0,3965	0,2172	0
0,8	1,0568	1,0468	1,0169	0,9671	0,8972	0,8069	0,6960	0,5636	0,4082	0,2259	0
0,9	1,0698	1,0598	1,0301	0,9804	0,9106	0,8205	0,7095	0,5767	0,4202	0,2352	0

Кінець таблиці Г.51

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,9288	0,9190	0,8897	0,8411	0,7735	0,6873	0,5830	0,4613	0,3230	0,1689	0
0,2	0,9508	0,9409	0,9114	0,8622	0,7938	0,7064	0,6005	0,4764	0,3349	0,1762	0
0,3	0,9710	0,9610	0,9313	0,8818	0,8127	0,7244	0,6171	0,4911	0,3466	0,1835	0
0,4	0,9896	0,9796	0,9497	0,8999	0,8304	0,7414	0,6330	0,5053	0,3582	0,1910	0
0,5	1,0069	0,9969	0,9669	0,9170	0,8472	0,7576	0,6483	0,5192	0,3698	0,1988	0
0,6	1,0231	1,0131	0,9831	0,9330	0,8631	0,7732	0,6632	0,5329	0,3816	0,2069	0
0,7	1,0384	1,0284	0,9983	0,9483	0,8783	0,7882	0,6778	0,5466	0,3934	0,2154	0
0,8	1,0528	1,0428	1,0129	0,9629	0,8929	0,8027	0,6920	0,5601	0,4054	0,2244	0
0,9	1,0666	1,0566	1,0268	0,9769	0,9071	0,8169	0,7060	0,5736	0,4177	0,2338	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,9146	0,9049	0,8759	0,8277	0,7608	0,6756	0,5727	0,4528	0,3169	0,1657	0
0,2	0,9389	0,9290	0,8997	0,8509	0,7831	0,6965	0,5916	0,4691	0,3295	0,1733	0
0,3	0,9609	0,9510	0,9214	0,8721	0,8035	0,7158	0,6094	0,4846	0,3418	0,1809	0
0,4	0,9811	0,9712	0,9413	0,8917	0,8225	0,7340	0,6263	0,4996	0,3540	0,1887	0
0,5	0,9998	0,9898	0,9598	0,9100	0,8404	0,7512	0,6425	0,5142	0,3661	0,1968	0
0,6	1,0172	1,0071	0,9771	0,9271	0,8573	0,7676	0,6581	0,5285	0,3782	0,2051	0
0,7	1,0334	1,0234	0,9934	0,9433	0,8733	0,7834	0,6733	0,5427	0,3905	0,2138	0
0,8	1,0488	1,0388	1,0088	0,9588	0,8887	0,7986	0,6881	0,5566	0,4028	0,2229	0
0,9	1,0634	1,0534	1,0234	0,9735	0,9035	0,8133	0,7026	0,5705	0,4153	0,2324	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,8996	0,8901	0,8614	0,8138	0,7477	0,6636	0,5622	0,4443	0,3107	0,1624	0
0,2	0,9264	0,9166	0,8875	0,8391	0,7719	0,6862	0,5826	0,4617	0,3242	0,1704	0
0,3	0,9504	0,9406	0,9111	0,8621	0,7940	0,7070	0,6016	0,4782	0,3372	0,1784	0
0,4	0,9723	0,9624	0,9327	0,8833	0,8144	0,7264	0,6195	0,4940	0,3499	0,1865	0
0,5	0,9924	0,9825	0,9526	0,9028	0,8335	0,7447	0,6366	0,5093	0,3625	0,1948	0
0,6	1,0111	1,0010	0,9710	0,9211	0,8514	0,7620	0,6530	0,5242	0,3750	0,2034	0
0,7	1,0284	1,0184	0,9883	0,9383	0,8683	0,7786	0,6688	0,5389	0,3876	0,2123	0
0,8	1,0447	1,0347	1,0046	0,9545	0,8845	0,7945	0,6842	0,5533	0,4003	0,2215	0
0,9	1,0601	1,0501	1,0201	0,9700	0,8999	0,8098	0,6993	0,5676	0,4131	0,2312	0

Таблиця Г.52 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.86) – (4.88) при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,95693	2,06625	3	0,7053	1,86945	2,02040	3	0,6872	1,78859	1,97384	4	0,6687
0,2	2,00251	2,20971	4	0,7257	1,91807	2,17669	4	0,7096	1,84022	2,14339	5	0,6932
0,3	2,03205	2,38658	5	0,7450	1,94800	2,36905	5	0,7307	1,87026	2,35189	6	0,7163
0,4	2,038000	2,61947	6	0,7634	1,95085	2,62291	7	0,7507	1,86943	2,62801	7	0,7379
0,5	2,00835	2,95376	7	0,7810	1,91325	2,98989	8	0,7696	1,82290	3,03078	9	0,7582
0,6	1,92386	3,49276	9	0,7976	1,81404	3,58953	10	0,7875	1,70740	3,69981	12	0,7773
0,7	1,75601	4,51708	11	0,8134	1,62276	4,75487	13	0,8043	1,49036	5,03688	15	0,7952
0,8	1,47705	7,01282	14	0,8283	1,31385	7,69731	16	0,8203	1,14902	8,57778	19	0,8121
0,9	1,11856	16,3751	18	0,8426	0,93714	19,2431	22	0,8352	0,75514	23,4375	26	0,8280
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,71397	1,92671	4	0,6501	1,64540	1,87922	5	0,6314	1,58281	1,83164	5	0,6128
0,2	1,76850	2,10983	6	0,6768	1,70266	2,07603	6	0,6604	1,64259	2,04202	7	0,6441
0,3	1,79835	2,33504	7	0,7018	1,73200	2,31838	8	0,6873	1,67110	2,30176	8	0,6730
0,4	1,79325	2,63476	8	0,7250	1,72209	2,64307	9	0,7123	1,65590	2,65272	10	0,6996
0,5	1,73682	3,07689	10	0,7468	1,65483	3,12856	12	0,7354	1,57700	3,18602	13	0,7242
0,6	1,60346	3,82604	13	0,7671	1,50218	3,97090	15	0,7570	1,40384	4,13745	17	0,7470
0,7	1,35845	5,37598	17	0,7862	1,22735	5,78897	19	0,7771	1,09808	6,29810	22	0,7682
0,8	0,98271	9,75004	22	0,8040	0,81657	11,3710	26	0,7959	0,65423	13,7067	31	0,7879
0,9	0,57463	30,0812	31	0,8207	0,40081	41,8039	37	0,8134	0,24334	65,9470	46	0,8062
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	1,52613	1,78430	6	0,5946	1,47525	1,73760	6	0,5768	1,42995	1,69197	6	0,5598
0,2	1,58820	2,00783	7	0,6281	1,53936	1,97354	8	0,6126	1,49589	1,93927	8	0,5976
0,3	1,61562	2,28499	9	0,6589	1,56549	2,26786	10	0,6451	1,52061	2,25016	10	0,6318
0,4	1,59471	2,66342	11	0,6871	1,53859	2,67478	12	0,6749	1,48755	2,68638	13	0,6631
0,5	1,50350	3,24941	14	0,7131	1,43454	3,31886	16	0,7023	1,37030	3,39454	17	0,6917
0,6	1,30890	4,32926	19	0,7371	1,21790	4,55095	21	0,7274	1,13115	4,80922	23	0,7179
0,7	0,97217	6,93361	26	0,7593	0,85134	7,73953	29	0,7506	0,73674	8,78849	34	0,7421
0,8	0,50150	17,2223	37	0,7799	0,36550	22,7675	44	0,7721	0,25184	32,0824	53	0,7644
0,9	0,11700	128,7880	58	0,7991	0,03761	364,551	76	0,7920	0,00656	1842,97	103	0,7851

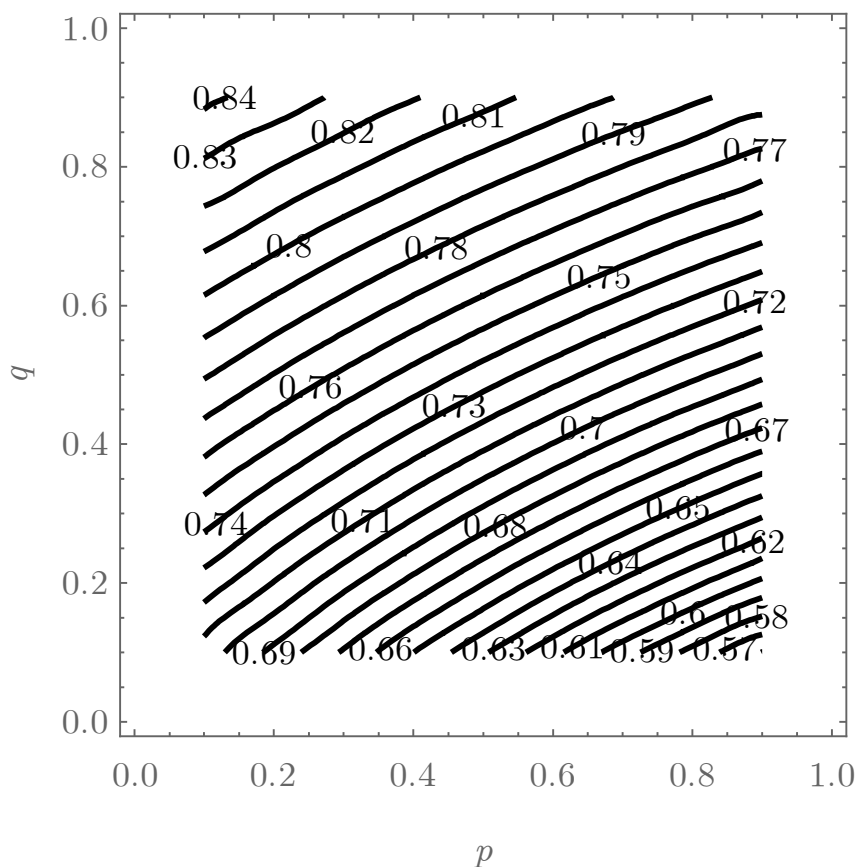


Рисунок Г.59 – Лінії рівня норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.86) – (4.88) в залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

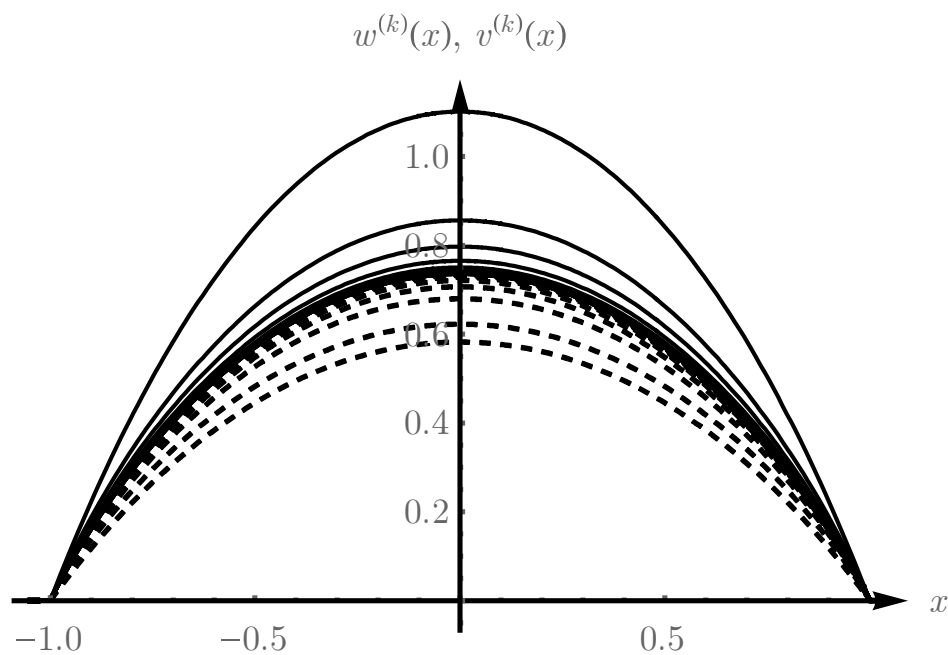


Рисунок Г.60 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.86) – (4.88) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.53 – Значення нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.86) – (4.88) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком 0,1 ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$w^{(0)}(x_i)$	1,10108	1,09094	1,06040	1,00916	0,93671	0,84232	0,72506	0,58373	0,41694	0,22301	0
$w^{(1)}(x_i)$	0,85619	0,84867	0,82600	0,78793	0,73399	0,66348	0,57542	0,46838	0,34029	0,18754	0
$w^{(2)}(x_i)$	0,79713	0,79015	0,76911	0,73375	0,68363	0,61807	0,53612	0,43643	0,31704	0,17460	0
$w^{(3)}(x_i)$	0,76522	0,75851	0,73830	0,70434	0,65620	0,59324	0,51454	0,41883	0,30421	0,16752	0
$w^{(4)}(x_i)$	0,75025	0,74368	0,72387	0,69057	0,64338	0,58165	0,50450	0,41066	0,29829	0,16426	0
$w^{(5)}(x_i)$	0,74281	0,73630	0,71668	0,68372	0,63699	0,57588	0,49949	0,40658	0,29533	0,16263	0
$w^{(6)}(x_i)$	0,73912	0,73264	0,71313	0,68033	0,63383	0,57302	0,49701	0,40457	0,29386	0,16182	0
$w^{(7)}(x_i)$	0,73729	0,73082	0,71135	0,67864	0,63226	0,57160	0,49578	0,40356	0,29313	0,16142	0
$w^{(8)}(x_i)$	0,73637	0,72992	0,71047	0,67779	0,63147	0,57089	0,49516	0,40306	0,29277	0,16122	0
$w^{(9)}(x_i)$	0,73591	0,72946	0,71003	0,67737	0,63108	0,57053	0,49485	0,40281	0,29258	0,16112	0
$w^{(10)}(x_i)$	0,73568	0,72923	0,70981	0,67716	0,63088	0,57035	0,49470	0,40268	0,29249	0,16107	0
$w^{(11)}(x_i)$	0,73557	0,72912	0,70970	0,67706	0,63079	0,57027	0,49462	0,40262	0,29245	0,16104	0
$w^{(12)}(x_i)$	0,73551	0,72906	0,70964	0,67700	0,63074	0,57022	0,49458	0,40259	0,29243	0,16103	0
$u^{(12)}(x_i)$	0,73544	0,72899	0,70957	0,67693	0,63067	0,57016	0,49453	0,40254	0,29238	0,16100	0
$v^{(12)}(x_i)$	0,73540	0,72895	0,70953	0,67690	0,63064	0,57013	0,49451	0,40253	0,29238	0,16100	0
$v^{(11)}(x_i)$	0,73534	0,72889	0,70948	0,67685	0,63059	0,57009	0,49447	0,40250	0,29236	0,16099	0
$v^{(10)}(x_i)$	0,73523	0,72878	0,70937	0,67674	0,63049	0,57000	0,49439	0,40243	0,29231	0,16097	0
$v^{(9)}(x_i)$	0,73500	0,72855	0,70915	0,67653	0,63030	0,56982	0,49424	0,40231	0,29222	0,16092	0
$v^{(8)}(x_i)$	0,73454	0,72810	0,70870	0,67611	0,62990	0,56947	0,49393	0,40206	0,29204	0,16082	0
$v^{(7)}(x_i)$	0,73363	0,72720	0,70782	0,67527	0,62912	0,56876	0,49331	0,40156	0,29168	0,16062	0
$v^{(6)}(x_i)$	0,73181	0,72539	0,70607	0,67359	0,62756	0,56735	0,49209	0,40056	0,29095	0,16022	0
$v^{(5)}(x_i)$	0,72817	0,72179	0,70256	0,67025	0,62444	0,56453	0,48964	0,39857	0,28951	0,15942	0
$v^{(4)}(x_i)$	0,72098	0,71466	0,69562	0,66363	0,61827	0,55895	0,48481	0,39464	0,28665	0,15785	0
$v^{(3)}(x_i)$	0,70666	0,70047	0,68180	0,65044	0,60599	0,54784	0,47517	0,38678	0,28093	0,15470	0
$v^{(2)}(x_i)$	0,67980	0,67384	0,65590	0,62575	0,58301	0,52710	0,45721	0,37219	0,27037	0,14890	0
$v^{(1)}(x_i)$	0,62269	0,61722	0,60074	0,57305	0,53382	0,48254	0,41849	0,34065	0,24749	0,13640	0
$v^{(0)}(x_i)$	0,58241	0,57705	0,56089	0,53379	0,49547	0,44554	0,38351	0,30876	0,22054	0,11796	0



Таблиця Г.54 – Значення наближених розв’язків задачі (4.86) – (4.88) при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  на сітці з кроком 0,1 ( $\kappa = 1$ )

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,1$										
0,1	0,7053	0,6988	0,6793	0,6466	0,6003	0,5399	0,4649	0,3745	0,2677	0,1434	0
0,2	0,7257	0,7191	0,6994	0,6662	0,6193	0,5580	0,4816	0,3891	0,2793	0,1505	0
0,3	0,7450	0,7384	0,7185	0,6851	0,6377	0,5756	0,4980	0,4037	0,2911	0,1580	0
0,4	0,7634	0,7568	0,7368	0,7032	0,6554	0,5927	0,5141	0,4182	0,3031	0,1659	0
0,5	0,7810	0,7744	0,7543	0,7206	0,6726	0,6095	0,5301	0,4328	0,3154	0,1741	0
0,6	0,7976	0,7910	0,7709	0,7372	0,6891	0,6256	0,5457	0,4473	0,3278	0,1828	0
0,7	0,8134	0,8068	0,7868	0,7531	0,7049	0,6414	0,5610	0,4617	0,3404	0,1919	0
0,8	0,8283	0,8217	0,8018	0,7682	0,7202	0,6566	0,5760	0,4760	0,3532	0,2013	0
0,9	0,8426	0,8360	0,8162	0,7828	0,7349	0,6715	0,5907	0,4903	0,3662	0,2113	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,6872	0,6808	0,6616	0,6293	0,5837	0,5244	0,4509	0,3625	0,2586	0,1381	0
0,2	0,7096	0,7031	0,6836	0,6508	0,6045	0,5441	0,4690	0,3783	0,2710	0,1457	0
0,3	0,7307	0,7242	0,7045	0,6714	0,6244	0,5631	0,4867	0,3939	0,2836	0,1536	0
0,4	0,7507	0,7441	0,7243	0,6909	0,6436	0,5816	0,5039	0,4094	0,2963	0,1618	0
0,5	0,7696	0,7630	0,7431	0,7096	0,6619	0,5993	0,5208	0,4248	0,3091	0,1704	0
0,6	0,7875	0,7808	0,7609	0,7273	0,6795	0,6165	0,5373	0,4400	0,3221	0,1794	0
0,7	0,8043	0,7977	0,7778	0,7442	0,6963	0,6332	0,5534	0,4551	0,3353	0,1888	0
0,8	0,8203	0,8137	0,7939	0,7604	0,7125	0,6493	0,5692	0,4701	0,3486	0,1986	0
0,9	0,8352	0,8287	0,8090	0,7756	0,7279	0,6647	0,5845	0,4848	0,3619	0,2088	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,6687	0,6625	0,6435	0,6118	0,5670	0,5089	0,4371	0,3509	0,2498	0,1331	0
0,2	0,6932	0,6868	0,6676	0,6353	0,5897	0,5303	0,4566	0,3678	0,2631	0,1412	0
0,3	0,7163	0,7098	0,6903	0,6576	0,6112	0,5508	0,4755	0,3845	0,2764	0,1495	0
0,4	0,7379	0,7314	0,7117	0,6786	0,6318	0,5705	0,4939	0,4009	0,2898	0,1581	0
0,5	0,7582	0,7516	0,7319	0,6986	0,6514	0,5894	0,5118	0,4171	0,3032	0,1671	0
0,6	0,7773	0,7707	0,7509	0,7175	0,6700	0,6076	0,5292	0,4330	0,3168	0,1764	0
0,7	0,7952	0,7887	0,7688	0,7354	0,6878	0,6251	0,5461	0,4488	0,3304	0,1860	0
0,8	0,8121	0,8055	0,7858	0,7524	0,7048	0,6420	0,5625	0,4643	0,3441	0,1961	0
0,9	0,8280	0,8215	0,8018	0,7685	0,7210	0,6582	0,5785	0,4796	0,3579	0,2065	0

Продовження таблиці Г.54

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,6501	0,6439	0,6253	0,5942	0,5504	0,4936	0,4234	0,3395	0,2413	0,1284	0
0,2	0,6768	0,6705	0,6516	0,6198	0,5749	0,5166	0,4444	0,3576	0,2555	0,1369	0
0,3	0,7018	0,6954	0,6761	0,6438	0,5981	0,5386	0,4646	0,3753	0,2696	0,1457	0
0,4	0,7250	0,7186	0,6991	0,6664	0,6201	0,5596	0,4842	0,3927	0,2836	0,1546	0
0,5	0,7468	0,7403	0,7207	0,6877	0,6409	0,5797	0,5030	0,4096	0,2977	0,1639	0
0,6	0,7671	0,7606	0,7409	0,7078	0,6607	0,5989	0,5212	0,4263	0,3117	0,1735	0
0,7	0,7862	0,7796	0,7599	0,7267	0,6794	0,6172	0,5389	0,4427	0,3258	0,1834	0
0,8	0,8040	0,7975	0,7778	0,7446	0,6972	0,6348	0,5560	0,4588	0,3399	0,1937	0
0,9	0,8207	0,8142	0,7945	0,7614	0,7141	0,6517	0,5726	0,4745	0,3541	0,2044	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,6314	0,6253	0,6071	0,5767	0,5339	0,4784	0,4101	0,3285	0,2333	0,1240	0
0,2	0,6604	0,6542	0,6356	0,6044	0,5604	0,5032	0,4326	0,3478	0,2483	0,1329	0
0,3	0,6873	0,6810	0,6620	0,6302	0,5852	0,5267	0,4541	0,3665	0,2631	0,1421	0
0,4	0,7123	0,7059	0,6866	0,6543	0,6086	0,5490	0,4747	0,3848	0,2778	0,1514	0
0,5	0,7354	0,7290	0,7096	0,6769	0,6307	0,5702	0,4945	0,4025	0,2924	0,1610	0
0,6	0,7570	0,7505	0,7310	0,6981	0,6515	0,5903	0,5136	0,4199	0,3069	0,1709	0
0,7	0,7771	0,7706	0,7510	0,7181	0,6712	0,6095	0,5320	0,4369	0,3215	0,1811	0
0,8	0,7959	0,7894	0,7698	0,7368	0,6898	0,6279	0,5497	0,4535	0,3360	0,1916	0
0,9	0,8134	0,8069	0,7874	0,7544	0,7074	0,6454	0,5669	0,4697	0,3505	0,2024	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,6128	0,6069	0,5891	0,5594	0,5176	0,4636	0,3971	0,3179	0,2256	0,1198	0
0,2	0,6441	0,6381	0,6198	0,5892	0,5460	0,4901	0,4211	0,3384	0,2414	0,1292	0
0,3	0,6730	0,6668	0,6481	0,6168	0,5726	0,5151	0,4439	0,3581	0,2569	0,1387	0
0,4	0,6996	0,6933	0,6743	0,6424	0,5974	0,5386	0,4656	0,3772	0,2722	0,1484	0
0,5	0,7242	0,7178	0,6986	0,6663	0,6206	0,5609	0,4863	0,3957	0,2874	0,1583	0
0,6	0,7470	0,7406	0,7212	0,6887	0,6425	0,5820	0,5062	0,4138	0,3024	0,1684	0
0,7	0,7682	0,7617	0,7423	0,7096	0,6631	0,6020	0,5253	0,4313	0,3174	0,1788	0
0,8	0,7879	0,7814	0,7619	0,7291	0,6825	0,6211	0,5437	0,4484	0,3323	0,1896	0
0,9	0,8062	0,7997	0,7803	0,7475	0,7008	0,6392	0,5614	0,4651	0,3471	0,2006	0

Кінець таблиці Г.54

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,5946	0,5888	0,5715	0,5425	0,5018	0,4493	0,3847	0,3078	0,2183	0,1159	0
0,2	0,6281	0,6222	0,6043	0,5743	0,5321	0,4775	0,4100	0,3294	0,2349	0,1258	0
0,3	0,6589	0,6528	0,6344	0,6036	0,5602	0,5038	0,4340	0,3501	0,2511	0,1356	0
0,4	0,6871	0,6809	0,6622	0,6308	0,5864	0,5286	0,4568	0,3700	0,2670	0,1456	0
0,5	0,7131	0,7068	0,6878	0,6559	0,6108	0,5519	0,4784	0,3893	0,2827	0,1558	0
0,6	0,7371	0,7307	0,7116	0,6794	0,6337	0,5739	0,4991	0,4079	0,2982	0,1662	0
0,7	0,7593	0,7529	0,7336	0,7012	0,6552	0,5947	0,5189	0,4260	0,3135	0,1768	0
0,8	0,7799	0,7735	0,7542	0,7216	0,6753	0,6145	0,5378	0,4436	0,3288	0,1877	0
0,9	0,7991	0,7926	0,7733	0,7408	0,6944	0,6333	0,5561	0,4607	0,3439	0,1989	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,5768	0,5712	0,5543	0,5262	0,4866	0,4355	0,3728	0,2982	0,2115	0,1124	0
0,2	0,6126	0,6067	0,5892	0,5599	0,5187	0,4653	0,3995	0,3209	0,2289	0,1226	0
0,3	0,6451	0,6391	0,6211	0,5909	0,5483	0,4930	0,4246	0,3425	0,2457	0,1328	0
0,4	0,6749	0,6688	0,6503	0,6194	0,5758	0,5189	0,4484	0,3632	0,2622	0,1430	0
0,5	0,7023	0,6960	0,6773	0,6458	0,6013	0,5432	0,4709	0,3831	0,2783	0,1535	0
0,6	0,7274	0,7211	0,7021	0,6703	0,6251	0,5661	0,4923	0,4023	0,2942	0,1641	0
0,7	0,7506	0,7443	0,7252	0,6930	0,6474	0,5877	0,5127	0,4209	0,3099	0,1749	0
0,8	0,7721	0,7657	0,7465	0,7143	0,6684	0,6081	0,5322	0,4390	0,3255	0,1860	0
0,9	0,7920	0,7856	0,7664	0,7341	0,6880	0,6274	0,5509	0,4565	0,3409	0,1973	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,5598	0,5544	0,5380	0,5106	0,4721	0,4225	0,3616	0,2893	0,2052	0,1091	0
0,2	0,5976	0,5919	0,5747	0,5461	0,5058	0,4537	0,3896	0,3129	0,2232	0,1196	0
0,3	0,6318	0,6259	0,6082	0,5786	0,5369	0,4827	0,4157	0,3353	0,2406	0,1301	0
0,4	0,6631	0,6570	0,6389	0,6085	0,5655	0,5097	0,4404	0,3568	0,2576	0,1407	0
0,5	0,6917	0,6855	0,6670	0,6360	0,5921	0,5349	0,4637	0,3773	0,2742	0,1513	0
0,6	0,7179	0,7117	0,6929	0,6615	0,6169	0,5586	0,4857	0,3971	0,2905	0,1621	0
0,7	0,7421	0,7358	0,7169	0,6851	0,6400	0,5809	0,5068	0,4162	0,3065	0,1731	0
0,8	0,7644	0,7581	0,7390	0,7070	0,6616	0,6019	0,5268	0,4346	0,3224	0,1844	0
0,9	0,7851	0,7787	0,7597	0,7276	0,6819	0,6218	0,5461	0,4526	0,3381	0,1960	0

Таблиця Г.55 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,97617	1,04969	3	0,5032	0,91136	1,00847	3	0,4808	0,85565	0,96912	4	0,4594
0,2	1,02479	1,17228	4	0,5320	0,96288	1,14107	4	0,5122	0,90975	1,11125	5	0,4934
0,3	1,06134	1,32740	5	0,5603	1,00016	1,30863	5	0,5428	0,94744	1,29080	6	0,5262
0,4	1,07841	1,53732	6	0,5879	1,01508	1,53631	7	0,5724	0,95990	1,53606	8	0,5576
0,5	1,06495	1,84963	8	0,6145	0,99560	1,87883	9	0,6007	0,93411	1,90981	10	0,5876
0,6	1,00517	2,38025	10	0,6402	0,92473	2,47330	11	0,6278	0,85190	2,57432	13	0,6161
0,7	0,88138	3,46802	13	0,6647	0,78442	3,73869	15	0,6537	0,69486	4,05301	17	0,6432
0,8	0,69397	6,37261	17	0,6882	0,58000	7,33611	20	0,6783	0,47362	8,61623	23	0,6688
0,9	0,50244	17,9362	24	0,7105	0,38587	22,7435	28	0,7016	0,27928	30,4326	34	0,6931
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,80828	0,93193	4	0,4394	0,76846	0,89717	4	0,4209	0,73533	0,86506	5	0,4041
0,2	0,86459	1,08285	5	0,4758	0,82661	1,05592	6	0,4594	0,79496	1,03048	6	0,4444
0,3	0,90239	1,27368	7	0,5106	0,86428	1,25709	7	0,4960	0,83235	1,24087	8	0,4826
0,4	0,91220	1,53607	8	0,5437	0,87136	1,53586	9	0,5307	0,83675	1,53499	10	0,5187
0,5	0,88003	1,94169	11	0,5752	0,83292	1,97354	12	0,5636	0,79233	2,00441	13	0,5528
0,6	0,78655	2,68229	14	0,6050	0,72860	2,79565	15	0,5945	0,67789	2,91249	17	0,5848
0,7	0,61316	4,41610	19	0,6332	0,54001	4,83092	21	0,6237	0,47593	5,29756	23	0,6149
0,8	0,37632	10,3612	27	0,6598	0,29030	12,7873	31	0,6512	0,21789	16,1845	35	0,6432
0,9	0,18543	44,0285	40	0,6849	0,10817	71,6099	48	0,6771	0,05163	139,658	58	0,6697
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,70801	0,83575	5	0,3890	0,68562	0,80930	5	0,3757	0,66734	0,78569	5	0,3640
0,2	0,76881	1,00661	6	0,4309	0,74735	0,98435	6	0,4187	0,72981	0,96374	6	0,4080
0,3	0,80585	1,22495	8	0,4704	0,78402	1,20932	8	0,4594	0,76616	1,19402	8	0,4495
0,4	0,80771	1,53315	10	0,5077	0,78357	1,53015	11	0,4976	0,76367	1,52593	11	0,4885
0,5	0,75772	2,03349	13	0,5427	0,72850	2,06019	14	0,5335	0,70402	2,08412	15	0,5251
0,6	0,63406	3,03090	18	0,5757	0,59655	3,14940	19	0,5672	0,56463	3,26723	20	0,5594
0,7	0,42102	5,81380	26	0,6066	0,37472	6,37839	28	0,5988	0,33584	6,99708	30	0,5916
0,8	0,16063	20,8856	39	0,6355	0,11813	27,2155	44	0,6284	0,08772	35,6308	49	0,6217
0,9	0,01801	362,126	70	0,6628	0,00406	1399,66	85	0,6562	0,00068	7199,19	104	0,6500

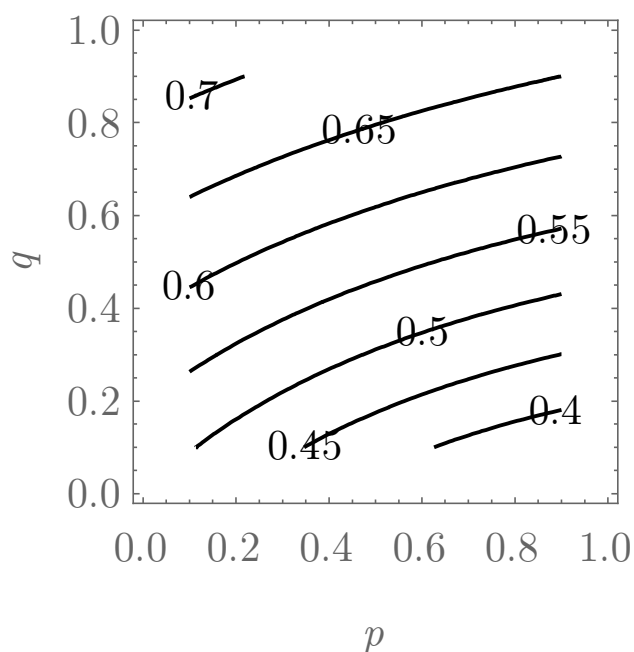


Рисунок Г.61 – Лінії рівня норми  $\|u\|$   
розв'язку задачі (4.97) – (4.99)  
у одиничному крузі в  
залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1, \mu = 1$

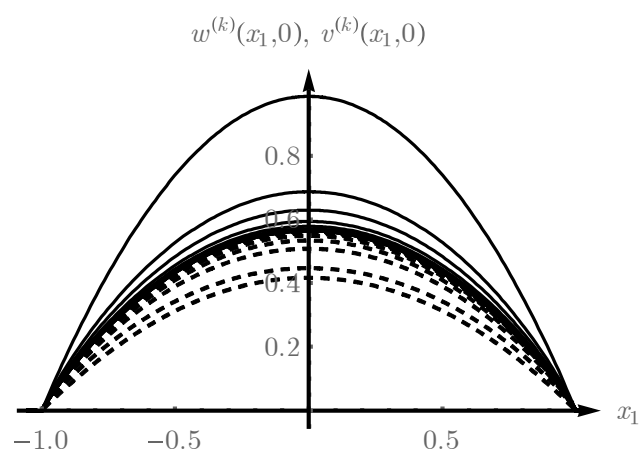


Рисунок Г.62 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$   
та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до  
розв'язку задачі (4.97) – (4.99)  
у одиничному крузі у перерізі  $x_2 = 0$   
при  $p = 0,5, q = 0,5, \lambda = 1, \mu = 1$

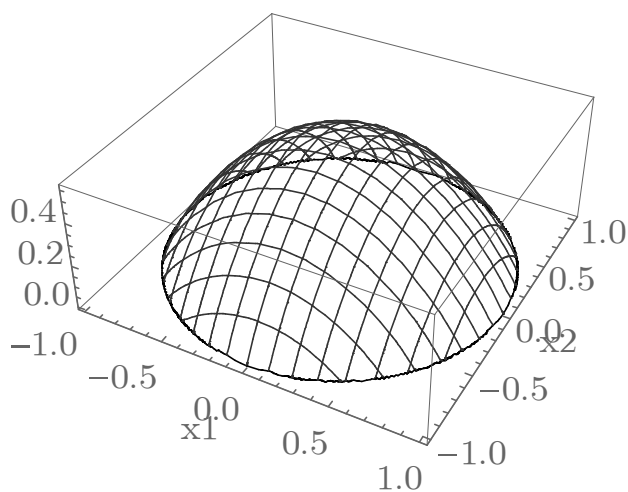


Рисунок Г.63 – Графік поверхні  
наближеного розв'язку  $u^{(12)}(x)$  задачі  
(4.97) – (4.99) у одиничному крузі  
при  $p = 0,5, q = 0,5, \lambda = 1, \mu = 1$

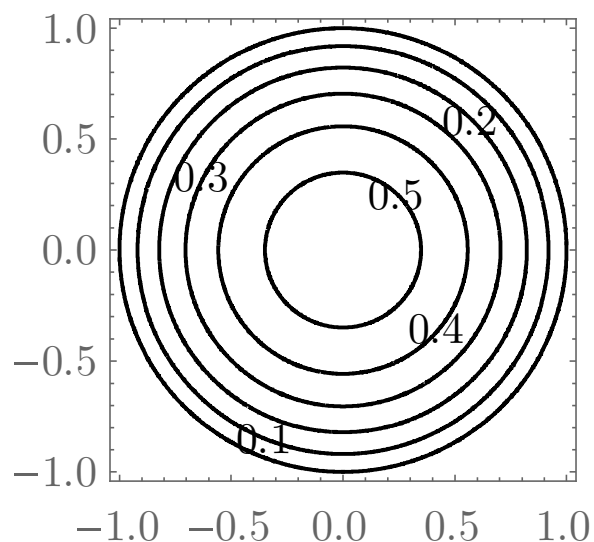


Рисунок Г.64 – Лінії рівня  
наближеного розв'язку  $u^{(12)}(x)$  задачі  
(4.97) – (4.99) у одиничному крузі  
при  $p = 0,5, q = 0,5, \lambda = 1, \mu = 1$

Таблиця Г.56 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.97) – (4.99) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,98677	0,97690	0,94730	0,89796	0,82889	0,74008	0,63153	0,50325	0,35524	0,18749	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,68748	0,68112	0,66202	0,63011	0,58526	0,52723	0,45563	0,36976	0,26833	0,14851	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,62985	0,62403	0,60656	0,57736	0,53629	0,48310	0,41742	0,33859	0,24542	0,13547	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,59432	0,58883	0,57232	0,54474	0,50594	0,45571	0,39370	0,31930	0,23141	0,12771	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,57907	0,57372	0,55765	0,53078	0,49299	0,44407	0,38366	0,31117	0,22554	0,12449	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,57118	0,56590	0,55005	0,52354	0,48626	0,43800	0,37842	0,30692	0,22244	0,12278	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56738	0,56214	0,54639	0,52006	0,48303	0,43509	0,37590	0,30488	0,22097	0,12196	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56546	0,56024	0,54454	0,51830	0,48140	0,43362	0,37463	0,30385	0,22022	0,12155	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56451	0,55930	0,54362	0,51743	0,48059	0,43289	0,37400	0,30334	0,21985	0,12134	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56404	0,55883	0,54317	0,51699	0,48018	0,43253	0,37369	0,30308	0,21967	0,12124	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56380	0,55859	0,54294	0,51678	0,47998	0,43235	0,37353	0,30295	0,21957	0,12119	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56368	0,55847	0,54282	0,51667	0,47988	0,43224	0,37345	0,30289	0,21953	0,12117	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56362	0,55841	0,54277	0,51661	0,47983	0,43221	0,37341	0,30286	0,21950	0,12115	0
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56356	0,55836	0,54271	0,51656	0,47978	0,43216	0,37337	0,30282	0,21948	0,12114	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56350	0,55830	0,54265	0,51650	0,47973	0,43212	0,37333	0,30279	0,21946	0,12113	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56345	0,55824	0,54259	0,51645	0,47968	0,43207	0,37329	0,30276	0,21943	0,12111	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56333	0,55812	0,54248	0,51634	0,47958	0,43198	0,37321	0,30270	0,21939	0,12109	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56309	0,55788	0,54225	0,51612	0,47937	0,43180	0,37306	0,30257	0,21930	0,12104	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56262	0,55742	0,54180	0,51569	0,47897	0,43144	0,37274	0,30232	0,21911	0,12094	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,56167	0,55648	0,54088	0,51482	0,47816	0,43071	0,37211	0,30180	0,21874	0,12073	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,55979	0,55461	0,53907	0,51309	0,47656	0,42927	0,37087	0,30080	0,21801	0,12033	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,55599	0,55085	0,53542	0,50962	0,47333	0,42635	0,36835	0,29875	0,21653	0,11951	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,54868	0,54361	0,52838	0,50292	0,46711	0,42076	0,36352	0,29484	0,21370	0,11795	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,53357	0,52864	0,51382	0,48905	0,45422	0,40913	0,35346	0,28666	0,20775	0,11466	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,50766	0,50298	0,48889	0,46536	0,43225	0,38938	0,33644	0,27290	0,19781	0,10919	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,44662	0,44249	0,43008	0,40935	0,38021	0,34251	0,29600	0,24021	0,17432	0,09648	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,41646	0,41229	0,39980	0,37898	0,34983	0,31234	0,26653	0,21239	0,14993	0,07913	0

Таблиця Г.57 – Значення наближених розв'язків задачі (4.97) – (4.99) у одиничному  
 крузі при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1, \mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0), i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,1$										
0,1	0,5032	0,4981	0,4831	0,4580	0,4229	0,3778	0,3226	0,2573	0,1819	0,0962	0
0,2	0,5320	0,5269	0,5113	0,4853	0,4489	0,4019	0,3442	0,2757	0,1960	0,1046	0
0,3	0,5603	0,5550	0,5390	0,5122	0,4746	0,4259	0,3660	0,2945	0,2107	0,1136	0
0,4	0,5879	0,5824	0,5660	0,5385	0,4999	0,4497	0,3878	0,3135	0,2258	0,1231	0
0,5	0,6145	0,6090	0,5922	0,5641	0,5246	0,4732	0,4094	0,3325	0,2412	0,1331	0
0,6	0,6402	0,6345	0,6175	0,5889	0,5486	0,4961	0,4307	0,3516	0,2570	0,1435	0
0,7	0,6647	0,6590	0,6417	0,6128	0,5718	0,5184	0,4517	0,3706	0,2729	0,1545	0
0,8	0,6882	0,6824	0,6650	0,6357	0,5943	0,5401	0,4723	0,3893	0,2889	0,1659	0
0,9	0,7105	0,7047	0,6872	0,6577	0,6159	0,5611	0,4923	0,4079	0,3050	0,1776	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,4808	0,47598	0,4614	0,4372	0,4033	0,3598	0,3067	0,2442	0,1722	0,0908	0
0,2	0,5122	0,5072	0,4921	0,46681	0,43141	0,3859	0,3301	0,2640	0,1873	0,0997	0
0,3	0,5428	0,5376	0,5219	0,4958	0,4591	0,4117	0,3534	0,2840	0,2029	0,1092	0
0,4	0,5724	0,5670	0,5509	0,5239	0,4861	0,4370	0,3765	0,3040	0,2188	0,1191	0
0,5	0,6007	0,5952	0,5787	0,5511	0,5122	0,4618	0,3993	0,3241	0,2349	0,1295	0
0,6	0,6278	0,6222	0,6054	0,5773	0,5376	0,4859	0,4217	0,3440	0,2513	0,1403	0
0,7	0,6537	0,6480	0,63110	0,6024	0,5619	0,5092	0,4435	0,3637	0,2677	0,1516	0
0,8	0,6783	0,6725	0,6553	0,6264	0,5854	0,5318	0,4649	0,3831	0,2843	0,1633	0
0,9	0,7016	0,6958	0,6785	0,6493	0,6078	0,5536	0,4856	0,4023	0,3008	0,1753	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,4594	0,4548	0,4407	0,4174	0,3847	0,3429	0,2920	0,2321	0,1633	0,0859	0
0,2	0,4934	0,4885	0,4738	0,4493	0,4150	0,3709	0,3170	0,2532	0,1794	0,0954	0
0,3	0,5262	0,5211	0,5058	0,4803	0,4445	0,3983	0,3417	0,2743	0,1958	0,1053	0
0,4	0,5576	0,5523	0,5365	0,5102	0,4731	0,4251	0,3661	0,2954	0,2124	0,1156	0
0,5	0,5876	0,5822	0,5660	0,5388	0,5007	0,4512	0,3899	0,3163	0,2292	0,1263	0
0,6	0,6161	0,6106	0,5940	0,5663	0,5272	0,4763	0,4132	0,3370	0,2461	0,1375	0
0,7	0,6432	0,6376	0,6207	0,5925	0,5526	0,5006	0,4359	0,3574	0,2631	0,1490	0
0,8	0,6688	0,6631	0,6461	0,6174	0,5769	0,5241	0,4580	0,3774	0,2800	0,1609	0
0,9	0,6931	0,6873	0,6701	0,6412	0,6002	0,5466	0,4794	0,3971	0,2970	0,1732	0

Продовження таблиці Г.57

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,4394	0,4349	0,4214	0,3989	0,3675	0,3273	0,2784	0,2211	0,1554	0,0817	0
0,2	0,4758	0,4710	0,4567	0,4330	0,3997	0,3570	0,3049	0,2434	0,1723	0,0916	0
0,3	0,5106	0,5056	0,4907	0,4658	0,4309	0,3860	0,3310	0,2655	0,1894	0,1018	0
0,4	0,5437	0,5386	0,5231	0,4973	0,4610	0,4141	0,3564	0,2875	0,2067	0,1125	0
0,5	0,5752	0,5699	0,5539	0,5273	0,4898	0,4413	0,3813	0,3092	0,2241	0,1236	0
0,6	0,6050	0,5996	0,5832	0,5559	0,5174	0,4674	0,4054	0,3306	0,2415	0,1350	0
0,7	0,6332	0,6276	0,6110	0,5832	0,5438	0,4926	0,4289	0,3516	0,2589	0,1468	0
0,8	0,6598	0,6542	0,6373	0,6090	0,5690	0,5168	0,4516	0,3722	0,2762	0,1589	0
0,9	0,6849	0,6792	0,6622	0,6335	0,5930	0,5399	0,4735	0,3923	0,2935	0,1713	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,4209	0,4166	0,4035	0,3819	0,3517	0,3131	0,2662	0,2113	0,1484	0,0780	0
0,2	0,4594	0,4548	0,4409	0,4179	0,3857	0,3444	0,2940	0,2346	0,1660	0,0882	0
0,3	0,4960	0,4912	0,4766	0,4524	0,4184	0,3747	0,3212	0,2577	0,1838	0,0988	0
0,4	0,5307	0,5257	0,5106	0,4853	0,4498	0,4040	0,3477	0,2804	0,2016	0,1098	0
0,5	0,5636	0,5584	0,5427	0,5166	0,4798	0,4322	0,3734	0,3028	0,2195	0,1211	0
0,6	0,5945	0,5892	0,5731	0,5462	0,5084	0,4592	0,3983	0,3248	0,2373	0,1328	0
0,7	0,6237	0,6183	0,6019	0,5744	0,5356	0,4851	0,4224	0,3463	0,2551	0,1448	0
0,8	0,6512	0,6457	0,6290	0,6010	0,5615	0,5100	0,4456	0,3673	0,2728	0,1571	0
0,9	0,6771	0,6715	0,6546	0,6263	0,5861	0,5337	0,4681	0,3878	0,2903	0,1696	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,4041	0,3999	0,3874	0,3665	0,3375	0,3004	0,2553	0,2026	0,1423	0,0748	0
0,2	0,4444	0,4399	0,4265	0,4042	0,3730	0,3330	0,2842	0,2268	0,1605	0,0853	0
0,3	0,4826	0,4779	0,4637	0,4401	0,4070	0,3645	0,3124	0,2506	0,1788	0,0962	0
0,4	0,5187	0,5138	0,4990	0,4742	0,4395	0,3948	0,3397	0,2741	0,1971	0,1075	0
0,5	0,5528	0,5476	0,5323	0,5066	0,4705	0,4238	0,3662	0,2970	0,2154	0,1190	0
0,6	0,5848	0,5795	0,5637	0,5372	0,5000	0,4516	0,3917	0,3195	0,2336	0,1309	0
0,7	0,6149	0,6094	0,5933	0,5662	0,5279	0,4782	0,4164	0,3415	0,2517	0,1430	0
0,8	0,6432	0,6377	0,6212	0,5936	0,5545	0,5036	0,4401	0,3629	0,2696	0,1555	0
0,9	0,6697	0,6642	0,6475	0,6194	0,5797	0,5279	0,4630	0,3838	0,2874	0,1682	0



Кінець таблиці Г.57

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,3890	0,3850	0,3729	0,3528	0,3248	0,2891	0,2457	0,1950	0,1370	0,0721	0
0,2	0,4309	0,4265	0,4135	0,3918	0,3616	0,3228	0,2755	0,2199	0,1557	0,0829	0
0,3	0,4704	0,4658	0,4520	0,4290	0,3967	0,3553	0,3045	0,2444	0,1745	0,0940	0
0,4	0,5077	0,5029	0,4884	0,4641	0,4302	0,3864	0,3326	0,2684	0,1931	0,1054	0
0,5	0,5427	0,5377	0,5226	0,4974	0,4620	0,4162	0,3596	0,2918	0,2117	0,1171	0
0,6	0,5757	0,5705	0,5549	0,5289	0,4922	0,4446	0,3857	0,3148	0,2302	0,1292	0
0,7	0,6066	0,6012	0,5853	0,5585	0,5208	0,4718	0,4109	0,3371	0,2486	0,1415	0
0,8	0,6355	0,6301	0,6139	0,5865	0,5480	0,4977	0,4351	0,3589	0,2668	0,1540	0
0,9	0,6628	0,6573	0,6407	0,6130	0,5737	0,5224	0,4584	0,3800	0,2848	0,1669	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,3757	0,3718	0,3601	0,3407	0,3137	0,2792	0,2374	0,1884	0,1325	0,0698	0
0,2	0,4187	0,4145	0,4019	0,3808	0,3515	0,3138	0,2679	0,2139	0,1516	0,0808	0
0,3	0,4594	0,4549	0,4414	0,4189	0,3875	0,3470	0,2975	0,2389	0,1706	0,0921	0
0,4	0,4976	0,4929	0,4787	0,4550	0,4217	0,3788	0,3261	0,2633	0,1896	0,1036	0
0,5	0,5335	0,5286	0,5138	0,4890	0,4542	0,4092	0,3537	0,2872	0,2085	0,1155	0
0,6	0,5672	0,5621	0,5468	0,5211	0,4850	0,4382	0,3803	0,3105	0,2273	0,1277	0
0,7	0,5988	0,5936	0,5778	0,5514	0,5142	0,4659	0,4059	0,3331	0,2459	0,1401	0
0,8	0,6284	0,6231	0,6070	0,5800	0,5419	0,4923	0,4304	0,3552	0,2643	0,1528	0
0,9	0,6562	0,6507	0,6344	0,6069	0,5681	0,5174	0,4540	0,3766	0,2824	0,1657	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,3640	0,3602	0,3489	0,3302	0,3040	0,2707	0,2302	0,1828	0,1287	0,0678	0
0,2	0,4080	0,4039	0,3916	0,3711	0,3425	0,3059	0,2613	0,2087	0,1480	0,0790	0
0,3	0,4495	0,4451	0,4319	0,4099	0,3792	0,3397	0,2914	0,2340	0,1673	0,0904	0
0,4	0,4885	0,4838	0,4699	0,4467	0,4141	0,3721	0,3204	0,2588	0,1866	0,1021	0
0,5	0,5251	0,5202	0,5057	0,4814	0,4472	0,4030	0,3484	0,2830	0,2057	0,1141	0
0,6	0,5594	0,5544	0,5393	0,5140	0,4785	0,4324	0,3754	0,3066	0,2246	0,1264	0
0,7	0,5916	0,5864	0,5709	0,5449	0,5082	0,4605	0,4013	0,3295	0,2434	0,1389	0
0,8	0,6217	0,6164	0,6005	0,5739	0,5363	0,4872	0,4262	0,3518	0,2620	0,1517	0
0,9	0,6500	0,6446	0,6284	0,6012	0,5628	0,5127	0,4500	0,3735	0,2803	0,1646	0

Таблиця Г.58 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному крузі, при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,84043	0,92047	3	0,4236	0,77696	0,88301	3	0,4026	0,72350	0,84786	4	0,3830
0,2	0,88615	1,04634	4	0,4516	0,82518	1,01901	4	0,4330	0,77383	0,99331	5	0,4157
0,3	0,91972	1,20851	5	0,4792	0,85909	1,19418	5	0,4627	0,80774	1,18080	6	0,4474
0,4	0,93357	1,43226	6	0,5062	0,87046	1,43723	7	0,4916	0,81641	1,44275	8	0,4779
0,5	0,91702	1,77248	8	0,5323	0,84778	1,81184	9	0,5193	0,78748	1,85269	10	0,5071
0,6	0,85619	2,36498	10	0,5575	0,77629	2,48091	11	0,5458	0,70535	2,60586	13	0,5349
0,7	0,73902	3,61058	13	0,5816	0,64428	3,95105	15	0,5712	0,55867	4,34944	17	0,5613
0,8	0,57599	6,98460	18	0,6047	0,46797	8,22564	21	0,5953	0,36966	9,92020	24	0,5864
0,9	0,42448	20,2913	25	0,6267	0,31684	26,3944	30	0,6181	0,22118	36,4759	36	0,6101
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,67908	0,81523	4	0,3649	0,64266	0,78528	4	0,3485	0,61315	0,75810	4	0,3340
0,2	0,73111	0,96918	5	0,3997	0,69600	0,94657	5	0,3851	0,66745	0,92545	6	0,3721
0,3	0,76476	1,16804	7	0,4332	0,72919	1,15562	7	0,4202	0,70009	1,14334	7	0,4085
0,4	0,77063	1,44812	8	0,4652	0,73231	1,45270	9	0,4536	0,70062	1,45600	9	0,4430
0,5	0,73558	1,89372	11	0,4957	0,69148	1,93356	12	0,4853	0,65451	1,97100	12	0,4757
0,6	0,64324	2,73770	14	0,5247	0,58974	2,87348	15	0,5152	0,54442	3,00988	17	0,5065
0,7	0,48274	4,81069	19	0,5521	0,41706	5,33468	21	0,5435	0,36186	5,91462	23	0,5355
0,8	0,28261	12,2992	28	0,5780	0,20879	15,7030	31	0,5701	0,14994	20,5707	35	0,5628
0,9	0,14003	55,0597	42	0,6024	0,07651	94,9442	51	0,5952	0,03320	201,568	61	0,5885
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,58944	0,73370	4	0,3213	0,57050	0,71204	4	0,3103	0,55542	0,69298	4	0,3009
0,2	0,64443	0,90581	6	0,3606	0,62600	0,88766	6	0,3504	0,61128	0,87099	6	0,3416
0,3	0,67651	1,13112	8	0,3980	0,65754	1,11897	8	0,3887	0,64239	1,10695	8	0,3804
0,4	0,67469	1,45772	10	0,4334	0,65367	1,45774	10	0,4248	0,63677	1,45608	11	0,4172
0,5	0,62388	2,00510	13	0,4669	0,59876	2,03532	14	0,4590	0,57832	2,06143	14	0,4518
0,6	0,50661	3,14386	18	0,4985	0,47540	3,27329	19	0,4911	0,44976	3,39728	20	0,4845
0,7	0,31668	6,53871	26	0,5281	0,28039	7,19624	27	0,5213	0,25129	7,88646	29	0,5151
0,8	0,10644	27,3206	40	0,5560	0,07658	36,1621	44	0,5497	0,05676	47,2716	48	0,5439
0,9	0,01003	594,156	73	0,5822	0,00185	2745,72	87	0,5764	0,00027	15970,9	103	0,5709

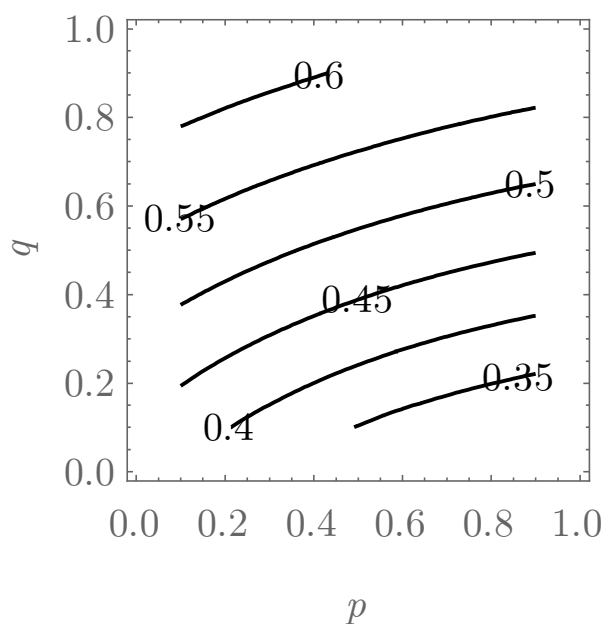


Рисунок Г.65 – Лінії рівня норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничному крузі в залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

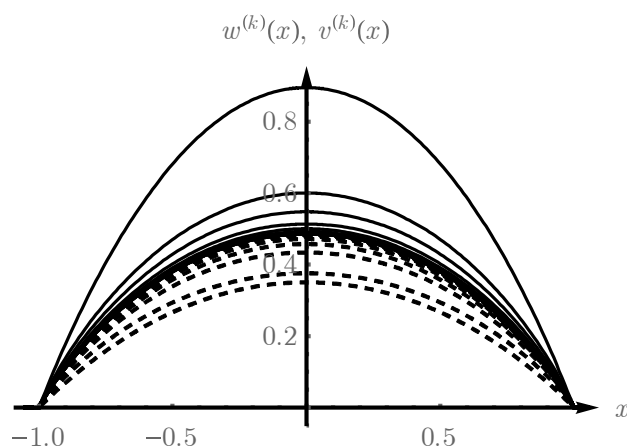


Рисунок Г.66 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(x)$  та верхніх  $w^{(k)}(x)$  наближень до розв'язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничному крузі у перерізі  $x_2 = 0$  при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

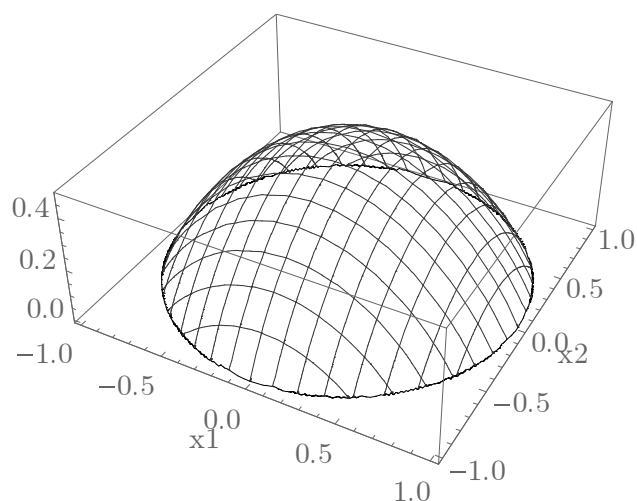


Рисунок Г.67 – Графік поверхні наближеного розв'язку  $u^{(12)}(x)$  задачі (4.100) – (4.102) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

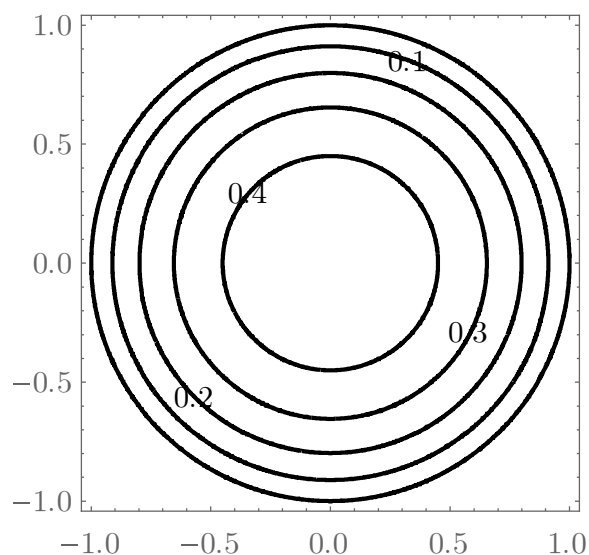


Рисунок Г.68 – Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(x)$  задачі (4.100) – (4.102) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.59 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничному крузі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,89531	0,88689	0,86158	0,81917	0,75936	0,68169	0,58558	0,47030	0,33499	0,17862	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,60062	0,59553	0,58018	0,55437	0,51776	0,46977	0,40961	0,33604	0,24708	0,13901	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,54821	0,54356	0,52954	0,50597	0,47249	0,42860	0,37352	0,30614	0,22468	0,12592	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,51400	0,50963	0,49647	0,47433	0,44291	0,40172	0,35005	0,28686	0,21050	0,11796	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,49986	0,49561	0,48282	0,46130	0,43076	0,39072	0,34048	0,27904	0,20479	0,11478	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,49238	0,48820	0,47560	0,45440	0,42431	0,38486	0,33537	0,27485	0,20170	0,11304	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48884	0,48469	0,47217	0,45113	0,42126	0,38209	0,33296	0,27287	0,20026	0,11223	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48703	0,48290	0,47043	0,44947	0,41970	0,38068	0,33173	0,27187	0,19951	0,11182	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48615	0,48202	0,46957	0,44865	0,41894	0,37999	0,33113	0,27137	0,19915	0,11161	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48570	0,48157	0,46914	0,44823	0,41855	0,37964	0,33082	0,27112	0,19897	0,11151	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48548	0,48135	0,46893	0,44803	0,41836	0,37946	0,33067	0,27100	0,19888	0,11146	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48536	0,48124	0,46882	0,44793	0,41826	0,37938	0,33060	0,27093	0,19883	0,11143	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48531	0,48119	0,46876	0,44787	0,41822	0,37933	0,33056	0,27090	0,19881	0,11142	0
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48525	0,48113	0,46871	0,44782	0,41817	0,37929	0,33052	0,27087	0,19879	0,11141	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48520	0,48108	0,46866	0,44777	0,41812	0,37925	0,33048	0,27084	0,19876	0,11140	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48514	0,48102	0,46860	0,44772	0,41807	0,37920	0,33045	0,27081	0,19874	0,11138	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48503	0,48091	0,46850	0,44762	0,41798	0,37912	0,33037	0,27075	0,19869	0,11136	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48481	0,48069	0,46828	0,44741	0,41778	0,37894	0,33022	0,27062	0,19860	0,11131	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48437	0,48025	0,46785	0,44700	0,41740	0,37860	0,32992	0,27038	0,19842	0,11121	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48347	0,47937	0,46699	0,44618	0,41663	0,37790	0,32931	0,26988	0,19806	0,11100	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,48172	0,47763	0,46530	0,44456	0,41512	0,37653	0,32811	0,26890	0,19734	0,11060	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,47815	0,47408	0,46185	0,44126	0,41204	0,37373	0,32568	0,26690	0,19587	0,10977	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,47136	0,46736	0,45530	0,43501	0,40621	0,36845	0,32108	0,26314	0,19311	0,10823	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,45707	0,45319	0,44148	0,42180	0,39386	0,35723	0,31128	0,25509	0,18719	0,10490	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,43351	0,42983	0,41875	0,40010	0,37363	0,33892	0,29537	0,24208	0,17767	0,09957	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,37558	0,37239	0,36279	0,34666	0,32376	0,29376	0,25614	0,21013	0,15450	0,08692	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0)$	0,35008	0,34679	0,33689	0,32031	0,29692	0,26655	0,22897	0,18390	0,13099	0,06984	0

Таблиця Г.60 – Значення наближених розв’язків задачі (4.100) – (4.102) у  
 одиничному крузі при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0) = (0, 1i; 0)$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, 10$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,1$										
0,1	0,4236	0,4196	0,4077	0,3878	0,3596	0,3230	0,2777	0,2232	0,1593	0,0851	0
0,2	0,4516	0,4475	0,4351	0,4143	0,3849	0,3466	0,2990	0,2415	0,1734	0,0936	0
0,3	0,4792	0,4749	0,4622	0,4407	0,4102	0,3704	0,3207	0,2603	0,1882	0,1027	0
0,4	0,5062	0,5018	0,4887	0,4666	0,4352	0,3940	0,3424	0,2794	0,2035	0,1124	0
0,5	0,5323	0,5279	0,5144	0,4918	0,4597	0,4173	0,3641	0,2986	0,2192	0,1226	0
0,6	0,5575	0,5530	0,5393	0,5163	0,4835	0,4402	0,3854	0,3178	0,2351	0,1334	0
0,7	0,5816	0,5771	0,5632	0,5399	0,5066	0,4625	0,4065	0,3370	0,2513	0,1445	0
0,8	0,6047	0,6001	0,5862	0,5626	0,5288	0,4841	0,4271	0,3560	0,2676	0,1562	0
0,9	0,6267	0,6220	0,6080	0,5843	0,5503	0,5050	0,4472	0,3747	0,2840	0,1682	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,4026	0,3988	0,3873	0,3681	0,3410	0,3059	0,2626	0,2107	0,1499	0,0799	0
0,2	0,4330	0,4290	0,4170	0,3969	0,3685	0,3315	0,2856	0,2303	0,1650	0,0889	0
0,3	0,4627	0,4586	0,4461	0,4252	0,3956	0,3569	0,3087	0,2503	0,1807	0,0985	0
0,4	0,4916	0,4873	0,4744	0,4528	0,4222	0,3820	0,3317	0,2704	0,1968	0,1086	0
0,5	0,5193	0,5149	0,5017	0,4796	0,4480	0,4066	0,3545	0,2905	0,2131	0,1192	0
0,6	0,5458	0,5414	0,5280	0,5053	0,4730	0,4305	0,3768	0,3106	0,2297	0,1303	0
0,7	0,5712	0,5667	0,5530	0,5300	0,4972	0,4538	0,3987	0,3305	0,2464	0,1418	0
0,8	0,5953	0,5907	0,5769	0,5537	0,5204	0,4762	0,4201	0,3501	0,2632	0,1537	0
0,9	0,6181	0,6136	0,5997	0,5762	0,5426	0,4979	0,4408	0,3693	0,2800	0,1659	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,3830	0,3793	0,3683	0,3498	0,3238	0,2902	0,2488	0,1993	0,1416	0,0753	0
0,2	0,4157	0,4118	0,4002	0,3807	0,3532	0,3175	0,2733	0,2202	0,1576	0,0848	0
0,3	0,4474	0,4433	0,4312	0,4108	0,3820	0,3445	0,2978	0,2412	0,1740	0,0948	0
0,4	0,4779	0,4737	0,4611	0,4400	0,4101	0,3709	0,3219	0,2623	0,1908	0,1053	0
0,5	0,5071	0,5028	0,4899	0,4681	0,4372	0,3966	0,3457	0,2833	0,2077	0,1162	0
0,6	0,5349	0,5305	0,5173	0,4950	0,4633	0,4216	0,3689	0,3040	0,2249	0,1276	0
0,7	0,5613	0,5569	0,5434	0,5208	0,4884	0,4457	0,3916	0,3245	0,2420	0,1394	0
0,8	0,5864	0,5819	0,5683	0,5453	0,5124	0,4689	0,4136	0,3447	0,2592	0,1515	0
0,9	0,6101	0,6055	0,5918	0,5686	0,5354	0,4912	0,4349	0,3644	0,2763	0,1639	0

Продовження таблиці Г.60

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,3649	0,3614	0,3508	0,3331	0,3082	0,2760	0,2364	0,1893	0,1343	0,0714	0
0,2	0,3997	0,3959	0,3847	0,3659	0,3393	0,3049	0,2623	0,2112	0,1511	0,0812	0
0,3	0,4332	0,4292	0,4174	0,3976	0,3697	0,3332	0,2879	0,2331	0,1682	0,0916	0
0,4	0,4652	0,4611	0,4489	0,4282	0,3990	0,3608	0,3131	0,2550	0,1855	0,1024	0
0,5	0,4957	0,4915	0,4789	0,4575	0,4273	0,3875	0,3377	0,2767	0,2030	0,1136	0
0,6	0,5247	0,5204	0,5074	0,4855	0,4544	0,4134	0,3617	0,2981	0,2205	0,1253	0
0,7	0,5521	0,5477	0,5345	0,5121	0,4803	0,4382	0,3850	0,3191	0,2381	0,1373	0
0,8	0,5780	0,5735	0,5601	0,5374	0,5050	0,4621	0,4076	0,3397	0,2556	0,1496	0
0,9	0,6024	0,5979	0,5844	0,5614	0,5286	0,4850	0,4295	0,3599	0,2731	0,1622	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,3485	0,3452	0,3350	0,3180	0,2942	0,2634	0,2255	0,1804	0,1280	0,0680	0
0,2	0,3851	0,3815	0,3706	0,3524	0,3268	0,2936	0,2525	0,2032	0,1454	0,0782	0
0,3	0,4202	0,4164	0,4049	0,3856	0,3585	0,3231	0,2791	0,2260	0,1630	0,0889	0
0,4	0,4536	0,4496	0,4376	0,4175	0,3889	0,3517	0,3051	0,2486	0,1809	0,0999	0
0,5	0,4853	0,4811	0,4687	0,4478	0,4182	0,3793	0,3305	0,2709	0,1988	0,1114	0
0,6	0,5152	0,5110	0,4982	0,4767	0,4461	0,4059	0,3552	0,2928	0,2167	0,1232	0
0,7	0,5435	0,5392	0,5261	0,5041	0,4728	0,4314	0,3791	0,3143	0,2346	0,1354	0
0,8	0,5701	0,5658	0,5525	0,5301	0,4982	0,4559	0,4022	0,3353	0,2524	0,1479	0
0,9	0,5952	0,5908	0,5774	0,5547	0,5223	0,4793	0,4244	0,3558	0,2701	0,1607	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,3340	0,3308	0,3210	0,3047	0,2818	0,2523	0,2160	0,1728	0,1226	0,0652	0
0,2	0,3721	0,3686	0,3581	0,3405	0,3157	0,2836	0,2439	0,1963	0,1405	0,0756	0
0,3	0,4085	0,4048	0,3936	0,3749	0,3484	0,3140	0,2713	0,2198	0,1586	0,0865	0
0,4	0,4430	0,4391	0,4274	0,4077	0,3799	0,3435	0,2981	0,2429	0,1768	0,0978	0
0,5	0,4757	0,4716	0,4594	0,4390	0,4099	0,3718	0,3241	0,2657	0,1951	0,1095	0
0,6	0,5065	0,5023	0,4898	0,4686	0,4386	0,3991	0,3493	0,2880	0,2134	0,1215	0
0,7	0,5355	0,5313	0,5184	0,4968	0,4659	0,4252	0,3737	0,3099	0,2315	0,1338	0
0,8	0,5628	0,5585	0,5454	0,5234	0,4918	0,4501	0,3972	0,3313	0,2496	0,1464	0
0,9	0,5885	0,5841	0,5709	0,5485	0,5165	0,4740	0,4198	0,3521	0,2675	0,1593	0

Кінець таблиці Г.60

$(x_1^{(i)}, 0)$	(0, 0)	(0, 1; 0)	(0, 2; 0)	(0, 3; 0)	(0, 4; 0)	(0, 5; 0)	(0, 6; 0)	(0, 7; 0)	(0, 8; 0)	(0, 9; 0)	(1; 0)
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,3213	0,3182	0,3088	0,2931	0,2711	0,2427	0,2078	0,1663	0,1181	0,0628	0
0,2	0,3606	0,3572	0,3470	0,3299	0,3059	0,2748	0,2364	0,1904	0,1363	0,0735	0
0,3	0,3980	0,3944	0,3835	0,3653	0,3395	0,3061	0,2645	0,2143	0,1548	0,0846	0
0,4	0,4334	0,4296	0,4182	0,3989	0,3717	0,3362	0,2918	0,2379	0,1733	0,0960	0
0,5	0,4669	0,4629	0,4510	0,4309	0,4025	0,3651	0,3183	0,2611	0,1919	0,1078	0
0,6	0,4985	0,4944	0,4820	0,4613	0,4317	0,3929	0,3440	0,2838	0,2104	0,1200	0
0,7	0,5281	0,5239	0,5113	0,4900	0,4596	0,4195	0,3688	0,3060	0,2288	0,1324	0
0,8	0,5560	0,5517	0,5389	0,5171	0,4860	0,4449	0,3926	0,3277	0,2471	0,1452	0
0,9	0,5822	0,5779	0,5648	0,5427	0,5111	0,4691	0,4156	0,3487	0,2651	0,1581	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,3103	0,3073	0,2982	0,2831	0,2619	0,2345	0,2008	0,1608	0,1143	0,0609	0
0,2	0,3504	0,3472	0,3373	0,3207	0,2974	0,2673	0,2300	0,1853	0,1328	0,0717	0
0,3	0,3887	0,3851	0,3745	0,3568	0,3317	0,2991	0,2585	0,2096	0,1515	0,0829	0
0,4	0,4248	0,4211	0,4099	0,3911	0,3645	0,3297	0,2863	0,2336	0,1703	0,0945	0
0,5	0,4590	0,4551	0,4434	0,4237	0,3958	0,3591	0,3132	0,2571	0,1891	0,1064	0
0,6	0,4911	0,4871	0,4750	0,4546	0,4255	0,3873	0,3393	0,2801	0,2078	0,1187	0
0,7	0,5213	0,5172	0,5047	0,4837	0,4538	0,4143	0,3644	0,3025	0,2264	0,1312	0
0,8	0,5497	0,5455	0,5328	0,5113	0,4806	0,4401	0,3885	0,3244	0,2448	0,1440	0
0,9	0,5764	0,5721	0,5591	0,5373	0,5060	0,4646	0,4118	0,3457	0,2630	0,1571	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,3009	0,2979	0,2892	0,2746	0,2540	0,2276	0,1950	0,1563	0,1111	0,0593	0
0,2	0,3416	0,3384	0,3288	0,3127	0,2901	0,2608	0,2245	0,1810	0,1299	0,0702	0
0,3	0,3804	0,3770	0,3666	0,3493	0,3248	0,2930	0,2534	0,2056	0,1488	0,0815	0
0,4	0,4172	0,4135	0,4026	0,3841	0,3581	0,3240	0,2815	0,2298	0,1677	0,0932	0
0,5	0,4518	0,4480	0,4365	0,4172	0,3898	0,3538	0,3087	0,2535	0,1867	0,1052	0
0,6	0,4845	0,4805	0,4686	0,4485	0,4199	0,3824	0,3350	0,2767	0,2055	0,1175	0
0,7	0,5151	0,5110	0,4988	0,4781	0,4485	0,4096	0,3604	0,2994	0,2242	0,1302	0
0,8	0,5439	0,5397	0,5272	0,5060	0,4757	0,4357	0,3848	0,3215	0,2428	0,1430	0
0,9	0,5709	0,5667	0,5539	0,5323	0,5014	0,4605	0,4083	0,3429	0,2611	0,1562	0

Таблиця Г.61 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,65002	0,71467	3	0,3376	0,59528	0,67718	3	0,3174	0,55177	0,64338	4	0,2993
0,2	0,70064	0,83812	4	0,3673	0,64840	0,80974	4	0,3495	0,60686	0,78387	5	0,3336
0,3	0,74013	1,00143	5	0,3973	0,68830	0,98498	5	0,3816	0,64682	0,96971	6	0,3674
0,4	0,75977	1,23296	6	0,4271	0,70564	1,23494	7	0,4131	0,66174	1,23667	8	0,4005
0,5	0,74757	1,59687	8	0,4563	0,68761	1,63388	9	0,4439	0,63812	1,66971	10	0,4326
0,6	0,68880	2,26059	11	0,4847	0,61881	2,38347	12	0,4736	0,55993	2,50926	14	0,4635
0,7	0,57368	3,75153	15	0,5122	0,49021	4,16334	17	0,5022	0,41888	4,63080	19	0,4931
0,8	0,42247	8,13356	20	0,5386	0,32868	9,91571	23	0,5296	0,24829	12,3912	27	0,5213
0,9	0,29893	26,5154	30	0,5640	0,20887	36,5887	35	0,5558	0,13437	54,3985	42	0,5483
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,51775	0,61336	4	0,2835	0,49151	0,58708	4	0,2698	0,47143	0,56437	4	0,2583
0,2	0,57430	0,76039	5	0,3195	0,54908	0,73918	5	0,3073	0,52972	0,72015	5	0,2968
0,3	0,61406	0,95528	6	0,3549	0,58852	0,94148	7	0,3439	0,56878	0,92825	7	0,3343
0,4	0,62664	1,23745	8	0,3893	0,59893	1,23684	9	0,3793	0,57731	1,23469	9	0,3705
0,5	0,59790	1,70273	11	0,4225	0,56568	1,73173	12	0,4134	0,54019	1,75603	12	0,4054
0,6	0,51133	2,63354	15	0,4543	0,47196	2,75198	16	0,4461	0,44057	2,86118	17	0,4387
0,7	0,35951	5,14602	21	0,4848	0,31159	5,69211	22	0,4772	0,27402	6,24639	24	0,4704
0,8	0,18208	15,8781	30	0,5137	0,13054	20,7549	34	0,5068	0,09317	27,2956	38	0,5005
0,9	0,07671	90,0846	50	0,5413	0,03666	175,114	59	0,5349	0,01339	433,922	69	0,5290
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,45614	0,54498	4	0,2487	0,44450	0,52859	4	0,2407	0,43564	0,51485	4	0,2341
0,2	0,51493	0,70320	5	0,2878	0,50365	0,68822	5	0,2803	0,49506	0,67506	5	0,2740
0,3	0,55365	0,91561	7	0,3260	0,54210	0,90363	7	0,3189	0,53332	0,89239	7	0,3129
0,4	0,56059	1,23107	9	0,3629	0,54776	1,22619	10	0,3562	0,53798	1,22031	10	0,3505
0,5	0,52025	1,77547	13	0,3983	0,50477	1,79029	13	0,3920	0,49282	1,80096	13	0,3865
0,6	0,41585	2,95919	18	0,4321	0,39650	3,04556	18	0,4262	0,38136	3,12104	19	0,4210
0,7	0,24517	6,78781	26	0,4642	0,22320	7,30463	27	0,4587	0,20630	7,79810	28	0,4537
0,8	0,06803	35,3831	41	0,4947	0,05197	44,4820	44	0,4895	0,04165	54,2517	47	0,4848
0,9	0,00331	1528,80	80	0,5236	0,00055	7682,34	92	0,5187	0,00011	34387,0	103	0,5143



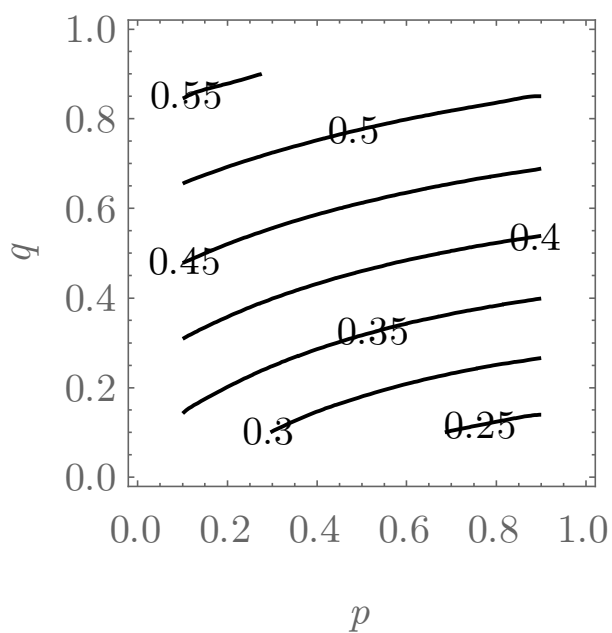


Рисунок Г.69 – Лінії рівня норми  $\|u\|$   
розв'язку задачі (4.97) – (4.99)  
у одиничній кулі в  
залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

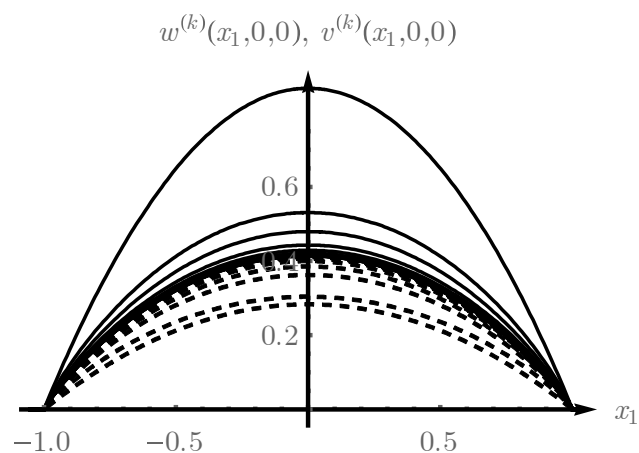


Рисунок Г.70 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$   
та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до  
розв'язку задачі (4.97) – (4.99) у  
одиничній кулі у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$   
при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

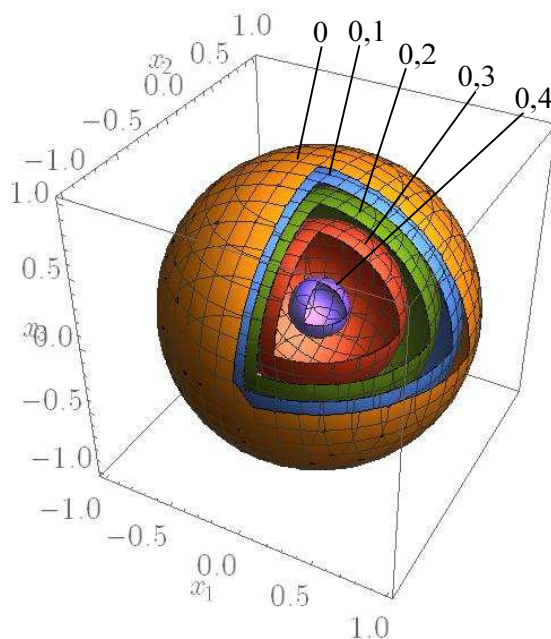


Рисунок Г.71 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі  
(4.97) – (4.99) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

Таблиця Г.62 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв’язку задачі (4.97) – (4.99) у одиничній кулі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,86587	0,85721	0,83123	0,78794	0,72733	0,64940	0,55415	0,44159	0,31171	0,16451	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,53099	0,52631	0,51221	0,48863	0,45537	0,41214	0,35845	0,29348	0,21571	0,12188	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,47883	0,47459	0,46183	0,44047	0,41033	0,37113	0,32242	0,26349	0,19302	0,10836	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,44248	0,43855	0,42675	0,40698	0,37910	0,34286	0,29784	0,24338	0,17830	0,10011	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,42839	0,42459	0,41318	0,39405	0,36708	0,33200	0,28843	0,23572	0,17270	0,09699	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,42062	0,41689	0,40568	0,38690	0,36040	0,32596	0,28317	0,23141	0,16954	0,09520	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41707	0,41337	0,40226	0,38364	0,35737	0,32322	0,28079	0,22947	0,16812	0,09441	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41522	0,41154	0,40047	0,38193	0,35578	0,32178	0,27954	0,22844	0,16737	0,09399	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41432	0,41065	0,39960	0,38111	0,35501	0,32108	0,27894	0,22795	0,16701	0,09378	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41387	0,41020	0,39916	0,38069	0,35462	0,32073	0,27863	0,22770	0,16682	0,09368	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41364	0,40997	0,39895	0,38048	0,35443	0,32056	0,27848	0,22758	0,16673	0,09363	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41353	0,40986	0,39884	0,38037	0,35433	0,32047	0,27840	0,22752	0,16669	0,09360	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41347	0,40981	0,39878	0,38032	0,35428	0,32042	0,27837	0,22748	0,16666	0,09359	0
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41342	0,40975	0,39873	0,38027	0,35423	0,32038	0,27833	0,22745	0,16664	0,09358	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41336	0,40969	0,39867	0,38022	0,35419	0,32034	0,27829	0,22742	0,16662	0,09357	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41330	0,40964	0,39862	0,38017	0,35414	0,32029	0,27825	0,22739	0,16660	0,09355	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41319	0,40953	0,39851	0,38006	0,35404	0,32021	0,27818	0,22733	0,16655	0,09353	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41296	0,40930	0,39829	0,37985	0,35385	0,32003	0,27802	0,22720	0,16646	0,09348	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41252	0,40886	0,39786	0,37944	0,35346	0,31968	0,27772	0,22696	0,16628	0,09337	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,41160	0,40795	0,39698	0,37860	0,35268	0,31898	0,27711	0,22646	0,16591	0,09317	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,40984	0,40621	0,39528	0,37699	0,35118	0,31761	0,27593	0,22549	0,16521	0,09277	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,40617	0,40257	0,39174	0,37360	0,34802	0,31476	0,27344	0,22346	0,16371	0,09193	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,39946	0,39592	0,38527	0,36744	0,34229	0,30958	0,26895	0,21980	0,16104	0,09044	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,38473	0,38131	0,37105	0,35387	0,32962	0,29811	0,25897	0,21162	0,15503	0,08705	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,36199	0,35879	0,34914	0,33299	0,31021	0,28057	0,24375	0,19920	0,14593	0,08192	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,30348	0,30080	0,29275	0,27927	0,26026	0,23555	0,20487	0,16774	0,12329	0,06966	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,28284	0,28001	0,27152	0,25738	0,23758	0,21213	0,18102	0,14425	0,10182	0,05374	0

Таблиця Г.63 – Значення наближених розв'язків задачі (4.97) – (4.99) у одиничній кулі при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1, \mu = 1$  у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0), i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,1$										
0,1	0,3376	0,3342	0,3242	0,3074	0,2839	0,2537	0,2167	0,1729	0,1223	0,0648	0
0,2	0,3673	0,3638	0,3532	0,3354	0,3104	0,2782	0,2387	0,1915	0,1366	0,0732	0
0,3	0,3973	0,3936	0,3824	0,3637	0,3374	0,3034	0,2614	0,2110	0,1517	0,0824	0
0,4	0,4271	0,4232	0,4115	0,3920	0,3645	0,3288	0,2845	0,2310	0,1675	0,0923	0
0,5	0,4563	0,4523	0,4402	0,4200	0,3914	0,3541	0,3077	0,2514	0,1840	0,1029	0
0,6	0,4847	0,4806	0,4681	0,4473	0,4178	0,3791	0,3309	0,2720	0,2008	0,1141	0
0,7	0,5122	0,5080	0,4952	0,4738	0,4435	0,4037	0,3538	0,2925	0,2179	0,1258	0
0,8	0,5386	0,5343	0,5214	0,4995	0,4685	0,4277	0,3763	0,3130	0,2352	0,1379	0
0,9	0,5640	0,5596	0,5464	0,5242	0,4926	0,4510	0,3984	0,3332	0,2526	0,1505	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,3174	0,3142	0,3046	0,2887	0,2663	0,2377	0,2027	0,1614	0,1139	0,0601	0
0,2	0,3495	0,3461	0,3359	0,3188	0,2949	0,2641	0,2262	0,1813	0,1290	0,0690	0
0,3	0,3816	0,3780	0,3672	0,3491	0,3237	0,2908	0,2503	0,2019	0,1450	0,0787	0
0,4	0,4131	0,4093	0,3980	0,3790	0,3523	0,3176	0,2746	0,2229	0,1615	0,0890	0
0,5	0,4439	0,4399	0,4281	0,4084	0,3805	0,3441	0,2989	0,2441	0,1786	0,0999	0
0,6	0,4736	0,4696	0,4574	0,4369	0,4080	0,3702	0,3230	0,2654	0,1960	0,1114	0
0,7	0,5022	0,4981	0,4856	0,4645	0,4347	0,3957	0,3467	0,2867	0,2136	0,1234	0
0,8	0,5296	0,5254	0,5126	0,4911	0,4605	0,4204	0,3699	0,3077	0,2313	0,1358	0
0,9	0,5558	0,5515	0,5385	0,5166	0,4854	0,4444	0,3926	0,3284	0,2490	0,1485	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,2993	0,2963	0,2872	0,2720	0,2508	0,2236	0,1905	0,1515	0,1067	0,0563	0
0,2	0,3336	0,3303	0,3205	0,3041	0,2811	0,2516	0,2154	0,1724	0,1226	0,0655	0
0,3	0,3674	0,3639	0,3535	0,3360	0,3114	0,2797	0,2406	0,1939	0,1392	0,0756	0
0,4	0,4005	0,3969	0,3858	0,3674	0,3414	0,3077	0,2660	0,2158	0,1564	0,0862	0
0,5	0,4326	0,42877	0,4172	0,3979	0,3707	0,3352	0,2911	0,2378	0,1740	0,0974	0
0,6	0,4635	0,4595	0,4476	0,4275	0,3992	0,3622	0,3160	0,2597	0,1918	0,1092	0
0,7	0,4931	0,4890	0,4767	0,4560	0,4267	0,3884	0,3403	0,2814	0,2098	0,1214	0
0,8	0,5213	0,5172	0,5046	0,4834	0,4533	0,4138	0,3641	0,3029	0,2279	0,1339	0
0,9	0,5483	0,5440	0,5312	0,5095	0,4788	0,4384	0,3873	0,3240	0,2459	0,1468	0

Продовження таблиці Г.63

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,2835	0,2806	0,2719	0,2574	0,2373	0,2114	0,1800	0,1431	0,1007	0,0531	0
0,2	0,3195	0,3163	0,3069	0,2911	0,2691	0,2407	0,2060	0,1649	0,1172	0,0627	0
0,3	0,3549	0,3515	0,3414	0,3244	0,3007	0,2700	0,2322	0,1872	0,1344	0,0730	0
0,4	0,3893	0,3857	0,3750	0,3570	0,3317	0,2989	0,2584	0,2097	0,1520	0,0839	0
0,5	0,4225	0,4187	0,4075	0,3886	0,3620	0,3273	0,2843	0,2322	0,1700	0,0953	0
0,6	0,4543	0,4504	0,4387	0,4191	0,3913	0,3550	0,3098	0,2547	0,1882	0,1073	0
0,7	0,4848	0,4807	0,4686	0,4483	0,4195	0,3819	0,3347	0,2769	0,2065	0,1196	0
0,8	0,5137	0,5096	0,4972	0,4763	0,4467	0,4078	0,3589	0,2987	0,2249	0,1323	0
0,9	0,5413	0,5371	0,5244	0,5031	0,4728	0,4329	0,3825	0,3202	0,2431	0,1454	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,2698	0,2671	0,2588	0,2450	0,2258	0,2012	0,1712	0,1361	0,0958	0,0505	0
0,2	0,3073	0,3042	0,2951	0,2800	0,2587	0,2314	0,1981	0,1586	0,1128	0,0604	0
0,3	0,3439	0,3406	0,3308	0,3143	0,2913	0,2616	0,2250	0,1814	0,1303	0,0709	0
0,4	0,3793	0,3758	0,3654	0,3479	0,3232	0,2913	0,2519	0,2045	0,1483	0,0820	0
0,5	0,4134	0,4098	0,3987	0,3803	0,3542	0,3204	0,2783	0,2275	0,1666	0,0936	0
0,6	0,4461	0,4422	0,4307	0,4115	0,3842	0,3487	0,3043	0,2503	0,1851	0,1057	0
0,7	0,4772	0,4732	0,4613	0,4414	0,4131	0,3760	0,3296	0,2728	0,2037	0,1182	0
0,8	0,5068	0,5027	0,4905	0,4699	0,4407	0,4025	0,3543	0,2950	0,2222	0,1310	0
0,9	0,5349	0,5307	0,5182	0,4972	0,4672	0,4279	0,3782	0,3167	0,2407	0,1441	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,2583	0,2557	0,2477	0,2345	0,2161	0,1926	0,1640	0,1303	0,0918	0,0485	0
0,2	0,2968	0,2938	0,2850	0,2704	0,2499	0,2236	0,1914	0,1533	0,1091	0,0585	0
0,3	0,3343	0,3311	0,3216	0,3056	0,2833	0,2544	0,2189	0,1766	0,1270	0,0691	0
0,4	0,3705	0,3671	0,3569	0,3399	0,3158	0,2847	0,2462	0,1999	0,1452	0,0804	0
0,5	0,4054	0,4018	0,3910	0,3729	0,3474	0,3143	0,2731	0,2233	0,1638	0,0921	0
0,6	0,4387	0,4349	0,4236	0,4047	0,3779	0,3430	0,2995	0,2465	0,1825	0,1043	0
0,7	0,4704	0,4665	0,4548	0,4351	0,4073	0,3708	0,3252	0,2693	0,2012	0,1169	0
0,8	0,5005	0,4965	0,4844	0,4641	0,4354	0,3976	0,3502	0,2917	0,2200	0,1299	0
0,9	0,5290	0,5249	0,5126	0,4918	0,4622	0,4234	0,3744	0,3137	0,2386	0,1431	0

Кінець таблиці Г.63

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,2487	0,2461	0,2385	0,2258	0,2081	0,1855	0,1580	0,1257	0,0886	0,0469	0
0,2	0,2878	0,2850	0,2765	0,2623	0,2425	0,2170	0,1859	0,1489	0,1061	0,0570	0
0,3	0,3260	0,3229	0,3136	0,2981	0,2764	0,2483	0,2138	0,1725	0,1242	0,0677	0
0,4	0,3629	0,3596	0,3496	0,3329	0,3094	0,2790	0,2414	0,1962	0,1426	0,0791	0
0,5	0,3983	0,3948	0,3842	0,3665	0,3415	0,3090	0,2687	0,2198	0,1614	0,0909	0
0,6	0,4321	0,4284	0,4173	0,3987	0,3724	0,3381	0,2953	0,2432	0,1802	0,1032	0
0,7	0,4642	0,4604	0,4489	0,4295	0,4021	0,3662	0,3213	0,2662	0,1991	0,1159	0
0,8	0,4947	0,4908	0,4789	0,4589	0,4305	0,3933	0,3465	0,2888	0,2180	0,1289	0
0,9	0,5236	0,5196	0,5074	0,4869	0,4577	0,4193	0,3709	0,3109	0,2367	0,1422	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,2407	0,2382	0,2309	0,2186	0,2016	0,1797	0,1532	0,1219	0,0861	0,0456	0
0,2	0,2803	0,2776	0,2693	0,2555	0,2363	0,2115	0,1813	0,1454	0,1037	0,0558	0
0,3	0,3189	0,3159	0,3069	0,2917	0,2705	0,2431	0,2094	0,1692	0,1219	0,0666	0
0,4	0,3562	0,3530	0,3432	0,3269	0,3039	0,2742	0,2373	0,1930	0,1405	0,0780	0
0,5	0,3920	0,3886	0,3782	0,3608	0,3363	0,3044	0,2648	0,2168	0,1593	0,0899	0
0,6	0,4262	0,4226	0,4116	0,3934	0,3675	0,3338	0,2917	0,2403	0,1783	0,1022	0
0,7	0,4587	0,4549	0,4436	0,4245	0,3975	0,3621	0,3178	0,2635	0,1973	0,1150	0
0,8	0,4895	0,4856	0,4739	0,4542	0,4262	0,3894	0,3432	0,2863	0,2162	0,1280	0
0,9	0,5187	0,5147	0,5027	0,4824	0,4536	0,4157	0,3678	0,3085	0,2351	0,1414	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,2341	0,2317	0,2246	0,2128	0,1962	0,1750	0,1493	0,1189	0,0841	0,0446	0
0,2	0,2740	0,2713	0,2633	0,2499	0,2311	0,2070	0,1775	0,1425	0,1017	0,0548	0
0,3	0,3129	0,3099	0,3011	0,2863	0,2656	0,2388	0,2058	0,1664	0,1200	0,0657	0
0,4	0,3505	0,3473	0,3377	0,3217	0,2992	0,2700	0,2339	0,1903	0,1387	0,0771	0
0,5	0,3866	0,3831	0,3729	0,3559	0,33177	0,3004	0,2615	0,2142	0,1576	0,0891	0
0,6	0,4210	0,4174	0,4067	0,3886	0,3632	0,3300	0,2885	0,2379	0,1766	0,1015	0
0,7	0,4537	0,4500	0,4388	0,4200	0,3934	0,3585	0,3148	0,2612	0,1957	0,1142	0
0,8	0,4848	0,4810	0,4694	0,4499	0,4223	0,3860	0,3403	0,2840	0,2147	0,1273	0
0,9	0,5143	0,5103	0,4984	0,4784	0,4499	0,4124	0,3651	0,3064	0,2336	0,1407	0

Таблиця Г.64 – Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількості ітерацій  $N$  і норми  $\|u^{(N)}\|$  наближеного розв'язку  $u^{(N)}$  задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничній кулі, при різних  $p$  та  $q$  і  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$q$	$p = 0,1$				$p = 0,2$				$p = 0,3$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,59218	0,66204	3	0,3023	0,53866	0,62786	3	0,2835	0,49666	0,59736	3	0,2668
0,2	0,63927	0,78656	4	0,3306	0,58791	0,76153	4	0,3140	0,54753	0,73891	5	0,2993
0,3	0,67520	0,95359	5	0,3592	0,62397	0,94088	5	0,3445	0,58339	0,92912	6	0,3315
0,4	0,69141	1,19396	6	0,3877	0,63770	1,20089	7	0,3747	0,59459	1,20718	8	0,3630
0,5	0,67659	1,57809	8	0,4157	0,61710	1,62360	9	0,4041	0,56856	1,66742	10	0,3936
0,6	0,61794	2,29109	11	0,4430	0,54892	2,43446	12	0,4326	0,49161	2,58122	14	0,4232
0,7	0,50972	3,91714	15	0,4694	0,42855	4,39929	17	0,4601	0,36016	4,95252	19	0,4516
0,8	0,37560	8,70986	21	0,4948	0,28619	10,7992	24	0,4864	0,21082	13,7709	27	0,4786
0,9	0,27133	28,5794	30	0,5192	0,18625	40,0742	36	0,5115	0,11711	60,8201	43	0,5045
$q$	$p = 0,4$				$p = 0,5$				$p = 0,6$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,46428	0,57050	4	0,2524	0,43967	0,54717	4	0,2401	0,42112	0,52715	4	0,2298
0,2	0,51629	0,71847	5	0,2864	0,49241	0,70006	5	0,2753	0,47433	0,68357	5	0,2659
0,3	0,55173	0,91789	6	0,3200	0,52735	0,90695	7	0,3099	0,50876	0,89624	7	0,3013
0,4	0,56054	1,21199	8	0,3527	0,53401	1,21486	9	0,3436	0,51359	1,21565	9	0,3357
0,5	0,52963	1,70755	11	0,3843	0,49891	1,74257	12	0,3761	0,47500	1,77176	12	0,3688
0,6	0,44504	2,72562	15	0,4147	0,40800	2,86206	16	0,4072	0,37905	2,98629	17	0,4004
0,7	0,30429	5,56631	21	0,4438	0,26019	6,21676	22	0,4369	0,22651	6,87126	24	0,4307
0,8	0,15006	18,0711	31	0,4716	0,10406	24,2536	34	0,4652	0,07189	32,7240	38	0,4594
0,9	0,06483	103,542	51	0,4980	0,02966	209,321	60	0,4921	0,01014	550,340	70	0,4867
$q$	$p = 0,7$				$p = 0,8$				$p = 0,9$			
	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u^{(N)}\ $
0,1	0,40721	0,51017	4	0,2213	0,39678	0,49588	4	0,2143	0,38895	0,48395	4	0,2087
0,2	0,46071	0,66888	5	0,2580	0,45047	0,65590	5	0,2514	0,44277	0,64450	5	0,2459
0,3	0,49470	0,88583	7	0,2940	0,48410	0,87581	7	0,2877	0,47615	0,86628	7	0,2824
0,4	0,49802	1,21450	9	0,3288	0,48623	1,21169	9	0,3229	0,47736	1,20759	10	0,3178
0,5	0,45658	1,79506	13	0,3624	0,44250	1,81287	13	0,3568	0,43180	1,82587	13	0,3519
0,6	0,35672	3,09611	17	0,3945	0,33958	3,19133	18	0,3892	0,32642	3,27325	18	0,3846
0,7	0,20139	7,50004	25	0,4251	0,18280	8,08738	27	0,4201	0,16887	8,63563	28	0,4157
0,8	0,05119	43,2492	41	0,4542	0,03861	54,8803	44	0,4495	0,03088	66,9408	46	0,4453
0,9	0,00226	2129,93	81	0,4818	0,00033	12201,5	92	0,4773	0,00006	59033,5	103	0,4733

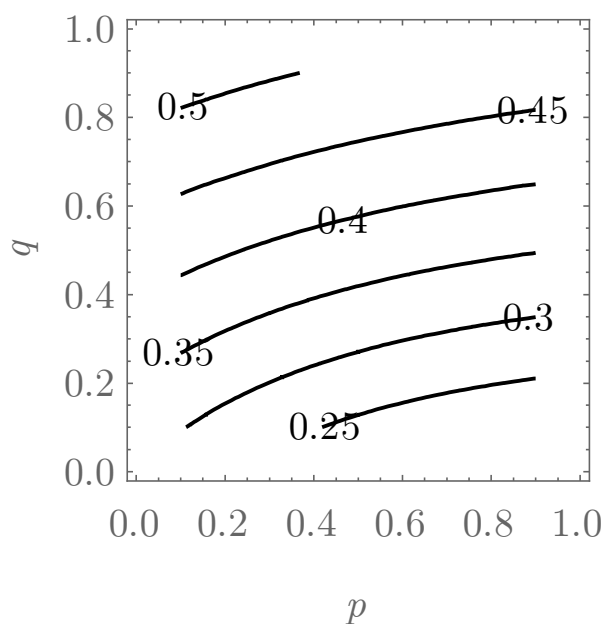


Рисунок Г.72 – Лінії рівня норми  $\|u\|$  розв'язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничній кулі в залежності від  $p$  і  $q$  при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

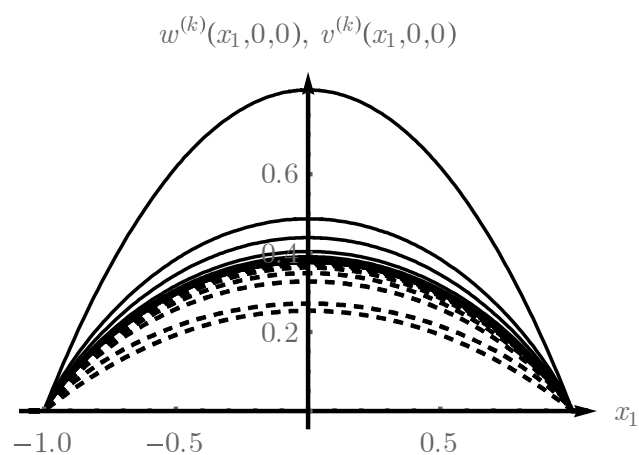


Рисунок Г.73 – Графіки нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв'язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничній кулі у перерізі  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

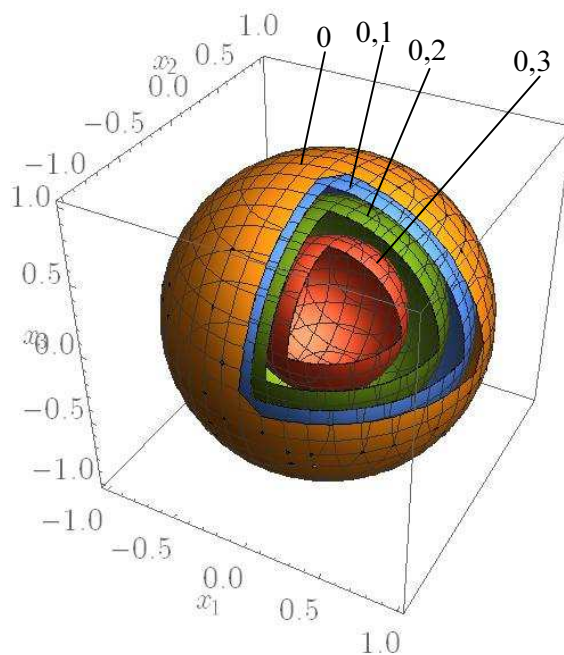


Рисунок Г.74 – Поверхні рівня наближеного розв'язку  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  задачі (4.100) – (4.102) при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.65 – Значення нижніх  $v^{(k)}(\mathbf{x})$  та верхніх  $w^{(k)}(\mathbf{x})$  наближень до розв’язку задачі (4.100) – (4.102) у одиничній кулі при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0; 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$w^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,81320	0,80546	0,78220	0,74327	0,68843	0,61737	0,52965	0,42475	0,30202	0,16072	0
$w^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,48703	0,48303	0,47096	0,45064	0,42178	0,38387	0,33618	0,27755	0,20603	0,11783	0
$w^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,43852	0,43489	0,42394	0,40550	0,37930	0,34489	0,30159	0,24839	0,18365	0,10424	0
$w^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,40353	0,40018	0,39009	0,37312	0,34899	0,31731	0,27746	0,22852	0,16898	0,09595	0
$w^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,39028	0,38705	0,37730	0,36090	0,33758	0,30695	0,26843	0,22110	0,16351	0,09286	0
$w^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,38287	0,37969	0,37013	0,35403	0,33115	0,30109	0,26329	0,21686	0,16037	0,09107	0
$w^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37952	0,37637	0,36689	0,35094	0,32826	0,29847	0,26100	0,21498	0,15898	0,09028	0
$w^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37775	0,37462	0,36519	0,34930	0,32673	0,29708	0,25979	0,21398	0,15824	0,08986	0
$w^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37691	0,37379	0,36437	0,34852	0,32600	0,29642	0,25921	0,21350	0,15788	0,08966	0
$w^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37648	0,37336	0,36395	0,34812	0,32562	0,29607	0,25891	0,21325	0,15770	0,08955	0
$w^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37626	0,37315	0,36374	0,34792	0,32544	0,29591	0,25876	0,21313	0,15761	0,08950	0
$w^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37616	0,37304	0,36364	0,34783	0,32535	0,29582	0,25869	0,21307	0,15757	0,08948	0
$w^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37610	0,37299	0,36359	0,34778	0,32530	0,29578	0,25865	0,21304	0,15755	0,08947	0
$u^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37605	0,37293	0,36354	0,34773	0,32525	0,29574	0,25861	0,21301	0,15752	0,08945	0
$v^{(12)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37600	0,37288	0,36349	0,34768	0,32521	0,29570	0,25858	0,21298	0,15750	0,08944	0
$v^{(11)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37594	0,37283	0,36343	0,34763	0,32516	0,29565	0,25854	0,21295	0,15748	0,08943	0
$v^{(10)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37584	0,37272	0,36333	0,34753	0,32507	0,29557	0,25847	0,21289	0,15743	0,08940	0
$v^{(9)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37562	0,37251	0,36312	0,34733	0,32488	0,29540	0,25832	0,21277	0,15734	0,08935	0
$v^{(8)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37520	0,37209	0,36271	0,34694	0,32452	0,29507	0,25803	0,21253	0,15717	0,08925	0
$v^{(7)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37433	0,37123	0,36188	0,34614	0,32377	0,29439	0,25743	0,21204	0,15680	0,08904	0
$v^{(6)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,37267	0,36958	0,36027	0,34460	0,32233	0,29308	0,25629	0,21110	0,15611	0,08865	0
$v^{(5)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,36917	0,36611	0,35689	0,34137	0,31930	0,29033	0,25388	0,20911	0,15463	0,08781	0
$v^{(4)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,36287	0,35986	0,35080	0,33554	0,31386	0,28539	0,24957	0,20557	0,15203	0,08634	0
$v^{(3)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,34883	0,34593	0,33721	0,32254	0,30168	0,27429	0,23985	0,19754	0,14607	0,08294	0
$v^{(2)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,32769	0,32497	0,31679	0,30302	0,28344	0,25772	0,22537	0,18561	0,13724	0,07790	0
$v^{(1)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,27196	0,26972	0,26298	0,25164	0,23552	0,21435	0,18772	0,15498	0,11505	0,06579	0
$v^{(0)}(x_1^{(i)}, 0, 0)$	0,25356	0,25115	0,24389	0,23175	0,21466	0,19250	0,16515	0,13244	0,09417	0,05011	0



Таблиця Г.66 – Значення наближених розв’язків задачі (4.100) – (4.102) у  
 одиничній кулі при різних  $p$  і  $q$  та  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ ) у точках  
 $(x_1^{(i)}, 0, 0) = (0, 1i; 0; 0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,1$										
0,1	0,3023	0,2995	0,2909	0,2765	0,2563	0,2300	0,1976	0,1587	0,1131	0,0604	0
0,2	0,3306	0,3276	0,3185	0,3033	0,2817	0,2537	0,2188	0,1768	0,1270	0,0687	0
0,3	0,3592	0,3561	0,3465	0,3304	0,3077	0,2780	0,2409	0,1958	0,1419	0,0779	0
0,4	0,3877	0,3844	0,3744	0,3577	0,3338	0,3026	0,2634	0,2155	0,1576	0,0878	0
0,5	0,4157	0,4123	0,4020	0,3846	0,3598	0,3272	0,2861	0,2355	0,1739	0,0983	0
0,6	0,4430	0,4395	0,4288	0,4109	0,3853	0,3516	0,3088	0,2558	0,1906	0,1095	0
0,7	0,4694	0,4658	0,4549	0,4366	0,4103	0,3755	0,3313	0,2761	0,2076	0,1212	0
0,8	0,4948	0,4912	0,4801	0,4614	0,4346	0,3989	0,3534	0,2963	0,2248	0,1334	0
0,9	0,5192	0,5155	0,5043	0,4853	0,4580	0,4216	0,3750	0,3162	0,2421	0,1459	0
$q$	$p = 0,2$										
0,1	0,2835	0,2808	0,2726	0,2590	0,2398	0,2150	0,1843	0,1477	0,1050	0,0559	0
0,2	0,3140	0,3111	0,3024	0,2878	0,2671	0,2403	0,2071	0,1671	0,1198	0,0647	0
0,3	0,3445	0,3415	0,3322	0,3167	0,2948	0,2661	0,2304	0,1871	0,1355	0,0743	0
0,4	0,3747	0,3715	0,3618	0,3455	0,3223	0,2921	0,2541	0,2077	0,1519	0,0846	0
0,5	0,4041	0,4008	0,3907	0,3737	0,3495	0,3178	0,2778	0,2286	0,1688	0,0955	0
0,6	0,4326	0,4292	0,4188	0,4012	0,3762	0,3431	0,3013	0,2496	0,1860	0,1069	0
0,7	0,4601	0,4565	0,4458	0,4278	0,4020	0,3679	0,3245	0,2705	0,2035	0,1189	0
0,8	0,4864	0,4828	0,4719	0,4535	0,4271	0,3920	0,3473	0,2912	0,2211	0,1313	0
0,9	0,5115	0,5079	0,4968	0,4781	0,4512	0,4154	0,3695	0,3116	0,2387	0,1440	0
$q$	$p = 0,3$										
0,1	0,2668	0,2643	0,2565	0,2436	0,2254	0,2018	0,1729	0,1384	0,0982	0,0522	0
0,2	0,2993	0,2965	0,2881	0,2741	0,2543	0,2287	0,1969	0,1587	0,1138	0,0614	0
0,3	0,3315	0,3285	0,3196	0,3046	0,2834	0,2557	0,2213	0,1797	0,1301	0,0713	0
0,4	0,3630	0,3599	0,3505	0,3346	0,3122	0,2828	0,2460	0,2011	0,1470	0,0819	0
0,5	0,3936	0,3904	0,3805	0,3640	0,3404	0,3095	0,2705	0,2226	0,1644	0,0931	0
0,6	0,4232	0,4198	0,4096	0,3924	0,3679	0,3356	0,2947	0,2442	0,1820	0,1048	0
0,7	0,4516	0,4481	0,4376	0,4199	0,3946	0,3611	0,3185	0,2656	0,1999	0,1170	0
0,8	0,4786	0,4751	0,4644	0,4462	0,4203	0,3858	0,3418	0,2867	0,2178	0,1295	0
0,9	0,5045	0,50091	0,4900	0,4715	0,4450	0,4097	0,3645	0,3075	0,2357	0,1424	0

Продовження таблиці Г.66

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,4$										
0,1	0,2524	0,2499	0,2426	0,2302	0,2130	0,1906	0,1632	0,1306	0,0927	0,0492	0
0,2	0,2864	0,2837	0,2757	0,2622	0,2433	0,2186	0,1882	0,1517	0,1087	0,0587	0
0,3	0,3200	0,3171	0,3084	0,2939	0,2735	0,2468	0,2136	0,1734	0,1256	0,0689	0
0,4	0,3527	0,3496	0,3405	0,3251	0,3032	0,2747	0,2389	0,1954	0,1429	0,0797	0
0,5	0,3843	0,3811	0,3715	0,3553	0,3323	0,3021	0,2641	0,2174	0,1607	0,0911	0
0,6	0,4147	0,4114	0,4014	0,3846	0,3606	0,3289	0,2889	0,2395	0,1787	0,1030	0
0,7	0,4438	0,4404	0,4301	0,4127	0,3879	0,3550	0,3132	0,2613	0,1968	0,1153	0
0,8	0,4716	0,4681	0,4575	0,4397	0,4141	0,3802	0,3370	0,2828	0,2150	0,1280	0
0,9	0,4980	0,4944	0,4837	0,4655	0,4393	0,4046	0,3600	0,3039	0,2331	0,1411	0
$q$	$p = 0,5$										
0,1	0,2401	0,2377	0,2307	0,2190	0,2025	0,1813	0,1552	0,1242	0,0881	0,0469	0
0,2	0,2753	0,2728	0,2650	0,2521	0,2338	0,2102	0,1809	0,1459	0,1046	0,0565	0
0,3	0,3099	0,3072	0,2988	0,2848	0,2649	0,2391	0,2069	0,1681	0,1218	0,0669	0
0,4	0,3436	0,3406	0,3317	0,3167	0,2955	0,2677	0,2329	0,1905	0,1395	0,0779	0
0,5	0,3761	0,3729	0,3635	0,3477	0,3253	0,2957	0,2586	0,2130	0,1575	0,0895	0
0,6	0,4072	0,4039	0,3941	0,3776	0,3541	0,3231	0,2839	0,2354	0,1758	0,1015	0
0,7	0,4369	0,4335	0,4234	0,4063	0,3819	0,3496	0,3086	0,2575	0,1941	0,1139	0
0,8	0,4652	0,4618	0,4514	0,4338	0,4086	0,3752	0,3326	0,2793	0,2125	0,1268	0
0,9	0,4921	0,4886	0,4780	0,4600	0,4342	0,4000	0,3560	0,3006	0,2308	0,1399	0
$q$	$p = 0,6$										
0,1	0,2298	0,2276	0,2208	0,2096	0,1939	0,1736	0,1486	0,1190	0,0845	0,0450	0
0,2	0,2659	0,2634	0,2560	0,2435	0,2259	0,2031	0,1749	0,1411	0,1013	0,0548	0
0,3	0,3013	0,2986	0,2905	0,2769	0,2576	0,2326	0,2014	0,1637	0,1187	0,0653	0
0,4	0,3357	0,3328	0,3241	0,3095	0,2888	0,2617	0,2278	0,1864	0,1366	0,0764	0
0,5	0,3688	0,3657	0,3565	0,3411	0,3191	0,2902	0,2539	0,2092	0,1549	0,0881	0
0,6	0,4004	0,3973	0,3877	0,3715	0,3484	0,3179	0,2795	0,2319	0,1733	0,1002	0
0,7	0,4307	0,4274	0,4174	0,4006	0,3766	0,3448	0,3045	0,2542	0,1919	0,1128	0
0,8	0,4594	0,4560	0,4458	0,4285	0,4037	0,3708	0,3288	0,2762	0,2104	0,1257	0
0,9	0,4867	0,4832	0,4728	0,4550	0,4296	0,3958	0,3524	0,2978	0,2288	0,1389	0

Кінець таблиці Г.66

$(x_1^{(i)}, 0, 0)$	(0, 0, 0)	(0,1; 0; 0)	(0,2; 0; 0)	(0,3; 0; 0)	(0,4; 0; 0)	(0,5; 0; 0)	(0,6; 0; 0)	(0,7; 0; 0)	(0,8; 0; 0)	(0,9; 0; 0)	(1; 0; 0)
$q$	$p = 0,7$										
0,1	0,2213	0,2191	0,2127	0,2019	0,1868	0,1673	0,1433	0,1148	0,0816	0,0435	0
0,2	0,2580	0,2556	0,2484	0,2363	0,2193	0,1972	0,1699	0,1372	0,0986	0,0534	0
0,3	0,2940	0,2913	0,2834	0,2702	0,2515	0,2271	0,1967	0,1600	0,1162	0,0640	0
0,4	0,3288	0,3260	0,3175	0,3032	0,2830	0,2566	0,2234	0,1830	0,1343	0,0752	0
0,5	0,3624	0,3594	0,3504	0,3352	0,3137	0,2854	0,2498	0,2060	0,1527	0,0870	0
0,6	0,3945	0,3914	0,3819	0,3660	0,3433	0,3135	0,2757	0,2289	0,1712	0,0992	0
0,7	0,4251	0,4218	0,4120	0,3955	0,3719	0,3406	0,3009	0,2514	0,1899	0,1118	0
0,8	0,4542	0,4508	0,4408	0,4237	0,3993	0,3668	0,3255	0,2736	0,2085	0,1248	0
0,9	0,4818	0,4784	0,4680	0,4505	0,4255	0,3921	0,3493	0,2953	0,2271	0,1380	0
$q$	$p = 0,8$										
0,1	0,2143	0,2123	0,2060	0,1956	0,1810	0,1622	0,1390	0,1115	0,0793	0,0424	0
0,2	0,2514	0,2491	0,2421	0,2303	0,2138	0,1924	0,1658	0,1340	0,0964	0,0524	0
0,3	0,2877	0,2851	0,2774	0,2645	0,2463	0,2225	0,1929	0,1570	0,1141	0,0630	0
0,4	0,3229	0,3202	0,3118	0,2979	0,2781	0,2522	0,2197	0,1801	0,1323	0,0743	0
0,5	0,3568	0,3539	0,3450	0,3302	0,3090	0,2813	0,2463	0,2033	0,1508	0,0861	0
0,6	0,3892	0,3861	0,3769	0,3612	0,3389	0,3095	0,2724	0,2263	0,1695	0,0983	0
0,7	0,4201	0,4169	0,4073	0,3910	0,3677	0,3369	0,2978	0,2490	0,1882	0,1110	0
0,8	0,4495	0,4462	0,4362	0,4194	0,3953	0,3633	0,3225	0,2713	0,2069	0,1240	0
0,9	0,4773	0,4740	0,4638	0,4465	0,4217	0,3887	0,3464	0,2931	0,2256	0,1373	0
$q$	$p = 0,9$										
0,1	0,2087	0,2066	0,2006	0,1905	0,1764	0,1581	0,1356	0,1088	0,0776	0,0415	0
0,2	0,2459	0,2436	0,2368	0,2254	0,2093	0,1884	0,1625	0,1314	0,0946	0,0515	0
0,3	0,2824	0,2799	0,2724	0,2597	0,2419	0,2186	0,1896	0,1545	0,1124	0,0622	0
0,4	0,3178	0,3151	0,3070	0,2933	0,2739	0,2485	0,2166	0,1777	0,1307	0,0735	0
0,5	0,3519	0,3490	0,3404	0,3258	0,3050	0,2777	0,2433	0,2010	0,1492	0,0853	0
0,6	0,3846	0,3815	0,3724	0,3570	0,3351	0,3061	0,2695	0,2241	0,1680	0,0976	0
0,7	0,4157	0,4125	0,4030	0,3870	0,3640	0,3337	0,2950	0,2468	0,1868	0,1103	0
0,8	0,4453	0,4420	0,4322	0,4156	0,3918	0,3602	0,3199	0,2692	0,2056	0,1234	0
0,9	0,4733	0,4700	0,4599	0,4428	0,4184	0,3857	0,3439	0,2911	0,2243	0,1367	0

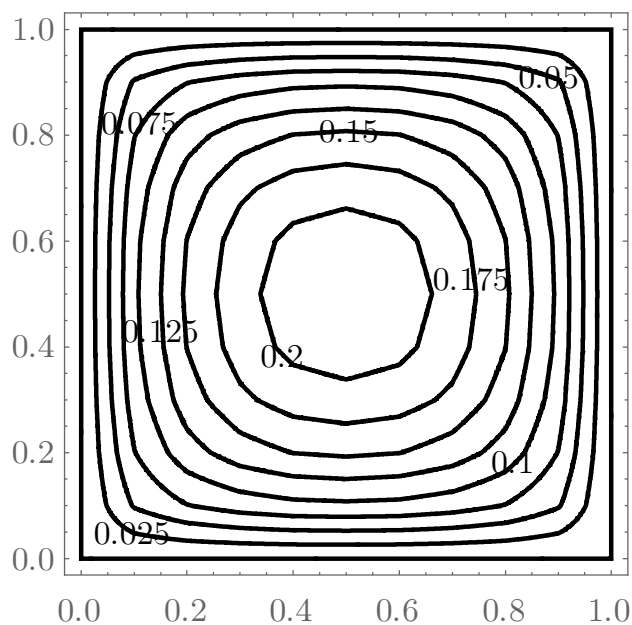
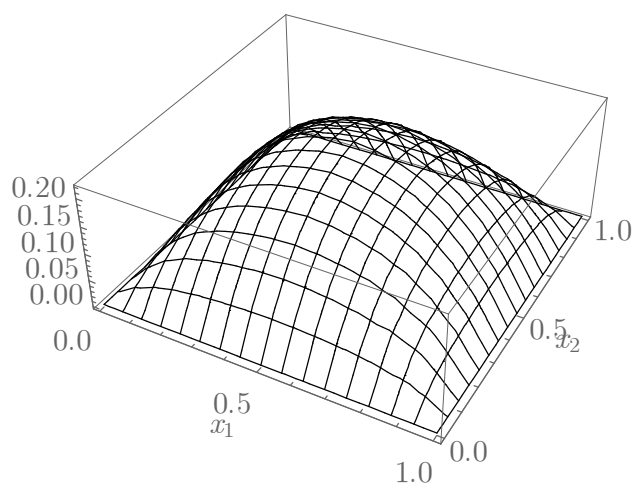


Рисунок Г.75 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

Рисунок Г.76 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

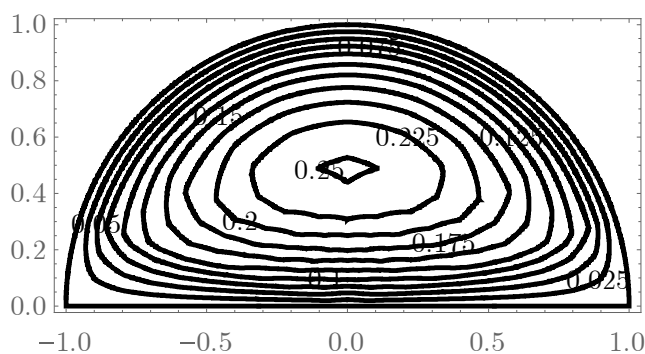
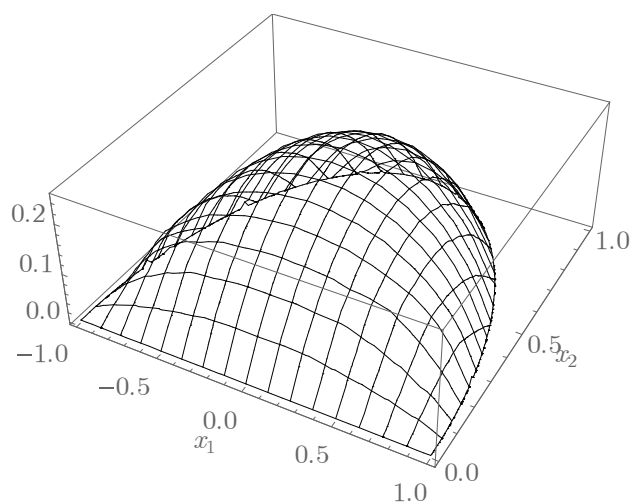


Рисунок Г.77 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

Рисунок Г.78 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у половині одиничного кола, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

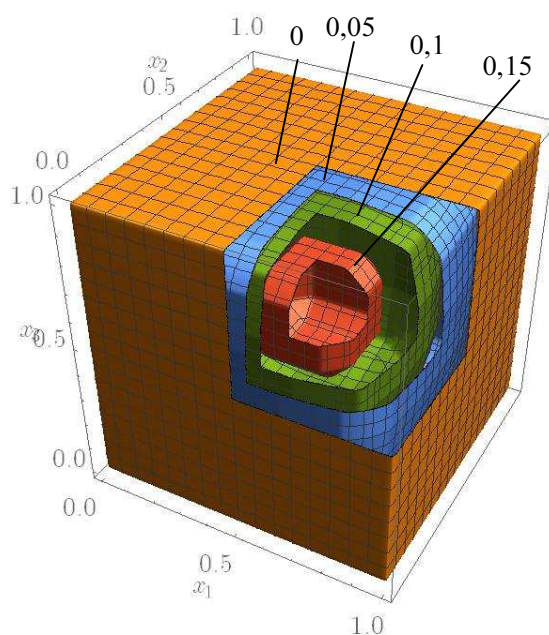


Рисунок Г.79 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному кубі, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

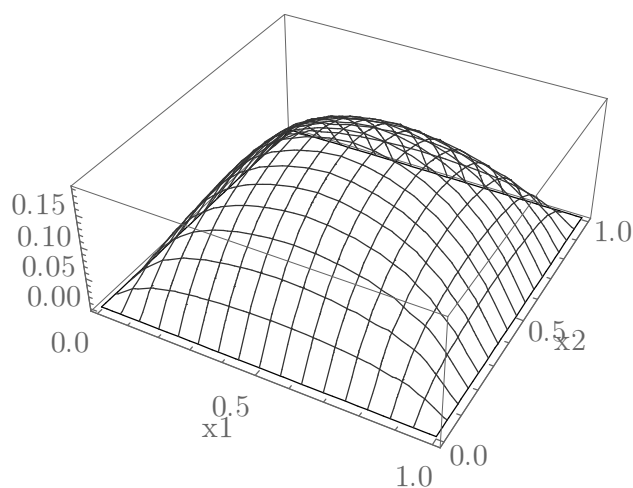


Рисунок Г.80 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

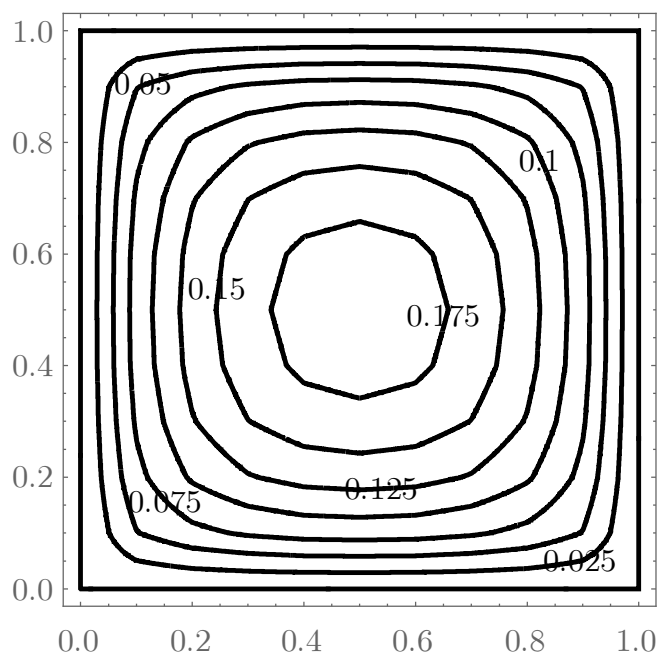


Рисунок Г.81 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному квадраті, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

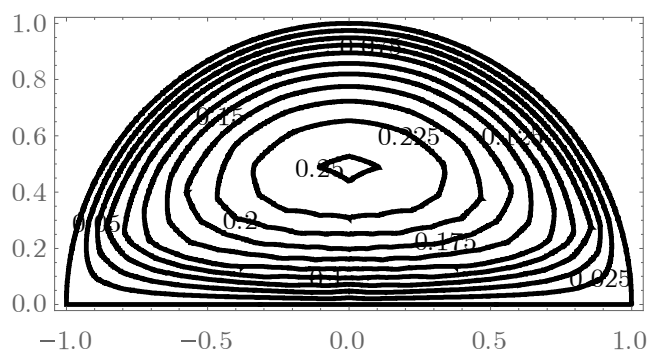
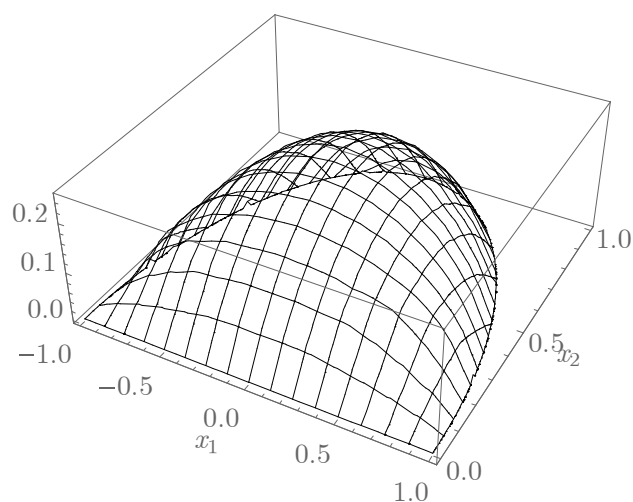


Рисунок Г.82 – Поверхня наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102),

що розглядається у половині

одиничного кола,

при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,

$\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Рисунок Г.83 – Лінії рівня наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102),

що розглядається у половині

одиничного кола,

при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,

$\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

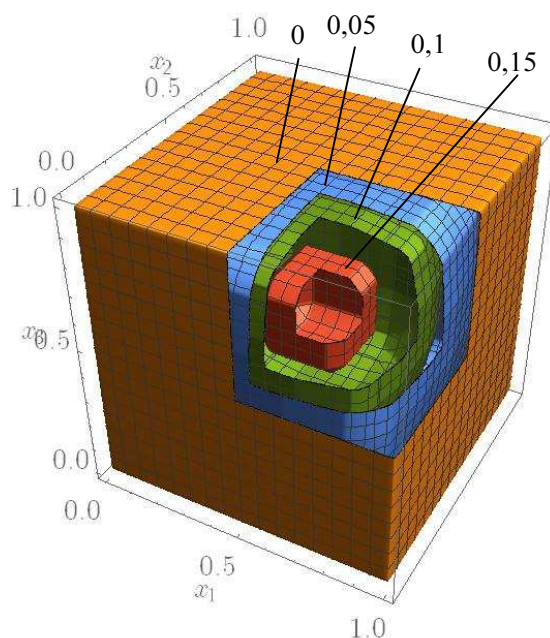


Рисунок Г.84 – Поверхні рівня наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному кубі, при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

Таблиця Г.67 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0522	0,0741	0,0864	0,0934	0,0951
0,2	0	0,0741	0,1145	0,1380	0,1505	0,1544
0,3	0	0,0864	0,1380	0,1695	0,1866	0,1919
0,4	0	0,0934	0,1505	0,1866	0,2068	0,2129
0,5	0	0,0951	0,1544	0,1919	0,2129	0,2194

Таблиця Г.68 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0583	0,1029	0,1377	0,1623	0,1755	0,1764	0,1629	0,1329	0,0818	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0937	0,1585	0,2028	0,2287	0,2369	0,2281	0,2018	0,1575	0,0928	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,1065	0,1770	0,2229	0,2479	0,2533	0,2411	0,2111	0,1636	0,0965	0

Таблиця Г.69 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.97) – (4.99), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3=0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3=0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0109	0,0218	0,0234	0,0249	0,0249
	$x_2 = 0,2$	0	0,0218	0,0437	0,0468	0,0499	0,0499
	$x_2 = 0,3$	0	0,0234	0,0467	0,0515	0,0563	0,0563
	$x_2 = 0,4$	0	0,0249	0,0498	0,0562	0,0627	0,0627
	$x_2 = 0,5$	0	0,0249	0,0498	0,0562	0,0627	0,0627
$x_3=0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0218	0,0437	0,0468	0,0499	0,0499
	$x_2 = 0,2$	0	0,0437	0,0873	0,0935	0,0998	0,0998
	$x_2 = 0,3$	0	0,0467	0,0935	0,1030	0,1125	0,1125
	$x_2 = 0,4$	0	0,0498	0,0996	0,1125	0,1253	0,1253
	$x_2 = 0,5$	0	0,0498	0,0996	0,1125	0,1253	0,1253
$x_3=0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0234	0,0468	0,0515	0,0563	0,0563
	$x_2 = 0,2$	0	0,0468	0,0935	0,1031	0,1126	0,1126
	$x_2 = 0,3$	0	0,0515	0,1030	0,1160	0,1289	0,1289
	$x_2 = 0,4$	0	0,0562	0,1125	0,1288	0,1452	0,1452
	$x_2 = 0,5$	0	0,0562	0,1125	0,1288	0,1452	0,1452
$x_3=0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0249	0,0499	0,0563	0,0627	0,0627
	$x_2 = 0,2$	0	0,0499	0,0998	0,1126	0,1255	0,1255
	$x_2 = 0,3$	0	0,0563	0,1125	0,1289	0,1453	0,1453
	$x_2 = 0,4$	0	0,0627	0,1253	0,1452	0,1651	0,1651
	$x_2 = 0,5$	0	0,0627	0,1253	0,1452	0,1651	0,1651
$x_3=0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0249	0,0499	0,0563	0,0627	0,0627
	$x_2 = 0,2$	0	0,0499	0,0998	0,1126	0,1255	0,1255
	$x_2 = 0,3$	0	0,0563	0,1125	0,1289	0,1453	0,1453
	$x_2 = 0,4$	0	0,0627	0,1253	0,1452	0,1651	0,1651
	$x_2 = 0,5$	0	0,0627	0,1253	0,1452	0,1651	0,1651



Таблиця Г.70 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному квадраті, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (0,1i; 0,1j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5, q = 0,5, \lambda = 1, \mu = 1 (\kappa = 1)$

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0490	0,0682	0,0785	0,0843	0,0857
0,2	0	0,0682	0,1034	0,1232	0,1334	0,1366
0,3	0	0,0785	0,1232	0,1495	0,1635	0,1679
0,4	0	0,0843	0,1334	0,1635	0,1802	0,1851
0,5	0	0,0857	0,1366	0,1679	0,1851	0,1903

Таблиця Г.71 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у половині одиничного круга, в точках  $(\rho_i, \varphi_j) = \left(0,1i; \frac{\pi j}{6}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10, j = 0, 1, 2, 3$ , при  $p = 0,5, q = 0,5, \lambda = 1, \mu = 1 (\kappa = 1)$

$(\rho_i, \varphi_j)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0	0,0583	0,1029	0,1377	0,1623	0,1755	0,1764	0,1629	0,1329	0,0818	0
$\frac{\pi}{3}$	0	0,0937	0,1585	0,2028	0,2287	0,2369	0,2281	0,2018	0,1575	0,0928	0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,1065	0,1770	0,2229	0,2479	0,2533	0,2411	0,2111	0,1636	0,0965	0

Таблиця Г.72 – Значення наближеного розв'язку задачі (4.100) – (4.102), що розглядається у одиничному кубі, в точках  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)}) = (0, 1i; 0, 1j; 0, 1k)$ ,  $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ , при  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\kappa = 1$ )

$(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(k)})$		$x_1 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_1 = 0,2$	$x_1 = 0,3$	$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,5$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,2$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,3$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,4$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,5$	0	0	0	0	0	0
$x_3 = 0,1$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0107	0,0214	0,0229	0,0243	0,0243
	$x_2 = 0,2$	0	0,0213	0,0428	0,0457	0,0486	0,0486
	$x_2 = 0,3$	0	0,0228	0,0457	0,0502	0,0547	0,0547
	$x_2 = 0,4$	0	0,0243	0,0486	0,0547	0,0608	0,0608
	$x_2 = 0,5$	0	0,0243	0,0486	0,0547	0,0608	0,0608
$x_3 = 0,2$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0214	0,0428	0,0457	0,0486	0,0486
	$x_2 = 0,2$	0	0,0428	0,0856	0,0914	0,0972	0,0972
	$x_2 = 0,3$	0	0,0457	0,0913	0,1004	0,1094	0,1094
	$x_2 = 0,4$	0	0,0486	0,0971	0,1093	0,1216	0,1216
	$x_2 = 0,5$	0	0,0486	0,0971	0,1093	0,1216	0,1216
$x_3 = 0,3$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0229	0,0457	0,0502	0,0548	0,0548
	$x_2 = 0,2$	0	0,0457	0,0914	0,1005	0,1095	0,1095
	$x_2 = 0,3$	0	0,0502	0,1004	0,1127	0,1250	0,1250
	$x_2 = 0,4$	0	0,0547	0,1093	0,1249	0,1406	0,1406
	$x_2 = 0,5$	0	0,0547	0,1093	0,1249	0,1406	0,1406
$x_3 = 0,4$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0243	0,0486	0,0548	0,0609	0,0609
	$x_2 = 0,2$	0	0,0486	0,0972	0,1095	0,1218	0,1218
	$x_2 = 0,3$	0	0,0547	0,1094	0,1250	0,1406	0,1406
	$x_2 = 0,4$	0	0,0608	0,1216	0,1406	0,1595	0,1595
	$x_2 = 0,5$	0	0,0608	0,1216	0,1406	0,1595	0,1595
$x_3 = 0,5$	$x_2 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$x_2 = 0,1$	0	0,0243	0,0486	0,0548	0,0609	0,0609
	$x_2 = 0,2$	0	0,0486	0,0972	0,1095	0,1218	0,1218
	$x_2 = 0,3$	0	0,0547	0,1094	0,1250	0,1406	0,1406
	$x_2 = 0,4$	0	0,0608	0,1216	0,1406	0,1595	0,1595
	$x_2 = 0,5$	0	0,0608	0,1216	0,1406	0,1595	0,1595