

ВІДГУК

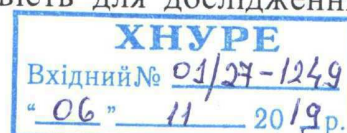
офіційного опонента

на дисертаційну роботу **Сидорова Максима Вікторовича****«Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики»**

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Процес математичного моделювання, тобто вивчення явищ за допомогою математичних моделей, безпосередньо зв'язаний з математичним апаратом, що необхідний для аналізу математичних моделей для отримання кількісної вихідної інформації як результату розв'язання складних математичних задач. Опис явищ у нелінійних середовищах приводить до необхідності числового аналізу крайових та початково-крайових задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Розв'язання таких задач здійснюється методами скінченних різниць, скінченних елементів, безсітковими методами та, зокрема, різними ітераційними методами. Серед ітераційних методів особливе місце належить апроксимаційним методам з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку, які дозволяють на кожній ітерації обмежити розв'язок знизу та зверху двома функціями. Це дає можливість отримати зручні оцінки похибки наближення та критерії закінчення обчислювального процесу.

1. Актуальність теми дисертації. В дисертаційній роботі розробляються двобічні ітераційні методи розв'язання перших крайових задач для напівлінійного еліптичного рівняння та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, а також напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння. Вказані крайові та початково-крайові задачі виникають при дослідженні методами математичного моделювання процесів теорії дифузії, фізики плазми, хімічної кінетики та теорії горіння, магнітної гідродинаміки, біології, екології тощо. Застосування аналітичних методів для аналізу таких задач обмежується пошуком автомодельних розв'язків, які не дозволяють охопити різноманіття практичних випадків. Таким чином, виникає необхідність побудови при дослідженні задач для нелінійних рівнянь математичної фізики нових, більш досконалих числових методів, зокрема, ітераційних методів двобічних наближень. Використання математичних засобів теорії R -функцій відкриває можливість для дослідження



більш складних випадків моделювання нелінійних процесів. Таким чином, актуальною науковою проблемою є розробка нових та вдосконалення існуючих методів числового аналізу різних класів задач, які описуються нелінійними рівняннями математичної фізики.

2. Загальна характеристика дисертаційної роботи, її відповідність встановленим вимогам, стиль та повнота викладу наукових положень в опублікованих працях. Дисертаційна робота Сидорова Максима Вікторовича «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики» складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних літературних джерел і додатків. Повний обсяг дисертації – 486 сторінок, з них 320 сторінок основного тексту. Робота містить 132 рисунки, 115 таблиць, 320 літературних джерел (30 сторінок) та чотири додатки (111 сторінок). Стиль оформлення та повнота викладу наукових положень дисертації в цілому відповідають встановленим вимогам.

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та завдання дослідження, визначені об'єкт, предмет та методи дослідження, висвітлені наукова новизна та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок автора в роботах, виконаних у співавторстві, а також апробація результатів дисертації та кількість публікацій, виконаних за темою дисертаційної роботи.

У **першому розділі** висвітлений аналіз сучасного стану проблеми математичного моделювання нелінійних процесів та постановка задач дослідження. Виконаний огляд нелінійних задач математичної фізики, які виникають у практиці моделювання нелінійних процесів, та літературних джерел, в яких реалізовані сучасні методи при проведенні числових досліджень. Серед існуючих числових методів аналізу задач для нелінійних рівнянь математичної фізики як найбільш ефективні виділені методи двобічних наближень і наведені основні відомості з теорії напівупорядкованих просторів, що розглядаються як теоретичне підґрунтя розробки методів цього класу.

В першому розділі сформульовані цілі та завдання даного дисертаційного дослідження, зокрема:

а) з множини напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь виділити класи таких рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання за допомогою функції Гріна у вигляді рівняння з гетеротонним оператором, і на основі цього розробити двобічні ітераційні методи їх розв'язання;

б) розробити метод заміни першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння еквівалентним інтегральним рівнянням (за допомогою

квазіфункції Гріна-Рвачова), використавши при цьому математичні конструктивні засоби теорії R -функцій

в) з множини напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь виділити клас таких рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова у вигляді рівняння з гетеротонним оператором, і на основі цього розробити двобічний ітераційний метод її розв'язання;

г) розроблені двобічні ітераційні методи застосувати до розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння зі степеневими нелінійностями;

д) на основі сумісного використання модифікованого метода Роте і метода двобічних наближень розробити напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

е) розроблені методи застосувати до розв'язання задач нелінійної теплопровідності з залежним від температури коефіцієнтом та застосувати до розв'язання нелінійної задачі Нав'є.

Другий розділ присвячений розгляду для першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та для першою крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі переходу за допомогою функції Гріна до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна поняття узагальненого розв'язку задачі та побудови методу двобічних наближень при реалізації числових результатів. Обґрунтування методу використовує результати теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах і міститься у теоремах, які дають достатні умови реалізації двобічної збіжності послідовних наближень. Приклади застосування розроблених числових методів описані для напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа та оператором Гельмгольца. Проведений обчислювальний експеримент для звичайного диференціального рівняння та для двох еліптичних рівнянь, які виникають при моделювання процесів у теорії горіння, магнітній гідродинаміці та у мікроелектромеханічних системах, підтверджує ефективність запропонованих числових методів.

У **третьому розділі** вводиться поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для не виродженого еліптичного оператора другого порядку. З використанням цієї функції та інтегральних формул теорії еліптичних рівнянь отримано інтегральне рівняння Урисона, яке еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. Це дозволяє на основі даного інтегрального рівняння, яке розглядається як рівняння з оператором гетеротонного типу у просторі неперервних функцій, ввести поняття

узагальненого розв'язку крайової задачі та побудувати числовий метод його двобічного ітераційного знаходження. У розділі наведено обґрунтування запропонованого методу, достатні умови збіжності послідовних наближень та способи побудови початкового наближення з використанням математичного конструктивного апарату теорії R -функцій. Щоб проілюструвати роботу методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова розглянуто два обчислювальні експерименти для еліптичних задач, для яких числовий розв'язок було отримано у другому розділі за допомогою методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Результати, що були отримані обома цими методами були порівняні між собою та з результатами, які отримані іншими методами і відомі з літературних джерел.

У **четвертому розділі** розглянуто дослідження методами двобічних наближень з застосуванням функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова перших крайових задач для звичайних диференціальних та в частинних похідних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа $(-\Delta u)$ й оператором Гельмгольца $(-\Delta u + \kappa^2 u)$. Розглянуто різні типи степеневих нелінійностей: ізотонну ($f(u) = \lambda u^p$), антитонну ($f(u) = \mu u^{-q}$) та гетеротонну ($f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$). Для кожної з цих крайових задач отримано умови існування єдиного додатного розв'язку, двобічної збіжності до нього послідовних наближень та знайдено апріорні оцінки розв'язків у випадку відрізка, круга та кулі. У дво- та тривимірному випадках для одиничного квадрата, половини одиничного круга, одиничної кулі та одиничного куба порівняно результати, отримані методом двобічних наближень з застосуванням функції Гріна та методом двобічних наближень з застосуванням квазіфункції Гріна-Рвачова.

У **п'ятому розділі** методи двобічних наближень, що розроблено у другому та третьому розділах, розповсюджені на першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь: побудовано відповідні двобічні ітераційні процеси, отримано умови їх збіжності до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку крайової задачі та надано загальні рекомендації щодо вибору початкового наближення у вигляді кінців сильно інваріантного конусного відрізка. Обчислювальні експерименти проведено для систем напівлінійних еліптичних рівнянь зі степеневою та експоненціальною нелінійностями.

У **шостому розділі** на основі сумісного застосування методів прямих (Роте) та двобічних наближень, які було розроблено у попередніх розділах, запропоновано метод часткової дискретизації розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння у одно-, дво- та тривимірному випадках. Запропонованим методом нестационарна задача зведена до послідовності стаціонарних нелінійних крайових задач, які розглядаються на окремих часових шарах та розв'язуються методами двобічних наближень. Роботу

методу продемонстровано у одновимірному випадку на задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю, а у двовимірному випадку – на задачі зі сталим коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю.

У **сьомому розділі** методи двобічних наближень застосовано до розв'язання задачі Діріхле для стаціонарного рівняння теплопровідності з коефіцієнтом, яких залежить від температури степеневим чином, та до розв'язання задачі Нав'є для нелінійного рівняння четвертого порядку. Заміною невідомої функції нелінійна задача Діріхле зведена до задачі для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа, що дозволило на основі результатів другого та третього розділів отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та побудувати двобічний ітераційний процес його знаходження. Метод розв'язання задачі Нав'є базується на переході до еквівалентної системи напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа і застосуванні для обґрунтування відповідного двобічного ітераційного методу результатів, отриманих у п'ятому розділі роботи.

У **висновках** дається загальна оцінка отриманих результатів дисертаційної роботи.

У **додатках** наведено акт про впровадження результатів дисертаційного дослідження у навчальний процес.

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків та рекомендацій. Вивчення матеріалів дисертаційної роботи, автореферату та публікацій дає можливість стверджувати, що обґрунтованість основних одержаних результатів забезпечується строгістю і коректністю постановки та розв'язання розглянутих у роботі задач. Обґрунтованість викладених в роботі положень базується на застосуванні методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах, методів математичної фізики та методів обчислювальної математики при розробці двобічних ітераційних схем. Обґрунтованість наукових положень, висновків, запропонованих рішень і рекомендацій також підтверджується результатами апробації роботи на наукових семінарах, конференціях та симпозіумах.

4. Достовірність і новизна наукових положень, висновків та рекомендацій. Достовірність наукових положень, висновків та рекомендацій дисертаційної роботи забезпечується:

– коректністю проведених теоретичних досліджень, які ґрунтуються на перспективному напрямку підвищення ефективності розрахунків на основі використання двобічних наближень;

– застосуванням сучасних методів числового моделювання, використанням системного підходу, методах наукового пізнання, фундаментальних положеннях сучасного математичного моделювання;

– аналізом отриманих результатів при застосуванні запропонованих двобічних ітераційних методів, а також порівнянням отриманих числових результатів з відомими точними розв'язками та розв'язками, отриманими іншими наближеними методами;

– апробацією положень дисертаційної роботи на наукових конференціях і семінарах різних рівнів, а також наявністю відповідних актів впровадження.

Сформульовані в дисертації наукові положення, висновки і рекомендації впливають безпосередньо з теоретичних та експериментальних результатів проведених досліджень.

При виконанні завдань дисертаційної роботи отримано такі основні наукові результати:

– виділено класи напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь і напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання у вигляді нелінійного операторного рівняння з гетеротонним оператором, на основі чого розроблено двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв'язків цих задач;

– для розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння розвинуто метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x,u), \quad x \in (a, b);$$

– розвинуто метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \Omega$;

– для невіроджуваного еліптичного оператора $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u$ вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі, що дозволило у областях, геометрію яких можна аналітично описати за допомогою засобів теорії R -функцій, отримати інтегральне рівняння, що еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, та систему інтегральних рівнянь, що еквівалентна першій крайовій задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь;

– на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, вперше розроблено метод двобічних наближень;

– для першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$, на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова вперше розроблено методи двобічних наближень її розв'язання;

– вперше розроблено напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень;

– з рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$ виділено клас рівнянь, розв'язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методом двобічних наближень, завдяки чому отримано умови існування єдиного додатного розв'язку цієї задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– до розв'язання нелінійної задачі Нав'є вперше застосовано метод двобічних наближень, що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– удосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка, кінці якого є початковими наближеннями при реалізації двобічних ітераційних схем, в частині використання апарату теорії R -функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців.

В результаті дослідження підвищено ефективність моделювання фізичних процесів. Отримано результати, що мають переваги над існуючими.

5. Значення дисертаційної роботи для науки і виробництва. Розроблені у дисертаційній роботі результати у сукупності є вирішенням актуальної проблеми підвищення ефективності побудови числових методів розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики. Запропоновані в роботі двобічні ітераційні методи розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики реалізуються за простою обчислювальною схемою та дозволяють отримати зручну апостеріорну оцінку похибки, що дозволяє здійснювати ефективне математичне моделювання процесів, які протікають у нелінійних середовищах різної природи.

На базі запропонованих математичних засобів розроблені продукти, які можуть бути використані при «Розробці методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ДР 0115U001522). Результати дисертаційного дослідження впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки при викладанні дисципліни «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь» та при підготовці атестаційних робіт, що підтверджується актом впровадження.

6. Повнота викладу результатів роботи в наукових фахових виданнях.

Основні результати дисертаційної роботи відображені у публікаціях здобувача. Основні наукові результати дисертаційної роботи опубліковано у 37 друкованих працях, серед них 21 стаття у виданнях, що включено до Переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук (4 статті включено до наукометричної бази Web of Science), 1 стаття у закордонному фаховому науковому віданні, та 15 тез доповідей, що опубліковані в матеріалах 12 наукових конференцій, з яких 7 є міжнародними.

Робота пройшла апробацію, її основні положення доповідалися на всеукраїнських і міжнародних наукових конференціях та семінарах.

Дисертація **Сидорова Максима Вікторовича «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики»** є завершеною науковою працею. Її написано грамотною українською мовою та оформлено відповідно до чинних вимог. Робота добре ілюстрована й не перевантажена зайвим матеріалом.

Зміст дисертаційної роботи цілком відповідає спеціальності 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, за якою вона подана до захисту, і профілю спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02.

Автореферат дисертації відображає основний зміст, положення та висновки дисертаційної роботи.

7. Дискусійні положення дисертаційної роботи та зауваження. У цілому, оцінюючи дисертаційну роботу, слід звернути увагу на такі зауваження і дискусійні положення.

7.1. При проведенні обчислювальних експериментів у п. 3.4, п. 4.1 (табл. 4.1), п. 5.3.2, п. 7.2 для побудови функції $\omega(\mathbf{x})$, що методом R -функцій описує геометрію області Ω , у якій розглядається крайова задача, використано систему R_0 . Бажано було б дослідити використання інших достатньо повних систем R -функцій, зокрема, побудованих з використанням теорії атомарних функцій, та їх вплив на точність та збіжність двобічних ітерацій.

7.2. На с. 145 після введення у розгляд квазіфункції Гріна-Рвачова запропоновано різні способи вибору функції $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, але подальші дослідження були проведені лише для $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ вигляду (3.22). Бажано було б дослідити й інші варіанти, зокрема, їх вплив на властивості ядра $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$.

7.3. У розділі 4 бажано було б порівняти для одних й тих саме крайових задач апіорні оцінки (у вигляді сильно інваріантних конусних відрізків), отримані методом двобічних наближень на основі використання функцій Гріна та на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова.

7.4. Бажано було б провести обчислювальні експерименти методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для більш складних областей та порівняти їх з результатами, отриманими за допомогою інших методів, наприклад, варіаційних, або ж використати наближену функцію Гріна.

7.5. У пункті 7.1 бажано було б розглянути й інші типи нелінійних коефіцієнтів теплопровідності $k(T)$, зокрема, експоненціальних $k(T) = k_0 e^T$ та дослідити можливість побудови двобічних наближень до розв'язків відповідних крайових задач.

7.6. У розділі 6 (на с. 270, на с. 281 та на с. 290) вписано, що за розв'язками початково-крайової задачі на окремих часових шарах можна за допомогою апарату теорії інтерлінації отримати розв'язок у вигляді функції, яка визначена в усіх точках розрахункової області, але конкретної реалізації цього не наведено.

7.7. В тексті дисертації й автореферату є певна кількість синтаксичних та орфографічних помилок, які, втім, не мають суттєвого впливу на сприйняття змісту роботи.

Проте, зазначені вище зауваження не мають принципового характеру, не знижують загального наукового рівня дисертації та не впливають на позитивну оцінку роботи. Більшою мірою їх треба розглядати як побажання щодо подальших досліджень автора.

Автором проведено корисне дисертаційне дослідження, результати якого знайдуть своє застосування при дослідженні задач, пов'язаних з моделюванням явищ та процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, магнітній гідродинаміці, біології тощо. Треба підкреслити, що до побудови методів двобічних наближень для розв'язання задач для напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь в роботі автором запропоновано два підходи. Перший з них використовує класичну функцію Гріна та практично може бути реалізований лише для невеликої кількості класичних областей, у яких функція Гріна відома, а другий підхід використовує квазіфункцію Гріна-Рвачова, що значно розширює коло застосувань відповідного двобічного ітераційного методу. Поняття квазіфункції Гріна-Рвачова введено у дисертаційній роботі й є узагальненням поняття квазіфункції, яка використовувалась у роботах академіка НАН України В.Л. Рвачова. На відміну від класичної функції Гріна побудова квазіфункції Гріна-Рвачова є можливою, якщо відомий фундаментальний розв'язок відповідного еліптичного оператора та геометрія області, у якій розглядається вихідна задача, може бути описана математичними засобами теорії R-функцій. Можливості розроблених двобічних ітераційних методів ілюструються результатами великої кількості обчислювальних експериментів.

8. Загальний висновок. Дисертаційна робота є завершеною науково-дослідною працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності спрямовані на вирішення важливої наукової проблеми підвищення ефективності моделювання фізичних процесів.

За актуальністю, науковим рівнем розробок та їх практичним значенням, наявністю необхідної кількості та обсягу публікацій дисертаційна робота **Сидорова Максима Вікторовича «Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики»** є науковою працею, результати якої опубліковані у провідних фахових виданнях і пройшли апробацію на міжнародних конференціях та семінарах, робота повністю відповідає всім вимогам МОН України, зокрема, до докторських дисертацій згідно пунктам 9, 10, 12 «Порядку присудження наукових ступенів» затверджених Постановою Кабінету Міністрів від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами, затвердженими постановами КМ України від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р. та № 567 від 27.07.2016 р.), містить обґрунтовані матеріали, отримані особисто автором, що відповідають критеріям актуальності, наукової новизни, практичної спрямованості.

Автор дисертаційної роботи **Сидоров Максим Вікторович** заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент:

професор кафедри

інформатики і прикладної математики

Харківського національного

автомобільно-дорожнього університету,

доктор фізико-математичних наук,

професор



В. М. Колодяжний

