

Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛУХАНІН ВОЛОДИМИР СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.95 : 519.63

ДИСЕРТАЦІЯ

**КОНСТРУКТИВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ
ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Підпис В.С. Луханін

Науковий керівник

Колосова Світлана Василівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Цей примірник дисертаційної роботи ідентичний за змістом
з іншими, поданими до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Луханін Володимир Сергійович. Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2019.

У сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики, найчастіше з параметрами.

У більшості випадків знайти точний розв'язок таких задач практично неможливо, а тому важливу роль відіграють наближені методи розв'язання. При цьому особливе значення мають апріорні оцінки та теореми збіжності. Але вони, зазвичай, не дають строгих, гарантованих оцінок близькості конкретних наближених та точних методів. Таку властивість мають двобічні обчислювальні методи, які дають зручну апостеріорну оцінку обчислюваної похибки. Обґрунтування та розвиток двобічні методи розв'язання операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах із конусом набули в роботах М.О. Красносельського та його учнів.

Оскільки до операторного рівняння, що є еквівалентним крайовій задачі для еліптичного рівняння, входить функція Гріна, та її точний вигляд відомий лише для деяких доволі простих областей, то виникає питання розв'язання таких задач у областях складної геометрії. Академіком НАН України В.Л. Рвачовим розроблено метод квазіфункцій Гріна для застосування до лінійних еліптичних рівнянь, який разом із застосуванням конструктивного апарату теорії R -функцій дозволяє звести вихідну задачу до еквівалентного лінійного інтегрального рівняння у області, геометрія якої може бути описана за допомогою R -функцій.

Отже, побудова двобічних наближень та розвиток методу квазіфункцій Гріна до розв'язання конкретних крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь є актуальною науковою задачею.

Метою досліджень дисертаційної роботи є розробка конструктивних методів знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходження умов, яким мають задовольняти параметри, що входять до постановки задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- звести нелінійну еліптичну крайову задачу до операторного рівняння;
- методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах дослідити властивості оператора отриманого рівняння, зокрема, монотонність, антитонність або гетеротонність;
- дослідити можливість побудови конусного відрізка, інваріантного для оператора монотонного типу та сильно інваріантного для оператора антитонного або гетеротонного типу, що містить розв'язок вихідної крайової задачі, та запропонувати безпосередньо процедуру для його побудови;
- дослідити оператор на угнутість (для оператора монотонного типу) або псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу);
- дослідити оператор на u_0 -угнутість (для оператора монотонного типу) або u_0 -псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу), щоб мати змогу не лише робити висновки про існування єдиного розв'язку, а й накласти умови на параметри, що входять до задач;
- у разі неможливості отримання двобічних наближень розвинути метод квазіфункцій Гріна для його застосування до задач, що розглядаються;
- провести ряд обчислювальних експериментів для задач, що розглядаються, в різних областях.

Об'єктом дослідження є процеси, що описуються крайовими задачами для нелінійних еліптичних рівнянь, які зводяться до операторних рівнянь з оператором монотонного, антитонного або гетеротонного типу.

Предметом дослідження є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь та методи їх чисельного аналізу.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах для знаходження наближених розв'язків, апарат теорії R -функцій – для побудови рівнянь меж областей, в яких розглядаються крайові задачі, метод квазіфункцій Гріна – для зведення нелінійної крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння, формули чисельного інтегрування та інтерполяції функцій – для спрощення обчислень.

Численні задачі науки та техніки зводяться до математичних моделей, що описуються операторними рівняннями.

Дослідження питання існування та єдиності розв'язку цих рівнянь, а також побудова наближених методів їх розв'язання є одними з основних питань, що розглядаються в теорії операторних рівнянь.

У роботі спочатку розглядаються ідеї основних методів розв'язання лінійних та нелінійних рівнянь другого роду, а саме: метод простої ітерації, метод універсальної ітерації, апроксимаційні методи (апроксимація оператора та апроксимація розв'язку), апроксимаційно-ітеративні методи, метод розщеплення оператора, метод розщеплення розв'язку.

Оскільки більшість математичних моделей фізичних процесів містить різні класи алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, які неможливо розв'язати точно, то велику роль грають наближені методи розв'язання, та питання величини похибки стає визначним.

Існує велика кількість прямих та непрямих методів оцінки точності похибки. Більшість з них дають корисні, а інколи – вичерпні рекомендації з вибору стратегії та методів наближених обчислень. Але вони, зазвичай, не дають строгих, гарантованих оцінок близькості конкретних наближених та точних методів. Таку властивість мають деякі двобічні обчислювальні методи, які відносяться до прямих методів оцінки точності обчислюваної похибки.

Для дослідження крайових задач та побудови двобічних наближень використовується теорія операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах.

Наводяться основні визначення теорії та теореми про існування та єдиність розв'язку, а також збіжність послідовних наближень до нього для різних типів операторів.

Далі розглядається ряд крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами та відповідні їм інтегральні рівняння із різними типами операторів.

Для кожного рівняння з монотонним типом оператора проводиться дослідження на монотонність, існування інваріантного конусного відрізка, угнутість та u_0 -угнутість.

Для рівнянь із антитонним та гетеротонним типами операторів проводиться дослідження на антитонність та гетеротонність відповідно, існування сильно інваріантного конусного відрізка, псевдоугнутість а також u_0 -псевдоугнутість.

У результаті дослідження для кожної з розглянутих задач знаходяться умови, яким мають задовольняти параметри, що входять до рівнянь, щоб виконувалися наведені властивості оператора. Використовуючи їх, будується ітераційний процес для двобічних наближень та доводиться його рівномірна збіжність з обох боків до єдиного невід'ємного розв'язку відповідного операторного рівняння.

Оскільки функцію Гріна оператора першої крайової задачі дуже складно побудувати для областей довільної геометричної структури, то пропонується використовувати метод квазіфункцій Гріна, який розвинуто для застосування до нелінійних рівнянь. При цьому квазіфункція Гріна будується, використовуючи конструктивний апарат теорії R -функцій.

Перед проведенням обчислювального експерименту наводяться функції Гріна для декількох конкретних областей, кубатурні формули Гауса чисельного інтегрування та формули кусково-лінійної інтерполяції, які використовуються подалі.

Для кожної з досліджених крайових задач відшукуються двобічні наближення, а також наближення, отримані за допомогою методу квазіфункцій Гріна. Обчислення проводяться у декількох конкретних областях для різних значень параметрів, що входять до рівнянь крайових задач та задовольняють умовам

збіжності. Результати представлено у вигляді таблиць, графіків поверхонь та ліній рівня наближених розв'язків.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

- уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких, користуючись методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, доведено існування єдиного додатного розв'язку та побудовано двобічні наближення до нього;

- удосконалено метод побудови конусного відрізка при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, в частині застосування апарату теорії R -функцій для побудови лівого кінця конусного відрізка, що дозволило перетворити неминуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний;

- набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна у частині його застосування до розв'язання нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд;

- набув подальшого розвитку метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів у частині застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв'язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

Практичне значення отриманих результатів. Розглянуті методи можуть бути використані для знаходження розв'язків прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Розроблені засоби дослідження впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Вибрані глави математичної фізики», «Рівняння математичної фізики» та при виконанні атестаційних робіт.

Матеріали дисертації опубліковані у 23 наукових працях: 7 статей, з них 4 статті – у виданнях, які зазначені в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук, 2 статті – в закордонних наукових виданнях, 1 стаття – в інших виданнях, 16 тез доповідей, опублікованих в матеріалах наукових конференцій, в тому числі – 14 міжнародних.

Ключові слова: функція Гріна, квазіфункція Гріна, двобічні наближення, інваріантний конусний відрізок, сильноінваріантний конусний відрізок, угнутість, u_0 -угнутість, псевдоугнутість, u_0 -псевдоугнутість, монотонний оператор, антитонний оператор, гетеротонний оператор.

Список публікацій здобувача

1. Kolosova S.V., Lukhanin V.S, Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2018. Vol. 99. No. 3. P. 78–91.

2. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2016. Vol. 5. No. 4. P. 11–19.

3. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72.

4. Луханін В.С. Додатні розв'язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 4 (71). С. 24–27.

5. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.

6. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2015. № 2 (69). С. 16–18.

7. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // *Вісник Запорізького національного університету*. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35–42.

8. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of one nonlinear elliptic problem // *Информационные системы и технологии: материалы 5-й Международной научно-технической конференции*, 12–17 сентября 2016 г. Коблево, Харьков, 2016. С. 109–110.

9. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки задачі Ліувілля-Гельфанда // *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали 17-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука*, 19–20 травня 2016 р. Київ, 2016. Т. 1. С. 147–149.

10. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з нелінійністю // *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного молодіжного форуму*, 19–21 квітня 2016 р. Харьков, 2016. Т. 7. С. 102–103.

11. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції*, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 362–365.

12. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції*, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 185–188.

13. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для эллиптической краевой задачи с экспоненциальной нелинейностью //

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 20–22 мая 2015 г. Пенза, 2015. С. 16–20.

14. Луханін В.С. Про метод побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометричної структури // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XIX Международного молодежного форума, 20–22 апреля 2015 г. Харьков, 2015. Т. 7. С. 70–71.

15. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для одной линейной задачи // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 26–30 мая 2014 г. Пенза, 2014. С. 46–49.

16. Луханін В.С. Про деякі методи побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного молодежного форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. Т. 7. С. 114–115.

17. Луханин В.С. О построении последовательных приближений к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // XL Гагаринские чтения: научные труды Международной молодёжной научной конференции, 7–11 апреля 2014 г. Москва, 2014. Т. 5. С. 139–141.

18. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума, 10–15 июня 2013 г. Харьков, Херсон, 2013. С. 205–208.

19. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука

XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції, 17 травня 2013 р. Бухарест, 2013. Ч. I. С. 16–24.

20. Луханін В.С. Про застосування методу квазіфункцій Гріна до одного нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVII Международного молодежного форума, 22–24 апреля 2013 г. Харьков, 2013. Т. 7. С. 140–141.

21. Луханін В.С. Застосування методу функцій Гріна та методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // XVI Всеукраїнська (XI Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 11–12 квітня 2013 р. Львів, 2013. С. 94–95.

22. Луханін В.С. Наближені методи розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVI Международного молодежного форума, 17–19 апреля 2012 г. Харьков, 2012. Т. 10. С. 159–160.

23. Луханін В.С. Про деякі підходи до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // XV Всеукраїнська (X Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 5–6 квітня 2012 р. Львів, 2012. С. 232–234.

ABSTRACT

Volodymyr Serhiiiovych Lukhanin. Constructive methods of solving one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

Dissertation for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.05.02 «Mathematical modeling and computational methods». – Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

Modern science is highly interested in processes that take place in nonlinear environments. Mathematical models of these processes typically are represented by nonlinear boundary value problems of mathematical physics, often with parameters.

In most cases it is almost impossible to find the exact solution of such problems and therefore the approximate methods of solving them play the important role. Also in this case a priori estimates and convergence theorems play a special role. But they usually do not provide strict, guaranteed estimates of the proximity of specific approximate and precise methods. This property belongs to two-sided computational methods that give a convenient a posteriori estimate of the calculation error. Two-sided methods of solving operator equations in partially ordered spaces with a cone have been substantiated and developed by M.A. Krasnosel'skii and his students.

Since the Green's function is included into an operator equation that is equivalent to the boundary value problem for an elliptic equation, and its exact form is known only for some rather simple domains, the question of solving such problems in complex domains arises. Academician of the Ukrainian Academy of Sciences V.L. Rvachev has developed the Green's quasifunction method and its applications to linear elliptic equations which together with the use of the constructive apparatus of the R functions theory allows one to reduce an initial problem to an equivalent integral equation in a domain that can be described by R functions.

Therefore, the construction of two-sided approximations and the development of the Green's quasifunction method to the solution of specific boundary value problems for nonlinear elliptic equations is an actual scientific task.

The purpose of the dissertation is the development of constructive methods of searching positive solutions of one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations and finding the conditions that the parameters included into the problem must satisfy in order to guarantee the two-sided convergence of the corresponding iterative process.

To achieve this goal the following tasks need to be solved:

- reduce the nonlinear elliptic boundary value problem to the operator equation;

- investigate the properties of the operator of the obtained equation by means of the nonlinear analysis methods in partially ordered spaces, in particular, monotonicity, antitonicity or heterotonicity;
- investigate the possibility of constructing an invariant conical interval for the monotone operator and a strongly invariant one for the antitone or the heterotone operator containing the solution of the initial boundary value problem and provide the procedure for its construction explicitly;
- investigate the operator on the concavity (for the monotone operator) or pseudoconcavity (for the antitone or the heterotone operator);
- investigate the operator on the u_0 -concavity (for the monotone operator) or u_0 -pseudoconcavity (for the antitone or the heterotone operator) in order to be able not only draw to conclusions about the existence of a single solution, but also to impose conditions on the parameters included in the problems;
- develop the Green's quasifunction method for its application to the problems under consideration in case two-sided approximations can't be obtained;
- conduct a series of computational experiments for each of the problems in various domains.

The object of the research are processes described by boundary value problems for nonlinear elliptic equations, whose operators belong to a monotone, antitone or heterotone type.

The subject of the research are the boundary value problems for nonlinear elliptic equations and the methods of their numerical analysis.

The research methods are based on the use of the methods of the operator equations theory in partially ordered spaces to find approximate solutions, the mathematical apparatus of the R functions theory to construct normalized equations of domains boundary in which boundary value problems are considered, the Green's quasifunction method to reduce a nonlinear boundary value problem to a nonlinear integral equation, the formulas of the numerical integration and the function interpolation.

Numerous problems of science and technology are reduced to mathematical models which can be described by operator equations.

The study of the existence and uniqueness of the solution of these equations as well as the construction of approximate methods of solving them are one of the main issues that are considered in the theory of operator equations.

In the paper we first consider the ideas of the main methods of solving linear and nonlinear equations of the second kind, namely: the simple iteration method, the universal iteration method, approximation methods (the operator approximation and the solution approximation), approximation-iterative methods, the operator decomposition method, the solution decomposition method.

Since most mathematical models of physical processes contain different classes of algebraic, differential and integral equations that can not be solved precisely the approximate methods of solving play an important role, and the question of the error value becomes significant.

There is a large number of direct and indirect methods for assessing the accuracy of the error. Most of them provide useful and sometimes exhaustive recommendations about the choice of a strategy and methods for approximate calculation. But they usually do not provide strict guaranteed estimates of the proximity of specific approximate and precise methods. Some two-sided computational methods have this feature. They relate to direct methods for evaluating the accuracy of the calculation error.

The theory of operator equations in partially-ordered spaces is used to study boundary value problems and construct two-sided approximations. Its basic definitions and theorems about the existence and uniqueness of the solution as well as the convergence of successive approximations to it for different types of operators are provided.

Next, a series of boundary value problems for nonlinear elliptic equations with parameters and corresponding integral equations with different types of operators is considered.

The research for each of the equations with a monotone type of the operator is carried out on the monotonicity, the existence of an invariant conical interval, the concavity and the u_0 -concavity.

The research for the equations with antitone and heterotone types of the operator is carried out on the antitonicity or heterotonicity respectively, the existence of a strongly invariant conical interval, the pseudoconcavity and the u_0 -pseudoconcavity.

As a result of the research for each of the problems the conditions that the parameters included into the equations must satisfy in order to make sure that the specified operator properties are met. An iterative process of two-sided approximations is constructed using these properties and its uniform convergence from both sides to a unique positive solution of the corresponding operator equation is proved.

Since the Green's function of the operator of the first boundary value problem is very difficult to construct for domains of arbitrary geometric structure it is proposed to use the Green's quasifunction method which has been developed for its application to nonlinear equations. In this case the Green's quasifunction is constructed with the use of the constructive apparatus of the R functions theory.

Several Green's functions are provided in specific domains before the calculations. The Gaussian cubature formulas of the numerical integration and the formulas of the piecewise linear interpolation that are used later on are provided too.

For each of the boundary value problems under consideration we find the two-sided approximations as well as the approximations obtained by the Green's quasifunction method. The calculations are carried out in several specific domains with different values of the parameters included in the equations of the boundary value problems which satisfy the convergence conditions. The results are presented in the form of tables, surface and level line plots of approximations.

The scientific novelty of the obtained results. The research carried out in the dissertation allowed us to obtain the following new scientific results:

- for the first time one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations has been highlighted for which these problems can be represented as nonlinear operator equations with a monotone, antitone or heterotone operator, the existence of a unique positive solution has been proved using the methods of the operator equations theory in partially ordered spaces and two-sided approximations has been constructed that converge to this solution;

– the method of constructing a conical interval has been improved in the case of investigation of boundary value problems for nonlinear elliptic equations when the right side of the equation $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ turns into zero, if $u = 0$, in terms of the application of the R functions theory apparatus to the construction of the left end of a conical interval, which has made it possible to transform the inevitably one-sided process of successive approximations into the two-sided one;

– the Green's quasifunction method has been further developed in terms of its application to the solution of nonlinear boundary value problems in domains for which the Green's function analytical expression is unknown or it has a complex form for computations;

– the method of investigation of nonlinear boundary value problems with two and more parameters has been further developed in terms of the application of nonlinear analysis methods in partially ordered spaces to find the conditions which these parameters must satisfy in order to have a single positive solution to exist and two-sided successive approximations to converge to it.

The practical value of the obtained results. The discussed methods can be used to find solutions to applied problems of mathematical physics with mathematical models described by boundary value problems for nonlinear elliptic equations. The developed research tools are introduced into the educational process at the Kharkiv National University of Radio Electronics in the disciplines «Selected Chapters of Mathematical Physics», «Mathematical Physics Equations» and certification works.

The materials of the thesis are published in 23 scientific papers: 7 articles, 4 of them are in the list of professional editions of Ukraine in physical and mathematical sciences, 2 articles – in the foreign scientific publications, 1 article – in other publications, 16 theses of reports published in the materials of scientific conferences, including 14 international ones.

Key words: Green's function, Green's quasifunction, two-sided approximations, invariant conical interval, strongly invariant conical interval, concavity, u_0 -concavity, pseudoconcavity, u_0 -pseudoconcavity, monotone operator, antitone operator, heterotone operator.

List of applicant's publications

1. Kolosova S.V., Lukhanin V.S, Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2018. Vol. 99. No. 3. P. 78–91.
2. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2016. Vol. 5. No. 4. P. 11–19.
3. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72.
4. Луханін В.С. Додатні розв'язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 4 (71). С. 24–27.
5. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.
6. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 2 (69). С. 16–18.
7. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35–42.
8. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of one nonlinear elliptic problem // Информационные системы и

технологии: материалы 5-й Международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево, Харьков, 2016. С. 109–110.

9. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки задачі Ліувілля-Гельфанда // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали 17-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. Київ, 2016. Т. 1. С. 147–149.

10. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з нелінійністю // Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного молодіжного форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харьков, 2016. Т. 7. С. 102–103.

11. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць ХХІ Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 362–365.

12. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць ХХІ Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 185–188.

13. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для эллиптической краевой задачи с экспоненциальной нелинейностью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 20–22 мая 2015 г. Пенза, 2015. С. 16–20.

14. Луханін В.С. Про метод побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометричної структури // Радиоэлектроника и молодежь в ХХІ веке: материалы XIX Международного молодежного форума, 20–22 апреля 2015 г. Харьков, 2015. Т. 7. С. 70–71.

15. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для одной линейной задачи // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 26–30 мая 2014 г. Пенза, 2014. С. 46–49.

16. Луханин В.С. Про деякі методи побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного молодежного форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. Т. 7. С. 114–115.

17. Луханин В.С. О построении последовательных приближений к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // XL Гагаринские чтения: научные труды Международной молодёжной научной конференции, 7–11 апреля 2014 г. Москва, 2014. Т. 5. С. 139–141.

18. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума, 10–15 июня 2013 г. Харьков, Херсон, 2013. С. 205–208.

19. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції, 17 травня 2013 р. Бухарест, 2013. Ч. I. С. 16–24.

20. Луханин В.С. Про застосування методу квазіфункцій Гріна до одного нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVII Международного молодежного форума, 22–24 апреля 2013 г. Харьков, 2013. Т. 7. С. 140–141.

21. Луханин В.С. Застосування методу функцій Гріна та методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // XVI Всеукраїнська (XI Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної

математики та інформатики: тези доповідей, 11–12 квітня 2013 р. Львів, 2013. С. 94–95.

22. Луханін В.С. Наближені методи розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVI Международного молодежного форума, 17–19 апреля 2012 г. Харьков, 2012. Т. 10. С. 159–160.

23. Луханін В.С. Про деякі підходи до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // XV Всеукраїнська (X Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 5–6 квітня 2012 р. Львів, 2012. С. 232–234.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	22
1 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ.....	28
1.1 Операторні рівняння та методи їх розв'язання.....	28
1.2 Двобічні методи розв'язання операторних рівнянь.....	41
1.3 Основні визначення та теореми теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах	49
1.4 Постановка задачі дослідження.....	54
1.5 Висновки по розділу	55
2 ЗАДАЧІ З МОНОТОННИМ, АНТИТОННИМ ТА ГЕТЕРОТОННИМ ОПЕРАТОРАМИ.....	57
2.1 Загальна постановка задачі	57
2.2 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із монотонним оператором.....	58
2.2.1 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda e^u$	58
2.2.2 Рівняння з правою частиною $f(u) = u^q$	65
2.2.3 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda + u^p$	70
2.2.4 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda u^q + u^p$	76
2.2.5 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$	81
2.2.6 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda \mathbf{x} ^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u})$	86
2.2.7 Рівняння з правою частиною $f(u) = au + b$	90
2.3 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із антитонним оператором	95
2.4 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із гетеротонним оператором	100
2.5 Метод квазіфункцій Гріна.....	106
2.6 Висновки по розділу	113

3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.....	114
3.1 Розробка чисельного алгоритму	114
3.2 Результати обчислювальних експериментів	120
3.2.1 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda e^u$	124
3.2.2 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = u^q$	136
3.2.3 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda + u^p$	145
3.2.4 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda u^q + u^p$	154
3.2.5 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$	163
3.2.6 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda x ^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u})$	172
3.2.7 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = au + b$	181
3.2.8 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \frac{1}{u^p}$	190
3.2.9 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = au^{-q} + bu^p$	199
3.3 Висновки по розділу	208
ВИСНОВКИ.....	210
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	212
ДОДАТОК А АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ	225
ДОДАТОК Б РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ	227
ДОДАТОК В СПИСОК ВЛАСНИХ ПУБЛІКАЦІЙ.....	270

ВСТУП

Актуальність теми. У сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики, найчастіше з параметрами. Це можуть бути різноманітні задачі теорії пружності, де в якості параметра виступає навантаження, задачі про розподіл температури при пропусканні через тіло електричного струму (параметр – величина струму), задачі про автоколивання (параметр – невідомий період) тощо. Нелінійність у багатьох моделях є принципово важливою, оскільки вона приводить до результатів, які якісно відрізняються від тих, що дає лінійний аналіз.

У більшості випадків знайти точний розв'язок таких задач практично неможливо, а тому важливу роль відіграють наближені методи розв'язання. Тоді визначним стає питання про величину похибки наближеного розв'язку. Існує велика кількість прямих та непрямих методів оцінки точності похибки. Серед непрямих особливе місце займають різні методи порівняння розрахункових даних з експериментальними та тестовими результатами. При цьому особливе значення мають апріорні оцінки та теореми збіжності. Але вони, зазвичай, не дають строгих, гарантованих оцінок близькості конкретних наближених та точних методів. Таку властивість мають двобічні обчислювальні методи, які дають зручну апостеріорну оцінку обчислюваної похибки. Обґрунтування та розвиток двобічні методи розв'язання операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах із конусом набули в роботах М.О. Красносельського та його учнів П.П. Забрєйко, Г.М. Вайнікко, В.І. Опойцева, Т.А. Хуродзе та ін.

Оскільки до операторного рівняння, що є еквівалентним крайовій задачі для еліптичного рівняння, входить функція Гріна, та її точний вигляд відомий лише для деяких доволі простих областей, то виникає питання розв'язання таких задач у областях складної геометрії. Академіком НАН України В.Л. Рвачовим розроблено метод квазіфункцій Гріна для застосування до лінійних еліптичних рівнянь, який разом із застосуванням конструктивного апарату теорії R -функцій дозволяє звести

вихідну задачу до еквівалентного лінійного інтегрального рівняння у області, геометрія якої може бути описана за допомогою R -функцій.

Отже, побудова двобічних наближень та розвиток методу квазіфункцій Гріна до розв'язання конкретних крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь є актуальною науковою задачею.

Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ ДР 0115U001522), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

Мета та задачі дослідження. Метою досліджень дисертаційної роботи є розробка конструктивних методів знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходження умов, яким мають задовольняти параметри, що входять до постановки задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- звести нелінійну еліптичну крайову задачу до операторного рівняння;
- методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах дослідити властивості оператора отриманого рівняння, зокрема, монотонність, антитонність або гетеротонність;
- дослідити можливість побудови конусного відрізка, інваріантного для оператора монотонного типу та сильно інваріантного для оператора антитонного або гетеротонного типу, що містить розв'язок вихідної крайової задачі, та запропонувати безпосередньо процедуру для його побудови;
- дослідити оператор на угнутість (для оператора монотонного типу) або псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу);
- дослідити оператор на u_0 -угнутість (для оператора монотонного типу) або u_0 -псевдоугнутість (для оператора антитонного або гетеротонного типу), щоб мати

змогу не лише робити висновки про існування єдиного розв'язку, а й накласти умови на параметри, що входять до задач;

- у разі неможливості отримання двобічних наближень розвинути метод квазіфункцій Гріна для його застосування до задач, що розглядаються;

- провести ряд обчислювальних експериментів для задач, що розглядаються, в різних областях.

Об'єктом дослідження є процеси, що описуються крайовими задачами для нелінійних еліптичних рівнянь, які зводяться до операторних рівнянь з оператором монотонного, антитонного або гетеротонного типу.

Предметом дослідження є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь та методи їх чисельного аналізу.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах для знаходження наближених розв'язків, апарат теорії R -функцій – для побудови рівнянь меж областей, в яких розглядаються крайові задачі, метод квазіфункцій Гріна – для зведення нелінійної крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння, формули чисельного інтегрування та інтерполяції функцій – для спрощення обчислень.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

- уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором та для яких, користуючись методами теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, доведено існування єдиного додатного розв'язку та побудовано двобічні наближення до нього;

- удосконалено метод побудови конусного відрізка при дослідженні крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, в частині застосування апарату теорії R -функцій для побудови лівого кінця конусного відрізка, що дозволило перетворити неминуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний;

- набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна у частині його застосування до розв’язання нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд;
- набув подальшого розвитку метод дослідження нелінійних крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів у частині застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв’язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

Практичне значення отриманих результатів. Розглянуті методи можуть бути використані для знаходження розв’язків прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Розроблені засоби дослідження впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Вибрані глави математичної фізики», «Рівняння математичної фізики» та при виконанні атестаційних робіт.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [14 – 16, 71 – 78, 94 – 105]. Усі обчислювальні експерименти виконані автором особисто. Здобувач брав безпосередню участь у дослідженні збіжності методів, що розглядаються, аналізі отриманих результатів, формулюванні висновків та написанні статей.

Роботи [94 – 105] виконані одноосібно. В інших роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: [14, 75] – дослідження оператора задачі на монотонність та угнутість, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна до розв’язання нелінійної задачі, розробка алгоритму, який дозволяє отримати результат для методу квазіфункцій Гріна в аналітичному вигляді, проведення обчислювального експерименту; [72, 77] – дослідження оператора задачі на монотонність, угнутість у випадку монотонного типу оператора та на антитонність, псевдоугнутість у випадку антитонного типу оператора, проведення обчислювального експерименту; [15, 16, 78] – дослідження оператора задачі на u_0 -угнутість, отримання умов, що пов’язують параметри задачі, за яких існує розв’язок

та збігаються двобічні наближення, використання вдосконаленого методу побудови інваріантного конусного відрізка, застосовуючи апарат теорії R -функції, проведення обчислювального експерименту; [71, 73, 74] – побудова інваріантного конусного відрізка, отримання умов, що пов’язують параметри задачі, за яких існує розв’язок та збігаються двобічні наближення, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна, проведення обчислювального експерименту; [76] – дослідження відповідного гетеротонного оператора на псевдоугнутість, отримання умов, що пов’язують параметри задачі, за яких існує розв’язок та збігаються двобічні наближення, застосування розвинутого методу квазіфункцій Гріна, проведення обчислювального експерименту.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: XV Всеукраїнській (X Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2012» (Львів, 2012 р.); XVI, XVII, XVIII, XIX, XX Міжнародних молодіжних форумах «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті» (Харків, 2012 – 2016 рр.); XVI Всеукраїнській (XI Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» (Львів, 2013 р.); I Міжнародній науково-практичній конференції «Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності» (Бухарест, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозиумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» «МДОЗМФ-2013» (Харків-Херсон, 2013 р.); Міжнародній молодіжній науковій конференції «XL Гагаринские чтения» (Москва, 2014 р.); VIII, IX Міжнародній науково-технічній конференції молодих спеціалістів, аспірантів та студентів «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 2014, 2015 рр.); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» – «АРАМCS-2015» (Львів, 2015 р.); 17-й Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2016 р.); 5-й Міжнародній науково-технічній конференції «Информационные системы и технологии» (Коблево-Харків, 2016 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертаційної роботи опубліковані в 23 наукових працях: 7 статей, з них 4 статті – у виданнях , які зазначені в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук, 2 статті – в закордонних наукових виданнях, 1 стаття – в інших виданнях, 16 тез доповідей, опублікованих в матеріалах наукових конференцій, в тому числі – 14 міжнародних.

1 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ

1.1 Операторні рівняння та методи їх розв'язання

У зв'язку із швидким розвитком науки та техніки надзвичайно розширилась галузь застосування математики як засобу опису реальних явищ та процесів.

Використання ЕОМ дозволило не лише будувати математичні моделі реальних фізичних процесів, а й давати додаткове пояснення та добувати потрібну інформацію.

В загальному випадку математичні задачі, до яких зводяться численні задачі науки та техніки, можна описати операторною рівністю

$$B X = Y, \quad (1.1)$$

де X, Y – елементи деяких повних метричних просторів;

B – оператор, що відображає один простір в певну множину іншого.

У випадку оберненої задачі, коли за заданим елементом Y та оператором B треба знайти елемент X , рівність (1.1) є операторним рівнянням.

Якщо $B = I - A$, де I – оператор тотожності, то рівняння (1.1), що матиме в даному випадку вигляд

$$X = A X + Y, \quad (1.2)$$

називають рівнянням другого роду, в супротивному випадку – рівнянням першого роду. Також важливою є спектральна задача про відшукування нетривіальних розв'язків однорідного рівняння (1.2).

Дослідження питання існування та єдиності розв'язку (чи їх кількості, якщо він не один), стійкості розв'язку, а також побудова точних та наближених методів розв'язання рівнянь (1.1), (1.2) становлять зміст теорії операторних рівнянь.

Цим питанням присвячена велика кількість робіт, в яких дослідження операторних рівнянь здійснюється або із загальної точки зору (методами функціонального аналізу), або ж вивчаються конкретні типи рівнянь та будуються з доведенням до відповідних обчислювальних (абстрактних і реальних) алгоритмів методи їх розв'язання.

До першої групи належать дослідження операторних рівнянь методами функціонального аналізу. Їх результати досить повно викладено в монографіях Л.В. Канторовича і Г.П. Акілова [64], М.А. Красносельського та ін. [122]. Конкретним типам рівнянь та задач присвячено монографії М.А. Красносельського та ін. [57], Л. Коллатца [69], Б.М. Левітана, І.С. Саргасяна [91], Л.Є. Кривошеїна [86]. Окремі класи методів розв'язання рівнянь (1.1), (1.2) висвітлено у книгах Ю.Д. Соколова [139], А.Ю. Лучки [106], М.С. Курпеля [89].

До другої групи робіт належать дослідження фахівців з обчислювальної математики. Тут розробляються та детально досліджуються методи розв'язування конкретних типів рівнянь, вивчаються питання про вибір оптимальних методів (зовнішня оптимізація) та їх параметрів (внутрішня оптимізація) і про їх чисельну реалізацію. До таких праць належать, наприклад, монографії Л.В. Канторовича і В.І. Крилова [62], Г.М. Положія [120], І.І. Ляшка [107], В.Є. Шаманського [146], Б.М. Бублика [36], М.М. Лаврентьєва [90], І. Бабушки та ін. [30].

Методи розв'язання операторних рівнянь за принципом їх побудови розділяються на прямі та ітеративні. Як поєднання цих методів виникли так звані апроксимаційно-ітеративні методи і, зокрема, методи розщеплення.

Прямі методи (їх ще називають проєктивними [89] або апроксимаційними) беруть свій початок з праць Рітца [121] та Б.Г. Гальоркіна [46]. Їх обґрунтуванню ми зобов'язані дослідженням Г.І. Петрова [122], М.В. Келдиша [65], Л.В. Канторовича [61], С.Г. Міхліна [112, 113], М.І. Польського [121], М.А. Красносельського [85]. Ці методи досить популярні у практиці. Значно розширились їх можливості (зокрема, при розв'язанні багатовимірних диференціальних рівнянь) після створення В.Л. Рвачовим апарату R -функцій [125].

Ітеративні методи беруть початок з часів Ньютона, Ліувілля, Пікара. Загальну теорію цих методів побудовано завдяки теорії Банаха [5] про нерухому точку оператора. Розвиток апарату диференціального числення операторів сприяв побудові універсальних ітеративних методів для розв'язання нелінійних операторних рівнянь. Ці методи стали потужним засобом теоретиків та практиків у дослідженні та розв'язанні операторних рівнянь.

Проективно-ітеративні методи, розвиток теорії яких почався у 60-х роках минулого століття, поєднують у собі позитивні властивості обох попередніх методів. Як ітеративні методи, вони забезпечують потрібну точність розв'язку шляхом послідовних уточнень (ітерацій); як прямі – дозволяють розширити область та прискорити швидкість збіжності ітеративних процесів. Їх розвиток бере свій початок з методу осереднення функціональних поправок [139], удосконаленню якого і поширенню в застосуваннях сприяли дослідження А.Ю. Лучки [106], М.С. Курпеля [89], Ю.М. Молоковича [115], Л.Є. Кривошеїна [86], В.І. Тивончука [142], В.Г. Іваницького [56] та ін.

Другий спосіб поєднання прямих методів з ітеративними, який істотно відрізняється від попереднього стосовно спектральної задачі для однорідного рівняння (1.2), здійснено в так званих методах розщеплення. Їх ідея ґрунтується на можливості зображення оператора у вигляді суми виродженого та малого за нормою. Цю властивість було використано Є. Шмідтом [23] при доведенні теореми Фредгольма в теорії інтегральних рівнянь.

Розвиток цього класу методів почався з методу смуг Г.М. Положія і П.Й. Чаленка [119]. Дослідження одного варіанту методу розщеплення для лінійного інтегрального оператора можна знайти в [58].

Із виникненням апроксимаційно-ітеративних методів з'явилась можливість ставити і розв'язувати задачу про побудову оптимальних методів, зокрема ставити питання про внутрішню оптимізацію. Саме ж поєднання прямих та ітеративних методів, як показано в роботі [54], є оптимальне (зовнішня оптимізація). Суть його полягає в наступному. Нехай $A_m = \Pi_m A$, $A_m = A \Pi_m$, $D_m = A - A_m$. Тоді рівняння (1.2)

за допомогою оператора апроксимації Π_m може бути представлене у наступному вигляді

$$X = A_m X + D_m X + Y. \quad (1.3)$$

Тоді (в разі існування обмеженого оператора $(I - A_m)^{-1}$ і повної неперервності оператора A), завдяки можливості зменшення оператора D_m , шуканий розв'язок добувають за допомогою ітеративного процесу

$$X_{n+1} = A_m X_{n+1} + D_m X_n + Y.$$

Методи розщеплення, що можливі лише у випадку лінійного оператора A та скінченновимірному оператору Π_m , утворюються з (1.3) оберненням оператора $T = I - D_m$. В результаті отримуємо рівняння

$$X = T^{-1}Y + T^{-1}A_m X,$$

яке еквівалентне $m + 1$ рівнянню

$$M_i = P_i + D_m M \quad (i = 0, \dots, m, P_0 = Y)$$

з одним і тим же малим за нормою оператором D_m і рівності

$$X = M_0 + \sum_{j=1}^m C_j M_j,$$

де C_j – параметри, що визначаються системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

У випадку однорідного рівняння (1.2) метод розщеплення дає шуканий власний елемент X у вигляді $X = \sum_{j=1}^m C_j M_j$. Система рівнянь відносно параметрів C_j тут однорідна і тому нулі її визначника є точні значення шуканих характеристичних чисел λ .

Розглянемо ідею основних методів розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь другого роду (1.2).

1. Метод простої ітерації. Якщо $\|A\| < 1$, то оператор в рівнянні (1.2) стискує і згідно з теоремою Банаха його можна розв'язувати методом послідовних наближень

$$X_{n+1} = A X_n + Y, \quad X_0, Y \in E, \quad (1.4)$$

де E – повний метричний простір.

Процес (1.4) збігається до єдиного розв'язку X завдяки лінійності оператора A з будь якого початкового наближення $X_0 \in E$.

Для зменшення кількості ітерацій, необхідних для досягнення потрібної точності, початкове наближення бажано вибирати близьким до розв'язку.

2. Метод універсальної ітерації. Розглянемо рівняння

$$\mu X = A X + Y, \quad (1.5)$$

до якого зводяться рівняння (1.1), (1.2) за, так званої, регуляризації операторних рівнянь першого роду за допомогою допоміжного параметра μ . Для рівняння (1.5) із самоспряженим оператором A можна, виявляється, побудувати ітеративний процес, що збігається до одного із розв'язків рівняння при довільному значенні параметра μ незалежно від величини норми оператора.

Припустимо існування оператора $(\mu I - A)^{-1}$.

Для розв'язання рівняння (1.5) будується ітераційний процес у вигляді

$$X_{n+1} = (I - \varepsilon^2 K)X_n + \varepsilon^2 Z, \quad (1.6)$$

де $K = (\mu I - A)^2$;

$$Z = (\mu I - A)Y.$$

Число ε^2 підбирається з умови

$$0 < \varepsilon^2 < \frac{2}{\sup v}, \quad (1.7)$$

де v – множина власних значень оператора K , які у зв'язку з додатністю оператора K будуть додатними.

Оскільки $\sup v \leq (|\mu| + \|A\|)^2$, то замість умови (1.7) можна розглядати слабкішу, але зручнішу для вибору ε^2 , умову збіжності ітеративного процесу (1.6) у вигляді

$$0 < \varepsilon^2 < \frac{2}{(|\mu| + \|A\|)^2}.$$

3. Апроксимаційні методи (апроксимація оператора). Якщо в рівнянні (1.2) оператор нестискуючий, то, звичайно, метод послідовних наближень у формі простої ітерації (1.4) буде розбіжним і, отже, непридатним для відшукування розв'язку. Це стосується і методу універсальної ітерації (1.6): він може бути дійсно розбіжним або ж надто повільно збіжним, тому неминучі похибки заокруглення в процесі обчислень призведуть до того, що ітеративний процес стане фактично розбіжним.

Для розв'язання рівнянь в таких випадках можуть застосовуватися апроксимаційні методи. За способом побудови вони досить численні, а по суті

ґрунтуються на двох ідеях: апроксимації оператора близьким, більш простим, і апроксимації розв'язку операторного рівняння.

Нехай A – цілком неперервний оператор, що діє у банаховому просторі. Тоді його можна рівномірно апроксимувати також цілком неперервним скінченновимірним оператором \bar{A} . Отже, замість рівняння (1.2) розглядається близьке у певному розумінні рівняння

$$X^* = \bar{A} X^* + Y. \quad (1.8)$$

Чим вищий ступінь апроксимації оператора A , тим менша похибка наближеного розв'язку X^* . Величину $\|A - \bar{A}\|$ можна зменшити як збільшенням вимірності оператора \bar{A} , так і відповідним вибором базисних (координатних) елементів, з яких він будується. Очевидно, що перевагу має другий спосіб, оскільки вимірність оператора \bar{A} дорівнює порядку системи алгебраїчних рівнянь, до розв'язання якої зводиться рівняння (1.8).

4. Апроксимаційні методи (апроксимація розв'язку). Нехай $\{\phi_k\}_{k=1}^m$ – система лінійно незалежних координатних елементів з банахового простору. Тоді, подаючи розв'язок X рівняння (1.2) наближено у вигляді

$$X^* = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k \quad \text{або} \quad X^* = Y + \sum_{k=1}^m a_k \phi_k,$$

для визначення невідомих коефіцієнтів a_k використовують різні прийоми, накладаючи певні вимоги на так звану нев'язку рівняння (1.2)

$$\varepsilon_m = \sum_{k=1}^m a_k (\phi_k - A\phi_k) - Y.$$

Так, наприклад, вимагають, щоб вона в деякому банаховому просторі мала мінімальну норму або ж була ортогональною (у гільбертовому просторі) до

елементів ϕ_k чи до іншої системи лінійно незалежних елементів $\{\psi_k\}_{k=1}^m$ із спряженого простору і т.д.

Якщо, зокрема, рівняння розглядається в гільбертовому просторі, то мінімальне значення нев'язки ε_m досягається на основі методу найменших квадратів, суть якого полягає в мінімізації

$$\|\varepsilon_m\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^m a_k (\phi_k - A\phi_k) - Y \right\|^2. \quad (1.9)$$

Диференціюючи вираз (1.9) за невідомими a_k , дістаємо відносно них систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^m a_k ((\phi_k - A\phi_k), (\phi_l - A\phi_l)) = (Y, \phi_l - A\phi_l).$$

Звідси, якщо $\{\phi_k\}$ – система власних елементів оператора A з відповідними власними числами μ_k , то

$$a_k = \frac{(Y, \phi_k)}{1 - \mu_k}. \quad (1.10)$$

У випадку ж операторного рівняння першого роду (1.1) аналогічно (1.10) знаходимо

$$a_k = -\frac{(Y, \phi_k)}{\mu_k}.$$

У випадку негільбертових просторів (наприклад, $L_p(a, b)$ або l_p) коефіцієнти a_k знаходять, як уже зазначалося, з умови ортогональності нев'язки ε_m до системи

лінійно незалежних елементів $\{\psi_k\}$ із спряженого простору, тобто виконується наступна рівність

$$(\varepsilon_m, \psi_l) = \sum_{k=1}^m a_k (\phi_k - A\phi_k, \psi_l) - (Y, \psi_l) = 0. \quad (1.11)$$

Ця умова й дає систему (1.11) алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_k .

5. Апроксимаційно-ітеративні методи. Для розв'язування рівнянь, оператор A яких не стискуючий, зручніше або й необхідно застосовувати апроксимаційні методи. Проте досягнення потрібної точності наближеного розв'язку спряжено з необхідністю розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь часто досить високого порядку, що, звичайно, знижує ефективність апроксимаційних методів.

При достатньо малих нормах стискуючого оператора A ітеративний метод приваблює своєю простотою, оскільки він дає наближений розв'язок необхідної точності і потребує значно менше арифметичних операцій, ніж розв'язання алгебраїчної системи високого порядку. Природно, таким чином, виникає задача про об'єднання цих двох методів, щоб можна було ефективно розв'язувати операторні рівняння, використовуючи позитивні якості кожного з них.

Ідея поєднання апроксимації оператора та ітеративного процесу може бути реалізована наступним чином.

Запишемо рівняння (1.2) у вигляді

$$X = \Pi_m A X + (A - \Pi_m A) X + Y, \quad (1.12)$$

де Π_m – m -вимірний оператор апроксимації оператора A .

Припустивши існування та обмеженість оберненого оператора $(I - \Pi_m A)^{-1}$, дістаємо рівняння

$$X = (I - \Pi_m A)^{-1} D_m X + Z, \quad (1.13)$$

де

$$Z = (I - \Pi_m A)^{-1} Y, \quad D_m = A - \Pi_m A,$$

еквівалентне вихідному, але з оператором $(I - \Pi_m A)^{-1} D_m$. Якщо $\|D_m\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то для розв'язання рівняння (1.13) можна успішно застосовувати метод послідовних наближень у формі

$$X_{n+1} = (I - \Pi_m A)^{-1} D_m X_n + Z, \quad X_0 = \theta \quad (1.14)$$

або у формі

$$X_{n+1} = \Pi_m A X_{n+1} + D_m X_n + Y, \quad (1.15)$$

яка, очевидно, вимагає на кожному кроці ітерацій розв'язання рівняння (1.15) відносно невідомого елемента X_{n+1} . Ясно, що достатньою умовою збіжності ітеративних процесів (1.14) і (1.15) буде нерівність

$$q = \left\| \left((I - \Pi_m A)^{-1} D_m \right)^k \right\| < 1,$$

(k – фіксоване натуральне число), яка у випадку цілком неперервного оператора A завжди може бути виконана за рахунок мализни оператора D_m , тобто за рахунок якості апроксимації оператора A оператором $\bar{A} = \Pi_m A$.

Для рівнянь (1.2) з цілком неперервним оператором A спосіб побудови апроксимаційно-ітеративного методу, розглянутого вище, в принципі завжди придатний, бо придатний для побудови ітеративних процесів типу (1.14), (1.15), збіжних до єдиного розв'язку рівняння. Але практично здійснити цю можливість іноді буває досить важко, внаслідок чого відповідний ітеративний процес стає надто

громіздким. Це стосується, наприклад, вольтеррових інтегральних операторів. В той же час метод апроксимації розв'язку для таких операторів може виявитися ефективнішим, ніж метод апроксимації оператора. У зв'язку з цим, очевидно, є сенс побудувати апроксимаційно-ітеративні методи на основі поєднання методу апроксимації розв'язку та методу простої ітерації.

Застосуємо, як і раніше, оператор апроксимації Π_m до розв'язку (1.2) під знаком оператора A , можемо це рівняння записати в еквівалентному вигляді

$$X = Y + A\Pi_m X + A(X - \Pi_m X).$$

Якщо A і Π_m такі, що оператор $A(I - \Pi_m)$ можна зменшувати за рахунок Π_m , то є сенс для розв'язання рівняння (1.2) застосувати такий ітеративний процес

$$X_{n+1} = Y + A\Pi_m X_{n+1} + A(X_n - \Pi_m X_n), \quad X_0 = \theta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

Якщо, оператори A та $A\Pi_m$ неперервні, то з (1.16) за умови збіжності процесу в границі дістанемо вихідне рівняння (1.2). Отже, якщо процес (1.16) збіжний у деякому банаховому просторі, то він при вказаних умовах відносно операторів A , Π_m збіжний саме до шуканого розв'язку X з цього простору.

6. Метод розщеплення оператора. Суть методу розщеплення оператора полягає в тому, що в зображенні (1.12) обертають оператор $I - D_m$, а не $I - \bar{A}$, як це робилося в методах, розглянутих вище. Тоді, очевидно, рівняння (1.12) еквівалентне такому:

$$X = (I - D_m)^{-1} Y + (I - D_m)^{-1} \bar{A} X, \quad (1.17)$$

причому, якщо оператор D_m достатньо малий ($\|D_m\| < 1$, наприклад), то існування оператора $(I - D_m)^{-1}$ гарантовано.

Суттєвою відмінністю рівняння (1.17) від (1.13) є те, що його оператор, взагалі кажучи, не може бути зроблений стискуючим за рахунок мализни оператора D_m . Проте тут є інша істотна особливість і перевага в тому випадку, коли оператор \bar{A} вироджений. Тоді, як легко переконатись, і оператор $(I - D_m)^{-1} \bar{A}$ буде виродженим, і, отже, рівняння (1.17) легко розв'язується.

Справді, нехай оператор A вироджений, тобто

$$\bar{A} X = \sum_{i=1}^m a_i X_i = P Q X,$$

де X_i – базисні елементи;

a_i – сталі величини;

P, Q – деякі оператори.

Тоді розв'язання рівняння (1.17), за умови

$$q = \|D_m\| < 1, \quad (1.18)$$

зводиться до ітеративних процесів

$$Z_{n+1} = Y + D_m Z_n,$$

$$N_{n+1} = P + D_m N_n,$$

а також до розв'язання скінченновимірною рівняння відносно M

$$M = QZ + QNM. \quad (1.20)$$

де $Z = (I - D_m)^{-1} Y$;

$N = (I - D_m)^{-1} P$;

Тоді розв'язок X будується за формулою $X = Z + NM$.

Питання існування та єдиності (чи неєдиності) розв'язку рівняння (1.17) за умови (1.18) зводиться до того ж питання для рівняння (1.20); тобто, якщо вказане рівняння має розв'язки, то стільки ж розв'язків має і вихідне рівняння.

7. Метод розщеплення розв'язку. Розглянемо другу модифікацію методу розщеплення – метод розщеплення шуканого розв'язку рівняння, – яка може застосовуватись (на відміну від першого варіанту) і до рівнянь типу Вольтерра.

Нехай ψ – повна ортонормована (останнє не обов'язково) система елементів банахового простору, $\alpha(X)$ – сталий вектор, координати якого являють собою послідовність певних функціоналів. Тоді, як відомо [64], скалярний добуток векторів ψ і $\alpha(X) - (\alpha(X), \psi)$ – належить тому ж простору. Якщо ж $\tilde{\psi}$ – система перших m елементів системи ψ , $\tilde{\alpha}(X)$ – відповідний їм вектор, то $(\tilde{\alpha}(X), \tilde{\psi}) = \Pi_m X$, де Π_m – оператор апроксимації елемента X . При цьому похибка апроксимації $(\alpha(X), \psi) - \Pi_m X$ за рахунок збільшення кількості елементів в системі $\tilde{\psi}$ може бути зроблена як завгодно малою. Маючи це на увазі, запишемо рівняння (1.2) у вигляді

$$X = Y + A\Pi_m X + A(X - \Pi_m X) = Y + A\Pi_m X + \Omega X. \quad (1.21)$$

де $\Omega = A - A\Pi_m$.

Враховуючи, що оператор $A\Pi_m$ вироджений, і припускаючи існування оператора $(I - \Omega)^{-1}$ (I – тотожний оператор), з (1.21) знаходимо

$$X = Z_0 + (\tilde{\alpha}(X), Z), \quad (1.22)$$

де

$$Z_0 = (I - \Omega)^{-1} Y, \quad Z = \{Z_i\}, \quad Z_i = (I - \Omega)^{-1} Y_i, \quad (1.23)$$

та $Y_i = A\psi_i$, ψ_i – складові елементи системи $\tilde{\psi}$ ($i = \overline{1, m}$).

Отже, якщо виконується умова $q = \|\Omega\| < 1$, то елементи (1.23) можна знайти методом простої ітерації

$$\begin{aligned} Z_{i,n+1} &= Y_i + A(Z_{i,n} - (\tilde{\alpha}(Z_{i,n}), \tilde{\psi})), \\ Z_{i,0} &= 0, \quad Y_0 = Y, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad i = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Подіавши, далі, функціоналом $\tilde{\alpha}$ на рівність (1.22), отримаємо рівняння для невідомого вектора $\tilde{\alpha}(X)$

$$\tilde{\alpha}(X) = \tilde{\alpha}(Z_0) + \tilde{\alpha}(X)\tilde{\alpha}(Z).$$

Це система m лінійних алгебраїчних рівнянь відносно координат невідомого вектора $\tilde{\alpha}(X)$.

1.2 Двобічні методи розв'язання операторних рівнянь

Більшість математичних моделей фізичних процесів містить різні класи алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, які неможливо розв'язати точно. Тому наближені методи розв'язання таких рівнянь грають велику роль, і питання про величину похибки стає визначним.

Існує велика кількість прямих та непрямих методів оцінки точності похибки. Серед непрямих особливе місце займають різні методи порівняння розрахункових даних: з експериментальними, тестовими, результатами повторних розрахунків з іншими параметрами. Значний внесок в дослідження похибок «майже» випадкового характеру таких, як похибки округлень, дає статистичний підхід. Особливу роль при дослідженні впливу дискретизації задачі грають апіорні оцінки та теореми збіжності. Ці напрямки дають корисні, а інколи – вичерпні рекомендації з вибору стратегії та методів наближених обчислень. Але вони, зазвичай, не дають строгих,

гарантованих оцінок близькості конкретних наближених та точних методів. Таку властивість мають деякі двобічні обчислювальні методи, які відносяться до прямих методів оцінки точності обчислюваної похибки.

У зв'язку з розвитком таких напрямків науки та техніки, як механіка, теплотехніка, математична хімія, літакобудування, виникла необхідність обчислення не лише наближених розв'язків різних, але й гарантованих оцінок їхньої близькості до точного розв'язку. Тому цікавість до питань двобічних оцінок як до можливих методів оцінки похибок наближених розв'язків зростає.

Проблема побудови наближених розв'язків із заданою або гарантованою точністю почала ставитися ще в першій половині минулого століття. Розглянемо як розвивалися напрямки її вирішення.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь є найпростішим об'єктом для вивчення та ілюстрації та водночас найпоширеніший, оскільки більша частина наближених методів зводить інтегральні та диференціальні задачі до алгебраїчних. Тому більшість підходів або зароджувалось, або спочатку апробувалось для систем алгебраїчних рівнянь. Одному з них, який згодом назвали методом апріорних оцінок, в лінійній алгебрі дали початок найпростіші нерівності, які використовував О.Л. Коші ще на початку XIX століття. Нехай

$$Au = f \quad (1.24)$$

це система лінійних алгебраїчних рівнянь із вектором невідомих u та $n \times n$ матрицею A та замість точного розв'язку знайдено наближення \tilde{u} . Підставивши його в систему (1.24), отримуємо рівність $A\tilde{u} = f + \delta$ з деяким вектором δ , який зазвичай називають нев'язкою. Віднявши від неї (1.24), отримуємо рівність для похибки $\tilde{u} - u = A^{-1}\delta$. Тоді, використовуючи нерівність Коші, приходимо до співвідношення

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta\|, \quad (1.25)$$

яке має практичну цінність, коли є верхня оцінка для $\|A^{-1}\|$. Наприклад, у випадку евклідової норми для самоспряженої матриці A вона дорівнює оберненій величині найменшого з модулів власних чисел матриці A .

Отримана нерівність є найпростішою апіорною оцінкою. Згодом аналогічні оцінки були отримані за умов наближеного оператора $\tilde{A} = A + \Delta$. У цьому випадку підстановка наближеного розв'язку \tilde{u} дає рівність

$$(A + \Delta)\tilde{u} = f + \eta. \quad (1.26)$$

Віднімемо від неї (1.24) та зробимо деякі перетворення. В результаті рівність для похибки має вигляд $\tilde{u} - u = A^{-1}(\eta - \Delta\tilde{u})$, звідки

$$\|\tilde{u} - u\| = \|A^{-1}\|(\|\eta\| + \|\Delta\|\|\tilde{u}\|). \quad (1.27)$$

Таким чином була оцінена похибка вектора \tilde{u} , який можна вважати розв'язком системи (1.26) з правою частиною $f + \eta$ та матрицею $A + \Delta$, які були отримані при неточному заданні f та A в системі (1.24).

При використанні рівномірної норми $\|u\|_\infty = \max\|u_i\|$ або за рахунок еквівалентності норм у скінченновимірному просторі (тобто $\|u\|_\infty = c\|u\|$) нерівності (1.25), (1.27) дають можливість покомпонентної двобічної оцінки (зазвичай грубої). Наступне уточнення апіорних та апостеріорних нерівностей пішло шляхом побудови мажорант та використання теорем порівнянь.

Одним із найбільш розроблених напрямків в цій області є метод двобічних наближень. Початок цим методам дав наступний простий факт. Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u = Au + f, \quad (1.28)$$

де матриця A має невід'ємні елементи, що далі буде записуватися у вигляді $A \geq 0$. Використаємо для її розв'язання ітераційний процес

$$u^n = Au^{n-1} + f, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.29)$$

з початковим наближенням u^0 . Віднімаючи (1.28) від (1.29), отримуємо рівняння для похибки

$$u^n - u = A(u^{n-1} - u). \quad (1.30)$$

Нехай u^0 мажорує точний розв'язок u , тобто їх компоненти задовольняють нерівності $u_i^0 \geq u_i$, що можна записати у вигляді $u^0 \geq u$. Тоді з (1.30) та властивості $A \geq 0$ випливає, що $u^n \geq u$ для всіх $n = 1, 2, \dots$. Аналогічно з умови $u^0 \leq u$ випливає, що всі наступні наближення також задовольняють цій умові $u^n \leq u$ для всіх $n = 1, 2, \dots$. Таким чином, маючи двобічні початкові наближення, за умови збіжності можна отримати послідовність двобічних наближень, що згущується до точного розв'язку u .

Нажаль клас задач з такими матрицями досить вузький. Тому наступний розвиток пішов двома напрямками: для нелінійних операторів A та загальнішими умовами, ніж монотонність. В 1935 – 1937 рр. Л.В. Канторович побудував теорію лінійних напівупорядкованих просторів, в рамках якої обидва цих напрямки були інтенсивно розвинуті [44, 63]. Наприклад, властивість монотонності $A \geq 0$ було замінено можливістю представлення матриці (лінійного оператора) у вигляді $A = A^+ - A^-$, де $A^+ \geq 0$, $A^- \geq 0$. В цьому випадку ітераційний процес матиме вигляд

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= A^+ u^n - A^- v^n + f, \quad n = 0, 1, \dots, \\ v^{n+1} &= A^+ v^n - A^- u^n + f, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Якщо обрати початкові наближення u^0, v^0 так, щоб для точного розв'язку u задачі (1.28) $u^0 \leq u \leq v^0$, то всі наступні наближення зберігають умови монотонності: $u^n \leq u \leq v^n$ для всіх $n = 0, 1, \dots$. Таким чином, отримується послідовність наближень, що обмежує розв'язок з двох боків та стискається за умов збіжності.

В монографії М.С. Курпеля та Б.А. Шувара [88] досить повно викладено цей напрямок досліджень у застосуванні його до лінійних та нелінійних алгебраїчних задач. Там були розглянуті також питання двобічних ітераційних методів розв'язання абстрактних операторних задач та інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра другого роду. По суті, результати розв'язання інтегральних рівнянь є модифікацією алгоритмів розв'язання абстрактних операторних рівнянь із подоланням специфічних складнощів обґрунтування на функціональному рівні.

Цей напрямок досліджень також продовжено у спільних роботах М.І. Копача, А.Ф. Обшти та Б.А. Шувара. До них належать дослідження двобічних ітераційних алгоритмів, які є аналогами методу Чаплигіна для звичайних диференціальних рівнянь [80], побудова аналогів двобічних методів Курпеля наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, які дозволяють отримувати надлінійну збіжність у випадку недиференційовної правої частини [81], та для диференціальних рівнянь з післядією [79], а також дослідження двобічних оцінок для одного класу нелінійних операторних рівнянь з немонотонними операторами [17].

При обчисленні інтегралів за допомогою квадратурних формул дослідники почали зустрічатися із явищем дискретизації, яке було усвідомлено пізніше під час розв'язання диференціальних задач. Серед інших видів похибок похибки дискретизації в деяких випадках є визначними. Тому з розвитком обчислювальних потужностей їм почала відводитися особлива увага.

Одне з перших правил практичної оцінки похибки дискретизації, яке дозволяє приблизно оцінити вплив цієї похибки, на початку минулого століття запропонував К.Д. Рунге. Це правило інтенсивно використовувалося спочатку в області квадратур, а згодом в різницевих методах та методі скінченних елементів. Воно базується на

розкладі наближеного розв'язку u^h у вигляді суми [32, 40, 109]

$$u^h = u + h^k v + O(h^{k+m}), \quad (1.31)$$

де u – шуканий точний розв'язок;

v – невідома функція;

h – малий параметр дискретизації, найчастіше це крок різницевої сітки.

k – ціле число, що характеризує порядок точності наближеного розв'язку;

$m > 0$ – малість залишкового члену в порівнянні з головним членом похибки $h^k v$.

Оскільки u та v не залежать від h , для параметра $\frac{h}{2}$ має місце розклад

$$u^{\frac{h}{2}} = u + \left(\frac{h}{2}\right)^k v + O(h^{k+m}).$$

Віднімемо його від (1.31), позбавляючись від u :

$$u^h - u^{\frac{h}{2}} = v \left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+m}).$$

Звідси можна визначити головний член похибки:

$$u^{\frac{h}{2}} - u \approx \frac{u^h - u^{\frac{h}{2}}}{2^k - 1}. \quad (1.32)$$

Оскільки у формулі (1.32) відкинутий залишковий член порядку $O(h^{k+m})$, вона не приводить до гарантованої оцінки, але за достатньо малих h дійсно дає уявлення про величину похибки чисельного розв'язку.

Ще один важливий спосіб з'ясування точності наближених розв'язків є апіорні оцінки, які особливо активно використовуються в теорії різницевих схем та методі скінченних елементів [30, 31, 32, 38, 48, 53, 108, 116, 133, 134, 140]. Зазвичай, вони спираються на вищі похідні точного розв'язку і дають уявлення про порядок точності при дрібненні сітки, що дуже важливо при виборі різницевої схеми, скінченних елементів або при оцінці обчислювальних витрат. Але спроби з'ясування гарантованих констант для конкретного наближеного розв'язку через відомі дані здебільшого приводять до досить грубих результатів, поряд з великими аналітичними та теоретичними складнощами.

Розглянемо двобічні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та систем першого порядку. Один з перших методів розв'язання цієї задачі для одного рівняння – метод С.О. Чаплигіна – з'явився в 1919 р. [145]. Цей аналітичний метод дозволяє ітераційно будувати послідовність двобічних розв'язків, які стискаються до точного. Згодом М.М. Лузін показав його квадратичну збіжність. На його основі Ю.І. Ковач, М.Ф. Ільяшенко, Л.І. Савченко побудували двобічні розв'язки низки задач [66, 67, 68]. Однак метод С.О. Чаплигіна використовував знакосталість деяких похідних від правої частини і тому безпосередньо не розповсюджувався на системи рівнянь.

Для систем рівнянь оцінки відхилення точного розв'язку від наближеного були вперше отримані в роботах С.М. Лозинського [92, 93] за допомогою розв'язання допоміжних задач.

Двобічні методи, розглянуті в роботах О.Д. Горбунова, Ю.А. Шахова [49], Є.Я. Ремеза [123, 124], М.П. Саліхова [132], ґрунтуються на побудові двох чисельних методів інтегрування, залишкові члени яких мають різні знаки. Тому отримані за допомогою цих методів чисельні розв'язки можуть служити межами двобічного розв'язку.

Робота Є.О. Волкова [42] присвячена оцінкам похибки розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Основний підхід полягає в оцінці похибки апроксимації із залученням апіорних оцінок вищих похідних від точного розв'язку.

Інший підхід використовується у роботі Є.О. Волкова [41]. Для оцінки похибки отриманий різницевий розв'язок інтерполюється кубічними сплайнами. Тоді відхилення сплайнового розв'язку оцінюється через максимум нев'язки та коефіцієнти рівняння. В роботі доведено, що ширина смуги прямує до нуля з другим порядком від кроку сітки. В роботі І.К. Даугавета, Б.А. Самокиша [51] для апостеріорної оцінки похибки аналогічного сплайнового розв'язку квазілінійної крайової задачі використовується метод, що базується на оцінці норми оберненого оператора.

Інший підхід досліджується у роботі Е. Тамме, І. Саарнійта [141]. Він ґрунтується на оцінці розв'язку деякої близької задачі, для якої легко обчислити функцію Гріна. Це дозволяє оцінити похибку не лише наближеного сплайнового розв'язку, а і його похідних.

При дослідженні рівнянь у частинних похідних переважають два підходи. Перший ґрунтується на оцінках залишкових членів різницевої схеми. Ці оцінки вимагають знання деякої апріорної інформації про точний розв'язок та його похідні [43]. Другий підхід ґрунтується на теорії операторів монотонного типу [69] та теорем порівнянь. В роботах В. Аппельта [2] та Ф. Крюкеберга [18] така побудова зроблена з використанням нев'язки наближеного аналітичного розв'язку. Згодом у межах цього підходу почали розвиватися методи, які ґрунтуються на апостеріорних оцінках похибки різницевих розв'язків. В роботі Д.Ф. Давиденко [50] різницевий розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона спочатку інтерполюється поліномом. А згодом за його нев'язкою оцінювалася похибка різницевого розв'язку. Однак кількість вузлів сітки було обмежено одиницями. В роботі Є.О. Волкова [40] цей недолік був усунений. В ній використовується кусково-локальне продовження сіткової функції. Показане прямування ширини побудованого коридору для похибки до нуля з другим порядком відносно кроку сітки.

В роботі М.І. Соверткова [138] будується апостеріорна оцінка похибки для деяких рівнянь математичної фізики, зокрема для найпростіших параболічних та гіперболічних рівнянь.

Для систем квазілінійних рівнянь параболічного типу в роботі Ю.І. Ковача, Л.І. Савченко [68] на основі методу С.О. Чаплигіна побудований двобічний ітераційний процес.

Для гіперболічних рівнянь в книзі Л. Коллатца [69] побудова меж двобічного розв'язку базується на теорії операторів монотонного типу.

Неведемо тепер основні визначення та теореми, що використовуються далі для побудови двобічних процесів для розглядуваних у роботі задач.

1.3 Основні визначення та теореми теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах

Дослідження крайових задач у даній роботі будуть проводитися з використанням методів теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Наведемо основні визначення [83, 84, 117, 118].

Визначення 1.1. Нехай E – дійсний банахів простір. Множина $K \subset E$ називається конусом, якщо виконуються наступні умови:

- а) множина K замкнена;
- б) з $u_1, u_2 \in K$ випливає, що $\alpha u_1 + \beta u_2 \in K$ для всіх $\alpha, \beta \geq 0$;
- в) з кожної пари векторів (точок) $u, -u$ принаймні один не належить K , якщо $u \neq \theta$, де θ – нуль простору E .

Прикладом конуса є множина K_+ невід'ємних функцій в просторі неперервних функцій. З властивості б) випливає, що конус є випуклою множиною.

Визначення 1.2. Простір E називається напівупорядкованим, якщо для деяких пар елементів $u_1, u_2 \in E$ визначено відношення $u_1 \leq u_2$ та якщо знак \leq має наступні властивості:

- а) з $u_1 \leq u_2$ випливає, що $tu_1 \leq tu_2$ при $t \geq 0$ та $tu_1 \geq tu_2$ при $t < 0$;
- б) з $u_1 \leq u_2$ та $u_2 \leq u_1$ випливає, що $u_1 = u_2$;
- в) з $u_1 \leq u_2$ та $u_3 \leq u_4$ випливає, що $u_1 + u_3 \leq u_2 + u_4$;
- г) з $u_1 \leq u_2$ та $u_2 \leq u_3$ випливає, що $u_1 \leq u_3$.

Напівупорядкованість в банаховому просторі E з конусом K визначається наступним чином: вважають, що $u_1 \leq u_2$, якщо $u_2 - u_1 \in K$. При цьому з'являється ще одна властивість:

д) з $\|u_1^{(n)} - u_1\| \rightarrow 0$, $\|u_2^{(n)} - u_2\| \rightarrow 0$ та $u_1^{(n)} \leq u_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) випливає, що $u_1 \leq u_2$.

Визначення 1.3. Конус K називається нормальним, якщо існує таке число $N(K)$, що з $\theta \leq u \leq v$ випливає, що $\|u\| \leq N(K)\|v\|$.

Конус K_+ в просторі неперервних функцій є нормальним [84].

Визначення 1.4. Множина $\langle v_0, w_0 \rangle$ елементів $u \in K$, яка задовольняє нерівності $v_0 \leq u \leq w_0$ називається конусним відрізком.

Далі вважаємо, що банаховий простір E напівупорядкований конусом K .

Визначення 1.5. Оператор $T : E \rightarrow E$ залишає множину $M \subset E$ інваріантною, якщо $T(M) \subset M$.

Визначення 1.6. Оператор $T : E \rightarrow E$ називається додатним, якщо він залишає інваріантним конус K , тобто $T(K) \subset K$.

Визначення 1.7. Нехай $u_0 \in K$ – деякий фіксований ненульовий елемент. Позначимо через $K(u_0)$ множину елементів $u \in K$, для яких можна вказати такі $\alpha, \beta > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0. \quad (1.33)$$

Тоді оператор T називається u_0 -додатним, якщо з того, що $u \in K$, $u \neq \theta$, випливає, що $Tu \in K(u_0)$.

Визначення 1.8. Оператор $T : E \rightarrow E$ називається монотонним на множині $M \subset E$, якщо $\forall u_1, u_2 \in M$ з $u_1 \leq u_2$ випливає $Tu_1 \leq Tu_2$.

Визначення 1.9. Оператор $T : E \rightarrow E$ називається антитонним на множині $M \subset E$, якщо $\forall u_1, u_2 \in M$ з $u_1 \leq u_2$ випливає $Tu_1 \geq Tu_2$.

Визначення 1.10. Оператор $T : E \rightarrow E$ називається гетеротонним на множині $M \subset E$, якщо існує супутній йому оператор $\hat{T}(v, w) : E \times E \rightarrow E$, такий, що

$\hat{T}(u, u) = Tu$ для кожного $u \in M$ та $\hat{T}(v, w)$ монотонно зростає за першим аргументом та монотонно спадає за другим, тобто

$$\hat{T}(v_1, w_1) \geq \hat{T}(v_2, w_2), \quad (1.34)$$

якщо $v_1 \geq v_2$, $w_1 \leq w_2$, $v_1, v_2, w_1, w_2 \in M$.

Монотонний та антитонний оператори є частинними випадками гетеротонного. Для монотонного оператора в якості супутнього можна обрати $\hat{T}(v, w) = Tv$, а для антитонного оператора – $\hat{T}(v, w) = Tw$.

Визначення 1.11. Конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , якщо

$$\begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \\ \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Визначення 1.12. Оператор $T : E \rightarrow E$ називається цілком неперервним, якщо він неперервний та якщо він кожну обмежену множину перетворює в компактну.

Визначення 1.13. Додатний монотонний оператор $T : K \rightarrow K$ називається угнутим, якщо він u_0 -додатний та для кожних $u \in K(u_0)$ та $t \in (0, 1)$

$$T(tu) > tTu. \quad (1.36)$$

Визначення 1.14. Угнутий оператор T називається u_0 -угнутим, якщо для кожних $u \in K(u_0)$ та $t \in (0, 1)$ існує така функція $\eta(u, t) > 0$, що

$$T(tu) \geq (1 + \eta(u, t))tTu.$$

Визначення 1.15. Додатний гетеротонний оператор T називається псевдоугнутим, якщо $\hat{T}(v_1, w_1) \in K(u_0)$ для будь-яких ненульових $v_1, w_1 \in K$ та для кожних $v, w \in K(u_0)$ та $t \in (0,1)$

$$\hat{T}\left(tu, \frac{w}{t}\right) > t\hat{T}(v, w). \quad (1.37)$$

Визначення 1.16. Псевдоугнутий оператор T називається u_0 -псевдоугнутим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ та $t \in (0,1)$ можна вказати таку функцію $\eta(v, w, t) > 0$, що

$$\hat{T}\left(tu, \frac{w}{t}\right) > (1 + \eta(v, w, t))t\hat{T}(v, w). \quad (1.38)$$

Розглянемо крайову задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (1.39)$$

$$f(\mathbf{x}, u) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.40)$$

Поставимо цій задачі у відповідність еквівалентне на класі $C(\overline{\Omega})$ операторне рівняння

$$u = Tu,$$

де

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds, \quad D(T) = K; \quad (1.41)$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа $-\Delta$ для задачі (1.39), (1.40).

Визначення 1.17. Функція $f(\mathbf{x}, u)$ в (1.39) називається угнутою за змінною u , якщо $u > 0$ та для кожного $t \in (0, 1)$

$$f(\mathbf{x}, tu) - tf(\mathbf{x}, u) > 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \quad (1.42)$$

Лема 1.1. Нехай оператор T вигляду (1.41) u_0 -додатний. Тоді, якщо виконується умова (1.42), то $T \in u_0$ -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Лема 1.2. Нехай функція $f(\mathbf{x}, u)$ в (1.39) є неперервною за сукупністю змінних $(\mathbf{x} \in \Omega, u \in (-\infty, +\infty))$. Тоді оператор T вигляду (1.41), відображаючи в себе простір C , є цілком неперервним.

Лема 1.3. Нехай існує невід’ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$, яка монотонно зростає за v та монотонно спадає за w та така, що $\hat{f}(\mathbf{x}, u, u) = f(\mathbf{x}, u)$. Якщо функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ неперервна за сукупністю змінних, то оператор

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds \quad (1.43)$$

діє з $C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$ та є цілком неперервним. При цьому оператор (1.41) є гетеротоним, а оператор (1.43) – супутнім йому.

Наведемо основні теореми про існування та єдиність додатного розв’язку, а також про збіжність послідовних наближень до нього.

Теорема 1.1 (про існування розв’язку для рівнянь з монотонним оператором). Нехай монотонний на відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ оператор T залишає його інваріантним. Тоді для існування на $\langle v_0, w_0 \rangle$ принаймні однієї нерухомої точки u^* у

оператора T достатньо, щоб конус K був нормальним, а оператор T цілком неперервним.

Теорема 1.2 (про збіжність послідовних наближень для рівнянь з монотонним оператором). Нехай монотонний на відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ оператор T залишає його інваріантним. Нехай конус K нормальний, а оператор T цілком неперервний та має на $\langle v_0, w_0 \rangle$ єдину нерухому точку u^* . Тоді послідовні наближення $u_n = Tu_{n-1}$, ($n = 2, 3, \dots$) збігаються за нормою до u^* , для будь якого $u_1 \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Теорема 1.3 (про єдиність розв'язку для рівнянь з монотонним оператором). Якщо оператор T u_0 -угнутий та монотонний, то рівняння $Tu = \lambda u$ за жодного значення параметра λ не має двох різних ненульових розв'язків у конусі.

Теорема 1.4 (про існування та єдиність розв'язку для рівнянь з гетеротонним оператором). Нехай u_0 -псевдоугнутий оператор T має сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$, конус K нормальний та оператор \hat{T} цілком неперервний. Тоді оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$.

Теорема 1.5 (про збіжність послідовних наближень для рівнянь з гетеротонним оператором). Нехай u_0 -псевдоугнутий оператор T неперервний, має сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$, конус K нормальний та оператор \hat{T} цілком неперервний. Тоді оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$, до якої збігаються послідовні ітерації $u_n = Tu_{n-1}$, ($n = 2, 3, \dots$) для будь якого $u_1 \in K(u_0)$.

1.4 Постановка задачі дослідження

Для розв'язання крайових задач важливо не лише довести існування та єдиність розв'язку, але й надати спосіб його відшукування. Тому серед методів розв'язання крайових задач двобічні методи разом із застосуванням теорії

операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах є потужним засобом, який надає прозорий алгоритм дослідження можливості побудови двобічних наближень.

У більшості випадків такі задачі розглядаються в областях із складною геометричною структурою, для яких знайти точну функцію Гріна складно або вона має дуже громіздкий вигляд, тому в такому випадку в нагоді може стати метод квазіфункцій Гріна.

Враховуючи вищесказане, в даній дисертаційній роботі необхідно розв'язати наступні задачі.

1. Розглянути конкретні крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь із монотонним оператором, довести існування та єдиність розв'язку, побудувати двобічні наближення до нього.

2. Розглянути конкретні крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь із антитонним оператором, довести існування та єдиність розв'язку, побудувати двобічні наближення до нього.

3. Розглянути конкретні крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь із гетеротонним оператором, довести існування та єдиність розв'язку, побудувати двобічні наближення до нього.

4. Удосконалити метод квазіфункцій Гріна для його застосування до розв'язання досліджуваних задач.

5. Розробити чисельний алгоритм для реалізації ітераційного процесу побудови двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна. Порівняти результати, отримані різними методами, між собою.

1.5 Висновки по розділу

Найбільшу зацікавленість представляють процеси, що відбуваються у нелінійних середовищах, тому з'являється питання знаходження наближених розв'язків нелінійних крайових задач, які описують ці процеси, оскільки в більшості випадків точний розв'язок знайти практично неможливо. При цьому визначним стає питання про величину похибки наближеного розв'язку.

Особливе місце серед прямих методів оцінки точності обчислюваної похибки займають двобічні обчислювальні методи. Їх обґрунтування та розвиток у напівупорядкованих просторах із конусом набули в роботах М.О. Красносельського та його учнів.

Водночас розвинуто метод квазіфункцій Гріна, розроблений В.Л. Рвачовим, для його застосування до нелінійних рівнянь у випадку, коли точний вигляд функції Гріна, що входить до операторного рівняння, невідомий. Зазвичай цей метод застосовують для областей складної геометрії.

Таким чином, побудова двобічних методів та розвиток методу квазіфункцій Гріна до розв'язання конкретних крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь є актуальною науковою задачею.

В розділі зроблено огляд основних методів розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь другого роду: метод простої ітерації, метод універсальної ітерації, апроксимаційні методи, апроксимаційно-ітеративні методи, метод розщеплення оператора, метод розщеплення розв'язку.

Також розглянуто основні ідеї та розвиток двобічних методів розв'язання операторних рівнянь.

Наприкінці розділу наведено основні визначення та теореми теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, а також основні задачі, які необхідно розв'язати в даній дисертаційній роботі.

Основні результати розділу опубліковано у роботах [14, 16, 72 – 76, 78, 94, 96 – 98, 101, 104].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [2, 5, 17, 18, 23, 30 – 32, 36, 38, 40 – 44, 46, 48 – 51, 53, 54, 56 – 58, 61 – 69, 79 – 81, 83 – 86, 88 – 93, 106 – 109, 112, 113, 115 – 125, 132 – 134, 138 – 142, 145, 146].

2 ЗАДАЧІ З МОНОТОННИМ, АНТИТОННИМ ТА ГЕТЕРОТОННИМ ОПЕРАТОРАМИ

2.1 Загальна постановка задачі

Багато прикладних задач за фізичним сенсом шуканої функції мають невід’ємний розв’язок. Розглянемо наступну задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.1)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.2)$$

де $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – числові параметри.

Якщо $f(u) = u^p$, $p > 0$, то (2.1), (2.2) описує задачу про розподіл густини газу в зорях, при цьому (2.1) називається рівнянням Лане-Емдена [45]; якщо $f(u) = e^{-u}$, то (2.1), (2.2) є математичною моделлю задачі про течію провідного середовища в циліндрі з непроникними стінками [33]; при $f(u) = \lambda e^u$ (2.1) є стаціонарним рівнянням теорії теплового самозаймання хімічно активної суміші газів у судині [9, 27, 126, 144], задачу (2.1), (2.2) в цьому випадку називають задачею Ліувілля-Гельфанда; рівновага плазми в токамаці описується рівнянням Грета-Шафранова, яке за деяких припущень зводиться до рівняння (2.1) відносно потенціалу u магнітного поля [35, 82, 52]; задача вибору моделі міграції популяції в генетиці також приводить до задачі (2.1), (2.2) з $f(u) = \lambda(1+u)^q$ [21]. Відзначимо також, що якщо $f(u) = f(u, \lambda)$, то, змінюючи його, ми можемо впливати на перебіг процесу.

Нехай $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ є функцією Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω . Відомо [84], що задача (2.1), (2.2) у класі неперервних функцій еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s}, \quad (2.3)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$.

Нехай простір $C(\overline{\Omega})$ напівупорядкований конусом K невід'ємних функцій. Тоді інтегральне рівняння (2.3) розглядаємо як операторне рівняння

$$u = Tu, \quad (2.4)$$

де

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \quad (2.5)$$

Питання існування та єдиності розв'язку рівняння (2.4) або відповідної цьому рівнянню задачі (2.1), (2.2), а також можливості побудови послідовних наближень залежать від властивостей оператора T , дослідження яких будемо проводити методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [84, 117], а тому подальший розгляд буде розділено на випадки: T – монотонний оператор, T – антитонний оператор, T – гетеротонний оператор.

2.2 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із монотонним оператором

2.2.1 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda e^u$

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння наступного вигляду

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.6)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0 \quad (\lambda = const). \quad (2.7)$$

Рівняння (2.6) є стаціонарним рівнянням теорії теплового спалаху при сталій теплопровідності, $u(\mathbf{x})$ – температура у точці \mathbf{x} , у параметрі λ зібрані всі величини, які є суттєвими для задач теплового спалаху [144].

Задача (2.6), (2.7) називається задачею Ліувілля-Гельфанда. Її постановка належить Я.Б. Зельдовичу [55] та Д.А. Франк-Каменецькому [144]. Ця ж задача (2.6), (2.7) виникає при вивченні приписаної скалярної кривизни [4, 6].

Якщо область Ω є одиничною кулею в \mathbf{R}^m , то, згідно з класичним результатом Гідаса, Ні та Ніренберга [12], всі додатні розв'язки задачі (2.6), (2.7) радіально симетричні, та задача (2.6), (2.7) зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} u'' + (m-1)/ru' + \lambda e^u &= 0, \quad r \in (0,1), \\ u'(0) = u(1) &= 0, \quad u(r) = u(|x|). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $m = 1$ це рівняння вперше було розв'язане Ліувіллем в 1853 році [20], використовуючи методи зниження порядку. З його роботи випливає, що існує таке $\lambda^* \approx 0,88$, для якого (2.8) має єдиний розв'язок, а для $\lambda \in (0, \lambda^*)$ – два розв'язки. В 1914 Брату [10] отримав явний розв'язок задачі (2.8) при $m = 2$, множинність яких відповідає результатам Ліувілля, але вже з $\lambda^* \approx 2$. При $m = 3$ чисельний розв'язок було отримано Д.А. Франк-Каменецьким [144] при вивченні теорії самозаймання та Чандрасекаром [11] при вивченні ізотермічних газових зірок в 1934 році. В 1959 році І.М. Гельфанд опублікував змістовну статтю [47], в яку він включив розгляд задачі (2.8) при $m = 1, 2, 3$. Гельфанд показав, що при $m = 3$ існує λ таке, що задача (2.8) має нескінченну множину нетривіальних розв'язків. Приблизно через десять років Джозеф та Лундгрєн [13] визначили множинність розв'язків задачі (2.8) при всіх m .

Задача (2.6), (2.7) привертала до себе увагу й інших авторів [27, 9, 89]. Однак, найчастіше автори розглядали у якості області Ω досить прості за геометрією області та відшукували точні розв'язки рівняння задачі (2.6), (2.7) у випадках, коли це вдавалося.

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} ds. \quad (2.9)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} ds, \quad D(T) = K. \quad (2.10)$$

Введемо окремо у розгляд наступну функцію

$$f(u) = \lambda e^u. \quad (2.11)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.10).

Лема 2.1. Оператор T вигляду (2.10) монотонний.

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.8, необхідно, щоб з $u_1 \leq u_2$ випливало $Tu_1 \leq Tu_2$, то складаємо різницю

$$Tu_1 - Tu_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u_1(\mathbf{s})} ds - \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u_2(\mathbf{s})} ds = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u_1(\mathbf{s})} - e^{u_2(\mathbf{s})}) ds \leq 0.$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.2. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.10).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_0} ds = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq v_0 = 0.$$

Маючи елемент v_1 , будемо v_2 :

$$v_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_1} d\mathbf{s} \geq v_1$$

і так далі.

Тепер в (2.10) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$ – визначиться подалі, маємо

$$w_1 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w_0} d\mathbf{s} = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\beta} d\mathbf{s} = \lambda e^{\beta} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Підбираємо параметри λ та β так, щоб $w_1 \leq w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \frac{\beta}{\lambda e^{\beta}}. \quad (2.12)$$

При цьому

$$w_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w_1} d\mathbf{s} \leq \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{\beta} d\mathbf{s} = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.10). Лема доведена.

Лема 2.3. Оператор T вигляду (2.10) угнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконується умова

$$\beta < 1. \quad (2.13)$$

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.2, ми довели, що оператор T вигляду (2.10) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Для угнутості оператора має виконуватися умова (1.36):

$$T(tu) - tTu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda e^{tu} - t \lambda e^u) ds, \quad t \in (0,1). \quad (2.14)$$

Щоб (2.14) була додатною, треба вимагати виконання умови

$$\lambda e^{tu} - t \lambda e^u > 0 \quad \forall t \in (0,1). \quad (2.15)$$

Нехай $u = v_0 = 0$, тоді (2.15) стає умовою $\lambda(1-t) > 0$, яка виконується $\forall t \in (0,1)$.

Якщо $u = w_0 = \beta$, з (2.15) маємо умову

$$\beta(t-1) > \ln t \quad \forall t \in (0,1),$$

яка має місце якщо β задовольняє умові (2.13). Лема доведена.

Лема 2.4. Оператор T вигляду (2.10) є u_0 -угнутим, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.13).

Доведення. Угнутість оператора T впливає з леми 2.3.

Дослідимо оператор T на u_0 -угнутість. Складаємо

$$T(t_0 u) - (1 + \eta) t_0 Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda e^{t_0 u} - (1 + \eta) t \lambda e^u) ds. \quad (2.16)$$

Щоб (2.16) була невід'ємною, вимагаємо виконання нерівності

$$\lambda e^{t_0 u} - (1 + \eta) t_0 \lambda e^u \geq 0 \quad \forall t_0 \in (0, 1), \quad \eta > 0,$$

звідки маємо умову

$$\eta \leq \frac{\lambda e^{t_0 u} - t_0 \lambda e^u}{t_0 \lambda e^u}.$$

Для виконання останньої нерівності потрібно, щоб

$$\lambda e^{t_0 u} - t_0 \lambda e^u > 0.$$

Беручи до уваги (2.15), робимо висновок, що ця умова виконується для всіх $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.6), (2.7) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.1. Ітераційний процес (2.17), (2.18) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.9), якщо параметри λ та β задовольняють умови (2.12) та (2.13). При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Оскільки конус K є нормальним та функція $f(u)$ вигляду (2.11) неперервна за u , то оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, є цілком неперервним [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.1 та 2.2, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри λ та β задовольняють умові (2.12). Звідси випливає, що рівняння (2.9) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.4, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, якщо параметр β задовольняє умові (2.13), то звідси випливає, що процес (2.17), (2.18) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв'язок рівняння (2.9). Теорема доведена.

Сформулюємо та доведемо наступну теорему, яка має пряме відношення до задачі (2.6), (2.7), користуючись методикою доведення схожої теореми у [70].

Теорема 2.2. Нехай оператор $T(\lambda, u)$ для кожного $\lambda > 0$ є монотонний та угнутий, для кожного $u \in K$ монотонно зростає за λ та задовольняє умову

$$T(t\lambda, u) \leq \frac{1}{t} T(\lambda, u), \quad t \in (0, 1]. \quad (2.19)$$

Нехай u_1 та u_2 – додатні розв'язки рівняння $u = T(\lambda, u)$, що відповідають двом різним значенням λ_1 та λ_2 , $\lambda_1 < \lambda_2$. Тоді $u_1 < u_2$.

Доведення. Припустимо, якщо $\lambda_1 < \lambda_2$, тоді $u_1 > u_2$. Позначимо через τ_0 таку максимальну сталу, що $\tau_0 u_1 \leq u_2$ та $t u_1 \geq u_2$, якщо $t > \tau_0$, $t \in (0, 1]$. Вочевидь, $\tau_0 \in [0, 1)$. Згідно з умовами теореми, маємо

$$u_2 = T(\lambda_2, u_2) \geq T(\lambda_2, \tau_0 u_1). \quad (2.20)$$

З властивості угнутості оператора T за змінною u нерівність (1.36) можна записати таким чином: $T(\lambda_2, \tau_0 u_1) \geq \tau_0 T(\lambda_2, u_1)$, тому що $\tau_0 \in [0, 1)$, а тому нерівність (2.20)

можна продовжити наступним чином:

$$T(\lambda_2, \tau_0 u_1) \geq \tau_0 T(\lambda_2, u_1) = \tau_0 T\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1, u_1\right) \geq \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T(\lambda_1, u_1) = \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1.$$

Отже, отримали, що $u_2 \geq \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1$. Далі, з максимальності сталої τ_0 випливає, що

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1$ або $\lambda_2 \leq \lambda_1$, що суперечить припущенню $\lambda_1 < \lambda_2$. Теорема доведена.

Покажемо, що стосовно задачі (2.6), (2.7) всі умови теореми 2.2 виконуються. Монотонність та угнутість доведено в лемах 2.1 та 2.3. Припустивши $\lambda_1 < \lambda_2$, маємо, що

$$T(\lambda_1, u) - T(\lambda_2, u) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} d\mathbf{s} < 0,$$

тобто оператор T зростає за змінною $\lambda \quad \forall u \in K$. Далі, складаємо різницю

$$T(t\lambda, u) - \frac{1}{t} T(\lambda, u) = \frac{\lambda(t^2 - 1)}{t} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \leq 0 \quad t \in (0, 1],$$

що доводить виконання умови (2.19). Таким чином, двом різним значенням λ_1 та λ_2 , $\lambda_1 < \lambda_2$, відповідають два додатні розв'язки u_1 та u_2 , при цьому $u_1 < u_2$.

2.2.2 Рівняння з правою частиною $f(u) = u^q$

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u = u^q \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.21)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad q > 0. \quad (2.22)$$

Диференціальне рівняння (2.21) називається рівнянням Лане-Емдена. Задача (2.21), (2.22) є математичною моделлю задачі про розподіл густини газу в зорях [45].

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^q(\mathbf{s}) ds. \quad (2.23)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^q(\mathbf{s}) ds, \quad D(T) = K. \quad (2.24)$$

Введемо окремо у розгляд наступну функцію

$$f(u) = u^q. \quad (2.25)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.24).

Лема 2.5. Оператор T вигляду (2.24) монотонний.

Доведення. Складаємо різницю

$$Tu_1 - Tu_2 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1^q(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2^q(\mathbf{s}) ds = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (u_1^q(\mathbf{s}) - u_2^q(\mathbf{s})) ds \leq 0.$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.6. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.24).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u_1 = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_0^q(\mathbf{s}) ds = 0.$$

Вочевидь, лівий кінець конусного відрізка при використанні схеми послідовних наближень

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

залишається нерухомим, тому що $f(0) = 0$, тобто замість двобічних наближень отримуємо лише наближення зверху. Ми пропонуємо покласти $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, а функція $\omega(\mathbf{x})$ визначається наступним чином:

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.26)$$

при цьому для визначення ε скористаємося співвідношенням

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_0^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \varepsilon^q \omega^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \varepsilon^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq v_0,$$

звідси

$$\begin{aligned} \varepsilon^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq \varepsilon \omega(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq \varepsilon^{1-q} \omega(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Піднесемо (2.27) до квадрату та застосуємо нерівність Коші-Буняковського [8]

$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$, отримаємо:

$$\left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right)^2 \geq \varepsilon^{2(1-q)} \omega^2(\mathbf{x}),$$

або

$$\omega^2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

що приводить до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega^2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.28)$$

Тепер в (2.24) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = \text{const} > 0$. Умова $Tw_0 \leq w_0$ приводить до наступного:

$$w_1 = Tw_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \beta^q d\mathbf{s} = \beta^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta,$$

звідки маємо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta^{1-q}. \quad (2.29)$$

Таким чином, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.24), якщо ε та β задовольняють умови (2.28) та (2.29).

Лема доведена.

Зауваження 2.1. Функція $\omega(\mathbf{x})$ із вказаними властивостями може бути побудована з використанням конструктивного апарату теорії R -функцій [125, 127 – 130] для області Ω досить довільної геометрії.

Лема 2.7. Функція $f(u)$ вигляду (2.25) угнута на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконуються умови

$$0 < q < 1. \quad (2.30)$$

Доведення. Для угнутості функції має виконуватися умова

$$f(tu) - tf(u) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.31)$$

Умова (2.31) в даному випадку приймає вигляд:

$$(tu)^q > tu^q,$$

звідки $t^{q-1} > 1$. Останнє має місце якщо q задовольняє умові (2.30). Лема доведена.

Лема 2.8. Оператор T вигляду (2.24) u_0 -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.30).

Доведення. Угнутість функції $f(u)$ вигляду (2.25) випливає з леми 2.7.

Тепер необхідно довести виконання нерівностей

$$Au_0 \leq Tu \leq Bu_0,$$

де $A, B > 0$. Але побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.6, ми тим самим довели виконання цих нерівностей. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.21), (2.22) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_{n-1}^q(\mathbf{s}) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.32)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_{n-1}^q(\mathbf{s}) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.33)$$

де $v_0 = \varepsilon \omega$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.3. Ітераційний процес (2.32), (2.33) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.23), якщо параметри q, ε, β задовольняють умови (2.28), (2.29) та (2.30). При цьому маємо

$$\varepsilon \omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Відомо, що конус K невід'ємних в $C(\overline{\Omega})$ функцій є нормальним, крім того, оскільки $f(u)$ вигляду (2.25) неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, цілком неперервний [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.5 та 2.6, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри q, ε, β задовольняють умови (2.28) та (2.29). Звідси випливає, що рівняння (2.21) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.8, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, то звідси випливає, що процес (2.32), (2.33) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв'язок рівняння (2.21). Теорема доведена.

2.2.3 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda + u^p$

Дослідимо можливість побудови двобічних наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі [28]

$$-\Delta u = \lambda + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.34)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad p > 1, \quad \lambda > 0 \quad (p, \lambda - const). \quad (2.35)$$

Диференціальне рівняння (2.34) є частинним випадком рівняння (2.46), де перше джерело є сталою величиною.

Інтегральне рівняння для задачі (2.34), (2.35) має вигляд

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + u^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (2.36)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + u^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \quad (2.37)$$

Розглянемо властивості оператора T вигляду (2.37).

Лема 2.9. Оператор T вигляду (2.37) монотонний.

Доведення. Складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + u_1^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + u_2^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (u_1^p(\mathbf{s}) - u_2^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq 0. \end{aligned}$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.10. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.37).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + v_0^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq v_0.$$

Маючи елемент v_1 , будуємо v_2 :

$$v_2 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + v_1^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = v_1$$

і так далі.

Для елемента $u = w_0 = \beta$, $\beta = \text{const} > 0$, з (2.37) отримуємо

$$w_1 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + w_0^p) d\mathbf{s} = (\lambda + \beta^p) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Підбираємо параметри λ , p та β так, щоб $w_1 \leq w_0$, а тому маємо

$$(\lambda + \beta^p) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

або

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \frac{\beta}{\lambda + \beta^p}. \quad (2.38)$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.37). Лема доведена.

Лема 2.11. Оператор T вигляду (2.37) угнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконується умова

$$\lambda > \max \left\{ \beta^p (p-1); \frac{\beta^p (t_* - t_*^p)}{1 - t_*} \right\}, \quad (2.39)$$

де $t_* \in (0, 1)$ – корені рівняння

$$1 + t^p (p-1) = p t^{p-1}. \quad (2.40)$$

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.10, ми довели, що оператор T вигляду (2.37) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Для угнутості оператора має виконуватися умова

$$T(tu) > tTu \quad \forall t \in (0,1), \quad u \in \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Складаємо

$$T(tu) - tTu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda(1-t) + u^p(t^p - t)) ds, \quad t \in (0,1). \quad (2.41)$$

Щоб (2.41) була додатною, треба вимагати виконання умови

$$\lambda(1-t) + u^p(t^p - t) > 0 \quad \forall t \in (0,1). \quad (2.42)$$

Нехай $u = v_0 = 0$, тоді (2.42) стає умовою $\lambda(1-t) > 0$, яка виконується $\forall t \in (0,1)$.

Якщо $u = w_0 = \beta$, з (2.42) маємо умову

$$\lambda > \frac{\beta^p(t - t^p)}{1-t}.$$

Введемо в розгляд функцію $g(t) := \frac{t - t^p}{1-t}$. Свого максимального значення ця функція досягає на коренях $t_* \in (0,1)$ рівняння (2.40). Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = p - 1,$$

то параметри λ, p, β мають задовольняти умові (2.39). Лема доведена.

Лема 2.12. Оператор T вигляду (2.37) є u_0 -угнутим, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.39).

Доведення. Угнутий оператор T називається u_0 -угнутим на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо для кожного $t_0 \in (0,1)$ можна вказати таку функцію $\eta = \eta(u, t_0) > 0$, що $T(t_0 u) \geq (1 + \eta)t_0 Tu$ на відрізку, сумірному з u_0 [84] (будь-який елемент вигляду $const \cdot u_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ сумірний з u_0 за визначенням).

Угнутість оператора T впливає з леми 2.11.

Дослідимо оператор T на u_0 -угнутість. Складаємо

$$T(t_0 u) - (1 + \eta)t_0 Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + t_0^p u^p - (1 + \eta)t_0(\lambda + u^p)) ds. \quad (2.43)$$

Щоб (2.43) була невід'ємною, вимагаємо виконання нерівності

$$\lambda + t_0^p u^p - (1 + \eta)t_0(\lambda + u^p) \geq 0 \quad \forall t_0 \in (0,1), \quad \eta > 0,$$

звідки маємо умову

$$\eta \leq \frac{\lambda(1 - t_0) - u^p(t_0 - t_0^p)}{t_0(\lambda + u^p)}.$$

Для виконання останньої нерівності потрібно, щоб

$$\lambda(1 - t_0) - u^p(t_0 - t_0^p) > 0.$$

Беручи до уваги (2.42), робимо висновок, що ця умова виконується для всіх $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.34), (2.35) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + v_{n-1}^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.44)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda + w_{n-1}^p(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.4. Ітераційний процес (2.44), (2.45) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.36), якщо параметри λ , p , β задовольняють умови (2.38) та (2.39). При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Відомо, що конус K невід'ємних в $C(\overline{\Omega})$ функцій є нормальним, крім того, оскільки $f(u)$ вигляду

$$f(u) = \lambda + u^p$$

неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, цілком неперервний [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.9 та 2.10, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри λ , p , β задовольняють умові (2.38). Звідси випливає, що рівняння (2.36) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.12, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, якщо параметри λ , p , β задовольняють умові (2.39), тоді процес (2.44), (2.45)

рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв’язок рівняння (2.36). Теорема доведена.

2.2.4 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda u^q + u^p$

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння [1]

$$-\Delta u = \lambda u^q + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.46)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < q < 1 < p, \quad \lambda > 0. \quad (2.47)$$

Диференціальне рівняння (2.46) є стаціонарною версією рівняння теплопровідності з двома джерелами тепла різної потужності та описує фізичну картину розподілу тепла у платівці (область Ω), яка не змінюється з часом. Така картина виникає тоді, коли стаціонарне джерело (або джерела) тепла діють доволі тривалий час, та перехідні процеси, викликані його увімкненням, припинилися. Члени рівняння λu^q та u^p фактично є потужностями джерел тепла.

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda u^q(\mathbf{s}) + u^p(\mathbf{s})) ds. \quad (2.48)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda u^q(\mathbf{s}) + u^p(\mathbf{s})) ds, \quad D(T) = K. \quad (2.49)$$

Введемо окремо у розгляд наступну функцію

$$f(u) = \lambda u^q + u^p. \quad (2.50)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.49).

Лема 2.13. Оператор T вигляду (2.49) монотонний.

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.8, необхідно, щоб з $u_1 \leq u_2$ випливало $Tu_1 \leq Tu_2$, то складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda u_1^q(\mathbf{s}) + u_1^p(\mathbf{s})) ds - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda u_2^q(\mathbf{s}) + u_2^p(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda (u_1^q(\mathbf{s}) - u_2^q(\mathbf{s})) + u_1^p(\mathbf{s}) - u_2^p(\mathbf{s})) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.14. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.49).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda v_0^q(\mathbf{s}) + v_0^p(\mathbf{s})) ds = 0.$$

Відповідно, лівий кінець конусного відрізка при використанні схеми послідовних наближень $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 1, 2, \dots$ залишається нерухомим, тобто замість двобічних наближень отримуємо лише наближення зверху. Ми пропонуємо покласти $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = const > 0$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, при цьому для визначення ε скористаємося співвідношенням

$$\begin{aligned} v_1 = Tv_0 &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda v_0^q(\mathbf{s}) + v_0^p(\mathbf{s})) ds = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \varepsilon^q \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^p \omega^p(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \varepsilon^q (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})) ds = \varepsilon^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})) ds \geq v_0, \\ &\varepsilon^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})) ds \geq \varepsilon \omega(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

або

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})) ds \geq \varepsilon^{1-q} \omega(\mathbf{x}). \quad (2.51)$$

Піднесемо (2.51) до квадрату та застосуємо нерівність Коші-Буняковського $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})) ds \right)^2 &\geq \varepsilon^{2(1-q)} \omega^2(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \int_{\Omega} (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s}))^2 ds &\geq \varepsilon^{2(1-q)} \omega^2(\mathbf{x}), \\ \omega^2(\mathbf{x}) &\leq \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s}))^2 ds \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \end{aligned}$$

що приводить до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega^2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} (\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s}))^2 ds \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \quad (2.52)$$

Тепер в (2.49) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = \text{const} > 0$. Умова $T w_0 \leq w_0$ приводить до наступного:

$$w_1 = T w_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda \beta^q + \beta^p) ds = (\lambda \beta^q + \beta^p) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta,$$

звідки маємо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \frac{\beta}{\lambda \beta^q + \beta^p}. \quad (2.53)$$

Таким чином, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.49), якщо ε та β задовольняють умови (2.52) та (2.53).

Лема доведена.

Лема 2.15. Функція $f(u)$ вигляду (2.50) угнута на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконуються умови

$$\lambda > \max \left\{ \beta^{p-q} \frac{1-p}{q-1}, \beta^{p-q} \frac{t_* - t_*^p}{t_*^q - t_*} \right\}, \quad (2.54)$$

де $t_* \in (0,1)$ – корені рівняння

$$(1 - pt^{p-1})(t^q - t) - (qt^{q-1} - 1)(t - t^p) = 0. \quad (2.55)$$

Доведення. Для угнутості функції має виконуватися умова

$$f(tu) - tf(u) > 0 \quad \forall t \in (0,1) \quad (\forall \mathbf{x} \in \Omega). \quad (2.56)$$

Умова (2.56) в даному випадку приймає вигляд:

$$\lambda(tu)^q + (tu)^p > t(\lambda u^q + u^p). \quad (2.57)$$

Поклавши в (2.57) $u = w_0 = \beta$, отримуємо зв'язок між параметрами λ , p , q та β

$$\lambda > \frac{\beta^{p-q}(t - t^p)}{t^q - t}.$$

Введемо в розгляд функцію $g(t) := \frac{t-t^p}{t^q-t}$. Свого максимального значення ця функція досягає на коренях $t_* \in (0,1)$ рівняння (2.55). Оскільки $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = \frac{1-p}{q-1}$, то параметри λ, q, p, β мають задовольняти умові (2.54). Лема доведена.

Лема 2.16. Оператор T вигляду (2.49) u_0 -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.54).

Доведення. Угнутість функції $f(u)$ вигляду (2.50) випливає з леми 2.15.

Тепер необхідно довести виконання нерівностей

$$Au_0 \leq Tu \leq Bu_0,$$

де $A, B > 0$. Але побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.14, ми тим самим довели виконання цих нерівностей. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.46), (2.47) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda v_{n-1}^q(\mathbf{s}) + v_{n-1}^p(\mathbf{s})) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.58)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (\lambda w_{n-1}^q(\mathbf{s}) + w_{n-1}^p(\mathbf{s})) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.59)$$

де $v_0 = \varepsilon \omega$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.5. Ітераційний процес (2.58), (2.59) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.48), якщо параметри $\lambda, q, p, \varepsilon, \beta$ задовольняють умови (2.52), (2.53) та (2.54).

При цьому маємо

$$\varepsilon \omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Відомо, що конус K невід'ємних в $C(\overline{\Omega})$ функцій є нормальним, крім того, оскільки $f(u)$ вигляду (2.50) неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, цілком неперервний [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.13 та 2.14, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри q , ε , β задовольняють умови (2.52) та (2.53). Звідси випливає, що рівняння (2.46) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.16, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, то звідси випливає, що процес (2.58), (2.59) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв'язок рівняння (2.46). Теорема доведена.

2.2.5 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння наступного вигляду [7]

$$-\Delta u = \lambda(e^u + e^{\gamma u}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.60)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda, \gamma - const). \quad (2.61)$$

Рівняння (2.60) є стаціонарною версією рівняння теплопровідності з двома джерелами тепла різної потужності та описує фізичну картину розподілу тепла по платівці (область Ω), яка не змінюється з часом. Така картина виникає, коли стаціонарне джерело тепла діє доволі тривалий час, і перехідні процеси, що виникли з його ввімкненням, припинились.

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}. \quad (2.62)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \quad (2.63)$$

Введемо окремо у розгляд наступну функцію

$$f(u) = \lambda (e^u + e^{\gamma u}). \quad (2.64)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.63).

Лема 2.17. Оператор T вигляду (2.63) монотонний.

Доведення. Складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u_1(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} - \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} = \\ &= \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{u_1(\mathbf{s})} - e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})} - e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} \leq 0. \end{aligned}$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.18. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.63).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{v_0} + e^{\gamma v_0}) d\mathbf{s} = 2\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq v_0 = 0.$$

Маючи елемент v_1 , будемо v_2 :

$$v_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{v_1} + e^{\gamma v_1}) ds \geq v_1$$

і так далі.

Тепер в (2.63) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$ – визначиться подалі, маємо

$$w_1 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{w_0} + e^{\gamma w_0}) ds = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{\beta} + e^{\gamma \beta}) ds = \lambda (e^{\beta} + e^{\gamma \beta}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Підбираємо параметри λ , β та γ так, щоб $w_1 \leq w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \frac{\beta}{\lambda (e^{\beta} + e^{\gamma \beta})}. \quad (2.65)$$

При цьому

$$w_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{w_1} + e^{\gamma w_1}) ds \leq \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{\beta} + e^{\gamma \beta}) ds = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.63). Лема доведена.

Лема 2.19. Оператор T вигляду (2.63) угнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконується умова

$$e^{\beta t} + e^{\gamma \beta t} - t e^{\beta} - t e^{\gamma \beta} > 0 \quad \forall t \in (0, 1). \quad (2.66)$$

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.18, ми довели, що оператор T вигляду (2.63) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Для угнутості оператора має виконуватися умова

$$T(tu) > tTu \quad \forall t \in (0,1), \quad u \in \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Складаємо

$$T(tu) - tTu = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{tu} + e^{\gamma tu} - te^u - te^{\gamma u}) ds, \quad t \in (0,1). \quad (2.67)$$

Щоб (2.67) була додатною, треба вимагати виконання умови

$$e^{tu} + e^{\gamma tu} - te^u - te^{\gamma u} > 0. \quad (2.68)$$

Нехай $u = v_0 = 0$, тоді (2.68) стає умовою $1 - t > 0$, яка виконується $\forall t \in (0,1)$.

Якщо $u = w_0 = \beta$, (2.68) приймає вигляд $e^{\beta t} + e^{\gamma \beta t} - te^{\beta} - te^{\gamma \beta} > 0$, що збігається з умовою (2.66). Лема доведена.

Лема 2.20. Оператор T вигляду (2.63) u_0 -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова

$$e^{\tau \beta} + e^{\gamma \tau \beta} - \tau e^{\beta} - \tau e^{\gamma \beta} > 0 \quad \forall \tau \in (0,1). \quad (2.69)$$

Доведення. Угнутість оператора T впливає з леми 2.19, оскільки при виконанні умови (2.69) виконується умова (2.66).

Для перевірки оператора T на u_0 -угнутість використаємо умову (1.42). Функція $f(u)$ визначається виразом (2.64). Складаємо

$$f(\tau u) - \tau f(u) = \lambda (e^{\tau u} + e^{\gamma \tau u} - \tau e^u - \tau e^{\gamma u}). \quad (2.70)$$

Щоб (2.70) була додатною, вимагаємо виконання нерівності

$$e^{\tau u} + e^{\gamma \tau u} - \tau e^u - \tau e^{\gamma u} > 0 \quad \forall \tau \in (0,1), \quad \forall u \in \langle v_0, w_0 \rangle,$$

звідки маємо умову

$$e^{\tau \beta} + e^{\gamma \tau \beta} - \tau e^{\beta} - \tau e^{\gamma \beta} > 0.$$

Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.60), (2.61) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.71)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.72)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.6. Ітераційний процес (2.71), (2.72) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.62), якщо параметри λ , γ , β задовольняють умови (2.65) та (2.69). При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Оскільки конус K є нормальним та функція $f(u)$ вигляду (2.64) неперервна за u , то оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, є цілком неперервним [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.17 та 2.18, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри λ , γ , β задовольняють умові (2.65). Звідси випливає, що рівняння (2.62) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.20, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, якщо параметри λ , γ , β задовольняють умові (2.69), то звідси випливає, що процес (2.71), (2.72) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв'язок рівняння (2.62). Теорема доведена.

2.2.6 Рівняння з правою частиною $f(u) = \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u})$

Розглянемо більш загальний випадок задачі (2.60), (2.61) у просторі \mathbf{R}^2

$$-\Delta u = \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.73)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda, \alpha, \gamma - \text{const}). \quad (2.74)$$

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є рівняння

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}. \quad (2.75)$$

Введемо у розгляд оператор T та функцію $f(u)$

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}) d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \quad (2.76)$$

$$f(u) = \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u}). \quad (2.77)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.76).

Лема 2.21. Оператор T вигляду (2.76) монотонний.

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.8, необхідно, щоб з $u_1 \leq u_2$ випливало $Tu_1 \leq Tu_2$, то складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{u_1(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} - \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} = \\ &= \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{u_1(\mathbf{s})} - e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})} - e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} \leq 0. \end{aligned}$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.22. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.76).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{v_0} + e^{\gamma v_0}) d\mathbf{s} = 2\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} d\mathbf{s} \geq v_0 = 0.$$

Маючи елемент v_1 , будуємо v_2 :

$$v_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{v_1(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_1(\mathbf{s})}) d\mathbf{s} \geq \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{v_0} + e^{\gamma v_0}) d\mathbf{s} = v_1$$

і так далі.

Тепер в (2.76) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$ визначиться подалі, маємо

$$w_1 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{\beta} + e^{\gamma \beta}) d\mathbf{s} = \lambda (e^{\beta} + e^{\gamma \beta}) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} d\mathbf{s}.$$

Підбираємо параметри λ , β та γ так, щоб $w_1 \leq w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{x}|^{2\alpha} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \frac{\beta}{\lambda(e^{\beta} + e^{\gamma\beta})}. \quad (2.78)$$

При цьому

$$w_2 = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{w_1} + e^{\gamma w_1}) d\mathbf{s} \leq \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{\beta} + e^{\gamma\beta}) d\mathbf{s} = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.76). Лема доведена.

Лема 2.23. Функція $f(u)$ вигляду (2.77) угнута на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконуються умови

$$\beta \leq 1, \quad \gamma \leq 1. \quad (2.79)$$

Доведення. Для угнутості функції має виконуватися умова умова (1.36):

$$\begin{aligned} f(tu) - tf(u) &= \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^{tu} + e^{\gamma tu}) - \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} t (e^u + e^{\gamma u}) = \\ &= \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^{tu} - te^u + e^{\gamma tu} - te^{\gamma u}), \end{aligned}$$

звідки отримуємо умову

$$e^{tu} - te^u + e^{\gamma tu} - te^{\gamma u} > 0, \quad \forall t \in (0,1). \quad (2.80)$$

Якщо в (2.80) покласти $u = v_0 = 0$, то отримуємо умову $2(1-t) > 0$, яка виконується завжди $\forall t \in (0,1)$.

Покладемо в (2.80) $u = w_0 = \beta$, тоді отримаємо

$$e^{\beta t} - t e^{\beta} + e^{\gamma \beta t} - t e^{\gamma \beta} > 0. \quad (2.81)$$

Умова (2.81) є додатковою до умови (2.78) для вибору параметрів $\lambda, \gamma, \alpha, \beta$.

Перепишемо (2.81) наступним чином:

$$e^{\beta} (e^{\beta(t-1)} - t) + e^{\gamma \beta} (e^{\gamma \beta(t-1)} - t) > 0.$$

Звідси отримуємо умови (2.79). Лема доведена.

Лема 2.24. Оператор T вигляду (2.76) u_0 -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.79).

Доведення. Угнутість функції $f(u)$ вигляду (2.77) випливає з леми 2.23.

Тепер необхідно довести виконання нерівностей

$$A u_0 \leq T u \leq B u_0,$$

де $A, B > 0$. Але побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.22, ми тим самим довели виконання цих нерівностей. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.73), (2.74) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.82)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) |\mathbf{s}|^{2\alpha} (e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.83)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.7. Ітераційний процес (2.82), (2.83) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.75), якщо параметри λ , γ , α , β задовольняють умови (2.78) та (2.79). При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Відомо, що конус K невід'ємних в $C(\overline{\Omega})$ функцій є нормальним, крім того, оскільки $f(u)$ вигляду (2.77) неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, цілком неперервний [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.21 та 2.22, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри λ , γ , α , β задовольняють умові (2.78). Звідси випливає, що рівняння (2.75) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.24, оператор T u_0 -угнутий та конус K нормальний, якщо параметри γ , β задовольняють умові (2.79), то звідси випливає, що процес (2.82), (2.83) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв'язок рівняння (2.75). Теорема доведена.

2.2.7 Рівняння з правою частиною $f(u) = au + b$

Розглянемо крайову задачу для лінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u = au + b \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.84)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad b \geq 0, \quad a = \text{const}. \quad (2.85)$$

Якщо рівняння (2.84) набуває вигляду $-\Delta u = \kappa^2 u(\mathbf{x})$, маємо задачу про розповсюдження, випромінювання та розсіювання звуку на твердих тілах [37].

Якщо вивчається процес дифузії за наявності “ланцюгових” реакцій (частинки дифундуючої рідини або газу вступають у реакцію з навколишнім середовищем і розмножуються), також маємо рівняння (2.84), в якому стала a є коефіцієнтом пропорційності швидкості реакції розпаду до концентрації газу.

Еквівалентним цій задачі інтегральним рівнянням є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(au(\mathbf{s}) + b) ds. \quad (2.86)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(au(\mathbf{s}) + b) ds, \quad D(T) = K. \quad (2.87)$$

Введемо окремо у розгляд наступну функцію

$$f(u) = au + b. \quad (2.88)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.87).

Лема 2.25. Оператор T вигляду (2.87) монотонний.

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.8, необхідно, щоб з $u_1 \leq u_2$ випливало

$Tu_1 \leq Tu_2$, то складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(au_1(\mathbf{s}) + b) ds - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(au_2(\mathbf{s}) + b) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) a (u_1(\mathbf{s}) - u_2(\mathbf{s})) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Останнє виконується, якщо

$$a > 0. \quad (2.89)$$

Тобто $Tu_1 \leq Tu_2$. Лема доведена.

Лема 2.26. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантний для оператора T вигляду (2.87).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(av_0(\mathbf{s}) + b) ds = b \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq v_0 = 0.$$

Маючи елемент v_1 , будуємо v_2 :

$$v_2 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(av_1(\mathbf{s}) + b) ds \geq v_1$$

і так далі.

Тепер в (2.87) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$ – визначиться подалі, маємо

$$w_1 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(aw_0(\mathbf{s}) + b) ds = (a\beta + b) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Підбираємо параметри a , b та β так, щоб $w_1 \leq w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \frac{\beta}{a\beta + b}. \quad (2.90)$$

При цьому

$$w_2 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(aw_1(\mathbf{s}) + b) ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})(a\beta + b) ds = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (2.87). Лема доведена.

Лема 2.27. Оператор T вигляду (2.87) угнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$.

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.26, ми довели, що оператор T вигляду (2.87) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де $u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Для угнутості оператора має виконуватися умова

$$T(tu) > tTu \quad \forall t \in (0,1), \quad u \in \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Складаємо

$$T(tu) - tTu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) b(1-t) ds, \quad t \in (0,1). \quad (2.91)$$

Щоб (2.91) була невід'ємною, треба вимагати виконання умови $b(1-t) > 0$. Для $t \in (0,1)$ та $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ця умова виконується завжди. Лема доведена.

Лема 2.28. Оператор T вигляду (2.87) u_0 -угнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Доведення. Угнутість оператора T доведена в лемі 2.27.

Складаємо

$$T(t_0 u) - (1 + \eta) t_0 Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (b - t_0 b - \eta t_0 (au(\mathbf{s}) + b)) ds. \quad (2.92)$$

Щоб (2.92) була додатною, вимагаємо виконання нерівності

$$b - t_0 b - \eta t_0 (au(\mathbf{x}) + b) \geq 0 \quad \forall t_0 \in (0,1), \quad \eta > 0,$$

звідки маємо умову $\eta \leq \frac{b(1-t_0)}{t_0(au(\mathbf{x}) + b)}$, яка виконується, якщо чисельник $b(1-t_0) \geq 0$, що, очевидно, має місце. Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.84), (2.85) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (av_{n-1}(\mathbf{s}) + b) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.93)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (aw_{n-1}(\mathbf{s}) + b) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.94)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.8. Ітераційний процес (2.93), (2.94) рівномірно збігається з обох боків до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.86) за нормою простору $C(\overline{\Omega})$, якщо параметри a , b , β задовольняють умови (2.89) та (2.90). При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Відомо, що конус K невід'ємних в $C(\overline{\Omega})$ функцій є нормальним, крім того, оскільки $f(u)$ вигляду (2.88) неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\overline{\Omega})$ в себе, цілком неперервний [84, 118]. Тепер, згідно з лемами 2.25 та 2.26, оператор T монотонний та відображає конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ на себе, якщо параметри a , b , β задовольняють умови (2.89) та (2.90). Звідси випливає, що рівняння (2.84) має єдиний додатний розв'язок [84].

Оскільки, згідно з лемою 2.28, оператор $T u_0$ -угнутий та конус K нормальний, то звідси випливає, що процес (2.93), (2.94) рівномірно збігається до $u^*(\mathbf{x})$ з обох боків за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ [84], де $u^*(\mathbf{x})$ – точний розв’язок рівняння (2.84). Теорема доведена.

Якщо в задачі (2.84), (2.85) $b = b(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$, то умова (2.90) приймає вигляд

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \frac{\beta}{a\beta + \tilde{b}}, \quad \tilde{b} = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} b(\mathbf{x}).$$

2.3 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із антитонним оператором

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u = \frac{1}{u^p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.95)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad p > 0. \quad (2.96)$$

Еквівалентним на просторі $C(\Omega)$ цій задачі інтегральним рівнянням є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u^p(\mathbf{s})} ds. \quad (2.97)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u^p(\mathbf{s})} ds, \quad D(T) = K. \quad (2.98)$$

Позначимо

$$f(u) = \frac{1}{u^p}. \quad (2.99)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.98).

Лема 2.29. Оператор T вигляду (2.98) антитонний. При цьому супутній йому оператор \hat{T} визначається виразом

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \quad (2.100)$$

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.9, необхідно, щоб з $u_1 \leq u_2$ випливало $Tu_1 \geq Tu_2$, складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_1^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} - \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_2^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{1}{u_1^p(\mathbf{s})} - \frac{1}{u_2^p(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s} \geq 0. \end{aligned}$$

Тобто $Tu_1 \geq Tu_2$. При цьому оператор \hat{T} є супутнім оператору T , оскільки $\hat{T}(u, u) = Tu$. Лема доведена.

Лема 2.30. Існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, сильно інваріантний для оператора T вигляду (2.98).

Доведення. Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ розглянемо схему послідовних наближень

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w_{n-1}^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.101)$$

Покладемо в (2.101) $w_0 = \beta = \text{const} > 0$, отримаємо

$$w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\beta^p} ds = \frac{1}{\beta^p} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p},$$

тут

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Вибираємо β таким чином, щоб виконувалася нерівність $w_1 \leq w_0$ або $\frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p} \leq \beta$, звідки отримуємо умову для β

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta^{1+p}. \quad (2.102)$$

Далі, елемент $w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w_1^p(\mathbf{s})} ds$ внаслідок антитонності оператора T , яка впливає з леми 2.29, задовольняє нерівностям $w_1 \leq w_2 \leq w_0 = \beta$. Продовжуючи процес (2.101), отримаємо нерівності

$$w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n-1} \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta,$$

тобто можна покласти $v_0 = w_1(\mathbf{x})$.

Таким чином, оскільки виконуються наступні співвідношення

$$\begin{cases} \hat{T}(v_0, w_0) = Tw_0 = w_1 \geq v_0, \\ \hat{T}(w_0, v_0) = Tv_0 = Tw_1 = w_2 \leq w_0, \end{cases}$$

то конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = w_1(\mathbf{x})$, $w_0 = \beta$, згідно з визначенням 1.11, є сильно інваріантним для оператора T вигляду (2.98), якщо p та β задовольняють умові (2.102). Лема доведена.

Лема 2.31. Оператор T вигляду (2.98) псевдоугнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо виконується умова

$$0 < p < 1. \quad (2.103)$$

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в лемі 2.30, ми довели, що супутній оператор \hat{T} вигляду (2.100) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Тепер розглянемо нерівність (1.37). Складемо різницю

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(tv, \frac{w}{t}\right) - t\hat{T}(v, w) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p}{w^p(\mathbf{s})} ds - t \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w^p(\mathbf{s})} ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p - t}{w^p(\mathbf{s})} ds = (t^p - t) \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w^p(\mathbf{s})} ds > 0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $t^p - t > 0$, або $t^{p-1} > 1$. Тому що $t \in (0, 1)$, остання нерівність виконується, коли $p - 1 < 0$ та, враховуючи (2.96), отримуємо умову (2.103). Лема доведена.

Лема 2.32. Оператор T вигляду (2.98) u_0 -псевдоугнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова $0 < p < 1$.

Доведення. Псевдоугнутість оператора T впливає з леми 2.31.

Для перевірки нерівностей (1.38) складемо різницю

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(tv, \frac{w}{t}\right) - (1+\eta)t\hat{T}(v, w) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{t^p}{w^p(\mathbf{s})} - (1+\eta)\frac{t}{w^p(\mathbf{s})} \right) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p - (1+\eta)t}{w^p(\mathbf{s})} ds > 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб остання нерівність виконувалася, достатньо вимагати виконання умови

$$t^p - (1+\eta)t > 0,$$

звідки отримуємо умову для η :

$$\eta < t^{p-1} - 1. \quad (2.104)$$

Таким чином ми показали, що для виконання нерівностей (1.38) можна обрати будь-яку функцію $\eta > 0$ таку, що задовольняє умові (2.104). Лема доведена.

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.95), (2.96) за схемою (2.101), де $w_0 = \beta$.

Теорема 2.9. Ітераційний процес (2.101) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (2.97), якщо параметри p та β задовольняють умови (2.102) та (2.103). При цьому маємо

$$v_0 = w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n-1} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Неперервність оператора T очевидна. Далі, в лемі 2.32 ми довели, що оператор T є u_0 -псевдоугнутим, якщо параметр p задовольняє умові (2.103). В лемі 2.30 було доведено, що існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$, якщо параметри p та β задовольняють умові (2.102).

Тепер введемо у розгляд наступну функцію

$$\hat{f}(v, w) = \frac{1}{w^p}.$$

Оскільки $\hat{f}(u, u) = f(u)$, де $f(u)$ визначається виразом (2.99), та $\hat{f}(v, w)$ неперервна за v та w , то, згідно з лемою 1.3, оператор \hat{T} вигляду (2.100) є цілком неперервним.

Отже, згідно з теоремою 1.5, оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$, до якої збігаються послідовні ітерації (2.101) для будь-якого $u \in K(u_0)$.

Теорема доведена.

2.4 Дослідження можливості побудови двобічних наближень для задач із гетеротонним оператором

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння [24]

$$-\Delta u = a u^{-q} + b u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad (2.105)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad p, q > 0. \quad (2.106)$$

Диференціальне рівняння (2.105), як і рівняння (2.46), є стаціонарною версією рівняння теплопровідності з двома джерелами тепла різної потужності.

Еквівалентним на просторі $C(\Omega)$ цій задачі інтегральним рівнянням є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a u^{-q}(\mathbf{s}) + b u^p(\mathbf{s})) ds. \quad (2.107)$$

Оператор T у даному випадку має вигляд

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a u^{-q}(\mathbf{s}) + b u^p(\mathbf{s})) ds, \quad D(T) = K. \quad (2.108)$$

Позначимо

$$f(u) = a u^{-q} + b u^p. \quad (2.109)$$

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (2.108).

Лема 2.33. Оператор T вигляду (2.108) гетеротонний. При цьому супутній йому оператор \hat{T} визначається виразом

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w^{-q}(\mathbf{s}) + b v^p(\mathbf{s})) ds. \quad (2.110)$$

Доведення. Оскільки, за визначенням 1.10, необхідно, щоб виконувалась умова (1.34), то складаємо різницю

$$\begin{aligned} \hat{T}(v_1, w_1) - \hat{T}(v_2, w_2) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w_1^{-q}(\mathbf{s}) + b v_1^p(\mathbf{s})) ds - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w_2^{-q}(\mathbf{s}) + b v_2^p(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ((a w_1^{-q}(\mathbf{s}) - a w_2^{-q}(\mathbf{s})) + (b v_1^p(\mathbf{s}) - b v_2^p(\mathbf{s}))) ds \geq 0, \end{aligned}$$

де $v_1 \geq v_2$, $w_1 \leq w_2$.

Тобто $\hat{T}(v_1, w_1) \geq \hat{T}(v_2, w_2)$. При цьому оператор \hat{T} є супутнім оператору T , оскільки $\hat{T}(u, u) = Tu$. Лема доведена.

Лема 2.34. Існує конусний відрізок $\langle v_1, w_0 \rangle$, $v_1 \leq u \leq w_0$, сильно інваріантний для оператора T вигляду (2.108).

Доведення. Згідно з визначенням 1.11 для того, щоб конусний відрізок $\langle v_1, w_0 \rangle$ був сильно інваріантним, необхідне виконання нерівностей (1.35), де супутній оператор \hat{T} визначається виразом (2.110). При цьому гетеротонність оператора впливає з леми 2.33.

Нехай $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$, де $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$. Нашою метою є вибір ε та β таким чином, щоб виконувалися нерівності (1.35). Маємо

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} v_1 = \hat{T}(v_0, w_0) \geq \varepsilon, \\ w_1 = \hat{T}(w_0, v_0) \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a \beta^{-q} + b \varepsilon^p) d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a \varepsilon^{-q} + b \beta^p) d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} (a \beta^{-q} + b \varepsilon^p) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ (a \varepsilon^{-q} + b \beta^p) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} (a \beta^{-q} + b \varepsilon^p) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq \varepsilon, \\ (a \varepsilon^{-q} + b \beta^p) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} a \beta^{-q} + b \varepsilon^p \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ a \varepsilon^{-q} + b \beta^p \leq \frac{\beta}{M}, \end{cases} \tag{2.111}
 \end{aligned}$$

де

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Таким чином конусний відрізок $\langle v_1, w_0 \rangle$, є сильно інваріантним для оператора T вигляду (2.108), якщо ε , β , p та q задовольняють умови (2.111). Лема доведена.

Лема 2.35. Оператор T вигляду (2.108) псевдоугнутий на $\langle v_1, w_0 \rangle$, якщо виконуються умови

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \quad (2.112)$$

Доведення. Побудувавши конусний відрізок $\langle v_1, w_0 \rangle$ в лемі 2.34, ми довели, що супутній оператор \hat{T} вигляду (2.110) є u_0 -додатним, тобто виконуються нерівності (1.33), де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

Тепер розглянемо нерівність (1.37). Складемо різницю

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(tu, \frac{w}{t}\right) - t\hat{T}(v, w) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(a \left(\frac{w(\mathbf{s})}{t} \right)^{-q} + b (tv(\mathbf{s}))^p \right) ds - \\ &\quad - t \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w^{-q}(\mathbf{s}) + b v^p(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{a t^q}{w^q(\mathbf{s})} - \frac{t a}{w^q(\mathbf{s})} + b t^p v^p(\mathbf{s}) - t b v^p(\mathbf{s}) \right) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{a}{w^q(\mathbf{s})} (t^q - t) + b v^p(\mathbf{s}) (t^p - t) \right) ds \geq 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Нерівність (2.113) виконуватиметься $\forall t \in (0, 1)$, якщо

$$\begin{aligned} \frac{a}{w^q(\mathbf{s})} (t^q - t) + b v^p(\mathbf{s}) (t^p - t) > 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} t^q - t > 0, \\ t^p - t > 0, \end{cases} &\Rightarrow \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} t(t^{q-1} - 1) > 0, \\ t(t^{p-1} - 1) > 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} t^{q-1} > 1, \\ t^{p-1} > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Звідси отримуємо нерівності (2.112), яким мають задовольняти параметри p та q , щоб виконувалися (2.114). Лема доведена.

Лема 2.36. Оператор T вигляду (2.108) u_0 -псевдоугнутий, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds,$$

якщо виконується умова (2.112).

Доведення. Псевдоугнутість оператора T впливає з леми 2.35.

Для перевірки нерівностей (1.38) складемо різницю

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(tv, \frac{w}{t}\right) - (1+\eta)t\hat{T}(v, w) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(a \left(\frac{w(\mathbf{s})}{t} \right)^{-q} + b(tv(\mathbf{s}))^p \right) ds - \\ &\quad - (1+\eta)t \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w^{-q}(\mathbf{s}) + b v^p(\mathbf{s})) ds = \\ &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{at^q}{w^q(\mathbf{s})} + b t^p v^p(\mathbf{s}) - (1+\eta) \left(\frac{ta}{w^q(\mathbf{s})} + t b v^p(\mathbf{s}) \right) \right) ds > 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Для того, щоб нерівність (2.115) виконувалася, достатньо вимагати виконання умов

$$\frac{at^q}{w^q(\mathbf{s})} + b t^p v^p(\mathbf{s}) - (1+\eta) \left(\frac{ta}{w^q(\mathbf{s})} + t b v^p(\mathbf{s}) \right) = \frac{a}{w^q(\mathbf{s})} (t^q - (1+\eta)t) + b v^p(\mathbf{s}) (t^p - (1+\eta)t) > 0$$

або

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} t^p - (1 + \eta)t > 0, \\ t^q - (1 + \eta)t > 0, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} t^{p-1} - 1 - \eta > 0, \\ t^{q-1} - 1 - \eta > 0, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} \eta < t^{p-1} - 1, \\ \eta < t^{q-1} - 1. \end{cases} \tag{2.115}
 \end{aligned}$$

Таким чином ми показали, що для виконання нерівностей (1.38) можна обрати будь-яку функцію $\eta > 0$ таку, що задовольняє умовам (2.115). Лема доведена.

Зауваження 2.2. У випадку, коли $f(u) = g(\mathbf{x})u^{-q} + h(\mathbf{x})u^p$, де $g(\mathbf{x}) > 0$ та $h(\mathbf{x}) > 0$ – деякі неперервні та обмежені в Ω функції та

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}) &\leq h(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x}), \\
 \min_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}) &\leq g(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

нерівності (2.111) набувають вигляду

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\varepsilon^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\beta^{-q} \geq \frac{\varepsilon}{M}, \\ \max_{\mathbf{x} \in \Omega} h(\mathbf{x})\beta^p + \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{x})\varepsilon^{-q} \leq \frac{\beta}{M}. \end{cases}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (2.105), (2.106) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a w_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b v_{n-1}^p(\mathbf{s})) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.116}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (a v_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b w_{n-1}^p(\mathbf{s})) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.117}$$

де $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$.

Теорема 2.10. Ітераційний процес (2.116), (2.117) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_1, w_0 \rangle$ рівняння (2.107), якщо параметри a, b, p, q, ε та β задовольняють умови (2.111) та (2.112). При цьому маємо

$$v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Доведення. Неперервність оператора T очевидна. Далі, в лемі 2.36 ми довели, що оператор $T \in u_0$ -псевдоугнутим при виконанні умов (2.112). В лемі 2.34 було доведено, що існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_1, w_0 \rangle \subset K(u_0)$, якщо параметри a, b, p, q, ε та β задовольняють умови (2.111).

Введемо у розгляд наступну функцію

$$\hat{f}(v, w) = a w^{-q} + b v^p.$$

Оскільки $\hat{f}(u, u) = f(u)$, де $f(u)$ визначається виразом (2.109), та $\hat{f}(v, w)$ неперервна за v та w , то, згідно з лемою, 1.3 оператор \hat{T} вигляду (2.110) є цілком неперервним.

Отже, згідно з теоремою 1.5, оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$, до якої збігаються послідовні ітерації (2.116), (2.117) для будь-якого $u \in K(u_0)$.

Теорема доведена.

2.5 Метод квазіфункцій Гріна

Академік НАН України В.Л. Рвачов для розв'язання крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь в областях, для яких функцію Гріна побудувати складно або практично неможливо, запропонував спеціальну функцію, яка в деякому сенсі є близькою до функції Гріна [129]. Ця функція називається

квазіфункцією Гріна. У цьому випадку розв'язок задачі представляється через деяку допоміжну функцію, яка є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду [3, 19].

Розглянемо задачу для нелінійного еліптичного рівняння (2.1), (2.2). Будемо вважати, що $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ або $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

В обох випадках ми будемо користуватися формулою Гріна для оператора Лапласа [111, 25]:

$$\int_{\Omega} (u(\mathbf{s})\Delta_{\mathbf{s}}v(\mathbf{s}) - v(\mathbf{s})\Delta_{\mathbf{s}}u(\mathbf{s})) d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial v(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - v(\mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_{\mathbf{s}}\Gamma, \quad (2.118)$$

де $u, v \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$;

\mathbf{n} – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$;

$\Gamma = \partial\Omega$;

$d_{\mathbf{s}}\Gamma$ означає, що інтегрування за змінною \mathbf{s} проводиться по $\partial\Omega$;

$$\Delta_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}, \quad \mathbf{s} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m.$$

Нехай $\omega = 0$ є рівняння межі $\partial\Omega$ [125, 127 – 130], де $\omega(\mathbf{x})$ визначається виразом (2.26).

Позначимо

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|.$$

Розглянемо випадок, коли $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Використовуючи інтегральне представлення функції класу $C^{(2)}(\overline{\Omega})$ [111, 137, 143], маємо

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_{\mathbf{s}}\Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \Delta_{\mathbf{s}} u(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.119)$$

Покладемо у (2.118)

$$v(\mathbf{s}) = \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \ln(r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})), \quad (2.120)$$

а за функцію $u(\mathbf{s})$ вважаємо розв'язок задачі (2.1), (2.2). Очевидно, що $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in C^{(2)}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ всюди, крім точок $\mathbf{x} = \mathbf{s}$.

Помножимо рівність (2.118) на $\frac{1}{2\pi}$ та додамо до ((2.121)). Враховуючи (2.120)

та рівняння (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (u(\mathbf{s}) \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Delta_{\mathbf{s}} u(\mathbf{s})) d\mathbf{s} + u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \Delta_{\mathbf{s}} u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (u(\mathbf{s}) \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)) d\mathbf{s} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\ln \frac{1}{r} f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) \right) d\mathbf{s} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} u(\mathbf{s}) \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma. \quad (2.122) \end{aligned}$$

Розглянемо третій доданок в правій частині (2.122)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma. \quad (2.123)$$

Позначимо

$$G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \right) \quad (2.124)$$

та, враховуючи, що $u|_{\partial\Omega} = 0$ та $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, маємо

$$G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s})|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \ln r^2 \right) = 0.$$

Тоді (2.123) можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \ln \frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \right) d_s \Gamma = \\ & = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d_s \Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Покладемо

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_s \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}). \quad (2.126)$$

Тоді з (2.122), враховуючи (2.124), (2.125) та (2.126), отримаємо еквівалентне до задачі (2.1), (2.2) нелінійне інтегральне рівняння наступного вигляду

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.127)$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Використовуючи інтегральне представлення функції класу $C^{(2)}(\overline{\Omega})$ [111, 137, 143], маємо

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta_s u(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.128)$$

Покладемо

$$v(\mathbf{s}) = \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (r^2 + 4 \omega(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{s}))^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.129)$$

а за функцію $u(\mathbf{s})$ вважаємо розв'язок задачі (2.1), (2.2). Очевидно, що $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in C^{(2)}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ всюди, крім точок $\mathbf{x} = \mathbf{s}$.

Помножимо рівність (2.121) на $\frac{1}{4\pi}$ та додамо до (2.128). Враховуючи (2.129)

та рівняння (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (u(\mathbf{s}) \Delta_s \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Delta_s u(\mathbf{s})) d\mathbf{s} + u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta_s u(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \\ u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (u(\mathbf{s}) \Delta_s \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)) d\mathbf{s} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma \end{aligned}$$

та

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r} f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda) \right) d\mathbf{s} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} u(\mathbf{s}) \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma. \quad (2.130)$$

Розглянемо третій доданок в правій частині (2.130)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma. \quad (2.131)$$

Позначимо

$$G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \right) \quad (2.132)$$

та, враховуючи, що $u|_{\partial\Omega} = 0$ та $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, маємо

$$G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s})|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - (r^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Тоді (2.131) можна переписати наступним чином

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{s}) \frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_s \Gamma = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) d_s \Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \right) d_s \Gamma = \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} G_{\text{KB}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d_s \Gamma = 0. \quad (2.133)$$

Покладемо

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{s}). \quad (2.134)$$

Тоді з (2.130), враховуючи (2.132), (2.133) та (2.134), отримаємо еквівалентне до задачі (2.1), (2.2) нелінійне інтегральне рівняння (2.127).

Зауваження 2.3. Неважко перевірити, що введені формулами (2.124) та (2.132) квазіфункції $G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ мають деякі властивості функції Гріна задачі (2.1), (2.61), а саме $G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s})|_{\partial\Omega} = 0$, мають властивість симетрії $G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = G_{\text{кв}}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ та $G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ мають таку саму особливість, що й функція Гріна для оператора Лапласа у точках $\mathbf{x} = \mathbf{s}$.

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (2.127) використовуємо метод послідовних наближень у формулюванні Свірського [136], що приводить до послідовності лінійних інтегральних рівнянь

$$u_n(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_n(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_{\Omega} G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u_{n-1}(\mathbf{s}), \lambda) d\mathbf{s}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.135)$$

де покладемо $u_1(\mathbf{x}) = \text{const}$.

Кожне з рівнянь (2.135) може бути розв'язане за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна [62, 110, 114, 131]. В цьому випадку ми отримаємо послідовність наближених розв'язків $u_{n,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_{n,i} \phi_i(\mathbf{x})$, при цьому $u_{1,k}(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$, $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^k$ – координатна послідовність [62, 110, 114, 131], $c_{n,i}$ ($i = \overline{1, k}$, $n = 2, 3, \dots$) – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^k c_{n,i} \left[\int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{\Omega\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \phi_i(\mathbf{s}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{s} d\mathbf{x} \right] = \iint_{\Omega\Omega} G_{\text{кв}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u_{n-1,k}(\mathbf{s}), \lambda) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{s} d\mathbf{x},$$

$$j = \overline{1, k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

2.6 Висновки по розділу

1. Для розглянутих у розділі крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь досліджено можливість побудови двобічних наближень до додатного розв'язку.

2. Отримано умови, які пов'язують параметри, що входять до постановок задач та гарантують існування та єдиність додатного розв'язку, а також побудову двобічних наближень та збіжність відповідного ітераційного процесу. При цьому вдалося знайти зв'язок між двома, трьома та навіть чотирьома параметрами, що в загальному випадку є досить складною задачею.

3. Для розглянутих задач побудовано відповідні конусні відрізки $\langle v_0, w_0 \rangle$, які є фактично апіорною оцінкою шуканого розв'язку, оскільки маємо $v_0 \leq u^* \leq w_0$. При цьому отримані двобічні наближення заключають шуканий розв'язок у «виделку» та дають можливість робити апостеріорні висновки.

4. Використовуючи методику В.Л. Рвачова, вдосконалено метод квазіфункцій Гріна для застосування до нелінійних рівнянь. Квазіфункція Гріна будується, використовуючи конструктивний апарат теорії R -функцій, що дозволяє знайти розв'язок в областях практично довільної геометричної структури, для яких функція Гріна невідома або має складний вигляд.

5. Уперше запропоновано новий підхід до побудови лівого кінця конусного відрізка у випадку, коли відповідне нижнє наближення залишається нерухомим, що дозволило отримати двобічні наближення, при цьому було використано апарат теорії R -функцій.

Основні результати розділу опубліковано у роботах [14 – 16, 71 – 78, 94 – 105].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1, 3, 4, 6 – 13, 19 – 21, 24, 25, 27, 28, 33, 35, 37, 45, 47, 52, 55, 62, 70, 82, 84, 89, 110, 111, 114, 117, 118, 125 – 131, 136, 137, 143, 144].

3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

3.1 Розробка чисельного алгоритму

Розглянемо методи побудови функції Гріна оператора Лапласа першої крайової задачі та наведемо формули для її знаходження в деяких областях.

Одним із методів побудови функції Гріна оператора Лапласа є метод відбиття [29, 143]. Він підказується фізичною інтерпретацією функції Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі як потенціалу поля, яке створюється точковим зарядом, розміщеним всередині заземленої провідної поверхні.

Вимагаючи виконання граничної умови $G|_{\partial\Omega} = 0$ та вважаючи, що в точці $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$ чи $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ розміщено електричний заряд відповідно $+\frac{1}{2\pi}$ чи $+\frac{1}{4\pi}$, розміщуємо в точках, симетричних точці \mathbf{s} відносно границі $\partial\Omega$, такі заряди протилежного знака, щоб компенсувати дію заряду в точці \mathbf{s} . Якщо симетрична точка \mathbf{s}^1 є зображенням точки \mathbf{s} відносно плоскої границі, то в ній розміщується заряд $-\frac{1}{2\pi}$ або $-\frac{1}{4\pi}$, при цьому потенціал поля цих зарядів дорівнює відповідно $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}$ чи $-\frac{1}{4\pi r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}$, де $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - s_i^1)^2}$ – відстань між точками \mathbf{x} та \mathbf{s}^1 , $m=2$ та $m=3$ для кола та сфери відповідно. Якщо границя є частиною кола або сфери, то потенціал поля заряду, розміщеного в симетричній точці, дорівнює відповідно $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}$ або $-\frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}$, де R – радіус кола або сфери, ρ – відстань від центра кола або сфери до точки \mathbf{s} .

Для задачі

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\gamma_1(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \gamma_2(\mathbf{x}) v \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|v\| = 1,$$

якщо відомі власні функції оператора Лапласа для області, що розглядається, то функцію Гріна можна побудувати у вигляді ряду [34, 135] $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(\mathbf{x})v_k(\mathbf{s})}{\lambda_k}$, де $\{\lambda_k\}$, $\{v_k\}$ відповідно власні числа та власні функції оператора Лапласа в Ω .

Розглянемо тепер формули для знаходження функцій Гріна першої внутрішньої крайової задачі для оператора Лапласа, побудованих за допомогою методу відбиття, в наступних областях.

1) Круг

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}. \quad (3.1)$$

Нехай $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ – особлива точка $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$. Позначимо через \mathbf{s}^1 точку, симетричну точці \mathbf{s} відносно кола радіуса R , тобто точки \mathbf{s} та \mathbf{s}^1 лежать на одному промені, що виходить з центра кола O і добуток їх відстаней ρ_0 та ρ_1 від центра дорівнює квадрату радіуса, тобто $\rho_0 \rho_1 = R^2$, r_0 , r_1 – відстані між точкою \mathbf{x} та точками \mathbf{s} , \mathbf{s}^1 відповідно (рис. 3.1).

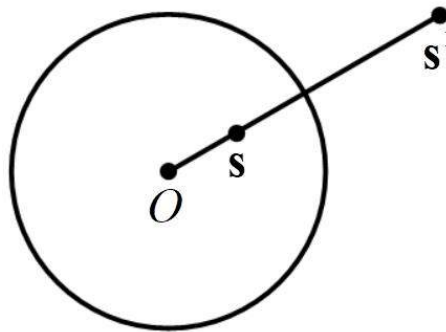


Рисунок 3.1 – Точки для виразу функції Гріна в крузі

Тоді функція Гріна першої внутрішньої крайової задачі для круга (3.1) має вигляд [34, 37, 143]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0}. \quad (3.2)$$

2) Півкруг

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}. \quad (3.3)$$

Нехай точки s та s^1 визначаються так, як в області A . Тепер позначимо через s' та $s^{1'}$ точки, симетричні точкам s та s^1 відповідно відносно осі абсцис, r'_0, r'_1 – відстані між точкою x та точками $s', s^{1'}$ відповідно (рис. 3.2).

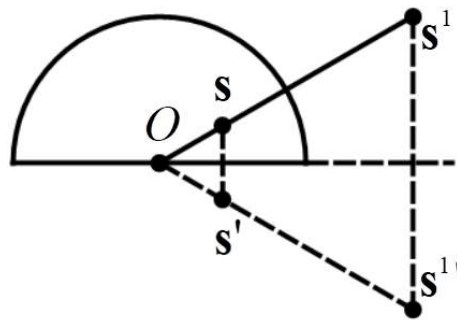


Рисунок 3.2 – Точки для виразу функції Гріна у півкругу

Тоді функція Гріна першої внутрішньої крайової задачі для півкруга (3.3) має вигляд [34, 37]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0} - \ln \frac{\rho_0 r'_1}{R r'_0} \right). \quad (3.4)$$

3) Чверть круга

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_1 > 0, x_2 > 0\}. \quad (3.5)$$

Аналогічно попереднім двом областям вводимо разом з s' та $s^{1'}$ додатково ще s'' , $s^{1''}$ та $s^{1''}$, $s^{1''}$ – точки, симетричні точкам s та s^1 відповідно відносно осі

ординат та відносно початку координат, r_0'' , r_1'' , r_0''' , r_1''' – відстані між точкою \mathbf{x} та точками s'' , $s^{1''}$, s''' , $s^{1'''}$ відповідно (рис. 3.3).

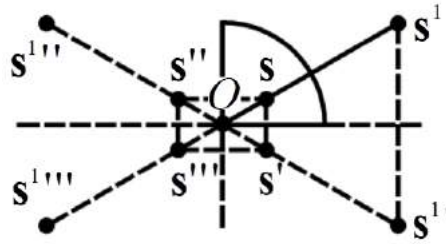


Рисунок 3.3 – Точки для виразу функції Гріна у квадранті

Тоді функція Гріна першої внутрішньої крайової задачі для квадранта (3.5) має вигляд [37]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0} - \ln \frac{\rho_0 r_1'}{R r_0'} - \ln \frac{\rho_0 r_1''}{R r_0''} + \ln \frac{\rho_0 r_1'''}{R r_0'''} \right). \quad (3.6)$$

4) Сектор. Для виразу функції Гріна в цій області зручно перейти до полярних координат, тоді область буде визначатися наступним чином

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{k} \right\}. \quad (3.7)$$

Введемо у розгляд наступну функцію $G_{\text{круг}}(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0}$ – вираз для функції Гріна у крузі (3.2) в полярних координатах. Тоді функція Гріна першої внутрішньої крайової задачі для сектора (3.7) у полярних координатах має вигляд [37]

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(G_{\text{круг}} \left(\rho, \varphi; \rho_0, \frac{2\pi i}{k} + \varphi_0 \right) - G_{\text{круг}} \left(\rho, \varphi; \rho_0, \frac{2\pi i}{k} - \varphi_0 \right) \right). \quad (3.8)$$

З цього виразу, зокрема, можна отримати (3.4) та (3.6) у полярних координатах при $k = 1$ та $k = 2$ відповідно.

Для наступної області формула для знаходження функцій Гріна першої внутрішньої крайової задачі для оператора Лапласа може бути зручно отримана, використовуючи метод власних функцій.

5) Прямокутник

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}. \quad (3.9)$$

Функція Гріна першої внутрішньої крайової задачі для прямокутника (3.9) має вигляд [34]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x_1}{l_1} \sin \frac{i \pi x_2}{l_2} \sin \frac{k \pi s_1}{l_1} \sin \frac{i \pi s_2}{l_2}}{\pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{i^2}{l_2^2} \right)}. \quad (3.10)$$

Далі розглянемо формули чисельного інтегрування та інтерполювання, які використовуються в обчислювальних експериментах.

Для обчислення інтегралів, що входять до операторних рівнянь вигляду (2.5), зручно використовувати кубатурну формулу Гауса [22, 26, 32, 87], якщо область, що розглядається, є прямокутною. Прямокутну область можна також отримати в деяких випадках при переході до полярних координат. Кубатурна формула Гауса має наступний вигляд

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i \tilde{A}_j f(x_i, \tilde{y}_j),$$

де $\Pi = [a, b] \times [c, d]$

та

$$A_i = \frac{b-a}{(1-\xi_i^2)(P'_n(\xi_i))^2};$$

$$\tilde{A}_j = \frac{d-c}{(1-\tilde{\eta}_j^2)(P'_m(\tilde{\eta}_j))^2};$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i;$$

ξ_i – нулі полінома $P_n(\xi)$, $i = \overline{1, n}$;

$$\tilde{y}_j = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} \tilde{\eta}_j;$$

$\tilde{\eta}_j$ – нулі полінома $P_m(\tilde{\eta})$, $j = \overline{1, m}$;

$P_n(x)$ – поліном Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

При цьому треба мати на увазі, що для того, щоб при обчисленнях не потрапити в особливу точку функції Гріна, необхідно обрати $m \neq n$.

Для зменшення розмірності наближень використовується кусково-лінійна інтерполяція [60]. Для цього у прямокутнику $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ вводимо рівномірну сітку

$$(x_i, y_j) = \left(a + \frac{b-a}{n} i, c + \frac{d-c}{m} j \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Тоді функція $f(x, y)$ може бути інтерпольована наступним чином

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) B_1 \left(\frac{n(x-a)}{b-a} - i \right) B_1 \left(\frac{m(y-c)}{d-c} - j \right),$$

де $B_1(t)$ – кусково-лінійний сплайн [39]

$$B_1(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in [-1,0), \\ 1-t, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Використання кусково-лінійного сплайну зменшує громіздкість багатовимірної інтерполяції, що є одним з визначних факторів для проведення обчислювального експерименту.

Для побудови рівняння меж областей, що розглядаються, використовуємо операцію R -кон'юнкції \wedge_0 , яка визначається наступним чином [129]

$$\omega_1(\mathbf{x}) \wedge_0 \omega_2(\mathbf{x}) = \omega_1(\mathbf{x}) + \omega_2(\mathbf{x}) - \sqrt{\omega_1^2(\mathbf{x}) + \omega_2^2(\mathbf{x})},$$

де $\omega_1(\mathbf{x}) \geq 0$ та $\omega_2(\mathbf{x}) \geq 0$ – опорні області.

Критерій зупину для ітераційного процесу має наступний вигляд

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})| < \zeta,$$

де ζ – наперед задана точність.

3.2 Результати обчислювальних експериментів

При обчисленнях у подальшому будуть використовуватися наступні області. Для них вкажемо відповідні функції Гріна, де вона відома, функції $\omega(\mathbf{x})$, які визначаються виразами (2.26), при цьому $\omega(\mathbf{x})=0$ є рівнянням межі області Ω , а також координатні послідовності $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^k$, які будуть використовуватися при розв'язанні лінійних інтегральних рівнянь за допомогою методу Бубнова-

Гальоркіна, до послідовності яких зводиться вихідна крайова задача в методі квазіфункцій Гріна.

Область А. Одиничний круг

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}. \quad (3.11)$$

Функція Гріна (3.2) та $\omega(\mathbf{x})$ в цьому випадку мають вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{r_0}, \quad (3.12)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2. \quad (3.13)$$

Область Б. Одиничний півкруг

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}. \quad (3.14)$$

Функція Гріна (3.4), $\omega(\mathbf{x})$ та координатна послідовність в цьому випадку мають вигляд [59]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0 r_1}{r_0} - \ln \frac{\rho_0 r'_1}{r'_0} \right), \quad (3.15)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = x_2 \wedge_0 (1 - x_1^2 - x_2^2), \quad (3.16)$$

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(x_1) P_{i_2}(2x_2 - 1), \quad i_1 = \overline{0, l}, \quad i_2 = \overline{0, l - i_1}, \quad l = \frac{\sqrt{8k+1} - 3}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Область В. Квадрат

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) | -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}. \quad (3.17)$$

Функція Гріна (3.10) в та $\omega(\mathbf{x})$ цьому випадку мають вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi(x_1+1)}{2} \sin \frac{i\pi(x_2+1)}{2} \sin \frac{k\pi(s_1+1)}{2} \sin \frac{i\pi(s_2+1)}{2}}{\pi^2 \left(\frac{k^2}{4} + \frac{i^2}{4} \right)}, \quad (3.18)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = (1-x_1^2) \wedge_0 (1-x_2^2). \quad (3.19)$$

Координатна послідовність визначається наступним чином

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(x_1) P_{i_2}(x_2), \quad i_1 = \overline{0, l}, \quad i_2 = \overline{0, l-i_1}, \quad l = \frac{\sqrt{8k+1}-3}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Область Г. Визначається наступним чином

$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^8 + x_2^8 < 1\}. \quad (3.20)$$

Функція $\omega(\mathbf{x})$ для цієї області є наступна

$$\omega(\mathbf{x}) = 1 - x_1^8 - x_2^8. \quad (3.21)$$

Координатна послідовність визначається наступним чином

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(x_1) P_{i_2}(x_2), \quad i_1 = \overline{0, l}, \quad i_2 = \overline{0, l-i_1}, \quad l = \frac{\sqrt{8k+1}-3}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Область Д. Чверть одиничного круга

$$\Omega_5 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}. \quad (3.22)$$

Функція Гріна (3.6) та $\omega(\mathbf{x})$ в цьому випадку мають вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0 r_1}{r_0} - \ln \frac{\rho_0 r_1'}{r_0'} - \ln \frac{\rho_0 r_1''}{r_0''} + \ln \frac{\rho_0 r_1'''}{r_0'''} \right), \quad (3.23)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = x_1 \wedge_0 x_2 \wedge_0 (1 - x_1^2 - x_2^2). \quad (3.24)$$

Координатна послідовність визначається наступним чином

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(2x_1 - 1) P_{i_2}(2x_2 - 1), \quad i_1 = \overline{0, l}, \quad i_2 = \overline{0, l - i_1}, \quad l = \frac{\sqrt{8k+1} - 3}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Область Е. Сектор

$$\Omega_6 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, \sqrt{3}x_1 - x_2 > 0, x_2 > 0\}. \quad (3.25)$$

Функція Гріна (3.8) та $\omega(\mathbf{x})$ в цьому випадку мають вигляд

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^2 \left(G_{\text{круг}} \left(\rho, \varphi; \rho_0, \frac{2\pi i}{3} + \varphi_0 \right) - G_{\text{круг}} \left(\rho, \varphi; \rho_0, \frac{2\pi i}{3} - \varphi_0 \right) \right), \quad (3.26)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = x_2 \wedge_0 (\sqrt{3}x_1 - x_2) \wedge_0 (1 - x_1^2 - x_2^2). \quad (3.27)$$

Координатна послідовність визначається наступним чином

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) P_{i_1}(2x_1 - 1) P_{i_2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x_2 - 1 \right), \quad i_1 = \overline{0, l}, \quad i_2 = \overline{0, l - i_1}, \quad l = \frac{\sqrt{8k+1} - 3}{2}, \quad i = \overline{1, k}.$$

3.2.1 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною

$$f(u) = \lambda e^u$$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.6), (2.7) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.20), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.17) та (2.18).

Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Максимальним значенням λ , для якого виконуються умови (2.12) та (2.13), є $\lambda^* = 1,47151$, відповідним значенням $\beta \in \beta = 0,99999$.

В таблиці 3.1 наведено значення для наближень $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.1 – Значення $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{14}	0,55601	0,55601	0,55601	0,55601	0,55601	0,55601
	v_{14}	0,55600	0,55600	0,55600	0,55600	0,55600	0,55600
0,2	w_{14}	0,52912	0,52912	0,52912	0,52914	0,52916	0,52920
	v_{14}	0,52911	0,52911	0,52912	0,52913	0,52916	0,52920
0,4	w_{14}	0,45665	0,45654	0,45624	0,45592	0,45608	0,45805
	v_{14}	0,45664	0,45654	0,45623	0,45591	0,45608	0,45805
0,6	w_{14}	0,33812	0,33787	0,33715	0,33656	0,33688	0,34085
	v_{14}	0,33812	0,33787	0,33714	0,33656	0,33688	0,34085
0,8	w_{14}	0,18196	0,18173	0,18111	0,18045	0,18070	0,18463
	v_{14}	0,18195	0,18173	0,18111	0,18045	0,18070	0,18463
1	w_{14}	0	0	0	0	0	0
	v_{14}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.4 та 3.5 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$, де $\tilde{u}_n(\mathbf{x}) = \frac{v_n(\mathbf{x}) + w_n(\mathbf{x})}{2}$, а на рис. 3.6 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

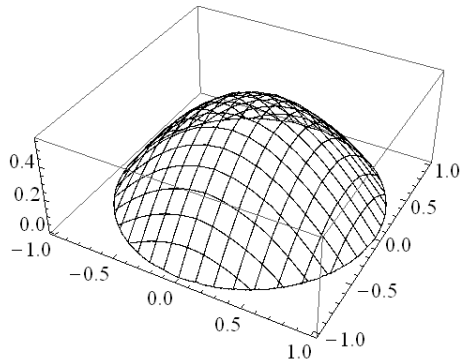


Рисунок 3.4 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$

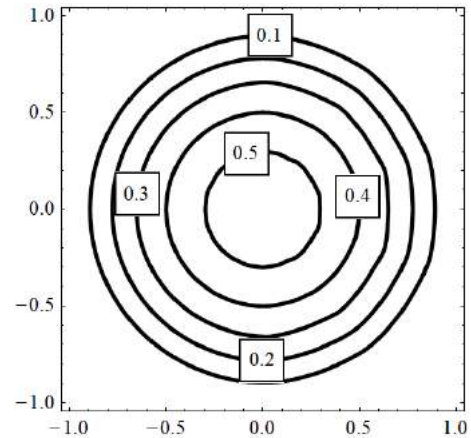


Рисунок 3.5 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$

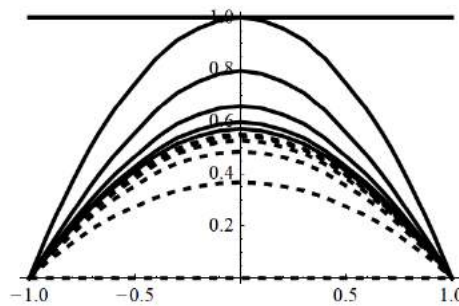


Рисунок 3.6 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

Для $\lambda = 1$, $\beta = 0,5$ в таблиці Б.1 наведено значення для наближень $v_8(\mathbf{x})$ та $w_8(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.1 та Б.2 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$, а на рис. Б.3 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Для $\lambda = 0,5$, $\beta = 0,2$ в таблиці Б.2 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.4 та Б.5 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.6 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Для $\lambda = 0,1$, $\beta = 0,05$ в таблиці Б.3 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.7 та Б.8 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$, а на рис. Б.9 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$.

Область Б. Максимальним значенням λ , для якого виконуються умови (2.12) та (2.13), є $\lambda^* = 3,75387$, відповідним значенням β є $\beta = 0,99999$.

В таблиці 3.2 наведено значення для наближень $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.2 – Значення $v_{14}(\mathbf{x})$ та $w_{14}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{14}	0	0	0	0	0	0
	v_{14}	0	0	0	0	0	0
0,2	w_{14}	0	0,12522	0,22763	0,30240	0,34769	0,36288
	v_{14}	0	0,12522	0,22762	0,30240	0,34769	0,36288
0,4	w_{14}	0	0,21058	0,36316	0,46539	0,52409	0,54322
	v_{14}	0	0,21058	0,36316	0,46538	0,52409	0,54322
0,6	w_{14}	0	0,23080	0,37335	0,46085	0,50891	0,52406
	v_{14}	0	0,23080	0,37335	0,46084	0,50890	0,52405

Продовження таблиці 3.2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,8	w_{14}	0	0,16542	0,24705	0,29366	0,31855	0,32617
	v_{14}	0	0,16542	0,24705	0,29365	0,31855	0,32617
1	w_{14}	0	0	0	0	0	0
	v_{14}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.7 та 3.8 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.9 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

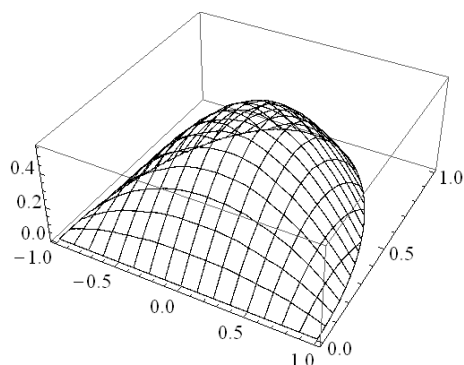


Рисунок 3.7 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$

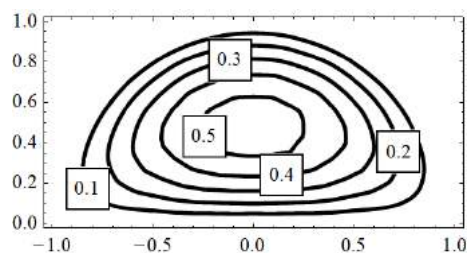


Рисунок 3.8 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{14}(\mathbf{x})$

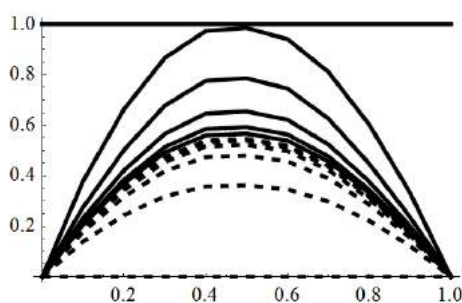


Рисунок 3.9 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

Для $\lambda = 1,5$, $\beta = 0,4$ в таблиці Б.4 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.10 та Б.11 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.12 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Для $\lambda = 0,5$, $\beta = 0,1$ в таблиці Б.5 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.13 та Б.14 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$, а на рис. Б.15 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$.

Для $\lambda = 0,1$, $\beta = 0,02$ в таблиці Б.6 наведено значення для наближень $v_2(\mathbf{x})$ та $w_2(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.16 та Б.17 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_2(\mathbf{x})$, а на рис. Б.18 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,2}$.

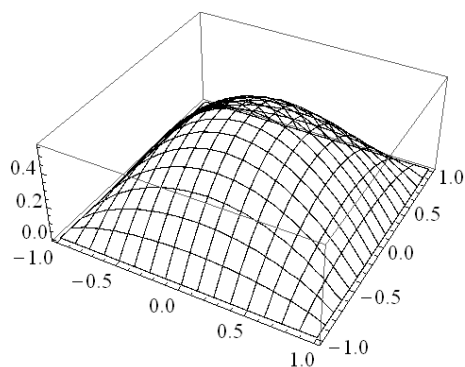
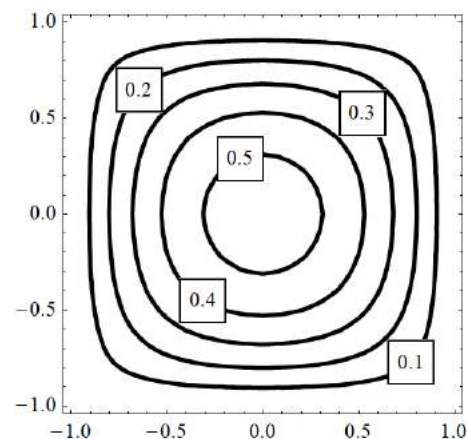
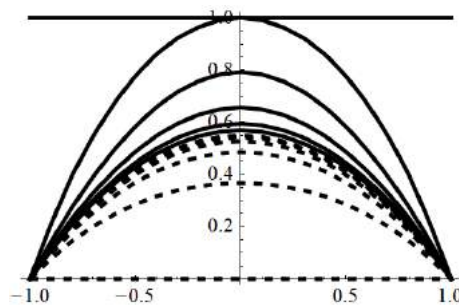
Область В. Максимальним значенням λ , для якого виконуються умови (2.12) та (2.13), є $\lambda^* = 1,24704$, відповідним значенням $\beta \in \beta = 0,99999$.

В таблиці 3.3 наведено значення для наближень $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

На рис. 3.10 та 3.11 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.12 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Таблиця 3.3 – Значення $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{13}	0	0	0	0	0	0
	v_{13}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{13}	0	0,08457	0,13846	0,17549	0,19562	0,20310
	v_{13}	0	0,08457	0,13845	0,17549	0,19562	0,20310
-0,6	w_{13}	0	0,13846	0,23663	0,30469	0,34329	0,35680
	v_{13}	0	0,13845	0,23662	0,30468	0,34329	0,35680
-0,4	w_{13}	0	0,17549	0,30469	0,39599	0,44866	0,46697
	v_{13}	0	0,17549	0,30468	0,39599	0,44865	0,46696
-0,2	w_{13}	0	0,19562	0,34329	0,44866	0,51018	0,53142
	v_{13}	0	0,19562	0,34329	0,44865	0,51017	0,53141
0	w_{13}	0	0,20310	0,35680	0,46697	0,53142	0,55372
	v_{13}	0	0,20310	0,35680	0,46696	0,53141	0,55371

Рисунок 3.10 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$ Рисунок 3.11 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$ Рисунок 3.12 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

Для $\lambda = 1$, $\beta = 0,6$ в таблиці Б.7 наведено значення для наближень $v_9(\mathbf{x})$ та $w_9(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.19 та Б.20 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_9(\mathbf{x})$, а на рис. Б.21 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Для $\lambda = 0,5$, $\beta = 0,3$ в таблиці Б.8 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.22 та Б.23 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.24 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Для $\lambda = 0,1$, $\beta = 0,05$ в таблиці Б.9 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$, на рис. Б.25 та Б.26 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$, а на рис. Б.27 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$.

Область Д. Максимальним значенням λ , для якого виконуються умови (2.12) та (2.13), є $\lambda^* = 6,56927$, відповідним значенням β є $\beta = 0,99999$.

В таблиці Б.10 наведено значення для наближень $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.28 та Б.29 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$, а на рис. Б.30 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Е. Максимальним значенням λ , для якого виконуються умови (2.12) та (2.13), є $\lambda^* = 10,21887$, відповідним значенням β є $\beta = 0,99999$.

В таблиці Б.11 наведено значення для наближень $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.31 та Б.32 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$, а на рис. Б.33 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Залежність норми $\|\tilde{u}_n\|$ у просторі $C(\Omega_i)$, $i = \overline{1,3}$, від λ представлено на рис. 3.13 у вигляді графіків для областей Ω_1 (суцільна лінія), Ω_2 (пунктирна лінія) та Ω_3 (точкова лінія).

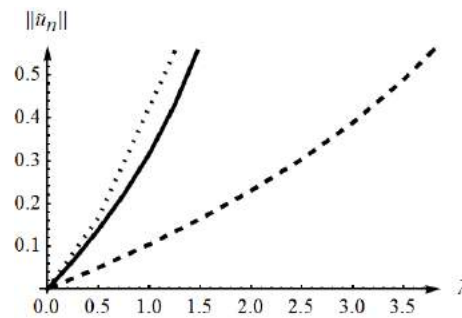


Рисунок 3.13 – Графіки залежності норми $\|\tilde{u}_n\|$ від λ

для областей Ω_1 (суцільна лінія), Ω_2 (пунктирна лінія) та Ω_3 (точкова лінія)

Звідси випливає, що, якщо λ прямує до нуля, то й шуканий розв'язок $u(\mathbf{x})$ прямує до нуля.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оберемо кількість координатних функцій $k = 6$.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

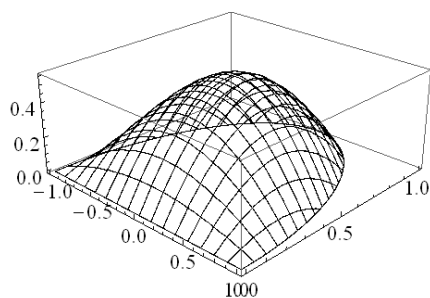
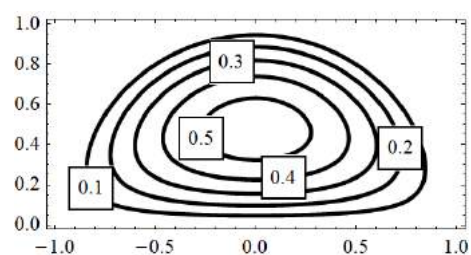
Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3,75387$, $\beta = 0,99999$.

В таблиці 3.4 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 11,12,13$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

На рис. 3.14 та 3.15 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$.

Таблиця 3.4 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 11, 12, 13$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12
	0	0	0	0	0	0	13
0,2	0	0,12657	0,23039	0,30617	0,35189	0,36713	11
	0	0,12657	0,23039	0,30618	0,35190	0,36714	12
	0	0,12657	0,23039	0,30618	0,35190	0,36714	13
0,4	0	0,20948	0,36441	0,46711	0,52460	0,54300	11
	0	0,20948	0,36441	0,46711	0,52461	0,54301	12
	0	0,20948	0,36442	0,46712	0,52461	0,54302	13
0,6	0	0,22505	0,37355	0,46159	0,50680	0,52063	11
	0	0,22506	0,37356	0,46160	0,50681	0,52064	12
	0	0,22506	0,37356	0,46160	0,50681	0,52065	13
0,8	0	0,15757	0,24903	0,29671	0,31916	0,32582	11
	0	0,15757	0,24903	0,29672	0,31917	0,32583	12
	0	0,15758	0,24903	0,29672	0,31917	0,32583	13
1	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12
	0	0	0	0	0	0	13

Рисунок 3.14 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$ Рисунок 3.15 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{13}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_{13}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{14}(\mathbf{x})\| \approx 0,57 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1,24704$, $\beta = 0,99999$.

В таблиці 3.5 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.5 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12
-0,8	0	0,07690	0,13454	0,17455	0,19809	0,20586	10
	0	0,07690	0,13454	0,17455	0,19810	0,20587	11
	0	0,07690	0,13454	0,17456	0,19810	0,20587	12
-0,6	0	0,13454	0,23534	0,30527	0,34640	0,35998	10
	0	0,13455	0,23534	0,30528	0,34641	0,35999	11
	0	0,13455	0,23535	0,30528	0,34642	0,35999	12
-0,4	0	0,17456	0,30528	0,39594	0,44925	0,46684	10
	0	0,17457	0,30528	0,39595	0,44926	0,46686	11
	0	0,17457	0,30529	0,39595	0,44927	0,46686	12
-0,2	0	0,19811	0,34642	0,44926	0,50972	0,52967	10
	0	0,19811	0,34643	0,44927	0,50974	0,52969	11
	0	0,19812	0,34643	0,44928	0,50975	0,52970	12
0	0	0,20588	0,35999	0,46685	0,52967	0,55040	10
	0	0,20589	0,36000	0,46686	0,52969	0,55042	11
	0	0,20589	0,36001	0,46687	0,52970	0,55043	12

На рис. 3.16 та 3.17 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega_3})$ складає

$$\|u_{12}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{13}(\mathbf{x})\| \approx 0,54 \cdot 10^{-2}.$$

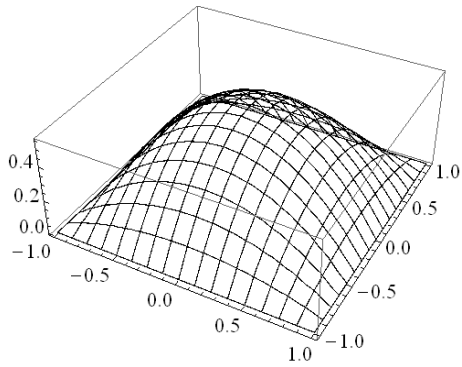


Рисунок 3.16 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

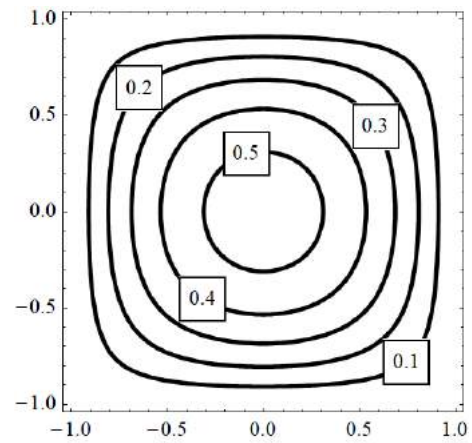


Рисунок 3.17 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

Область Г. Для вибору значень параметра λ користуємось нерівністю

$$\lambda \leq \frac{\beta e^{-\beta}}{\max_{\mathbf{x} \in \Omega_0} \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds}, \quad \Omega_0 - \text{найменший за площею квадрат, якому належить область}$$

(3.20). Оскільки Ω_0 співпадає з областю Ω_3 , звідси маємо $\lambda = 1,24704$, $\beta = 0,99999$.

В таблиці 3.6 наведено значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n=9,10,11$ в точках області Ω_4 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.6 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n=9,10,11$ в точках області Ω_4

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0,47670	0,47670	0,47670	0,47670	0,47670	0,47670	9
	0,47672	0,47672	0,47672	0,47672	0,47672	0,47672	10
	0,47673	0,47673	0,47673	0,47673	0,47673	0,47673	11
0,2	0,46427	0,46427	0,46426	0,46426	0,46426	0,46425	9
	0,46430	0,46429	0,46429	0,46428	0,46428	0,46428	10
	0,46430	0,46430	0,46430	0,46429	0,46429	0,46428	11
0,4	0,42672	0,42680	0,42692	0,42690	0,42676	0,42666	9
	0,42674	0,42682	0,42694	0,42692	0,42678	0,42668	10
	0,42674	0,42683	0,42694	0,42693	0,42678	0,42669	11

Продовження таблиці 3.6

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0,6	0,35874	0,36074	0,36361	0,36357	0,36066	0,35862	9
	0,35875	0,36076	0,36362	0,36359	0,36068	0,35864	10
	0,35876	0,36077	0,36363	0,36360	0,36068	0,35865	11
0,8	0,23126	0,24665	0,26859	0,26854	0,24652	0,23110	9
	0,23127	0,24666	0,26860	0,26855	0,24653	0,23111	10
	0,23127	0,24666	0,26861	0,26855	0,24653	0,23112	11
1	---	0,05488	0,13312	0,13306	0,05480	---	9
	---	0,05488	0,13313	0,13306	0,05481	---	10
	---	0,05488	0,13313	0,13306	0,05481	---	11

На рис. 3.18 та 3.19 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$.

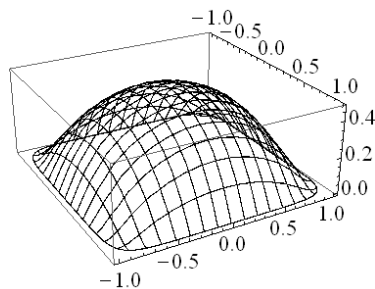


Рисунок 3.18 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$

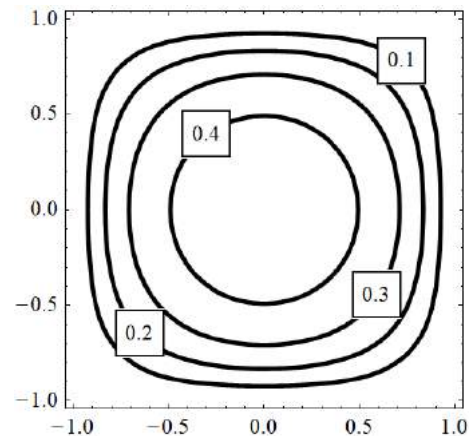


Рисунок 3.19 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{11}(\mathbf{x})$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 6,56927$, $\beta = 0,99999$.

В таблиці Б.12 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n=10,11,12$ в

точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

$j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.34 та Б.35 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_{12}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{13}(\mathbf{x})\| \approx 0,19 \cdot 10^{-1}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 10,21887$, $\beta = 0,99999$.

В таблиці Б.13 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.36 та Б.37 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_{12}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{13}(\mathbf{x})\| \approx 0,25 \cdot 10^{-1}.$$

3.2.2 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = u^q$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.21), (2.22) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.32) та (2.33). Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.28), (2.29) та (2.30) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.7 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.7 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595
	v_5	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595	0,20595
0,2	w_5	0,19694	0,19695	0,19695	0,19695	0,19695	0,19696
	v_5	0,19694	0,19694	0,19694	0,19694	0,19695	0,19695
0,4	w_5	0,17220	0,17216	0,17205	0,17193	0,17198	0,17269
	v_5	0,17220	0,17216	0,17205	0,17193	0,17198	0,17268
0,6	w_5	0,13006	0,12997	0,12969	0,12946	0,12957	0,13110
	v_5	0,13006	0,12997	0,12969	0,12946	0,12957	0,13109
0,8	w_5	0,07160	0,07151	0,07124	0,07095	0,07105	0,07274
	v_5	0,07160	0,07151	0,07124	0,07095	0,07105	0,07274
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.20 та 3.21 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. 3.22 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.28), (2.29) та (2.30) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.8 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

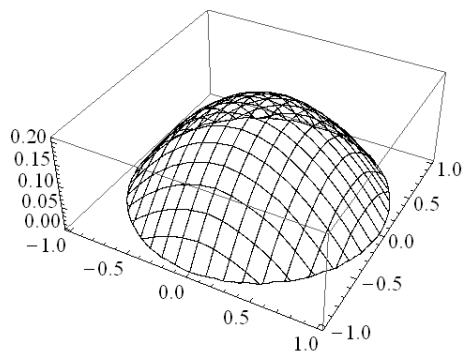


Рисунок 3.20 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

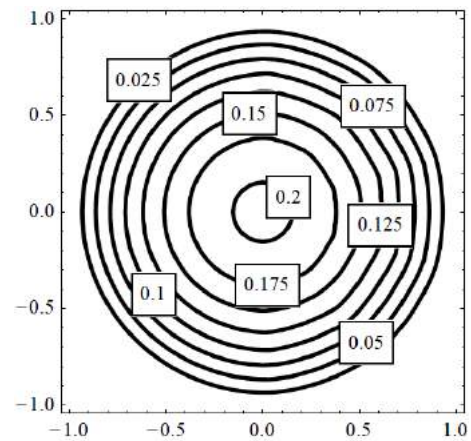


Рисунок 3.21 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

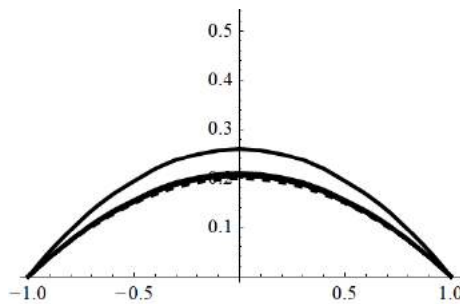


Рисунок 3.22 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

$j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.8 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,01685	0,03050	0,04022	0,04597	0,04787
	v_5	0	0,01685	0,03050	0,04021	0,04597	0,04787
0,4	w_5	0	0,02935	0,04927	0,06179	0,06865	0,07082
	v_5	0	0,02935	0,04927	0,06179	0,06865	0,07082

Продовження таблиці 3.8

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,6	w_5	0	0,03273	0,05120	0,06149	0,06679	0,06841
	v_5	0	0,03273	0,05120	0,06149	0,06679	0,06840
0,8	w_5	0	0,02374	0,03442	0,03983	0,04252	0,04332
	v_5	0	0,02374	0,03442	0,03983	0,04252	0,04332
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.23 та 3.24 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. 3.25 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

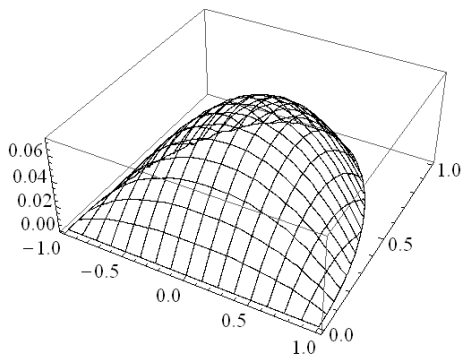


Рисунок 3.23 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

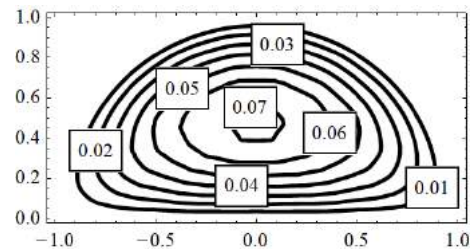
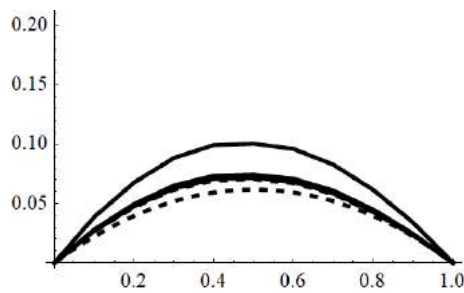


Рисунок 3.24 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

Область В. Для того, щоб умови (2.28), (2.29) та (2.30) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $q = 0,5$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.9 наведено значення для наближень $v_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{16}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Рисунок 3.25 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$ Таблиця 3.9 – Значення $v_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{16}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{16}	0	0	0	0	0	0
	v_{16}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{16}	0	0,00760	0,01348	0,01766	0,02011	0,02095
	v_{16}	0	0,00760	0,01348	0,01766	0,02011	0,02094
-0,6	w_{16}	0	0,01348	0,02415	0,03180	0,03632	0,03784
	v_{16}	0	0,01348	0,02415	0,03179	0,03631	0,03784
-0,4	w_{16}	0	0,01766	0,03180	0,04199	0,04805	0,05010
	v_{16}	0	0,01766	0,03179	0,04199	0,04804	0,05009
-0,2	w_{16}	0	0,02011	0,03632	0,04805	0,05504	0,05740
	v_{16}	0	0,02011	0,03631	0,04804	0,05504	0,05740
0	w_{16}	0	0,02095	0,03784	0,05010	0,05740	0,05987
	v_{16}	0	0,02094	0,03784	0,05009	0,05740	0,05987

На рис. 3.26 та 3.27 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{16}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.28 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.28), (2.29) та (2.30) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.14 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.38 та Б.39 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.40 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

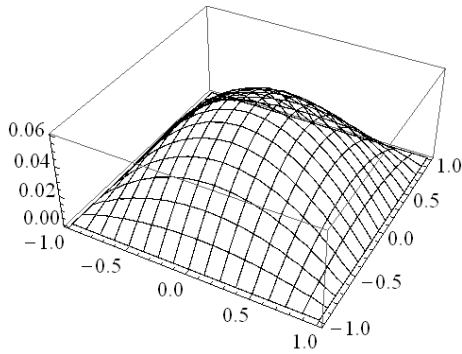


Рисунок 3.26 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16}(\mathbf{x})$

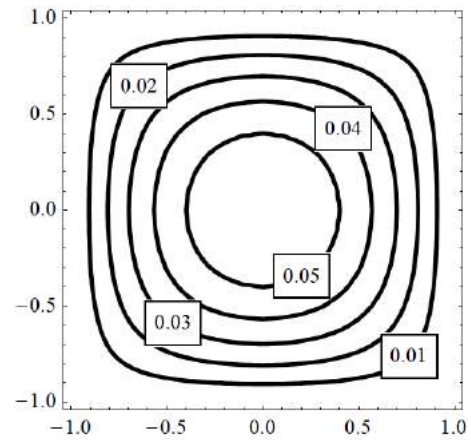


Рисунок 3.27 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16}(\mathbf{x})$

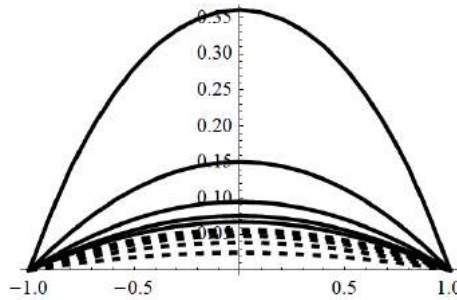


Рисунок 3.28 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

Область Е. Для того, щоб умови (2.28), (2.29) та (2.30) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.15 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.41 та Б.42 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.43 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.10 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.10 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
0,2	0	0,01729	0,03118	0,04111	0,04700	0,04895	4
	0	0,01730	0,03121	0,04115	0,04704	0,04899	5
	0	0,01731	0,03121	0,04115	0,04705	0,04900	6
0,4	0	0,02880	0,04916	0,06197	0,06879	0,07090	4
	0	0,02882	0,04921	0,06202	0,06885	0,07096	5
	0	0,02883	0,04921	0,06203	0,06885	0,07097	6
0,6	0	0,03154	0,05098	0,06145	0,06628	0,06764	4
	0	0,03157	0,05103	0,06151	0,06633	0,06770	5
	0	0,03157	0,05103	0,06151	0,06634	0,06771	6
0,8	0	0,02285	0,03507	0,04059	0,04275	0,04330	4
	0	0,02287	0,03510	0,04063	0,04279	0,04334	5
	0	0,02287	0,03510	0,04063	0,04279	0,04335	6
1	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6

На рис. 3.29 та 3.30 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

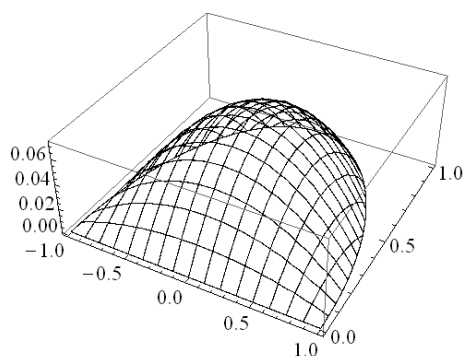


Рисунок 3.29 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

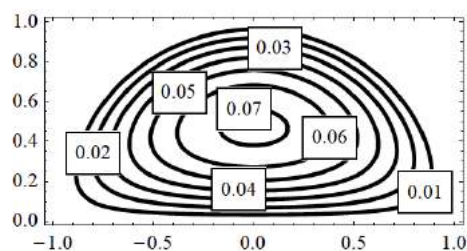


Рисунок 3.30 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_5(\mathbf{x})\| \approx 0,18 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $q = 0,5$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.11 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 14, 15, 16$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.11 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 14, 15, 16$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	14
	0	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	0	0	0	16
-0,8	0	0,00748	0,01341	0,01771	0,02031	0,02119	14
	0	0,00748	0,01341	0,01771	0,02032	0,02119	15
	0	0,00748	0,01341	0,01772	0,02032	0,02119	16
-0,6	0	0,01341	0,02405	0,03175	0,03642	0,03799	14
	0	0,01341	0,02405	0,03176	0,03643	0,03800	15
	0	0,01342	0,02406	0,03177	0,03644	0,03800	16

Продовження таблиці 3.11

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,01771	0,03175	0,04193	0,04810	0,05016	14
	0	0,01771	0,03176	0,04194	0,04811	0,05017	15
	0	0,01772	0,03177	0,04195	0,04811	0,05018	16
-0,2	0	0,02031	0,03642	0,04810	0,05517	0,05753	14
	0	0,02032	0,03643	0,04811	0,05518	0,05755	15
	0	0,02032	0,03644	0,04812	0,05519	0,05756	16
0	0	0,02119	0,03799	0,05016	0,05753	0,06000	14
	0	0,02119	0,03800	0,05017	0,05755	0,06002	15
	0	0,02120	0,03800	0,05018	0,05756	0,06003	16

На рис. 3.31 та 3.32 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{16}(\mathbf{x})$.

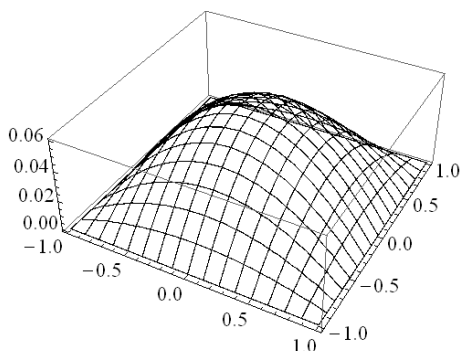


Рисунок 3.31 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{16}(\mathbf{x})$

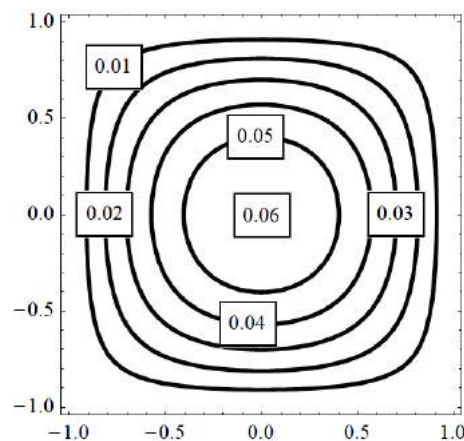


Рисунок 3.32 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{16}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_{16}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{16}(\mathbf{x})\| \approx 0,43 \cdot 10^{-3}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.16 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.44 та Б.45 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_5(\mathbf{x})\| \approx 0,12 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.17 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.46 та Б.47 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,93 \cdot 10^{-3}.$$

3.2.3 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda + u^p$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.34), (2.35) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.44) та (2.45). Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.38) та (2.39) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 2$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.12 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.12 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782
	v_6	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782	0,51782
0,2	w_6	0,49531	0,49531	0,49531	0,49531	0,49531	0,49533
	v_6	0,49531	0,49531	0,49531	0,49531	0,49531	0,49533
0,4	w_6	0,43360	0,43350	0,43323	0,43292	0,43303	0,43476
	v_6	0,43359	0,43350	0,43322	0,43292	0,43303	0,43476
0,6	w_6	0,32877	0,32854	0,32786	0,32728	0,32753	0,33130
	v_6	0,32877	0,32854	0,32786	0,32728	0,32753	0,33130
0,8	w_6	0,18281	0,18258	0,18188	0,18112	0,18136	0,18578
	v_6	0,18281	0,18257	0,18188	0,18112	0,18136	0,18578
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.33 та 3.34 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. 3.35 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.38) та (2.39) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.13 наведено значення для наближень $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

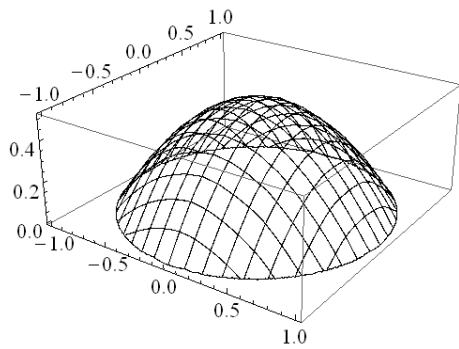


Рисунок 3.33 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

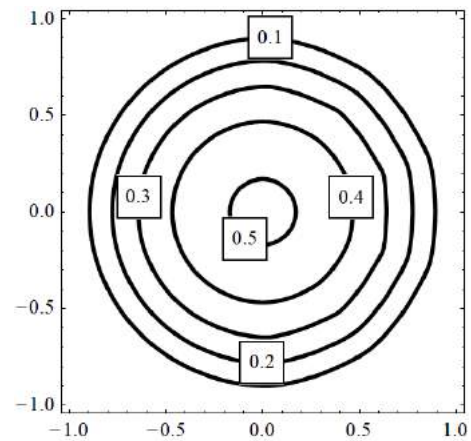


Рисунок 3.34 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

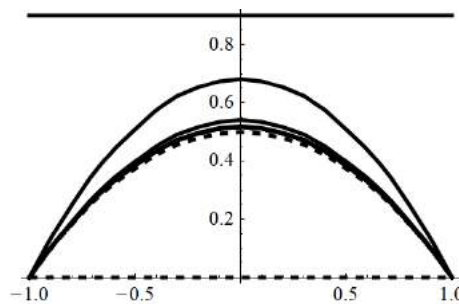


Рисунок 3.35 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

$j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.13 – Значення $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0
0,2	w_4	0	0,06990	0,12569	0,16493	0,18801	0,19561
	v_4	0	0,06990	0,12569	0,16493	0,18801	0,19561
0,4	w_4	0	0,12203	0,20232	0,25188	0,27871	0,28715
	v_4	0	0,12203	0,20232	0,25188	0,27871	0,28715

Продовження таблиці 3.13

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,6	w_4	0	0,13749	0,21130	0,25125	0,27151	0,27765
	v_4	0	0,13749	0,21130	0,25124	0,27151	0,27765
0,8	w_4	0	0,10201	0,14414	0,16466	0,17470	0,17764
	v_4	0	0,10201	0,14414	0,16466	0,17470	0,17764
1	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.36 та 3.37 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_4(\mathbf{x})$, а на рис. 3.38 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$.

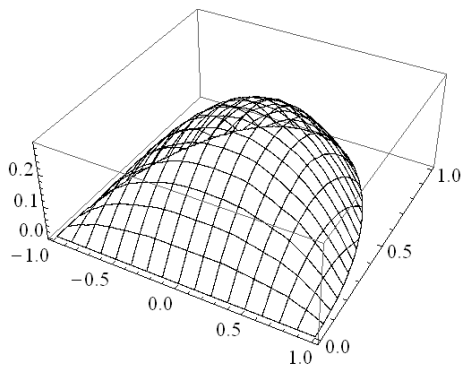


Рисунок 3.36 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{y}_4(\mathbf{x})$

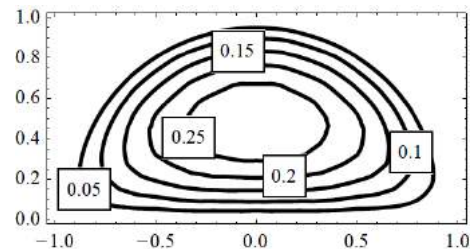


Рисунок 3.37 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_4(\mathbf{x})$

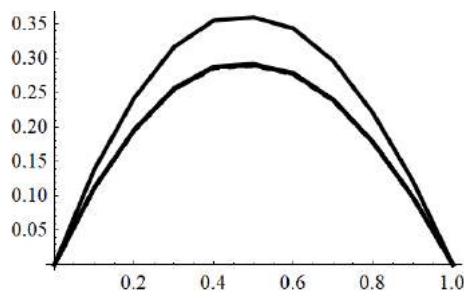


Рисунок 3.38 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$

Область В. Для того, щоб умови (2.38) та (2.39) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 2$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.14 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.14 – Значення $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_7	0	0	0	0	0	0
	v_7	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_7	0	0,10906	0,17219	0,21368	0,23476	0,24293
	v_7	0	0,10906	0,17219	0,21368	0,23476	0,24293
-0,6	w_7	0	0,17219	0,28567	0,36091	0,40155	0,41597
	v_7	0	0,17219	0,28566	0,36091	0,40154	0,41597
-0,4	w_7	0	0,21368	0,36091	0,46094	0,51627	0,53569
	v_7	0	0,21368	0,36091	0,46094	0,51626	0,53569
-0,2	w_7	0	0,23476	0,40155	0,51627	0,58079	0,60323
	v_7	0	0,23476	0,40154	0,51626	0,58079	0,60322
0	w_7	0	0,24293	0,41597	0,53569	0,60323	0,62678
	v_7	0	0,24293	0,41597	0,53569	0,60322	0,62677

На рис. 3.39 та 3.40 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_7(\mathbf{x})$, а на рис. 3.41 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.38) та (2.39) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 4$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.18 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.48 та Б.49 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$, а на рис. Б.50 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)

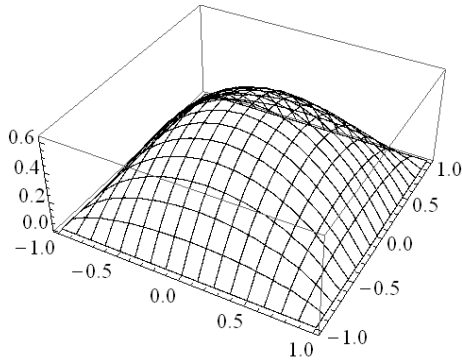


Рисунок 3.39 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_7(\mathbf{x})$

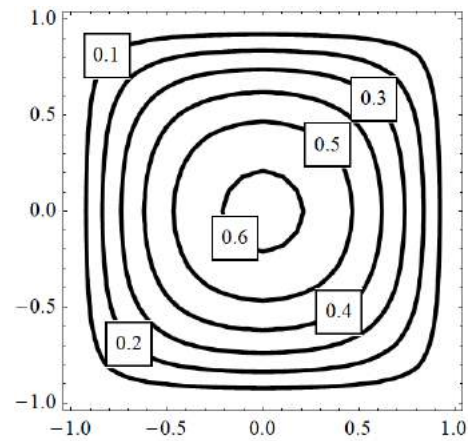


Рисунок 3.40 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_7(\mathbf{x})$

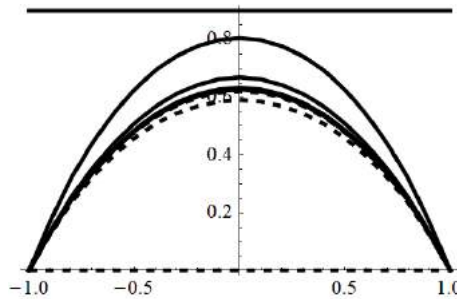


Рисунок 3.41 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,3}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.38) та (2.39) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 6$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.19 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.51 та Б.52 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$, а на рис. Б.53 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,3}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.15 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.15 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,07158	0,12852	0,16884	0,19256	0,20035	2
	0	0,07159	0,12853	0,16885	0,19257	0,20036	3
	0	0,07159	0,12853	0,16885	0,19257	0,20036	4
0,4	0	0,11951	0,20222	0,25292	0,27925	0,28727	2
	0	0,11951	0,20223	0,25294	0,27926	0,28729	3
	0	0,11951	0,20223	0,25294	0,27926	0,28729	4
0,6	0	0,13190	0,21068	0,25120	0,26885	0,27364	2
	0	0,13190	0,21069	0,25121	0,26886	0,27365	3
	0	0,13190	0,21069	0,25121	0,26886	0,27365	4
0,8	0	0,09684	0,14681	0,16808	0,17569	0,17751	2
	0	0,09684	0,14681	0,16808	0,17569	0,17751	3
	0	0,09684	0,14682	0,16808	0,17569	0,17751	4
1	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4

На рис. 3.42 та 3.43 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

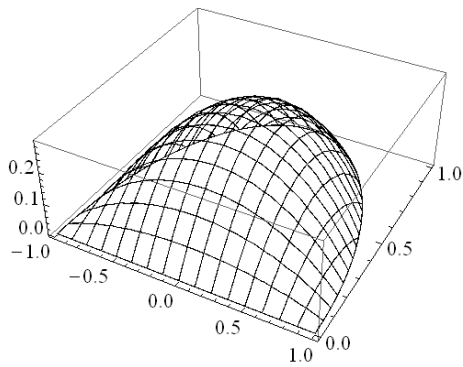


Рисунок 3.42 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

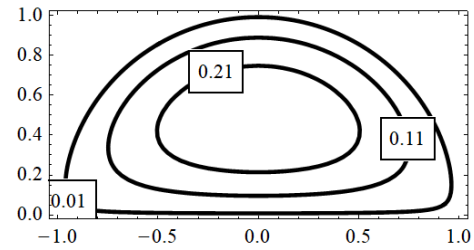


Рисунок 3.43 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,74 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 2$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.16 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 6, 7$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.16 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 6, 7$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	7
-0,8	0	0,09690	0,16584	0,21164	0,23774	0,24621	5
	0	0,09690	0,16584	0,21164	0,23775	0,24622	6
	0	0,09690	0,16585	0,21164	0,23775	0,24622	7
-0,6	0	0,16584	0,28340	0,36125	0,40550	0,41985	5
	0	0,16584	0,28340	0,36125	0,40551	0,41986	6
	0	0,16584	0,28340	0,36125	0,40551	0,41986	7

Продовження таблиці 3.16

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,21164	0,36124	0,46007	0,51615	0,53430	5
	0	0,21164	0,36125	0,46008	0,51616	0,53431	6
	0	0,21164	0,36125	0,46008	0,51616	0,53432	7
-0,2	0	0,23774	0,40550	0,51615	0,57886	0,59915	5
	0	0,23774	0,40551	0,51615	0,57887	0,59916	6
	0	0,23774	0,40551	0,51616	0,57887	0,59916	7
0	0	0,24621	0,41984	0,53430	0,59915	0,62013	5
	0	0,24621	0,41985	0,53431	0,59916	0,62014	6
	0	0,24621	0,41985	0,53431	0,59916	0,62014	7

На рис. 3.44 та 3.45 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$.

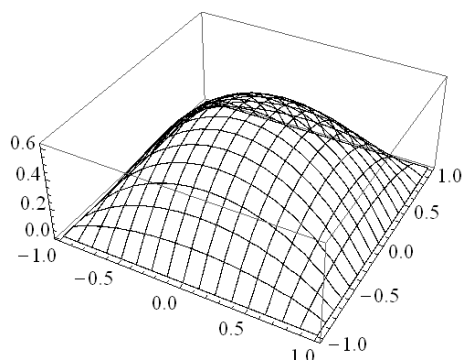


Рисунок 3.44 – Поверхня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

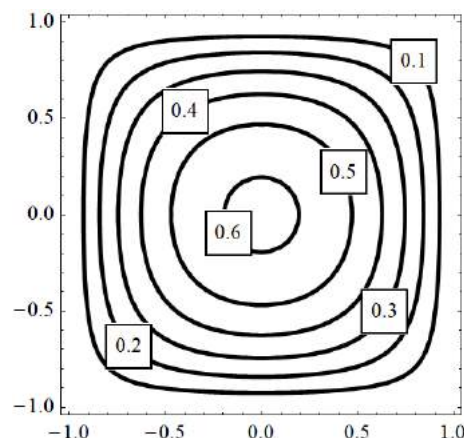


Рисунок 3.45 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_7(\mathbf{x}) - \tilde{u}_7(\mathbf{x})\| \approx 0,67 \cdot 10^{-2}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 4$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.20 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 1, 2, 3$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.54 та Б.55 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_3(\mathbf{x}) - \tilde{u}_3(\mathbf{x})\| \approx 0,73 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 6$, $p = 3$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.21 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 1, 2, 3$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.56 та Б.57 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_3(\mathbf{x}) - \tilde{u}_3(\mathbf{x})\| \approx 0,80 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.4 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda u^q + u^p$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.46), (2.47) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.58) та (2.59). Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.52), (2.53) та (2.54) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,3$, $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.17 наведено значення для наближень $v_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{16}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.17 – Значення $v_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{16}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{16}	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072
	v_{16}	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072	0,65072
0,2	w_{16}	0,61860	0,61861	0,61862	0,61864	0,61868	0,61874
	v_{16}	0,61860	0,61860	0,61861	0,61864	0,61867	0,61874
0,4	w_{16}	0,53212	0,53200	0,53164	0,53127	0,53148	0,53386
	v_{16}	0,53212	0,53199	0,53163	0,53126	0,53148	0,53385
0,6	w_{16}	0,39103	0,39073	0,38987	0,38919	0,38960	0,39432
	v_{16}	0,39103	0,39073	0,38987	0,38918	0,38960	0,39431
0,8	w_{16}	0,20695	0,20670	0,20601	0,20531	0,20563	0,20986
	v_{16}	0,20694	0,20670	0,20601	0,20531	0,20562	0,20986
1	w_{16}	0	0	0	0	0	0
	v_{16}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.46 та 3.47 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.48 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.52), (2.53) та (2.54) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.18 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

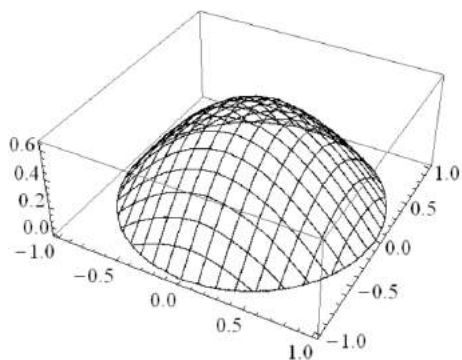


Рисунок 3.46 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_{16}(\mathbf{x})$

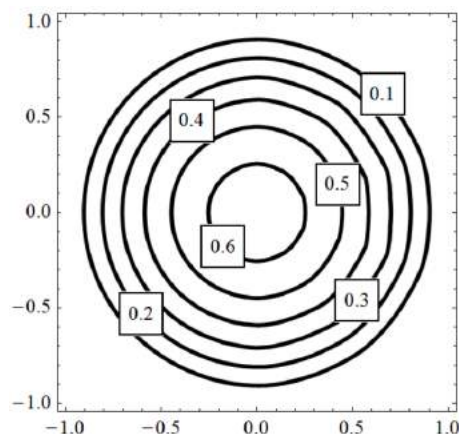


Рисунок 3.47 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_{16}(\mathbf{x})$

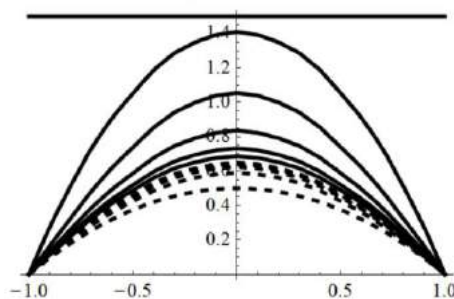


Рисунок 3.48 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

$j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

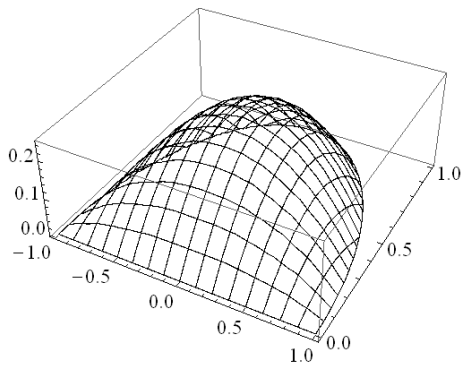
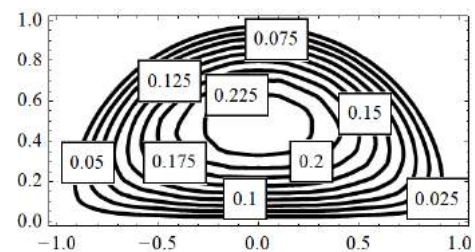
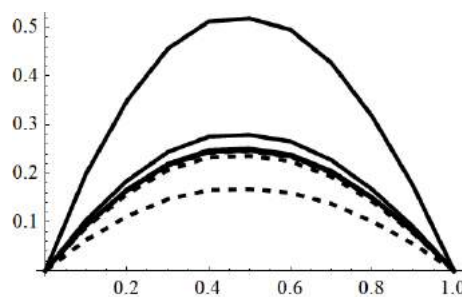
На рис. 3.49 та 3.50 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$, а на рис. 3.51 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область В. Для того, щоб умови (2.52), (2.53) та (2.54) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 2,5$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.19 наведено значення для наближень $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.18 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,05783	0,10476	0,13822	0,15808	0,16465
	v_6	0	0,05783	0,10476	0,13822	0,15807	0,16464
0,4	w_6	0	0,10062	0,16925	0,21262	0,23645	0,24401
	v_6	0	0,10062	0,16925	0,21261	0,23644	0,24400
0,6	w_6	0	0,11205	0,17572	0,21145	0,22997	0,23564
	v_6	0	0,11204	0,17571	0,21144	0,22997	0,23563
0,8	w_6	0	0,08110	0,11789	0,13669	0,14611	0,14892
	v_6	0	0,08110	0,11789	0,13669	0,14610	0,14891
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

Рисунок 3.49 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$ Рисунок 3.50 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$ Рисунок 3.51 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

Таблиця 3.19 – Значення $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{12}	0	0	0	0	0	0
	v_{12}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{12}	0	0,12489	0,20474	0,25876	0,28798	0,29869
	v_{12}	0	0,12488	0,20474	0,25876	0,28798	0,29869
-0,6	w_{12}	0	0,20474	0,34881	0,44758	0,50316	0,52254
	v_{12}	0	0,20474	0,34880	0,44757	0,50315	0,52254
-0,4	w_{12}	0	0,25876	0,44758	0,57962	0,65524	0,68145
	v_{12}	0	0,25876	0,44757	0,57962	0,65523	0,68144
-0,2	w_{12}	0	0,28798	0,50316	0,65524	0,74340	0,77379
	v_{12}	0	0,28798	0,50315	0,65523	0,74339	0,77378
0	w_{12}	0	0,29869	0,52254	0,68145	0,77379	0,80567
	v_{12}	0	0,29869	0,52254	0,68144	0,77378	0,80566

На рис. 3.52 та 3.53 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{12}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.54 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

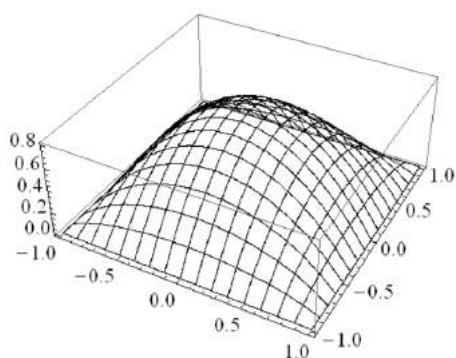


Рисунок 3.52 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{12}(\mathbf{x})$

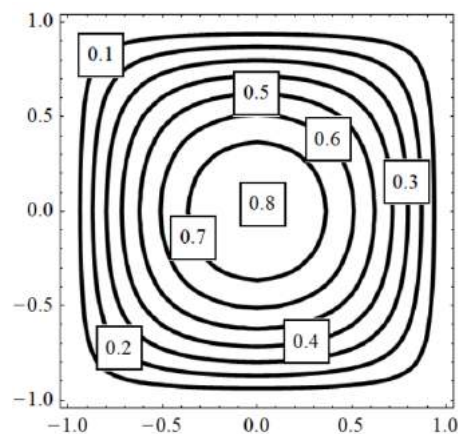


Рисунок 3.53 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{12}(\mathbf{x})$

Область Д. Для того, щоб умови (2.52), (2.53) та (2.54) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

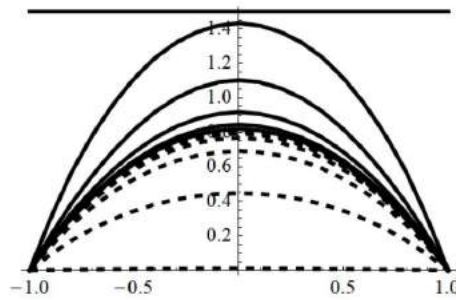


Рисунок 3.54 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

В таблиці Б.22 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.58 та Б.59 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.60 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.52), (2.53) та (2.54) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.23 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.61 та Б.62 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.63 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.20 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 6, 7$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.20 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 6, 7$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	7
0,2	0	0,05943	0,10725	0,14149	0,16182	0,16854	5
	0	0,05944	0,10726	0,14150	0,16183	0,16855	6
	0	0,05944	0,10726	0,14150	0,16184	0,16855	7
0,4	0	0,09894	0,16911	0,21341	0,23709	0,24445	5
	0	0,09895	0,16912	0,21343	0,23711	0,24448	6
	0	0,09895	0,16913	0,21343	0,23712	0,24448	7
0,6	0	0,10820	0,17520	0,21154	0,22846	0,23329	5
	0	0,10821	0,17521	0,21156	0,22848	0,23331	6
	0	0,10821	0,17521	0,21157	0,22848	0,23331	7
0,8	0	0,07818	0,12021	0,13944	0,14710	0,14911	5
	0	0,07819	0,12022	0,13945	0,14711	0,14912	6
	0	0,07819	0,12022	0,13945	0,14711	0,14912	7
1	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	7

На рис. 3.55 та 3.56 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_7(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,61 \cdot 10^{-2}.$$

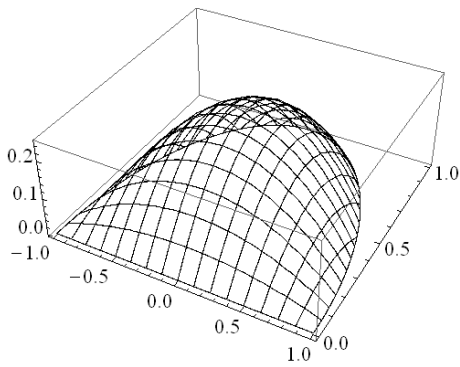


Рисунок 3.55 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

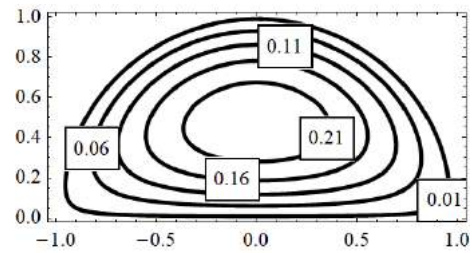


Рисунок 3.56 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 2,5$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.21 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

На рис. 3.57 та 3.58 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$.

Таблиця 3.21 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12
-0,8	0	0,11409	0,19881	0,25716	0,29131	0,30255	10
	0	0,11409	0,19881	0,25717	0,29132	0,30256	11
	0	0,11409	0,19881	0,25717	0,29132	0,30256	12
-0,6	0	0,19884	0,34634	0,44786	0,50724	0,52678	10
	0	0,19884	0,34634	0,44787	0,50725	0,52679	11
	0	0,19884	0,34634	0,44787	0,50725	0,52679	12
-0,4	0	0,25723	0,44791	0,57908	0,65577	0,68100	10
	0	0,25723	0,44792	0,57909	0,65578	0,68101	11
	0	0,25723	0,44792	0,57909	0,65579	0,68102	12

Продовження таблиці 3.21

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,2	0	0,29141	0,50733	0,65582	0,74261	0,77116	10
	0	0,29141	0,50734	0,65583	0,74262	0,77117	11
	0	0,29141	0,50734	0,65583	0,74262	0,77117	12
0	0	0,30266	0,52689	0,68106	0,77117	0,80081	10
	0	0,30266	0,52689	0,68107	0,77119	0,80082	11
	0	0,30266	0,52690	0,68108	0,77119	0,80083	12

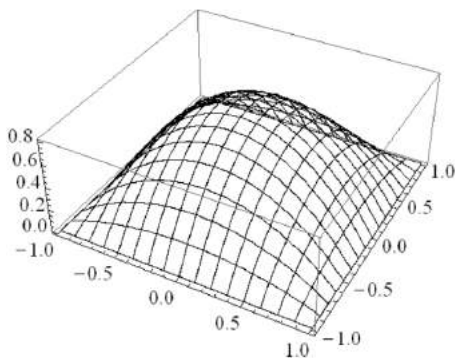


Рисунок 3.57 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

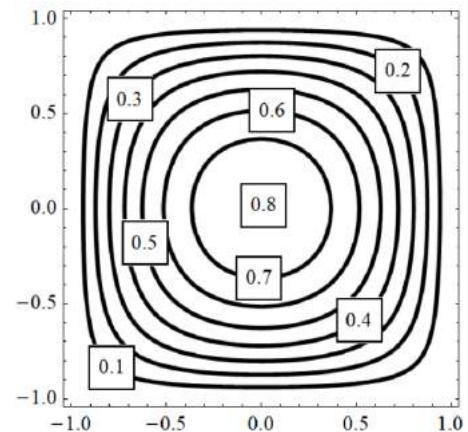


Рисунок 3.58 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_{12}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{12}(\mathbf{x})\| \approx 0,75 \cdot 10^{-2}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.24 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4, 5, 6$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.64 та Б.65 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,42 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 3$, $p = 2$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.25 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4, 5, 6$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.66 та Б.67 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,33 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.5 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda(e^u + e^{\gamma u})$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.60), (2.61) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.71), (2.72). Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.65) та (2.69) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.22 наведено значення для наближень $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.22 – Значення $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{12}	0,65269	0,65269	0,65269	0,65269	0,65269	0,65269
	v_{12}	0,65268	0,65268	0,65268	0,65268	0,65268	0,65268
0,2	w_{12}	0,62148	0,62148	0,62149	0,62151	0,62153	0,62158
	v_{12}	0,62147	0,62148	0,62148	0,62150	0,62152	0,62157
0,4	w_{12}	0,53722	0,53709	0,53673	0,53636	0,53655	0,53885
	v_{12}	0,53721	0,53708	0,53673	0,53635	0,53654	0,53884
0,6	w_{12}	0,39880	0,39851	0,39765	0,39696	0,39733	0,40201
	v_{12}	0,39880	0,39850	0,39765	0,39696	0,39733	0,40201
0,8	w_{12}	0,21534	0,21508	0,21432	0,21354	0,21383	0,21854
	v_{12}	0,21534	0,21507	0,21432	0,21353	0,21383	0,21854
1	w_{12}	0	0	0	0	0	0
	v_{12}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.59 та 3.60 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{12}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.61 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.65) та (2.69) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.23 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

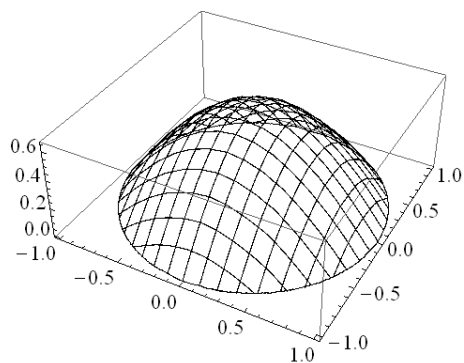


Рисунок 3.59 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{12}(\mathbf{x})$

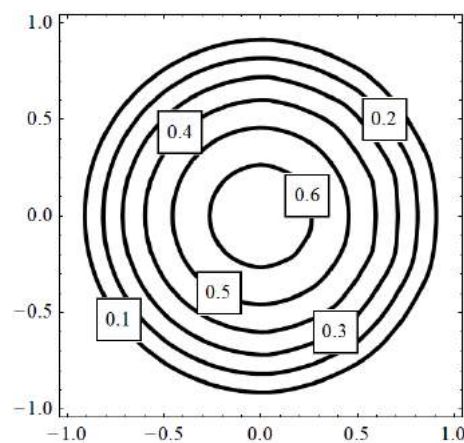


Рисунок 3.60 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{12}(\mathbf{x})$

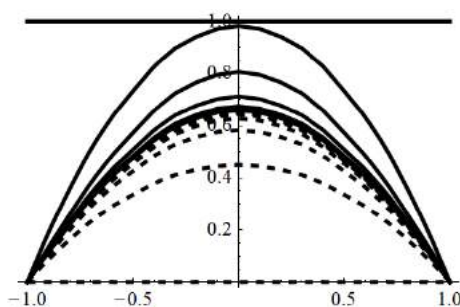


Рисунок 3.61 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

$j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.23 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,04586	0,08281	0,10905	0,12459	0,12972
	v_6	0	0,04586	0,08281	0,10905	0,12459	0,12972
0,4	w_6	0	0,07981	0,13356	0,16739	0,18595	0,19184
	v_6	0	0,07981	0,13356	0,16739	0,18595	0,19183
0,6	w_6	0	0,08926	0,13892	0,16661	0,18093	0,18531
	v_6	0	0,08926	0,13892	0,16660	0,18093	0,18531

Продовження таблиці 3.23

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,8	w_6	0	0,06539	0,09378	0,10815	0,11534	0,11749
	v_6	0	0,06538	0,09378	0,10815	0,11534	0,11749
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.62 та 3.63 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. 3.64 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

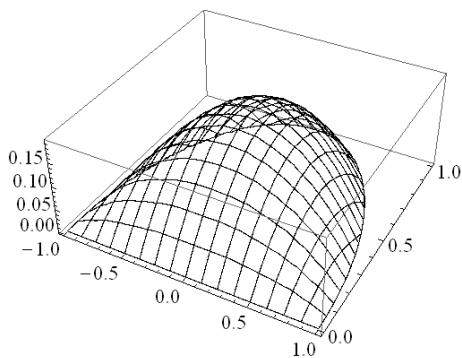


Рисунок 3.62 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

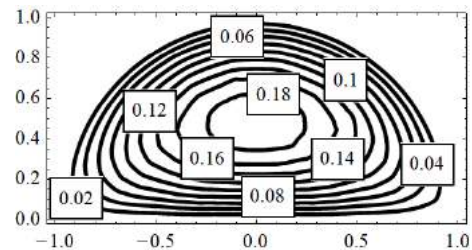


Рисунок 3.63 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

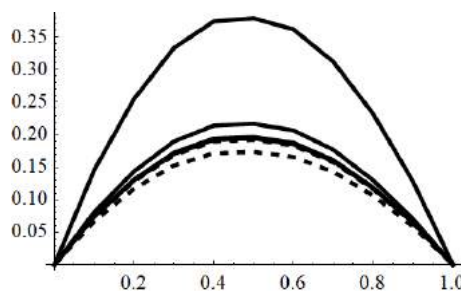


Рисунок 3.64 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

Область В. Для того, щоб умови (2.65) та (2.69) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 0,7$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.24 наведено значення для наближень $v_{11}(\mathbf{x})$ та $w_{11}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1+0,2i, -1+0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.24 – Значення $v_{11}(\mathbf{x})$ та $w_{11}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{11}	0	0	0	0	0	0
	v_{11}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{11}	0	0,09013	0,14630	0,18444	0,20484	0,21247
	v_{11}	0	0,09013	0,14630	0,18444	0,20484	0,21247
-0,6	w_{11}	0	0,14630	0,24822	0,31801	0,35707	0,37076
	v_{11}	0	0,14630	0,24822	0,31801	0,35707	0,37076
-0,4	w_{11}	0	0,18444	0,31801	0,41129	0,46442	0,48289
	v_{11}	0	0,18444	0,31801	0,41128	0,46442	0,48289
-0,2	w_{11}	0	0,20484	0,35707	0,46442	0,52635	0,54771
	v_{11}	0	0,20484	0,35707	0,46442	0,52634	0,54771
0	w_{11}	0	0,21247	0,37076	0,48289	0,54771	0,57012
	v_{11}	0	0,21247	0,37076	0,48289	0,54771	0,57012

На рис. 3.65 та 3.66 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{11}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.67 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.65) та (2.69) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.26 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

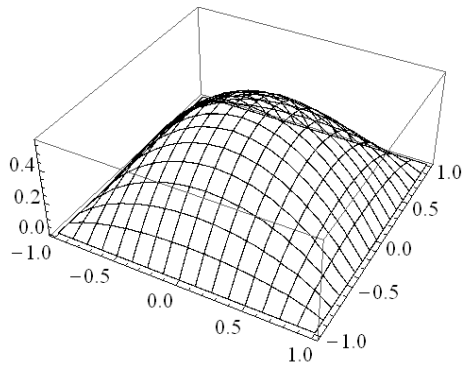


Рисунок 3.65 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{11}(\mathbf{x})$

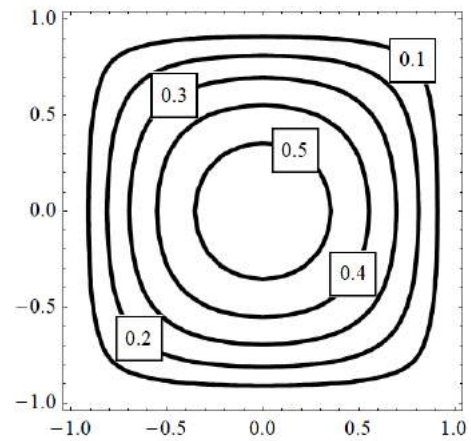


Рисунок 3.66 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{11}(\mathbf{x})$

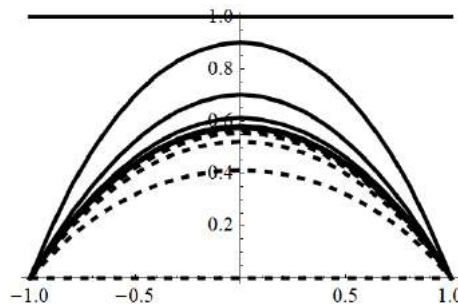


Рисунок 3.67 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

На рис. Б.68 та Б.69 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.70 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.65) та (2.69) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.27 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.71 та Б.72 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.73 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.25 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.25 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
0,2	0	0,04703	0,08474	0,11165	0,12758	0,13284	4
	0	0,04704	0,08475	0,11166	0,12760	0,13285	5
	0	0,04704	0,08475	0,11166	0,12760	0,13285	6
0,4	0	0,07837	0,13354	0,16806	0,18636	0,19201	4
	0	0,07837	0,13355	0,16807	0,18637	0,19203	5
	0	0,07838	0,13355	0,16808	0,18638	0,19204	6
0,6	0	0,08595	0,13859	0,16670	0,17953	0,18315	4
	0	0,08595	0,13860	0,16671	0,17955	0,18317	5
	0	0,08596	0,13861	0,16672	0,17956	0,18317	6
0,8	0	0,06242	0,09555	0,11039	0,11613	0,11760	4
	0	0,06242	0,09556	0,11041	0,11614	0,11761	5
	0	0,06243	0,09556	0,11040	0,11614	0,11761	6
1	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6

На рис. 3.68 та 3.69 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

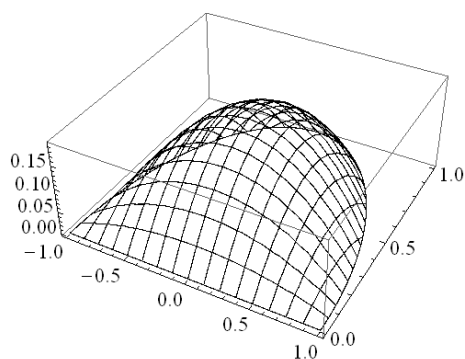


Рисунок 3.68 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

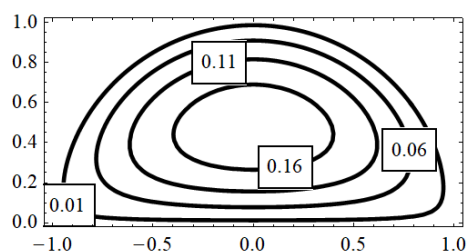


Рисунок 3.69 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,48 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 0,7$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.26 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 8,9,10$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.26 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 8,9,10$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	8
	0	0	0	0	0	0	9
	0	0	0	0	0	0	10
-0,8	0	0,08166	0,14195	0,18328	0,20739	0,21531	8
	0	0,08166	0,14195	0,18329	0,20739	0,21532	9
	0	0,08166	0,14195	0,18329	0,20740	0,21532	10
-0,6	0	0,14196	0,24664	0,31834	0,36013	0,37385	8
	0	0,14197	0,24665	0,31835	0,36014	0,37387	9
	0	0,14197	0,24665	0,31836	0,36015	0,37387	10

Продовження таблиці 3.26

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,18332	0,31837	0,41080	0,46464	0,48232	8
	0	0,18332	0,31838	0,41082	0,46467	0,48235	9
	0	0,18333	0,31839	0,41082	0,46467	0,48235	10
-0,2	0	0,20744	0,36018	0,46467	0,52552	0,54549	8
	0	0,20745	0,36020	0,46469	0,52554	0,54552	9
	0	0,20745	0,36020	0,46470	0,52555	0,54553	10
0	0	0,21537	0,37392	0,48236	0,54550	0,56623	8
	0	0,21538	0,37393	0,48238	0,54553	0,56626	9
	0	0,21538	0,37394	0,48239	0,54554	0,56627	10

На рис. 3.70 та 3.71 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{10}(\mathbf{x})$.

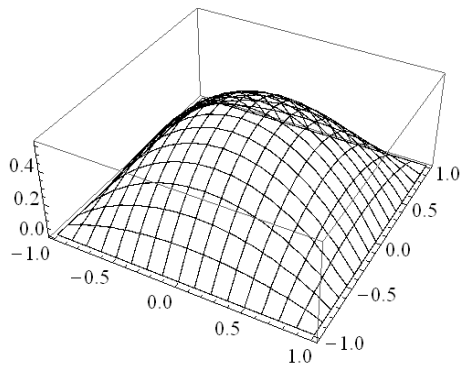


Рисунок 3.70 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{10}(\mathbf{x})$

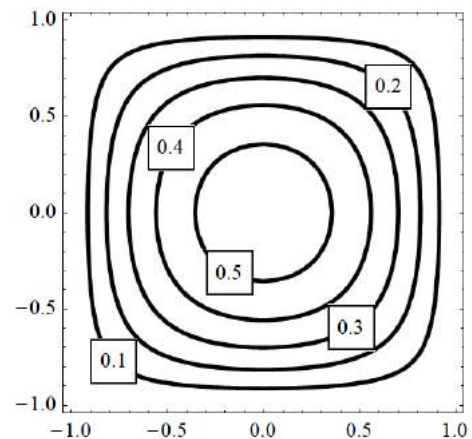


Рисунок 3.71 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{10}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_{10}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{11}(\mathbf{x})\| \approx 0,55 \cdot 10^{-2}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.28 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5, 6, 7$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.74 та Б.75 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_7(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,90 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.29 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.76 та Б.77 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_5(\mathbf{x})\| \approx 0,55 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.6 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = \lambda |\mathbf{x}|^{2\alpha} (e^u + e^{\gamma u})$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.73), (2.74) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.82), (2.83).

Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.78) та (2.79) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.27 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.27 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036
	v_5	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036	0,12036
0,2	w_5	0,12010	0,12010	0,12011	0,12011	0,12011	0,12011
	v_5	0,12010	0,12010	0,12010	0,12011	0,12011	0,12011
0,4	w_5	0,11737	0,11735	0,11730	0,11726	0,11728	0,11758
	v_5	0,11737	0,11735	0,11730	0,11725	0,11728	0,11758
0,6	w_5	0,10448	0,10440	0,10418	0,10399	0,10408	0,10532
	v_5	0,10448	0,10440	0,10418	0,10399	0,10408	0,10532
0,8	w_5	0,06984	0,06969	0,06923	0,06875	0,06891	0,07176
	v_5	0,06984	0,06969	0,06923	0,06875	0,06891	0,07176
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.72 та 3.73 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_5(\mathbf{x})$, а на рис. 3.74 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.78) та (2.79) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.28 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$,

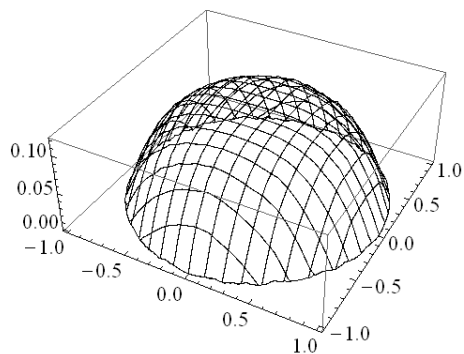


Рисунок 3.72 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

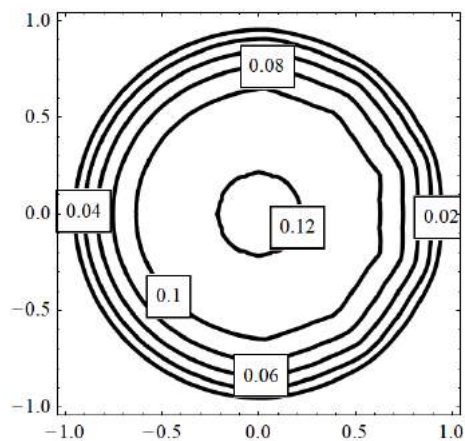


Рисунок 3.73 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

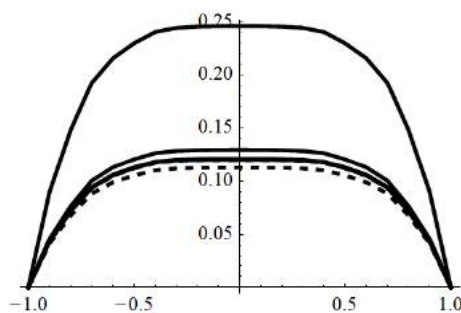


Рисунок 3.74 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

$j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.28 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,02320	0,04296	0,05756	0,06640	0,06934
	v_6	0	0,02320	0,04296	0,05756	0,06640	0,06934
0,4	w_6	0	0,05117	0,08730	0,11014	0,12256	0,12648
	v_6	0	0,05117	0,08730	0,11014	0,12256	0,12648

Продовження таблиці 3.28

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,6	w_6	0	0,07589	0,11652	0,13792	0,14854	0,15172
	v_6	0	0,07589	0,11652	0,13792	0,14854	0,15172
0,8	w_6	0	0,07282	0,09935	0,11131	0,11698	0,11859
	v_6	0	0,07282	0,09935	0,11131	0,11698	0,11859
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.75 та 3.76 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$, а на рис. 3.77 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

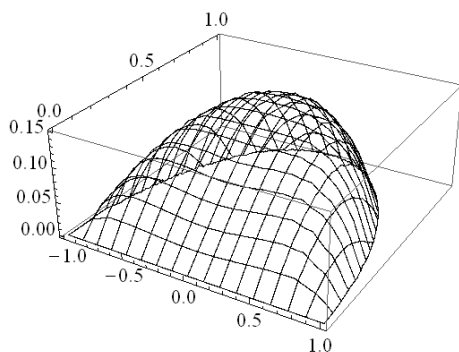


Рисунок 3.75 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

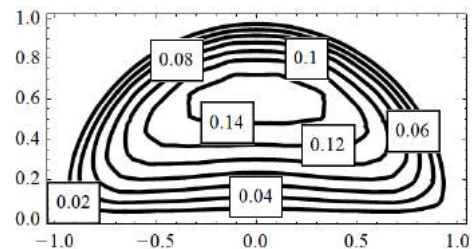


Рисунок 3.76 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

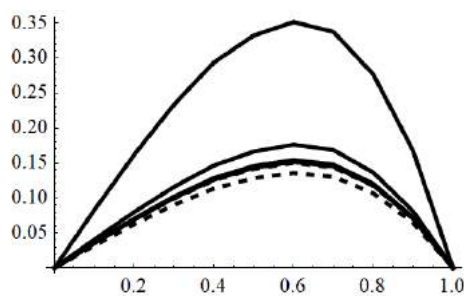


Рисунок 3.77 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

Область В. Для того, щоб умови (2.78) та (2.79) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 0,3$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.29 наведено значення для наближень $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.29 – Значення $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_4	0	0,02557	0,03643	0,04304	0,04564	0,04699
	v_4	0	0,02557	0,03643	0,04303	0,04564	0,04699
-0,6	w_4	0	0,02804	0,04461	0,05475	0,05979	0,06163
	v_4	0	0,02804	0,04461	0,05475	0,05979	0,06162
-0,4	w_4	0	0,02539	0,04273	0,05428	0,06053	0,06271
	v_4	0	0,02538	0,04272	0,05428	0,06052	0,06270
-0,2	w_4	0	0,02064	0,03723	0,04886	0,05565	0,05788
	v_4	0	0,02064	0,03723	0,04886	0,05564	0,05787
0	w_4	0	0,01961	0,03565	0,04726	0,05411	0,05640
	v_4	0	0,01960	0,03565	0,04726	0,05410	0,05639

На рис. 3.78 та 3.79 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$, а на рис. 3.80 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.78) та (2.79) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.30 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

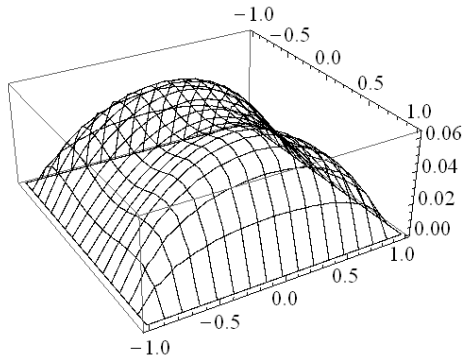


Рисунок 3.78 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

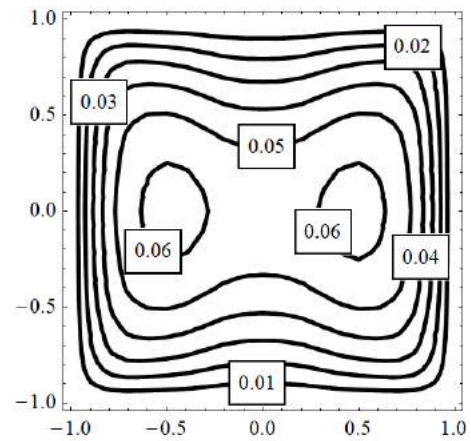


Рисунок 3.79 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

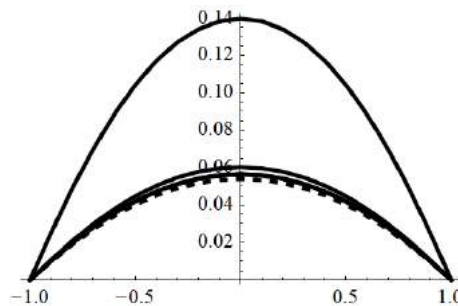


Рисунок 3.80 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$

На рис. Б.78 та Б.79 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.80 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.78) та (2.79) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 2,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.31 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.81 та Б.82 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$, а на рис. Б.83 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.30 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.30 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
0,2	0	0,02553	0,04697	0,06269	0,07210	0,07521	4
	0	0,02553	0,04697	0,06269	0,07211	0,07522	5
	0	0,02553	0,04697	0,06269	0,07211	0,07522	6
0,4	0	0,04964	0,08760	0,11162	0,12362	0,12708	4
	0	0,04964	0,08761	0,11163	0,12364	0,12709	5
	0	0,04964	0,08761	0,11163	0,12364	0,12709	6
0,6	0	0,06714	0,11389	0,13779	0,14553	0,14666	4
	0	0,06714	0,11390	0,13780	0,14555	0,14668	5
	0	0,06714	0,11390	0,13780	0,14555	0,14668	6
0,8	0	0,06172	0,10145	0,11705	0,11772	0,11603	4
	0	0,06172	0,10146	0,11706	0,11773	0,11604	5
	0	0,06172	0,10146	0,11706	0,11773	0,11604	6
1	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6

На рис. 3.81 та 3.82 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,61 \cdot 10^{-2}.$$

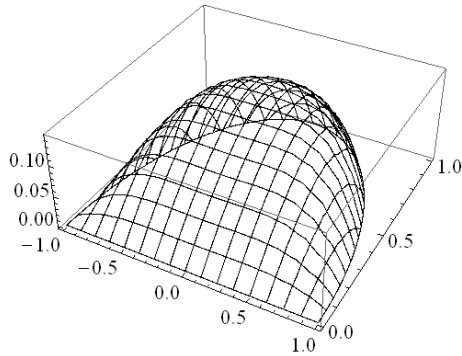


Рисунок 3.81 – Поверхня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

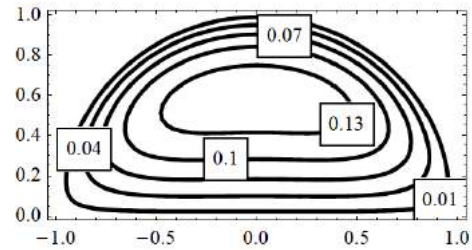


Рисунок 3.82 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 0,3$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.31 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.31 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
-0,8	0	0,01854	0,02842	0,03304	0,03485	0,03529	2
	0	0,01856	0,02845	0,03308	0,03489	0,03533	3
	0	0,01856	0,02845	0,03308	0,03489	0,03533	4
-0,6	0	0,02842	0,04245	0,04816	0,04985	0,05013	2
	0	0,02845	0,04250	0,04822	0,04992	0,05019	3
	0	0,02845	0,04250	0,04822	0,04992	0,05020	4

Продовження таблиці 3.31

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,03304	0,04816	0,05328	0,05409	0,05398	2
	0	0,03308	0,04822	0,05335	0,05416	0,05406	3
	0	0,03308	0,04822	0,05335	0,05417	0,05406	4
-0,2	0	0,03485	0,04985	0,05409	0,05403	0,05359	2
	0	0,03489	0,04992	0,05416	0,05412	0,05367	3
	0	0,03489	0,04992	0,05417	0,05412	0,05367	4
0	0	0,03529	0,05013	0,05398	0,05359	0,05301	2
	0	0,03533	0,05019	0,05406	0,05367	0,05309	3
	0	0,03533	0,05020	0,05406	0,05367	0,05309	4

На рис. 3.83 та 3.84 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

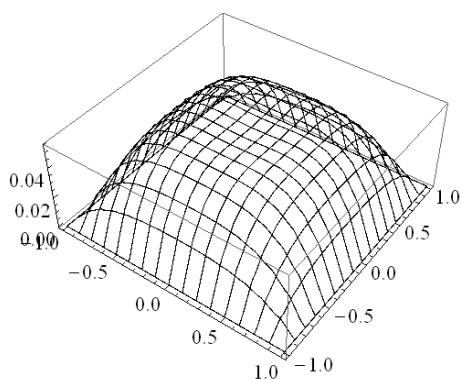


Рисунок 3.83 – Поверхня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

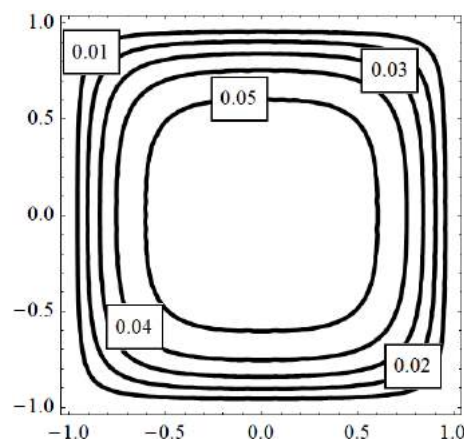


Рисунок 3.84 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,13 \cdot 10^{-1}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 1,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.32 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.84 та Б.85 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_5(\mathbf{x})\| \approx 0,43 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $\alpha = 1$, $\lambda = 2,9$, $\gamma = 0,9$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.33 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.86 та Б.87 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_5(\mathbf{x})\| \approx 0,69 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.7 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = au + b$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.84), (2.85) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.93), (2.94).

Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.89) та (2.90) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 0,5$, $b = 2$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.32 наведено значення для наближень $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.32 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132
	v_5	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132	0,55132
0,2	w_5	0,52734	0,52734	0,52734	0,52734	0,52735	0,52737
	v_5	0,52733	0,52733	0,52734	0,52734	0,52734	0,52736
0,4	w_5	0,46146	0,46136	0,46107	0,46074	0,46087	0,46273
	v_5	0,46146	0,46136	0,46106	0,46074	0,46086	0,46272
0,6	w_5	0,34932	0,34908	0,34834	0,34772	0,34800	0,35205
	v_5	0,34932	0,34907	0,34834	0,34772	0,34800	0,35205
0,8	w_5	0,19344	0,19319	0,19245	0,19167	0,19192	0,19655
	v_5	0,19344	0,19319	0,19245	0,19167	0,19192	0,19655
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.85 та 3.86 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_5(\mathbf{x})$, а на рис. 3.87 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.89) та (2.90) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 0,5$, $b = 2$, $\beta = 0,9$.

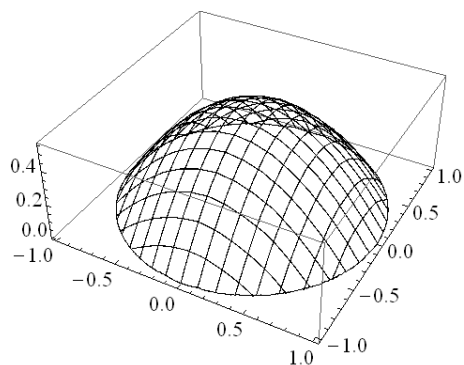


Рисунок 3.85 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

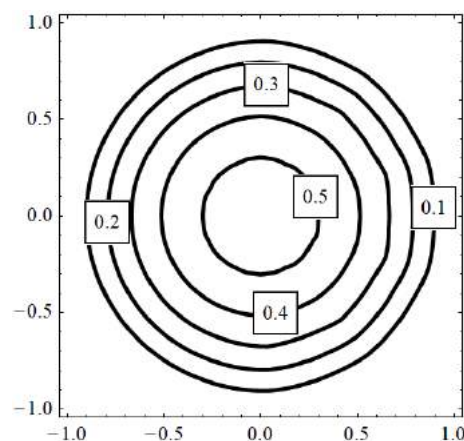


Рисунок 3.86 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

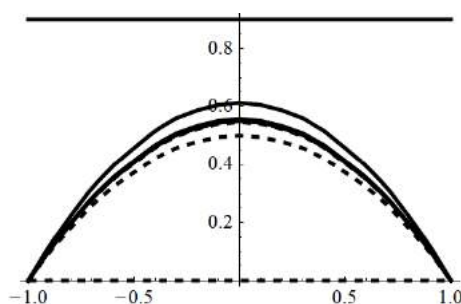


Рисунок 3.87 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)

та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

В таблиці 3.33 наведено значення для наближень $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.33 – Значення $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0
0,2	w_4	0	0,04793	0,08628	0,11334	0,12928	0,13453
	v_4	0	0,04793	0,08628	0,11334	0,12928	0,13453

Продовження таблиці 3.33

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,4	w_4	0	0,08361	0,13899	0,17334	0,19199	0,19787
	v_4	0	0,08361	0,13899	0,17334	0,19199	0,19787
0,6	w_4	0	0,09401	0,14500	0,17281	0,18698	0,19127
	v_4	0	0,09401	0,14500	0,17281	0,18698	0,19127
0,8	w_4	0	0,06948	0,09862	0,11296	0,12000	0,12208
	v_4	0	0,06948	0,09862	0,11296	0,12000	0,12208
1	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.88 та 3.89 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$, а на рис. 3.90 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$.

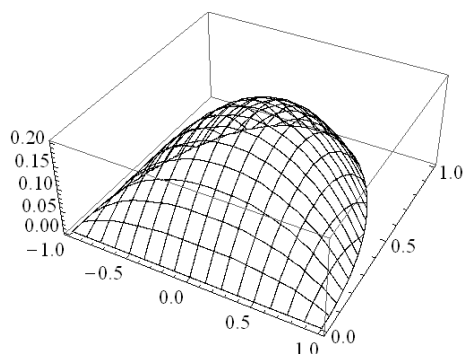


Рисунок 3.88 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

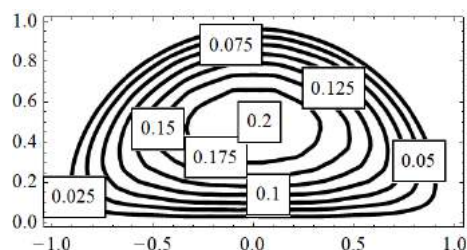


Рисунок 3.89 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

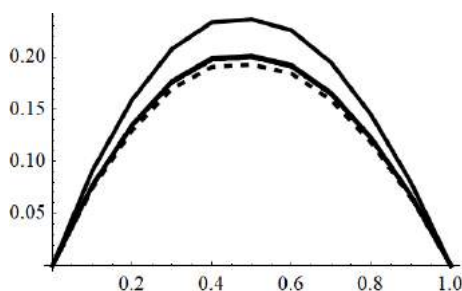


Рисунок 3.90 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$

Область В. Для того, щоб умови (2.89) та (2.90) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 0,5$, $b = 2$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.34 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.34 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_6	0	0,11420	0,18145	0,22574	0,24839	0,25706
	v_6	0	0,11420	0,18145	0,22574	0,24839	0,25706
-0,6	w_6	0	0,18145	0,30228	0,38240	0,42568	0,44092
	v_6	0	0,18145	0,30228	0,38240	0,42568	0,44092
-0,4	w_6	0	0,22574	0,38240	0,48848	0,54691	0,56727
	v_6	0	0,22574	0,38240	0,48847	0,54691	0,56727
-0,2	w_6	0	0,24839	0,42568	0,54691	0,61466	0,63803
	v_6	0	0,24839	0,42568	0,54691	0,61466	0,63802
0	w_6	0	0,25706	0,44092	0,56727	0,63803	0,66249
	v_6	0	0,25706	0,44092	0,56727	0,63802	0,66248

На рис. 3.91 та 3.92 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$, а на рис. 3.93 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.89) та (2.90) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.34 наведено значення для наближень $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

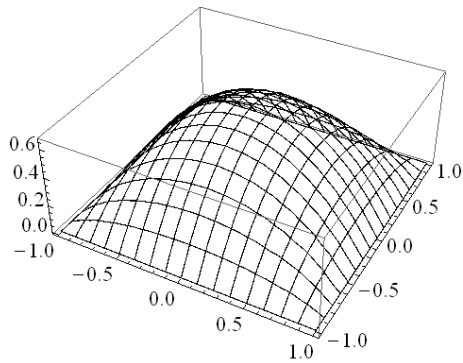


Рисунок 3.91 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

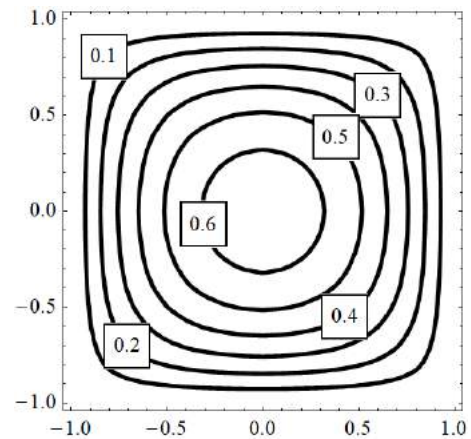


Рисунок 3.92 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

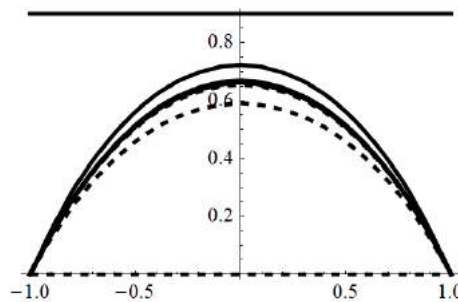


Рисунок 3.93 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

На рис. Б.88 та Б.89 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$, а на рис. Б.90 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.89) та (2.90) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.35 наведено значення для наближень $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.91 та Б.92 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$, а на рис. Б.93 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $a = 0,5$, $b = 2$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.35 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.35 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,04905	0,08814	0,11588	0,13223	0,13761	2
	0	0,04910	0,08824	0,11601	0,13238	0,13777	3
	0	0,04910	0,08824	0,11602	0,13239	0,13777	4
0,4	0	0,08184	0,13875	0,17383	0,19215	0,19776	2
	0	0,08193	0,13890	0,17404	0,19238	0,19800	3
	0	0,08193	0,13891	0,17404	0,19239	0,19801	4
0,6	0	0,09018	0,14442	0,17260	0,18504	0,18845	2
	0	0,09027	0,14457	0,17280	0,18526	0,18868	3
	0	0,09027	0,14457	0,17280	0,18527	0,18869	4
0,8	0	0,06603	0,10037	0,11518	0,12059	0,12191	2
	0	0,06608	0,10045	0,11529	0,12072	0,12205	3
	0	0,06608	0,10046	0,11529	0,12072	0,12205	4
1	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4

На рис. 3.94 та 3.95 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

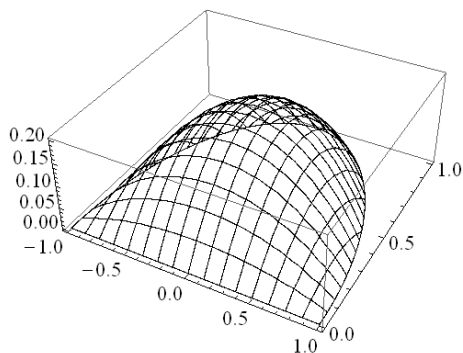


Рисунок 3.94 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

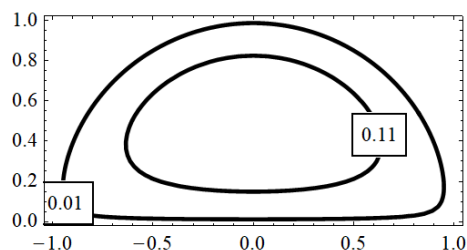


Рисунок 3.95 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,50 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $a = 0,5$, $b = 2$, $\beta = 0,9$.

В таблиці 3.36 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4, 5, 6$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.36 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4, 5, 6$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
-0,8	0	0,10232	0,17523	0,22373	0,25140	0,26038	4
	0	0,10233	0,17525	0,22376	0,25144	0,26043	5
	0	0,10233	0,17524	0,22375	0,25142	0,26040	6
-0,6	0	0,17524	0,29966	0,38217	0,42914	0,44437	4
	0	0,17524	0,29968	0,38222	0,42920	0,44444	5
	0	0,17525	0,29969	0,38221	0,42918	0,44442	6

Продовження таблиці 3.36

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,22374	0,38219	0,48701	0,54657	0,56587	4
	0	0,22374	0,38221	0,48706	0,54664	0,56594	5
	0	0,22376	0,38222	0,48707	0,54663	0,56593	6
-0,2	0	0,25142	0,42916	0,54658	0,61322	0,63480	4
	0	0,25142	0,42918	0,54663	0,61328	0,63487	5
	0	0,25144	0,42921	0,54664	0,61329	0,63487	6
0	0	0,26041	0,44440	0,56588	0,63480	0,65711	4
	0	0,26040	0,44441	0,56592	0,63486	0,65718	5
	0	0,26043	0,44444	0,56595	0,63487	0,65719	6

На рис. 3.96 та 3.97 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$.

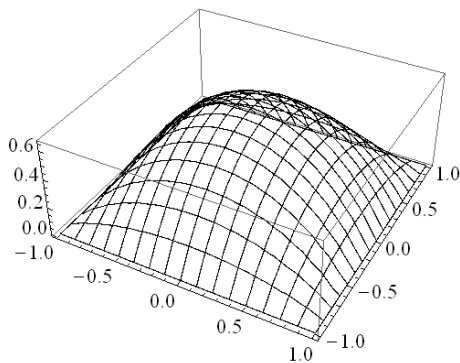


Рисунок 3.96 – Поверхня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

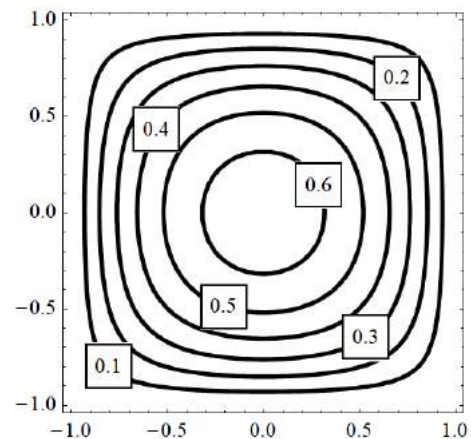


Рисунок 3.97 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_6(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,70 \cdot 10^{-2}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.36 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.94 та Б.95 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,82 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 0,9$.

В таблиці Б.37 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.96 та Б.97 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_4(\mathbf{x})\| \approx 0,54 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.8 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною

$$f(u) = \frac{1}{u^p}$$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.95), (2.96) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулою (2.101). Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.102) та (2.103) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 0,6$.

В таблиці 3.37 наведено значення для наближень $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.37 – Значення $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{16}	0,44630	0,44630	0,44630	0,44630	0,44630	0,44630
	w_{17}	0,44629	0,44629	0,44629	0,44629	0,44629	0,44629
0,2	w_{16}	0,43053	0,43052	0,43051	0,43048	0,43044	0,43041
	w_{17}	0,43052	0,43051	0,43050	0,43047	0,43044	0,43040
0,4	w_{16}	0,38605	0,38599	0,38579	0,38552	0,38551	0,38674
	w_{17}	0,38605	0,38598	0,38578	0,38551	0,38550	0,38674
0,6	w_{16}	0,30618	0,30604	0,30554	0,30504	0,30506	0,30808
	w_{17}	0,30617	0,30603	0,30553	0,30503	0,30506	0,30807
0,8	w_{16}	0,18460	0,18441	0,18374	0,18288	0,18290	0,18784
	w_{17}	0,18460	0,18441	0,18373	0,18288	0,18290	0,18784
1	w_{16}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.98 та 3.99 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{w}_{16,17}(\mathbf{x}) = \frac{w_{16}(\mathbf{x}) + w_{17}(\mathbf{x})}{2}$, а на рис. 3.100 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{0,5}$.

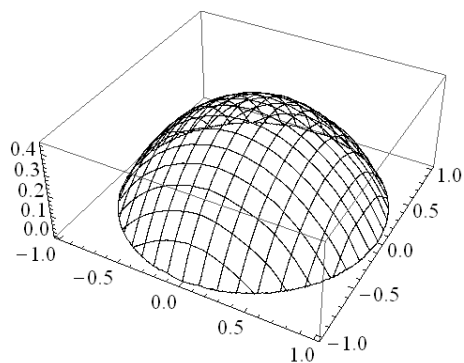


Рисунок 3.98 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

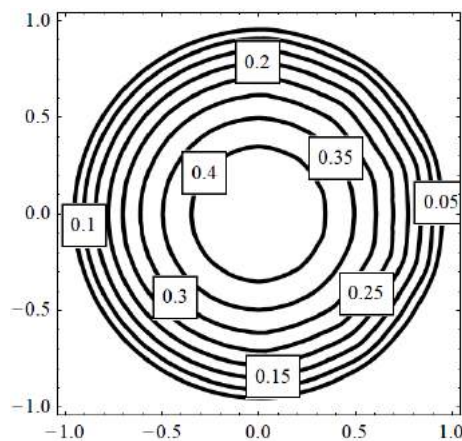


Рисунок 3.99 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

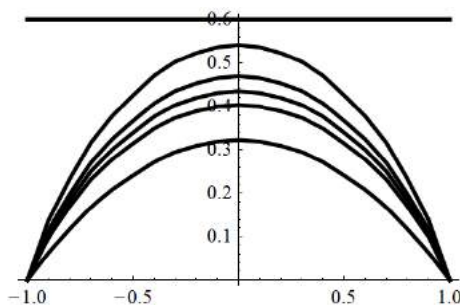


Рисунок 3.100 – Графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{0,5}$

Область Б. Для того, щоб умови (2.102) та (2.103) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.38 наведено значення для наближень $w_{17}(\mathbf{x})$ та $w_{18}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.38 – Значення $w_{17}(\mathbf{x})$ та $w_{18}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{18}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0

Продовження таблиці 3.38

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,2	w_{18}	0	0,06420	0,11071	0,14149	0,15896	0,16461
	w_{17}	0	0,06420	0,11071	0,14148	0,15895	0,16461
0,4	w_{18}	0	0,11120	0,17309	0,20813	0,22608	0,23159
	w_{17}	0	0,11120	0,17308	0,20812	0,22608	0,23158
0,6	w_{18}	0	0,12968	0,18399	0,20969	0,22177	0,22529
	w_{17}	0	0,12968	0,18399	0,20969	0,22177	0,22528
0,8	w_{18}	0	0,10600	0,13454	0,14606	0,15125	0,15268
	w_{17}	0	0,10600	0,13453	0,14605	0,15125	0,15268
1	w_{18}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.101 та 3.102 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{17,18}(\mathbf{x}) = \frac{w_{17}(\mathbf{x}) + w_{18}(\mathbf{x})}{2}$, а на рис. 3.103 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{1,5}$.

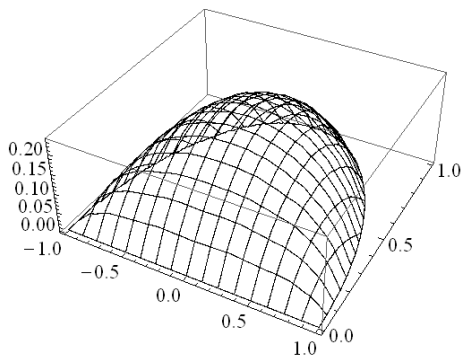


Рисунок 3.101 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{17,18}(\mathbf{x})$

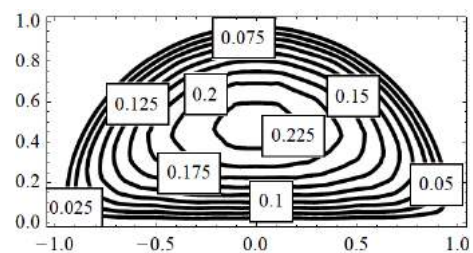
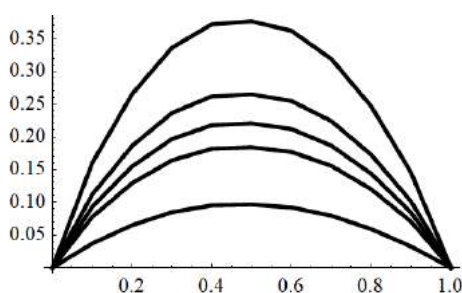


Рисунок 3.102 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{17,18}(\mathbf{x})$

Область В. Для того, щоб умови (2.102) та (2.103) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

Рисунок 3.103 – Графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{1,5}$

В таблиці 3.39 наведено значення для наближень $w_{17}(\mathbf{x})$ та $w_{18}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

На рис. 3.104 та 3.105 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{17,18}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.106 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{0,5}$.

Таблиця 3.39 – Значення $w_{17}(\mathbf{x})$ та $w_{18}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{18}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{18}	0	0,13050	0,17562	0,20696	0,21703	0,22451
	w_{17}	0	0,13050	0,17562	0,20696	0,21703	0,22450
-0,6	w_{18}	0	0,17562	0,26445	0,31960	0,34429	0,35491
	w_{17}	0	0,17562	0,26445	0,31960	0,34429	0,35491
-0,4	w_{18}	0	0,20696	0,31960	0,39274	0,42713	0,44132
	w_{17}	0	0,20696	0,31960	0,39274	0,42713	0,44132
-0,2	w_{18}	0	0,21703	0,34429	0,42713	0,46819	0,48397
	w_{17}	0	0,21703	0,34429	0,42713	0,46818	0,48396
0	w_{18}	0	0,22451	0,35491	0,44132	0,48397	0,50073
	w_{17}	0	0,22450	0,35491	0,44132	0,48396	0,50072

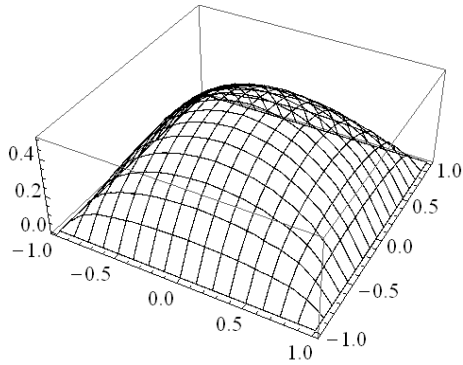


Рисунок 3.104 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{17,18}(\mathbf{x})$

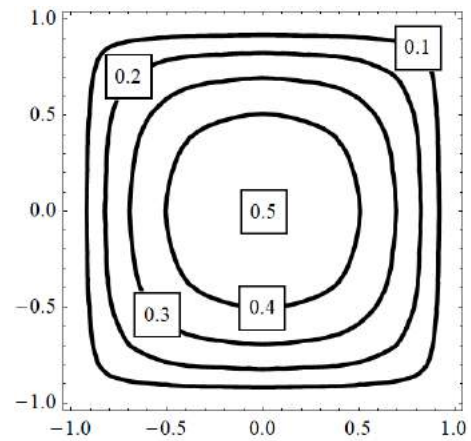


Рисунок 3.105 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{17,18}(\mathbf{x})$

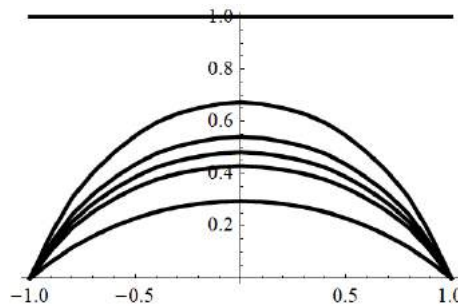


Рисунок 3.106 – Графіки $w_n(0, x_2)$ при $n = \overline{0,5}$

Область Д. Для того, щоб умови (2.102) та (2.103) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.38 наведено значення для наближень $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.98 та Б.99 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$, а на рис. Б.100 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ при $n = \overline{1,5}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.102) та (2.103) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.39 наведено значення для наближень $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.101 та Б.102 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{16,17}(\mathbf{x})$, а на рис. Б.103 наведені графіки $w_n(0,5;x_2)$ при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.40 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 17, 18, 19$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.40 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 17, 18, 19$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	17
	0	0	0	0	0	0	18
	0	0	0	0	0	0	19
0,2	0	0,06395	0,11233	0,14485	0,16313	0,16897	17
	0	0,06394	0,11233	0,14485	0,16313	0,16898	18
	0	0,06395	0,11234	0,14485	0,16313	0,16898	19
0,4	0	0,10769	0,17456	0,20994	0,22543	0,22957	17
	0	0,10768	0,17455	0,20993	0,22542	0,22957	18
	0	0,10769	0,17456	0,20994	0,22543	0,22957	19
0,6	0	0,12277	0,18549	0,20993	0,21643	0,21730	17
	0	0,12276	0,18548	0,20992	0,21642	0,21731	18
	0	0,12277	0,18549	0,20994	0,21643	0,21731	19
0,8	0	0,09523	0,13700	0,14978	0,15199	0,15207	17
	0	0,09522	0,13698	0,14977	0,15199	0,15208	18
	0	0,09523	0,13700	0,14978	0,15199	0,15207	19
1	0	0	0	0	0	0	17
	0	0	0	0	0	0	18
	0	0	0	0	0	0	19

На рис. 3.107 та 3.108 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{19}(\mathbf{x})$.

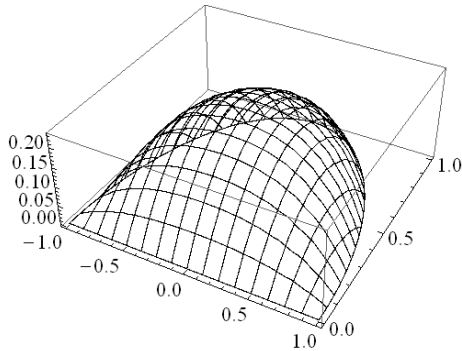


Рисунок 3.107 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{19}(\mathbf{x})$

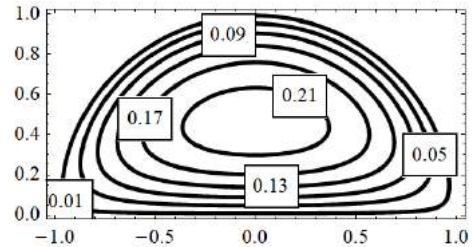


Рисунок 3.108 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{19}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_{19}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{17,18}(\mathbf{x})\| \approx 0,19 \cdot 10^{-1}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці 3.41 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 16, 17, 18$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.41 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 16, 17, 18$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	16
	0	0	0	0	0	0	17
	0	0	0	0	0	0	18
-0,8	0	0,10114	0,16486	0,20237	0,22167	0,22758	16
	0	0,10114	0,16486	0,20237	0,22167	0,22757	17
	0	0,10114	0,16486	0,20237	0,22167	0,22757	18

Продовження таблиці 3.41

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,6	0	0,16486	0,26651	0,32489	0,35422	0,36305	16
	0	0,16486	0,26650	0,32488	0,35421	0,36304	17
	0	0,16486	0,26651	0,32488	0,35421	0,36304	18
-0,4	0	0,20236	0,32488	0,39371	0,42753	0,43756	16
	0	0,20235	0,32487	0,39369	0,42752	0,43755	17
	0	0,20236	0,32487	0,39370	0,42752	0,43755	18
-0,2	0	0,22166	0,35420	0,42752	0,46297	0,47336	16
	0	0,22165	0,35419	0,42751	0,46296	0,47335	17
	0	0,22165	0,35419	0,42751	0,46296	0,47336	18
0	0	0,22755	0,36302	0,43754	0,47335	0,48381	16
	0	0,22754	0,36301	0,43752	0,47334	0,48379	17
	0	0,22755	0,36301	0,43753	0,47335	0,48380	18

На рис. 3.109 та 3.110 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{18}(\mathbf{x})$.

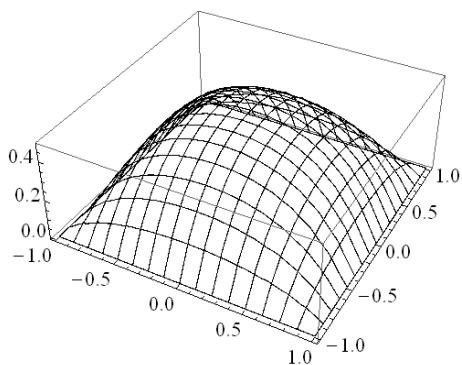


Рисунок 3.109 – Поверхня наближеного розв'язку $u_{18}(\mathbf{x})$

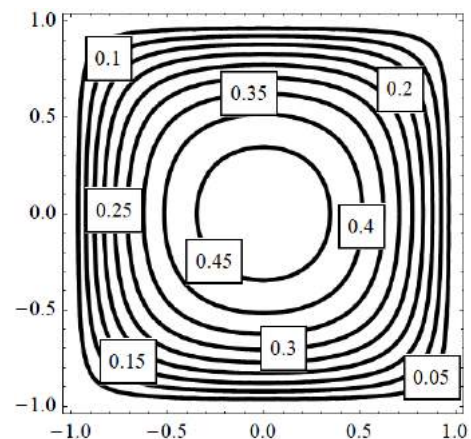


Рисунок 3.110 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_{18}(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\bar{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_{18}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{17,18}(\mathbf{x})\| \approx 0,29 \cdot 10^{-1}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.40 наведено значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 15, 16, 17$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.104 та Б.105 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{17}(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_{17}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})\| \approx 0,12 \cdot 10^{-1}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $p = 0,5$, $\beta = 1$.

В таблиці Б.41 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 15, 16, 17$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.106 та Б.107 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_{17}(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_{17}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})\| \approx 0,45 \cdot 10^{-2}.$$

3.2.9 Обчислювальний експеримент для задачі з рівнянням з правою частиною $f(u) = au^{-q} + bu^p$

Розглянемо результати обчислювального експерименту для задачі (2.105), (2.106) в областях (3.11), (3.14), (3.17), (3.22) та (3.25), застосовуючи метод

двобічних наближень та метод квазіфункцій Гріна.

Двобічні наближення $v_n(\mathbf{x})$ та $w_n(\mathbf{x})$ визначаються формулами (2.116), (2.117).

Покладемо точність $\zeta = 10^{-5}$.

Область А. Для того, щоб умови (2.111) та (2.112) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 2$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.42 наведено значення для наближень $v_{11}(\mathbf{x})$ та $w_{11}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.42 – Значення $v_{11}(\mathbf{x})$ та $w_{11}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{11}	0,75540	0,75540	0,75540	0,75540	0,75540	0,75540
	v_{11}	0,75539	0,75539	0,75539	0,75539	0,75539	0,75539
0,2	w_{11}	0,72150	0,72150	0,72150	0,72151	0,72152	0,72155
	v_{11}	0,72149	0,72149	0,72149	0,72150	0,72151	0,72155
0,4	w_{11}	0,62892	0,62877	0,62837	0,62792	0,62811	0,63069
	v_{11}	0,62891	0,62877	0,62836	0,62792	0,62810	0,63068
0,6	w_{11}	0,47326	0,47292	0,47193	0,47110	0,47149	0,47697
	v_{11}	0,47326	0,47292	0,47193	0,47109	0,47148	0,47697
0,8	w_{11}	0,26045	0,26012	0,25917	0,25814	0,25848	0,26453
	v_{11}	0,26045	0,26012	0,25917	0,25814	0,25848	0,26453
1	w_{11}	0	0	0	0	0	0
	v_{11}	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.111 та 3.112 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{11}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.113 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Б. Для того, щоб умови (2.111) та (2.112) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 2$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

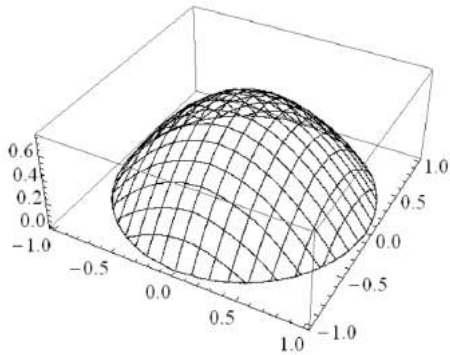


Рисунок 3.111 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{11}(\mathbf{x})$

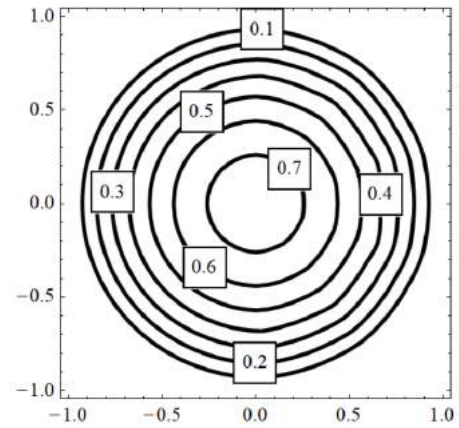


Рисунок 3.112 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{11}(\mathbf{x})$

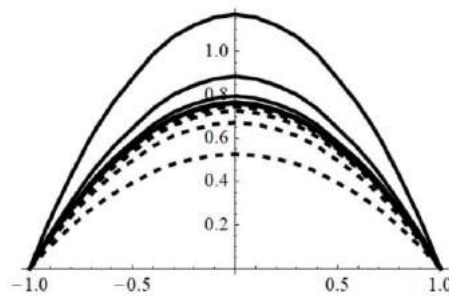


Рисунок 3.113 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

В таблиці 3.43 наведено значення для наближень $v_8(\mathbf{x})$ та $w_8(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.43 – Значення $v_8(\mathbf{x})$ та $w_8(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_8	0	0	0	0	0	0
	v_8	0	0	0	0	0	0
0,2	w_8	0	0,06321	0,11343	0,14873	0,16951	0,17635
	v_8	0	0,06321	0,11343	0,14873	0,16950	0,17635

Продовження таблиці 3.43

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0,4	w_8	0	0,11020	0,18238	0,22705	0,25129	0,25893
	v_8	0	0,11020	0,18238	0,22705	0,25129	0,25893
0,6	w_8	0	0,12434	0,19052	0,22648	0,24480	0,25036
	v_8	0	0,12433	0,19052	0,22647	0,24480	0,25036
0,8	w_8	0	0,09289	0,13028	0,14857	0,15757	0,16023
	v_8	0	0,09288	0,13028	0,14857	0,15757	0,16023
1	w_8	0	0	0	0	0	0
	v_8	0	0	0	0	0	0

На рис. 3.114 та 3.115 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$, а на рис. 3.116 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

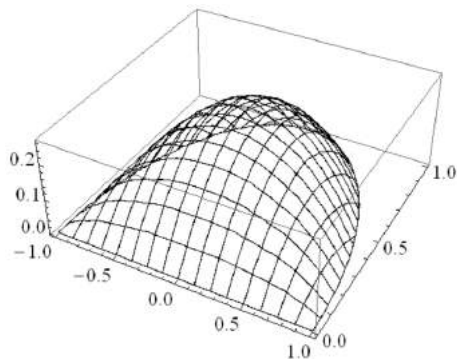


Рисунок 3.114 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$

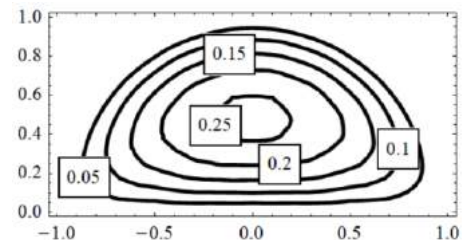


Рисунок 3.115 – Лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$

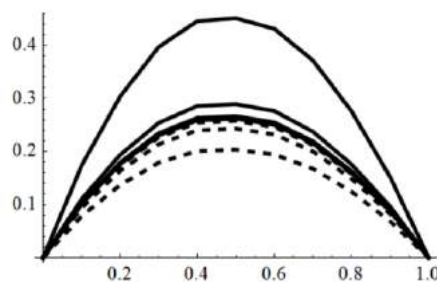


Рисунок 3.116 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

Область В. Для того, щоб умови (2.111) та (2.112) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 1,3$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.44 наведено значення для наближень $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.44 – Значення $v_{12}(\mathbf{x})$ та $w_{12}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_{12}	0	0	0	0	0	0
	v_{12}	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_{12}	0	0,10590	0,16894	0,21163	0,23387	0,24246
	v_{12}	0	0,10590	0,16894	0,21163	0,23386	0,24245
-0,6	w_{12}	0	0,16894	0,28387	0,36180	0,40476	0,41993
	v_{12}	0	0,16894	0,28387	0,36180	0,40476	0,41993
-0,4	w_{12}	0	0,21163	0,36180	0,46571	0,52406	0,54445
	v_{12}	0	0,21163	0,36180	0,46571	0,52405	0,54444
-0,2	w_{12}	0	0,23387	0,40476	0,52406	0,59199	0,61547
	v_{12}	0	0,23386	0,40476	0,52405	0,59198	0,61546
0	w_{12}	0	0,24246	0,41993	0,54445	0,61547	0,64008
	v_{12}	0	0,24245	0,41993	0,54444	0,61546	0,64007

На рис. 3.117 та 3.118 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_{12}(\mathbf{x})$, а на рис. 3.119 наведені графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$.

Область Д. Для того, щоб умови (2.111) та (2.112) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 2$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.42 наведено значення для наближень $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

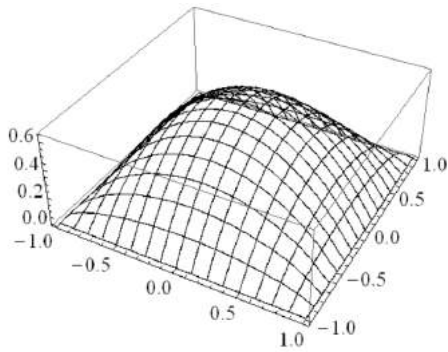


Рисунок 3.117 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_{12}(\mathbf{x})$

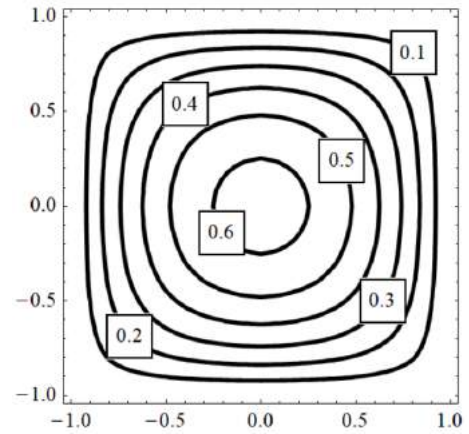


Рисунок 3.118 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_{12}(\mathbf{x})$

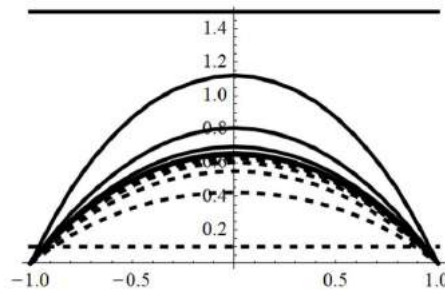


Рисунок 3.119 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

На рис. Б.108 та Б.109 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_7(\mathbf{x})$, а на рис. Б.110 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Область Е. Для того, щоб умови (2.111) та (2.112) виконувалися, обираємо наступні значення параметрів $a = 3$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.43 наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.111 та Б.112 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$, а на рис. Б.113 наведені графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$.

Розглянемо тепер результати застосування методу квазіфункцій Гріна в цих областях.

Оскільки функція Гріна та квазіфункція Гріна у крузі співпадають, то розглядати застосування методу в області А не будемо.

Область Б. Обираємо наступні значення параметрів $a = 2$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.45 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3,4,5$ в точках області Ω_2 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в іншій чверті симетричні).

Таблиця 3.45 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3,4,5$ в точках області Ω_2

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,06474	0,11631	0,15290	0,17448	0,18158	3
	0	0,06475	0,11632	0,15291	0,17449	0,18159	4
	0	0,06475	0,11632	0,15291	0,17449	0,18159	5
0,4	0	0,10764	0,18245	0,22875	0,25311	0,26062	3
	0	0,10765	0,18245	0,22875	0,25312	0,26063	4
	0	0,10765	0,18245	0,22875	0,25312	0,26063	5
0,6	0	0,11792	0,18886	0,22635	0,24355	0,24845	3
	0	0,11792	0,18886	0,22636	0,24355	0,24845	4
	0	0,11792	0,18886	0,22636	0,24355	0,24845	5
0,8	0	0,08563	0,13025	0,15045	0,15884	0,16120	3
	0	0,08563	0,13025	0,15045	0,15884	0,16120	4
	0	0,08563	0,13025	0,15045	0,15884	0,16120	5
1	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5

На рис. 3.120 та 3.121 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$.

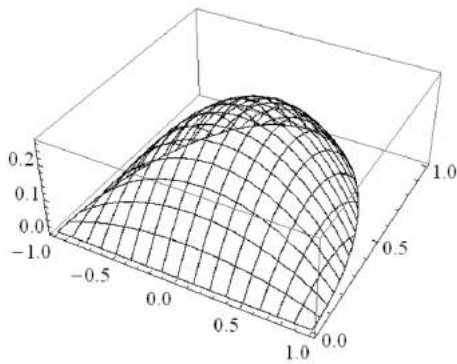


Рисунок 3.120 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

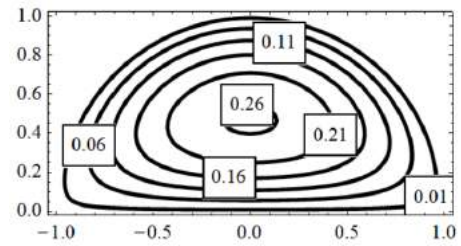


Рисунок 3.121 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_2)$ складає

$$\|u_5(\mathbf{x}) - \tilde{u}_8(\mathbf{x})\| \approx 0,74 \cdot 10^{-2}.$$

Область В. Обираємо наступні значення параметрів $a = 1,3$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці 3.46 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 7, 8, 9$ в точках області Ω_3 з координатами $(-1 + 0,2i, -1 + 0,2j)$, де $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ (значення в інших чвертях симетричні).

Таблиця 3.46 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 7, 8, 9$ в точках області Ω_3

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-1	0	0	0	0	0	0	7
	0	0	0	0	0	0	8
	0	0	0	0	0	0	9
-0,8	0	0,09467	0,16348	0,21004	0,23694	0,24574	7
	0	0,09467	0,16348	0,21004	0,23695	0,24574	8
	0	0,09467	0,16348	0,21004	0,23695	0,24574	9
-0,6	0	0,16350	0,28209	0,36220	0,40843	0,42354	7
	0	0,16351	0,28210	0,36221	0,40844	0,42354	8
	0	0,16351	0,28210	0,36221	0,40844	0,42354	9

Продовження таблиці 3.46

x_1	x_2						n
	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	
-0,4	0	0,21010	0,36225	0,46489	0,52407	0,54339	7
	0	0,21010	0,36225	0,46490	0,52408	0,54340	8
	0	0,21010	0,36225	0,46490	0,52408	0,54340	9
-0,2	0	0,23703	0,40851	0,52411	0,59071	0,61245	7
	0	0,23703	0,40852	0,52412	0,59072	0,61246	8
	0	0,23703	0,40852	0,52412	0,59072	0,61246	9
0	0	0,24583	0,42363	0,54344	0,61246	0,63499	7
	0	0,24584	0,42364	0,54345	0,61247	0,63500	8
	0	0,24584	0,42364	0,54346	0,61248	0,63500	9

На рис. 3.122 та 3.123 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_9(\mathbf{x})$.

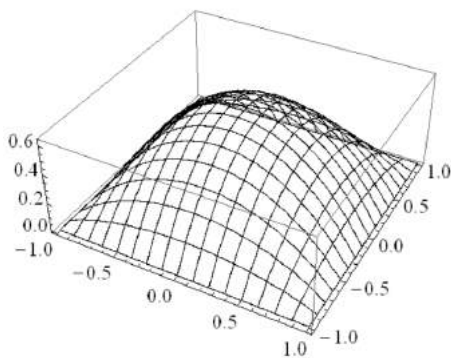


Рисунок 3.122 – Поверхня наближеного розв'язку $u_9(\mathbf{x})$

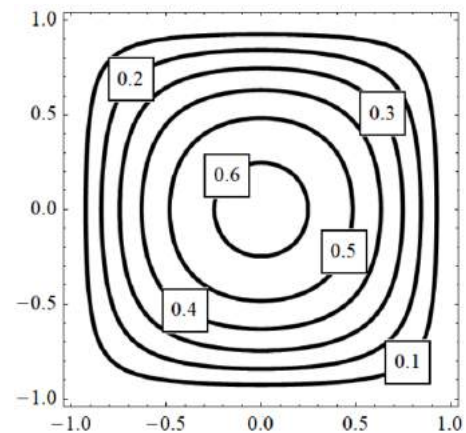


Рисунок 3.123 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_9(\mathbf{x})$

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\bar{\Omega}_3)$ складає

$$\|u_9(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{12}(\mathbf{x})\| \approx 0,11 \cdot 10^{-1}.$$

Область Д. Обираємо наступні значення параметрів $a = 2$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.44 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_5 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$.

На рис. Б.114 та Б.115 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_5)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_7(\mathbf{x})\| \approx 0,70 \cdot 10^{-2}.$$

Область Е. Обираємо наступні значення параметрів $a = 3$, $b = 1,5$, $q = 0,1$, $p = 0,9$, $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 1,5$.

В таблиці Б.45 наведено значення для наближень $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2, 3, 4$ в точках області Ω_6 з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{12}$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

На рис. Б.116 та Б.117 наведені відповідно поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$.

При цьому різниця між результатами, отриманими за допомогою методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, у нормі простору $C(\overline{\Omega}_6)$ складає

$$\|u_4(\mathbf{x}) - \tilde{u}_6(\mathbf{x})\| \approx 0,50 \cdot 10^{-2}.$$

3.3 Висновки по розділу

1. Розроблено чисельний алгоритм для знаходження розв'язків крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь із використанням методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна, до якого входять застосування відомих функцій Гріна для областей, що розглядаються, кубатурних формул Гауса та формул кусково-лінійної інтерполяції.

2. Чисельний алгоритм із використанням методу двобічних наближень вимагає небагато обчислювальних ресурсів.

3. Для кожної з досліджених у розділі 2 крайових задач проведено обчислювальний експеримент із використанням методу двобічних наближень та методу квазіфункцій Гріна у п'яти областях відповідно до розробленого чисельного алгоритму. Також для однієї з задач проведено експеримент із використанням методу квазіфункцій Гріна у області, для якої функція Гріна невідома.

4. Результати подано у вигляді таблиць значень наближених розв'язків, графіків їх поверхонь та ліній рівня, а у разі використання методу квазіфункцій Гріна в аналітичному вигляді.

5. Наближення, отримані різними методами, були порівняні між собою та встановлено узгодження отриманих результатів між собою.

Основні результати розділу опубліковано у роботах [14 – 16, 71 – 78, 94 – 105].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [22, 26, 29, 32, 34, 37, 39, 59, 60, 87, 135, 143].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено конструктивні методи знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знайдено умови, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

1. У роботі виконано аналіз наближених методів розв'язання операторних рівнянь, серед яких найбільший інтерес представляють двобічні обчислювальні методи, що використовують теорію операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах та дозволяють знайти наближений розв'язок із заданою точністю. Встановлено, що у випадку розгляду крайових задач в областях складної геометрії важливу роль відіграє подальший розвиток та застосування методу квазіфункцій Гріна, використовуючи конструктивний апарат теорії R -функцій.

2. Уперше виділено клас крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, які можна подати у вигляді нелінійних операторних рівнянь з монотонним, антитонним чи гетеротонним оператором. Для кожної з розглянутих задач досліджено властивості оператора та можливість побудови конусного відрізка, що гарантують існування двобічних наближень, та отримано умови, які пов'язують параметри, що входять до цих задач, і за яких існує єдиний додатний розв'язок. При цьому зазначено, що побудова конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ дає апіорну оцінку шуканого розв'язку, оскільки маємо $v_0 \leq u^* \leq w_0$, тому немає необхідності порівнювати його з розв'язками, отриманими іншими методами. Отримані двобічні наближення до розв'язку задачі дають зручну апостеріорну оцінку похибки.

3. Для крайових задач з нелінійними еліптичними рівняннями, права частина яких $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda)$ перетворюється на нуль, якщо $u = 0$, удосконалено метод побудови лівого кінця конусного відрізка, використовуючи апарат теорії R -функцій. Це дозволило перетворити немінуче однобічний процес послідовних наближень у двобічний.

4. Для крайових задач з двома та більшою кількістю параметрів набув подальшого розвитку метод їх дослідження шляхом застосування методів нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах для знаходження умов, яким ці параметри мають задовольняти, щоб існував єдиний додатний розв'язок та збігалися до нього двобічні послідовні наближення.

5. При розв'язанні нелінійних крайових задач у областях, для яких аналітичний вираз функції Гріна невідомий або має складний для обчислень вигляд, набув подальшого розвитку метод квазіфункцій Гріна, який дозволяє перейти від вихідної задачі до еквівалентного їй нелінійного операторного рівняння. При цьому для знаходження наближеного розв'язку цього рівняння використовувався метод послідовних наближень та метод Бубнова-Гальоркіна.

6. Для кожної з розглянутих задач проведено ряд обчислювальних експериментів. Водночас зазначено, що алгоритм вимагає небагато обчислювальних ресурсів. Результати подано у вигляді таблиць значень наближених розв'язків, графіків їх поверхонь та ліній рівня, а у разі використання методу квазіфункцій Гріна – в аналітичному вигляді.

7. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки.

8. Отримані результати є теоретичною основою для розв'язання прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ambrosetti A., Brezis H., Cerami G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // *Journal of Functional Analysis*. 1994. Vol. 122. No. 2. P. 519–543.
2. Appelt W. Fehlereinschliessung für die Lösung einer Klasse elliptischer Randwertaufgaben // *Z. Angew. Math. Mech.* 1974. Bd 54. S. 207–208.
3. Artyukh A., Sidorov M. Mathematical Modeling and numerical analysis of nonstationary plane-parallel flows of viscous incompressible fluid by R-functions and Galerkin Method // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes*. 2014. Vol. 3. No. 3. P. 3–11.
4. Aubin T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 398 p.
5. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations integrals // *Fundan. Math.* 1922. Vol. 3. P. 133–181.
6. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. London: Pitman, 1980. 228 p.
7. Baraket S., Ye D. Singular limit solutions for two-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity // *Chinese Annals of Mathematics. Series B*. 2001. Vol. 22. No. 03. P. 287–296.
8. Bounjakowsky W. Sur quelques inégalités concernant les intégrates ordinaires et les intégrates aux différences finies // *Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg. 7 série*. 1859. Vol. 1. No. 9.
9. Bozhkov Y. Noether Symmetries and Critical Exponents // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. 2005. Vol. 1. No. 022. P. 1–12.
10. Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires // *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1914. Vol. 42. P. 113–142.
11. Chandrasekhar S. *An introduction to the study of stellar structure*. New York: Dover Pub., Inc., 2012. 512 p.

12. Gidas B., Ni W., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle // *Comm. Math. Phys.* 1979. Vol. 68. No. 3. P. 209–243.
13. Joseph D., Lundgren T. Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1973. Vol. 49. No. 4. P. 241–269.
14. Kolosova S.V., Lukhanin V.S, Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series.* 2018. Vol. 99. No. 3. P. 78–91.
15. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of one nonlinear elliptic problem // *Информационные системы и технологии: материалы 5-й Международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево, Харьков, 2016. С. 109–110.*
16. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes.* 2016. Vol. 5. No. 4. P. 11–19.
17. Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. Two-sided inequalities with nonmonotone sublinear operators // *Carpathian Mathematical Publications.* 2015. Vol. 7. No. 1. P. 78–82.
18. Krückeberg F. Partial differential equations // *Topics in interval analysis.* Oxford: Clarendon Press, 1969. P. 98–101.
19. Lamtyugova S.N., Sidorov M.V. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes.* 2014. Vol. 3. No. 3. P. 43–50.
20. Liouville J. Sur l'équation aux dérivées partielles $d^2 \log \lambda / du dv \pm \lambda / 2a^2 = 0$ // *J. Math. Pures Appl.* 1853. Vol. 18. P. 71–72.
21. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem // *International Mathematical Forum.* 2008. Vol. 3. No. 17. P. 811–816.
22. Neumaier A. *Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 366 p.

23. Schmidt E. Auflosung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 161–174.
24. Shi J., Yao M. Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity // Electronic Journal of Differential Equations. 2005. Vol. 2005. No. 04. P. 1–11.
25. Strauss W. Partial Differential Equations: An Introduction. Providence: Wiley Global Education, 2007. 464 p.
26. Stroud A.H., Secrest D. Gaussian Quadrature Formulas. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966. 374 p.
27. Ye D., Zhou F. A generalized two dimensional Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2001. Vol. 13. No. 2. P. 141–158.
28. Zhao P., Zhong C., Zhu J. Positive Solutions for a Nonhomogeneous Semilinear Elliptic Problem with Supercritical Exponent // J. Mathematical Analysis and Application. 2001. Vol. 254. P. 335–347.
29. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 384 с.
30. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.
31. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 632 с.
32. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
33. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
34. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.
35. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
36. Бублик Б.Н. Численное решение задач динамики пластин и оболочек. К.: Изд-во Киевского ун-та, 1969. 147 с.

37. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.
38. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 124 с.
39. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк, 2002. 840 с.
40. Волков Е.А. Апостериорная оценка погрешности разностных уравнений Лапласа и Пуассона // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 47–62.
41. Волков Е.А. Об асимптотике апостериорной оценки погрешности разностного решения обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 12. С. 2263–2266.
42. Волков Е.А. Поточечные оценки погрешности разностного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 4. С. 717–726.
43. Волков Е.А. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и некоторых треугольниках // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 74. С. 55–86.
44. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 402 с.
45. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. 2005. Т. 78. № 2. С. 202–211.
46. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестник инженеров техников. 1915. № 19. С. 23–32.
47. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. № 2(86). С. 87–158.
48. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
49. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 2. С. 239–259.

50. Давиденко Д.Ф. К вопросу об оценке погрешности при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 2. С. 267–270.

51. Даугавет И.К., Самокиш Б.А. Об апостериорной оценке погрешности численного решения дифференциального уравнения // Методы вычислений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. №1. С. 52–57.

52. Демидов А.С., Кочуров А.С., Попов А.Ю. К задаче о реконструкции нелинейностей в уравнениях математической физики // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. № 27. С. 74–123.

53. Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 200 с.

54. Емельянов К.В., Ильин А.М. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода // Вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 4. С. 905–910.

55. Зельдович Я.Б. К теории распространения пламени // Журнал физической химии. 1948. Т. 22. № 1. С. 27–48.

56. Иваницкий В.Г. Приближенное решение одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом методом осреднения функциональных поправок // Укр. мат. журн. 1968. Т. 20. № 5. С. 700–705.

57. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник и др. М.: Наука, 1966. 500 с.

58. Калайда А.Ф., Середа В.Ю. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода // Укр. мат. журн. 1968. Т. 20. № 2. С. 257–263.

59. Калиниченко В.И., Коций А.Ф., Ропавка А.И. Численные решения задач теплопроводности. Харьков: Вища школа, 1987. 108 с.

60. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

61. Канторович Л.В. Некоторые замечания о методе Ритца // Тр. Высш. инж.-техн. уч-ща Военно-Морск. Флота. 1941. Вып. 3. С. 3–16.

62. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 709 с.
63. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
64. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
65. Келдыш М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Серия матем. 1942. Т. 6. № 6. С. 309–330.
66. Ковач Ю.И., Ильяшенко Н.Ф. Аналитические двусторонние методы приближенного интегрирования краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Донецк, 1979. 74 с. Деп. в ВИНТИ 03.07.79, № 2625-79.
67. Ковач Ю.И. Модификации двустороннего метода для нелинейных дифференциальных уравнений. Ужгород, 1978. 50 с. Деп. в ВИНТИ 21.11.78, № 3660-78.
68. Ковач Ю.И., Савченко Л.И. О двустороннем интервальном методе решения краевой задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов // Укр. мат. журн. 1969. Т. 21. № 2. С. 252–260.
69. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
70. Колосов А.И. Об одном классе уравнений с вогнутыми операторами, зависящими от параметра // Математические заметки. 1991. Т. 49. № 4. С. 74–80.
71. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума, 10–15 июня 2013 г. Харьков, Херсон, 2013. С. 205–208.
72. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник

Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.

73. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35–42.

74. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції, 17 травня 2013 р. Бухарест, 2013. Ч. I. С. 16–24.

75. Колосова С.В., Луханин В.С. Про додатні розв'язки задачі Ліувілля-Гельфанда // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали 17-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. Київ, 2016. Т. 1. С. 147–149.

76. Колосова С.В., Луханин В.С. Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72.

77. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 362–365.

78. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 185–188.

79. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією // Карпатські математичні публікації. 2012. Т. 4. № 2. С. 268–274.

80. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Двостороння апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації. 2009. Т. 1. № 2. С. 172–179.

81. Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації. 2010. Т. 2. № 2. С. 48–54.

82. Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю. Математическое моделирование МГД равновесия плазмы // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 3–34.

83. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

84. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.

85. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.

86. Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1962. 184 с.

87. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

88. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние неравенства и их приложения. К.: Наук. думка, 1980. 268 с.

89. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. К.: Наук. думка, 1968. 244 с.

90. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962. 96 с.

91. Левитан В.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 671 с.

92. Лозинский С.М. Оценка погрешности приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 2. С. 225–228.

93. Лозинский С.М. О приближенном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. № 1. С. 29–32.

94. Луханін В.С. Додатні розв'язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 4 (71). С. 24–27.

95. Луханін В.С. Застосування методу функцій Гріна та методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // XVI Всеукраїнська (XI Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 11–12 квітня 2013 р. Львів, 2013. С. 94–95.

96. Луханін В.С. Наближені методи розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVI Международного молодежного форума, 17–19 апреля 2012 г. Харьков, 2012. Т. 10. С. 159–160.

97. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для одной линейной задачи // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 26–30 мая 2014 г. Пенза, 2014. С. 46–49.

98. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для эллиптической краевой задачи с экспоненциальной нелинейностью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 20–22 мая 2015 г. Пенза, 2015. С. 16–20.

99. Луханин В.С. О построении последовательных приближений к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // XL Гагаринские чтения: научные труды Международной молодёжной научной конференции, 7–11 апреля 2014 г. Москва, 2014. Т. 5. С. 139–141.

100. Луханін В.С. Про деякі методи побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного молодежного форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. Т. 7. С. 114–115.

101. Луханін В.С. Про деякі підходи до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // XV Всеукраїнська (X Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 5–6 квітня 2012 р. Львів, 2012. С. 232–234.

102. Луханін В.С. Про застосування методу квазіфункцій Гріна до одного нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVII Международного молодежного форума, 22–24 апреля 2013 г. Харьков, 2013. Т. 7. С. 140–141.

103. Луханін В.С. Про метод побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометричної структури // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XIX Международного молодежного форума, 20–22 апреля 2015 г. Харьков, 2015. Т. 7. С. 70–71.

104. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радиоелектроника та інформатика. 2015. № 2 (69). С. 16–18.

105. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з нелінійністю // Радиоелектроника та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного молодіжного форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харьков, 2016. Т. 7. С. 102–103.

106. Лучка А.Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. К.: Изд-во АН УССР, 1963. 127 с.

107. Ляшко И.И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. К.: Изд-во Киевского ун-та, 1963. 175 с.
108. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
109. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 319 с.
110. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
111. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
112. Михлин С.Г. О сходимости метода Галеркина // Докл. АН СССР. 1948. Т. 61. № 2. С. 197–199.
113. Михлин С.Г. О сходимости метода наименьших квадратов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 7. С. 1245–1247.
114. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.
115. Молокович Ю.М. О приближенном решении линейных интегральных уравнений с помощью некоторого варианта метода Ю.Д.Соколова // Уч. зап. Казанского ун-та. 1967. Т. 127. № 1. С. 139–147.
116. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. 235 с.
117. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1984. 270 с.
118. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. 1978. Т. 36. С. 237–273.
119. Положий Г.Н., Чаленко П.И. Решение интегральных уравнений методом полос // Вопросы математической физики и теории функций. 1964. С. 4–17.
120. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. К.: Изд-во Киевского ун-та, 1962. 161 с.

121. Польский Н.И. Проекционные методы в прикладной математике // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 4. С. 787–790.
122. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др. М.: Наука, 1969. 456 с.
123. Ремез Є.Я. Деякі способи чисельної інтеграції дифференціальних рівнянь з оцінкою границь допущеної похибки // Зап. Природничо-Технічного відділу АН УРСР. 1931. №1. С. 1–38.
124. Ремез Е.Я. Некоторые вопросы структуры формул механических квадратур, могущих служить для двусторонней численной оценки решений дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1958. Т. 10. № 4. С. 413–418.
125. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. К.: Техника, 1967. 213 с.
126. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Математическое моделирование теплового самовоспламенения для стационарных условий методом R -функций // Докл. АН Украины. Сер. А. 1992. № 12. С. 24–27.
127. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. К.: Наук. думка, 1974. 260 с.
128. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. К.: Наук. думка, 1979. 196 с.
129. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.
130. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Теория приближений и атомарные функции. М.: Знание, 1978. 64 с.
131. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 221 с.
132. Салихов Н.П. О полярных методах решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 4. С. 515–528.
133. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.

134. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
135. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 416 с.
136. Свирский И.В. Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.
137. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 848 с.
138. Совертков Н.И. Оценка погрешности приближенного решения краевых задач для простейших уравнений математической физики // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1976. Вып. 4. С. 65–81.
139. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. К.: Наукова думка, 1967. 336 с.
140. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 352 с.
141. Тамме Э., Саарнийт И. Об апостериорной оценке погрешности приближенных решений линейных дифференциальных уравнений // Ученые записки: Тр. по математике и механике. Тарту: Тартуский ун-т, 1964. Т. 4. С. 216–230.
142. Тивончук В.И. Об одном варианте метода осреднения функциональных поправок для решения линейных интегральных уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1228–1238.
143. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.
144. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Интеллект, 2008. 408 с.
145. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
146. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 2. К.: Наукова думка, 1966. 244 с.

ДОДАТОК А
АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор
Харківського національного
університету радіоелектроніки



проф. І.В. Рубан

«24» 07 2019 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук Луханіна Володимира Сергійовича «Конструктивні методи розв'язання одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь» у навчальному процесі Харківського національного університету радіоелектроніки

Комісія у складі начальника навчального відділу ХНУРЕ доц. Міхнової А.В., завідувача кафедри прикладної математики професора Тевяшева А.Д., доцента кафедри прикладної математики Сидорова М.В. виконали перевірку та склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Луханіна Володимира Сергійовича впроваджені у навчальний процес на кафедрі прикладної математики.

Комісія визначає, що результати дисертаційної роботи використано:

- у змістовному модулі 2 «Крайові задачі та структури їх розв'язків» дисципліни «Вибрані глави математичної фізики»;
- у змістовному модулі 6 «Еліптичні рівняння» дисципліни «Рівняння математичної фізики»;
- у дипломному проектуванні.

Начальник
навчального відділу



А.В. Міхнова

Завідувач кафедри
прикладної математики



А.Д. Тевяшев

доцент кафедри
прикладної математики



М.В. Сидоров

Згідно з оригіналом.
Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

ДОДАТОК Б
РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

Таблиця Б.1 – Значення $v_8(\mathbf{x})$ та $w_8(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_8	0,31653	0,31653	0,31653	0,31653	0,31653	0,31653
	v_8	0,31652	0,31652	0,31652	0,31652	0,31652	0,31652
0,2	w_8	0,30210	0,30210	0,30210	0,30210	0,30211	0,30213
	v_8	0,30209	0,30209	0,30210	0,30210	0,30211	0,30212
0,4	w_8	0,26278	0,26272	0,26255	0,26237	0,26245	0,26354
	v_8	0,26278	0,26272	0,26255	0,26236	0,26244	0,26354
0,6	w_8	0,19701	0,19686	0,19645	0,19610	0,19627	0,19857
	v_8	0,19701	0,19686	0,19644	0,19610	0,19627	0,19857
0,8	w_8	0,10771	0,10757	0,10718	0,10676	0,10691	0,10937
	v_8	0,10771	0,10757	0,10718	0,10676	0,10691	0,10937
1	w_8	0	0	0	0	0	0
	v_8	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.2 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865
	v_5	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865	0,13865
0,2	w_5	0,13260	0,13260	0,13260	0,13260	0,13260	0,13261
	v_5	0,13260	0,13260	0,13260	0,13260	0,13260	0,13261
0,4	w_5	0,11599	0,11596	0,11589	0,11581	0,11584	0,11631
	v_5	0,11599	0,11596	0,11589	0,11581	0,11584	0,11631
0,6	w_5	0,08775	0,08769	0,08750	0,08735	0,08742	0,08843
	v_5	0,08775	0,08768	0,08750	0,08734	0,08741	0,08843
0,8	w_5	0,04856	0,04849	0,04831	0,04811	0,04818	0,04933
	v_5	0,04856	0,04849	0,04831	0,04811	0,04818	0,04933
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.3 – Значення $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_1

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_3	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548
	v_3	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548	0,02548
0,2	w_3	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440
	v_3	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440	0,02440
0,4	w_3	0,02142	0,02141	0,02140	0,02138	0,02139	0,02147
	v_3	0,02142	0,02141	0,02140	0,02138	0,02139	0,02147
0,6	w_3	0,01630	0,01628	0,01625	0,01622	0,01623	0,01642
	v_3	0,01630	0,01628	0,01625	0,01622	0,01623	0,01642
0,8	w_3	0,00909	0,00908	0,00904	0,00900	0,00901	0,00924
	v_3	0,00909	0,00908	0,00904	0,00900	0,00901	0,00924
1	w_3	0	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.4 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,03864	0,06981	0,09196	0,10510	0,10944
	v_6	0	0,03864	0,06980	0,09196	0,10510	0,10944
0,4	w_6	0	0,06721	0,11261	0,14126	0,15700	0,16199
	v_6	0	0,06721	0,11261	0,14125	0,15699	0,16199
0,6	w_6	0	0,07510	0,11707	0,14055	0,15273	0,15646
	v_6	0	0,07510	0,11707	0,14055	0,15273	0,15646
0,8	w_6	0	0,05493	0,07893	0,09113	0,09726	0,09908
	v_6	0	0,05493	0,07893	0,09113	0,09725	0,09908
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.5 – Значення $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_3	0	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0	0
0,2	w_3	0	0,01199	0,02159	0,02836	0,03235	0,03366
	v_3	0	0,01199	0,02158	0,02835	0,03234	0,03366
0,4	w_3	0	0,02091	0,03477	0,04337	0,04804	0,04951
	v_3	0	0,02091	0,03477	0,04336	0,04803	0,04950
0,6	w_3	0	0,02351	0,03627	0,04324	0,04678	0,04786
	v_3	0	0,02351	0,03627	0,04323	0,04678	0,04785
0,8	w_3	0	0,01738	0,02467	0,02826	0,03002	0,03054
	v_3	0	0,01738	0,02467	0,02825	0,03002	0,03054
1	w_3	0	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.6 – Значення $v_2(\mathbf{x})$ та $w_2(\mathbf{x})$ в точках області Ω_2

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_2	0	0	0	0	0	0
	v_2	0	0	0	0	0	0
0,2	w_2	0	0,00234	0,00420	0,00552	0,00629	0,00654
	v_2	0	0,00234	0,00420	0,00552	0,00629	0,00654
0,4	w_2	0	0,00408	0,00677	0,00842	0,00932	0,00960
	v_2	0	0,00408	0,00677	0,00842	0,00932	0,00960
0,6	w_2	0	0,00460	0,00707	0,00840	0,00908	0,00928
	v_2	0	0,00460	0,00707	0,00840	0,00908	0,00928
0,8	w_2	0	0,00341	0,00482	0,00551	0,00584	0,00594
	v_2	0	0,00341	0,00482	0,00551	0,00584	0,00594
1	w_2	0	0	0	0	0	0
	v_2	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.7 – Значення $v_9(\mathbf{x})$ та $w_9(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_9	0	0	0	0	0	0
	v_9	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_9	0	0,06332	0,10247	0,12893	0,14299	0,14826
	v_9	0	0,06332	0,10246	0,12893	0,14299	0,14826
-0,6	w_9	0	0,10247	0,17340	0,22173	0,24863	0,25806
	v_9	0	0,10246	0,17339	0,22172	0,24862	0,25806
-0,4	w_9	0	0,12893	0,22173	0,28621	0,32275	0,33545
	v_9	0	0,12893	0,22172	0,28620	0,32274	0,33544
-0,2	w_9	0	0,14299	0,24863	0,32275	0,36528	0,37995
	v_9	0	0,14299	0,24862	0,32274	0,36528	0,37994
0	w_9	0	0,14826	0,25806	0,33545	0,37995	0,39533
	v_9	0	0,14826	0,25806	0,33544	0,37994	0,39532

Таблиця Б.8 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_6	0	0,02866	0,04559	0,05675	0,06247	0,06466
	v_6	0	0,02866	0,04559	0,05675	0,06247	0,06466
-0,6	w_6	0	0,04559	0,07601	0,09622	0,10716	0,11102
	v_6	0	0,04559	0,07601	0,09622	0,10716	0,11102
-0,4	w_6	0	0,05675	0,09622	0,12300	0,13779	0,14294
	v_6	0	0,05675	0,09622	0,12300	0,13778	0,14294
-0,2	w_6	0	0,06247	0,10716	0,13779	0,15493	0,16085
	v_6	0	0,06247	0,10716	0,13778	0,15493	0,16085
0	w_6	0	0,06466	0,11102	0,14294	0,16085	0,16704
	v_6	0	0,06466	0,11102	0,14294	0,16085	0,16704

Таблиця Б.9 – Значення $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_3

x_1		x_2					
		-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
-1	w_3	0	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0	0
-0,8	w_3	0	0,00540	0,00850	0,01051	0,01152	0,01191
	v_3	0	0,00540	0,00850	0,01051	0,01152	0,01191
-0,6	w_3	0	0,00850	0,01404	0,01766	0,01959	0,02027
	v_3	0	0,00850	0,01404	0,01766	0,01959	0,02027
-0,4	w_3	0	0,01051	0,01766	0,02245	0,02505	0,02596
	v_3	0	0,01051	0,01766	0,02245	0,02505	0,02595
-0,2	w_3	0	0,01152	0,01959	0,02505	0,02806	0,02910
	v_3	0	0,01152	0,01959	0,02505	0,02806	0,02910
0	w_3	0	0,01191	0,02027	0,02596	0,02910	0,03019
	v_3	0	0,01191	0,02027	0,02595	0,02910	0,03019

Таблиця Б.10 – Значення $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{13}	0	0	0	0	0	0
	v_{13}	0	0	0	0	0	0
0,2	w_{13}	0	0,10446	0,16404	0,16404	0,10446	0
	v_{13}	0	0,10446	0,16404	0,16404	0,10446	0
0,4	w_{13}	0	0,27335	0,41476	0,41476	0,27335	0
	v_{13}	0	0,27334	0,41476	0,41476	0,27334	0
0,6	w_{13}	0	0,35733	0,52517	0,52517	0,35733	0
	v_{13}	0	0,35733	0,52517	0,52517	0,35733	0
0,8	w_{13}	0	0,27300	0,38011	0,38011	0,27300	0
	v_{13}	0	0,27300	0,38011	0,38011	0,27300	0
1	w_{13}	0	0	0	0	0	0
	v_{13}	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.11 – Значення $v_{13}(\mathbf{x})$ та $w_{13}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_{13}	0	0	0	0	0
	v_{13}	0	0	0	0	0
0,2	w_{13}	0	0,06754	0,09366	0,06754	0
	v_{13}	0	0,06754	0,09366	0,06754	0
0,4	w_{13}	0	0,25466	0,34430	0,25466	0
	v_{13}	0	0,25466	0,34430	0,25466	0
0,6	w_{13}	0	0,40221	0,53579	0,40221	0
	v_{13}	0	0,40221	0,53578	0,40221	0
0,8	w_{13}	0	0,34399	0,44327	0,34399	0
	v_{13}	0	0,34399	0,44326	0,34399	0
1	w_{13}	0	0	0	0	0
	v_{13}	0	0	0	0	0

Таблиця Б.12 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12
0,2	0	0,09887	0,15562	0,15558	0,09879	0	10
	0	0,09887	0,15562	0,15558	0,09879	0	11
	0	0,09887	0,15562	0,15558	0,09879	0	12
0,4	0	0,27072	0,41126	0,41109	0,27036	0	10
	0	0,27072	0,41127	0,41109	0,27036	0	11
	0	0,27072	0,41127	0,41110	0,27037	0	12
0,6	0	0,35879	0,52135	0,52125	0,35844	0	10
	0	0,35880	0,52137	0,52127	0,35844	0	11
	0	0,35881	0,52137	0,52127	0,35845	0	12
0,8	0	0,27736	0,38272	0,38305	0,27763	0	10
	0	0,27737	0,38273	0,38306	0,27763	0	11
	0	0,27737	0,38274	0,38306	0,27763	0	12
1	0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	0	12

Таблиця Б.13 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 10, 11, 12$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	12
0,2	0	0,07407	0,10101	0,07411	0	10
	0	0,07407	0,10102	0,07411	0	11
	0	0,07407	0,10102	0,07411	0	12
0,4	0	0,25240	0,34134	0,25258	0	10
	0	0,25242	0,34136	0,25260	0	11
	0	0,25242	0,34137	0,25260	0	12
0,6	0	0,40302	0,53576	0,40317	0	10
	0	0,40306	0,53581	0,40320	0	11
	0	0,40307	0,53583	0,40322	0	12
0,8	0	0,35542	0,45791	0,35519	0	10
	0	0,35544	0,45795	0,35522	0	11
	0	0,35545	0,45797	0,35523	0	12
1	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	11
	0	0	0	0	0	12

Таблиця Б.14 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ	φ					
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,00798	0,01249	0,01249	0,00798
	v_5	0	0,00798	0,01249	0,01249	0,00798
0,4	w_5	0	0,02026	0,03016	0,03016	0,02026
	v_5	0	0,02026	0,03016	0,03016	0,02026
0,6	w_5	0	0,02634	0,03751	0,03751	0,02634
	v_5	0	0,02633	0,03751	0,03751	0,02633
0,8	w_5	0	0,02066	0,02779	0,02779	0,02066
	v_5	0	0,02066	0,02779	0,02779	0,02066
1	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0

Таблиця Б.15 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,00327	0,00454	0,00327	0
	v_5	0	0,00327	0,00454	0,00327	0
0,4	w_5	0	0,01171	0,01565	0,01171	0
	v_5	0	0,01171	0,01565	0,01171	0
0,6	w_5	0	0,01788	0,02335	0,01788	0
	v_5	0	0,01788	0,02334	0,01788	0
0,8	w_5	0	0,01560	0,01962	0,01560	0
	v_5	0	0,01560	0,01962	0,01560	0
1	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0

Таблиця Б.16 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3,4,5$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,00725	0,01136	0,01136	0,00725	0	3
	0	0,00731	0,01147	0,01147	0,00731	0	4
	0	0,00732	0,01148	0,01148	0,00732	0	5
0,4	0	0,01954	0,02936	0,02936	0,01954	0	3
	0	0,01973	0,02964	0,02965	0,01974	0	4
	0	0,01975	0,02966	0,02967	0,01975	0	5
0,6	0	0,02590	0,03674	0,03674	0,02591	0	3
	0	0,02614	0,03710	0,03712	0,02618	0	4
	0	0,02617	0,03712	0,03713	0,02618	0	5
0,8	0	0,02067	0,02742	0,02743	0,02069	0	3
	0	0,02085	0,02766	0,02769	0,02090	0	4
	0	0,02088	0,02771	0,02772	0,02090	0	5
1	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5

Таблиця Б.17 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,00333	0,00452	0,00333	0	2
	0	0,00363	0,00492	0,00362	0	3
	0	0,00370	0,00500	0,00367	0	4
0,4	0	0,01065	0,01427	0,01066	0	2
	0	0,01149	0,01533	0,01144	0	3
	0	0,01167	0,01546	0,01151	0	4
0,6	0	0,01658	0,02167	0,01658	0	2
	0	0,01773	0,02305	0,01768	0	3
	0	0,01793	0,02316	0,01778	0	4
0,8	0	0,01494	0,01879	0,01493	0	2
	0	0,01587	0,01986	0,01593	0	3
	0	0,01601	0,01994	0,01614	0	4
1	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4

Таблиця Б.18 – Значення $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ	φ					
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_3	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0
0,2	w_3	0	0,04803	0,07469	0,07469	0,04803
	v_3	0	0,04803	0,07469	0,07469	0,04803
0,4	w_3	0	0,11863	0,17498	0,17498	0,11863
	v_3	0	0,11863	0,17498	0,17498	0,11863
0,6	w_3	0	0,15364	0,21621	0,21621	0,15364
	v_3	0	0,15364	0,21621	0,21621	0,15364
0,8	w_3	0	0,12233	0,16164	0,16164	0,12233
	v_3	0	0,12233	0,16164	0,16164	0,12233
1	w_3	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0

Таблиця Б.19 – Значення $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_3	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0
0,2	w_3	0	0,03232	0,04462	0,03232	0
	v_3	0	0,03232	0,04462	0,03232	0
0,4	w_3	0	0,10866	0,14434	0,10866	0
	v_3	0	0,10866	0,14434	0,10866	0
0,6	w_3	0	0,16336	0,21172	0,16336	0
	v_3	0	0,16336	0,21172	0,16336	0
0,8	w_3	0	0,14395	0,17905	0,14395	0
	v_3	0	0,14395	0,17905	0,14395	0
1	w_3	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0

Таблиця Б.20 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 1, 2, 3$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
0,2	0	0,04279	0,06699	0,06697	0,04277	0	1
	0	0,04288	0,06711	0,06709	0,04283	0	2
	0	0,04288	0,06711	0,06709	0,04283	0	3
0,4	0	0,11475	0,17137	0,17132	0,11463	0	1
	0	0,11496	0,17165	0,17156	0,11477	0	2
	0	0,11496	0,17165	0,17156	0,11477	0	3
0,6	0	0,15217	0,21325	0,21324	0,15208	0	1
	0	0,15240	0,21354	0,21350	0,15223	0	2
	0	0,15240	0,21355	0,21350	0,15223	0	3
0,8	0	0,12314	0,16035	0,16052	0,12331	0	1
	0	0,12325	0,16052	0,16073	0,12344	0	2
	0	0,12325	0,16052	0,16073	0,12344	0	3
1	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3

Таблиця Б.21 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 1, 2, 3$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
0,2	0	0	0	0	0	1
	0	0,03475	0,04703	0,03468	0	2
	0	0,03475	0,04703	0,03468	0	3
0,4	0	0	0	0	0	1
	0	0,10681	0,14208	0,10652	0	2
	0	0,10687	0,14215	0,10657	0	3
0,6	0	0	0	0	0	1
	0	0,16245	0,21004	0,16212	0	2
	0	0,16257	0,21020	0,16224	0	3
0,8	0	0	0	0	0	1
	0	0,14650	0,18160	0,14662	0	2
	0	0,14661	0,18173	0,14672	0	3
1	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3

Таблиця Б.22 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,02714	0,04246	0,04246	0,02714	0
	v_6	0	0,02714	0,04246	0,04246	0,02714	0
0,4	w_6	0	0,06894	0,10265	0,10265	0,06894	0
	v_6	0	0,06893	0,10265	0,10265	0,06893	0
0,6	w_6	0	0,08961	0,12773	0,12773	0,08961	0
	v_6	0	0,08961	0,12773	0,12773	0,08961	0
0,8	w_6	0	0,07024	0,09456	0,09456	0,07024	0
	v_6	0	0,07024	0,09456	0,09456	0,07024	0
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.23 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_6	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,01111	0,01539	0,01111	0
	v_6	0	0,01110	0,01539	0,01110	0
0,4	w_6	0	0,03974	0,05313	0,03974	0
	v_6	0	0,03974	0,05313	0,03974	0
0,6	w_6	0	0,06070	0,07927	0,06070	0
	v_6	0	0,06070	0,07927	0,06070	0
0,8	w_6	0	0,05294	0,06661	0,05294	0
	v_6	0	0,05294	0,06661	0,05294	0
1	w_6	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0

Таблиця Б.24 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4,5,6$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
0,2	0	0,02488	0,03900	0,03899	0,02485	0	4
	0	0,02489	0,03902	0,03901	0,02487	0	5
	0	0,02489	0,03903	0,03901	0,02487	0	6
0,4	0	0,06710	0,10071	0,10061	0,06692	0	4
	0	0,06713	0,10076	0,10066	0,06695	0	5
	0	0,06714	0,10076	0,10066	0,06696	0	6
0,6	0	0,08902	0,12616	0,12592	0,08859	0	4
	0	0,08907	0,12623	0,12599	0,08863	0	5
	0	0,08908	0,12623	0,12599	0,08864	0	6
0,8	0	0,07128	0,09459	0,09429	0,07072	0	4
	0	0,07131	0,09464	0,09434	0,07076	0	5
	0	0,07131	0,09464	0,09434	0,07076	0	6
1	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6

Таблиця Б.25 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 4, 5, 6$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	6
0,2	0	0,01217	0,01658	0,01225	0	4
	0	0,01222	0,01665	0,01230	0	5
	0	0,01223	0,01666	0,01230	0	6
0,4	0	0,03870	0,05209	0,03901	0	4
	0	0,03886	0,05230	0,03917	0	5
	0	0,03887	0,05232	0,03918	0	6
0,6	0	0,05992	0,07873	0,06020	0	4
	0	0,06016	0,07904	0,06044	0	5
	0	0,06019	0,07907	0,06046	0	6
0,8	0	0,05378	0,06779	0,05345	0	4
	0	0,05399	0,06806	0,05367	0	5
	0	0,05401	0,06808	0,05369	0	6
1	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	6

Таблиця Б.26 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	
0	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,05016	0,07827	0,07827	0,05016	0
	v_6	0	0,05016	0,07826	0,07826	0,05016	0
0,4	w_6	0	0,12636	0,18813	0,18813	0,12636	0
	v_6	0	0,12635	0,18813	0,18813	0,12635	0
0,6	w_6	0	0,16420	0,23429	0,23429	0,16420	0
	v_6	0	0,16420	0,23429	0,23429	0,16420	0
0,8	w_6	0	0,12898	0,17332	0,17332	0,12898	0
	v_6	0	0,12897	0,17332	0,17332	0,12897	0
1	w_6	0	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.27 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,02136	0,02952	0,02136	0
	v_5	0	0,02136	0,02952	0,02136	0
0,4	w_5	0	0,07351	0,09800	0,07351	0
	v_5	0	0,07351	0,09800	0,07351	0
0,6	w_5	0	0,11157	0,14538	0,11157	0
	v_5	0	0,11157	0,14537	0,11157	0
0,8	w_5	0	0,09774	0,12241	0,09774	0
	v_5	0	0,09774	0,12241	0,09774	0
1	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0

Таблиця Б.28 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 5,6,7$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	7
0,2	0	0,04554	0,07141	0,07139	0,04550	0	5
	0	0,04553	0,07140	0,07138	0,04549	0	6
	0	0,04553	0,07140	0,07137	0,04548	0	7
0,4	0	0,12307	0,18487	0,18479	0,12291	0	5
	0	0,12306	0,18484	0,18475	0,12288	0	6
	0	0,12305	0,18483	0,18474	0,12287	0	7
0,6	0	0,16332	0,23168	0,23165	0,16318	0	5
	0	0,16332	0,23166	0,23161	0,16314	0	6
	0	0,16331	0,23165	0,23160	0,16313	0	7
0,8	0	0,13024	0,17278	0,17297	0,13043	0	5
	0	0,13025	0,17277	0,17294	0,13040	0	6
	0	0,13025	0,17277	0,17294	0,13039	0	7
1	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	7

Таблиця Б.29 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,02313	0,03131	0,02305	0	3
	0	0,02320	0,03140	0,02312	0	4
	0	0,02321	0,03141	0,02313	0	5
0,4	0	0,07226	0,09612	0,07194	0	3
	0	0,07259	0,09658	0,07226	0	4
	0	0,07262	0,09661	0,07229	0	5
0,6	0	0,11081	0,14337	0,11056	0	3
	0	0,11143	0,14419	0,11117	0	4
	0	0,11147	0,14426	0,11121	0	5
0,8	0	0,09961	0,12360	0,10004	0	3
	0	0,10013	0,12429	0,10059	0	4
	0	0,10017	0,12434	0,10062	0	5
1	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5

Таблиця Б.30 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	
0	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,00966	0,01543	0,01543	0,00966	0
	v_5	0	0,00966	0,01543	0,01543	0,00966	0
0,4	w_5	0	0,03586	0,05434	0,05434	0,03586	0
	v_5	0	0,03586	0,05434	0,05434	0,03586	0
0,6	w_5	0	0,06460	0,09128	0,09128	0,06460	0
	v_5	0	0,06460	0,09127	0,09127	0,06460	0
0,8	w_5	0	0,06753	0,08742	0,08742	0,06753	0
	v_5	0	0,06753	0,08742	0,08742	0,06753	0
1	w_5	0	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.31 – Значення $v_5(\mathbf{x})$ та $w_5(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0
0,2	w_5	0	0,00492	0,00690	0,00492	0
	v_5	0	0,00492	0,00690	0,00492	0
0,4	w_5	0	0,03154	0,04282	0,03154	0
	v_5	0	0,03154	0,04281	0,03154	0
0,6	w_5	0	0,07194	0,09416	0,07194	0
	v_5	0	0,07194	0,09416	0,07194	0
0,8	w_5	0	0,08571	0,10556	0,08571	0
	v_5	0	0,08570	0,10555	0,08570	0
1	w_5	0	0	0	0	0
	v_5	0	0	0	0	0

Таблиця Б.32 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3,4,5$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,00992	0,01579	0,01578	0,00989	0	3
	0	0,00992	0,01580	0,01578	0,00990	0	4
	0	0,00992	0,01580	0,01578	0,00990	0	5
0,4	0	0,03571	0,05433	0,05428	0,03560	0	3
	0	0,03572	0,05434	0,05429	0,03560	0	4
	0	0,03572	0,05435	0,05429	0,03560	0	5
0,6	0	0,06411	0,09067	0,09064	0,06399	0	3
	0	0,06412	0,09069	0,09066	0,06401	0	4
	0	0,06412	0,09069	0,09066	0,06401	0	5
0,8	0	0,06820	0,08734	0,08744	0,06829	0	3
	0	0,06821	0,08736	0,08747	0,06830	0	4
	0	0,06821	0,08736	0,08747	0,06830	0	5
1	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5

Таблиця Б.33 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3, 4, 5$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,00502	0,00692	0,00503	0	3
	0	0,00503	0,00693	0,00503	0	4
	0	0,00503	0,00693	0,00504	0	5
0,4	0	0,03113	0,04164	0,03118	0	3
	0	0,03127	0,04183	0,03129	0	4
	0	0,03128	0,04184	0,03130	0	5
0,6	0	0,07238	0,09323	0,07241	0	3
	0	0,07274	0,09372	0,07274	0	4
	0	0,07277	0,09375	0,07276	0	5
0,8	0	0,08718	0,10705	0,08708	0	3
	0	0,08757	0,10762	0,08749	0	4
	0	0,08761	0,10766	0,08753	0	5
1	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	5

Таблиця Б.34 – Значення $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					$\frac{\pi}{2}$
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	
0	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0
0,2	w_4	0	0,04945	0,07698	0,07698	0,04945	0
	v_4	0	0,04945	0,07698	0,07698	0,04945	0
0,4	w_4	0	0,12286	0,18172	0,18172	0,12286	0
	v_4	0	0,12286	0,18172	0,18172	0,12286	0
0,6	w_4	0	0,15929	0,22504	0,22504	0,15929	0
	v_4	0	0,15929	0,22503	0,22503	0,15929	0
0,8	w_4	0	0,12632	0,16774	0,16774	0,12632	0
	v_4	0	0,12632	0,16773	0,16773	0,12632	0
1	w_4	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.35 – Значення $v_4(\mathbf{x})$ та $w_4(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_4	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0
0,2	w_4	0	0,02185	0,03017	0,02185	0
	v_4	0	0,02185	0,03017	0,02185	0
0,4	w_4	0	0,07400	0,09841	0,07400	0
	v_4	0	0,07400	0,09841	0,07400	0
0,6	w_4	0	0,11157	0,14484	0,11157	0
	v_4	0	0,11157	0,14484	0,11157	0
0,8	w_4	0	0,09814	0,12233	0,09814	0
	v_4	0	0,09814	0,12232	0,09814	0
1	w_4	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0

Таблиця Б.36 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 3,4,5$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
0,2	0	0,04408	0,06906	0,06903	0,04404	0	3
	0	0,04408	0,06906	0,06903	0,04404	0	4
	0	0,04408	0,06906	0,06903	0,04404	0	5
0,4	0	0,11877	0,17778	0,17768	0,11856	0	3
	0	0,11877	0,17779	0,17769	0,11857	0	4
	0	0,11877	0,17779	0,17769	0,11857	0	5
0,6	0	0,15781	0,22220	0,22213	0,15758	0	3
	0	0,15782	0,22222	0,22214	0,15759	0	4
	0	0,15782	0,22222	0,22214	0,15759	0	5
0,8	0	0,12713	0,16664	0,16680	0,12723	0	3
	0	0,12713	0,16665	0,16680	0,12723	0	4
	0	0,12713	0,16665	0,16680	0,12723	0	5
1	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5

Таблиця Б.37 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,02316	0,03135	0,02312	0	2
	0	0,02358	0,03192	0,02352	0	3
	0	0,02360	0,03193	0,02353	0	4
0,4	0	0,07121	0,09472	0,07101	0	2
	0	0,07288	0,09691	0,07261	0	3
	0	0,07292	0,09697	0,07264	0	4
0,6	0	0,10830	0,14002	0,10808	0	2
	0	0,11112	0,14367	0,11086	0	3
	0	0,11120	0,14376	0,11093	0	4
0,8	0	0,09767	0,12107	0,09774	0	2
	0	0,10007	0,12410	0,10031	0	3
	0	0,10014	0,12417	0,10039	0	4
1	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4

Таблиця Б.38 – Значення $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_{16}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0
0,2	w_{16}	0	0,04430	0,06642	0,06642	0,04430	0
	w_{17}	0	0,04430	0,06642	0,06642	0,04430	0
0,4	w_{16}	0	0,09500	0,13393	0,13393	0,09500	0
	w_{17}	0	0,09499	0,13393	0,13393	0,09499	0
0,6	w_{16}	0	0,12058	0,16060	0,16060	0,12058	0
	w_{17}	0	0,12058	0,16060	0,16060	0,12058	0
0,8	w_{16}	0	0,10265	0,12567	0,12567	0,10265	0
	w_{17}	0	0,10264	0,12566	0,12566	0,10264	0
1	w_{16}	0	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.39 – Значення $w_{16}(\mathbf{x})$ та $w_{17}(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_{16}	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0
0,2	w_{16}	0	0,02698	0,03634	0,02698	0
	w_{17}	0	0,02698	0,03634	0,02698	0
0,4	w_{16}	0	0,06884	0,08853	0,06884	0
	w_{17}	0	0,06883	0,08852	0,06883	0
0,6	w_{16}	0	0,09669	0,12108	0,09669	0
	w_{17}	0	0,09668	0,12107	0,09668	0
0,8	w_{16}	0	0,08932	0,10574	0,08932	0
	w_{17}	0	0,08931	0,10574	0,08931	0
1	w_{16}	0	0	0	0	0
	w_{17}	0	0	0	0	0

Таблиця Б.40 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 15,16,17$ в точках області Ω_5

ρ	φ						n
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	0	0	0	16
	0	0	0	0	0	0	17
0,2	0	0,03516	0,05458	0,05457	0,03515	0	15
	0	0,03517	0,05458	0,05458	0,03515	0	16
	0	0,03517	0,05458	0,05457	0,03515	0	17
0,4	0	0,09049	0,13151	0,13148	0,09042	0	15
	0	0,09050	0,13152	0,13149	0,09043	0	16
	0	0,09049	0,13152	0,13148	0,09042	0	17
0,6	0	0,11881	0,15730	0,15727	0,11872	0	15
	0	0,11882	0,15731	0,15728	0,11874	0	16
	0	0,11881	0,15730	0,15727	0,11873	0	17
0,8	0	0,10204	0,12302	0,12306	0,10205	0	15
	0	0,10205	0,12304	0,12307	0,10206	0	16
	0	0,10204	0,12303	0,12307	0,10206	0	17
1	0	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	0	0	0	16
	0	0	0	0	0	0	17

Таблиця Б.41 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 15, 16, 17$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	0	0	16
	0	0	0	0	0	17
0,2	0	0,02488	0,03346	0,02487	0	15
	0	0,02487	0,03345	0,02486	0	16
	0	0,02487	0,03345	0,02487	0	17
0,4	0	0,06750	0,08795	0,06746	0	15
	0	0,06748	0,08793	0,06744	0	16
	0	0,06749	0,08794	0,06745	0	17
0,6	0	0,09600	0,11876	0,09597	0	15
	0	0,09598	0,11873	0,09595	0	16
	0	0,09599	0,11874	0,09596	0	17
0,8	0	0,09014	0,10468	0,09018	0	15
	0	0,09012	0,10465	0,09016	0	16
	0	0,09013	0,10466	0,09017	0	17
1	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	0	0	16
	0	0	0	0	0	17

Таблиця Б.42 – Значення $v_7(\mathbf{x})$ та $w_7(\mathbf{x})$ в точках області Ω_5

ρ		φ					
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	w_7	0	0	0	0	0	0
	v_7	0	0	0	0	0	0
0,2	w_7	0	0,03334	0,05162	0,05162	0,03334	0
	v_7	0	0,03334	0,05162	0,05162	0,03334	0
0,4	w_7	0	0,08101	0,11902	0,11902	0,08101	0
	v_7	0	0,08101	0,11901	0,11901	0,08101	0
0,6	w_7	0	0,10474	0,14673	0,14673	0,10474	0
	v_7	0	0,10474	0,14673	0,14673	0,10474	0
0,8	w_7	0	0,08399	0,11009	0,11009	0,08399	0
	v_7	0	0,08399	0,11008	0,11008	0,08399	0
1	w_7	0	0	0	0	0	0
	v_7	0	0	0	0	0	0

Таблиця Б.43 – Значення $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області Ω_6

ρ		φ				
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	w_6	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0
0,2	w_6	0	0,02277	0,03132	0,02277	0
	v_6	0	0,02277	0,03132	0,02277	0
0,4	w_6	0	0,07310	0,09668	0,07310	0
	v_6	0	0,07309	0,09668	0,07309	0
0,6	w_6	0	0,10883	0,14046	0,10883	0
	v_6	0	0,10883	0,14046	0,10883	0
0,8	w_6	0	0,09654	0,11925	0,09654	0
	v_6	0	0,09654	0,11925	0,09654	0
1	w_6	0	0	0	0	0
	v_6	0	0	0	0	0

Таблиця Б.44 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_5

ρ		φ					n
		0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	
0	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,02933	0,04587	0,04586	0,02931	0	2
	0	0,02932	0,04585	0,04584	0,02929	0	3
	0	0,02932	0,04586	0,04584	0,02929	0	4
0,4	0	0,07834	0,11669	0,11664	0,07824	0	2
	0	0,07831	0,11666	0,11661	0,07821	0	3
	0	0,07831	0,11666	0,11661	0,07821	0	4
0,6	0	0,10379	0,14470	0,14469	0,10371	0	2
	0	0,10375	0,14466	0,14465	0,10367	0	3
	0	0,10375	0,14466	0,14465	0,10367	0	4
0,8	0	0,08446	0,10920	0,10934	0,08460	0	2
	0	0,08441	0,10917	0,10930	0,08455	0	3
	0	0,08442	0,10917	0,10930	0,08456	0	4
1	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	4

Таблиця Б.45 – Значення $u_n(\mathbf{x})$ при $n = 2,3,4$ в точках області Ω_6

ρ	φ					n
	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4
0,2	0	0,02296	0,03108	0,02292	0	2
	0	0,02366	0,03204	0,02369	0	3
	0	0,02364	0,03201	0,02366	0	4
0,4	0	0,07060	0,09390	0,07040	0	2
	0	0,07159	0,09522	0,07171	0	3
	0	0,07155	0,09514	0,07164	0	4
0,6	0	0,10737	0,13882	0,10715	0	2
	0	0,10814	0,13939	0,10821	0	3
	0	0,10809	0,13930	0,10813	0	4
0,8	0	0,09683	0,12002	0,09690	0	2
	0	0,09818	0,12076	0,09797	0	3
	0	0,09811	0,12067	0,09794	0	4
1	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	4

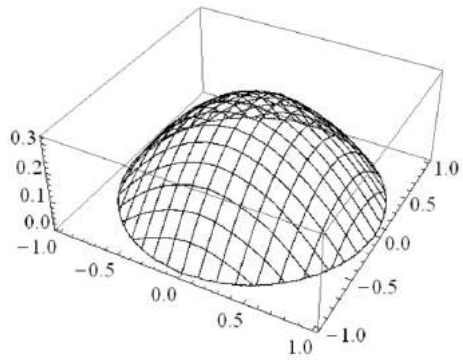


Рисунок Б.1 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$

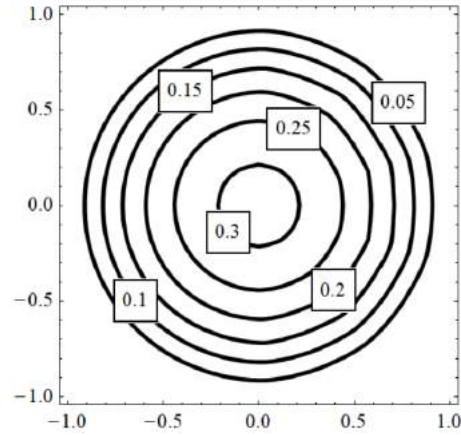


Рисунок Б.2 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_8(\mathbf{x})$

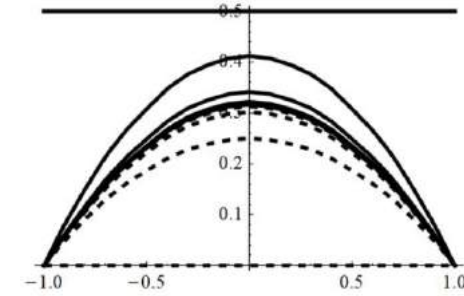


Рисунок Б.3 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

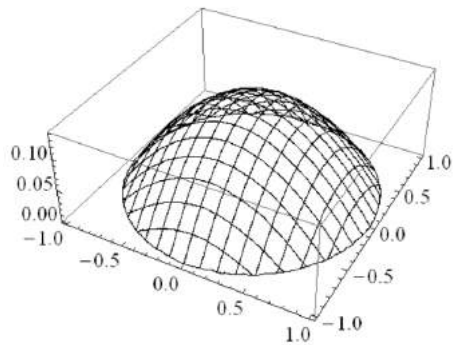


Рисунок Б.4 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

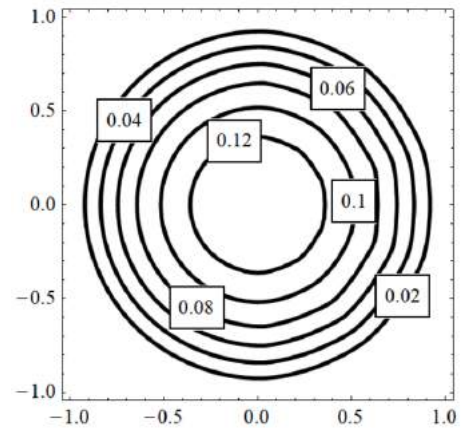


Рисунок Б.5 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

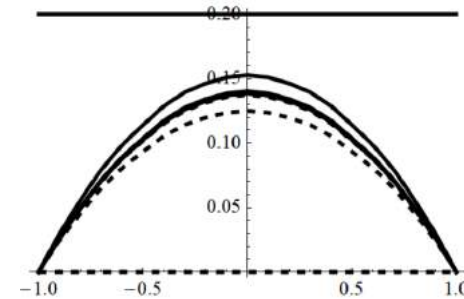


Рисунок Б.6 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

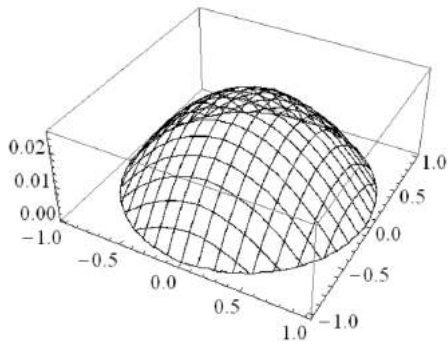


Рисунок Б.7 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$

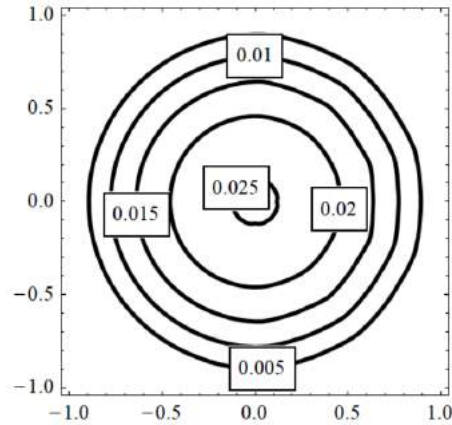


Рисунок Б.8 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$

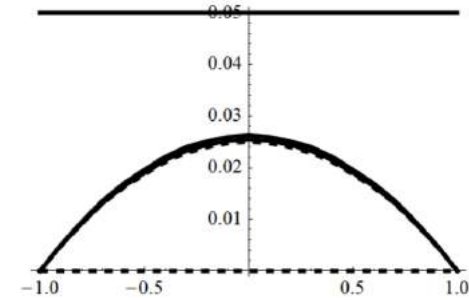


Рисунок Б.9 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$

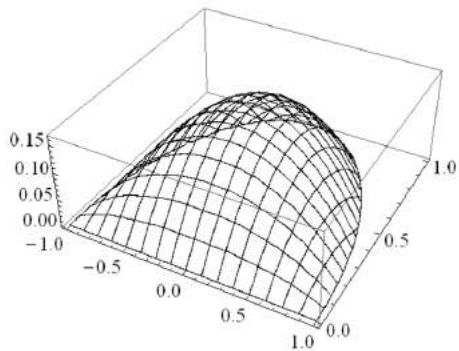


Рисунок Б.10 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$

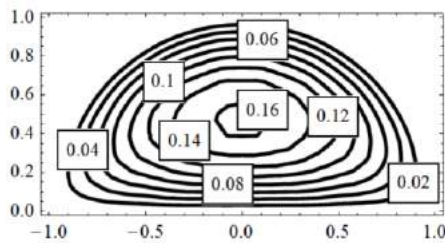


Рисунок Б.11 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$

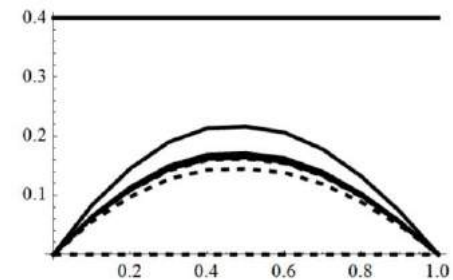


Рисунок Б.12 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

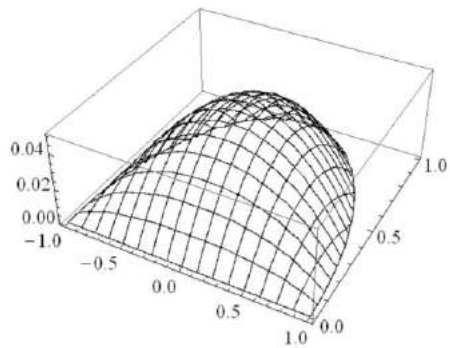


Рисунок Б.13 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$

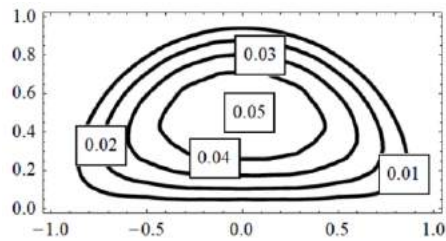


Рисунок Б.14 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$

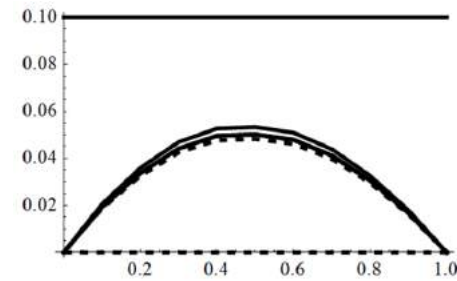


Рисунок Б.15 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$

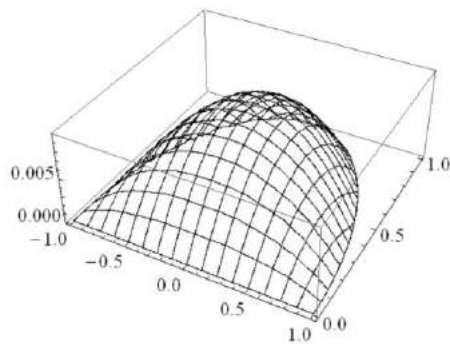


Рисунок Б.16 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_2(\mathbf{x})$

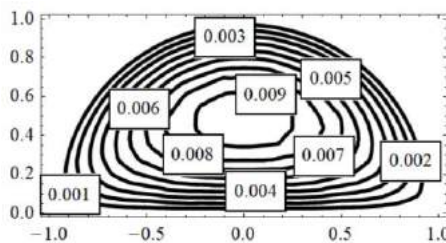


Рисунок Б.17 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_2(\mathbf{x})$

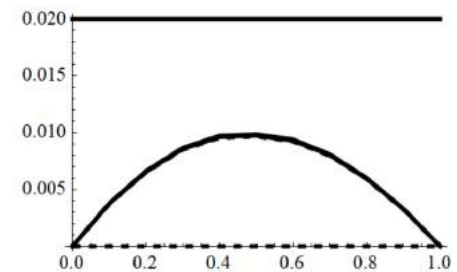


Рисунок Б.18 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,2}$

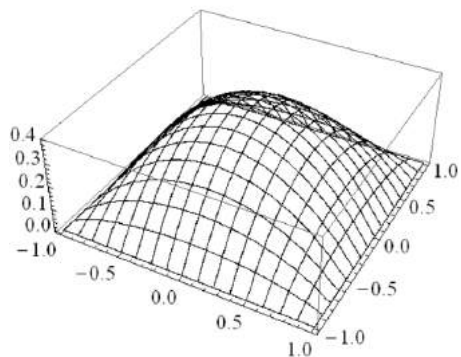


Рисунок Б.19 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_5(\mathbf{x})$

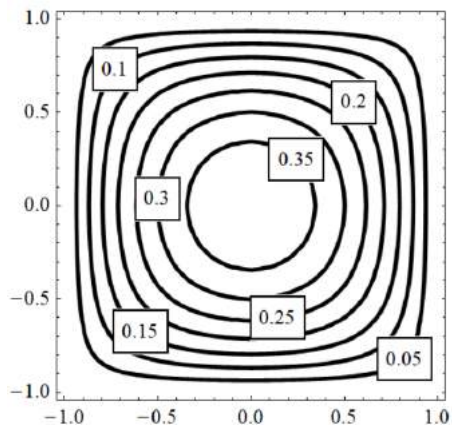


Рисунок Б.20 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_5(\mathbf{x})$

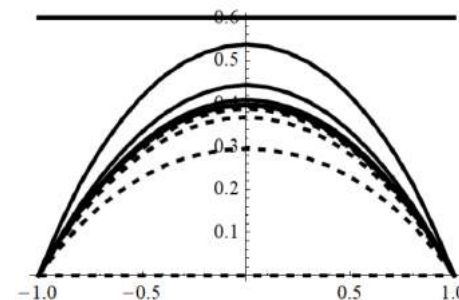


Рисунок Б.21 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

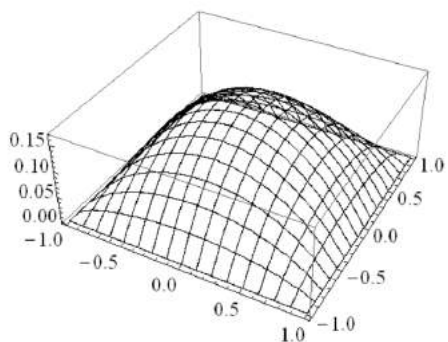


Рисунок Б.22 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$

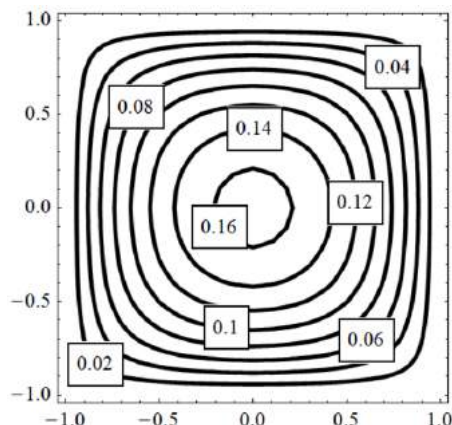


Рисунок Б.23 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_6(\mathbf{x})$

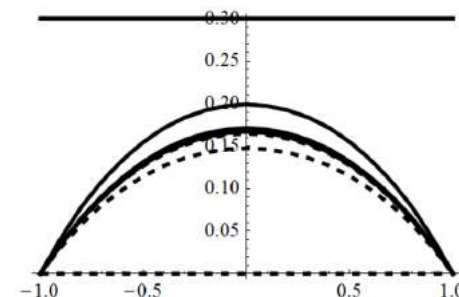


Рисунок Б.24 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

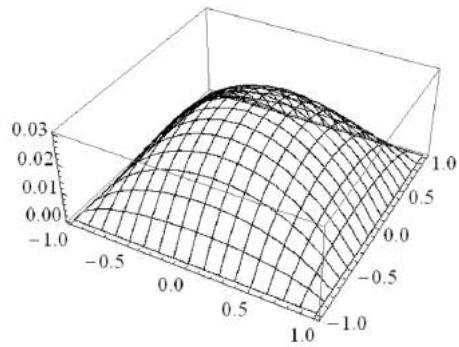


Рисунок Б.25 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$

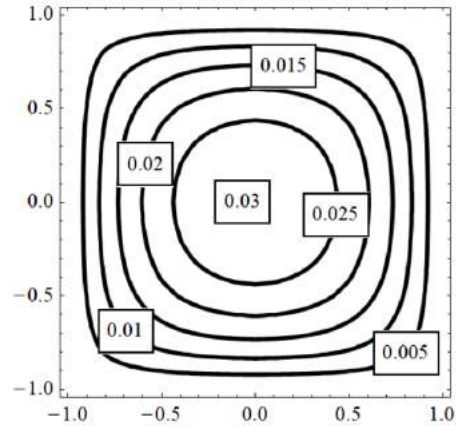


Рисунок Б.26 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$

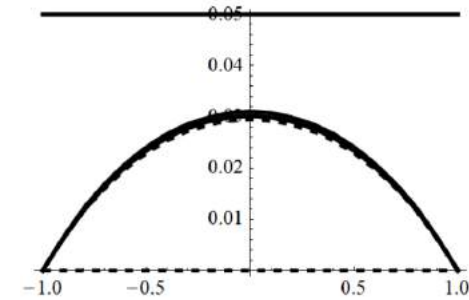


Рисунок Б.27 – Графіки $w_n(0, x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0, x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,3}$

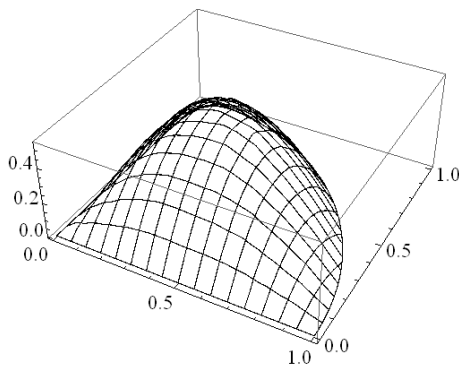


Рисунок Б.28 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$

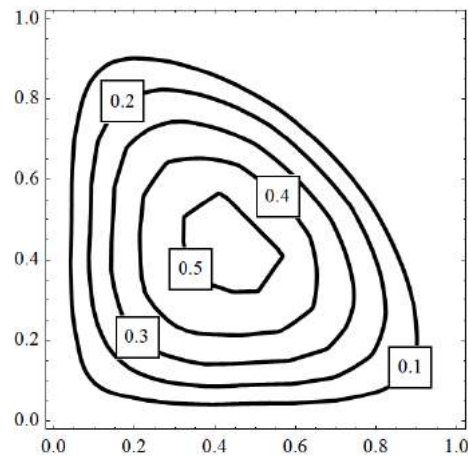


Рисунок Б.29 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$

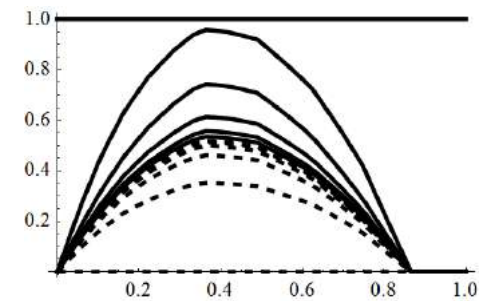


Рисунок Б.30 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

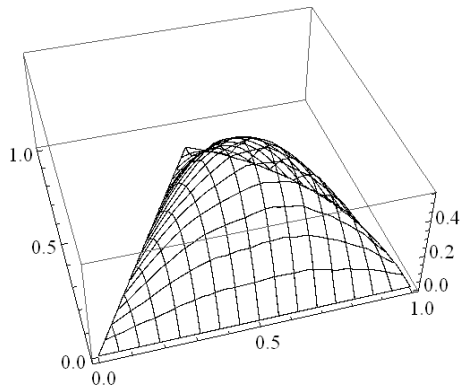


Рисунок Б.31 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$

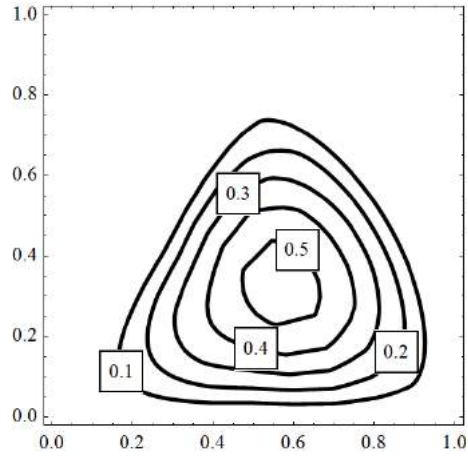


Рисунок Б.32 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{13}(\mathbf{x})$

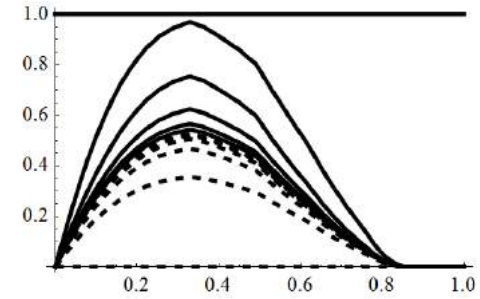


Рисунок Б.33 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{0,5}$

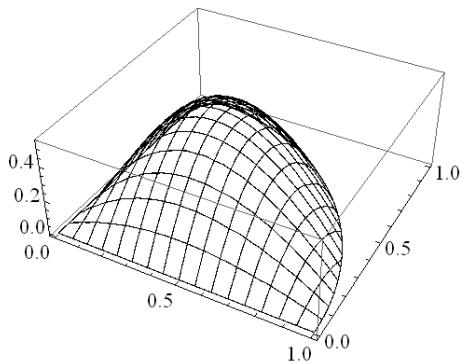


Рисунок Б.34 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

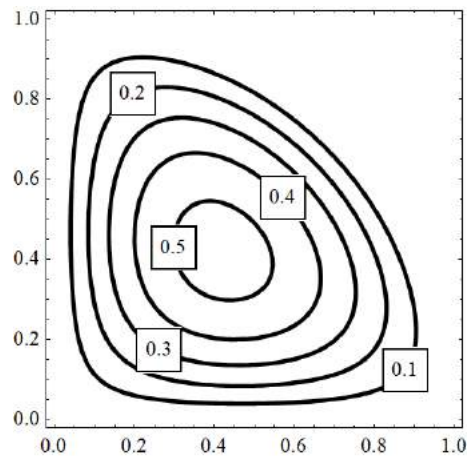


Рисунок Б.35 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

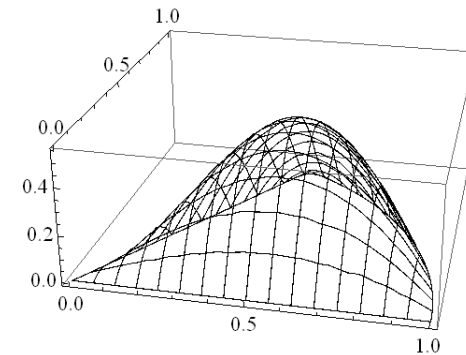


Рисунок Б.36 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

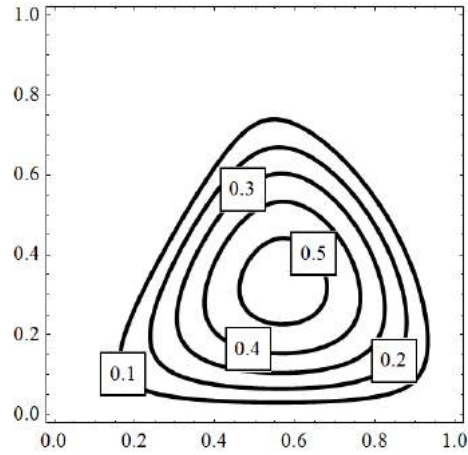


Рисунок Б.37 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{12}(\mathbf{x})$

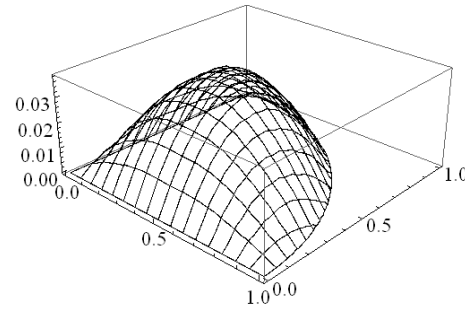


Рисунок Б.38 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

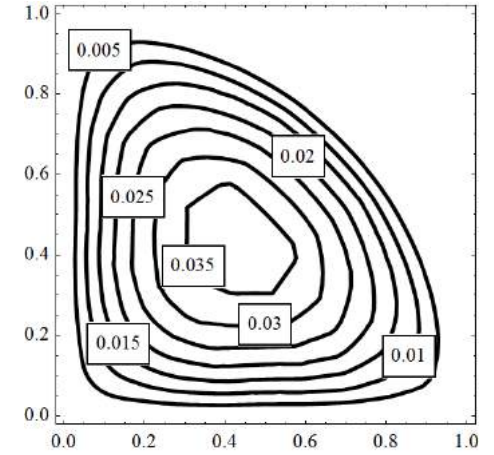


Рисунок Б.39 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

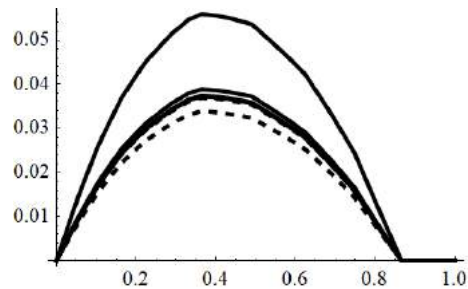


Рисунок Б.40 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

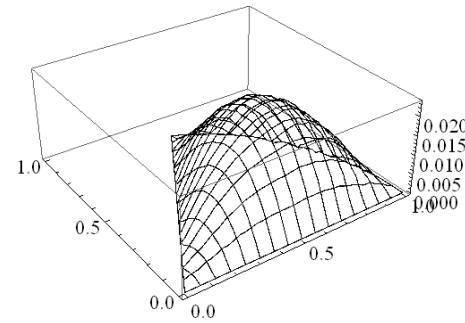


Рисунок Б.41 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

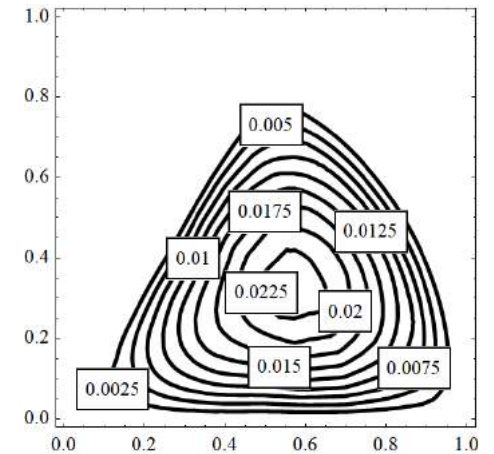


Рисунок Б.42 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

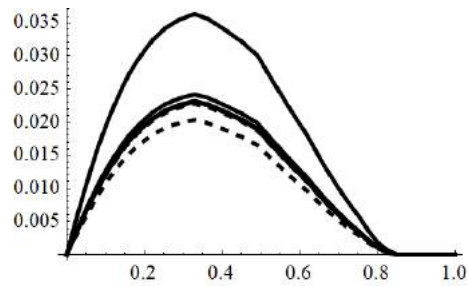


Рисунок Б.43 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

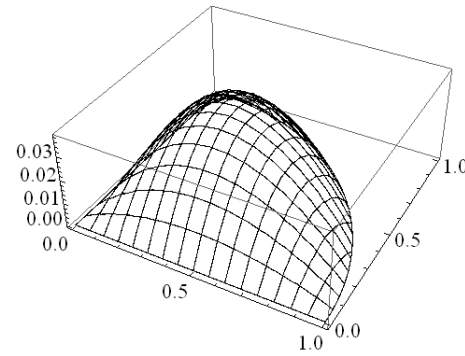


Рисунок Б.44 – Поверхня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

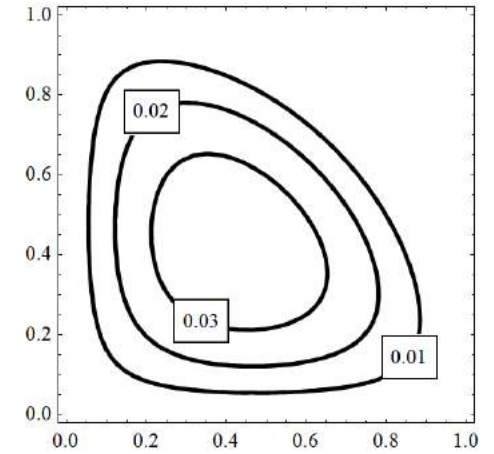


Рисунок Б.45 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

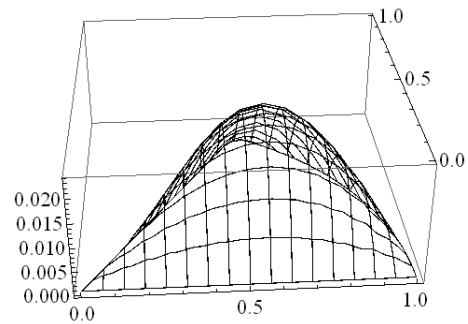


Рисунок Б.46 – Поверхня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

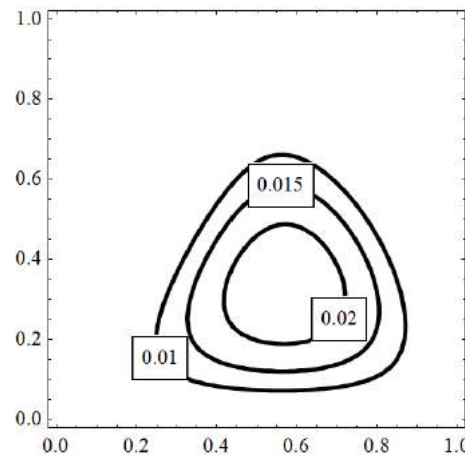


Рисунок Б.47 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

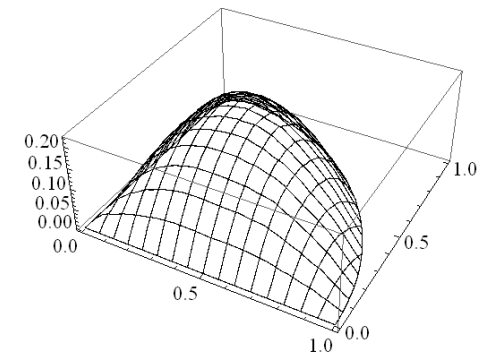


Рисунок Б.48 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{y}_3(\mathbf{x})$

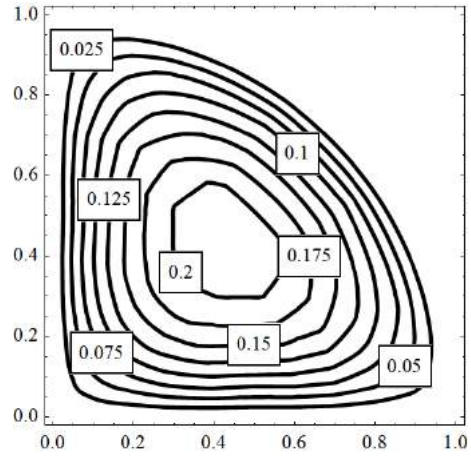


Рисунок Б.49 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$

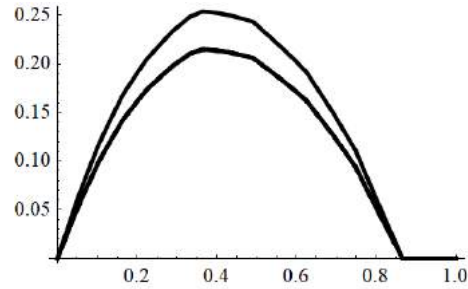


Рисунок Б.50 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,3}$

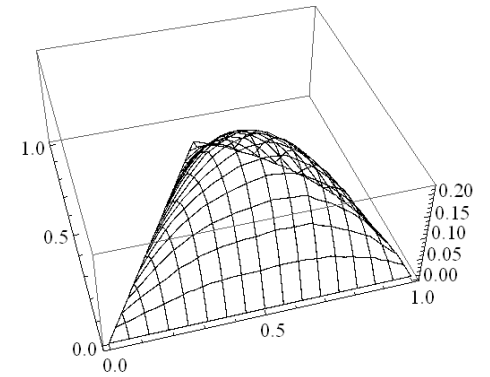


Рисунок Б.51 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$

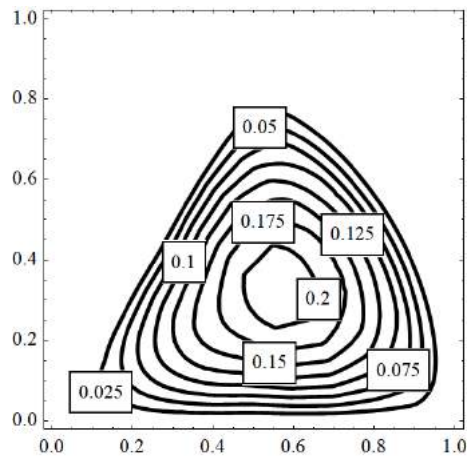


Рисунок Б.52 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_3(\mathbf{x})$

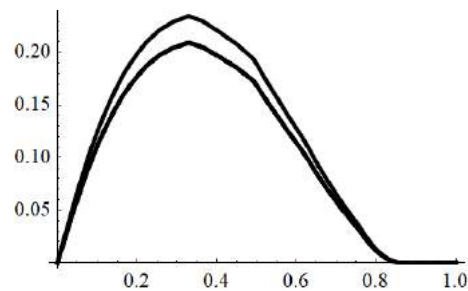


Рисунок Б.53 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,3}$

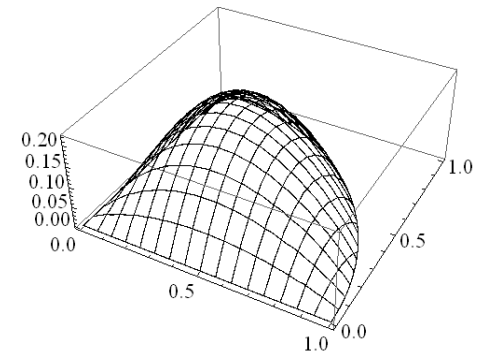


Рисунок Б.54 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$

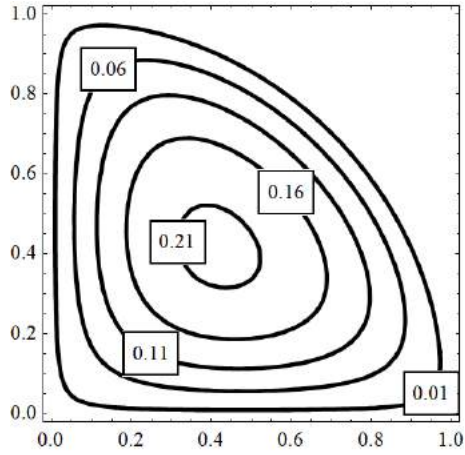


Рисунок Б.55 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$

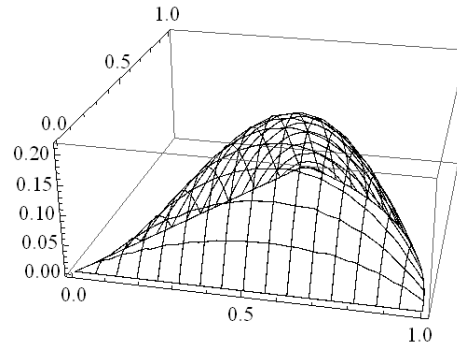


Рисунок Б.56 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$

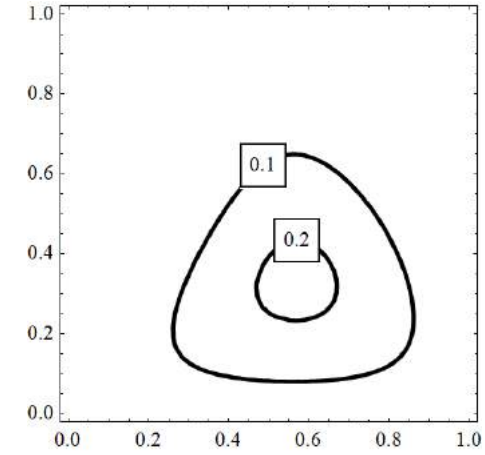


Рисунок Б.57 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_3(\mathbf{x})$

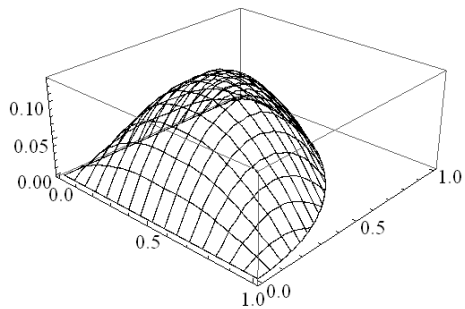


Рисунок Б.58 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

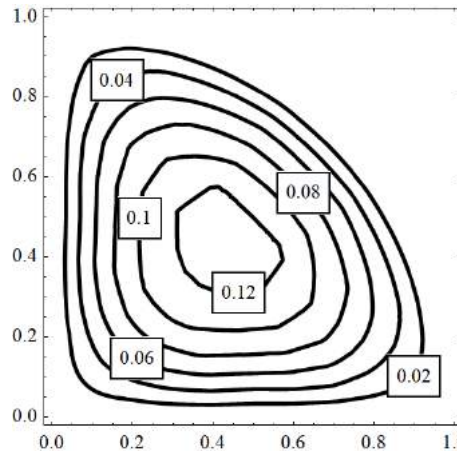


Рисунок Б.59 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

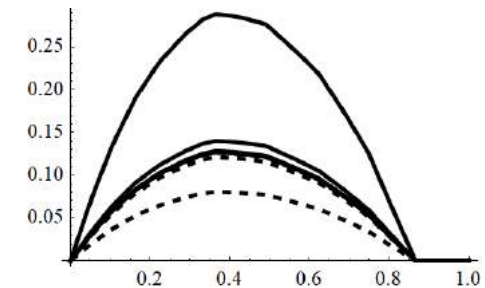


Рисунок Б.60 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

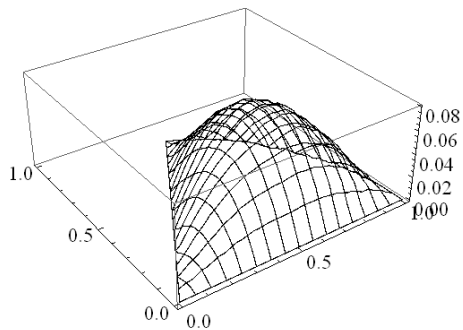


Рисунок Б.61 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

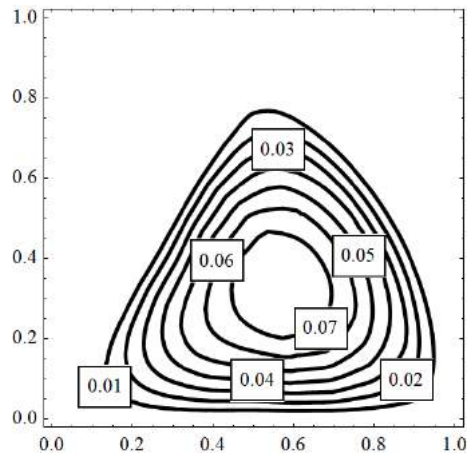


Рисунок Б.62 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

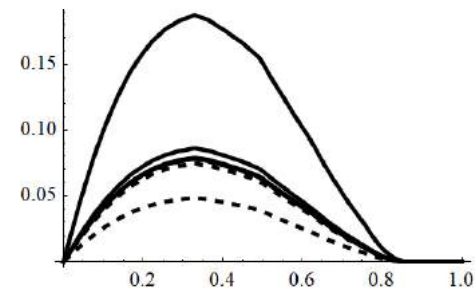


Рисунок Б.63 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

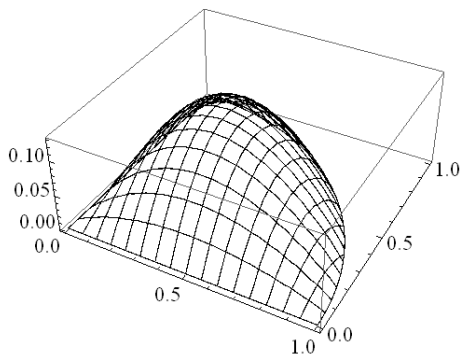


Рисунок Б.64 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

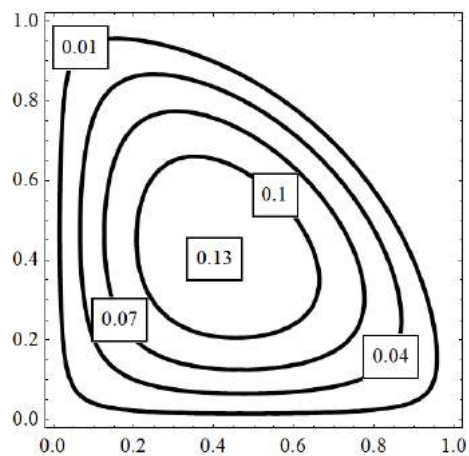


Рисунок Б.65 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

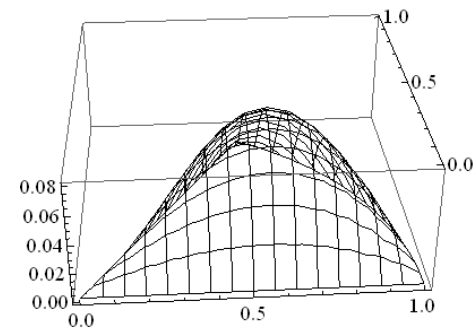


Рисунок Б.66 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

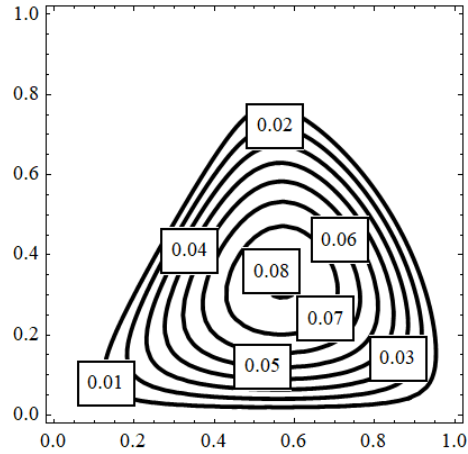


Рисунок Б.67 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_6(\mathbf{x})$

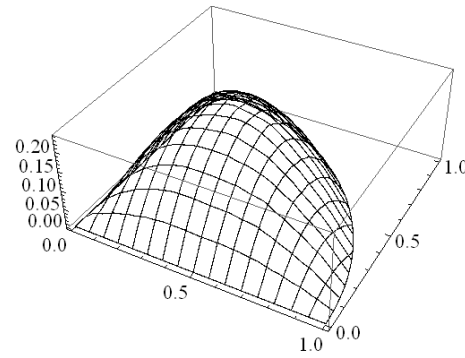


Рисунок Б.68 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

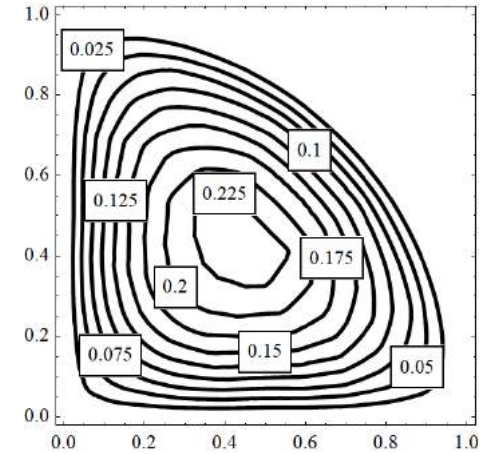


Рисунок Б.69 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

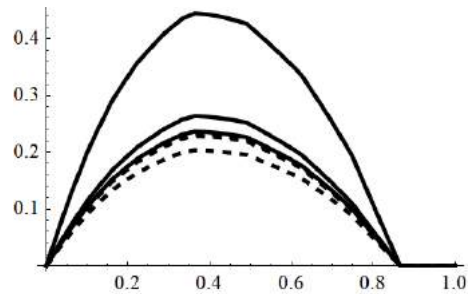


Рисунок Б.70 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

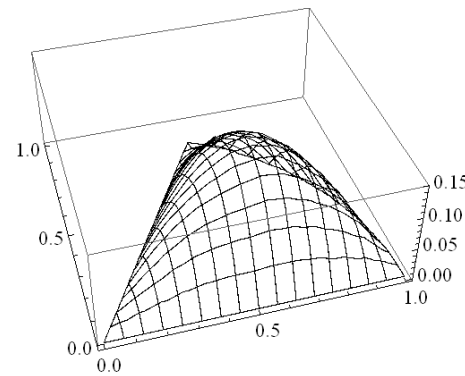


Рисунок Б.71 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

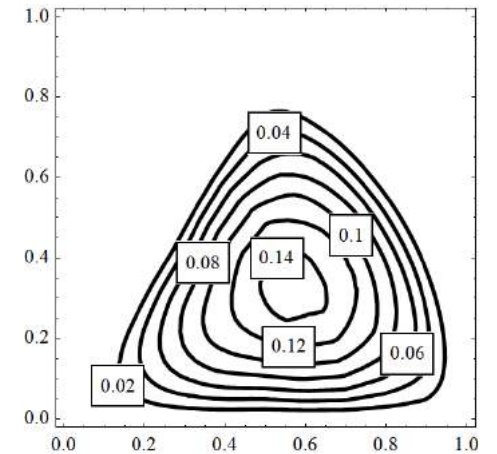


Рисунок Б.72 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

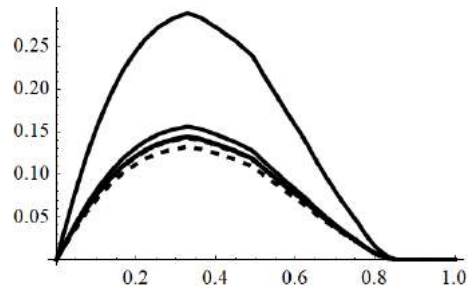


Рисунок Б.73 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

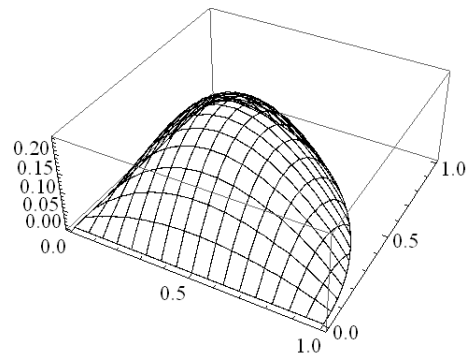


Рисунок Б.74 – Поверхня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

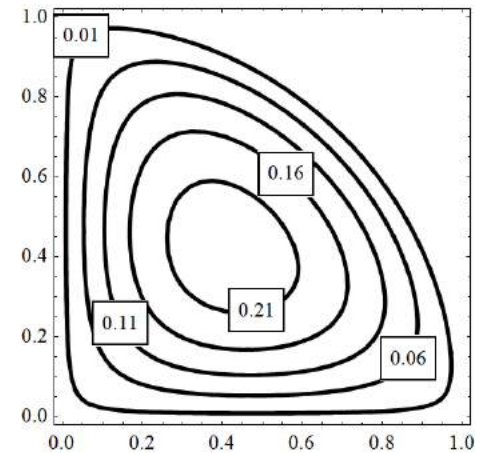


Рисунок Б.75 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_7(\mathbf{x})$

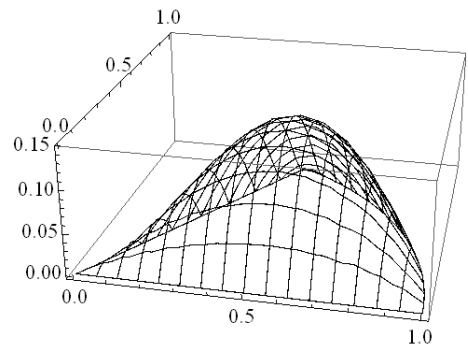


Рисунок Б.76 – Поверхня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

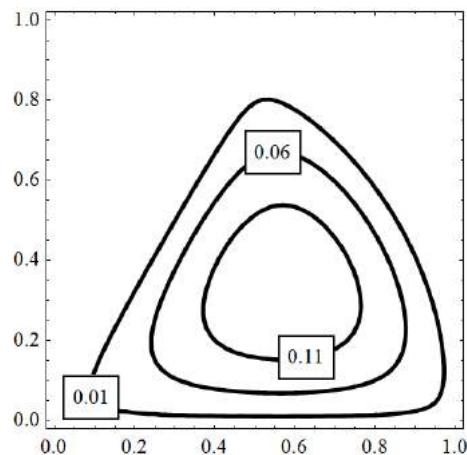


Рисунок Б.77 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

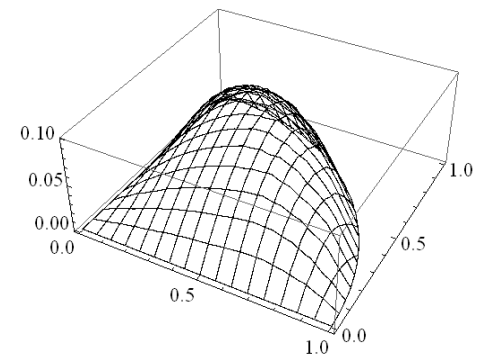


Рисунок Б.78 – Поверхня наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

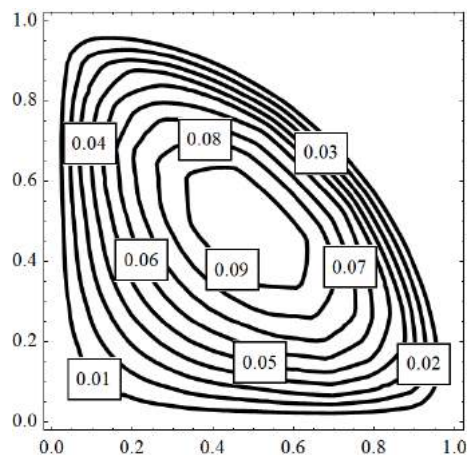


Рисунок Б.79 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

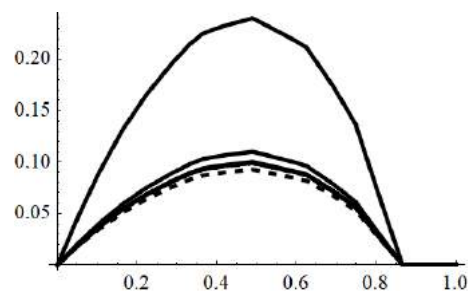


Рисунок Б.80 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

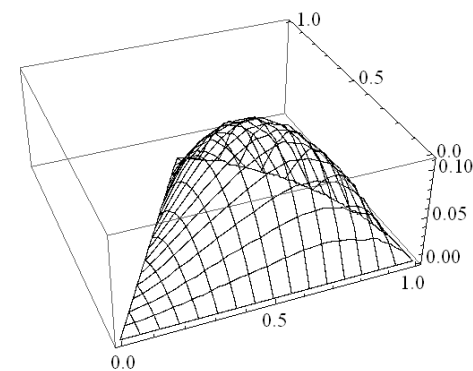


Рисунок Б.81 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

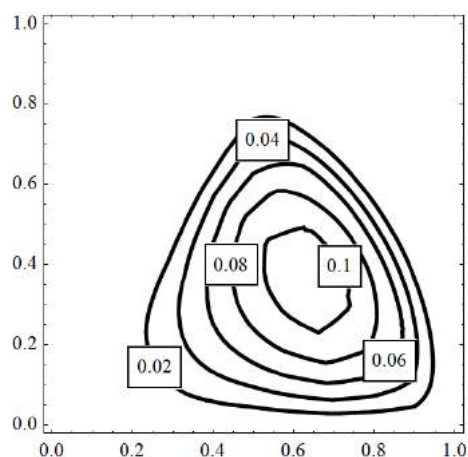


Рисунок Б.82 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_5(\mathbf{x})$

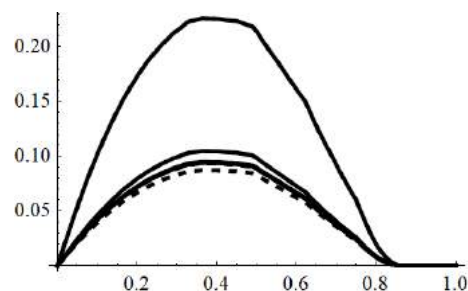


Рисунок Б.83 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

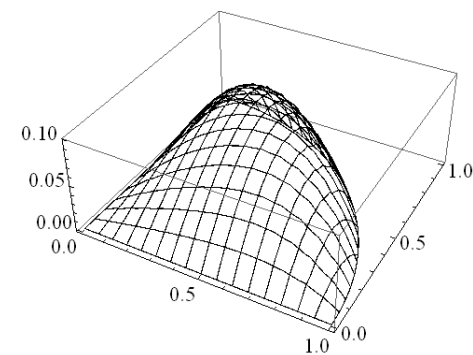


Рисунок Б.84 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

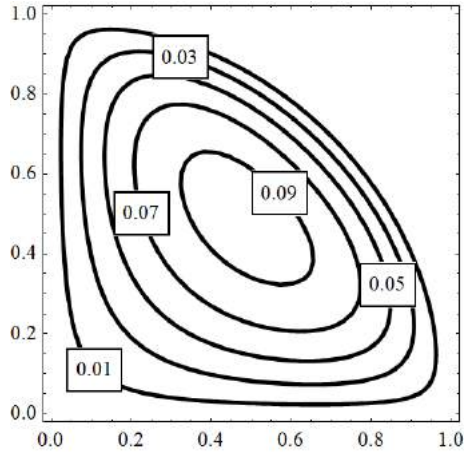


Рисунок Б.85 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

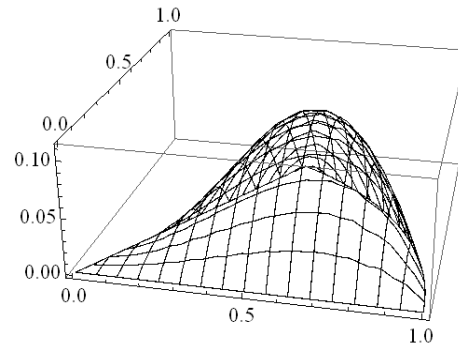


Рисунок Б.86 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

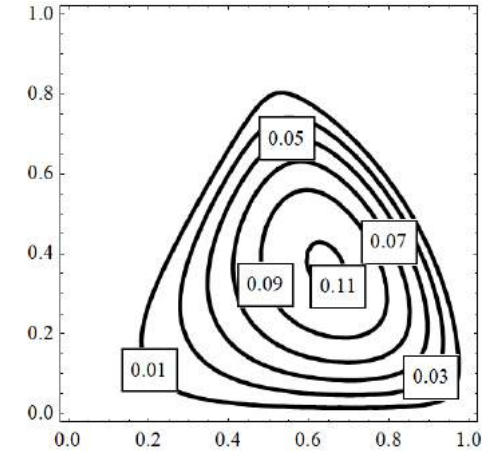


Рисунок Б.87 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

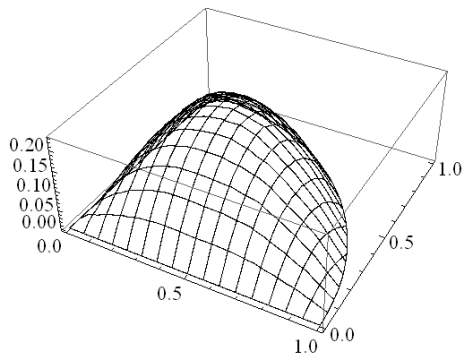


Рисунок Б.88 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

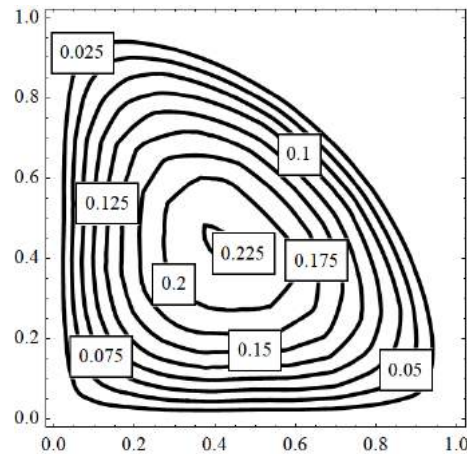


Рисунок Б.89 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

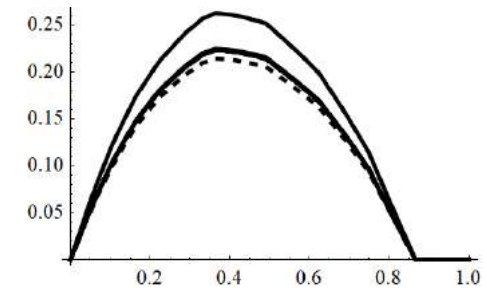


Рисунок Б.90 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$

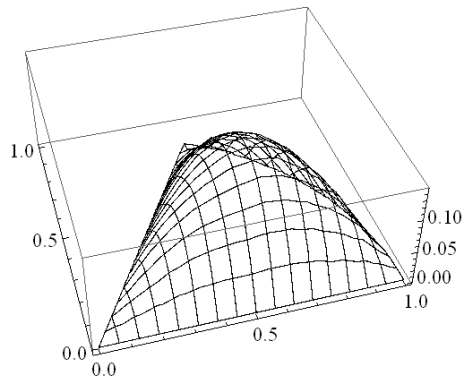


Рисунок Б.91 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

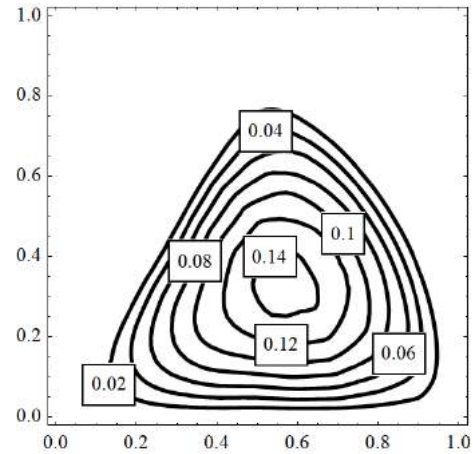


Рисунок Б.92 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_4(\mathbf{x})$

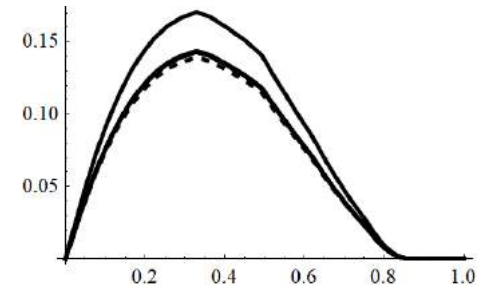


Рисунок Б.93 – Графіки $w_n(0,5; x_2)$ (суцільна лінія)
та $v_n(0,5; x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,4}$

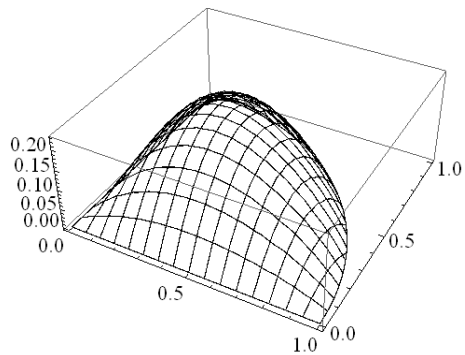


Рисунок Б.94 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

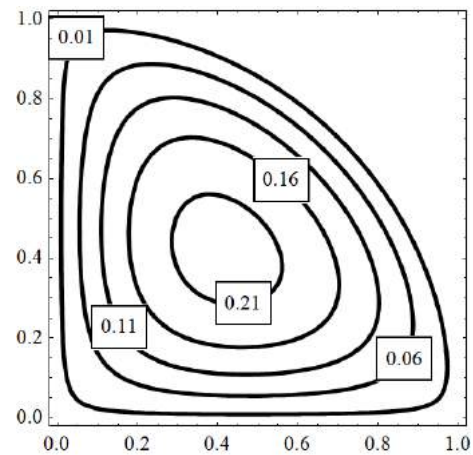


Рисунок Б.95 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

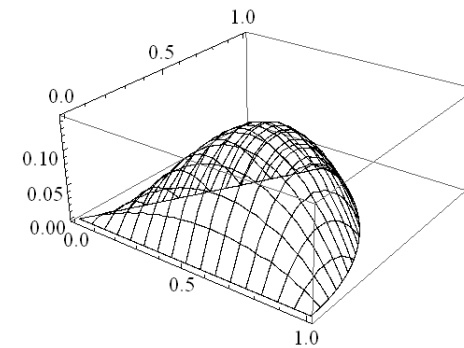


Рисунок Б.96 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

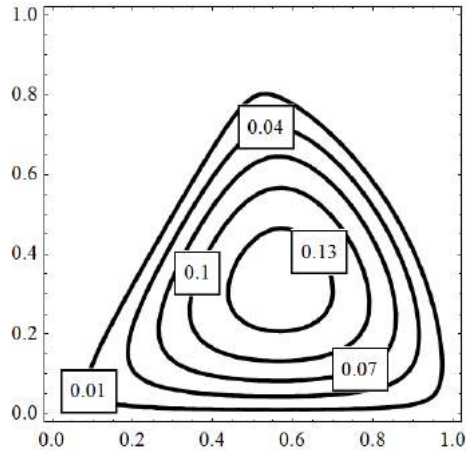


Рисунок Б.97 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_4(\mathbf{x})$

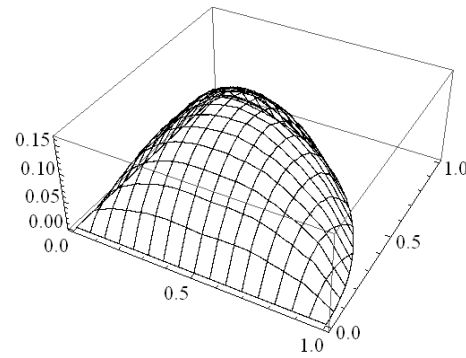


Рисунок Б.98 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

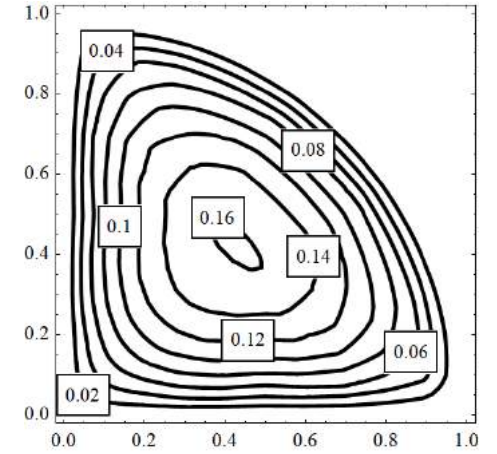


Рисунок Б.99 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

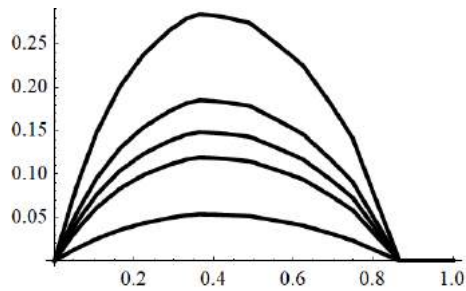


Рисунок Б.100 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$
при $n = \overline{1,5}$

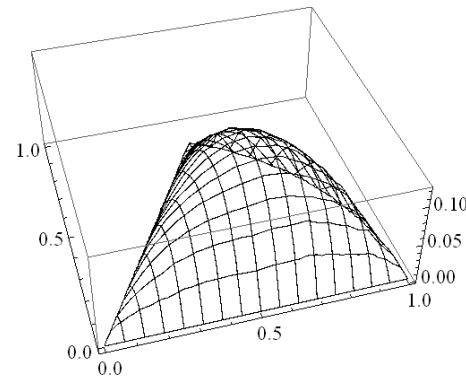


Рисунок Б.101 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

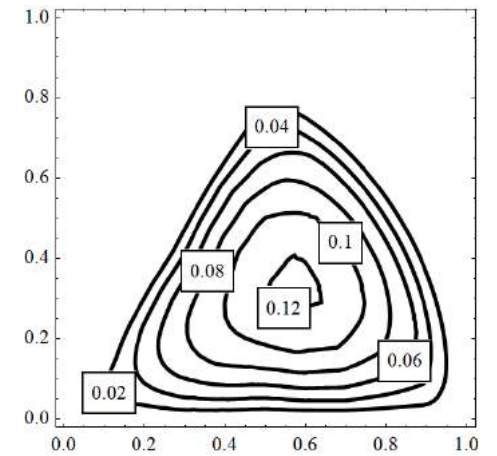


Рисунок Б.102 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $\tilde{u}_{16,17}(\mathbf{x})$

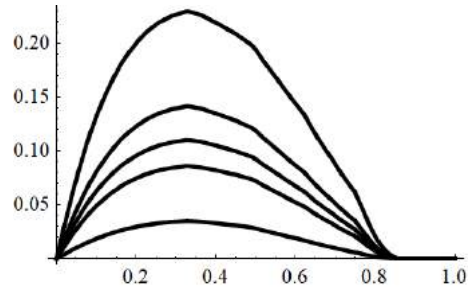


Рисунок Б.103 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$
при $n = \overline{1,5}$

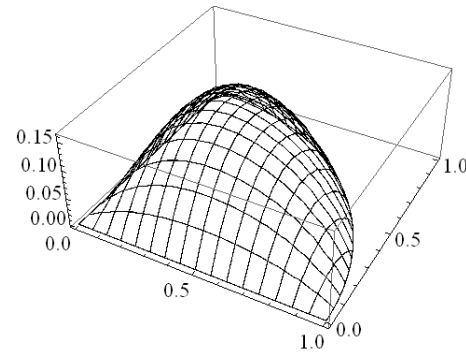


Рисунок Б.104 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{17}(\mathbf{x})$

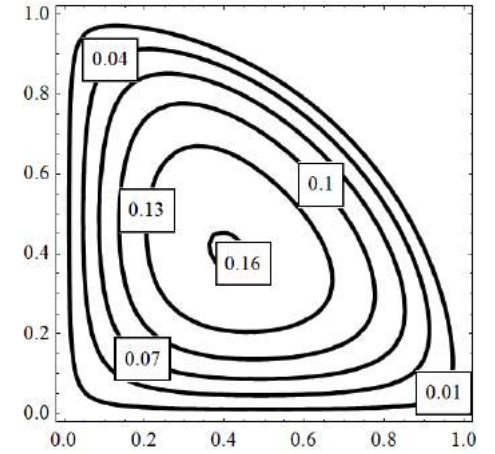


Рисунок Б.105 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_5(\mathbf{x})$

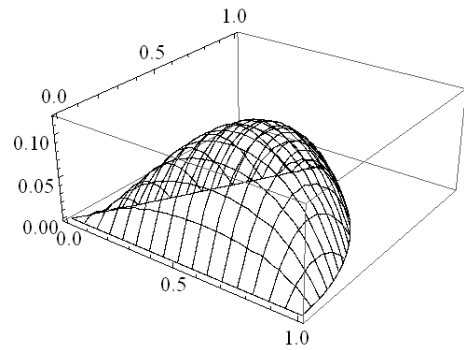


Рисунок Б.106 – Поверхня
наближеного розв'язку $u_{17}(\mathbf{x})$

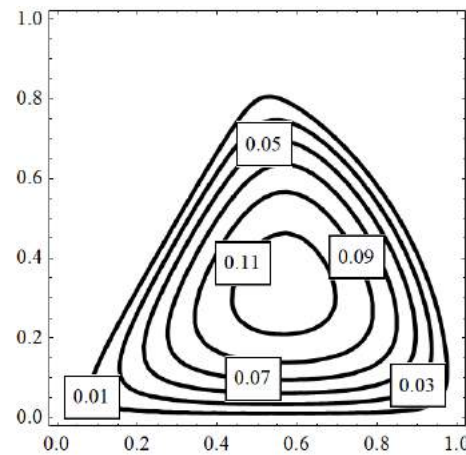


Рисунок Б.107 – Лінії рівня
наближеного розв'язку $u_{17}(\mathbf{x})$

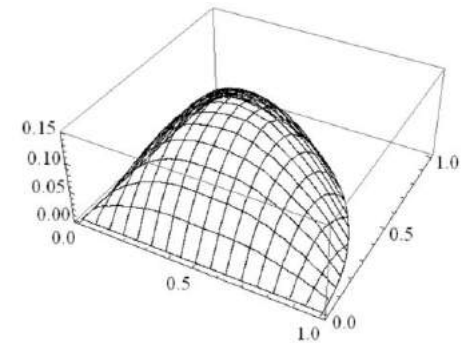


Рисунок Б.108 – Поверхня
наближеного розв'язку $\tilde{y}_7(\mathbf{x})$

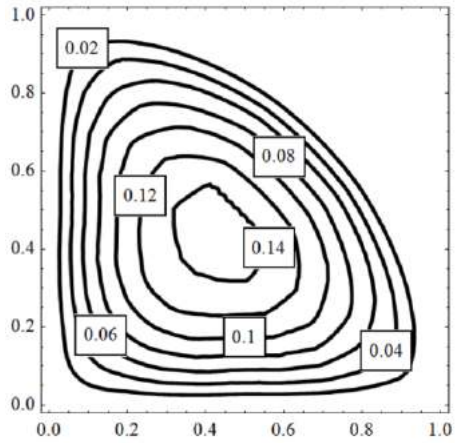


Рисунок Б.109 – Лінії рівня наближеного розв’язку $\tilde{u}_7(\mathbf{x})$

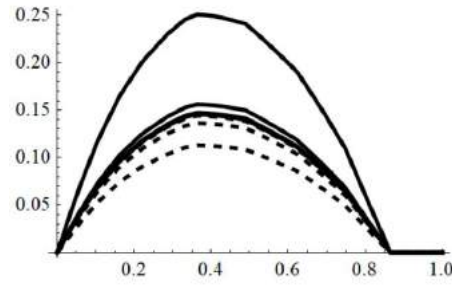


Рисунок Б.110 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

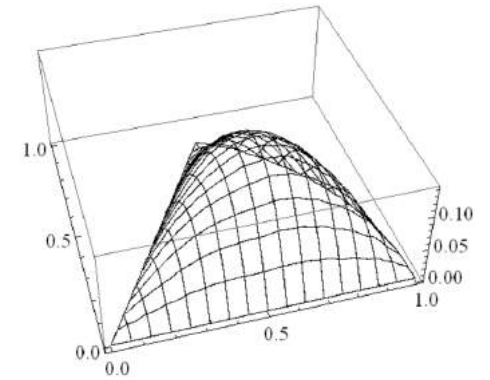


Рисунок Б.111 – Поверхня наближеного розв’язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

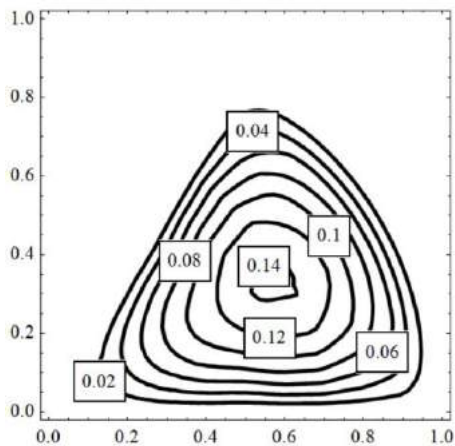


Рисунок Б.112 – Лінії рівня наближеного розв’язку $\tilde{u}_6(\mathbf{x})$

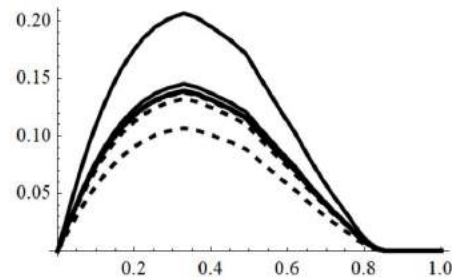


Рисунок Б.113 – Графіки $w_n(0,5;x_2)$ (суцільна лінія) та $v_n(0,5;x_2)$ (пунктирна лінія) при $n = \overline{1,5}$

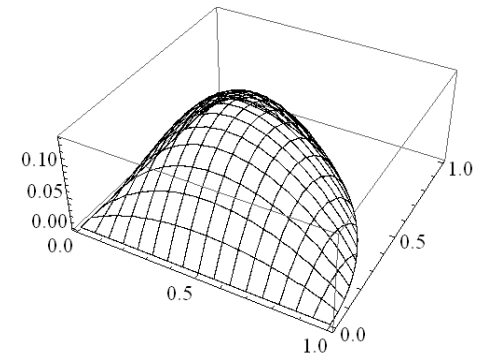


Рисунок Б.114 – Поверхня наближеного розв’язку $u_4(\mathbf{x})$

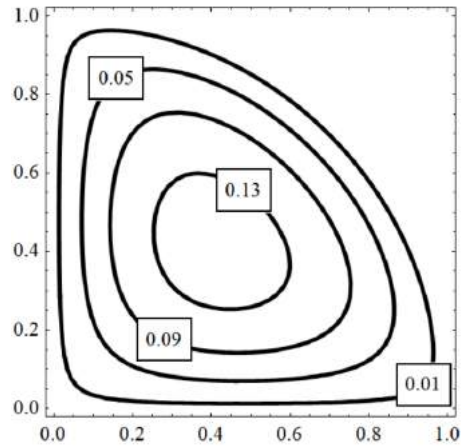


Рисунок Б.115 – Лінії рівня
наближеного розв’язку $u_4(\mathbf{x})$

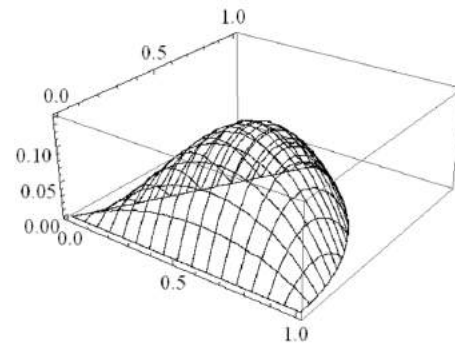


Рисунок Б.116 – Поверхня
наближеного розв’язку $u_4(\mathbf{x})$

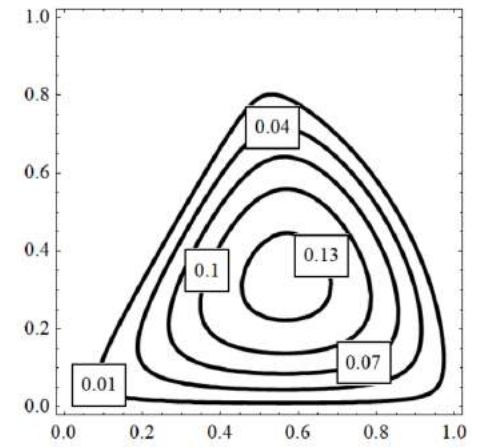


Рисунок Б.117 – Лінії рівня
наближеного розв’язку $u_4(\mathbf{x})$

ДОДАТОК В
СПИСОК ВЛАСНИХ ПУБЛІКАЦІЙ

1. Kolosova S.V., Lukhanin V.S, Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2018. Vol. 99. No. 3. P. 78–91.

2. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2016. Vol. 5. No. 4. P. 11–19.

3. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72.

4. Луханін В.С. Додатні розв'язки для еліптичного рівняння з двома параметрами // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 4 (71). С. 24–27.

5. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.

6. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 2 (69). С. 16–18.

7. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35–42.

8. Kolosova S.V., Lukhanin V.S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of one nonlinear elliptic problem // Информационные системы и

технологии: материалы 5-й Международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево, Харьков, 2016. С. 109–110.

9. Колосова С.В., Луханін В.С. Про додатні розв'язки задачі Ліувілля-Гельфанда // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали 17-ї Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. Київ, 2016. Т. 1. С. 147–149.

10. Луханін В.С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з нелінійністю // Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного молодіжного форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харьков, 2016. Т. 7. С. 102–103.

11. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв'язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць ХХІ Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 362–365.

12. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць ХХІ Всеукраїнської наукової конференції, 24–25 вересня 2015 р. Львів, 2015. С. 185–188.

13. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для эллиптической краевой задачи с экспоненциальной нелинейностью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 20–22 мая 2015 г. Пенза, 2015. С. 16–20.

14. Луханін В.С. Про метод побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометричної структури // Радиоэлектроника и молодежь в ХХІ веке: материалы XIX Международного молодежного форума, 20–22 апреля 2015 г. Харьков, 2015. Т. 7. С. 70–71.

15. Луханин В.С. О построении двусторонних приближений для одной линейной задачи // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов, 26–30 мая 2014 г. Пенза, 2014. С. 46–49.

16. Луханін В.С. Про деякі методи побудови послідовних наближень до розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного молодежного форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. Т. 7. С. 114–115.

17. Луханин В.С. О построении последовательных приближений к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // XL Гагаринские чтения: научные труды Международной молодёжной научной конференции, 7–11 апреля 2014 г. Москва, 2014. Т. 5. С. 139–141.

18. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума, 10–15 июня 2013 г. Харьков, Херсон, 2013. С. 205–208.

19. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції, 17 травня 2013 р. Бухарест, 2013. Ч. I. С. 16–24.

20. Луханін В.С. Про застосування методу квазіфункцій Гріна до одного нелінійного еліптичного рівняння // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVII Международного молодежного форума, 22–24 апреля 2013 г. Харьков, 2013. Т. 7. С. 140–141.

21. Луханін В.С. Застосування методу функцій Гріна та методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння // XVI Всеукраїнська (XI Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної

математики та інформатики: тези доповідей, 11–12 квітня 2013 р. Львів, 2013. С. 94–95.

22. Луханін В.С. Наближені методи розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // Радиоелектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVI Международного молодежного форума, 17–19 апреля 2012 г. Харьков, 2012. Т. 10. С. 159–160.

23. Луханін В.С. Про деякі підходи до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь // XV Всеукраїнська (X Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: тези доповідей, 5–6 квітня 2012 р. Львів, 2012. С. 232–234.