Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

СИДОРОВ МАКСИМ ВІКТОРОВИЧ

УДК 519.63

МЕТОДИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Колосов Анатолій Іванович,
завідувач кафедри вищої математики,
Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Колодяжний Володимир Максимович,
професор кафедри інформатики та прикладної математики,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дияк Іван Іванович,
декан факультету прикладної математики та інформатики,
Львівський національний університет імені Івана Франка;

доктор фізико-математичних наук
Зуб Станіслав Сергійович,
проректор з інноваційної діяльності та перспективного розвитку,
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди.

Захист відбудеться «19» листопада 2019 року о «14^00» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14 і на сайті спеціалізованої вченої ради Д64.052.02 за електронною адресою: http://nure.ua/branch/d-64-052-02.

Автореферат розісланий «16» жовтня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Л.В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На сьогодні все більш актуальним стає дослідження складних явищ і процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо методами математичного моделювання. Це призводить до необхідності аналізу крайових або початково-крайових задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Існуючі аналітичні методи розв'язання таких рівнянь не дозволяють проводити дослідження всього різноманіття задач, що виникають на практиці, тому зазвичай для цього використовуються обчислювальні методи. Серед чисельних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики можна виділити методи скінченних різниць, скінченних елементів, варіаційні та проекційні, а також ітераційні методи. Особливе місце серед ітераційних методів належить методам двобічних наближень, які дозволяють апроксимувати невідомий розв'язок знизу та зверху двома послідовностями, а отже, надають можливість отримати для похибки наближеного розв'язку зручну апостеріорну оцінку та довести існування розв'язку вихідної задачі.

Історично першим методом з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку був метод, запропонований у 1919 р. С.О. Чаплигіним. Подальший розвиток двобічних ітераційних методів пов'язаний з використанням теорії напівупорядкованих просторів, основи якої були закладені в роботах Л.В. Канторовича, Б.З. Вуліха, М.Г. Крейна, М.А. Рутмана та ін. Цю теорію розвинули М.О. Красносельський, В.І. Опойцев, І.О. Бахтін, H. Amann, D. Guo, V. Lakshmikantham та їх учні у застосуванні до дослідження питань додатної розв'язності операторних рівнянь, при цьому для доведення відповідних теорем існування та єдиності використовувалися двобічні ітераційні схеми. Проте автори розглядали ці ітераційні процеси як допоміжний засіб при доведенні теорем і відповідні обчислювальні схеми не було реалізовано.

В останні десятиріччя значний внесок у розробку двобічних ітераційних методів розв'язання задач для різних класів функціональних рівнянь внесли Ю.І. Ковач, А.І. Колосов, М.І. Копач, М.С. Курпель, Й.Й. Лучко, І.М. Майборода, В.В. Маринець, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта, М.Й. Ронто, А.М. Самойленко, Б.А. Шувар, G. Chen, C.V. Pao, M.-D. Rus та ін.

Незважаючи на значні успіхи в розробці двобічних ітераційних методів було виявлено протиріччя, пов'язане з тим, що відсутні систематичне дослідження двобічних ітераційних методів розв'язання крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь, а також застосування двобічних ітераційних методів до розв'язання початково-крайових задач для напівлінійних параболічних рівнянь. Крім того, практична реалізація відомих двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, потребує знання функції Гріна оператора $-\Delta$, що обмежує кількість областей Ω, для яких фактично може бути знайдений розв'язок задачі. Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих двобічних ітераційних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася в період з 2014 р. по 2018 р. відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології та математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх сталого розвитку» (№ ДР 0115U001522), у розробці якої автор брав участь як виконавець.

Мета та завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння та системи напівлінійних еліптичних рівнянь і методу розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного застосування методів Роте і двобічних наближень.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану проблеми чисельного аналізу нелінійних задач математичної фізики методами двобічних наближень;

– розробити метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння на основі використання функції Гріна;

– розробити методи двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використань функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова;

– розробити методи двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь на основі використань функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова;

– розробити на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

– застосувати розроблені методи двобічних наближень до розв'язання першої крайової задачі для рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності вигляду $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x},\theta)$ та нелінійної задачі Нав'є.

Об'єктом дослідження є процеси, математичними моделями яких є задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь, систем напівлінійних еліптичних рівнянь і напівлінійних параболічних рівнянь.

Предметом дослідження є перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь, перша початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння та двобічні ітераційні методи їх чисельного аналізу.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах і методи математичної фізики для теоретичного дослідження розглядуваних задач та запропонованих двобічних ітераційних методів їх розв'язання; апарат теорії R-функцій для побудови нормалізованих рівнянь меж областей, в яких розглядаються задачі, при знаходженні кінців сильно інваріантного конусного відрізка та для побудови квазіфункції Гріна-Рвачова.

Наукова новизна одержаних результатів. У результаті виконання дисертаційного дослідження розроблено двобічні ітераційні методи розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. При цьому отримано такі нові наукові результати:

– вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова першої крайової задачі для невироджуваного еліптичного оператора $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u)+q(\mathbf{x})u$ і з її допомогою отримано інтегральне рівняння, еквівалентне першій крайовій задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, та систему інтегральних рівнянь, еквівалентну першій крайовій задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, у областях, геометрію яких можна аналітично описати за допомогою конструктивних засобів теорії R-функцій;

– вперше виділено клас напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, і клас напівлінійних еліптичних рівнянь та систем напівлінійних еліптичних рівнянь, перша крайова задача для яких дозволяє її подання (за допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова) у вигляді нелінійного операторного рівняння з оператором гетеротонного типу, що дозволяє будувати двобічні ітераційні методи знаходження додатних розв'язків цих задач;

– отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду $-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x,u),\ x\in(a,b)$;

– отримав подальший розвиток метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння на основі використання функції Гріна в частині його застосування до рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u)+q(\mathbf{x})u=f(\mathbf{x},u)$, $\mathbf{x}\in\Omega$;

– вперше розроблено метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u)+q(\mathbf{x})u=f(\mathbf{x},u)$, $\mathbf{x}\in\Omega$, на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше розроблено методи двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i)+q_i(\mathbf{x})u_i=f_i(\mathbf{x},u_1,\dots,u_n)$, $\mathbf{x}\in\Omega$, $i=1,\dots,n$, на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова;

– вперше на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень розроблено напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння;

– вперше з рівнянь вигляду $-\operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta)=f(\mathbf{x},\theta)$ виділено клас рівнянь, розв'язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методом двобічних наближень, що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– вперше до розв'язання нелінійної задачі Нав'є застосовано метод двобічних наближень, на основі чого отримано умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень;

– удосконалено метод побудови сильно інваріантного конусного відрізка в частині використання апарату теорії R-функцій для вибору його нижнього та верхнього кінців, які обираються за початкові наближення при реалізації двобічних ітераційних методів.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Розроблені в дисертаційній роботі двобічні ітераційні методи розширюють множину чисельних методів, які застосовуються для розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики, мають простий обчислювальний алгоритм та зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку, що виділяє їх серед інших методів. Вони можуть бути використані при математичному моделюванні процесів, що описуються першою крайовою задачею для напівлінійного еліптичного рівняння та системою напівлінійних еліптичних рівнянь і першою початково-крайовою задачею для напівлінійного параболічного рівняння. Практичне значення отриманих у роботі результатів підтверджується їх впровадженням в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки при викладанні дисципліни «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь» та при підготовці атестаційних робіт здобувачами першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів вищої освіти.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [1 – 37]. Усі результати дисертаційної роботи отримані особисто здобувачем. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачу належать такі результати: [1, 3, 23, 27] – дослідження задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та антитонною експоненціальною нелінійністю, двобічний ітераційний метод її розв'язання та результати обчислювального експерименту; [2, 4, 23, 28 – 32] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та степеневими нелінійностями (ізотонними чи антитонними); [16] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа та ізотонною експоненціальною нелінійністю; [5, 19, 35] – двобічний ітераційний метод розв'язання задачі Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння, що моделює мікроелектромеханічну систему; [11] – двобічний ітераційний метод розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та відповідний обчислювальний експеримент; [24] – дослідження нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння та двобічний ітераційний метод її розв'язання; [25, 26] – застосування методу квазіфункцій Гріна до аналізу ітераційними методами нелінійної еліптичної крайової задачі. Роботи [6 – 10, 12 – 15, 17, 18, 20 – 22, 33, 34, 36, 37] опубліковано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: Науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» (Україна, Львів, 2010 р.); XV Міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (Україна, Херсон, 2011 р.); Одинадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (Україна, Одеса, 2012 р.); VII Міжнародній науково-технічній конференції молодих спеціалістів, аспірантів та студентів «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (Росія, Пенза, 2013 р.); I Міжнародній науково-практичній конференції «Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності» (Румунія, Бухарест, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Україна, Харків-Херсон, 2013 р.); Дванадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (Україна, Одеса, 2014 р.); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» – «APAMCS-2015» (Україна, Львів, 2015 р.); Міжнародній конференції «Ukrainian Conference on Applied Mathematics» (Україна, Львів, 2017 р.); III Всеукраїнській науково-практичній конференції «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (КМПЗ-2017) (Україна, Рівне, 2017 р.); Вісімнадцятій міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Україна, Луцьк-Київ, 2017 р.); 7-й Міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)» (Україна, Коблеве-Харків, 2018 р.); наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, 2015, 2017, 2018 рр.), кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О.М. Бекетова (Харків, 2017 р.), кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2018 р.).

Публікації. Матеріали дисертації викладені у 37 наукових роботах: 22 статті, з яких 21 стаття у наукових виданнях, зазначених в переліку фахових видань України з фізико-математичних наук (4 статті включено до наукометричної бази Web of Science), 1 стаття у закордонному фаховому науковому виданні, та 15 тез доповідей, опублікованих в матеріалах 12 наукових конференцій, з яких 7 міжнародних.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота є рукописом і складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел з 320 найменувань (30 с.), чотирьох додатків (111 с.), 132 рисунки (37 с.) та 115 таблиць (92 с.). Повний обсяг роботи становить 486 сторінок, з них 320 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, вказано їх теоретичне та практичне значення і зазначено області їх використання, а також наведено відомості про апробацію результатів та публікації за темою дисертації.

Перший розділ роботи присвячено огляду та аналізу сучасного стану проблеми математичного моделювання процесів, що протікають у нелінійних середовищах.

Зокрема, у розділі розглянуто постановку низки нелінійних задач математичної фізики, які є математичними моделями таких процесів, та проведено огляд методів їх чисельного аналізу. Серед чисельних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики виділено ітераційні методи з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку як найбільш ефективні з точки зору зручності алгоритмізації та оцінювання похибки. Було встановлено, що двобічні ітераційні схеми розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння відомі лише для рівнянь вигляду $-u'' = f(x,u)$ та $-\Delta u = f(\mathbf{x},u)$. Крім того, розв'язання задачі Діріхле для рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x},u)$ двобічними методами є неможливим в області, для якої невідомий явний вираз для функції Гріна, а застосування двобічних ітераційних методів при розв'язанні першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь та першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння невідомі.

За результатами проведеного аналізу сформульовано задачі дисертаційного дослідження, які передбачають на основі теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах розробку нових та вдосконалення існуючих методів двобічних наближень розв'язання перших крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, напівлінійних еліптичних рівнянь і систем напівлінійних еліптичних рівнянь, а також на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень розробку нового напівдискретного методу розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

У **другому розділі** розвинуто метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна у застосуванні до розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x,u),\ x \in (a,b), \tag{1}$$

$$u(x) > 0\,,\ x \in (a,b), \tag{2}$$

$$u(a) = 0\,,\ u(b) = 0\,. \tag{3}$$

Вважатимемо, що $p(x) > 0$ на $[a,b]$, $q(x) \geq 0$ на $[a,b]$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ неперервні на $[a,b]$, $f(x,u)$ неперервна і додатна при $x \in [a,b]$, $u > 0$.

Нехай $G(x,s)$ – функція Гріна задачі (1) – (3). Тоді задача (1) – (3) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_a^b G(x,s) f(s,u(s))ds\,. \tag{4}$$

Рівняння (4) розглядатимемо у банаховому просторі $C[a,b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$. Виділимо у $C[a,b]$ конус невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+$. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $C[a,\,b]$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $u,\,v \in C[a,\,b]$ $u \leqslant v$, якщо $v - u \in \mathcal{K}_+$.

Означення 1. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1) – (3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (4).

З рівнянням (4) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T, що діє у $C[a,\,b]$ за правилом

$$T(u)(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s,u(s))ds\,. \tag{5}$$

Лема 1. Оператор T вигляду (5), де $G(x,s)$ – функція Гріна задачі (1) – (3), що розглядається у просторі $C[a,\,b]$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0-додатним оператором з $u_0(x) = \int\limits_a^b G(x,s)ds$, якщо функція Гріна задачі (1) – (3) допускає оцінку $\varphi(s)u_0(x) \leq G(x,s) \leq \psi(s)u_0(x)$, $a \leq x,\, s \leq b$, де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ – невід'ємні неперервні на $[a,\,b]$ функції, відмінні від тотожного нуля;

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор $\hat{T}$ вигляду

$$\hat{T}(v,w)(x) = \int\limits_a^b G(x,s) \hat{f}(s,v(s),w(s))ds \tag{6}$$

є супровідним, якщо функція $f(x,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,u) = \hat{f}(x,u,u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, v, w функція $\hat{f}(x,v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (a,\,b)$;

г) є псевдоувігнутим і u_0-псевдоувігнутим оператором, де $u_0(x) = \int\limits_a^b G(x,s)ds$, якщо $\hat{f}\left(x,\, \tau v,\, \dfrac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x,\, v,\, w)$, $x \in (a,\,b)$, для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0,\,1)$.

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0,\, w^0 >$ умовами

$$\int\limits_a^b G(x,s) \hat{f}(s,v^0(s),w^0(s))ds \geq v^0(x) \text{ для всіх } x \in [a,\,b],$$

$$\int\limits_a^b G(x,s) \hat{f}(s,w^0(s),v^0(s))ds \leq w^0(x) \text{ для всіх } x \in [a,\,b].$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x,s)\hat{f}(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s))ds\,,\; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_a^b G(x,s)\hat{f}(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds\,,\; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x)\,,\; w^{(0)}(x) = w^0(x)\,. \tag{9}$$

Умови двобічної збіжності ітераційного процесу (7) – (9) до єдиного розв'язку задачі (1) – (3) викладено у наступних теоремах.

Теорема 1. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (5) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (6) і система рівнянь $v(x) = \int_a^b G(x,s)\hat{f}(s, v(s), w(s))ds$, $w(x) = \int_a^b G(x,s)\hat{f}(s, w(s), v(s))ds$ не має на $< v^0, w^0 >$ таких розв'язків, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (7) – (9) збігається за нормою простору $C[a, b]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0\,. \tag{10}$$

Ланцюг нерівностей (10) саме і характеризує ітераційний метод (7) – (9) як метод двобічних наближень.

Теорема 2. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (5) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (6) і для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $x \in (a, b)$ має місце нерівність $\hat{f}(x, v + u, w - u) < \hat{f}(x, v, w) + uM^{-1}$, де $M = \max\limits_{x \in [a,\, b]} u_0(x)$. Тоді ітераційний процес (7) – (9) двобічно збігається у нормі простору $C[a, b]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3).

Теорема 3. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (5) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (6) та існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(x, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{x \in [a,\, b]} w^0(x)$, і для всіх $x \in (a, b)$ задовольняє нерівність $\left|\hat{f}(x, w, v) - \hat{f}(x, v, w)\right| \leq L|w - v|$, причому $\gamma = LM < 1$, де $M = \max\limits_{x \in [a,\, b]} u_0(x)$. Тоді ітераційний процес (7) – (9) двобічно збігається у нормі простору $C[a, b]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3).

Теорема 4. Нехай $< v^0, w^0 > \subset K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (5) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду

(6) і $\hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x, v, w)$, $x \in (a, b)$, для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$. Тоді ітераційний процес (7) – (9) двобічно збігається у нормі простору $C[a, b]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3).

Для функції $f(x, u)$, яка монотонно зростає за u (тобто є ізотонною за u), можна обрати $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$, а для функція $f(x, u)$, яка монотонно спадає за u (тобто є антитонною за u), можна обрати $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$. Тоді методи двобічних наближень для ізотонних та антитонних нелінійностей отримуються як частинні випадки розробленого методу.

За наближений розв'язок крайової задачі (1) – (3) на k-й ітерації приймаємо функцію $u^{(k)}(x) = \dfrac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}$. Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k-й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку $u^{(k)}(x)$:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \le \frac{1}{2} \max_{x \in [a,\, b]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [a,\, b]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Крім того, за умов теореми 3 можна навести й апріорну оцінку похибки:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \le \frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in [a,\, b]} (w^0(x) - v^0(x)),$$

з якої можна отримати оцінку для кількості ітерацій $k_0(\varepsilon)$, необхідних для досягнення заданої точності ε:

$$k_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \dfrac{\max_{x \in [a,\, b]} (w^0(x) - v^0(x))}{2\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{LM}} \right] + 1,$$

де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Як приклади розглянуто застосування розробленого методу двобічних наближень до розв'язання перших крайових задач для двох найбільш уживаних у математичному моделюванні звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$-u'' = f(x,u),\ x \in (a,b),$$
$$-u'' + \kappa^2 u = f(x,u),\ x \in (a,b).$$

Також у другому розділі розвинуто метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна у застосуванні до розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x},u),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{11}$$
$$u(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{12}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{13}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Вважатимемо, що $p(\mathbf{x}) > 0$ у $\overline{\Omega}$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$ у $\overline{\Omega}$, $p(\mathbf{x})$ неперервно диференційовна у $\overline{\Omega}$, $q(\mathbf{x})$ неперервна у $\overline{\Omega}$, $f(\mathbf{x},u)$ неперервна і додатна при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $u > 0$.

Якщо $G(\mathbf{x},\mathrm{s})$ – функція Гріна задачі (11) – (13), то задача (11) – (13) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathrm{s}) f(\mathrm{s},u(\mathrm{s}))d\mathrm{s}. \tag{14}$$

Розглядатимемо рівняння (14) у банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ функцій, неперервних у $\overline{\Omega}$. У просторі $C(\overline{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $C(\overline{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом: $u \leqslant v$ для $u, v \in C(\overline{\Omega})$, якщо $v - u \in \mathcal{K}_+$.

Означення 2. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (11) – (13) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (14).

З рівнянням (14) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T, що діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathrm{s}) f(\mathrm{s},u(\mathrm{s}))d\mathrm{s}. \tag{15}$$

Лема 2. Оператор T вигляду (15), де $G(\mathbf{x},\mathrm{s})$ – функція Гріна задачі (11) – (13), що розглядається у просторі $C(\overline{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0-додатним оператором, де $u_0(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})d\mathrm{s}$;

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор $\hat{T}$ вигляду

$$\hat{T}(v,w)(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v(\mathrm{s}),w(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \tag{16}$$

є супровідним, якщо функція $f(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x},u)=\hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w функція $\hat{f}(\mathbf{x},v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$;

г) є псевдоувігнутим і u_0-псевдоувігнутим оператором з $u_0(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})d\mathrm{s}$, якщо $\hat{f}\left(\mathbf{x},\tau v,\dfrac{1}{\tau}w\right)>\tau\hat{f}(\mathbf{x},v,w)$, $\mathbf{x}\in\Omega$, для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau\in(0,1)$.

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (14) (а отже, і крайової задачі (11) – (13)).

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $<v^0,w^0>$ умовами

$$\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v^0(\mathrm{s}),w^0(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\ge v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega}, \tag{17}$$

$$\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w^0(\mathrm{s}),v^0(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\le w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega} \tag{18}$$

і сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v^{(k)}(\mathrm{s}),w^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k=0,1,2,\ldots, \tag{19}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w^{(k)}(\mathrm{s}),v^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k=0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x})=v^0(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x})=w^0(\mathbf{x}). \tag{21}$$

У наступних теоремах викладено умови двобічної збіжності ітераційного процесу (19) – (21) до єдиного розв'язку задачі (11) – (13).

Теорема 5. Нехай $<v^0,w^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (15) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (16) і система рівнянь $v(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v(\mathrm{s}),w(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$, $w(\mathbf{x})=\int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w(\mathrm{s}),v(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$ не має на $<v^0,w^0>$ розв'язків таких, що $v\ne w$. Тоді ітераційний процес (19) – (21)

збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant ... \leqslant v^{(k)} \leqslant ... \leqslant u^* \leqslant ... \leqslant w^{(k)} \leqslant ... \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 .$$

Теорема 6. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (15) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (16) і для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ має місце нерівність $\hat{f}(\mathbf{x}, v+u, w-u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1}$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$. Тоді ітераційний процес (19) – (21) двобічно збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13).

Теорема 7. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (15) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (16) і існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)\right| \le L|w - v|$, причому $\gamma = LM < 1$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$. Тоді ітераційний процес (19) – (21) двобічно збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13).

Теорема 8. Нехай $< v^0, w^0 > \subset K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (15) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (16) і $\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \dfrac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0,1)$. Тоді ітераційний процес (19) – (21) двобічно збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13).

Якщо на k-й ітерації за наближений розв'язок задачі (11) – (13) обирати функцію $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$, то матиме місце апостеріорна оцінку похибки вигляду

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

Отже, для досягнення точності ε ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

Застосування методу двобічних наближень (19) – (21) розглянуто на прикладі перших крайових задач для еліптичних рівнянь другого порядку вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$-\Delta u+\kappa^2 u=f(\mathbf{x},u),\ \mathbf{x}\in\Omega.$$

Обмеженість застосовності розглянутого методу двобічних наближень пов'язана з необхідністю побудови функції Гріна задачі (11) – (13) для переходу до інтегрального рівняння (14). Тому, незважаючи на теоретичний факт існування функції Гріна для досить широкого класу областей, практичне застосування описаного методу обмежується лише деякими окремими випадками.

Окрім необхідності будувати функцію Гріна для переходу до еквівалентного інтегрального рівняння при практичній реалізації двобічних ітераційних методів певною проблемою є також побудова сильно інваріантного конусного відрізка $< v^0, w^0 >$, який задає початкові наближення. Зокрема, для побудови $< v^0, w^0 >$ у випадку задачі (11) – (13) пропонується такий підхід. Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x})=0$, $i=1,2,\ldots,s$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція. Тоді за допомогою методу R-функцій можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

а) $\omega(\mathbf{x})>0$ у Ω; б) $\omega(\mathbf{x})=0$ на $\partial\Omega$; в) $\left|\nabla\omega(\mathbf{x})\right|\neq 0$ на $\partial\Omega$.

Кінці конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ шукатимемо у вигляді $v^0(\mathbf{x})=\alpha\omega(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x})=\beta\omega(\mathbf{x})$, де $0<\alpha<\beta$. Тоді нерівності (17), (18) набудуть вигляду

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},\alpha\omega(\mathrm{s}),\beta\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\geq\alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega},$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},\beta\omega(\mathrm{s}),\alpha\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\leq\beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega}.$$

Ці нерівності зводяться до вигляду $\alpha\leq\min\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}h_1(\mathbf{x};\alpha,\beta)$, $\beta\geq\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}h_2(\mathbf{x};\alpha,\beta)$, де $h_1(\mathbf{x};\alpha,\beta)=\int_\Omega\frac{G(\mathbf{x},\mathrm{s})}{\omega(\mathbf{x})}\hat{f}(\mathrm{s},\alpha\omega(\mathrm{s}),\beta\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$, $h_2(\mathbf{x};\alpha,\beta)=\int_\Omega\frac{G(\mathbf{x},\mathrm{s})}{\omega(\mathbf{x})}\hat{f}(\mathrm{s},\beta\omega(\mathrm{s}),\alpha\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$.

Величина $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}(w^0(\mathbf{x})-v^0(\mathbf{x}))=(\beta-\alpha)\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}\omega(\mathbf{x})$ для більш швидкої збіжності ітерацій має бути якомога меншою, а отже, при реалізації ітераційного процесу (19) – (21) слід взяти найбільше α і найменше β, що задовольняють вказані нерівності.

Для підтвердження ефективності розроблених методів двобічних наближень було проведено низку обчислювальних експериментів для тестових задач.

Математичне моделювання течії провідного середовища у циліндрі з непроникними стінками та математичне моделювання теплового самозаймання хімічно активної суміші газів у посудині призводить до необхідності розв'язання крайової задачі

$$\Delta\theta=e^\theta,\ (x_1,x_2)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2, \tag{22}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{23}$$

Для зведення рівняння задачі (22), (23) до вигляду (11) зробимо заміну

$\theta = -u$. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$-\Delta u = e^{-u},\ (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{25}$$

Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна призводить до ітераційного процесу

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-w^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-v^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0,\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = M, \tag{28}$$

де $M = \max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$, $u_0(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$, з умовою збіжності $M < 1$.

Якщо Ω – круг одиничного радіусу, то точний розв'язок задачі (24), (25) має вигляд $u^*(x_1, x_2) = \ln(8k) - \ln(1 - k(x_1^2 + x_2^2))^2$, $k = 5 - 2\sqrt{6}$. Знайдено, що $M = \dfrac{1}{4}$, а отже, умова $M < 1$ виконується та ітераційний процес (26) – (28) є збіжним.

Точність $\varepsilon = 10^{-4}$ була досягнута за 4 ітерації. У наближеному розв'язку за кожну ітерацію встановлюється один вірний знак після коми. Збіжність ітераційної послідовності геометрична з показником близько $0{,}146$. Фактична похибка наближеного розв'язку $u^{(4)}(\mathbf{x})$ складає $\left\| u^{(4)} - u^* \right\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}48 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 1 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень (штрихована лінія), $k = 0, 1, 2, 3, 4$, у перерізі $x_2 = 0$, а на рис. 2 наведено лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(4)}(\mathbf{x})$.

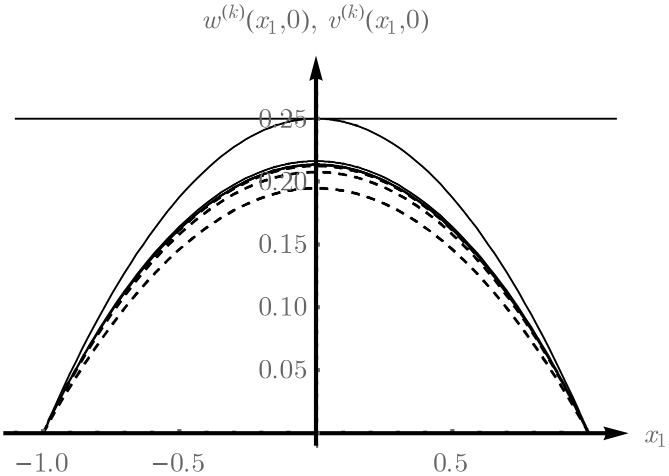

Рисунок 1 – Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень до розв'язку задачі (24), (25) у перерізі $x_2 = 0$

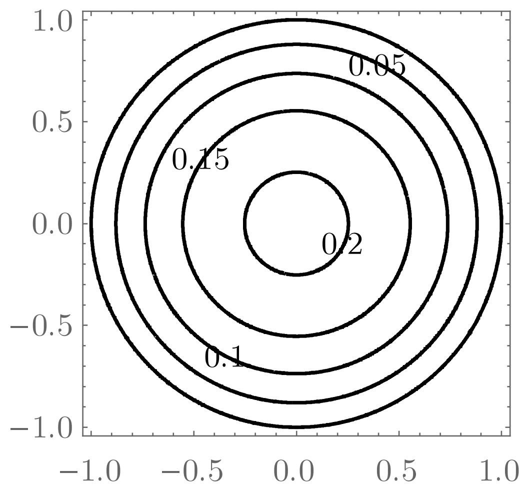

Рисунок 2 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(4)}(\mathbf{x})$ задачі (24), (25) Для задачі (24), (25) також було проведено обчислювальний експеримент для випадку, коли Ω – прямокутник зі сторонами $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$. Для відповідної функції Гріна знайдено, що $M = 0,00711...$, а отже, умова $M < 1$ виконується та ітераційний процес (26) – (28) є збіжним. Точність $\varepsilon = 10^{-6}$ було досягнуто за дві ітерації, при цьому $\left\|u^{(2)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(2)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = 0,007078$, що добре узгоджується зі значенням, отриманим Белманом і Калабою (відносне відхилення складає $0,1\%$).

При моделюванні роботи актюатора електростатичної мікроелектромеханічної системи приходять до крайової задачі

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2},\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{29}$$

$$0 < u(\mathbf{x}) < 1,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{30}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{31}$$

Задача (29) – (31) описує прогин тонкої еластичної діелектричної мембрани, яка займає область Ω, закріплена на своїй межі та розташована над жорсткою нееластичною пластинкою, яка добре проводить електричний струм. Тут $u(\mathbf{x})$ – величина деформації мембрани, λ – додатний параметр, що характеризує діелектричні властивості процесу.

Застосування до задачі (29) – (31) методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна призводить до ітераційного процесу

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s},\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{32}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s},\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{33}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0,\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = \underline{\beta}, \tag{34}$$

де $\underline{\beta}$ – відповідно найменший з коренів рівняння $\beta(1-\beta)^2 = \lambda M$ на інтервалі $(0;1)$, $M = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$, $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$, причому $\underline{\beta} < \frac{1}{3}$.

На підставі теореми 7 доведено, що для $\lambda < \frac{4}{27M}$ ітераційний процес (32) – (34) двобічно збігається до єдиного (узагальненого) додатного розв'язку задачі (29) – (31).

Якщо Ω – круг одиничного радіусу, то $M = \frac{1}{4}$ та ітераційний процес (32) – (34) збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (29) – (31) при $\lambda < \lambda_{\max} = \frac{16}{27}$, що співпадає з відомою умовою існування єдиного розв'язку задачі (29) – (31).

Для випадку, коли Ω – квадрат зі стороною $\sqrt{\pi}$, знайдено, що $M = 0,23144...$, отже, при $\lambda < \lambda_{\max} = 0,6101...$ існує єдиний додатний розв'язок задачі (29) – (31), до якого двобічно збігається ітераційний процес (32) – (34). Розрахунки було проведено для $\lambda = \frac{1}{2}$. Отримано, що $\underline{\beta} = 0,16662$. Точність $\varepsilon = 10^{-4}$ була досягнута за 5 ітерацій, причому збіжність ітераційної послідовності є геометричною з показником близько $0,228$. На рис. 3 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень (штрихована лінія), $k = 0, 1, ..., 5$, у перерізі $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а на рис. 4 наведено лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ задачі (29) – (31).

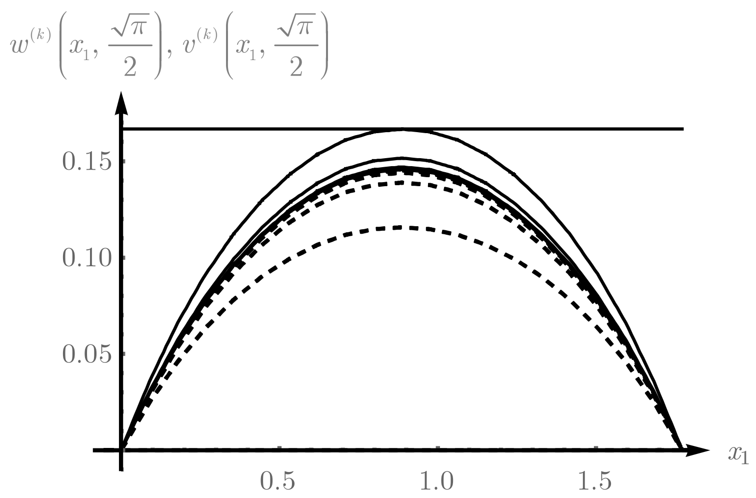

Рисунок 3 – Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень до розв'язку задачі (29) – (31) у перерізі $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

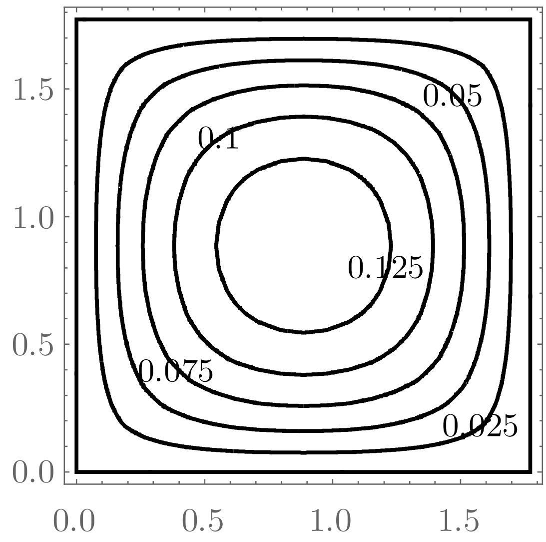

Рисунок 4 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ задачі (29) – (31)

Основні результати другого розділу опубліковані у роботах [1 – 5, 8, 9, 11, 16, 19, 20, 22 – 24, 29, 35].

У **третьому розділі** введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова, що є узагальненням квазіфункції Гріна, яка використовувалася у роботах акад. НАН України В.Л. Рвачова, і з її допомогою для розв'язання задачі вигляду (11) – (13) вперше розроблено відповідний метод двобічних наближень. Це дозволило подолати обмеженість використання методу двобічних наближень, заснованого на заміні крайової задачі (11) – (13) інтегральним рівнянням за допомогою функції Гріна, за рахунок побудови іншого інтегрального рівняння, еквівалентного розглядуваній крайовій задачі, ядро якого може бути побудовано в явному вигляді для більш широкого класу областей Ω, ніж функція Гріна.

Позначимо диференціальний оператор у лівій частині рівняння (11) через A:

$$Au \equiv -\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u\,. \tag{35}$$

Означення 3. Нехай $g(\mathbf{x}, \mathrm{s})$ – фундаментальний розв'язок рівняння $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u) + q(\mathbf{x})u = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора A вигляду (35) назвемо функцію

$$Q(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = g(\mathbf{x}, \mathrm{s}) - \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{s}), \qquad (36)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2)$ у випадку $\mathbb{R}^2$ і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$ у випадку $\mathbb{R}^3$; $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{s})$ – симетрична ($\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = \tilde{g}(\mathrm{s}, \mathbf{x})$) двічі диференційовна у $\Omega \times \Omega$ функція така, що $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = g(\mathbf{x}, \mathrm{s})$, якщо $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ чи $\mathrm{s} \in \partial\Omega$.

Безпосередньо з означення 3 випливає симетричність квазіфункції Гріна-Рвачова: $Q(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = Q(\mathrm{s}, \mathbf{x})$ та те, що $Q(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = 0$ на $\partial\Omega$.

Користуючись інтегральним поданням для функції $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ такої, що $Au \in L_2(\Omega)$, та другою формулою Гріна для функцій $u, \tilde{g} \in C^2(\overline{\Omega})$, отримано еквівалентне задачі (11) – (13) інтегральне рівняння Урисона вигляду

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathrm{s}) u(\mathrm{s}) d\mathrm{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathrm{s}) f(\mathrm{s}, u(\mathrm{s})) d\mathrm{s}, \qquad (37)$$

де $K(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = A_{\mathrm{s}} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathrm{s})$.

Рівняння (37) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ функцій, неперервних у $\overline{\Omega}$. У просторі $C(\overline{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій і введемо за його допомогою напівупорядкованість.

Означення 4. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (11) – (13) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (37).

Конкретизуємо означення квазіфункції Гріна-Рвачова та її властивості для двох найпоширеніших у математичному моделюванні диференціальних операторів – оператора Лапласа $Au = -\Delta u$ та оператора Гельмгольця $Au = -\Delta u + \kappa^2 u$.

Означення 5. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа у $\mathbb{R}^2$ назвемо функцію

$$Q_2(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{\chi(\mathbf{x}, \mathrm{s})}{r^2}}. \qquad (38)$$

Означення 6. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа у $\mathbb{R}^3$ назвемо функцію

$$Q_3(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathrm{s})} - r}{r\sqrt{r^2 + \chi(\mathbf{x}, \mathrm{s})}}. \qquad (39)$$

Означення 7. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Гельмгольця у $\mathbb{R}^2$ назвемо функцію

$$Q_2^{(\kappa)}(\mathrm{x},\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi}\Big(K_0(\kappa r) - K_0\left(\kappa\sqrt{r^2+\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})}\right)\Big), \tag{40}$$

де $K_0(z)$ – модифікована функція Бесселя другого роду.

Означення 8. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Гельмгольця у $\mathbb{R}^3$ назвемо функцію

$$Q_3^{(\kappa)}(\mathrm{x},\mathrm{s}) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2+\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})}e^{-\kappa r} - re^{-\kappa\sqrt{r^2+\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})}}}{r\sqrt{r^2+\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})}}. \tag{41}$$

У наведених означеннях $\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})$ – симетрична ($\chi(\mathrm{x},\mathrm{s}) = \chi(\mathrm{s},\mathrm{x})$) двічі диференційовна у $\Omega\times\Omega$ функція, що є додатною, якщо $\mathrm{x},\mathrm{s}\in\Omega$, і дорівнює нулю, якщо $\mathrm{x}\in\partial\Omega$ чи $\mathrm{s}\in\partial\Omega$, у випадку $\mathbb{R}^2$: $r = |\mathrm{x}-\mathrm{s}| = \sqrt{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}$, $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2)$, а у випадку $\mathbb{R}^3$: $r = |\mathrm{x}-\mathrm{s}| = \sqrt{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2+(x_3-s_3)^2}$, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Лема 3. Кожна з квазіфункцій Гріна-Рвачова (3.17), (3.18), (3.20), (3.21) має такі властивості:

а) $Q(\mathrm{x},\mathrm{s}) = 0$ на $\partial\Omega$;

б) є симетричною функцією: $Q(\mathrm{x},\mathrm{s}) = Q(\mathrm{s},\mathrm{x})$;

в) має таку ж особливість при $\mathrm{x} = \mathrm{s}$, що і звичайна функція Гріна;

г) додатна в області Ω: $Q(\mathrm{x},\mathrm{s}) > 0$, $\mathrm{x},\mathrm{s}\in\Omega$, $\mathrm{x}\neq\mathrm{s}$.

Для побудови функції $\chi(\mathrm{x},\mathrm{s})$ можна застосувати підхід, заснований на використанні теорії R-функцій. Нехай двічі диференційовна у Ω функція $\omega(\mathrm{x})$ отримана за допомогою методу R-функцій і описує геометрію області Ω. Тоді можна обрати, наприклад, $\chi(\mathrm{x},\mathrm{s}) = 4\omega(\mathrm{x})\omega(\mathrm{s})$.

Для інтегрального рівняння (37) побудуємо процес двобічних наближень знаходження його розв'язку (а отже, і розв'язку крайової задачі (11) – (13)). Введемо до розгляду нелінійний оператор T, що діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathrm{x}) = \int_\Omega K(\mathrm{x},\mathrm{s})u(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q(\mathrm{x},\mathrm{s})f(\mathrm{s},u(\mathrm{s}))d\mathrm{s}. \tag{42}$$

Оператор T є сумою лінійного інтегрального оператора T_1 з ядром $K(\mathrm{x},\mathrm{s})$ і нелінійного оператора Гаммерштейна T_2 з ядром $Q(\mathrm{x},\mathrm{s})$. Через додатність квазіфункції Гріна-Рвачова $Q(\mathrm{x},\mathrm{s})$, якщо $\mathrm{x},\mathrm{s}\in\Omega$ ($\mathrm{x}\neq\mathrm{s}$), можна стверджувати, що оператор T_2 залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$, тобто T_2 – додатний оператор. Проте ми не можемо бути впевненими щодо знаку функції $K(\mathrm{x},\mathrm{s})$ при $\mathrm{x},\mathrm{s}\in\Omega$ ($\mathrm{x}\neq\mathrm{s}$), а отже, не можемо стверджувати, що додатним є і оператор T.

Позначимо $K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})=\max\{0,K(\mathbf{x},\mathrm{s})\}$, $K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})=\max\{0,-K(\mathbf{x},\mathrm{s})\}$. Тоді оператор T вигляду (42) набуде вигляду

$$T(u)(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})u(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})u(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})f(\mathrm{s},u(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\,. \tag{43}$$

Припустимо, що функція $f(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x},u)=\hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, причому неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x},v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$. Тоді оператор T вигляду (43) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v,w)(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})v(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})w(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v(\mathrm{s}),w(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\,. \tag{44}$$

Виділимо у конусі $\mathcal{K}_{+}$ сильно інваріантний конусний відрізок $<v^{0},w^{0}>$ умовами

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{0}(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{0}(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\\+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v^{0}(\mathrm{s}),w^{0}(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\geq v^{0}(\mathbf{x})\text{ для всіх }\mathbf{x}\in\overline{\Omega},\end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{0}(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{0}(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\\+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w^{0}(\mathrm{s}),v^{0}(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\leq w^{0}(\mathbf{x})\text{ для всіх }\mathbf{x}\in\overline{\Omega}.\end{gathered} \tag{46}$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$\begin{gathered}v^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\\+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v^{(k)}(\mathrm{s}),w^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k=0,1,2,...,\end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered}w^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}+\\+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w^{(k)}(\mathrm{s}),v^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k=0,1,2,...,\end{gathered} \tag{48}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x})=v^{0}(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x})=w^{0}(\mathbf{x}). \tag{49}$$

Двобічна збіжність ітераційного процесу (47) – (49) гарантуватиметься виконанням умов таких теорем.

Теорема 9. Нехай $<v^{0},w^{0}>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (43) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (44) і система рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\,,$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s}))d\mathbf{s}$$

не має на $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (47) – (49) збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 .$$

Теорема 10. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (43) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (44) і має місце умова: для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ має місце нерівність $\hat{f}(\mathbf{x}, v+u, w-u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + \dfrac{u}{M + M_1}$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}$, $M_1 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} [K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s}) + K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})]d\mathbf{s}$. Тоді ітераційний процес (47) – (49) двобічно збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13).

Теорема 11. Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (43) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (44) і існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)\right| \leq L|w - v|$, причому $\gamma = M_1 + LM < 1$, де сталі M і M_1 визначаються в умовах теореми 10. Тоді ітераційний процес (47) – (49) двобічно збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (11) – (13).

Якщо за наближений розв'язок крайової задачі (11) – (13) на k-й ітерації взяти функцію $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$, то справджуватиметься апостеріорна оцінка похибки вигляду $\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \leq \dfrac{1}{2}\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, а за виконання умов теореми 11 і апріорна оцінка похибки вигляду $\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \leq \dfrac{\gamma^k}{2}\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))$. Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то щоб з точністю ε можна було вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$, ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$.

Оскільки шуканий розв'язок задачі (11) – (13) дорівнює нулю на межі $\partial\Omega$ області Ω, то запропоновано шукати кінці сильно інваріантного конусного відрізка у вигляді $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ $(0 < \alpha < \beta)$, де функція $\omega(\mathbf{x})$, яка побудована методом R-функцій, є такою, що $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω, $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Тоді відповідно до (45), (46) для визначення α, β отримаємо систему нерівностей

$$\alpha\int_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})\omega(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \beta\int_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})\omega(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \\ +\int_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},\alpha\omega(\mathrm{s}),\beta\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega}, \quad (50)$$

$$\beta\int_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})\omega(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \alpha\int_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})\omega(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \\ +\int_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},\beta\omega(\mathrm{s}),\alpha\omega(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\overline{\Omega}. \quad (51)$$

Отже, якщо система нерівностей (50), (51) має розв'язок (α,β) такий, що $0 < \alpha < \beta$, то конусний відрізок $<\alpha\omega(\mathbf{x}),\ \beta\omega(\mathbf{x})>$ буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора T вигляду (43) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (44).

Оскільки для більш швидкої збіжності ітерацій величина $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = (\beta-\alpha)\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}\omega(\mathbf{x})$ має бути якомога меншою, то при практичній реалізації ітераційного процесу (47) – (49) слід взяти найбільше α і найменше β, $0 < \alpha < \beta$, що задовольняють нерівностям (50), (51).

Для підтвердження ефективності розробленого методів двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова було проведено низку обчислювальних експериментів для тестових задач.

Для задачі (24), (25), розглядуваної у прямокутнику Ω зі сторонами $\dfrac{1}{2}$ та $\dfrac{1}{4}$ застосування методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова призводить до ітераційного процесу

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_2^+(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K_2^-(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \\ +\int_\Omega Q_2(\mathbf{x},\mathrm{s})e^{-w^{(k)}(\mathrm{s})}d\mathrm{s},\ k = 0,1,2,\ldots, \quad (52)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_2^+(\mathbf{x},\mathrm{s})w^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K_2^-(\mathbf{x},\mathrm{s})v^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \\ +\int_\Omega Q_2(\mathbf{x},\mathrm{s})e^{-v^{(k)}(\mathrm{s})}d\mathrm{s},\ k = 0,1,2,\ldots, \quad (53)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x}), \quad (54)$$

де

$$K_2^+(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0, K_2(\mathbf{x},\mathbf{s})\}, \;\; K_2^-(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0, -K_2(\mathbf{x},\mathbf{s})\},$$

$$K_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\tilde{g}_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2}\tilde{g}_2(\mathbf{x},\mathbf{s}), \quad \tilde{g}_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}},$$

$$\omega(x_1,x_2) = 2x_1\left(\frac{1}{2} - x_1\right) + 4x_2\left(\frac{1}{4} - x_2\right) - \sqrt{4x_1^2\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + 16x_2^2\left(\frac{1}{4} - x_2\right)^2}.$$

Підібрано значення $\alpha = 0,7$, $\beta = 1,9$ і знайдено, що

$$M = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s} = 0,004400,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_2^+(\mathbf{x},\mathbf{s}) + K_2^-(\mathbf{x},\mathbf{s})]d\mathbf{s} = 0,656106, \;\; \gamma = M_1 + LM = 0,660506.$$

Отже, $\gamma < 1$ і за теоремою 11 послідовні наближення, які формуються за схемою (51) – (54), двобічно збігаються до розв'язку задачі (24), (25), що розглядається у прямокутнику Ω. Точність $\varepsilon = 10^{-6}$ була досягнута на десятій ітерації. Збіжність ітераційної послідовності виявилася геометричною з показником близько $0,435$. При цьому $\left\|u^{(10)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} = u^{(10)}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = 0,007070$, що дуже добре узгоджується зі значенням, отриманим Белманом і Калабою (відносне відхилення складає $0,014\%$). Також розв'язок $u^{(10)}(\mathbf{x})$ добре узгоджений з розв'язком, отриманим у другому розділі методом двобічних наближень на основі використання функцій Гріна: норма різниці між ними у просторі $C(\bar{\Omega})$ складає $0,15 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 5 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень (штрихована лінія), $k = 0, 1, 2, 3, 4$, у перерізі $x_2 = 0,125$, а на рис. 6 наведено лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$.

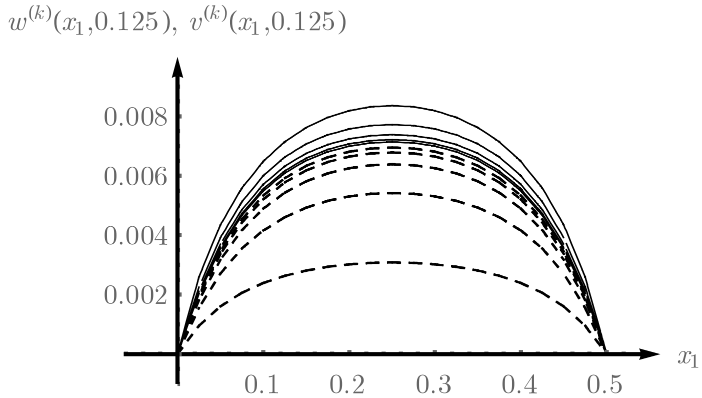

Рисунок 5 – Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень до розв'язку задачі (24), (25) у перерізі $x_2 = 0,125$

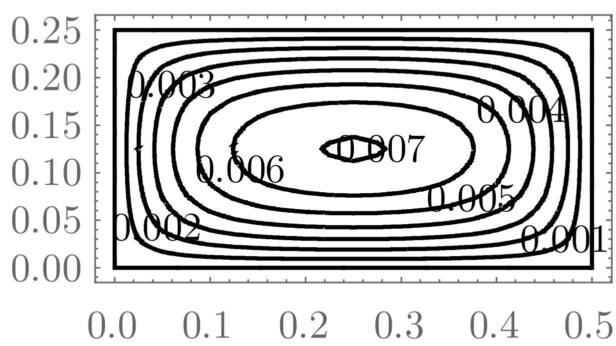

Рисунок 6 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(10)}(\mathbf{x})$ задачі (24), (25)

Обчислювальний експеримент методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова було проведено також для задачі (29) – (31), що розглядається у квадраті зі стороною $\sqrt{\pi}$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Ітераційний процес збігся з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за тринадцять ітерацій, наближений розв'язок $u^{(5)}(\mathbf{x})$, отриманий методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, та наближений розв'язок $u^{(13)}(\mathbf{x})$, отриманий методом двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова, добре узгоджені між собою: норма різниці між ними у просторі $C(\overline{\Omega})$ складає $0,80 \cdot 10^{-3}$.

Основні результати третього розділу опубліковані у роботах [8, 9, 18, 25, 26, 29, 34, 36].

У **четвертому розділі** розглядається застосування розроблених у другому та третьому розділах методів двобічних наближень до розв'язання перших крайових задач для звичайних диференціальних та еліптичних рівнянь з оператором Лапласа й оператором Гельмгольця та з різними типами степеневих нелінійностей (ізотонною $f(u) = \lambda u^p$, антитонною $f(u) = \mu u^{-q}$ та гетеротонною $f(u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$). Доведено, що послідовні наближення двобічно збігаються до розв'язку відповідної задачі у ізотонному випадку при $0 < p < 1,\ \lambda > 0$, у антитонному – при $0 < q < 1,\ \mu > 0$, а у гетеротонному випадку – при $0 < p < 1,\ 0 < q < 1,\ \lambda > 0,\ \mu > 0$. Крім того, застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна для кожної із задач дозволило отримати апріорні оцінки розв'язку. Наприклад, для задачі

$$
\begin{gathered}
-u'' = \lambda u^p,\ x \in (-1,1), \\
u(x) > 0,\ x \in (-1,1), \\
u(-1) = u(1) = 0,
\end{gathered}
$$

отримано, що для всіх $\lambda > 0$ і $0 < p < 1$ її розв'язок апріорно оцінюється такими нерівностями: для всіх $x \in [-1,1]$

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{1-p}}(1-x^2) \le u^*(x) \le \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{2^p}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} - \frac{1}{1+p}\right)\right]^{\frac{1}{1-p}}(1-x^2),
$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція, $\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, а для задачі

$$
\begin{gathered}
-\Delta u = \lambda u^p,\ \mathbf{x} \in \Omega, \\
u(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} = 0,
\end{gathered}
$$

отримано, що для всіх $\lambda > 0$ і $0 < p < 1$ її розв'язок в одиничному крузі апріорно оцінюється нерівностями:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2^{p+1}(1+p)}\right)^{\frac{1}{1-p}}(1-x_1^2-x_2^2) \le u^*(\mathbf{x}) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda H_{1+p}}{2^{p+1}(1+p)}\right)^{\frac{1}{1-p}}(1-x_1^2-x_2^2),$$

де H_x – гармонічне число, $H_x = \int\limits_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt$, а у одиничній кулі – нерівностями:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{2^{p+2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{1-p}}(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2) \le u^*(\mathbf{x}) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{p+1}}\left(\frac{2}{1+p}-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)}\right)\right]^{\frac{1}{1-p}}(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2).$$

У кожному з випадків чисельно було досліджено залежність розв'язку від параметрів задачі. Зокрема, для випадку, коли Ω – одиничний круг, на рис. 7 наведено графіки залежності від p та λ норми розв'язку задачі з оператором Лапласа та ізотонною нелінійністю, а на рис. 8 – графіки залежності від q та μ норми розв'язку задачі з оператором Гельмгольця ($\kappa = 1$) та антитонною нелінійністю.

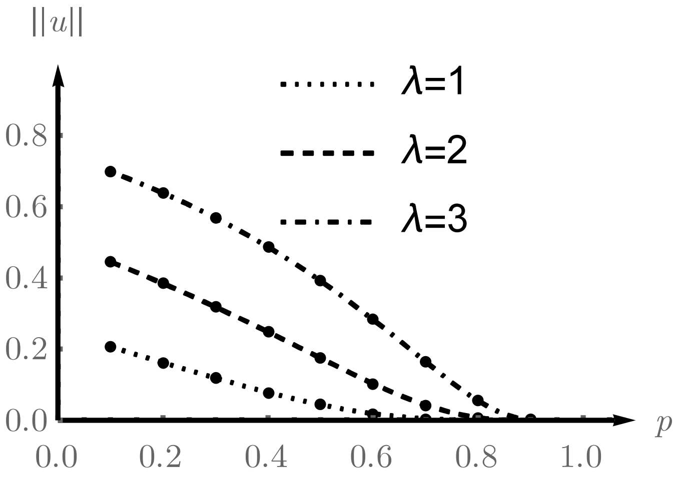

Рисунок 7 – Графіки залежності норми $\|u\|$ від p при $\lambda = 1, 2, 3$

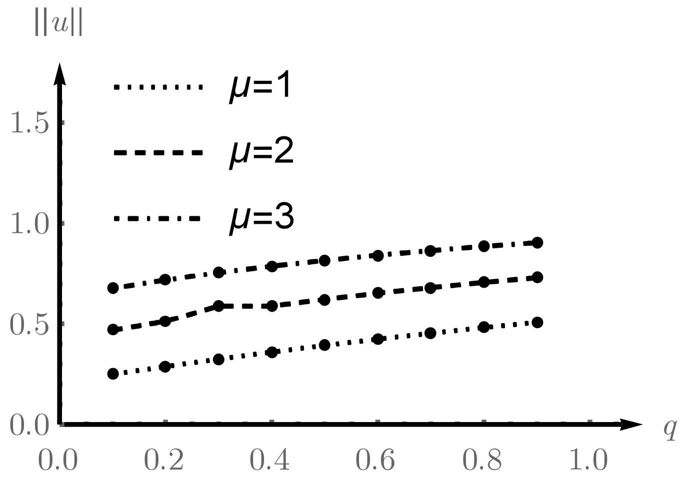

Рисунок 8 – Графіки залежності норми $\|u\|$ від q при $\mu = 1, 2, 3$ ($\kappa = 1$)

Для еліптичних крайових задач з різними типа нелінійностей було проведено порівняння методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова. Для задач з оператором Лапласа було розглянуто одиничний квадрат, половину одиничного кругу й одиничний куб, а для задач з оператором Гельмгольця – одиничний круг, одиничний квадрат, половину одиничного кругу, одиничну кулю й одиничний куб. В усіх випадках отримані обома методами результати виявилася добре узгодженими. Швидкість збіжності ітераційних процесів, побудованих з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова, виявилась більш повільною, ніж ітераційних процесів, побудованих з використанням функції Гріна, але їх точність є більш високою. На нашу думку, це пов'язано перш за все з тим, що всі функції, які входять до підінтегральних виразів в ітераційних формулах на основі використання квазіфункції, мають замкнену форму на відміну від функцій Гріна, які подаються зазвичай рядами Фур'є та при обчислювальній реалізації ітераційних процесів неминуче мають бути замінені частковою сумою.

Основні результати четвертого розділу опубліковані у роботах [4, 27 – 32].

У **п'ятому розділі** методи двобічних наближень, розроблені у другому і третьому розділах для еліптичних рівнянь поширюються на першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь.

Розглянемо однорідну задачу Діріхле для системи n напівлінійних еліптичних рівнянь

$$-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i) + q_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_n),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{55}$$

$$u_i(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{56}$$

$$u_i\big|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{57}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Вважатимемо, що для всіх $i = 1,2,\ldots,n$ $p_i(\mathbf{x}) > 0$ у $\overline{\Omega}$, $q_i(\mathbf{x}) \geq 0$ у $\overline{\Omega}$, $p_i(\mathbf{x})$ неперервно диференційовні у $\overline{\Omega}$, $q_i(\mathbf{x})$ неперервні у $\overline{\Omega}$, $f_i(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_n)$ неперервні і додатні при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $u_1, \ldots, u_n > 0$.

Від задачі (55) – (57) перейдемо до еквівалентної системи з n інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) f_i(\mathrm{s}, u_1(\mathrm{s}), \ldots, u_n(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ i = 1, \ldots, n, \tag{58}$$

де $G_i(\mathbf{x}, \mathrm{s})$, $i = 1, \ldots, n$, – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $A_i u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u) + q_i(\mathbf{x})u$ у області Ω; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Систему рівнянь (58) розглядатимемо у банаховому просторі $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ вектор-функцій, неперервних у $\overline{\Omega}$. Виділимо у $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ конус $\mathcal{K}_+$ вектор-функцій з невід'ємними координатами. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathcal{K}_+$,

Означення 9. Розв'язком (узагальненим) задачі (55) – (57) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (58).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор $\mathbf{T}$, який діє у $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ за правилом, що визначається правою частиною системи рівнянь (58):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathrm{s})\mathbf{f}(\mathrm{s}, \mathbf{u}(\mathrm{s}))d\mathrm{s}. \tag{59}$$

Лема 4. Оператор $\mathbf{T}$ вигляду (59), де $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathrm{s})$ – функція Гріна задачі (55) – (57), що розглядається у просторі $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є $\mathbf{u}_0$-додатним оператором, де вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ визначається рівністю

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (u_0^1(\mathbf{x}), ..., u_0^n(\mathbf{x})) = \left(\int_{\Omega} G_1(\mathbf{x}, \mathrm{s})d\mathrm{s}, ..., \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x}, \mathrm{s})d\mathrm{s}\right);$$

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathrm{s})\hat{\mathbf{f}}(\mathrm{s}, \mathbf{v}(\mathrm{s}), \mathbf{w}(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \tag{60}$$

є супровідним, якщо вектор-функція $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ дозволяє діагональне подання $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), ..., \hat{f}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}))$, де неперервні за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функції $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n)$ монотонно зростають за всіма v_i і монотонно спадають за всіма w_i, $i = 1, ..., n$, для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$;

г) є псевдоувігнутим і $\mathbf{u}_0$-псевдоувігнутим оператором, якщо для всіх додатних чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n і будь-якого $\tau \in (0, 1)$ виконуються нерівності $\hat{f}_i\left(\mathbf{x}, \tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right) > \tau\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $i = 1, ..., n$.

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку системи інтегральних рівнянь (58) (а отже, і крайової задачі (55) – (57)). Для цього спочатку у конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$, $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, ..., v_n^0)$, $\mathbf{w}^0 = (w_1^0, ..., w_n^0)$, такими умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$

$$\int_{\Omega} G_i(\mathbf{x}, \mathrm{s})\hat{f}_i(\mathrm{s}, v_1^0(\mathrm{s}), ..., v_n^0(\mathrm{s}), w_1^0(\mathrm{s}), ..., w_n^0(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \geq v_i^0(\mathbf{x}),\ i = 1,...,n,$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathrm{s})\hat{f}_i(\mathrm{s}, w_1^0(\mathrm{s}), ..., w_n^0(\mathrm{s}), v_1^0(\mathrm{s}), ..., v_n^0(\mathrm{s}))d\mathrm{s} \leq w_i^0(\mathbf{x}),\ i = 1,...,n.$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), ..., v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), ..., w_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{61}$$

$$w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), ..., w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), ..., v_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{62}$$

$$i = 1, ..., n, \ k = 0, 1, 2, ...;$$

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = v_i^0(\mathbf{x}), \ w_i^{(0)}(\mathbf{x}) = w_i^0(\mathbf{x}), \ i = 1, ..., n. \tag{63}$$

Умови двобічної збіжності ітераційного процесу (61) – (63) отримуються узагальненням теорем 5 – 8 на випадок системи рівнянь. Зокрема, мають місце такі результати.

Теорема 12. Нехай $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (59) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (60) і функції $\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n)$, $i = 1,...,n$, для всіх чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n таких, що $0 < v_i, w_i < M_0^i$, де $M_0^i = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w_i^0(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняють нерівності

$$\left|\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n)\right| \le$$
$$\le L_i \max\{|v_1 - w_1|, ..., |v_n - w_n|\},$$

де $L_i > 0$, $i = 1,...,n$, причому $\gamma = \max_{i=1, ..., n}\{L_i M_i\} < 1$, де $M_i = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0^i(\mathbf{x})$. Тоді ітераційний процес (61) – (63) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (55) – (57).

Теорема 13. Нехай $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 > \subset \mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (59) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (60) та для всіх додатних чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n і будь-якого $\tau \in (0, 1)$ виконуються нерівності $\hat{f}_i\left(\mathbf{x}, \tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right) > \tau\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $i = 1, ..., n$. Тоді ітераційний процес (61) – (63) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (55) – (57).

Розроблений метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для системи напівлінійних еліптичних рівнянь має багато переваг (зокрема, проста обчислювальна схема, зручна апостеріорна оцінка похибки тощо), але його суттєвим недоліком є необхідність знати аналітичний вираз для функції Гріна, що можливо лише для обмеженої кількості еліптичних диференціальних операторів у невеликій кількості областей. Щоб подолати цей недолік розроблено метод двобічних наближень, який базується на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова.

Нехай $Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})$ – квазіфункція Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора A_i, що задається рівністю $A_i u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u) + q_i(\mathbf{x})u$, $i = 1,\ldots,n$. Тоді задача (55) – (57) еквівалентна системі n інтегральних рівнянь

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})f_i(\mathrm{s}, u_1(\mathrm{s}), \ldots, u_n(\mathrm{s}))d\mathrm{s}, \; i = 1,\ldots,n, \tag{64}$$

де $K^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = A_{i,\mathrm{s}}\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathrm{s})$; $A_{i,\mathrm{s}}u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathrm{s})\nabla u) + q_i(\mathrm{s})u$.

Систему рівнянь (64) розглядатимемо у банаховому просторі $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$.

Означення 10. Розв'язком (узагальненим) задачі (55) – (57) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (64).

Побудуємо процес двобічних наближень знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь (64) (а отже, і розв'язку крайової задачі (55) – (57)).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор $\mathbf{T}$, що діє у $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (64):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}), \ldots, T_n(\mathbf{u})(\mathbf{x})), \tag{65}$$

де $T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})f_i(\mathrm{s}, u_1(\mathrm{s}), \ldots, u_n(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$.

Для кожного i, $i = 1,\ldots,n$, позначимо $K^i_+(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = \max\{0, K^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})\}$, $K^i_-(\mathbf{x}, \mathrm{s}) = \max\{0, -K^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})\}$. Тоді

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})f_i(\mathrm{s}, u_1(\mathrm{s}), \ldots, u_n(\mathrm{s}))d\mathrm{s}.$$

Нехай вектор-функція $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ дозволяє діагональне подання $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \ldots, \hat{f}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}))$, причому неперервні за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функції $\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ монотонно зростають за всіма v_i і монотонно спадають за всіма w_i, $i = 1, \ldots, n$, для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор $\mathbf{T}$ вигляду (65) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = (\hat{T}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}), \ldots, \hat{T}_n(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x})), \tag{66}$$

де

$$\hat{T}_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x}, \mathrm{s})v_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x}, \mathrm{s})w_i(\mathrm{s})d\mathrm{s} +$$

$$+\int_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})\hat{f}_i(\mathrm{s}, v_1(\mathrm{s}), \ldots, v_n(\mathrm{s}), w_1(\mathrm{s}), \ldots, w_n(\mathrm{s}))d\mathrm{s}, \; i = 1, \ldots, n.$$

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$, $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, \ldots, v_n^0)$, $\mathbf{w}^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)$, такими умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$

$$\int\limits_\Omega K_+^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) v_i^0(\mathrm{s}) d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K_-^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) w_i^0(\mathrm{s}) d\mathrm{s} +$$

$$+\int\limits_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{f}_i(\mathrm{s}, v_1^0(\mathrm{s}), \ldots, v_n^0(\mathrm{s}), w_1^0(\mathrm{s}), \ldots, w_n^0(\mathrm{s})) d\mathrm{s} \geq v_i^0(\mathbf{x}),\ i = 1,\ldots,n,$$

$$\int\limits_\Omega K_+^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) w_i^0(\mathrm{s}) d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K_-^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) v_i^0(\mathrm{s}) d\mathrm{s} +$$

$$+\int\limits_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{f}_i(\mathrm{s}, w_1^0(\mathrm{s}), \ldots, w_n^0(\mathrm{s}), v_1^0(\mathrm{s}), \ldots, v_n^0(\mathrm{s})) d\mathrm{s} \leq w_i^0(\mathbf{x}),\ i = 1,\ldots,n.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K_+^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) v_i^{(k)}(\mathrm{s}) d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K_-^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) w_i^{(k)}(\mathrm{s}) d\mathrm{s} +$$

$$+\int\limits_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{f}_i(\mathrm{s}, v_1^{(k)}(\mathrm{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathrm{s}), w_1^{(k)}(\mathrm{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathrm{s})) d\mathrm{s},\ i = 1, \ldots, n, \tag{67}$$

$$w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K_+^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) w_i^{(k)}(\mathrm{s}) d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K_-^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) v_i^{(k)}(\mathrm{s}) d\mathrm{s} +$$

$$+\int\limits_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{f}_i(\mathrm{s}, w_1^{(k)}(\mathrm{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathrm{s}), v_1^{(k)}(\mathrm{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathrm{s})) d\mathrm{s},\ i = 1, \ldots, n, \tag{68}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = v_i^0(\mathbf{x}),\ w_i^{(0)}(\mathbf{x}) = w_i^0(\mathbf{x}),\ i = 1, \ldots, n. \tag{69}$$

Теорема 14. Нехай $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (65) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (66) та для кожного i, $i = 1, \ldots, n$, існує таке число $L_i > 0$, що для всіх чисел $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_n$ таких, що $0 < v_i, w_i < M_0^i$, де $M_0^i = \max\limits_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} w_i^0(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ функція $\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ задовольняє нерівність

$$\left|\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n)\right| \leq L_i \max\{|v_1 - w_1|, \ldots, |v_n - w_n|\},$$

причому $\gamma = \max\limits_{i=1, \ldots, n}\{M_i^1 + L_i M_i\} < 1$, де сталі M_i і M_i^1, $i = 1, \ldots, n$, визначаються рівностями $M_i = \max\limits_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \int\limits_\Omega Q^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) d\mathrm{s}$, $M_i^1 = \max\limits_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \int\limits_\Omega [K_+^i(\mathbf{x}, \mathrm{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathrm{s})] d\mathrm{s}$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді ітераційний процес (67) – (69) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (55) – (57).

Для знаходження сильно інваріантного конусного відрізка у цьому випадку теж можна скористатися загальними підходами, описаними у другому та третьому розділах, а якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес (55) – (57) чи (67) – (69) слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε можна вважати, що $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}))$.

Побудову двобічних наближень до додатного розв'язку крайової задачі (55) – (57) на основі використання функції Гріна було продемонстровано на системі двох рівнянь Лане-Емдена з однорідною умовою Діріхле

$$-\Delta u_1 = u_2^{p_1},\ -\Delta u_2 = u_1^{-p_2} \text{ у } \Omega,$$
$$u_1\big|_{\partial\Omega} = u_2\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де $p_1 > 0,\ p_2 > 0$.

Доведено, що послідовні наближення збігаються до єдиного додатного розв'язку при $0 < p_1 < 1,\ 0 < p_2 < 1$. Обчислювальний експеримент було проведено для значень $p_1 = \dfrac{1}{2},\ p_2 = \dfrac{1}{3}$, якщо Ω – одиничний круг. Точність $\varepsilon = 10^{-4}$ була досягнута на восьмій ітерації (збіжність ітераційної послідовності геометрична зі знаменником $0,382$), при цьому $\left\|u_1^{(8)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,1587$, $\left\|u_2^{(8)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,5352$.

Побудову двобічних наближень до додатного розв'язку крайової задачі (55) – (57) на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова продемонстровано на системі двох рівнянь з експоненціальними нелінійностями

$$-\Delta u_1 = e^{u_2},\ -\Delta u_2 = e^{-u_1},\ \mathbf{x} \in \Omega,$$
$$u_1\big|_{\partial\Omega} = u_2\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

що розглядається в одиничному квадраті Ω

Точність $\varepsilon = 10^{-4}$ для цієї задачі була досягнута на дев'ятій ітерації, при цьому отримано, що $\left\|u_1^{(9)}\right\| = 0,0628$, $\left\|u_2^{(9)}\right\| = 0,0585$, а ітераційна послідовність збігається з геометричною швидкістю зі знаменником $0,494$. Також наближений розв'язок з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ було отримано методом двобічних наближень, заснованим на використанні функції Гріна. Абсолютна похибка двох наближених розв'язків при цьому склала $0,12 \cdot 10^{-3}$, а відносна – близько 0,21%.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані у роботах [10, 13, 15, 33].

Шостий розділ присвячено розробці на основі модифікованого метода Роте та методів двобічних наближень, запропонованих у другому та третьому розділах, напівдискретного методу розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння. Цей метод побудовано для одно-, дво- та тривимірного рівняння.

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p(\mathbf{x},t)\nabla u) + q(\mathbf{x},t)u = f(\mathbf{x},t,u),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ t\in(0,T_0], \tag{70}$$

$$u(\mathbf{x},t) > 0,\ \mathbf{x}\in\Omega,\ t\in(0,T_0], \tag{71}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ t\in(0,T_0], \tag{72}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{73}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\overline{\Omega} = \Omega\cup\partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

Позначимо $\overline{Q}_{T_0} = \{(\mathbf{x}, t)\mid \mathbf{x}\in\overline{\Omega}, t\in[0,T_0]\}$ і вважатимемо, що $p(\mathbf{x},t) > 0$, $q(\mathbf{x},t)\ge 0$, якщо $(\mathbf{x}, t)\in\overline{Q}_{T_0}$, $p(\mathbf{x},t)$ неперервно диференційовна за змінними $\mathbf{x}$, якщо $(\mathbf{x}, t)\in\overline{Q}_{T_0}$, $q(\mathbf{x},t)$ неперервна, якщо $(\mathbf{x}, t)\in\overline{Q}_{T_0}$, $f(\mathbf{x},t,u)$ неперервна і додатна, якщо $(\mathbf{x}, t)\in\overline{Q}_{T_0}$, $u>0$, $\varphi(\mathbf{x})$ неперервна і додатна, якщо $\mathbf{x}\in\Omega$, $\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0$.

На відрізку $[0, T_0]$ введемо сітку з кроком τ, яка складається з точок $t_j = j\tau$, $j = 0,1,2,\dots,m$, $m\tau = T_0$, і позначимо $U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j)$, $j = 0,1,2,\dots,m$.

В рівнянні (70) відповідно до методу прямих (методу Роте) диференціальний оператор $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв’язок задачі (70) – (73) шукатимемо вздовж прямих $t = \mathrm{const}$. Тоді розв’язання початково-крайової задачі (70) – (73) зводиться до розв’язання послідовності напівлінійних еліптичних крайових задач

$$-\operatorname{div}(P_j(\mathbf{x})\nabla U_j) + Q_j(\mathbf{x})U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + f(\mathbf{x},t_j,U_j),\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{74}$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0,\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{75}$$

$$U_j\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m; \tag{76}$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),$$

де $P_j(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x},t_j)$, $Q_j(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x},t_j) + \dfrac{1}{\tau}$.

Крайові задачі (74) – (76) розв’язуються послідовно, а отже, при розв’язанні задачі для $U_j(\mathbf{x})$ функція $U_{j-1}(\mathbf{x})$ буде вже відомою. Тому праву частину рівняння (74) позначимо через $F(\mathbf{x}, U_j)$: $F_j(\mathbf{x}, U_j) = \dfrac{1}{\tau}U_{j-1}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x},t_j,U_j)$. Тоді для розв’язання кожної з задач (74) – (76) можна застосувати методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова.

При реалізації методу двобічних наближень за наближений розв’язок вихідної задачі (70) – (73) на j-му часовому шарі на k-й ітерації беремо функцію

$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \dfrac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$. Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації до розв'язку j-ї задачі, $j = 1, ..., m$, слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \left| w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x}) \right| < 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x})$.

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),\, U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}),\, U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}),\, ...,\, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}). \tag{77}$$

Використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації, за набором функцій (77) можна побудувати наближений розв'язок задач (70) – (73) у вигляді функції $u_m(\mathbf{x}, t)$, визначеної при всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T_0]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\dfrac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою $u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t)$.

Роботу забoронованого методу продемонстровано на тестових задачах. Для одновимірного випадку – це задача з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю, а для двовимірного випадку – задача зі сталим коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю, що розглядається у одиничному квадраті. У двовимірному випадку розрахунки були проведені для нелінійності вигляду $f(\mathbf{x}, u) = \sqrt{u} + \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ обома методами двобічних наближень. Значення $u(\mathbf{x}, 0{,}1)$ співпали з точністю $0,48 \cdot 10^{-3}$ у нормі простору $C(\overline{\Omega})$, а відносна похибка склала 0,23%.

Основні результати шостого розділу опубліковані у роботах [12, 14, 17, 37].

У **сьомому розділі** розглянуто застосування розроблених методів двобічних наближень до розв'язання нелінійної стаціонарної задачі теплопровідності зі степеневозалежним від температури коефіцієнтом та задачі Нав'є для рівняння з бігармонічним оператором.

Розглянемо проблему знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\operatorname{div}(k(T)\operatorname{grad} T) = \lambda f(\mathbf{x}, T),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{78}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{79}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; $f(\mathbf{x}, T)$ – неперервна і додатна при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $T > 0$ функція; $k(T) = k_0 T^{\sigma}$, $\sigma > 0$ – параметри нелінійності середовища; $\lambda > 0$ – стала.

У задачі (78), (79) зробимо заміну $T = \left[\dfrac{\sigma+1}{k_0} u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(\mathbf{x})$ – нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$-\Delta u = \lambda F(\mathbf{x}, u) \text{ у } \Omega, \tag{80}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{81}$$

де $F(\mathbf{x}, u) = f\left(\mathbf{x}, \left[\dfrac{\sigma+1}{k_0} u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\right)$.

Застосування до розв’язання задачі (80), (81) методів двобічних наближень, що розроблено у другому та третьому розділах, розглянемо на прикладі методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Нехай $G(\mathbf{x}, \mathrm{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω і припустимо, що функція $F(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання $F(\mathbf{x}, u) = \hat{F}(\mathbf{x}, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w функція $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$.

Теорема 15. Нехай гетеротонний оператор T вигляду

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) F(\mathrm{s}, u(\mathrm{s})) d\mathrm{s},$$

для якого оператор $\hat{T}$ вигляду

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, v(\mathrm{s}), w(\mathrm{s})) d\mathrm{s}$$

є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, що виділяється умовами

$$\lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, v_0(\mathrm{s}), w_0(\mathrm{s})) d\mathrm{s} \ge v_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, w_0(\mathrm{s}), v_0(\mathrm{s})) d\mathrm{s} \le w_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \overline{\Omega},$$

і виконується хоча б одна з умов:

а) система

$$v(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, v(\mathrm{s}), w(\mathrm{s})) d\mathrm{s}, \quad w(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, w(\mathrm{s}), v(\mathrm{s})) d\mathrm{s}$$

не має на $< v_0, w_0 >$ розв’язків (v, w) таких, що $v \neq w$;

б) для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ має місце нерівність $\hat{F}(\mathbf{x}, v+u, w-u) < \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1}$, де $M = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$, $u_0(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s})d\mathrm{s}$;

в) існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left|\hat{F}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{F}(\mathbf{x}, v, w)\right| \le L|w-v|$, причому $\gamma = \lambda LM < 1$, де $M = \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$, $u_0(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s})d\mathrm{s}$;

г) для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{F}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(\mathbf{x}, v, w),\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тоді ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, v^{(k)}(\mathrm{s}), w^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathrm{s}) \hat{F}(\mathrm{s}, w^{(k)}(\mathrm{s}), v^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s},\ k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}),$$

двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (80), (81), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \dots \leqslant v^{(k)} \leqslant \dots \leqslant u^* \leqslant \dots \leqslant w^{(k)} \leqslant \dots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w_0.$$

Обчислювальний експеримент в задачі (78), (79) було проведено для обох запропонованих методів двобічних наближень. Роботу методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна розглянуто на задачі

$$-\operatorname{div}(\sqrt{T}\operatorname{grad} T) = \lambda e^T,\ \mathbf{x} \in \Omega,$$
$$T|_{\partial\Omega} = 0,$$

де Ω – одиничний круг, а роботу методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова продемонстровано на задачі

$$-\operatorname{div}(\sqrt{T}\operatorname{grad} T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}},\ \mathbf{x} \in \Omega,$$
$$T|_{\partial\Omega} = 0,$$

де Ω – одиничний квадрат.

Розглянемо тепер однорідну задачу Нав'є для напівлінійного рівняння четвертого порядку:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u, -\Delta u),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{82}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ \Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{83}$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; Δ – оператор Лапласа; Δ^2 – бігармонічний оператор.

Вважатимемо, що функція $f(\mathbf{x}, u, v)$ неперервна і додатна при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $u, v > 0$.

Задачу (82), (83) замінимо еквівалентною системою напівлінійних еліптичних рівнянь. Для цього покладемо $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$. Тоді отримаємо задачу

$$-\Delta u_1 = u_2,\ -\Delta u_2 = f(\mathbf{x}, u_1, u_2),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{84}$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = 0,\ u_2\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{85}$$

До розв'язання задачі (84), (85) були застосовані розроблені у п'ятому розділі методи двобічних наближень. Припустимо, що функція $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, u_1, u_2)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функція $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$ монотонно зростає за v_1, v_2 і монотонно спадає за w_1, w_2 для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Ітераційна схема розв'язання задачі (84), (85) та умови її двобічної збіжності на прикладі застосування методу послідовних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова містяться у такій теоремі.

Теорема 16. Нехай гетеротонний оператор $\mathbf{T}$ вигляду

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \Bigg(\int_\Omega K(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_2(\mathrm{s})d\mathrm{s},$$

$$\int_\Omega K(\mathbf{x}, \mathrm{s})u_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q(\mathbf{x}, \mathrm{s})f(\mathrm{s}, u_1(\mathrm{s}), u_2(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\Bigg),$$

для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}) = \Bigg(\int_\Omega K^+(\mathbf{x}, \mathrm{s})v_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K^-(\mathbf{x}, \mathrm{s})w_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q(\mathbf{x}, \mathrm{s})v_2(\mathrm{s})d\mathrm{s},$$

$$\int_\Omega K^+(\mathbf{x}, \mathrm{s})v_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int_\Omega K^-(\mathbf{x}, \mathrm{s})w_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int_\Omega Q(\mathbf{x}, \mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s}, v_1(\mathrm{s}), v_2(\mathrm{s}), w_1(\mathrm{s}), w_2(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\Bigg)$$

є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ і виконується хоча б одна з наступних умов:

а) система

$$v_1(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})v_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})w_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})v_2(\mathrm{s})d\mathrm{s}\,,$$

$$v_2(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})v_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})w_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v_1(\mathrm{s}),v_2(\mathrm{s}),w_1(\mathrm{s}),w_2(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\,,$$

$$w_1(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})w_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})v_1(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})w_2(\mathrm{s})d\mathrm{s}\,,$$

$$w_2(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})w_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})v_2(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},w_1(\mathrm{s}),w_2(\mathrm{s}),v_1(\mathrm{s}),v_2(\mathrm{s}))d\mathrm{s}$$

не має на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ розв’язків $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ таких, що $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$;

б) для будь-яких чисел v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, u_2, таких, що $0 < v_1 < w_1$, $0 < u_1 < w_1$, $0 < v_2 < w_2$, $0 < u_2 < w_2$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x},\, v_1 + u_1,\, v_2 + u_2,\, w_1 - u_1,\, w_2 - u_2) < \hat{f}(\mathbf{x},\, v_1,\, v_2,\, w_1,\, w_2) + \frac{u_2}{M + M^1}\,,$$

де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})d\mathrm{s}$, $M^1 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_\Omega [K^+(\mathbf{x},\mathrm{s}) + K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})]d\mathrm{s}$;

в) існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2)$ для всіх чисел v_1, v_2, w_1, w_2 таких, що $0 < v_1, w_1 < M_0^1$, $0 < v_2, w_2 < M_0^2$, де $M_0^1 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w_1^0(\mathbf{x})$, $M_0^2 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w_2^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$\left|\hat{f}(\mathbf{x}, v_1, v_2, w_1, w_2) - \hat{f}(\mathbf{x}, w_1, w_2, v_1, v_2)\right| \le L \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\}\,,$$

причому $\gamma = M^1 + M\max\{2, L\} < 1$, де $M^1 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_\Omega [K^+(\mathbf{x},\mathrm{s}) + K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})]d\mathrm{s}$, $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})d\mathrm{s}$.

Тоді ітераційний процес

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})v_1^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})w_1^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})v_2^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}\,,$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})v_2^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})w_2^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} +$$

$$+\int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})\hat{f}(\mathrm{s},v_1^{(k)}(\mathrm{s}),v_2^{(k)}(\mathrm{s}),w_1^{(k)}(\mathrm{s}),w_2^{(k)}(\mathrm{s}))d\mathrm{s}\,,$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathrm{s})w_1^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} - \int\limits_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathrm{s})v_1^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s} + \int\limits_\Omega Q(\mathbf{x},\mathrm{s})w_2^{(k)}(\mathrm{s})d\mathrm{s}\,,$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^+(\mathbf{x},\mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_\Omega K^-(\mathbf{x},\mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+\int_\Omega Q(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), w_2^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), v_2^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}),\ \ v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}),\ \ w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}),\ \ w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}).$$

двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_2(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 >$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (84), (85), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leqslant \mathbf{v}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{v}^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{u}^* \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{w}^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{w}^{(1)} \leqslant \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

Роботу запропонованих методів двобічних наближень розв'язання задачі Нав'є продемонстровано на тестовому прикладі задачі зі степеневою нелінійністю.

Основні результати сьомого розділу опубліковані у роботах [6, 7, 21].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано результати, що в сукупності є розв'язанням наукової проблеми побудови методів двобічних наближень розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики, а саме, розроблено двобічні ітераційні методи розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння та системи напівлінійних еліптичних рівнянь і напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень.

1. Проведено аналіз сучасного стану проблеми чисельного аналізу задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Серед розглянутих методів виділено методи двобічних наближень через те, що вони дозволяють будувати дві послідовності функції, які знизу та зверху наближають шуканий розв'язок, а отже, мають зручні апостеріорну оцінку похибки та критерій закінчення ітерацій. Проте існуючі методи двобічних наближень, що побудовані на основі методів теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, потребують удосконалення та розширення кола їх застосування до задач більш загального вигляду та з меншими обмеженнями на геометрію області.

2. Розглянуто першу крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння, першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь. Кожну з цих задач за допомогою функції Гріна подано у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором і на основі цього, користуючись методами нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах, були розвинуті методи двобічних наближень їх розв'язання.

3. Вперше введено поняття квазіфункції Гріна-Рвачова, яка є узагальненням квазіфункції, використовуваної в роботах акад. В.Л. Рвачова. Це дозволило звести до інтегрального рівняння Урисона першу крайову задачу для напівлінійного еліп-

тичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь, розглядуваних у областях, геометрія яких може бути описана за допомогою конструктивного апарату теорії R-функцій.

4. Першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння та першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова подано у вигляді нелінійного рівняння з гетеротонним оператором. На основі цього, застосовуючи методи нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах, вперше розроблено метод двобічних наближень розв'язання розглядуваних крайових задач. Запропонований метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова є більш універсальним порівняно з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна, оскільки вирази для квазіфункції завжди мають скінченний вигляд на відміну від функції Гріна, яка навіть для областей простої геометрії зазвичай може бути подана лише рядом Фур'є. Крім того, клас областей, для яких може бути побудована квазіфункція, визначається можливістю їх аналітичного опису за допомогою R-функцій, у той час як функція Гріна відома лише для невеликої кількості областей.

5. Удосконалено методи побудови сильно інваріантного конусного відрізка $< v^0, w^0 >$, кінці якого обираються за початкові наближення при реалізації методів двобічних наближень на основі використання функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова. Надано рекомендації щодо побудови $< v^0, w^0 >$, зокрема, у багатовимірному випадку запропоновано шукати функції v^0, w^0 у вигляді $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ $(0 < \alpha < \beta)$, де функція $\omega(\mathbf{x})$ описує геометрію області, у якій розглядається крайова задача, і будується з використанням конструктивних засобів теорії R-функцій. Це дозволило формалізувати процедуру побудови початкового наближення при реалізації двобічних ітераційних схем та отримати апостеріорні оцінки розв'язку, які точно задовольняють крайовим умовам задачі.

6. Запропоновані методи двобічних наближень застосовані до аналізу першої крайової задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Лапласа та оператором Гельмгольця і степеневими нелінійностями (ізотонного, антитонного та гетеротонного типів), що дозволило дослідити питання існування єдиного додатного розв'язку, отримати для нього апріорні оцінки та обґрунтувати знаходження розв'язку з двобічним наближенням.

7. Розглянуто перші початково-крайові задачі для одновимірного та багатовимірного напівлінійного параболічного рівняння і за допомогою модифікованого методу Роте їх зведено відповідно до послідовностей перших крайових задач для напівлінійного звичайного диференціального рівняння та напівлінійного еліптичного рівняння. Для розв'язання отриманих нелінійних задач застосовано методи двобічних наближень (на основі застосування функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова). Отже, на основі сумісного використання методів Роте та двобічних наближень вперше розроблено напівдискретний метод розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

8. З рівнянь вигляду $-\mathrm{div}(k(\theta)\nabla\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$ вперше виділено клас рівнянь, розв'язок першої крайової задачі для яких може бути знайдений методами двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), що дало можливість отримати умови існування єдиного додатного розв'язку задачі і збіжності до нього послідовних наближень.

9. Для знаходження розв'язку нелінійної задачі Нав'є шляхом зведення її до системи двох еліптичних рівнянь застосовано методи двобічних наближень (на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна-Рвачова), завдяки чому отримано умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та збіжності до нього послідовних наближень.

10. Роботу кожного з запропонованих чисельних методів проілюстровано розв'язанням тестових задач для рівнянь з оператором Лапласа та оператором Гельмгольця і степеневими чи експоненціальними нелінійностями, що підтвердило їх ефективність.

11. Коректність чисельних результатів підтверджується порівнянням з точними розв'язками та з чисельними розв'язками, отриманими різними методами.

12. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджені в освітній процес Харківського національного університету радіоелектроніки.

13. Отримані результати розширюють теоретичну та практичну основи для розв'язання прикладних задач математичного моделювання, які зводяться до розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь та першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

14. Напрями подальших досліджень за темою дисертаційної роботи можуть бути пов'язані з розробкою методів двобічних наближень розв'язання задач з крайовими умовами другого та третього типів, а також із застосуванням двобічних методів до задач з рівняннями, що містять градієнтні члени.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50-57. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. 2017. № 1 (88). С. 60-64. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2017. Вип. 34. С. 58-66. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157-167. DOI: 10.32626/2308-5878.2017-16.157-167. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

9. Сидоров М.В. Застосування конструктивних методів теорії *R*-функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів // Бионика интеллекта. 2017. № 2 (89). С. 43-49. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

10. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2017. № 3 (126). P. 110-123. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

11. Вороненко М.Д., Сидоров М.В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

12. Сидоров М.В. Метод Роте та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 38. С. 55-63. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

13. Сидоров М.В. Метод двобічних ітерацій у чисельному аналізі першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь // Бионика интеллекта. 2018. № 1 (90). С. 53-61. [Входить до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus.]

14. Сидоров М.В. Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 108-127. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12.

15. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96-113. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science.]

16. Kolosova S.V., Lukhanin V.S., Sidorov M.V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78 – 91. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

17. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85. DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206x.2018.2(32).149705 [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar, Index Copernicus.]

18. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. 2018. T. 10. №. 2. C. 360-375. DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, Index Copernicus.]

19. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 39. С. 33-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

20. Сидоров М.В. Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 3 (82). С. 50-56. DOI: 10.30837/1563-0064.3.2018.162782 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

21. Сидоров М.В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 146-161. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161.

22. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Web of Science, WorldCat.]

23. Колосов А.І., Колосова С.В., Сидоров М.В. Деякі питання побудови двобічних наближень до розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь // «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: збірник праць науково-технічної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2010 р.). Львів: ФМІ НАНУ, 2010. С. 37-39.

24. Колосов А.И., Сидоров М.В. Идеи М. А. Красносельского в исследовании нелинейных краевых задач математической физики // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 215-217.

25. Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В. Об одном конструктивном подходе к решению нелинейных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011) (г. Херсон, 13-18 июня 2011 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. С. 218-221.

26. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода квазифункции Грина к построению итерационных методов решения некоторых нелинейных краевых задач // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць одинадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 21-23 листопада 2012 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2012. С. 101-102.

27. Колосова С.В., Сидоров М.В. Некоторые вопросы, связанные с построением итерационных методов решения нелинейных краевых задач // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28-31 мая 2013 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. С. 52-58.

28. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Наука XXI століття: відповіді на виклики сучасності: збірник статей I Міжнародної науково-практичної конференції (Румунія, м. Бухарест, 17 травня 2013 р.). Ч. I. Бухарест: Бухарест. ун-т, 2013. С. 16-24.

29. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О некоторых подходах к решению краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (г. Херсон, 10-15 июня 2013 г.). Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. С. 205-208.

30. Колосова С.В., Сидоров М.В. Про побудову ітераційного процесу для рівняння з антитонним оператором // Математичне моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць дванадцятої всеукраїнської науково-технічної конференції (м. Одеса, 11-12 листопада 2014 р.). Одеса: Вид-во ННІХКтаЕ, 2014. С. 37-38.

31. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про побудову послідовних наближень для деяких нелінійних операторних рівнянь // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 185-188.

32. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. Про існування додатних розв’язків і побудову двобічних наближень для задачі Діріхле з рівнянням Лане-Емдена // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць (м. Львів, 24-25 вересня 2015 р.). Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. С. 362-365.

33. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problem for nonlinear elliptic systems // Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy (Lviv, 28-30 september 2017). Lviv: PAIS, 2017. P. 102-103.

34. Сидоров М.В. Нові конструктивні методи дослідження нелінійних крайових задач // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 65-67.

35. Сидоров М.В., Кончаковська О.С. Побудова двобічних наближень до розв'язку однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць (тези доповідей і вибрані статті) III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вересня 2017 р.). Рівне: НУВГП, 2017. С. 71-73.

36. Сидоров М.В. Побудова двобічних наближень до додатних розв'язків нелінійних крайових задач методом квазіфункцій Гріна-Рвачова // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Луцьк – м. Київ, 7-10 жовтня 2017 р.). Т. 2. Київ: НТУУ «КПІ», 2017. С. 141-145.

37. Сидоров М. Метод двобічних наближень та метод прямих розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі використання функції Гріна // Інформаційні системи та технології: матеріали статей 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції (с. Коблеве – м. Харків, 10-15 вересня 2018 р.). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 135-139.

АНОТАЦІЯ

Сидоров М.В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено розробці двобічних ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння і системи напівлінійних еліптичних рівнянь та розробці на основі сумісного застосування методів Роте і двобічних наближень напівдискретного методу розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного параболічного рівняння.

Побудова методів двобічних наближень заснована на переході від вихідної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння. Це інтегральне рівняння розглядається у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних

функцій, і є основою означення узагальненого розв'язку задачі. На основі подання інтегрального рівняння як рівняння з гетеротонним оператором будується дві ітераційні послідовності, які стартують з кінців сильного інваріантного для гетеротонного оператора відрізка і двобічно збігаються до єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі. Для побудови еквівалентних інтегральних рівнянь у роботі використовується функція Гріна або квазіфункція Гріна-Рвачова.

Роботу запропонованих у дисертації двобічних ітераційних методів проілюстровано обчислювальними експериментами для тестових задач.

Ключові слова: метод двобічних наближень, перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння, перша крайова задача для системи напівлініних еліптичних рівнянь, перша початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння, рівняння з гетеротонним оператором, сильно інваріантний конусний відрізок, функція Гріна, квазіфункція Гріна-Рвачова, метод R-функцій, метод Роте, рівняння теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом, нелінійна задача Нав'є.

АННОТАЦИЯ

Сидоров М.В. Методы двусторонних приближений решения некоторых классов нелинейных задач математической физики. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2019.

В диссертационной работе разработаны двусторонние итерационные методы решения первой краевой задачи для полулинейного эллиптического уравнения и системы полулинейных эллиптических уравнений, а также на основе совместного применения методов Роте и двусторонних приближений разработан полудискретный метод решения первой начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения.

Построение методов двусторонних приближений основано на переходе от исходной задачи к эквивалентному интегральному уравнению. Это интегральное уравнение рассматривается в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, и берется за основу определения обобщенного решения задачи. На основе представления интегрального уравнения как уравнения с гетеротонным оператором строятся две итерационные последовательности, которые стартуют с концов сильного инвариантного для гетеротонного оператора отрезка и двусторонне сходятся к единственному положительному решению рассматриваемой задачи. Для построения эквивалентных интегральных уравнений в работе используется функция Грина или квазифункция Грина-Рвачева.

Работу предложенных в диссертации двусторонних итерационных методов проиллюстрировано вычислительными экспериментами для тестовых задач.

Ключевые слова: метод двусторонних приближений, первая краевая задача для полулинейного эллиптического уравнения, первая краевая задача для системы

полулинейных эллиптических уравнений, первая начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения, уравнение с гетеротонним оператором, сильно инвариантный конусный отрезок, функция Грина, квазифункция Грина-Рвачева, метод R-функций, метод Роте, уравнение теплопроводности с нелинейным коэффициентом, нелинейная задача Навье.

ABSTRACT

Sidorov M.V. Two-sided approximations methods for solving certain classes of nonlinear problems in mathematical physics. – The manuscript.

The thesis for the doctor of physical and mathematical sciences degree on a specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

When studying the methods of mathematical modeling of processes occurring in nonlinear media, it becomes necessary to solve boundary and initial boundary value problems for nonlinear equations of mathematical physics. Such tasks are usually not amenable to direct analytical research, and therefore for their analysis one should use numerical methods. Among the variety of existing numerical methods, iterative methods should be distinguished with a two-sided nature of convergence. These methods allow to construct two sequences of functions which approximate the desired solution from below and above. Consequently, when implementing two-sided iterative schemes, we will have convenient a posteriori error estimate and criterion for the iterations ending. In addition, these methods often allow us to conclude that there is a solution to the problem.

The purpose of the research investigations, conducted in the dissertation, was to develop the two-sided iterative methods for solving the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of semilinear elliptic equations and to develop a combined Rothe method and two-sided approximations for solving the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation.

The theoretical basis of the developed two-sided iterative methods are methods of the theory of nonlinear operator equations in semiordered spaces, in particular, the results of V.I. Opoĭcev on the solvability of nonlinear equations with a heterotone operator.

The construction of two-sided approximation methods for solving the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation and a system of semilinear elliptic equations is based on the transition from the initial problem to an equivalent integral equation. This integral equation is considered in the continuous functions space semi-ordered by a cone of non-negative functions, and is taken as the basis for the definition of a generalized solution of the boundary value problem. Based on the representation of an integral equation as an equation with a heterotone operator, two iteration sequences, which start from the ends of the strongly invariant for the heterotone operator segment and converge bilaterally to the unique positive solution to the problem, are constructed.

To construct equivalent integral equations two approaches are used. The first one is based on the use of the Green's function to replace the boundary value problem by the

Hammerstein integral equation. The limitation in implementation of this approach is associated with the necessity of existing an analytical expression for the Green's function. The second approach uses the concept of the Green-Rvachev's quasi-function, introduced in the thesis, for reducing the boundary value problem to the Uryson integral equation. In contrast to the usual Green's function, the construction of the Green-Rvachev's quasi-function is possible if the fundamental solution of the elliptic operator of the boundary value problem is known and the geometry of the area in which the problem is considered allows its analytical description by means of the constructive apparatus of the R-functions theory. It greatly expands the range of applications of the developed method of two-sided approximations based on the use of the Green-Rvachev's quasi-function. In addition, a function that analytically describes the geometry of a domain in which a boundary value problem is considered can be used to construct the ends of a strongly invariant cone segment. For each of the developed two-sided approximation methods, a number of conditions for the convergence of the iteration sequences and the existence of positive solutions to the problems under consideration are given.

The application of the two-sided approximation methods based on the use of the Green's function and the Green-Rvachev's quasi-function is considered on the example of the Dirichlet problems for equations with the Laplace operator and the Helmholtz operator and power nonlinearities.

To solve the first boundary value problem for a semilinear parabolic equation, the joint use of Rothe's methods and two-sided approximations is proposed: on the basis of discretization with respect to the time variable, the original problem is replaced by a sequence of the first boundary value problems for semilinear elliptic equations, which are solved by two-sided iterations.

The paper also considers the application of the developed two-sided approximation methods to the solution of the first boundary value problem for the heat equation with a temperature-dependent coefficient and to the solution of higher order equations using the example of the nonlinear Navier problem.

The work of all the two-sided iterative methods proposed in the thesis is illustrated by computational experiments for test problems.

Key words: method of two-sided approximations, the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation, the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations, the first initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation, equation with a heterotone operator, strongly invariant cone segment, Green's function, Green-Rvachev's quasi-function, R-functions method, Rothe method, equation of heat conductivity with nonlinear coefficient, nonlinear Navier problem.

Підписано до друку 02.07.2019 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 1,9. Наклад 100 прим. Зам. № б/н.
Надруковано СПД ФО Степанов В.В., м. Харків, вул. Ак. Павлова, 311
Свідоцтво про державну реєстрацію В00 № 941249 від 28.01.2003 р.