Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

СЛАВІК ОЛЕКСІЙ ВАЛЕРІЙОВИЧ

Підпис

УДК 004.94:519.65

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНІ МЕТОДАМИ ІНТЕРСТРІПАЦІЇ ФУНКЦІЙ ЗА НЕПОВНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ ПРО НЕЇ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків 2021

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Українській інженерно-педагогічній академії, м. Харків, Міністерство освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Литвин Олег Миколайович,
професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Українська інженерно-педагогічна академія.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший дослідник
Зуб Станіслав Сергійович,
проректор з інноваційної діяльності та перспективного розвитку, Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Стецюк Петро Іванович,
завідувач відділу методів негладкої оптимізації, Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України.

Захист відбудеться «09» березня 2021 р. о 13.30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитисяу бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14 і на сайті спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 за електронною адресою: http://nure.ua/branch/d-64-052-02.

Автореферат розісланий «04» лютого 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради *Підпис* Л. В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. За останній час нові інформаційні оператори (зокрема, оператори інтерстріпації) набувають все більшої популярності і охоплюють все більше прикладних задач механіки та техніки. Наприклад, в задачах обробки даних дистанційного зондування Землі, отриманих з літального апарату або штучного супутника планети; обробки пошкоджених даних сейсмічної томографії; обробки графічних даних, пошкоджених в результаті помилок при передачі даних по мережі або її перенавантаження; обробці архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину) тощо.

На даний момент відомі оператори інтерстріпації для відновлення пошкоджених поверхонь у вигляді смуг із границями, паралельними осям координат, що досить сильно звужує спектр прикладних задач, до яких їх можна застосувати. Тому узагальнення операторів інтерстріпації на випадок смуг, границі яких розташовані під довільним кутом або мають криволінійні границі зробить оператори більш універсальними, що дасть змогу застосовувати оператори інтерстріпації для більшої кількості прикладних задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії. Як виконавець, здобувач проводив дослідження у рамках держбюджетної теми № 15-01 ДБ «Розробка та дослідження нового методу побудови 4D міжсвердловинної акселерометричної математичної моделі кори Землі за даними сейсмічного зондування» (№ ДР 0115U002498), яка входила до плану НДР цієї кафедри.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є побудова математичних моделей поверхонь тривимірних тіл з урахуванням даних про них на різних системах смуг на основі використання операторів інтерстріпації функцій. Для досягнення сформульованої мети у процесі досліджень поставлені такі **завдання**:

– дослідження математичної моделі освітленості поверхні за даними інтенсивності освітленості на системі ліній за допомогою операторів інтерстріпації;

– удосконалення методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між паралельними смугами;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, розташованими під довільним кутом;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами, що мають криволінійні границі;

– розробка та дослідження нового методу математичного моделювання освітленості поверхні тіла операторами інтерстріпації між смугами із врахуванням структури тіла;

– удосконалення методу знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку;

− проведення обчислювальних експериментів на основі розробленого автором пакету прикладних програм для тестування запропонованих методів та алгоритмів.

Об'єктом дослідження є процес обробки даних дистанційного зондування планети.

Предметом дослідження є метод обробки та відновлення даних дистанційного зондування планети з використанням інтерстріпації функцій.

Методи дослідження базуються на комплексному використанні нових інформаційних операторів, методів математичного аналізу та математичного моделювання: для побудови математичних моделей поверхонь досліджуваного об'єкту – теорія наближення функцій двох змінних із використанням операторів інтерлінації; для сегментації поверхні досліджуваного об'єкту – методи виявлення розривів на цифрових зображеннях; для побудови розривних сплайнів – методи наближення операторами інтерполяції.

Наукова новизна одержаних результатів: Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

− набув подальшого розвитку метод відновлення поверхні за даними про неї на системі паралельних смуг із врахуванням додаткової інформації, відмінність якого від існуючого методу інтерстріпації полягає в використанні більшого об’єму даних зі смуг;

− запропоновано та обґрунтовано метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг, розташованих під довільним кутом, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються лінійними функціями;

− уперше побудовано математичну модель поверхні тіла за даними про неї на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню якщо інформація про неї відома на смугах, границі описуються неперервними функціями;

− розроблено та досліджено метод відновлення поверхні за даними про неї на системі смуг із врахуванням структури тіла, що дозволяє відновлювати поверхню із врахуванням особливостей текстури об’єкта дослідження на відомих смугах;

− вдосконалено метод знаходження ліній розриву неперервних функцій (однієї або двох змінних) чи їх похідних деякого порядку, який дозволяє локалізувати з деяким наперед заданим порядком точності розриви функції чи її похідної деякого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати можуть бути використані для автоматичного відновлення поверхні між смугами на основі даних дистанційного зондування Землі, аерофотозйомки, сейсморозвідки тощо. Крім того розроблена математична модель поверхні може бути використана для відновлення двовимірних сигналів, пошкоджених в результаті помилок при передачі даних по мережі або її перевантаженню. Оцінка справжніх значень втрачених даних необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних документів у вигляді графічних зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо); при реставрації пошкоджених картин, портретів, зображень тощо.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано у 13 роботах [1–13]. Результати, які складають основу дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [5, 8–10], отримані одноосібно. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: [1] – метод виявлення розривів функцій за допомогою $d^k\varepsilon$-неперервності; [2] – метод відновлення поверхні тіла за допомогою інтерстріпації функції на смугах, розташованих під довільним кутом; [3, 4] – метод відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на паралельних смугах із врахуванням шумів вхідних даних; [6] – метод відновлення пошкодженого зображення операторами інтерстріпації функцій двох змінних; [7] – узагальнена характеристика методів відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації; [11] – метод відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на неперетинних смугах із криволінійними границями; [12] – алгоритм відновлення поверхні тіла із врахуванням його структури; [13] – алгоритм відновлення поверхні тіла операторами інтерстріпації на перетинних смугах розташованих під довільним кутом.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

− VI всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2015)» (19-21 березня 2015 року, м. Полтава);

− XIX міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (20-22 квітня, 2015 року, ХНУРЕ, м. Харків);

− VII всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2016)» (10-12 березня 2016 року, м. Полтава);

− Європейському конгресі математики «7th European Congress of Mathematics (7ECM)» (18-22 липня 2016 року, м. Берлін);

− XLIX науково-практичній конференції професорсько-викладацького складу Української інженерно-педагогічної академії (секція «Вищої та прикладної математики») (25-29 вересня 2016 року, м. Харків);

− IV науково-технічній конференції «Обчислювальні методи та системи перетворення інформації» (28-30 вересня 2016 року, м. Львів);

− VIII всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2017)» (16-18 березня 2017 року, м. Полтава);

− Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLIV)» (26-29 вересня 2017 року, м. Кам'янець-Подільський);

− семінарі «Образний комп'ютер» (28 листопада 2017 року, м. Київ).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 13 робіт: серед них 7 статей у наукових періодичних виданнях (з них 1 стаття – у періодичному виданні, що включено до наукометричної бази Scopus [7]; 5 статей – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з фізико-математичних наук [2–6]; 1 стаття – у наукових фахових виданнях України, що включено до Переліку МОН України з технічних наук [1]); 6 робіт – у збірниках матеріалів конференцій та тез доповідей [8–13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація включає вступ, чотири розділи, список використаних джерел із 100 найменувань (на 9 сторінках), 54 ілюстрації, 1 таблицю та 2 додатки. Загальний обсяг роботи складає 178 сторінок друкованого тексту, з них 148 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, показано її наукову спрямованість, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, які потрібно вирішити для її досягнення. Подано коротку характеристику результатів дослідження, ступеня їх апробації та опублікування.

У **першому розділі** наведено огляд праць з методів обробки цифрових зображень. Наведені основні відомі твердження методів попередньої обробки зображень. Наведено класифікацію сучасних методів відновлення пошкоджених зображень. Наведено огляд фундаментальних праць з теорії виявлення розривів на цифрових зображеннях. У результаті аналітичного огляду зроблено висновок, що використання існуючих методів цифрової обробки сигналів не дозволяє ефективно відновлювати пошкоджені зображення поверхонь, отриманих методами сейсморозвідки, радіолокації, дистанційного зондування планети тощо. Існуючі на даний момент методи цифрової обробки сигналів, вносять значні спотворення при відновленні втрачених даних, такі як розмиття різких перепадів яскравості та поява артефактів на границях областей.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [1, 3, 4, 9].

У **другому розділі** досліджується метод відновлення поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних. Наведено основні твердження про оператори інтерстріпації та особливості їх використання при моделюванні різних типів поверхонь.

У **підрозділі 2.1** наведено методи математичного моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг, обмежених прямими паралельними осям координат, за допомогою операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних. Наведено оператори інтерстріпації у формі Лагранжа, Ерміта, Шепарда та Шепарда-Литвина.

У **підрозділі 2.2** наведено методи математичного моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі перетинних смуг, обмежених прямими розташованими під довільним кутом:

$$\Gamma_k : \omega_k(x) \equiv x_1\omega_{k,1} + x_2\omega_{k,2} - \gamma_k = 0,\ \omega_{k,1}^2 + \omega_{k,2}^2 = 1,\ k = \overline{1,M},$$

що задовольняють умовам:

– ніякі з трьох прямих у цій множині не перетинаються в одній точці;

– кожна пряма з цієї множини має хоча б одну точку перетину з якою-небудь іншою прямою цієї множини.

Теорема 1. Якщо сліди $\varphi_k(x), k=\overline{1,M}$ задовольняють в точках $\mathrm{A}_{k,l}$ умови

$$\varphi_k(\mathrm{A}_{k,l})=\varphi_l(\mathrm{A}_{k,l}),\ k\neq l;\ k,l=\overline{1,M},$$

то оператор

$$\Lambda_M f(x)=\sum_{(k,l)\in\Re}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{M}\frac{\omega_i(x)}{\omega_i(\mathrm{A}_{k,l})}\times$$

$$\times\left(\varphi_k\left(\mathrm{A}_{k,l}-\frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}}\omega_l(x)\right)+\varphi_l\left(\mathrm{A}_{k,l}-\frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}}\omega_k(x)\right)-\varphi_k(\mathrm{A}_{k,l})\right),$$

$$\Delta_{i,k}=\begin{vmatrix}\omega_{i,1} & \omega_{i,2}\\ \omega_{k,1} & \omega_{k,2}\end{vmatrix}\neq 0,\ \Delta_{k,i}=-\Delta_{i,k}, k\neq i,\ \tau_k=(\omega_{k,2}-\omega_{k,1}),$$

де $\mathrm{A}_{k,l}=(x_{1,k,l},x_{2,k,l})$ – розв'язок системи рівнянь $\omega_k=0,\omega_l=0,k\neq l,k,l=\overline{1,M}$, має властивості

$$\Lambda_M f(x)\big|_{\Gamma_k}=\varphi_k(x)\big|_{\Gamma_k}, k=\overline{1,M}.$$

При цьому, якщо $f(x)$ є неперервною разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно $f^{(p_1,p_2)}, 0\leq p_1,p_2\leq 1$, то для залишку $R_M f=(I-\Lambda_M)f$ виконується рівність

$$R_M f(x)=\sum_{(k,l)\in\Re}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{M}\frac{\omega_i(x)}{\omega_i(\mathrm{A}_{k,l})}\int_0^{\omega_k}\int_0^{\omega_l}\frac{\partial^2}{\partial t_k\partial t_l}f\left(\mathrm{A}_{k,l}-\frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}}t_l-\frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}}t_k\right)dt_k dt_l.$$

*Теорема 2***.** Між координатами $(x_{1,k,l},x_{2,k,l})=\mathrm{A}_{k,l}$ точками перетину прямих Γ_k та Γ_l векторами τ_k,τ_l і функціями $\omega_k(x),\omega_l(x)$ виконується співвідношення

$$\mathrm{A}_{k,l}-\frac{\tau_l}{\Delta_{l,k}}\omega_k(x)\equiv x+\frac{\tau_k}{\Delta_{k,l}}\omega_l(x), x=(x_1,x_2).$$

Нехай задана система смуг вигляду:

$$S_i:\alpha_i\leq\omega_i\left(x,y\right)\leq\beta_i,\ i=\overline{1,n},\quad \omega_i:=a_i x+b_i y-c_i,.a_i^2+b_i^2=1.$$

Вважаємо відомими також рельєфи поверхні $S: z = f(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$ над кожною смугою: $f_i(x,y) = f(x,y)\Big|_{S_i}$, $i = \overline{1,n}$. Треба за цією інформацією відновити (можливо наближено) функцію $f(x,y)$. Нижче викладемо один з можливих підходів до розв'язання цієї задачі.

Теорема 3. У випадку, коли всі смуги паралельні одній і мають спільні тільки границі (тобто, не накладаються одна на одну)

$$S_i : \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \alpha_{i+1}, \quad i = \overline{1,n}, \quad -\infty < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n+1} < \infty,$$

то задача розв'язується тривіально – потрібний оператор задається так

$$O(\{f_i\}; x,y) = f_k(x,y), \quad (x,y) \in S_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Оператори інтерстріпації можна представити у вигляді:

$$S_{k,p} = S_k \cap S_p,\ f_{k,p}(x,y) = f(x,y)\Big|_{S_{k,p}} = f_k(x,y)\Big|_{S_{k,p}} = f_p(x,y)\Big|_{S_{k,p}},$$

$$\Omega_{ik}(x,y) = \begin{cases} \omega_i(x,y) - \alpha_{ik}, & \omega_i(x,y) < \alpha_{ik}; \\ 0, & \alpha_{ik} \le \omega_i(x,y) \le \beta_{ik}; \\ \omega_i(x,y) - \beta_i, & \omega_i(x,y) > \beta_{ik}, \end{cases}$$

$$G_{ik}(x,y) = \prod_{j=1,\, j\ne k}^{n} \Omega_{ij}^2(x,y) \Big/ \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1,\, j\ne k}^{n} \Omega_{ij}^2(x,y), \quad i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, що

$$G_i(x,y)\Big|_{S_p} = \begin{cases} 1, & p = i; \\ 0, & p \ne i, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{M} G_i(x,y) \equiv 1.$$

Ці властивості функцій $G_i(x,y)$ дають змогу довести справедливість наступної теореми.

Теорема 4. Якщо сліди $f_i(x,y)$ функції $f(x,y)$ на смугах $S_i, i = \overline{1,n}$ задовольняють умову $f_i(x,y) \in C(R^2), \quad i = \overline{1,n}$, то оператор

$$O(\{f_i\}; x,y) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x,y) f_i(x,y) - \sum_{S_{k,p} \ne \varnothing} G_k(x,y) G_p(x,y) f_{k,p}(x,y)$$

має такі властивості:

$$O\left(\left\{f_i\right\};x,y\right)\in C\left(R^2\right);O\left(\left\{f_i\right\};x,y\right)\Big|_{S_q}=f_q\left(x,y\right)\Big|_{S_q},\quad q=\overline{1,n}\,.$$

У **підрозділі 2.3** наведено методи математичного моделювання рельєфу поверхні двовимірного тіла за відомою інформацією про цю поверхню на системі смуг із криволінійними границями:

$$G_k=\left\{y_{k,1}(x)\le y\le y_{k,2}(x),x\in\mathbb{R}\right\},\ k=\overline{1,m},$$

взагалі кажучи перетинних, на кожній із цих смуг задається деяке зображення у вигляді функцій

$$f(x,y)\big|_{G_k}=f_k(x,y),\ k=\overline{1,m}\,.$$

Об'єднання множин $\bigcup\limits_{k=1}^{m}G_k$ дає область G непошкоджених ділянок зображення. Точки зображення, які не потрапили до G належать області пошкоджених точок

$$\bar{G}=\mathbb{R}^2\setminus G=\bigcup_{k=1}^{m}G_k\,,$$

$$\bar{G}_{k,k+1}=\left\{y_{k,2}(x)\le y\le y_{k+1,1}(x),x\in\mathbb{R}\right\},\ k=\overline{1,m-1}\,.$$

Введемо до розгляду оператор

$$\Theta f(x,y)=\begin{cases}f_k(x,y) & (x,y)\in G_k,\ k=\overline{1,m};\\ O_{k,k+1}f(x,y) & (x,y)\in\bar{G}_{k,k+1},\ k=\overline{1,m-1},\end{cases}$$

де оператор $O_{k,k+1}f(x,y)$ може бути представлений у вигляді:

$$O_{k,k+1}f(x,y)=H_{1,k,k+1}(x,y)f(x,y_{k,2}(x))+H_{2,k,k+1}(x,y)f(x,y_{k+1,1}(x)),$$

$$H_{1,k,k+1}(x,y)=\frac{y-y_{k+1,1}(x)}{y_{k,2}(x)-y_{k+1,1}(x)},\ H_{2,k,k+1}(x,y)=\frac{y-y_{k,2}(x)}{y_{k+1,1}(x)-y_{k,2}(x)},$$

де $f(x,y_{k,2}(x))$ та $f(x,y_{k+1,1}(x))$ – сліди функцій $f_k(x,y)$ та $f_{k+1}(x,y)$ на границях смуг $y_{k,2}(x)$ та $y_{k+1,1}(x)$ відповідно.

Оператор $\Theta f(x,y)$ має такі властивості:

$$\Theta f(x,y_{k,1}(x))=f(x,y_{k,1}(x)),\ \Theta f(x,y_{k,2}(x))=f(x,y_{k,2}(x)),\ k=\overline{1,m}.$$

Оператор $O_{k,k+1}f(x,y)$ для випадку двох довільних суміжних смуг i та $i+1$ має такі властивості:якщо $f_i(x,y)\in C(G_i)$ та $f_{i+1}(x,y)\in C(G_{i+1})$, то результат відновлення поверхні оператором $\Theta_{i,i+1}f(x,y)\in C(G_i\cup\bar{G}_{i,i+1}\cup G_{i+1})$.

Оператор $\Theta f(x,y)$ на системі з k смуг має такі властивості: якщо $\forall f_i(x,y) \in C(G_i),\ i=\overline{1,k}$, то оператор $\Theta f(x,y) \in C(\mathrm{G} \bigcup \overline{\mathrm{G}})$.

Теорема 5. Залишок наближення функції $f(x,y) \in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$f(x,y) - \Theta f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in G_i,\ i=\overline{1,m}; \\ R_{i,i+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{i,i+1},\ i=\overline{1,m-1}, \end{cases}$$

де

$$R_{i,i+1} f(x,y) = H_{1,i,i+1}(x,y) \int\limits_{y_{i,2}(x)}^{y} \frac{\partial^r f(x,t)}{\partial t^r} \frac{(y_{i,2}(x)-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt +$$
$$+ H_{2,i,i+1}(x,y) \int\limits_{y_{i+1,1}(x)}^{y} \frac{\partial^r f(x,t)}{\partial t^r} \frac{(y_{i+1,1}(x)-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt,$$

що має властивості:

$$H_{1,i,i+1}(x,y) \frac{(y_{i,2}(x)-y)^q}{q!} + H_{2,i,i+1}(x,y) \frac{(y_{i+1,1}(x)-y)^q}{q!} = 0.$$

Аналогічні твердження наведено для випадку коли система смуг має вигляд:

$$G_k = \left\{ x_{k,1}(y) \le x \le x_{k,2}(y), y \in \mathbb{R} \right\},\ k=\overline{1,m}.$$

Для випадку пошкоджень у вигляді смуг, границі яких представлені у вигляді замкнутого контуру, ефективним буде застосування операторів інтерстріпації в полярних координатах:

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

При цьому

$$\Theta \tilde{f}(r,\varphi) = \begin{cases} \tilde{f}_k(r,\varphi) & (r,\varphi) \in G_k,\ k=\overline{1,m}; \\ O_{k,k+1} \tilde{f}(r,\varphi) & (r,\varphi) \in \overline{G}_{k.k+1},\ k=\overline{1,m-1}. \end{cases}$$
$$G_k = \left\{ (r,\varphi) : r_{k,1}(\varphi) \le r \le r_{k,2}(\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\},$$
$$\overline{G}_{k,k+1} = \left\{ (r,\varphi) : r_{k,2}(\varphi) \le r \le r_{k+1,1}(\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\},$$

де оператор $O_{k,k+1}\tilde{f}(r,\varphi)$ може бути представлений за допомогою поліномів Лагранжа:

$$O_{k,k+1}\tilde{f}(r,\varphi) = \tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi) \tilde{f}(r_{k,2}(\varphi),\varphi) + \tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi) \tilde{f}(r_{k+1,1}(\varphi),\varphi),$$

$$\tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi)=\frac{r-r_{k+1,1}(\varphi)}{r_{k,2}(\varphi)-r_{k+1,1}(\varphi)},\;\; \tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi)=\frac{r-r_{k,2}(\varphi)}{r_{k+1,1}(\varphi)-r_{k,2}(\varphi)}.$$

Теорема 6. Залишок наближення функції $\tilde{f}(x,y)\in C^r(G)$ для випадку двох суміжних смуг може бути представлений у вигляді:

$$\tilde{f}(r,\varphi)-\Theta\tilde{f}(r,\varphi)=\begin{cases} 0 & (r,\varphi)\in G_i,\; i=\overline{1,m}; \\ R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi) & (r,\varphi)\in \overline{G}_{i,i+1},\; i=\overline{1,m-1}, \end{cases}$$

де

$$R_{i,i+1}\tilde{f}(r,\varphi)=\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi)\int\limits_{r_{i,2}(\varphi)}^{r}\frac{\partial^k\tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^k}\frac{(r_{i,2}(\varphi)-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt+$$

$$+\tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi)\int\limits_{r_{i+1,1}(\varphi)}^{r}\frac{\partial^k\tilde{f}(t,\varphi)}{\partial t^k}\frac{(r_{i+1,1}(\varphi)-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt,$$

що має властивості:

$$\tilde{H}_{1,i,i+1}(r,\varphi)\frac{(r_{i,2}(\varphi)-r)^q}{q!}+\tilde{H}_{2,i,i+1}(r,\varphi)\frac{(r_{i+1,1}(\varphi)-r)^q}{q!}=0.$$

Основні результати другого розділу опубліковано у роботах [2–5, 7, 10, 13].

У **третьому розділі** наведено методи для відновлення пошкоджених двовимірних сигналів (наприклад, інформація яка міститься у графічних файлах). Під пошкодженнями мається на увазі, наприклад, втрата пакетів при передачі даних по мережі або її перенавантаженню. Подібні проблеми виникають в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

У **підрозділі 3.1** наведено метод відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких паралельні осям координат.

У **підрозділі 3.2** наведено метод відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі m ($m\geq 2$) смуг, розташованих під довільним кутом:

$$\mathrm{M}_k=\left\{\mathrm{M}_{i,j},\; \omega_{1,k}(i,j)\leq i,j\leq\omega_{2,k}(i,j)\right\},\; k=\overline{1,m},$$

де $\omega_{1,k}(i,j)=\alpha_{1,k}i+\beta_{1,k}j-\gamma_{1,k}$ та $\omega_{2,k}(i,j)=\alpha_{2,k}i+\beta_{2,k}j-\gamma_{2,k}$ – деякі прямі, якими обмежена смуга. Причому

$$\alpha_{1,k}^2+\beta_{1,k}^2=\alpha_{2,k}^2+\beta_{2,k}^2=1,\ k=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$\mathrm{A}_{k,l},\ (k,l)\in\Re=\left\{(k,l):\Gamma_k\bigcap\Gamma_l=\mathrm{A}_{k,l};\ k\neq l;\ k,l=\overline{1,m}\right\}$$

точки перетину прямих Γ_k та Γ_l, які є границями *k*-тої та *l*-тої смуг відповідно.

Тоді для відновлення невідомої області зображення пропонується використовувати оператор

$$\mathrm{O}_m\mathrm{M}=\sum_{(k,l)\in\Re}\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k,l}}^{m}\frac{\omega_n(i,j)}{\omega_n(\mathrm{A}_{k,l})}\mathrm{O}_{k,l}\mathrm{M}_{i,j},$$

де

$$\mathrm{O}_{k,l}\mathrm{M}=\frac{\rho_l(i,j)}{\mathrm{P}(i,j)}\mathrm{M}_{x_k(i,j),y_k(i,j)}+\frac{\rho_k(i,j)}{\mathrm{P}(i,j)}\mathrm{M}_{x_l(i,j),y_l(i,j)}.$$

Поверхня

$$\mathrm{OM}=\begin{cases}\mathrm{M}_{i,j}, & (i,j)\in\mathrm{M}_k,\ k=\overline{1,m};\\ (\mathrm{O}_m\mathrm{M})_{i,j}, & (i,j)\notin\mathrm{M}_k,\ k=\overline{1,m}\end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні, яка на кожній із смуг $\mathrm{M}_k,\ k=\overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора O_m.

Нижче наведено алгоритм відновлення зображення поверхні, інформація про яку відома лише на системі перетинних смуг, розташованих під довільним кутом.

Крок 1. На кожній із смуг шукаються розриви першого роду від функції, що описує поверхню. В результаті проведення такої операції отримуємо набір сегментів $S_i,\ i=\overline{1,n}$ зображення на кожній із смуг.

Крок 2. Наближуємо границі $\partial S_i=\omega_i(x,y)\le 0,\ i=\overline{1,n}$ отриманих сегментів за допомогою поліномів *k*-го степеня ($k\ge 2$), використовуючи точки розриву відповідного сегменту.

Крок 3. Шукаємо продовження кожного сегменту на іншій смузі. Для цього шукаємо точки перетину отриманих границі сегментів в невідомій області. При цьому якщо такі точки перетину є, то вважаємо, що обидві границі належать одному сегменту і цей сегмент розташовується та декількох смугах одночасно. Якщо таких точок немає, то вважається, що сегмент розташований тільки на одній смузі і його межі не перетинають жодну іншу смугу. Цей процес автоматичний об’єднання сегментів можна замінити штучним об’єднанням сегментів за допомогою ручного їх задання.

Крок 4. Застосовуємо оператор інтерстріпації для відновлення зображення поверхні для кожного із сегментів S_i, $i=\overline{1,n}$, який перетинає смуги *p* та *r*, $O_{p,r}$, $p,r=\overline{1,m}$.

У **підрозділі 3.3** наведено метод відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку коли інформація про поверхню відома на системі $m(m\geq 2)$ криволінійних смуг вигляду:

$$M^{1,k}=\left\{M_{i,j}:\alpha_k(j)\leq i\leq \beta_k(j)\right\},\ k=\overline{1,m}$$

або на системі $n(n\geq 2)$ криволінійних смуг вигляду:

$$M^{2,l}=\left\{M_{i,j}:\gamma_l(i)\leq j\leq \delta_l(i)\right\},\ l=\overline{1,n}.$$

Для відновлення невідомих ділянок зображення $M^{1,k}$, $k=\overline{1,m}$ пропонується використовувати оператор:

$$O_{1,k,k+1}M=\frac{i-\beta_k(j)}{\alpha_{k+1}(j)-\beta_k(j)}M_{\alpha_{k+1}(j),\,j}+\frac{i-\alpha_{k+1}(j)}{\beta_k(j)-\alpha_{k+1}(j)}M_{\beta_k(j),\,j},\ \ k=\overline{1,m-1}.$$

Поверхня

$$OM=\begin{cases} M_{i,j}, & (i,j)\in M^{1,k},\ k=\overline{1,m};\\ (O_{1,k,k+1}M)_{i,j}, & (i,j)\in \overline{M}^{1,k,k+1},\ k=\overline{1,m-1}\end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{1,k}$, $k=\overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{1,k.k+1}$, $k=\overline{1,m-1}$.

Для відновлення невідомих ділянок зображення $M^{2,l}$, $l=\overline{1,n}$ пропонується використовувати оператор:

$$O_{2,l,l+1}M=\frac{j-\delta_l(i)}{\gamma_{l+1}(i)-\delta_l(i)}M_{i,\,\gamma_{l+1}(i)}+\frac{j-\gamma_{l+1}(i)}{\delta_l(i)-\gamma_{l+1}(i)}M_{i,\,\delta_l(i)},\ l=\overline{1,n-1}.$$

Поверхня

$$OM=\begin{cases} M_{i,j}, & (i,j)\in M^{2,l},\ l=\overline{1,n};\\ (O_{2,l,l+1}M)_{i,j}, & (i,j)\in \overline{M}^{2,l,l+1},\ l=\overline{1,n-1}\end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{2,l}$, $l=\overline{1,n}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{2,l,l+1}$, $l=\overline{1,n-1}$.

Основні результати третього розділу опубліковано у роботах [2–7, 11, 12].

У **четвертому розділі** наведено методи знаходження розривів функцій або їх похідних деякого порядку.

У **підрозділі 4.1** наведено метод знаходження точок розриву функції однієї змінної або її похідної деякого порядку. Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з можливими; розривами першого роду функції або деякої її похідної в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Задані вузли розбивають інтервал $[a,b]$ на $n-1$ частин.

Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ називається функція $S(x)\in C^{-1}[a,b]$, яка визначається наступним чином

$$S_{k,k+1}(x)=C_k^{+}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^{-}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1},$$

де C_k^{+}, C_{k+1}^{-}, $k=\overline{1,n-1}$ – параметри сплайну $S_{k,k+1}(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^{+}=\lim_{x\to x_k+0}f^{(m)}(x),\ C_{k+1}^{-}=\lim_{x\to x_k-0}f^{(m)}(x),$$

де m – деякий порядок похідної.

Якщо $\left|\lim\limits_{x\to x_k+0}f^{(m)}(x)-\lim\limits_{x\to x_k-0}f^{(m)}(x)\right|<\varepsilon$, то функцію $f(x)$ будемо називати $d^m\varepsilon$-неперервною в точці x_k.

Нижче наведено алгоритм знаходження розривів функції однієї змінної або її похідної деякого порядку.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах x_k, $k=\overline{1,n}$ за формулою

$$S_{k,k+1}(x)=C_k^{+}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^{-}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}$$

з невідомими коефіцієнтами C_k^{+}, C_{k+1}^{-}, $k=\overline{1,n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C=(C_1^{+},C_2^{-},C_2^{+},C_3^{-},\ldots,C_{n-1}^{+},C_n^{-})$ з умови

$$C_k^{+}=\lim_{x\to x_k+0}f^{(m)}(x),\ C_{k+1}^{-}=\lim_{x\to x_k-0}f^{(m)}(x).$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти у сплайни

$$S_{k,k+1}(x),\ x\in[x_k,x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}.$$

Крок 2. На кожному з інтервалів $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ обчислюємо значення

$$J_k^* = \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x)\,,\; J_k(x) = \left| f^{(m)}(x) - S_{k,k+1}(x) \right|.$$

Крок 3. Видаляємо з розгляду ті інтервали, на яких побудований сплайн є d^mε-неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Інтервали, що залишилися ділимо навпіл.

Крок 4. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн та знаходимо вектор коефіцієнтів C.

Перевіряємо виконання умови

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f^{(m)}(x) - S(x) \right| < \delta\,,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Якщо за допомогою ділення відрізка навпіл, не потрапляємо точно на точку розриву, то ітераційний процес слід зупинити на тій ітерації, починаючи з якої результат не покращується.

У **підрозділі 4.2** наведено метод знаходження точок розриву функції двох змінних або її похідної деякого порядку. Нехай в області $G = \left[a_1, b_1\right] \times \left[a_2, b_2\right]$ задана розривна функція $f(x,y)$ та деяке розбиття на прямокутні елементи

$$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$
$$x = x_k\,,\; k = \overline{0,m},\; a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b_1,$$
$$y = y_l\,,\; l = \overline{0,n},\; a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b_2.$$

Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$, або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i-1,j}$, або $\Pi_{i,j-1}$, функція $f(x,y)$ може мати розриви першого роду функції або її похідної деякого порядку, причому в кожній точці (x_i, y_j) може бути задано чотири різних значення функції, що наближується:

$$C_{i,j}^{++} = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} d^k f(x,y)\,, C_{i,j}^{-+} = \lim_{\substack{x \to x_i - 0 \\ y \to y_j + 0}} d^k f(x,y)\,,$$
$$C_{i,j}^{+-} = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j - 0}} d^k f(x,y), C_{i,j}^{--} = \lim_{\substack{x \to x_i - 0 \\ y \to y_j - 0}} d^k f(x,y),$$
$$d^k f(x,y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^{k} a_{i,j} \frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\,.$$

Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на прямокутнику $\Pi_{i,j}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$ вважаємо функцію, яка визначається наступним чином

$$S_{i,j}(x,y)=C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$
$$+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},\ (x,y)\in\Pi_{i,j},$$

який в кожному елементі $\Pi_{i,j}$ є неперервним інтерполяційним поліномом.

Якщо $\left|\lim\limits_{x\to x_q+0} d^k f(x,y)-\lim\limits_{x\to x_q-0} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \forall y$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати $d^k\varepsilon$-неперервною на лінії $x=x_q$,

Якщо $\left|\lim\limits_{y\to y_s+0} d^k f(x,y)-\lim\limits_{y\to y_s-0} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \forall x$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати $d^k\varepsilon$-неперервною на лінії $y=y_s$.

Якщо виконуються всі чотири нерівності в точці (x_q,y_s)

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,$$
$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати $d^k\varepsilon$-неперервною в точці (x_q,y_s).

Якщо $f(x,y)$ є $d^k\varepsilon$-неперервною $\forall(x,y)\in\Pi_{i,j}$, то будемо її називати $d^k\varepsilon$-неперервною на усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Будемо називати розривним апроксимаційним білінійним сплайном в кожному прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$ сплайн з коефіцієнтами $C_{i,j}^{++},C_{i+1,j}^{-+},C_{i,j+1}^{+-},C_{i+1,j+1}^{--}$, що знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$J(C)=\sum_{\Pi_{i,j}\subset G}\iint\limits_{\Pi_{i,j}}\left[d^k f(x,y)-S_{i,j}(x,y,C)\right]^2 dxdy\to\min_C,$$

де k – значення похідної, в якій шукається розрив.

Нижче наведено алгоритм виявлення точок розриву функції двох змінних або її похідної деякого порядку:

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах $(x_i,y_j),\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1}$, який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $S_{i,j}(x,y)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,l},\ k=\overline{1,(m-1)(n-1)},\ l=\overline{1,4}$ і знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна. Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $S_{i,j}(x,y),\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{1,n-1}$.

Крок 2. На кожному прямокутному елементі розбиття

$$\Pi_{i,j},\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{1,n-1}$$

обчислюємо значення

$$J^{*}_{i,j}=\max_{\substack{x_i\le x\le x_{i+1}\\ y_j\le y\le y_{j+1}}} J_{i,j},\ J_{i,j}=\left|d^k f(x,y)-S_{i,j}(x,y)\right|.$$

Крок 3. Видаляємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є $d^k\varepsilon$-неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися ділимо на чотири рівні прямокутники, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента.

Крок 4. Для отриманого набору прямокутних елементів знову будуємо апроксимаційні сплакни. Далі перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}}\left|d^k f(x,y)-S(x,y)<\delta\right|,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Слід відмітити, що наведені в даному розділі методи можуть одночасно локалізовувати одразу декілька окремих точок (ліній) розриву.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у роботах [1, 8].

ВИСНОВКИ

У роботі отримано нові результати, які є подальшим розвитком теорії інтерстріпації функцій, вперше запропонованих в роботах О.М. Литвина та Ю. І. Матвєєвої. Отримані в роботі результати є теоретичною основою математичного моделювання поверхонь, які описуються функціями двох змінних за допомогою операторів інтерстріпації.

У процесі вирішення поставлених завдань побудови математичних моделей поверхонь операторами інтерстріпації було отримано ряд нових наукових і практичних результатів.

1. Виконано аналіз сучасного стану методів обробки інформації у вигляді двовимірних зображень, у результаті якого встановлено, що використання існуючих методів цифрової обробки сигналів не дозволяє ефективно відновлювати зображення поверхонь, отриманих методами сейсморозвідки, радіолокації, дистанційного зондування планети тощо.

2. На основі розроблених в попередніх роботах операторах інтерстріпації, набули подальшого розвитку методи відновлення двовимірних поверхонь із

пошкодженнями у вигляді смуг, що паралельні осям координат, із використанням узагальнених поліномів Шепарда, Шепарда-Литвина, Лагранжа та Ерміта.

3. Уперше побудована математична модель поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації на системах смуг, границі яких перетинаються під довільним кутом, жодні три з яких не перетинаються в одній точці, що дозволяє відновлювати поверхню, якщо інформація про неї відома на смугах, границі яких описуються лінійними функціями загального вигляду. Використання отриманих операторів інтерстріпації для відновлення пошкоджених сигналів дозволяє розширити спектр прикладних задач, до яких можна їх застосовувати, порівняно із попередніми результатами в області інформаційних операторів.

4. Уперше побудовані математичні моделі поверхні тіла із використанням операторів інтерстріпації на системі смуг, що мають криволінійні границі, що дозволяє відновлювати поверхню, якщо інформація про неї відома на смугах, границі яких описуються деякими наперед відомими неперервними функціями. Отримані оператори дозволяють відновлювати поверхні для більшої кількості прикладних задач, зокрема для обробки даних радарів бокового огляду.

5. Уперше наведено та досліджено метод математичного моделювання поверхні тіла з використанням операторів інтерстріпації, інформація про яку відома лише на системі смуг, границі яких представляють собою замкнуті криві.

6. Розроблено метод відновлення поверхні тіла із урахуванням додаткової інформації про структуру поверхні на відомих її ділянках. Цей метод дозволяє більш точно відновлювати поверхню між смугами у випадку якщо на ній присутні значні розриви, наприклад, обриви, підняття або деякі штучно створені об'єкти.

7. Наведено приклади практичного застосування отриманих операторів інтерстріпації для відновлення фотознімку із пошкодженнями у вигляді заломів та приклад відновлення пошкоджених профілів результатів сейсморозвідки корисних копалин в деякому регіоні.

8. Усі отримані результати добре узгоджуються із попередніми результатами досліджень в області операторів інтерстріпації функцій. Тобто, оператори інтерстріпації для випадку границь невідомих областей у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом, у випадку якщо ці прямі розташовані паралельно до осей координат дають аналогічні результати, що і результати попередніх досліджень для операторів інтерстріпації із границями, паралельними осям координат. Аналогічно і для операторів інтерстріпації для випадку криволінійних границь невідомих областей: якщо функції границі описують прямі, паралельні осям координат, що в сукупності означає добру узгодженість отриманих результатів із існуючою теорією операторів інтерстріпації функцій.

9. Введено означення $d^k\varepsilon$-неперервності функції однієї чи двох змінних та розривних інтерполяційних сплайнів, що є подальшим розвитком поняття ε-неперервності, в основі якого лежить поняття неперервності самої функції.

10. Розроблено метод знаходження точок розриву функції однієї змінної, або деякої її похідної, що має точки розриву першого роду у відповідній похідній.

11. Розроблено метод знаходження ліній розриву функції двох змінних, що має лінії розриву функції або деякої її похідної, та наближення їх білінійними сплайнами, використовуючи прямокутні елементи.

Побудовані в роботі математичні моделі, методи та алгоритми можуть бути використані для обробки архівних даних у вигляді знімків, даних сейсмічної томографії, комп'ютерної томографії, рентгенографії, аерокосмічної зйомки, радіолокаторів бокового огляду тощо. При цьому функції, що описують поверхню можуть являти собою інтенсивність освітлення поверхні в кожній точці поверхні, рівнем радіоактивності тощо.

Всі теоретичні твердження дисертаційної роботи доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Литвин О. М., Славік О. В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку // Проблемы машиностроения. 2016. Т.19 №1. С. 37-43.

2. Литвин О. М., Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетенних смуг, розташованих під довільним кутом // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. №2. С. 175-182.

3. Відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славік // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2016. №2(87). С. 88-93.

4. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Г. Д. Лісний, О. В. Славік // Управляющие системы и машины. 2017. №1(267). С. 46-58.

5. Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперетинних смуг з криволінійними границями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. №15. С. 207-212.

6. Литвин О. М., Пасічник В. О., Славік О. В. Застосування методу інтерстріпації для реставрації пошкоджених зображень // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал. 2017. №2(89). С. 56-60.

7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized interstripation of functions of two variables // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54 №3. P. 465-475. [The journal is indexed in Scopus]

8. Славік О. В. Дослідження методів виявлення розривів земної поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2015): матеріали VI Всеукраїнської

науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 19-21 березня 2015р.). 2015. С. 309–312.

9. Славік О. В. Застосування оператора Лапласа для виявлення розривів земної поверхні // Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XIX міжнародного молодіжного форуму (м. Харків, 20-22 квітня 2015р.). 2015. Т.7. С. 102–103.

10. Славік О. В. Про один метод реставрації зображень // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 10-12 березня 2016р.). 2016. С. 277–279.

11. Литвин О. М., Литвин О. О., Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперервних смуг з криволінійними границями // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: збірник праць IV науково-технічної конференції (м. Львів, 28-30 вересня 2016р.). 2016. Вип.4. С. 21–24.

12. Литвин О. М., Славік О. В. Застосування узагальненої інтерстріпації функцій двох змінних для відновлення зображення поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2017): матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16-18 березня 2017р.). 2017. С. 180–182.

13. Литвин О. М., Славік О. В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетин них смуг, розташованих під довільним кутом // Матеріали 50-ї науково-практичної конференції науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії. Технологічний факультет. Секції: харчових та хімічних технологій, технологій та дизайну, вищої та прикладної математики (м. Харків, 25-29 вересня 2017р.). 2017. С. 53.

АНОТАЦІЯ

Славік О. В. Математичне моделювання поверхні методами інтерстріпації функцій за неповною інформацією про неї. – На правах рукопису**.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2020.

Дисертаційна робота присвячена математичному моделюванню поверхні тіла методами інтерстріпації функцій двох змінних за відомою інформацією про неї на смугах із границями певної форми. Наведені в даній роботі методи відновлення поверхні між смугами є подальшим розвитком теорії інтерстріпації функцій, вперше запропонованих в роботах О. М. Литвина та Ю. І. Матвєєвої, де було наведено оператори інтерстріпації для випадку смуг із границями, паралельними осям координат. В даній роботі наведено та досліджено методи відновлення пошкоджених поверхонь операторами інтерстріпації на системах смуг, границі яких є прямими, розташованими під довільним кутом; границі

яких представлені криволінійними функціями; границі яких є замкнутими контурами.

Наведено метод знаходження ліній розриву неперервної функції (однієї або двох змінних) або їх похідної деякого порядку. Наведено означення $d^k\varepsilon$-неперервності. Наведено алгоритм знаходження точок розриву для функцій однієї змінної або їх похідних деякого порядку та алгоритм знаходження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку.

Ключові слова: нові інформаційні оператори, інтерстріпація, інтерлінація, відновлення зображень, дистанційне зондування планети, сейсмічна томографія, картографія, ε-неперервність, $d^k\varepsilon$-неперервність.

АННОТАЦИЯ

Славик А. В. Математическое моделирование поверхности методами интерстрипации функций по неполной информацией о ней. – На правах рукописи**.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2020.

Диссертационная работа посвящена математическому моделированию поверхности тела методами интестрипации функций двух переменных по известной информации о ней на полосах с границами определенной формы. Приведенные в данной работе методы восстановления поверхности между полосами являются дальнейшим развитием теории интерстрипации функций, впервые предложенные в работах О. Н. Литвина и Ю. И. Матвеевой, где были приведены операторы интерстрипации для случаев полос с границами, параллельными осям координат. В данной работе приведены и исследованы методы восстановления поврежденных поверхностей операторами интерстрипации на системах полос, границы которых являются прямыми, расположенными под произвольным углом; границы которых представлены криволинейными функциями; границы которых являются замкнутыми контурами.

Приведен метод нахождения линий разрыва непрерывной функции (одной или двух переменных) или ее производной некоторого порядка. Приведено определение $d^k\varepsilon$-непрерывности.Приведен алгоритм нахождения точек разрыва для функций одной переменной или ее производной некоторого порядка и алгоритм нахождения линий разрыва функций двух переменных или ее производной некоторого порядка.

Ключевые слова: новые информационные операторы, интерстрипация, интерлинация, восстановление изображений, дистанционное зондирование планеты, сейсмическая томография, картография, ε-непрерывность, $d^k\varepsilon$-непрерывность.

ABSTRACT

Slavik O. V. Mathematical Modeling of Surfaces by the Methods of Interstripation of Functions on Incomplete Information About It. – The manuscript.

A dissertation for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkiv National University of Radioelectronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2020.

Recently, new information operators (interlination, interstipation, intertubation, interlearisation, interlocation) are gaining in popularity and are embracing big amount of applied problems of mechanics and technology. The purpose of this work is to summarize the methods of restoration of functions of two variables by interstripation operators in order to expand their possibilities for application. At present, interstripation operators are known for the restoration of damaged surfaces in the form of strips with boundaries parallel to the coordinate axes, which quite strongly narrows the spectrum of applied problems to which the method can be applied. Therefore, generalizing interstripation operators in the case of boundary bands at arbitrary angles or having curvilinear boundaries will make operators more versatile and will allow operators to apply for solve more count of applied problems.

The dissertation is devoted to mathematical modeling of the body surface by methods of the functions of two variables known information about it on bands with boundaries of a certain shape. The methods for reconstructing the surface between the bands presented in this work are a further development of the theory of interstipation of functions, first proposed in the works of Lytvyn O. M. and Matveeva Yu. I, where the interstipation operators were given for the cases of bands with boundaries parallel to the coordinate axes.

The interstipation operators for continuous several times differentiable functions are considered. For this class of functions methods for restoring damaged surfaces by interstripation operators on systems of stripes are presented and investigated for stripes whose boundaries are: straight, parallel to the coordinate axes; straight, located at an arbitrary angle; curved functions; closed loops. Interstripation operators in the form of Hermite, Lagrange, Shepard and Shepard-Lytvyn are given. For each of the operators described, computational experiments were performed to recover unknown areas by appropriate methods. In each of the experiments showed a comparison with the original function and an absolute error of approximation.

The methods of restoration of the damaged discrete two-dimensional signals by the interstripation operators are presented. The use of Hermite, Shepard and Shepard-Lytvyn polynomials to recover discrete signals is not appropriate, so Lagrange-form interstripation operators are used for restoring in this case. In this work, methods for restoring damaged surfaces by interstripation operators on systems of stripes are presented and investigated for stripes whose boundaries are: straight, parallel to the coordinate axes; straight, located at an arbitrary angle; straight, located at an arbitrary angle with using additional information from existing stripes; curved functions. A series of computational experiments was carried out by cutting out different types of bands in the study area and restoring them using the methods proposed in the work. The results of all experiments were compared with the original to study the inaccuracy of the application of interstipation operators. An example of the use of interstipation operators for the elimination of damage to archive photos is given. The result of using interstipation operators was compared with the results of applying known inpainting methods.

The example of restoring an archive photo with damage in the form of a crease is considered. An example of filling in missing data on slices of a seismographic tomogram when exploring minerals in the region is given.

A generalized method for finding discontinuities of a continuous function of one or two variables or its derivative of some order is given. The definition of $d^k\varepsilon$-discontinuous of a function is given. An algorithm for finding discontinuity points for functions of one variable or its derivative of some order and an algorithm for finding discontinuity lines of functions of two variables or its derivative of some orders is given. This method is based on the works of Pershyna Yu. I. and Nefyodova I. V., in which proposed methods for finding discontinues of the function of discontinuous of the first variable of functions only. These cases present in a generalized method in case if $k = 0$ (for finding discontinuous of function) or $k = 1$ (for finding discontinuous of the first derivates of function).

Key words: new information operators, interlination, interstripation, inpainting, remote sensing of the planet, seismic tomography, cartography,ε-discontinuous, $d^k\varepsilon$-discontinuous.

Підписано до друку 30.10.2020 р. Формат 60х84х1/16
Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9. Зам. № 243/2.
Віддруковано з оригінал-макету у «Центрі цифрової поліграфії»
м. Харків, пр. Науки, 7, тел. 702-13-88
e-mail: nauki007@gmail.com