

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

УРНЯЄВА ІННА АНАТОЛІЇВНА

УДК 519.85

ДИСЕРТАЦІЯ
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ЗАВАНТАЖЕННЯ КОНТЕЙНЕРІВ:
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ І ЗАСТОСУВАННЯ

124 – Системний аналіз

12 – Інформаційні технології

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ І.А. Урняєва

Науковий керівник
Романова Тетяна Євгеніївна,
доктор технічних наук, професор

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Урняєва І.А. Оптимізаційні задачі завантаження контейнерів: математичні моделі, методи розв'язання і застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 124 «Системний аналіз» (12 – Інформаційні технології). – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, 2020.

Дисертаційну роботу присвячено актуальній проблемі створення сучасних комп'ютерних технологій (математичних моделей, методів, алгоритмів та програм), орієнтованих на розв'язання задач проектування оптимального завантаження контейнерів з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень, які проводяться у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України в рамках теорії геометричного проектування під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна.

Метою дисертаційної роботи є розробка та аналіз оптимізаційних моделей, методів та алгоритмів для підвищення ефективності розв'язання задач завантаження контейнерів.

Об'єкт дослідження – процес завантаження контейнерів в складних технічних системах.

Предмет дослідження – математичні моделі, методи та алгоритми розв'язання задач проектування оптимального розміщення вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах довільної форми з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи комбінаторного аналізу, комбінаторної оптимізації, методи геометричного проектування для

побудови математичних моделей задач рівноважної компоновки контейнерів, зокрема, метод ρ -функцій для опису обмежень геометричних об'єктів (вантажів), евристичні методи для розв'язання задач оптимізації.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в наступному:

1. Вперше визначено комбінаторні конфігурації, які дозволяють описати комбінаторну структуру задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів (вантажів) у контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери.

2. Вперше побудовано математичну модель задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів, яка на відміну від інших дозволяє врахувати не тільки геометричні обмеження та баланс системи, але й комбінаторні особливості, пов'язані з генерацією розбиття множини об'єктів, що розміщуються всередині підконтейнерів.

3. Вперше побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування для оптимізації компоновання груп об'єктів (вантажів) у прямокутному контейнері, що дозволяє застосування сучасних НЛП-розв'язувачів для її розв'язання.

4. Вперше запропоновано швидкий метод генерації допустимих стартових точок для прискорення процедури локальної оптимізації та поліпшення значення функції цілі в задачі оптимізації компоновання груп об'єктів (вантажів) у прямокутному контейнері.

5. Отримали подальший розвиток стратегії, моделі та методи розв'язання задач розміщення контейнерів в процесі їх перевантаження в частині побудови математичної моделі задачі розміщення контейнерів на залізничному терміналі та врахування геометричних та технологічних властивостей для її розв'язання, що дозволяє знизити загальну вартість контейнерних операцій на залізничному терміналі.

Проведено системний аналіз проблеми оптимального завантаження контейнерів в різних сферах застосування. В результаті зроблено такі висновки:

- контейнерні перевезення є підсистемою глобальної економічної та геополітичної системи, яка здійснює значний вплив на світові процеси;

- контейнерні перевезення мають тенденцію до кількісного зростання та технологічного розвитку на всіх рівнях – глобальному, регіональному та місцевому;

- оптимізацію завантаження контейнерів варто розглядати як на етапі виконання операцій переміщення контейнерів у контейнерному терміналі, так і на етапі завантаження окремих контейнерів, що є джерелом суттєвого економічного ефекту.

Виконано огляд та аналіз задач оптимального завантаження контейнерів на рівні контейнерних терміналів як вузлів систем транспортних перевезень. Проаналізовано задачі побудови оптимальних компоновок, які виникають у аерокосмічній галузі, а саме: задачі проектування оптимального розміщення корисних вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах довільної форми з урахуванням геометричних та механічних обмежень. Здійснено огляд та аналіз засобів математичного моделювання та розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів, зокрема, методів геометричного проектування.

Сформульовано мету роботи та постановку задач дослідження.

Досліджено задачу побудови рівноважної компоновки 3D-об'єктів в контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери. Побудовано математичну модель, що враховує не тільки геометричні обмеження та умови балансу, а й комбінаторні особливості задачі, пов'язані з необхідністю побудови розбиття множини розміщуваних об'єктів по підконтейнерах. Запропоновано стратегію розв'язання, яка включає процедури: генерації кортежів розбиття; побудови стартових точок з області допустимих рішень; локальної оптимізації. Даний підхід використовує принцип мультистарту для пошуку «хороших» допустимих розв'язків. Результати чисельних експериментів показали ефективність запропонованого підходу для розглянутого класу задач рівноважної компоновки.

Проаналізовано задачу оптимального упакування опуклих 3D-об'єктів у контейнер з опорними полицями (стелажами) з урахуванням обмежень розміщення та умови балансу. Для аналітичного опису обмежень розміщення використовується метод ϕ -функцій. Побудовано загальну математичну модель комбінаторної задачі рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними та балансними умовами. Залежно від видів цільових функцій, форм об'єктів та контейнерів, комбінацій геометричних та балансних обмежень можуть створюватися різні варіанти задачі пакування. Пропонується стратегія розв'язання на основі методу мультистарта, яка передбачає використання допустимої стартової точки та алгоритму локальної оптимізації. Зокрема, у випадку пакування циліндрів задача зводиться до задачі пакування кіл.

Сформульовано багатокритеріальну задачу оптимізації розміщення 3D-об'єктів у контейнер з урахуванням обмежень розміщення (неперетинання, включення, відстань) та балансу (рівноваги, інерції та стабільності) - багатокритеріальну задачу рівноважної компоновки (MBLP). Для аналітичного опису обмежень розміщення використано метод ϕ -функцій. Побудовано математичну модель задачі у вигляді багатокритеріальної задачі оптимізації. Представлено варіанти задачі MBLP залежно від форм цільових функцій, форм об'єктів і контейнерів та комбінацій обмежень.

Досліджено задачу пакування (компоновки) для набору груп опуклих об'єктів, що мотивовано проблемами завантаження контейнера, які виникають у задачах логістики. Завантаження розглядається для прямокутного контейнера заданого розміру за умови неперетину (неперервно трансльованих та таких, що обертаються) об'єктів у групі. Об'єкти визначаються своїми розмірами та мають однакову форму для відповідної групи. Кожна група представлена опуклою оболонкою об'єктів, що утворюють цю групу. Передбачається, що дві групи не перетинають одна одну, якщо це виконується для їх опуклих оболонок, і група належить до прямокутного контейнера, якщо це справедливо для відповідної опуклої

оболонки. Запропоновано нові засоби математичного моделювання груп, що не перетинаються та розміщуються всередині контейнера. Представлено розширення методу ϕ -функцій на опуклі оболонки груп об'єктів з урахуванням їх змінних форм та метричних характеристик. Представлені нові квазі- ϕ -функції та ϕ -функції. Ці функції не потребують побудови опуклої оболонки для кожної групи. Побудовано нову математичну модель для оптимального розміщення груп, що формулюється як нелінійна неперервна задача оптимізації. Розроблено новий алгоритм пошуку допустимих стартових розв'язків для прискорення та поліпшення процедури локальної оптимізації. Для демонстрації ефективності запропонованого підходу представлені результати обчислень, які демонструють нову задачу пакування для груп об'єктів, що включають еліпси, кола та опуклі багатокутники.

Проаналізовано проблему аналізу та моделювання роботи залізничного терміналу при здійсненні операцій перевантаження контейнерів.

Досліджено задачу оптимізації призначення потягів на залізничні колії при обробці вантажів на залізничному терміналі. Представлено математичну модель і метод розв'язання. Математична модель описує задачу в термінах комбінаторних конфігурацій та враховує призначення поїздів на залізничні колії, що у сукупності дозволяє знизити розмірність задачі та підвищити ефективність її розв'язання.

Запропоновано підхід для підвищення ефективності виконання операцій перевантаження контейнерів на залізничному терміналі. Відповідно до підходу здійснюється оптимізація розміщення контейнерів на залізничних платформах та в зоні зберігання на залізничному терміналі. Побудовано математичну модель у вигляді задачі комбінаторної оптимізації; проаналізовано властивості моделі. Наведено приклади розрахунків ефективності виконання операцій перевантаження контейнерів за допомогою запропонованої моделі.

Надано рекомендації щодо використання запропонованих в роботі алгоритмів розв'язання задач завантаження контейнерів в підсистемі "Планування заходів і підготовка рішень" Регіональної інформаційно-аналітичної підсистеми з надзвичайних ситуацій РІАП НС.

Практичне значення результатів роботи. Запропоновані методи та алгоритми для розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів можуть бути використані для підвищення ефективності діяльності транспортних компаній. Отримані результати щодо сучасних комп'ютерних технологій (математичних моделей, методів, алгоритмів та програм), орієнтованих на розв'язання задач оптимальних компонок у проектуванні використовуються в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки, зокрема, у навчальній дисципліні «Моделі та методи прийняття рішень в системному проектуванні» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, про що свідчить акт (Додаток Б).

Матеріали дисертації досить повно викладено у 18 наукових працях автора за темою дисертації, у тому числі: 4 статті в журналах, серед яких 1 стаття у виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України з присвоєнням категорії "А" та індексованому базою Scopus; 1 стаття у періодичному науковому виданні іншої держави (Китай), яке віднесено до третього квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 стаття у періодичному науковому виданні іншої держави (Єгипет), яке віднесено до другого квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 стаття у науковому виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України з присвоєнням категорії "Б"; 2 розділи в колективних монографіях, серед яких 1 розділ у виданні держави, що входить до Організації економічного співробітництва (США), яке віднесено третього квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 розділ у виданні держави, що входить до Організації економічного співробітництва (Швейцарія), яке віднесено

четвертого квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus; та 12 – в матеріалах міжнародних конференцій, серед них 4 доповіді, що опубліковані в матеріалах міжнародних наукових конференцій, які індексуються базою Scopus.

Ключові слова: контейнер, 3D-об'єкти, рівноважна компоновка, упакування, метод ϕ -функцій, математична модель, комбінаторна оптимізація, евристика, залізничний термінал, інтермодальні перевезення.

Список публікацій здобувача

1. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Задача балансной компоновки цилиндрических объектов с учетом ее комбинаторных особенностей // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал, 2017. №1 (88). С.22–28.

2. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Scheduling Freight Trains in Rail-rail Transshipment Yards with Train Arrangements // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA), 2017. Vol.9, No.10, pp.12-19. Scopus.

3. Гребеннік І.В., Коваленко А.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки // Кібернетика та системний аналіз. 2018. т. 54 №2.– С. 55–67.

4. Grebennik I., Khriapkin O., Ovezgeldyyev A., Pisklakova V., Urniaieva I. (2019) The Concept of a Regional Information-Analytical System for Emergency Situations // In: Murayama Y., Velev D., Zlateva P. (eds) Information Technology in Disaster Risk Reduction. ITDRR 2017. IFIP Advances in Information and Communication Technology, vol 516. Springer, Cham. Scopus.

5. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Pankratova Yu., Urniaieva I., Optimized Packing Clusters of Objects in a Rectangular Container // Mathematical Problems in Engineering. 2019. vol. 2019, Article ID 4136430, 12 pages. Scopus

6. Romanova T., Litvinchev I., Grebennik I., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. (2020) Packing Convex 3D Objects with Special Geometric and

Balancing Conditions // Chapter in contributed book "Intelligent Computing and Optimization", Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Computing and Optimization 2019 (ICO 2019) / Springer Optimization and its Applications, Vasant, P., Zelinka, I., Weber, G.-W. (Editors), Springer, New York, 273–281. Scopus.

7. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбінаторні особливості задачі балансної компоновки 3D-об'єктів // Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS-2015) 18-20 листопада 2015 р. Дніпропетровськ, Україна.

8. Урняєва І.А., Гребеннік І.В., Романова Т.Є., Шеховцов С.Б. Про задачу завантаження для інтермодальних контейнерних перевезень // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2016, Дніпро, 16-18 листопада 2016 р. – Дніпропетровський національний університет ім. Олесья Гончара. – С.224-225.

9. Коваленко Г., Урняєва І., Шеховцов С. Задача балансної компоновки 3D-об'єктів та її комбінаторні властивості // Матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ІСТ 2016, 12–17 вересня. –Харків–Коблево. – 2016.– С. 277–278.

10. Grebennik I., Khriapkin O., Pisklakova V., Urniaieva I. Concept of a regional information-analytical system for emergency situations // 2nd IFIP Conference on Information Technology in Disaster Risk Reduction ITDRR 2017, October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria.

11. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I. Combinatorial balance layout problem of cylindrical objects // 30 International Conf. “Problems of decision making under uncertainties”, August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania – P. 57.

12. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Train arrangement in scheduling for Rail-rail transshipment yard // 7-th International Conference on

Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

13. Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Multicriteria balance layout problems of 3D- objects // 7-th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

14. Гребеннік І., Коваленко Г., Романова Т., Урняєва І., Шеховцов С. Метод розв'язання задач балансної компоновки // Матеріали 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ІСТ 2018, 10-15 вересня. –Харків – Коблево. – 2018. – С. 145–148.

15. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Mathematical Model of Balanced Layout Problem Using Combinatorial Configurations // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 18-21. Scopus.

16. Urniaieva I., Grebennik I., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A. Muticriteria Model of Balanced Layout Problem of 3D-Objects // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 22-25. Scopus.

17. Grebennik I., Dupas R., Urniaieva I., Kalaida N., Ivanov V. Mathematical Model of Containers Placement in Rail Terminal Operations Problem // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 129-132. Scopus.

18. Urniaieva I., Pankratov A., Romanova T., Grebennik I., Dupas R., Shekhovtsov S. Balance Packing Problem of Cuboids in an Optimized Cylindrical Container // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P., 133-136. Scopus.

ABSTRACT

Urniaieva I.A. Optimization problems of container loading: mathematical models, solution methods and applications. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

A Thesis for a Philosophy doctor degree in the specialty 124 «System Analysis» (12 – Information Technologies). – Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, 2020.

The thesis is devoted to the creation of modern computer technologies (mathematical models, methods, algorithms and programs), focused on solving problems of designing the optimal loading of containers, taking into account the geometric constraints and balance conditions.

The thesis is a continuation of research conducted in the department of Mathematical modeling and optimal design of the A.M. Podgorny Institute of Mechanical Engineering NAS of Ukraine in the framework of the theory of geometric design under the leadership of the corresponding member of the NAS of Ukraine Yu. G. Stoyan.

The aim of the dissertation is to develop and analyze optimization models, methods and algorithms to increase the efficiency of solving container loading problems.

The object of study - the process of loading containers in complex technical systems.

The subject of research is mathematical models, methods and algorithms for solving problems of designing the optimal placement of goods of given shapes and sizes in containers, taking into account geometric and mechanical constraints.

Research methods. The methods of combinatorial analysis, combinatorial optimization, methods of geometric design to build mathematical models of equilibrium container problems, in particular, the method of phi-functions to describe the constraints of geometric objects (loads), heuristic methods for solving optimization problems.

The scientific novelty of the dissertation is as follows:

1. For the first time, combinatorial configurations have been defined that allow us to describe the combinatorial structure of the problem of optimal equilibrium loading of 3D objects (cargoes) in a container divided by horizontal racks into subcontainers.

2. For the first time, a mathematical model of the problem of optimal equilibrium loading of 3D objects was built, which, unlike others, allows to take into account not only the geometric constraints and balance of the system, but also combinatorial features related to the generation of partitioning of objects inside subcontainers.

3. For the first time, a mathematical model was constructed in the form of a nonlinear programming problem to optimize the layout of groups of objects (cargoes) in a rectangular container, which allows the use of modern NLP-solvers to solve it.

4. For the first time, a fast method of generating feasible starting points for speeding up the local optimization procedure and improving the value of the objective function in the problem of optimizing the layout of groups of objects (cargo) in a rectangular container is proposed.

5. The strategies, models and methods for solving the problems of container placement in the process of their overloading in terms of constructing a mathematical model of the container placement problem at the railway terminal and taking into account the geometric and technological properties for its solution, which makes it possible to reduce the total cost of container operations at the railway terminal, were further developed.

A system analysis of the problem of optimal loading of containers in different areas of application was carried out. As a result, the following conclusions were made:

- container transportation is a subsystem of the global economic and geopolitical system, which has a significant impact on world processes;

- container traffic tends to increase in quantity and technological development at all levels - global, regional and local;

- optimization of container loading should be considered both at the stage of performing container movement operations in the container terminal, and at the stage of loading individual containers, which is a source of significant economic effect.

The review and analysis of the problems of optimal loading of containers at the level of container terminals as nodes of transport systems are performed. The problems of construction of optimal layouts that arise in the aerospace industry are analyzed, namely: problems of designing the optimal placement of payloads of given shapes and sizes in containers of arbitrary shape, taking into account geometric and mechanical constraints. A review and analysis of mathematical modeling tools and solving problems of optimal loading of containers, in particular, methods of geometric design.

The purpose of work and statement of tasks of research are formulated.

The problem of constructing an equilibrium layout in a container of 3D-objects in a container divided by horizontal racks into subcontainers is investigated. A mathematical model is built that takes into account not only the geometric constraints and conditions of the balance, but also the combinatorial features of the problem associated with the need to build a partition of the set of placed objects in subcontainers. A solution strategy is proposed, which includes procedures: generation of split tuples; construction of starting points in the field of acceptable solutions; local optimization. This approach uses the principle of multistart to find "good" solutions. The results of numerical experiments showed the effectiveness of the proposed approach for the considered class of equilibrium layout problems.

The problem of optimal packing of convex 3D-objects in a container with supporting shelves (racks) is analyzed, taking into account the constraints of placement and balance conditions. The method of phi-functions is used for the analytical description of placement constraints. A general mathematical model of

the combinatorial problem of equilibrium layout with special geometric and balance conditions is constructed. Depending on the types of objective functions, shapes of objects and containers, combinations of geometric and behavioral constraints, different variants of the packaging problem can be created. A multi-start solution strategy is proposed and involves the use of a valid starting point and a local optimization algorithm. In particular, in the case of packing cylinders, the problem is reduced to the problem of packing circles.

The multicriteria problem of optimization of placement of 3D-objects in the container taking into account constraints of placement (non-intersection, inclusion, distance) and balance (equilibrium, inertia and stability) is formulated - the multicriteria balance layout problem (MBLP). The method of phi-function was used for analytical description of placement constraints. A mathematical model of the problem in the form of a multicriteria optimization problem is constructed. Variants of the MBLP problem are presented depending on the forms of objective functions, forms of objects and containers, combinations of constraints.

The problem of packing (layout) for a set of groups of convex objects is investigated, which is motivated by the problems of container loading, which arise in logistics problems. The load is considered for a rectangular container of a given size under the condition of non-intersection (continuously broadcast and rotating) of objects in the group. Objects are determined by their size and have the same shape for the corresponding group. Each group is represented by a convex hull of objects that make up this group. It is assumed that the two groups do not intersect each other if this is done for their convex hulls, and the group belongs to a rectangular container if this is true for the corresponding convex hull.

New tools of mathematical modeling of groups that do not intersect and are placed inside the container are proposed. The extension of the method of phi-functions to convex hulls of groups of objects taking into account their variable forms and metric characteristics are presented.

New quasi-phi-functions and phi-functions are presented. These functions do not require the construction of a convex hull for each group. A new mathematical

model for optimal placement of groups is constructed, which is formulated as a nonlinear continuous optimization problem. A new algorithm for finding feasible starting solutions to speed up and improve the local optimization procedure has been developed. To demonstrate the effectiveness of the proposed approach, the results of calculations are presented, which demonstrate a new layout problem for groups of objects, including ellipses, circles and convex polygons.

The problem of analysis and modeling of the railway terminal operation during container reloading operations is analyzed.

The problem of optimizing the assignment of trains on railway tracks during cargo handling at the railway terminal is investigated. The mathematical model and method of solving the problem are presented. The mathematical model describes the problem in terms of combinatorial configurations and takes into account the assignment of trains on railway tracks, which together allows to reduce the dimension of the problem and increase the efficiency of its solution.

An approach is proposed to increase the efficiency of container handling operations at the railway terminal. According to the approach, the placement of containers on railway platforms and in the storage area at the railway terminal is optimized. A mathematical model in the form of a combinatorial optimization problem is constructed; the properties of the model are analyzed. Examples of calculations of efficiency of performance of operations of reloading of containers using the proposed model are given.

The use of the algorithms of the solution of problems of loading of containers in the subsystem "Planning of actions and preparation of decisions" of the Regional information and analytical subsystem on emergencies RIASE is recommended.

The practical significance of the results of work. The proposed methods and algorithms for solving the problems of optimal loading of containers can be used to increase the efficiency of transport companies. The obtained results on modern computer technologies (mathematical models, methods, algorithms and programs) focused on solving problems of optimal layouts in design are used in the

educational process of Kharkiv National University of Radio Electronics, in particular, in the discipline "Models and methods of decision making in system design "for applicants for the second (master's) level of higher education, as evidenced by the act (Appendix B).

The dissertation materials are fully presented in 18 scientific works of the author on the topic of the dissertation, including: 4 articles in journals, among them 1 article in a publication included in the list of scientific professional publications of Ukraine with category "A" and indexed Scopus database; 1 article in a scientific periodical of another state (China), which is classified as the third quartile according to the classification SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 article in a scientific periodical of another state (Egypt), which is classified as the second quartile according to the classification SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 article in a scientific publication included in the list of scientific professional publications of Ukraine with the assignment of category "B"; 2 chapters in collective monographs, including 1 chapter in the publication of a state member of the Organization for Economic Cooperation (USA), which belongs to the third quartile according to the classification SCImago Journal and Country Rank, Scopus; 1 section in the publication of a state member of the Organization for Economic Cooperation (Switzerland), which is classified as the fourth quartile according to the classification SCImago Journal and Country Rank, Scopus; and 12 - in the materials of international conferences, including 4 reports published in the materials of international scientific conferences, which are indexed by the Scopus database.

Keywords: container, 3D-objects, equilibrium layout, packing, mathematical model, phi-functions technique, combinatorial optimization, heuristics, railway terminal, intermodal transportation.

List of publications of the applicant

1. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Задача балансної компоновки циліндричних об'єктів с

учетом ее комбинаторных особенностей // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал, 2017. №1 (88). С.22–28.

2. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Scheduling Freight Trains in Rail-rail Transshipment Yards with Train Arrangements // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA), 2017. Vol.9, No.10, pp.12-19. Scopus.

3. Гребеннік І.В., Коваленко А.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки // Кібернетика та системний аналіз. 2018. т. 54 №2.– С. 55–67.

4. Grebennik I., Khriapkin O., Ovezgeldyyev A., Pisklakova V., Urniaieva I. (2019) The Concept of a Regional Information-Analytical System for Emergency Situations // In: Murayama Y., Velev D., Zlateva P. (eds) Information Technology in Disaster Risk Reduction. ITDRR 2017. IFIP Advances in Information and Communication Technology, vol 516. Springer, Cham. Scopus.

5. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Pankratova Yu., Urniaieva I., Optimized Packing Clusters of Objects in a Rectangular Container // Mathematical Problems in Engineering. 2019. vol. 2019, Article ID 4136430, 12 pages. Scopus.

6. Romanova T., Litvinchev I., Grebennik I., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. (2020) Packing Convex 3D Objects with Special Geometric and Balancing Conditions // Chapter in contributed book "Intelligent Computing and Optimization", Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Computing and Optimization 2019 (ICO 2019) / Springer Optimization and its Applications, Vasant, P., Zelinka, I., Weber, G.-W. (Editors), Springer, New York, 273–281. Scopus.

7. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбінаторні особливості задачі балансної компоновки 3D-об'єктів // Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS-2015) 18-20 листопада 2015 р. Дніпропетровськ, Україна.

8. Урняєва І.А., Гребеннік І.В., Романова Т.Є., Шеховцов С.Б. Про задачу завантаження для інтермодальних контейнерних перевезень // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2016, Дніпро, 16-18 листопада 2016 р. – Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара. – С.224-225.

9. Коваленко Г., Урняєва І., Шеховцов С. Задача балансної компоновки 3D-об'єктів та її комбінаторні властивості // Матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ІСТ 2016, 12–17 вересня. –Харків–Коблево. – 2016.– С. 277–278.

10. Grebennik I., Khriapkin O., Pisklakova V., Urniaieva I. Concept of a regional information-analytical system for emergency situations // 2nd IFIP Conference on Information Technology in Disaster Risk Reduction ITDRR 2017, October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria.

11. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I. Combinatorial balance layout problem of cylindrical objects // 30 International Conf. “Problems of decision making under uncertainties”, August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania – P. 57.

12. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Train arrangement in scheduling for Rail-rail transshipment yard // 7-th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

13. Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Multicriteria balance layout problems of 3D- objects // 7-th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

14. Гребеннік І., Коваленко Г., Романова Т., Урняєва І., Шеховцов С. Метод розв'язання задач балансної компоновки // Матеріали 7-ї Міжнародної

науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ICT 2018, 10-15 вересня. –Харків – Коблево. – 2018. – С. 145–148.

15. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Mathematical Model of Balanced Layout Problem Using Combinatorial Configurations // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 18–21. Scopus.

16. Urniaieva I., Grebennik I., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A. Muticriteria Model of Balanced Layout Problem of 3D-Objects // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 22–25. Scopus.

17. Grebennik I., Dupas R., Urniaieva I., Kalaida N., Ivanov V. Mathematical Model of Containers Placement in Rail Terminal Operations Problem // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 129 –132. Scopus.

18. Urniaieva I., Pankratov A., Romanova T., Grebennik I., Dupas R., Shekhovtsov S. Balance Packing Problem of Cuboids in an Optimized Cylindrical Container // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 133–136. Scopus.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	5
ВСТУП.....	6
1 Системний аналіз задач завантаження контейнерів в різних сферах застосування.	13
1.1 Системні аспекти проблеми застосування контейнерів	13
1.2 Завантаження контейнерів в транспортній логістиці	17
1.3 Математичне моделювання та розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів	24
1.4 Основні визначення методу phi-функцій	30
1.5 Постановка задачі дослідження	34
1.6 Висновки за першим розділом	35
2 Математичні моделі та стратегії розв'язання оптимізаційних задач рівноважної компоновки вантажів у контейнерах	36
2.1 Комбінаторні конфігурації в оптимізаційних задачах рівноважної компоновки контейнерів.....	36
2.1.1 Постановка задачі	38
2.1.2 Побудова комбінаторної множини	40
2.2 Математична модель комбінаторної задачі рівноважної компоновки.....	44
2.3 Метод розв'язання комбінаторної задачі рівноважної компоновки.....	46
2.4 Результати чисельних експериментів	49
2.5 Комбінаторна задача рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними обмеженнями та умовами балансу	56
2.5.1 Постановка задачі	57
2.5.2 Математична модель.....	62

	3
2.5.3 Стратегія розв'язання	64
2.6 Багатокритеріальна задача рівноважної компоновки	66
2.6.1 Постановка задачі MBLP	67
2.6.2 Математична модель задачі MBLP	70
2.6.3 Результати обчислювальних експериментів	72
2.7 Висновки за другим розділом.	75
3 Оптимізована упаковка груп об'єктів у прямокутному контейнері	77
3.1 Задача компоновки груп об'єктів	77
3.2 Засоби математичного моделювання компоновки груп об'єктів у прямокутному контейнері.....	81
3.2.1 Неперетинання об'єктів у групі	81
3.2.2 Неперетинання груп об'єктів	83
3.2.3 Включення груп об'єктів у контейнер.....	87
3.3 Математична модель задачі компоновки груп об'єктів	89
3.4 Алгоритм розв'язання задачі компоновки груп об'єктів.....	90
3.5 Обчислювальні експерименти.....	93
3.6 Висновки за третім розділом.....	105
4 Задачі завантаження контейнерів при експлуатації залізничного терміналу	106
4.1 Контейнерні операції на залізничному терміналі	106
4.2 Задача складання розкладу руху вантажних поїздів та обробки вантажів на залізничному терміналі.....	109
4.3 Задача розміщення контейнерів при експлуатації залізничного терміналу	114
4.4 Застосування задач завантаження контейнерів в логістичних процесах попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій	120
4.5 Висновки за четвертим розділом	123
ВИСНОВКИ	124
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	127

Додаток А Список публікацій здобувача.....	144
Додаток Б Акт про використання отриманих результатів в навчальному процесі	147

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

TEU – Twenty-foot Equivalent Unit – умовна одиниця вимірювання місткості контейнерів; заснована на об'ємі 20 футового (6.1 метрів) інтермодального ISO-контейнера, що може транспортуватися різними видами транспорту: автомобільним, залізничним і морським.

FEU – Forty-foot Equivalent Unit – умовна одиниця вимірювання місткості контейнерів; заснована на об'ємі 40 футового інтермодального ISO-контейнера.

CBLP – Комбінаторна задача рівноважної компоновки (Combinatorial Balance Layout Problem).

MBLP – Багатокритеріальна задача рівноважної компоновки (Muticriteria Balance Layout Problem).

GLP – Задача компоновки груп об'єктів (Group Layout Problem).

CPRTOP – Задача розміщення контейнерів при експлуатації залізничного терміналу (Containers Placement In Rail Terminal Operations Problem).

TYSP – Задача побудови розкладу обслуговування залізничного терміналу (Transshipment Yard Scheduling Problem).

НС – Надзвичайна ситуація.

ВСТУП

Актуальність теми.

За останні десятиліття контейнер як базова компонента концепції одиничного завантаження досяг незаперечного значення у міжнародних морських та сухопутних вантажних перевезеннях. Завдяки постійному збільшенню масштабів контейнеризації кількість та потужність контейнерних терміналів у морських портах і на залізничних станціях та конкуренція між ними досягли високих рівнів. На сьогоднішній день контейнерні операції немислимі без ефективного використання інформаційних технологій, а також відповідних методів оптимізації та дослідження операцій.

У зв'язку з цим великої значущості набувають задачі пакування, що застосовуються в інженерії (серед них Container Loading, Vehicle Loading, Layout problem), які виникають при компонуванні та завантаженні сухопутного, водного та повітряного транспорту: кораблів, підводних човнів, потягів, вантажних автомобілів, транспортних літаків, космічних ракет, космічних апаратів тощо. Зазначені задачі відносяться до класу задач тривимірного пакування (3D-Packing Problem). Їх можна охарактеризувати множиною обмежень розміщення та додатковими обмеженнями, серед яких пріоритет розміщуваних об'єктів, орієнтація об'єктів, обмеження ваги, рівноваги, стійкості тощо.

Один з напрямів сучасних досліджень в галузі пакування присвячено задачам балансної компоновки (Balance Layout Problems, BLP). Ці задачі також називають задачами розміщення з додатковими обмеженнями (Constraint Layout Problems). Додатковими є обмеження поведінки (behavior constraints), які стосуються технічних характеристик системи (performance constraints).

Як наслідок, суттєве теоретичне та прикладне значення отримує проблема розробки інтелектуальних технологій розв'язання оптимізаційних

задач розміщення, що базуються на конструктивних засобах математичного та комп'ютерного моделювання та сучасних методах оптимізації варіантів розміщення 3D-об'єктів, які адаптуються для конкретних галузей застосування та технологічних процесів. Це дозволяє отримати оптимальний варіант розміщення згідно заданих критеріїв якості за наявними вихідними даними.

Розробці інтелектуальних комп'ютерних технологій в галузі системного аналізу, дослідження операцій, оптимізації, математичного моделювання, штучного інтелекту, присвячені роботи низки вітчизняних учених, зокрема І.В. Сергієнка [1–3], М.З. Згуровського [4], С.І. Ляшка [5, 6], Л.Ф. Гуляницького [7], Н.В. Семенової [8–10], П.І. Стецюка [11–12], Ю.В. Крака [13], В.В. Грицика, А.І. Шевченка, О.М.Кісельової [14], В.П. Шила [1, 15], П.І. Бідюка [16], Р.П. Базилевича [17], Г. П. Донця [18] та інших.

Ефективність функціонування інтелектуальних систем розв'язання задач розміщення 3D об'єктів залежить від наявності в них можливостей автоматичної побудови математичних моделей. Ці можливості доволі складно реалізувати формально. Більшість існуючих комп'ютерних систем для розв'язання оптимізаційних задач розміщення орієнтуються на заздалегідь побудовані математичні моделі задач, які слід представити у специфічних форматах. Це вимагає створення нових інтелектуальних комп'ютерних технологій моделювання оптимізаційних задач розміщення в різних галузях.

Ефективним засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об'єктів в оптимізаційних задачах розміщення є метод ρ -функцій, запропонований Ю. Г. Стояном, який очолює наукову школу з геометричного проектування [19, 20].

В науковій школі Ю. Г. Стояна дослідження його учнів, серед яких М. І. Гіль, В. М. Комяк, М. В. Новожилова, Т. Є. Романова, О. В. Панкратов, В. М. Пацук, Г. М. Яськов, А. М. Чугай, присвячено створенню засобів математичного моделювання, математичних моделей і методів розв'язання

задач розміщення об'єктів [20–29]. Комбінаторні оптимізаційні задачі геометричного проектування та методи їх розв'язання досліджено в роботах С. В. Яковлева [19, 20, 26, 30–34], О. О. Ємця [35–37], І. В. Гребенніка [38, 39] та їх учнів (зокрема, [40]).

Отже, *актуальними* є розробка та розвиток сучасних комп'ютерних технологій (математичних моделей, методів, алгоритмів та програм) для розв'язання задач проектування оптимального розміщення вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в період з 2016 по 2020 рр. на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках науково-дослідної роботи «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку» (ДР № 0115U001522).

В рамках робіт, що виконувались відповідно до плану НДР, автором проведено дослідження задач розміщення контейнерів в процесі їх перевантаження на залізничному терміналі з урахуванням геометричних та технологічних властивостей та методів їх розв'язання.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка та аналіз оптимізаційних моделей, методів та алгоритмів для підвищення ефективності розв'язання задач завантаження контейнерів.

Для досягнення цієї мети поставлено такі задачі:

1. Розробка математичних моделей та стратегій розв'язання оптимізаційних задач побудови рівноважної компоновки контейнерів заданих форм.

2. Побудова математичної моделі задачі оптимізації компонування груп об'єктів заданих форм у прямокутному контейнері та стратегії її розв'язання.

3. Розвиток стратегій, моделей та методів розв'язання задач розміщення контейнерів в процесі їх перевантаження на залізничному терміналі із врахуванням геометричних та технологічних властивостей.

Об'єкт дослідження – процес завантаження контейнерів в складних технічних системах.

Предмет дослідження – математичні моделі, методи та алгоритми розв'язання задач проектування оптимального розміщення вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах довільної форми з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи комбінаторного аналізу, комбінаторної оптимізації, методи геометричного проектування для побудови математичних моделей задач рівноважної компоновки контейнерів, зокрема, метод ϕ -функцій для опису обмежень геометричних об'єктів (вантажів), евристичні методи для розв'язанні задач оптимізації.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в наступному:

1. Вперше визначено комбінаторні конфігурації, які дозволяють описати комбінаторну структуру задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів (вантажів) у контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери.

2. Вперше побудовано математичну модель задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів, яка на відміну від інших дозволяє врахувати не тільки геометричні обмеження та баланс системи, але й комбінаторні особливості, пов'язані з генерацією розбиття множини об'єктів, що розміщуються всередині підконтейнерів.

3. Вперше побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування для оптимізації компонування груп об'єктів (вантажів) у прямокутному контейнері, що дозволяє застосування сучасних НЛП-розв'язувачів для її розв'язання.

4. Вперше запропоновано швидкий метод генерації допустимих стартових точок для прискорення процедури локальної оптимізації та поліпшення значення функції цілі в задачі оптимізації компоновання груп об'єктів (вантажів) у прямокутному контейнері.

5. Отримали подальший розвиток стратегії, моделі та методи розв'язання задач розміщення контейнерів в процесі їх перевантаження в частині побудови математичної моделі задачі розміщення контейнерів на залізничному терміналі та врахування геометричних та технологічних властивостей для її розв'язання, що дозволяє знизити загальну вартість контейнерних операцій на залізничному терміналі.

Практичне значення отриманих результатів. Запропоновані методи та алгоритми для розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів можуть бути використані для підвищення ефективності діяльності транспортних компаній. Отримані результати щодо сучасних комп'ютерних технологій (математичних моделей, методів, алгоритмів та програм), орієнтованих на розв'язання задач оптимальних компонок у проектуванні використовуються в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки, зокрема, у навчальній дисципліні «Моделі та методи прийняття рішень в системному проектуванні» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, про що свідчить акт (Додаток Б).

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримано автором особисто. В роботах [41], [43], [45], [46], [48], [49], [51], [53], [54], [55], [56], [58], опублікованих у співавторстві, автору належать математичні моделі задач компоновки об'єктів, розміщення контейнерів, стратегії їх розв'язання та результати обчислювальних експериментів. В роботі [47] автору належать побудовані комбінаторні конфігурації для побудови математичної моделі задачі балансної компоновки 3D-об'єктів. В роботах [44], [50] автору належать компоненти інформаційно-аналітичної системи для розрахунку завантаження

контейнерів предметами першої необхідності. В роботах [42], [52] автору належить урахування геометричних та технологічних особливостей перевантаження та розміщення контейнерів при розробці математичної моделі та методу розв'язання задачі. В роботі [57] автору належать математична модель задачі розміщення контейнерів на вантажній залізничній станції.

Статтю [42] та доповідь на [52] опубліковано спільно із Литвиненком Олександром Сергійовичем; особистий внесок О.С.Литвиненка в зазначені роботи наведено в його дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук [40].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи було представлено на:

- XIII та XIV міжнародних науково-практичних конференціях «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS, Дніпро, Україна, 2015, 2016 рр.);

- 30-й міжнародній конференції «Problems of decision making under uncertainties» (Vilnius, Lithuania, 2017 р.);

- 7-й міжнародній конференції «International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE)» (Софія, Болгарія, 2017 р.);

- 5-й та 7-й міжнародних науково-технічних конференціях «Інформаційні системи та технології» (Харків–Коблево, Україна, 2016, 2018 рр.)

- 2-й конференції IFIP «Conference on Information Technology in Disaster Risk Reduction» ITDRR 2017 (Софія, Болгарія, 2017 р.).

- 8-й та 9-й міжнародних конференціях «International Conference on Advanced Computer Information Technology» (ACIT Ceske Budejovice, Czech Republic 2018, 2019 рр.)

- науковому семінарі Харківської секції Наукової ради з проблеми «Кібернетика» в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2020 р.).

Публікації. Матеріали дисертації досить повно викладено у 18 наукових працях автора за темою дисертації [41–58], у тому числі: 4 статті в журналах, серед яких 1 стаття у виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України з присвоєнням категорії “А” та індексованому базою Scopus [43]; 1 стаття у періодичному науковому виданні іншої держави (Китай), яке віднесено до третього квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus [42]; 1 стаття у періодичному науковому виданні іншої держави (Єгипет), яке віднесено до другого квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus [45]; 1 стаття у науковому виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України з присвоєнням категорії “Б” [41]; 2 розділи в колективних монографіях, серед яких 1 розділ у виданні держави, що входить до Організації економічного співробітництва (США), яке віднесено третього квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus [44]; 1 розділ у виданні держави, що входить до Організації економічного співробітництва (Швейцарія), яке віднесено четвертого квартиля відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, Scopus [46]; та 12 – в матеріалах міжнародних конференцій, серед них 4 доповіді [55–58] опубліковані в матеріалах міжнародних наукових конференцій, які індексуються базою Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота містить вступ, чотири розділи, висновки, список використаної літератури, два додатки. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок тексту (з них 126 с. основного тексту), містить 30 рисунків, 2 таблиці, список використаних джерел із 158 найменувань (17 с.).

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ ЗАВАНТАЖЕННЯ КОНТЕЙНЕРІВ В РІЗНИХ СФЕРАХ ЗАСТОСУВАННЯ.

1.1 Системні аспекти проблеми застосування контейнерів

Контейнерні перевезення є основою матеріальних потоків у світовій економіці як на глобальному, так і на регіональних та місцевих рівнях.

Контейнеризацію можна визначити як складову технічного прогресу в процесі реалізації транспортних перевезень, складуванні та зберіганні різнорідних вантажів, що сприяє підвищенню ефективності логістичних процесів в економічних системах. Процес контейнеризації, що почався в середині п'ятдесятих років 20 століття, кардинально перетворив світову торгівлю. Притаманна контейнеризації модель доставки товарів «від дверей до дверей» сприяла багаторазовому збільшенню обсягів і номенклатури вантажів, які перевозяться в контейнерах, і підтримала розвиток глобального ринку товарів.

Відомі джерела так характеризують актуальність контейнерних перевезень:

«Завжди швидші та економічніші перевезення з використанням логістичних систем, що охоплюють всю земну кулю, дозволили досягти відомого на сьогодні розподілу праці. Це синергетичні процеси, які і надалі будуть призводити до більш ніж середніх темпів зростання контейнерних перевезень» [59].

«Контейнер лежить в основі високоавтоматизованої системи переміщення вантажів з будь-якого місця та в будь-яке місце з мінімальними витратами та ускладненнями на шляху. Контейнер зробив доставку дешевою, і цим змінив форму світової економіки» [60].

Питання достатньої доступності контейнерного обладнання виникає в різних контекстах, загальний аналіз найбільш важливих факторів, які визначають достатність чи обмеженість поставок, є актуальним. Огляд

Всесвітньої ради судноплавства (WSC) подає перелік факторів, що впливають на розмір та використання глобального парку контейнерного обладнання, а також поточний стан сукупної пропозиції порівняно із попитом [61].

Контейнерні перевезення є важливою складовою системи глобальних та регіональних транспортних перевезень, яку інтегровано в усі світові економічні та геополітичні процеси. Ці процеси матимуть суттєвий вплив на розвиток контейнерних перевезень у найближчій та середньостроковій перспективі. У Підсумковому звіті Генерального директорату з регіональної та міської політики Європейської комісії за 2019 рік [62] зазначається:

1. На розвиток залізничного контейнерного транспорту впливають різні групи факторів, такі як: глобальні мегатренди, макроекономічні тенденції, технологічний прогрес, глобальні та європейські транспортні тенденції, а також конкурентне регіональне середовище залізничного ринку та розвиток залізничної інфраструктури.

2. Геополітичні та економічні, а також технологічні та екологічні фактори матимуть найважливіший вплив на розвиток ринку контейнерних перевезень у наступні десять років як у глобальному, так і в національному масштабі.

Аналізуючи фактори зовнішнього середовища, що впливають у межах глобального ринку на процеси транспортування контейнерів, автори [62] наводять карту взаємозв'язків світових ризиків та тенденцій 2019 (Рис. 1.1), яка демонструє роль і місце контейнерних перевезень у зазначених процесах.

Масштаби глобальних транспортних потоків, неможливих без ефективної системи контейнерних перевезень, дає діаграма, представлена на рис. 1.2 [62]. Прогнозується, що пропускна здатність глобальних контейнерних морських портів зростатиме на 5,5% щороку в 2019-2023 роках, досягаючи майже 1000 мільйонів TEU (Twenty-foot Equivalent Unit – умовна одиниця вимірювання місткості контейнерів).

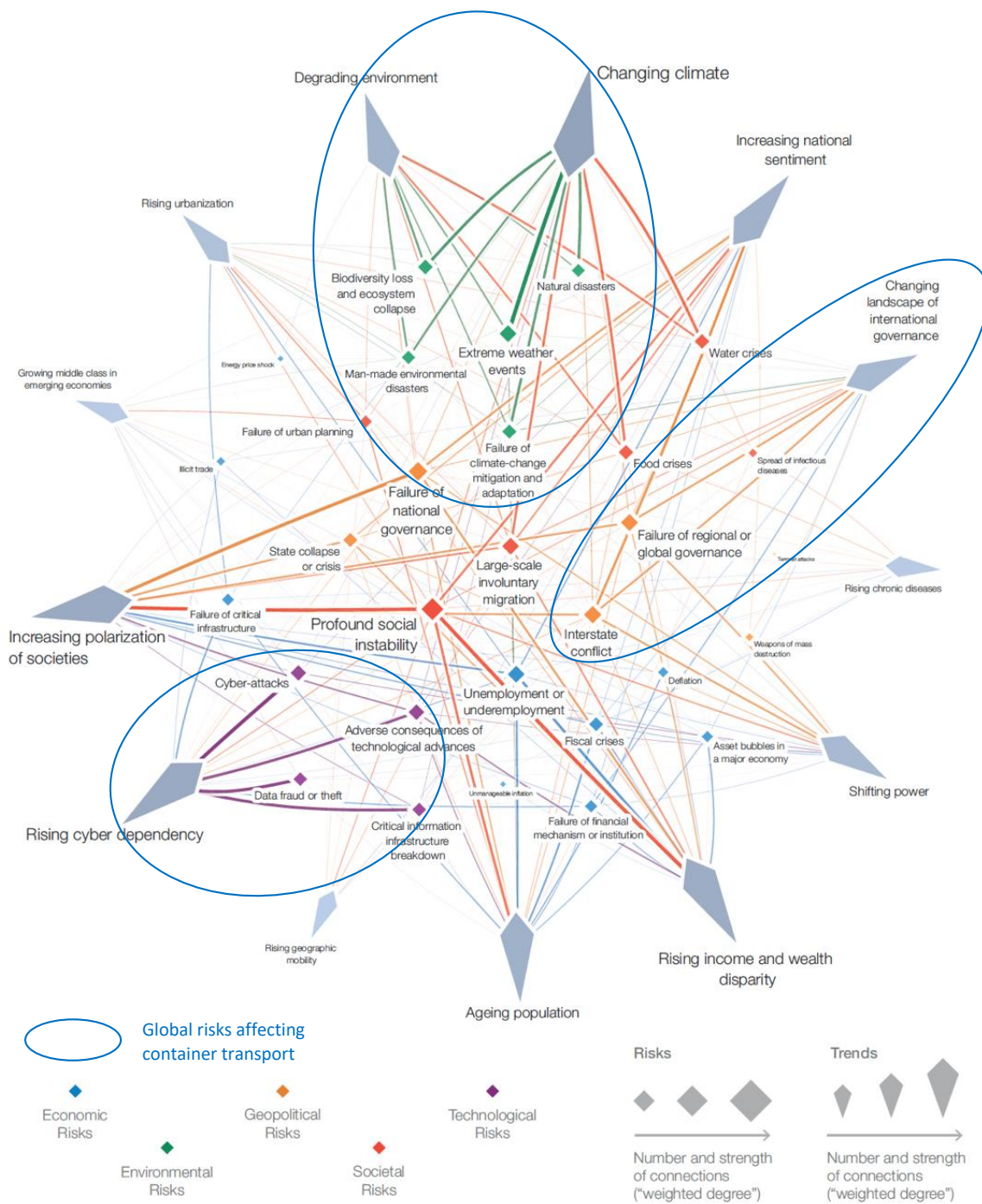


Рисунок 1.1 – Карта взаємозв'язків ризиків та тенденцій 2019 [62].



Рисунок 1.2 – Основні світові потоки імпорту, 2017 р. (млрд. дол. США) [62].

Виходячи з обсягів глобальних контейнерних перевезень, окремо слід розглядати проблему забезпечення ефективного завантаження одного контейнера. Адже ефект від оптимізації завантаження одного контейнера можна помножити на сотні мільйонів реальних контейнерів, задіяних у світових контейнерних перевезеннях. Сумарний ефект від оптимізації завантаження контейнерів полягає в зменшенні кількості контейнерів для перевезення того самого обсягу вантажів та, отже, у зниженні загальної вартості перевезень.

Наведені дані дозволяють зробити такі висновки.

1. Контейнерні перевезення є підсистемою глобальної економічної та геополітичної системи, яка здійснює значний вплив на світові процеси.

2. Контейнерні перевезення мають тенденцію до кількісного зростання та технологічного розвитку на всіх рівнях – глобальному, регіональному та місцевому.

3. Оптимізацію завантаження контейнерів варто розглядати як на етапі виконання операцій переміщення контейнерів у контейнерному терміналі,

так і на етапі завантаження окремих контейнерів, що є джерелом суттєвого економічного ефекту.

1.2 Завантаження контейнерів в транспортній логістиці

Наведемо основні поняття, необхідні для аналізу проблеми завантаження контейнерів на етапі виконання операцій переміщення контейнерів у контейнерному терміналі, відповідно до джерел [63–67].

Інтермодальні контейнерні перевезення – це перевезення контейнерів від початкової точки до місця призначення щонайменше двома видами транспорту, перехід між якими здійснюється на інтермодальному контейнерному терміналі [63]. Прикладом інтермодальних контейнерних перевезень є транспортування контейнерів комбінацією вантажних, залізничних і морських транспортних засобів. Інтермодальні контейнерні перевезення належать мультимодальному ланцюгу контейнерно-транспортних послуг. Цей ланцюг поєднує відправника з кінцевим одержувачем і тягнеться на великі відстані. Контейнерні перевезення є основним компонентом інтермодальних перевезень [63].

Ефективна організація інтермодальної системи суттєво впливає на якість транспортних послуг, тому використання інформаційних технологій є важливою умовою розвитку транспортних логістичних систем [68].

Основна задача, яку вирішують інтермодальні контейнерні перевезення – це оптимізація часу та вартості пересування вантажів за рахунок перевантаження контейнерів з одного виду транспорту на інший [68].

Контейнерні термінали – це об'єкти проміжного призначення, які дозволяють транспортним контейнерам міняти способи транспортування на шляху до їх кінцевого місця призначення. Часто вантаж прибуває на контейнерний термінал на одному судні і розподіляється по декількох видах транспорту для доставки внутрішнім клієнтам. Термінал також є майданчиком, призначеним для обслуговування та тимчасового складування

транспортних контейнерів. Іноді в терміналі здійснюється розвантаження, навантаження і зберігання вантажу всередині контейнерів [67].

Загалом, контейнерні термінали можна описати як відкриті системи для обробки матеріальних потоків з двома зовнішніми інтерфейсами. Під зовнішніми інтерфейсами розуміють причал для завантаження і розвантаження кораблів та узбережжя, де контейнери завантажуються і розвантажуються на або з вантажних автомобілів та поїздів. Контейнери зберігаються в зонах зберігання у штабелях, що полегшує роз'єднання прибережної та наземної експлуатації терміналу.

Після прибуття в порт контейнерне судно відводиться на причал, обладнаний кранами для завантаження та вивантаження контейнерів. Нерозвантажені контейнери транспортуються в зони зберігання поблизу місця, де вони будуть перевантажені наступним чином. Контейнери, що прибувають автотранспортом або залізницею до терміналу, перевозяться в межах районів експлуатації вантажних автомобілів та поїздів. Їх забирає внутрішнє обладнання терміналу та розподіляє по відповідних ділянках зони зберігання. Якщо в терміналі є порожні склади, виконуються додаткові переміщення; ці кроки охоплюють перевезення між порожніми стапелями, пакувальним центром та імпорними та експортними контейнерними стапелями (рис. 1.3).

Зона зберігання контейнерів, як правило, розділена на різні блоки, які поділяються на ряди, бухти та яруси. Деякі ділянки штабелів зарезервовані для спеціальних контейнерів, таких як рефрижератори, які потребують електричного підключення, небезпечних вантажів або контейнерів для перевантаження, які не дозволяють складати штабелі.

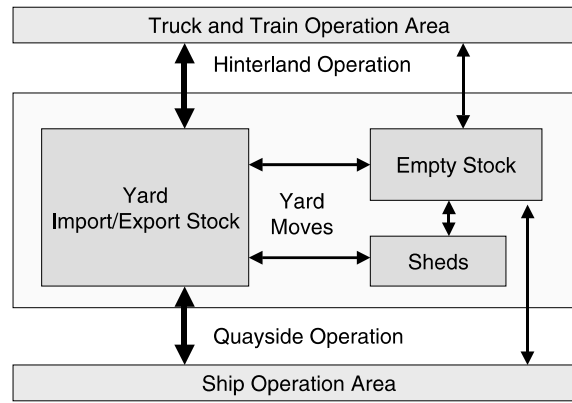


Рисунок 1.3 – Зони експлуатації контейнерного терміналу морського порту та потік транспорту [65].

Автоматизація завантаження контейнерів використовується в європейській залізничній вантажній галузі. Великі термінали розглядають, планують і частково використовують технології автоматизації для таких процесів, як штабелювання контейнерів і транспортування контейнерів. Повна автоматизація рейкових кранів є дуже складним завданням через вимоги техніки безпеки при взаємодії людини і машини. Через це повна автоматизація внутрішніх терміналів поки не дуже поширена [69].

Контейнер є транспортним засобом або оборотною тарою, що забезпечує зручність транспортування і зберігання вантажу. Економічні фактори стимулюють накопичення контейнерів в великі партії для перевезення по морю спеціалізованими судами-контейнеровозами місткістю у тисячі контейнерів. Вартість таких судів визначає вимоги до ефективності вантажно-розвантажувальних операцій: максимально швидке обслуговування суден є основним завданням морського терміналу. Наземні транспортні засоби, на яких підвозяться контейнери в порт і вивозяться з порту, мають на порядки менші місткості: потяг – близько 100 контейнерів, вантажний автомобіль – 1-2 контейнери. Отже, обслуговуванням одного контейнерного судна займаються десятки поїздів і сотні автомобілів [70]. Робота автомобільного та залізничного вантажного транспорту в морському терміналі має бути чітко організована та синхронізована. Подібним чином

слід розглядати і основні завдання залізничних та автомобільних контейнерних терміналів – мінімізація часу виконання операцій обробки контейнерів при дотриманні відповідних технологічних вимог.

Контейнерні перевезення - це вид вантажних перевезень, який застосовується практично на всіх видах транспорту. Контейнери, що найчастіше застосовуються, є 20 (рис. 1.4) і 40-футовими з їх різновидами, які відповідають вимогам ISO [71].



Рисунок 1.4 – Стандартний 20-футовий контейнер [71].

Контейнери стандартизовані із зазначенням виміру внутрішнього простору в квадратних футах і двох латинських букв, що визначають їх тип. При визначенні обсягів контейнерних перевезень використовують два способи вимірювання: TEU і FEU. Перший позначає Twenty-foot Equivalent Unit – тобто кількість контейнерів в одиницях виміру, рівних 20-футовому контейнеру, а другий – в одиницях виміру, рівних 40-футовому контейнеру [71].

В більшості випадків для перевезення вантажів використовують стандартні контейнери у формі прямокутних параллелепіпедів. Але для низки специфічних видів вантажів, для корпусів транспортних засобів, які мають складну геометричну форму (літаки, підводні човни тощо), застосовують контейнери іншої форми.

Танк-контейнер являє собою ємність з нержавіючої сталі об'ємом 12000 – 35000 літрів, в металевій рамі (рис. 1.5), що відповідає розміру ISO 20-ти або 30-ти футового контейнера [71].

У великих літаках Boeing вантаж завантажують і перевозять на різних піддонах і контейнерах, відомих як Unit Load Devices (ULD). Зображення і параметри деяких з них наведено на рис. 1.6 [72].



Рисунок 1.5 – Танк-контейнер [71].

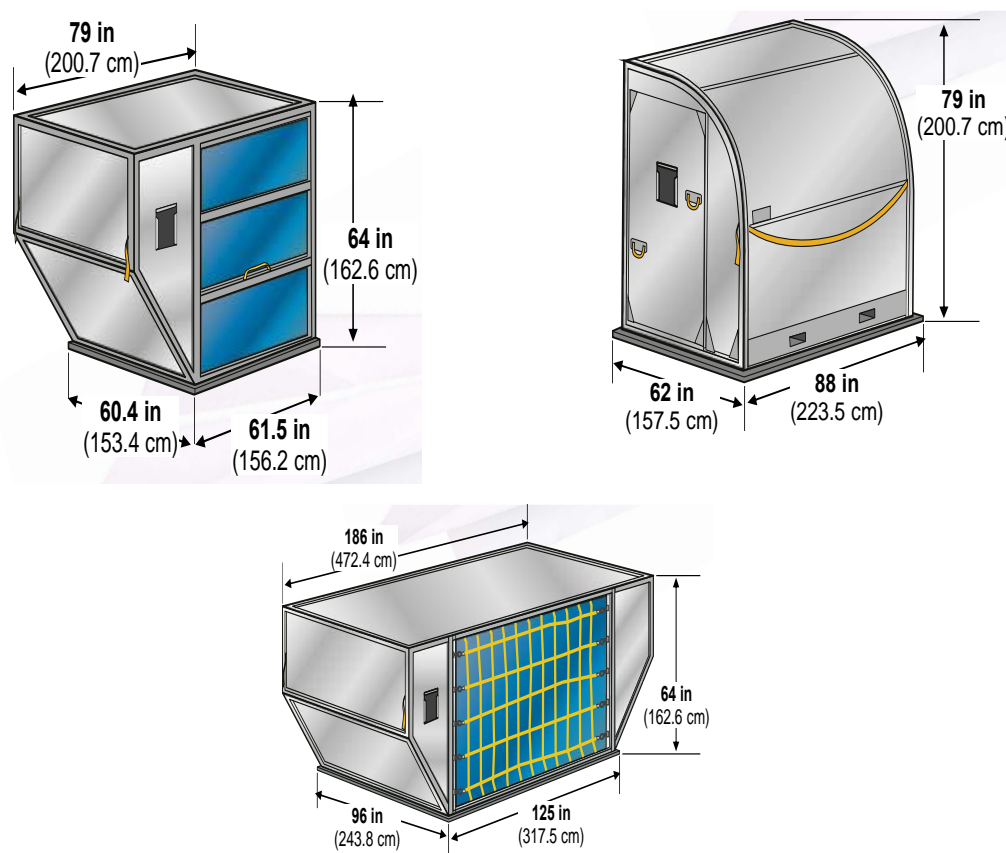


Рисунок 1.6 – Контейнери для літаків Boeing: LD-3, Demi та LD-39 [72].

Розміщення контейнерів на головній та нижній палубах транспортного варіанту літака А-330 представлено на рис. 1.7 [73].

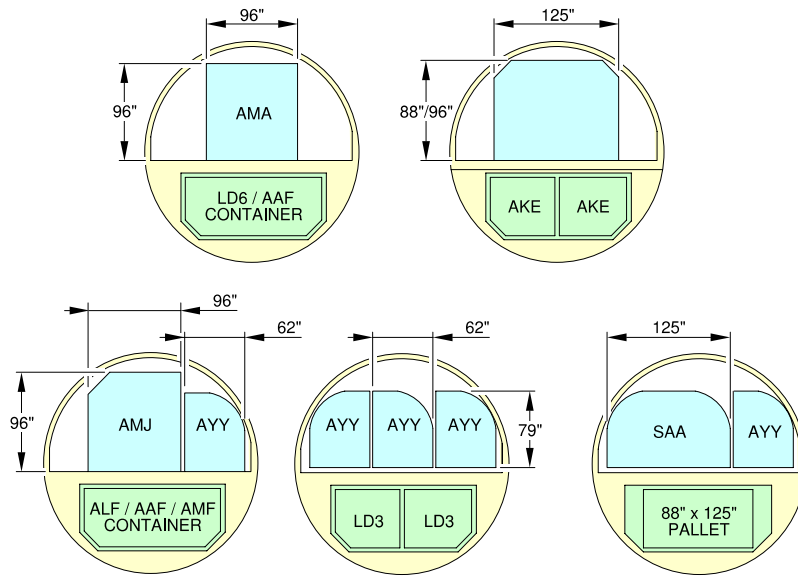


Рисунок 1.7 – Розміщення контейнерів на палубах транспортного літака А-330 [73].

Вантажні відсіки вантажного відділення основної палуби А-330 та схема розміщення контейнерів в них наведено на рис. 1.8 [73].

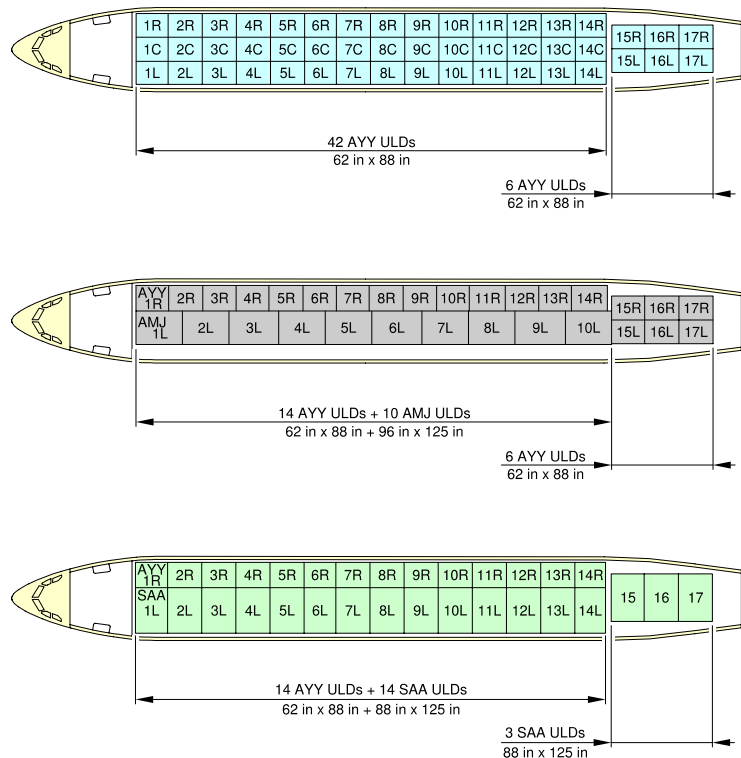


Рисунок 1.8 – Схема розміщення контейнерів у транспортному А-330 [73].

Окремо може бути виділено клас задач проєктування, в яких здійснюється компоновка корпусів складної форми об'єктами, які мають різні геометричні та механічні характеристики. До цього класу відносяться задачі проєктування морських суден та підводних човнів (рис.1.9), в ракетно-

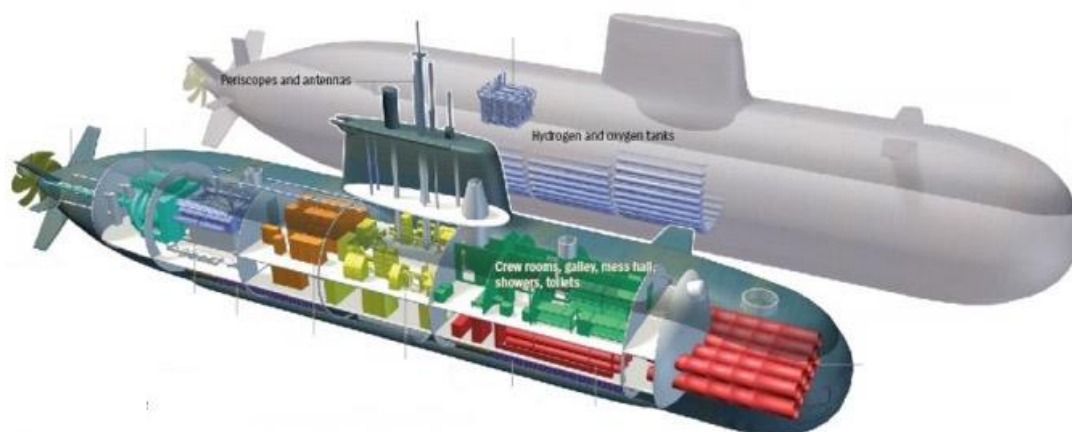


Рисунок 1.9 – Компоновання корпусу підводного човна

космічному машинобудуванні при проєктуванні компоновок ракет та штучних супутників (рис. 1.10) [74].

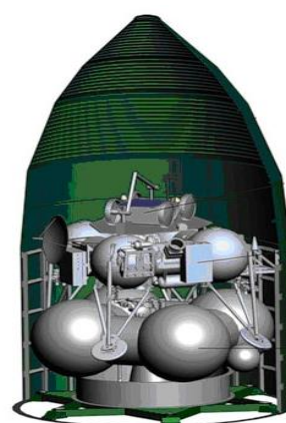
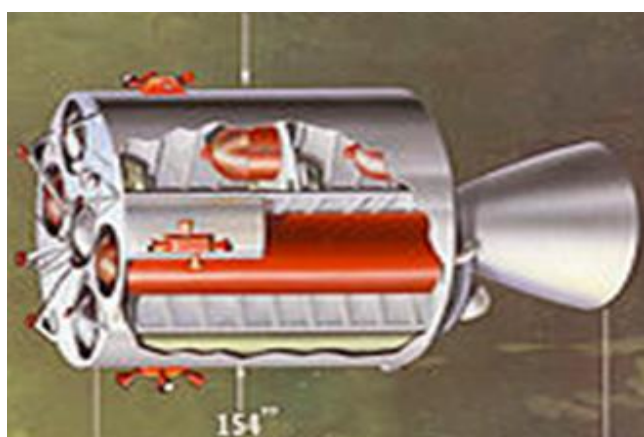


Рисунок 1.10 – Компоновання корпусів ракетно-космічної техніки [74]

Задачі зазначеного класу можуть бути віднесені до задач проектування оптимального розміщення корисних вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах з урахуванням геометричних та механічних обмежень.

1.3 Математичне моделювання та розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів

Задачі оптимального завантаження контейнерів, проаналізовані в п. 1.1 та 1.2, є об'єктом системного аналізу, математичного моделювання та застосування методів оптимізації. Наведемо огляд основних результатів щодо оптимізації обслуговування контейнерів на контейнерних терміналах та щодо оптимального розміщення корисних вантажів різних форм у контейнерах довільної форми з урахуванням геометричних та механічних обмежень.

Наукові дослідження щодо системного аналізу, математичного моделювання та оптимізації інтермодальних контейнерних перевезень представлено в наукових працях [75]–[82].

Одним з важливих класів задач інтермодальних контейнерних перевезень є задачі обробки контейнерів на залізничних контейнерних терміналах. Огляд задач цього класу представлено в роботі [83], що містить загальний опис проблеми та її спеціальні випадки.

В класі задач обробки контейнерів на залізничних контейнерних терміналах однією з основних є проблема складання розкладу руху вантажних потягів та обробки вантажів на терміналі (transshipment yards scheduling problem, TYSP). Цю проблему вперше описано в [84], де сформовано п'ять рівнів розв'язання проблеми TYSP.

У статті [84] проблема аналізується на першому рівні, здійснюється формування сервісних слотів потягів, які прибувають на термінал. Побудовано математичну модель та алгоритми розв'язання задачі. Серед них

точний алгоритм динамічного програмування та евристичний алгоритм, який використовує евристику променевого пошуку (beam search).

Інші роботи вдосконалюють математичну модель і покращують алгоритми розв'язання. У статті [85] початкова задача TYSP доповнена додатковими обмеженнями, наведено нові алгоритми її розв'язання. Стаття [86] містить удосконалений порівняно з [85] алгоритм гілок та меж, за рахунок більш ефективної нижньої межі Лагранжа. Пропонуються методи отримання двох нових нижніх меж оптимального значення цільової функції.

Як випливає з оглядової статті [65], в останні роки моделювання стало важливим інструментом для поліпшення роботи контейнерних терміналів. Виділяють три типи моделювання: стратегічне, оперативне та тактичне моделювання.

Стратегічне моделювання застосовується для вивчення та порівняння різних типів термінального планування та обладнання для транспортування щодо ефективності та очікуваних витрат. В основному воно використовується, якщо плануються нові термінали або якщо необхідно змінити схему або обладнання існуючих терміналів.

Операційне моделювання застосовується для тестування різних видів логістики терміналів та методів оптимізації. Воно використовується в основному на великих терміналах. Експлуатація та логістика на великих терміналах дуже складні, і ефект альтернативних методів логістики або оптимізації повинен бути перевірений об'єктивними методами. Тому методи оптимізації перевіряються в середовищі імітації, перш ніж їх застосовувати в реальних системах управління терміналами та рульового управління.

Тактичне моделювання означає інтеграцію модельних систем в операційну систему терміналу. Варіанти експлуатації моделюються паралельно операції, виробляються рекомендації щодо використання альтернативних варіантів. Реальні дані про роботу терміналу повинні імпортуватися та аналізуватися синхронно до операції. Через цю вимогу

тактичне моделювання рідко або лише частково використовується на контейнерних терміналах [65].

Задача завантаження контейнера відноситься до класу задач розміщення геометричних об'єктів, який належить до задач геометричного проектування.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень, які проводяться у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України в рамках теорії геометричного проектування під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна. Історії та напрями розвитку теорії геометричного проектування представлено в [22].

В рамках теорії геометричного проектування для аналітичного опису взаємодії геометричних об'єктів в науковій школі Ю. Г. Стояна розроблено конструктивний математичний апарат – метод ϕ -функцій.

Теорія ϕ -функцій набула суттєвого розвитку для 2D-об'єктів [87–89] і 3D-об'єктів [90–94]. На базі створених засобів математичного моделювання відношень між геометричними об'єктами розроблено математичні моделі та методи розв'язання 2D та 3D оптимізаційних задач розміщення об'єктів [95–99].

Етапом розвитку теорії геометричного проектування стало введення концепції квазі ϕ -функції [100]. Використання квазі ϕ -функцій призводить до спрощення математичної моделі та формалізації відношень об'єктів, для яких неможливо побудувати ϕ -функції.

Широке застосування в різних галузях діяльності мають задачі упаковки та розкрою (Cutting and Packing (C&P)) [101-103]. Вони є NP-складними комбінаторними задачами і являють собою геометричні задачі, в яких необхідно розмістити об'єкти в області розміщення так, щоб цільова функція досягла свого максимального або мінімального значення. Задачі упаковки та розкрою відносяться до задач умовної оптимізації, в кожній з них необхідно дотримання не менш як двох умов: 1) всі об'єкти мають

міститись всередині заданої області, 2) об'єкти не мають перетинатися один з одним. Вказані умови представляються у вигляді обмежень розміщення (arrangement constraints) задач C&P.

Різновиди задач C&P зустрічаються під такими назвами: прямокутний розкрій (Stock-Cutting Problem), упаковка в смузі (Strip-Packing Problem), упаковка об'єктів в задану область (Bin-Packing Problem), упаковка в рюкзак (Knapsack Problem), задача компоновання (Layout Problem), задача сортування (Assortment Problem), задача вкладення (Nesting Problem), завантаження контейнера (Container Loading) тощо [101–103].

Важливими з практичної точки зору є інженерні застосування задач упаковки (серед них Container Loading, Vehicle Loading, Layout problem), які виникають при компонуванні та завантаженні сухопутного, водного та повітряного транспорту: кораблів, підводних човнів, потягів, вантажних автомобілів, транспортних літаків, космічних ракет, космічних апаратів тощо. Зазначені задачі відносяться до класу задач тривимірної упаковки (3D-Packing Problem) [103]. Їх можна охарактеризувати множиною обмежень розміщення та додатковими обмеженнями, серед яких пріоритет розміщуваних об'єктів, орієнтація об'єктів, обмеження ваги, рівноваги, стійкості тощо.

Серед напрямів сучасних досліджень в галузі упаковки відзначимо задачі балансної компоновки (Balance Layout Problems, BLP). Їх називають також задачами розміщення з додатковими обмеженнями (Constraint Layout Problems). Додатковими обмеженнями в них є обмеження поведінки (behavior constraints), які стосуються технічних характеристик системи (performance constraints) [103, 104].

Задачі балансної компоновки не є достатньо дослідженими. Задача BLP полягає в оптимальному розміщенні набору 3D-об'єктів в деякій обмеженій області (контейнері) з метою оптимізації витрат ресурсів, при дотриманні обмежень щодо технічних властивостей системи (рівновага, стійкість, вібрації тощо). Важливе значення ця задача має при проектуванні ракетно-

космічної техніки. Проектований космічний апарат має бути компактним, тобто виконаним з найменшими витратами дорогих матеріалів. Важливою вимогою до космічних апаратів є необхідність виконання поставлених перед ним задач з вказаною точністю. Для цього на початковому етапі проектування космічного апарату (а саме на етапі компоновання) необхідно враховувати обмеження за статичними та динамічними характеристиками (центр мас, осьові і відцентрові моменти інерції), які впливають на точність стабілізації космічного апарату.

Побудову спрощеної схеми супутникового модуля на базі розв'язання задачі балансної компоновки досліджено в [105]. Для отримання розв'язків цих задач, як правило, використовують евристичні алгоритми, що призводить до втрати локально-оптимальних рішень, тоді як при застосуванні методів нелінійної оптимізації час розв'язання є досить великим.

В монографії [74] запропоновано сучасні підходи до розв'язання задач упаковки в космічному машинобудуванні. В основу підходів покладено апроксимацію розміщуваних 3D-об'єктів паралелепіпедами та використання МІЛР-алгоритмів. У монографії розв'язується задача оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів в параболічному контейнері, виходячи з мінімізації відхилення центру мас об'єктів від заданої точки.

Виходячи з аналізу публікацій [106 –108] можна зробити висновок, що в багатьох задачах пакування в якості контейнера, зазвичай, використовується прямий круговий циліндр, а в якості об'єктів розміщення – циліндри або паралелепіпеди. Інша ситуація має місце в ракетно-космічному машинобудуванні; використовуються різні форми контейнерів (циліндри, параболоїд обертання, усічені конуси та ін.) і об'єктів (кулі, циліндри, паралелепіпеди, правильні призми, тори, сфероциліндри та ін.) [74]. Отже, стає необхідним створення адекватних математичних моделей задач завантаження контейнерів із заданими геометричними формами об'єктів і контейнерів, а також пошук розв'язків, близьких до оптимальних. Для

побудови таких математичних моделей у вигляді задач нелінійного програмування є актуальним аналітичний опис вище згаданих обмежень.

Ефективним засобом математичного моделювання відношень геометричних об'єктів при розв'язанні задач розміщення є метод ϕ -функцій Стояна. Для розв'язання оптимізаційних задач розміщення метод ϕ -функцій дозволяє негладку оптимізацію та нелінійне програмування. Перевагою методу ϕ -функцій є можливість урахування мінімально і максимально допустимих відстаней при описі обмежень розміщення об'єктів, що часто потрібно при проектуванні компоновок.

Багато задач геометричного проектування мають комбінаторну структуру і описуються дискретними оптимізаційними моделями.

Комбінаторна структура задач геометричного проектування в багатьох випадках залежить від того, що в процесі їх розв'язання необхідно впорядкувати розміщені об'єкти в заданій області. При цьому порядок розміщення надає визначальний вплив на значення критерію ефективності, а з кожним розміщуваним об'єктом пов'язаний набір метричних характеристик і параметрів розміщення. Виходячи з цього, області допустимих рішень задач геометричного проектування описуються комбінаторними множинами, що відносяться до різних класів [109, 110].

Математичні моделі багатьох комбінаторних екстремальних задач геометричного проектування можуть бути побудовані на основі відомих і достатньо досліджених комбінаторних множин, таких як перестановки, розміщення, сполучення та інші [19, 35, 111, 112]. У той же час, структура низки задач геометричного проектування є досить складною і не може бути адекватно описана на основі комбінаторних множин, що належать відомим класам [113, 114].

Задачі оптимального завантаження контейнерів мають складні комбінаторні властивості. Ці властивості впливають з необхідності врахування порядку формування слотів обслуговування вантажних потягів, послідовності перевантаження контейнерів з потягів-джерел на цільові

потяги та в зону зберігання, вибору вільних платформ та місць в зоні зберігання для завантаження в процесі оптимізації роботи контейнерного терміналу. При оптимізації завантаження контейнеру слід брати до уваги послідовність розміщення об'єктів, варіанти групування розміщуваних об'єктів при груповій рівноважній компоновці, поділ множини розміщуваних об'єктів між відсіками контейнера (підконтейнерами) при їх наявності тощо.

Для побудови математичних моделей зазначених задач оптимального завантаження контейнерів пропонується використання комбінаторних конфігурацій [26, 30, 33, 109, 110]. Це дозволяє будувати адекватні математичні моделі задач, що враховують їх комбінаторні властивості. Методи аналізу побудованих моделей дають можливості отримання ефективних розв'язків задач оптимального завантаження контейнерів.

Стратегії розв'язання дискретно-неперервних задач оптимізації завантаження контейнерів базуються на комплексному використанні методів дискретної та неперервної оптимізації, точних, наближених та евристичних методів. Використовуються методи недиференційовної оптимізації, стохастичні методи оптимізації, субградієнтні методи для лінійних та нелінійних моделей оптимізації, реалізовані в сучасних солверах [1, 4, 26, 74, 115].

1.4 Основні визначення методу phi-функцій

Для аналітичного опису обмежень розміщення в дисертаційній роботі застосовується метод phi-функцій [25, 87, 100].

Наведемо основні відомості стосовно методу phi-функцій, суттєві для подальшого викладення результатів роботи. Нехай є пара замкнутих phi-об'єктів $T_1 \subset R^t$ та $T_2 \subset R^t$, $t=2,3$ [116]. Позначимо через $u_1 = (x_1, y_1, z_1, \theta_1)$ та $u_2 = (x_2, y_2, z_2, \theta_2)$ вектори змінних об'єктів T_1 та T_2 , відповідно, де (x_i, y_i, z_i) – вектор трансляцій об'єкта T_i , а $\theta_i = (\theta_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi})$ – вектор кутів повороту: від осі OX до OY , від осі OY до OZ та від осі OX до

OZ , $i=1,2$. Надалі об'єкт T_i , $i=1,2$, послідовно обернутий на кути $\theta_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ та трансльований на вектор (x_i, y_i, z_i) , позначається як $T_i(u_i)$, $i=1,2$.

З метою моделювання відношень неперетинання об'єктів і включення об'єктів в область розміщення, зокрема, в задачах завантаження контейнерів, використовуються ϕ -функції, визначення і властивості яких представлено, наприклад, в [25, 100].

Визначення. Всюди визначена неперервна функція $\Phi(u_1, u_2)$ для пари об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$ називається ϕ -функцією, якщо виконуються наступні три умови:

$$\Phi(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо } T_1(u_1) \cap T_2(u_2) = \emptyset;$$

$$\Phi(u_1, u_2) = 0, \text{ якщо } \begin{cases} \text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) = \emptyset; \\ \text{fr } T_1(u_1) \cap \text{fr } T_2(u_2) \neq \emptyset \end{cases};$$

$$\Phi(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{int } T_1(u_1) \cap \text{int } T_2(u_2) \neq \emptyset.$$

Вважаємо, що початок власної системи координат (полюс (x_i, y_i, z_i)) центрально симетричних об'єктів знаходиться в їх центрі симетрії.

Для опису відношень включення об'єктів в область (контейнер), тобто $T_2(u_2) \subset T_1(u_1) \Leftrightarrow \text{int } T_2(u_2) \cap \text{int } T_1^*(u_1) = \emptyset$, скористаємося властивостями ϕ -функції: $\Phi^{T_1^* T_2}(u_1, u_2) \geq 0$, якщо $\text{int } T_2(u_2) \cap \text{int } T_1^*(u_1) = \emptyset$.

Умову неперетинання пари об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$ також може бути описано за допомогою квазі- ϕ -функції, визначення і властивості якої наведені в [25, 100].

Визначення. Квазі- ϕ -функцією для ϕ -об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$ називається всюди визначена, неперервна функція $\Phi'(u_1, u_2, u')$, для якої функція $\max_{u' \in U} \Phi'(u_1, u_2, u')$ є ϕ -функцією для $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, де u' –

додаткові змінні, вид множини $U \subset \mathbb{R}^\zeta$ і розмірність простору \mathbb{R}^ζ залежать від форми розміщуваних об'єктів.

Властивості квазі- ϕ -функції $\Phi'(u_1, u_2, u')$:

$$1) \Phi'(u_1, u_2, u') \geq 0 \Rightarrow \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset;$$

2) Функція вигляду

$$\Phi'(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{T_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{T_2 P^*}(u_2, u_P)\}, \quad (1.1)$$

є квазі- ϕ -функцією для обмежених об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, де $\Phi^{T_1 P}(u_1, u_P)$ – ϕ -функція для об'єктів $T_1(u_1)$ і $P(u_P)$, $\Phi^{T_2 P^*}(u_2, u_P)$ – ϕ -функція для об'єктів $T_2(u_2)$ и $P^*(u_P) = \mathbb{R}^t \setminus \text{int } P(u_P)$, $t = 2, 3$,

- якщо $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^3$, то $P(u_P)$ – розділяюча площина виду $P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_P \geq 0\}$, где $\alpha = \sin \theta_{yP}$, $\beta = -\sin \theta_{xP} \cdot \cos \theta_{yP}$, $\gamma = \cos \theta_{xP} \cdot \cos \theta_{yP}$, $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$;

- якщо $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$, то $P(u_P)$ – розділяюча пряма виду $P(u_P) = \{(x, y) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \mu_P \geq 0\}$, де $\alpha = \cos \theta_P$, $\beta = \sin \theta_P$, $u_P = (\theta_P, \mu_P)$.

Нехай задані мінімально і максимально допустимі відстані ρ^- і ρ^+ між ϕ -об'єктами $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, тобто

$$\rho^- \leq \text{dist}(T_1, T_2) \leq \rho^+, \quad (1.2)$$

де $\text{dist}(T_1, T_2) = \min_{t_1 \in T_1, t_2 \in T_2} d(t_1, t_2)$, $d(t_1, t_2)$ – евклідова відстань між точками t_1 і t_2 .

Обмеження (1.2) можна описати за допомогою псевдонормалізованих ϕ -функцій, визначення і властивості яких наведені в [25, 100].

Визначення. Неперервна всюди визначена функція $\widehat{\Phi}^-(u_1, u_2)$ (або $\widehat{\Phi}^+(u_1, u_2)$) називається псевдонормалізованою ϕ -функцією для ϕ -об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$, якщо виконуються такі умови:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}^-(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) > \rho^-, & \quad \widehat{\Phi}^+(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо} \\
& \quad \text{dist}(T_1, T_2) < \rho^+, \\
\widehat{\Phi}^-(u_1, u_2) = 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) = \rho^-, & \quad \widehat{\Phi}^+(u_1, u_2) = 0, \text{ якщо} \\
& \quad \text{dist}(T_1, T_2) = \rho^+, \\
\widehat{\Phi}^-(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{dist}(T_1, T_2) < \rho^-, & \quad \widehat{\Phi}^+(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо} \\
& \quad \text{dist}(T_1, T_2) > \rho^+.
\end{aligned}$$

За допомогою псевдонормалізованих ϕ -функцій не завжди можливо описати розміщення об'єктів з урахуванням їх неперервних обертань і допустимих відстаней. Для опису обмежень на мінімально і максимально допустимі відстані використовуються псевдонормалізовані квазі- ϕ -функції, визначення і властивості яких наведено в [25, 100].

Визначення. Псевдонормалізованою квазі- ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$ називається функція $\widehat{\Phi}'(u_1, u_2, u')$, для якої функція $\max_{u' \in \mathbb{R}^d} \widehat{\Phi}'(u_1, u_2, u')$ є псевдонормалізованою ϕ -функцією для об'єктів $T_1(u_1)$ і $T_2(u_2)$.

Подібно до псевдонормалізованих ϕ -функцій введемо псевдонормалізовані квазі- ϕ -функції $\widehat{\Phi}'^-$ для моделювання обмежень $\text{dist}(T_1, T_2) \geq \rho^-$ та псевдонормалізовані квазі- ϕ -функції $\widehat{\Phi}'^+$ для моделювання обмежень $\text{dist}(T_1, T_2) \leq \rho^+$.

$$\text{Тоді } \max_{u' \in U} \widehat{\Phi}'^- \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(T_1, T_2) \geq \rho^-, \quad \max_{u' \in U} \widehat{\Phi}'^+ \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(T_1, T_2) \leq \rho^+.$$

Використовуючи властивості квазі- ϕ -функції, визначимо властивості псевдонормалізованої квазі- ϕ -функції:

- 1) $\widehat{\Phi}'^- \geq 0 \Rightarrow \text{dist}(T_1, T_2) \geq \rho^-, \quad \widehat{\Phi}'^+ \geq 0 \Rightarrow \text{dist}(T_1, T_2) \leq \rho^+,$
- 2) Функція

$$\widehat{\Phi}'^-(u_1, u_2, u_p) = \Phi'(u_1, u_2, u_p) - 0.5\rho^-,$$

є псевдонормалізованою квазі- ρ -функцією, де $\Phi'(u_1, u_2, u_p)$ визначено в (1.1).

1.5 Постановка задачі дослідження

На основі системного аналізу проблеми завантаження контейнерів та її місця в різних бізнес-процесах логістики і проектування можна зробити висновок щодо актуальності задач завантаження контейнерів та необхідності їх подальшого дослідження з метою підвищення ефективності розв'язання задач зазначеного класу. З проведеного аналізу випливає, що задача завантаження контейнерів є оптимізаційною, має різні аспекти, які визначаються сферами застосування, і може аналізуватися на різних рівнях.

Загальна задача завантаження контейнерів може бути сформульована у вигляді дворівневої задачі оптимізації наступним чином.

На першому (нижньому) рівні: завантажити (упакувати) заданий набір об'єктів, що мають різні просторові форми, метричні і механічні характеристики, в контейнер заданої форми і розмірів, при дотриманні технологічних обмежень, так щоби критерій (вектор критеріїв) ефективності завантаження досягав екстремального значення.

На другому (верхньому) рівні: побудувати розклад обслуговування транспортних засобів на контейнерному терміналі і виконати переміщення заданого набору контейнерів в межах контейнерного терміналу так, щоб загальна вартість виконаних операцій була мінімальною при дотриманні технологічних обмежень.

В якості математичної моделі досліджених в роботі оптимізаційних задач завантаження контейнерів використовується модель вигляду:

$$\underset{w \in W}{extr} k(w), \text{ s.t. } w = (u, v) \in W,$$

$$W = \{w = (u, v) \in \mathbf{R}^\sigma : F(w) \geq 0\},$$

де W – область допустимих розв’язків,

k – цільова функція – відображення, задане на множині W ;

$w = (u, v)$ – вектор змінних моделі, серед яких u – неперервні, v – дискретні.

F – система геометричних та технологічних обмежень.

1.6 Висновки за першим розділом

1. Проведено системний аналіз проблеми оптимального завантаження контейнерів в різних сферах застосування. В результаті зроблено висновки:

- контейнерні перевезення є підсистемою глобальної економічної та геополітичної системи, яка здійснює значний вплив на світові процеси;

- контейнерні перевезення мають тенденцію до кількісного зростання та технологічного розвитку на всіх рівнях – глобальному, регіональному та місцевому;

- оптимізацію завантаження контейнерів варто розглядати як на етапі виконання операцій переміщення контейнерів у контейнерному терміналі, так і на етапі завантаження окремих контейнерів, що є джерелом суттєвого економічного ефекту.

2. Виконано огляд та аналіз задач оптимального завантаження контейнерів на рівні контейнерних терміналів як вузлів систем транспортних перевезень.

3. Проаналізовано задачі побудови оптимальних компоновок, які виникають у аерокосмічній галузі, а саме: задач проектування оптимального розміщення корисних вантажів заданих форм та розмірів у контейнерах довільної форми з урахуванням геометричних та механічних обмежень.

4. Здійснено огляд та аналіз засобів математичного моделювання та розв’язання задач оптимального завантаження контейнерів, зокрема, методів геометричного проектування.

5. Сформульовано мету та задачі дослідження дисертаційної роботи.

2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА СТРАТЕГІЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РІВНОВАЖНОЇ КОМПОНОВКИ ВАНТАЖІВ У КОНТЕЙНЕРАХ

У розділі побудовано математичні моделі низки оптимізаційних задач рівноважної компоновки контейнерів, зокрема, з урахуванням комбінаторних особливостей задач, спеціальних геометричних та балансних умов, багатокритеріальності; пропонуються стратегії їх розв'язання.

2.1 Комбінаторні конфігурації в оптимізаційних задачах рівноважної компоновки контейнерів

Задачі рівноважної компоновки належать класу NP-складних задач розміщення [117] і є предметом досліджень обчислювальної геометрії [87], а методи їх розв'язання - новим напрямом теорії дослідження операцій [95]. Суть задачі полягає в пошуку оптимального розміщення заданого набору 3D-об'єктів в деякій обмеженій області (контейнері) з урахуванням обмежень, які забезпечують баланс даної системи.

Необхідність врахування обмежень балансу в оптимізаційних задачах розміщення виникає в різних прикладних областях науки і техніки, наприклад, в задачах логістики (при пакуванні вантажів для транспортування або зберігання), в машинобудуванні (при компонуванні літальних апаратів, судів, підводних човнів, компонуванні обладнання, приладів та пристроїв, деталей виробу). Особливий інтерес до цього класу задач виникає при проектуванні ракетно-космічної техніки. На початковому етапі проектування (компонуванні) космічного апарату необхідно враховувати ряд обмежень на статичні і динамічні характеристики (центр мас, осьові і відцентрові моменти інерції) [118].

У роботах [105, 119–122] розглядаються задачі компоновки циліндрів в циліндричному контейнері з обмеженнями поведінки, врахування яких

необхідне для дотримання врівноваженості супутникової системи. В даних публікаціях наводяться математичні моделі з різними функціями цілі. Для розв'язання цих задач пропонуються евристичні алгоритми, що враховують особливості кожної з задач.

Математичні моделі низки оптимізаційних задач рівноважної компоновки можуть бути побудовані з урахуванням особливостей їх дискретної структури. Для математичного моделювання і розв'язання таких задач потрібно використовувати комбінаторні конфігурації, що володіють відповідними властивостями. Основні підходи до математичного моделювання та розв'язання задач оптимізації на комбінаторних конфігураціях описані в монографіях [1, 10, 111].

У роботах [123, 124] наводяться математичні моделі і методи розв'язання задач рівноважної компоновки (Balance Layout Problem, BLP) множини 3D-об'єктів в заданому контейнері. Контейнер розділений круговими стелажми на підконтейнери. При цьому розбиття множини об'єктів на підмножини відповідно до розміщення об'єктів всередині підконтейнерів вважається заданим.

У даному підрозділі розглядається задача рівноважної компоновки 3D-об'єктів (куля, циліндр, тор, сфероциліндр, паралелепіпед, правильна призма) в контейнері (форми паралелепіпеда, циліндра, параболоїда обертання або усіченого конуса), розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери.

Метою є побудова і реалізація математичної моделі задачі оптимальної рівноважної компоновки множини 3D-об'єктів, в якій враховуються не тільки обмеження розміщення і механічні властивості системи, а й комбінаторні особливості задачі, пов'язані з генерацією розбиття множини об'єктів, що розміщуються всередині підконтейнерів, при проектуванні компоновки.

2.1.1 Постановка задачі

Нехай Ω – контейнер висотою H , який має форму паралелепіпеда, циліндра, параболоїда обертання або усіченого конуса. Контейнер Ω заданий у власній нерухомій системі координат $Oxyz$, де Oz – поздовжня вісь симетрії. Вважаємо, що Ω розділений горизонтальними стелажми S_j на підконтейнери Ω^j , $j \in J_m = \{1, \dots, m\}$. Відстані між стелажми S_j та S_{j+1} позначимо через t_j , $j \in J_m$, $\sum_{j=1}^m t_j = H$. Початок власної системи координат

$Oxyz$ розташований в центрі нижньої основи контейнера.

Маємо $A = \{\mathbb{T}_i, i = 1, \dots, n\}$ – множину однорідних 3D-об'єктів із заданими метричними характеристиками. Кожен об'єкт має висоту h_i і масу m_i , $i \in J_n = \{1, \dots, n\}$.

Об'єкт \mathbb{T}_i задано у власній системі координат $O_i x_i y_i z_i$. Розташування об'єкта \mathbb{T}_i всередині контейнера Ω визначається вектором $u_i = (v_i, z_i, \theta_i)$, (v_i, z_i) – вектор трансляції об'єкта в нерухомій системі координат $Oxyz$, θ_i – кут обертання об'єкта \mathbb{T}_i в площині $O_i x_i y_i$, де $v_i = (x_i, y_i)$, при цьому значення z_i , $i \in J_n$, однозначно визначається підконтейнером Ω^j , $j \in J_m$, в якому розміщується об'єкт \mathbb{T}_i :

$$z_i = \sum_{l=1}^j t_{l-1} + h_i, \quad (2.1)$$

де $j \in J_m$. Вважаємо, що $t_0 = 0$ і $\forall i \in J_n$ існує $j^* \in J_m$: $h_i \leq t_{j^*}$.

На відміну від задач BLP, розглянутих в роботах [123, 124], де апріорі задана вимога на розміщення об'єктів в конкретних підконтейнерах Ω^j , $j \in J_m$, в даному дослідженні формулюється задача рівноважної компоновки об'єктів, яка передбачає генерацію і вибір розбиття множини A на непорожні

підмножини $A^j, j \in J_m$. Тут A^j – підмножина об'єктів, які повинні бути розміщені на стелажі S_j всередині підконтейнера Ω^j .

Нехай $J_n^j \subseteq J_n$ – множина індексів об'єктів, що розміщуються в підконтейнері $\Omega^j, j \in J_m, \bigcup_{j=1}^m J_n^j = J_n, J_n^i \cap J_n^j = \emptyset, i \neq j \in J_m; k_j = |A^j|$ – кількість об'єктів, що розміщуються в підконтейнері $\Omega^j, k_j > 0, j \in J_m$, при цьому,

$$\sum_{j=1}^m k_j = n. \quad (2.2)$$

На сумарну масу об'єктів, що розміщуються в підконтейнері, накладається обмеження:

$$\sum_{i=1}^{k_1} m_i \geq \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} m_i \geq \dots \geq \sum_{i=k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1}^n m_i, \quad (2.3)$$

де $k_j = |A^j| \geq 1, j \in J_m$.

Крім того, повинні виконуватися наступні обмеження розміщення:

$$\text{int } \mathbb{T}_{i_1} \cap \text{int } \mathbb{T}_{i_2} = \emptyset, i_1 < i_2 \in J_n^j, j \in J_m, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{T}_i \subset \Omega^j, i \in J_n^j, j \in J_m, \quad (2.5)$$

$$h^j \leq t_j, h^j = \max\{h_i^j, i \in J_n^j\}, j \in J_m. \quad (2.6)$$

Позначимо через Ω_A систему, утворену в результаті розміщення об'єктів \mathbb{T}_i сімейства A в контейнері Ω , а через O_sXYZ – систему координат Ω_A , де $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s(v))$ – центр мас Ω_A , а вісі $O_sX \parallel Ox, O_sY \parallel Oy, O_sZ \parallel Oz$,

$$x_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}, \quad (2.7)$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \text{ – маса системи } \Omega_A.$$

В якості функції цілі розглядається відхилення центру мас O_s від заданої точки (x_0, y_0, z_0) .

Комбінаторна задача рівноважної компоновки (Combinatorial Balance Layout Problem, CBLP). Визначити такий варіант розміщення підмножин A^j , $j \in J_m$ з урахуванням обмежень (2.2)–(2.6) і параметри розміщення (x_i^*, y_i^*, z_i^*) об'єктів \mathbb{T}_i , $i \in J_n$, при якому функція цілі досягала б свого мінімального значення.

Вважаємо, що задача має хоча б одне припустиме рішення.

Зауваження. На розміщення об'єктів можуть бути задані також умови балансу (обмеження на осьові і відцентрові моменти системи) і обмеження на допустимі відстані між об'єктами.

2.1.2 Побудова комбінаторної множини

Варіанти розбиття множини A на непорожні підмножини A^j , $j \in J_m$, визначаються кількістю елементів в кожній підмножині і порядком слідування підмножин. Розглянемо підконтейнери Ω^j і відповідні їм множини об'єктів A^j , $j \in J_m$. Тоді кортеж натуральних чисел (k_1, k_2, \dots, k_m) ,

такий що $\sum_{j=1}^m k_j = n$, визначає можливу кількість k_j об'єктів в кожному

підконтейнері Ω^j . Кількість всіх таких кортежів дорівнює числу композицій числа n довжини m [110], яке складає C_{n-1}^{m-1} .

Розглянемо тепер, скількома способами можна розкласти n різних об'єктів з множини A в m підконтейнерів Ω^j , $j \in J_m$, за умови, що в підконтейнерах знаходиться відповідно k_1, k_2, \dots, k_m об'єктів, причому множини об'єктів A^j , $j \in J_m$, всередині відповідних підконтейнерів Ω^j , $j \in J_m$, не впорядковані. Не втрачаючи спільності, будемо розрізняти об'єкти з однаковими значеннями метричних характеристик, висоти h_i і маси m_i (наприклад, вважати їх такими, що розрізняються за номером).

Впорядкуємо елементи множини A . Кожному об'єкту поставимо у відповідність номер підконтейнеру, в який він буде поміщений. Отримаємо кортеж, що складається з n елементів, які утворюють перестановку з повтореннями з m номерів $1, 2, \dots, m$, в якій перший елемент (номер першого підконтейнера) повторюється k_1 разів, другий – k_2 разів, ..., останній – k_m разів. Кожна така перестановка визначає свій спосіб розкладки, а їх загальна кількість дорівнює

$$P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (2.8)$$

Тоді кількість варіантів розподілу n різних об'єктів з множини A по m підконтейнерам Ω^j за умови, що кожен підконтейнер містить хоча б один об'єкт і порядок розміщення об'єктів всередині підконтейнерів не важливий, дорівнює

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \quad (2.9)$$

Зауважимо, що число доданків в сумі дорівнює числу композицій числа n довжини m , яке складає $N = C_{n-1}^{m-1}$.

Для генерації різних варіантів підмножин A^j , $j \in J_m$, побудуємо комбінаторну конфігурацію наступним чином.

Позначимо $Pt(n, m)$ множину композицій числа n довжини m (відповідає розподілу n різних об'єктів з множини A по m підконтейнерам Ω^j , $j \in J_m$, за умови, що кожен з підконтейнерів містить хоча б один об'єкт і порядок об'єктів всередині підконтейнерів не важливий). При цьому, $|Pt(n, m)| = N = |C_{n-1}^{m-1}|$.

Нехай $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in Pt(n, m)$, $\sum_{j=1}^m k_j = n$, $k_i \geq 1$, $i \in J_m$.

Введемо комбінаторну множину \mathbb{Q} , яка являє собою композиційний образ комбінаторних множин (k -множину) $Pt(n, m)$; $C_n^{k_1}$, $C_{n_1}^{k_2}$, $C_{n_2}^{k_3}$, ..., $C_{n_{m-1}}^{k_m}$, породжений множинами $I_n, I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_{m-1}}$ [125],

де $n_i = n - k_1 - \dots - k_i$, $i \in J_{m-1}$,

$$I_{n_0} = J_n,$$

$$I_{n_1} = I_{n_0} \setminus \{j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}\}, (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1},$$

$$I_{n_2} = I_{n_1} \setminus \{j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}\}, (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

...

$$I_{n_{m-1}} = I_{n_{m-2}} \setminus \{j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}\}, (j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}) \in C_{n_{m-2}}^{k_{m-1}},$$

$$I_{n_{m-1}} = \{j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}\}, (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}.$$

Відмітимо, що

$$I_{n_0} \cup I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_{m-1}} = J_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$I_{n_s} \cap I_{n_t} = \emptyset, s \neq t \in J_{m-1}^0 = \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Елемент $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ може бути описаний таким чином:

$$q = (q_1, \dots, q_{k_1}, q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}, \dots, \\ q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_{m-1}+k_m}),$$

де $(q_1, \dots, q_{k_1}) = (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1}$,

$$(q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}) = (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

...

$$(q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_{m-1}+k_m}) = \\ = (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}.$$

Потужність множини \mathbb{Q} визначається формулою (2.9).

Надалі будемо називати елемент $q = (q_1, \dots, q_n)$ множини \mathbb{Q} *кортежем розбиття* множини об'єктів A на підмножини A^j , $j \in J_m$.

Визначимо вектор змінних задачі CBLP: $u = (v, z, \theta)$, де $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbf{R}^n$, $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$, x_i, y_i, θ_i – неперервні змінні, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$, z_i – дискретні змінні.

Значення змінних z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, визначаються в порядку, що задається елементами $q = (q_1, \dots, q_n)$ комбінаторної множини \mathbb{Q} таким чином:

$$z_{q_i} = \sum_{l=1}^s t_{l-1} + h_{q_i}, \quad (2.10)$$

де

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq k_1, \\ 2, & \text{если } k_1 < i \leq k_1 + k_2, \\ \dots \\ m, & \text{если } k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} < i \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, $q_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$.

Отже, множина кортежей розбиття \mathbb{Q} описує структуру та властивості комбінаторної задачі рівноважної компоновки CBLP.

2.2 Математична модель комбінаторної задачі рівноважної компоновки

Побудуємо математичну модель комбінаторної задачі рівноважної компоновки CVLP. Введемо обмеження на змінні.

Обмеження розміщення об'єктів множини A в контейнері Ω виду (2.4), (2.5) описуються системою нерівностей $\Upsilon_1(u) \geq 0$, $\Upsilon_2(u) \geq 0$, де $\Upsilon_1(u) \geq 0$ – обмеження, яке описує неперетинання 3D-об'єктів, $\Upsilon_2(u) \geq 0$ – обмеження, яке описує включення 3D-об'єктів в контейнер Ω , де

$$\Upsilon_1(u) = \min\{\Upsilon_1^j(u), j \in J_m\}, \quad \Upsilon_1^j(u) = \min\{\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}), q_1 < q_2 \in J_n^j\}, \quad (2.11)$$

$$\Upsilon_2^*(u) = \min\{\Upsilon_2^{*j}(u), j \in J_m\}, \quad \Upsilon_2^{*j}(u) = \min\{\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}), q_i \in J_n^j\}, \quad (2.12)$$

$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2})$ – функція, що описує умову неперетину об'єктів \mathbb{T}_{q_1} і \mathbb{T}_{q_2} , $u_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1}, z_{q_1}, \theta_{q_1})$, $u_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2}, z_{q_2}, \theta_{q_2})$, $\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i})$ – функція, що описує умову неперетину об'єктів \mathbb{T}_{q_i} і $\Omega^{*j} = \mathbf{R}^3 / \text{int } \Omega^j$.

Нехай $u_1 = (v_1, z_1, \theta_1) \in \mathbf{R}^3$, $u_2 = (v_2, z_2, \theta_2) \in \mathbf{R}^3$, $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2$ – неперервні змінні, z_1, z_2 – дискретні змінні, u_{12} – вектор додаткових змінних.

Визначення 2.1. Функція $\Upsilon_{12}(u_1, u_2)$ називається D -phi-функцією для 3D-об'єктів \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 , якщо при фіксованих значеннях $z_1 = z_1^0$ і $z_2 = z_2^0$ функція $\Upsilon_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2) \in \text{phi-функцією } \Phi_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2)$ для об'єктів \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 .

Визначення 2.2. Функція $\Upsilon'_{12}(u_1, u_2, u_{12})$ називається D -квазі-phi-функцією для 3D-об'єктів \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 , якщо при фіксованих значеннях $z_1 = z_1^0$ и

$z_2 = z_2^0$ функція $\Upsilon'_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2, u'_{12})$ є квазі- ρ -функцією $\Phi'_{12}(v_1, z_1^0, \theta_1, v_2, z_2^0, \theta_2, u'_{12})$ для об'єктів \mathbb{T}_1 і \mathbb{T}_2 .

Таким чином, у співвідношеннях (2.11), (2.12) при фіксованих значеннях z_{q_1} і z_{q_2} маємо:

$$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}) \equiv \Phi_{q_1 q_2}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2}) - \rho\text{-функція [87] для об'єктів } \mathbb{T}_{q_1}$$

і \mathbb{T}_{q_2} або

$$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}) \equiv \Phi'_{q_1 q_2}{}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}) - \text{квазі-}\rho\text{-функція [25] для}$$

об'єктів \mathbb{T}_{q_1} і \mathbb{T}_{q_2} ;

$$\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}) \equiv \Phi_{q_i}^{\mathbb{T}\Omega^{*j}}(u_{q_i}) - \rho\text{-функція для об'єктів } \mathbb{T}_{q_i} \text{ і } \Omega^{*j}.$$

У разі, якщо задані мінімально допустимі відстані між об'єктами, використовуються псевдонормалізовані ρ -функції (квазі- ρ -функції) для відповідних пар об'єктів [25, 87].

Математичну модель задачі SBLP можна визначити наступним чином:

$$F(u^*) = \min F(u) \text{ s.t. } (u, \tau) \in W, \quad (2.13)$$

$$W = \{(u, \tau) \in \mathbf{R}^\sigma : \Upsilon_1(u, \tau) \geq 0, \Upsilon_2^*(u) \geq 0, \mu(u) \geq 0\}, \quad (2.14)$$

де

$$F(u) = d = (x_s(v, z))^2 + (y_s(v, z))^2 + (z_s - z_0)^2$$

$$u = (v, z, \theta), \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \quad v_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$z = (z_1, \dots, z_n)$, функція $\Upsilon_1(u, \tau)$ описується співвідношенням (2.11) при

$$\Xi = \bigcup_{j=1}^m \Xi^j, \quad \Xi^j = \{(q_1, q_2) : q_1 < q_2 \in J_n^j\}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) - \text{вектор допоміжних}$$

змінних, $s = |\Xi|$, функція $\Upsilon_2^*(u)$ визначається формулою (2.12), елементи

вектора z задаються співвідношенням (2.10), $\mu(u) \geq 0$ – умови балансу.

Наприклад, математична модель (2.13)–(2.14) для задачі CBLP розміщення циліндрів в циліндричному контейнері набуде вигляду:

$$\min d, \text{ s.t. } u = (v, z) \in W,$$

де $v = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$d = \left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i z_i \right]^2,$$

а область W описується системою нерівностей виду

$$\begin{cases} (x_{q_2} - x_{q_1})^2 + (y_{q_2} - y_{q_1})^2 - (r_{q_2} + r_{q_1})^2 \geq 0, \\ q_1, q_2 \in \Xi^j, j \in J_m, \\ -x_{q_i}^2 - y_{q_i}^2 + (R_{q_i}^z - r_{q_i})^2 \geq 0, \\ q_i \in \Xi^j, j \in J_m. \end{cases}$$

Зауважимо, що $m'_i = \frac{m_i}{M} = \text{const}$, $M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const}$.

Відзначимо, що математичну модель задачі CBLP можна представити у вигляді задачі змішаного цілочисельного програмування (MIP) з використанням булевих змінних. Однак, такий підхід, на відміну від (2.13) – (2.14), призводить до істотного збільшення числа дискретних змінних моделі а, отже, до зростання розмірності задачі CBLP.

2.3 Метод розв'язання комбінаторної задачі рівноважної компоновки

Для розв'язування задач CBLP використовується наступна стратегія:

1. Випадковим чином генерується множина $\{q\}$ кортежів розбиття $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ [126].

2. Здійснюється перевірка виконання умов (2.3), (2.6) для кожного з кортежів $q \in \{q\}$. Будується підмножина $\{q'\} \subseteq \{q\}$, для елементів якої виконуються зазначені умови. Якщо $\{q'\} = \emptyset$, то повертаємося до кроку 1.

3. Будується множина допустимих стартових точок $\{u'_0\}$ для кожного кортежу з множини $\{q'\}$.

4. Реалізується пошук локального екстремуму задачі (2.13) – (2.14) для кожної стартової точки $u'_0 \in W$ при фіксованому кортежі q' .

5. Кращий з отриманих локальних екстремумів для всіх кортежів множини $\{q'\}$ і допустимих стартових точок множини $\{u'_0\}$ вибирається в якості локально-оптимального розв'язку задачі CBLP.

Наведена стратегія використовує розумний вибір допустимих стартових точок і *NLP-solver* для пошуку локально-оптимальних рішень *NP*-складної задачі умовної оптимізації (2.13) – (2.14). Для побудови стартових точок з області допустимих рішень пропонується швидкий алгоритм.

Для зниження обчислювальних витрат (часу і пам'яті) використовується модифікація LOFRT алгоритму, запропонованого в [25]. Даний алгоритм дозволяє звести задачу (2.13) – (2.14) великої розмірності з великим числом нерівностей до послідовності підзадач зі значно меншим числом змінних і нерівностей.

Для розв'язання задач нелінійного програмування використовується IPOPT, доступний на відкритому некомерційному ресурсі (<https://projects.coin-or.org/Ipoprt>). В основі роботи IPOPT – метод внутрішньої точки, описаний в [127].

Алгоритм пошуку допустимих стартових точок. Алгоритм включає наступні кроки для заданого кортежу q' .

Крок 1. Генеруємо випадковим чином множину точок $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$, $i \in I_n$, що належать відповідним перерізам контейнера. Формуємо вектор $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$. Фіксуємо кути повороту $\theta_i = \theta_i^0 = 0$, $i \in I_n$.

Крок 2. Нехай $\lambda = \lambda_i$ – коефіцієнт гомотетії для об'єктів A_i , $i \in I_n$. Використовуючи очевидні геометричні побудови, визначаємо вектор додаткових змінних u'^0 розмірності τ такий, що кожна ρ -функція або квазі- ρ -функція в (2.14) досягає свого максимального значення за додатковими змінними u'^0 в точці (u_λ^0, u'^0) , де $u_\lambda^0 = (v^0, \theta^0, \lambda^0)$, $\lambda^0 = 0$, $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)$, $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$.

Крок 3. Обчислюємо $\alpha^0 = \min\{\Upsilon_1(u_\lambda^0, u'^0), \Upsilon_2(u_\lambda^0)\}$. Якщо $\alpha^0 < 0$, то переходимо до Кроку 4, інакше формуємо точку $u_\alpha^* = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$ і переходимо до Кроку 5.

Крок 4. Задаємо $\lambda = 0$, $\theta_i = \theta_i^0 = 0$, $i \in I_n$, і використовуємо $u_\alpha^0 = (u_\lambda^0, u'^0, \alpha^0)$ в якості стартової точки для вирішення наступної допоміжної задачі нелінійного програмування:

$$\alpha^* = \max \alpha, \text{ s.t. } u_\alpha \in W_\alpha, \quad (2.15)$$

$$W_\alpha = \{u_\alpha \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') - \alpha \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) - \alpha \geq 0, -\alpha \geq 0\}, \quad (2.16)$$

де $u_\alpha = (u_\lambda, u', \alpha)$.

Якщо $\alpha^* = 0$, тоді точка $u_\alpha^* = (u_\lambda^*, u'^*, \alpha^*)$ глобального максимуму задачі (2.15) – (2.16) знайдена і переходимо до Кроку 5. Якщо $\alpha^* < 0$, то допустима стартова точка для завдання (2.15) – (2.16) не може бути знайдена, оскільки не виконуються обмеження розміщення при $\lambda = 0$. В цьому випадку повертаємося до Кроку 1.

Крок 5. Вважаємо, що параметри θ_i , $i \in I_n$, – змінні. Генеруємо випадковим чином стартові значення кутів повороту $\theta_i^* \in [0, 2\pi)$, $i \in I_n$.

Крок 6. Формуємо допустиму стартову точку (u_λ^*, u'^*) ,

використовуючи u_α^* , і розв'язуємо наступну допоміжну задачу нелінійного програмування:

$$\lambda^* = \max \lambda, \text{ s.t. } (u_\lambda, u') \in W_\lambda, \quad (2.17)$$

$$W_\lambda = \{(u_\lambda, u') \in \mathbb{R}^{3n+\tau+1} : \Upsilon_1(u_\lambda, u') \geq 0, \Upsilon_2(u_\lambda) \geq 0, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}. \quad (2.18)$$

Якщо $\lambda^* = 1$, тоді точка $(u_\lambda^*, u'^*) = (v^*, \theta^*, \lambda^*, u'^*)$ глобального максимуму (2.17)–(2.18) знайдена і переходимо до кроку 7. Якщо $\lambda^* < 1$, то повертаємося до Кроку 1.

Крок 7. Обчислюємо значення $\mu(v^*, \theta^*)$. Якщо $\mu(v^*, \theta^*) < 0$, то переходимо до кроку 8, інакше – до кроку 9.

Крок 8. Стартуючи з точки $u_\beta^0 = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^0 = \mu(u^*))$, вирішуємо допоміжну задачу:

$$\beta^* = \max \beta, \text{ s.t. } u_\beta \in W_\beta, \quad (2.19)$$

$$W_\beta = \{u_\beta \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Upsilon_1(u, u') \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0, \mu(u) - \beta \geq 0, -\beta \geq 0\}, \quad (2.20)$$

де β – нев'язка, $u_\beta = (u, u', \beta)$, $u = (v, \theta)$.

Якщо $\beta^* = 0$, тоді точка $u_\beta^* = (v^*, \theta^*, u'^*, \beta^*)$ глобального максимуму задачі (2.19) - (2.20) знайдена, переходимо до кроку 9. Якщо $\beta^* < 0$, то повертаємося до Кроку 1.

Крок 9. Формуємо допустиму стартову точку $u^0 = (v^*, \theta^*, u'^*) \in W$ для задачі CBLP.

2.4 Результати чисельних експериментів

Задача 1. Розглядається задача рівноважної компоновки циліндрів $C_i, i = 1, \dots, 8$ в циліндричному контейнері, розділеному двома круговими

стелажами на підконтейнерів з метою мінімізації відхилення центру мас системи Ω_A від точки (x_0, y_0, z_0) .

Нехай $n = 8$, $m = 3$, $H = 6$, $R = 2.5$, $t_1 = t_2 = 2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 3)$. Маса і метричні характеристики (радіуси і напіввисоти) циліндрів $C_i, i = 1, \dots, 8$ задано в таблиці 2.1

Результати чисельних експериментів для Задачі 1.

Значення функції цілі $d^* = 0.3851$ при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

Значення функції цілі $d^* = 0.8847$ при $q^2 = (3, 7, 8, | 1, 5, 6, | 2, 4)$.

Таблиця 2.1 Вихідні дані про циліндри

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
m_i	4	2	2	1	3	3	5	5
r_i	1	0.7	0.6	0.45	0.8	0.85	0.9	1
h_i	1.27	1.3	1.77	1.57	1.49	1.32	1.96	1.59

На Рисунку 2.1 наведені проєкції локально-оптимальних розміщень циліндрів в підконтейнерах, відповідні кортежам q^1 і q^2 .

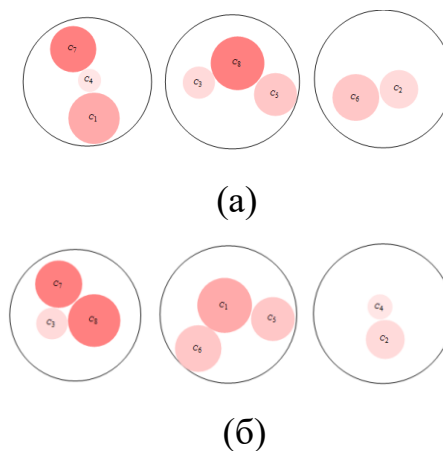
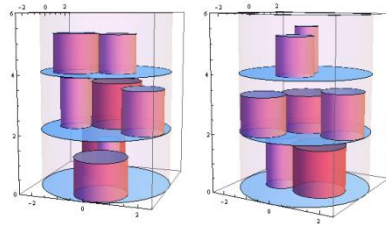


Рисунок 2.1 – Проєкції локально-оптимальних розміщень циліндрів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, які відповідають а) кортежу q^1 ; б) кортежу q^2 .

На Рис. 2.2 наведені локально-оптимальні розміщення циліндрів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні кортежам q^1 і q^2 .



(a)

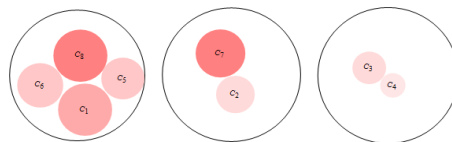
(б)

Рисунок 2.2 – Локально-оптимальні розміщення циліндрів в підконтейнерах, які відповідають: а) кортежу q^1 ; б) кортежу q^2 .

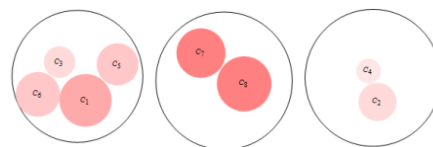
На Рисунку 2.3 наведені проєкції локально-оптимальних розміщень циліндрів в підконтейнерах, відповідні кортежам q^3 і q^4 .

Значення функції цілі $d^* = 1.3938$ при $q^3 = (1, 5, 6, 8, | 2, 7, | 3, 4)$.

Значення функції цілі $d^* = 1.8847$ при $q^4 = (1, 3, 5, 6, | 7, 8, | 2, 4)$.



(a)



(б)

Рисунок 2.3 – Проєкції локально-оптимальних розміщень циліндрів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні а) кортежу q^3 ; б) кортежу q^4 .

На Рис. 2.4 наведені локально-оптимальні розміщення циліндрів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, які відповідають кортежам q^3 і q^4 .

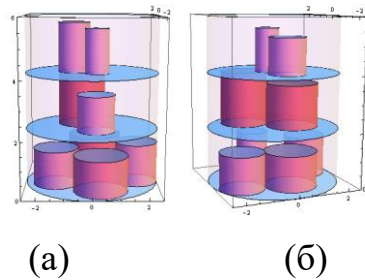


Рисунок 2.4 – Локально-оптимальні розміщення циліндрів в підконтейнерах, які відповідають: а) кортежу q^3 ; б) кортежу q^4 .

Найкращий результат $d^*=0.3851$ отриманий для Задачі 1 при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

Задача 2. Розглядається задача рівноважної компоновки сімейства 3D-об'єктів (куль S_i , прямих кругових циліндрів C_i , торів Q_i , сфероциліндрів S_{C_i} , прямих прямокутних паралелепіпедів P_i і правильних призм K_i) в циліндричному контейнері з урахуванням умови балансу (осьові і відцентрові моменти системи) і обмежень на мінімально допустимі відстані між об'єктами, а також між об'єктами і межею контейнера, з метою мінімізації відхилення центру мас системи Ω_A від точки (x_0, y_0, z_0) .

Нехай $n = 20$, $m = 3$, $H = 1$, $R = 0.45$, $t_1 = t_2 = 0.35$, $A = \{S_i, i = 1, \dots, 4, C_i, i = 5, \dots, 8, Q_i, i = 9 \dots 12, S_{C_i}, i = 13, \dots 16, P_i, i = 17, 18, 19, K_{20}\}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0.5)$, $\{m_i, i = 1, \dots, 20\} = \{20.944, 15.2681, 27.8764, 34.5575, 63.7115, 41.8146, 30.4106, 28.4245, 49.9649, 24.8714, 38.6888, 26.2637, 20.7764, 17.2159, 16.8756, 52.8, 52.8, 52.8, 23.1489\}$; радіуси куль $S_i, i = 1, \dots, 4$, радіуси $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.09$, $r_3 = 0.11$, $r_4 = 0.11$; радіуси і напіввисоти циліндрів $C_i, i = 5, \dots, 8$, радіуси $r_5 = 0.1$, $h_5 = 0.11$, $r_6 = 0.13$, $h_6 = 0.12$, $r_7 = 0.11$, $h_7 = 0.11$, $r_8 = 0.11$, $h_8 = 0.08$; відстані від центрів

твірних кола до осей обертання і напіввисот торів $Q_i, i = 9 \dots 12$, дорівнюють $r_9 = 0.08, h_9 = 0.07, r_{10} = 0.09, h_{10} = 0.075, r_{11} = 0.07, h_{11} = 0.06, r_{12} = 0.08, h_{12} = 0.07$; радіуси, напіввисоти циліндрів і висоти кульових сегментів для сфероциліндрів $S_{Ci}, i = 13, \dots, 16$, дорівнюють $r_{13} = 0.1, h_{13} = 0.05, l_{13} = 0.07, r_{14} = 0.05, h_{14} = 0.05, l_{14} = 0.08, r_{15} = 0.08, h_{15} = 0.05, l_{15} = 0.06, r_{16} = 0.08, h_{16} = 0.04, l_{16} = 0.07$; паралелепіеди задані напівширинами, напівдовжинами і напіввисотами, відповідно, $w_{17} = 0.11, l_{17} = 0.1, h_{17} = 0.12, w_{18} = 0.11, l_{18} = 0.1, h_{18} = 0.12, w_{19} = 0.11, l_{19} = 0.1, h_{19} = 0.12$; правильна шестикутна призма задана довжиною сторони основи $r_{20} = 0.09$ і напіввисотою $h_{20} = 0.11$. Мінімально допустимі відстані між об'єктами, а також між об'єктами і межею контейнера дорівнюють $\rho_i^- = \rho_{ij}^- = 0.02, i < j = 1, \dots, 20$. Допустимі значення осьових і відцентрових моментів інерції становлять $\Delta J_X = \Delta J_Y = 170, \Delta J_Z = 150$ и $\Delta J_{XY} = \Delta J_{YZ} = \Delta J_{XZ} = 0$, відповідно.

Результати чисельних експериментів для Задачі 2.

Значення функції цілі $d^* = 0.0019$ при

$$q^1 = (1, 5, 6, 9, 13, 14, 17 | 2, 3, 7, 10, 15, 18, 20 | 4, 8, 11, 12, 16, 19).$$

Значення функції цілі $d^* = 0.0056$ при

$$q^2 = (3, 5, 6, 7, 10, 13, 17 | 2, 4, 11, 12, 14, 18, 19 | 1, 8, 9, 15, 16, 20).$$

На Рис. 2.5 наведені проєкції локально-оптимальних розміщень об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні кортежам q^1 і q^2 .

На Рис. 2.6 наведені локально-оптимальні розміщення об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, які відповідають кортежам q^1 і q^2 .

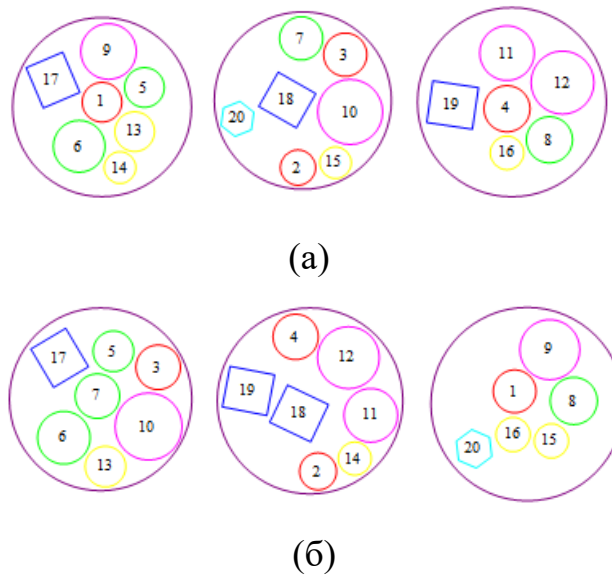


Рисунок 2.5 – Проекції локально-оптимальних розміщень об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні а) кортежу q^1 ; б) кортежу q^2 .

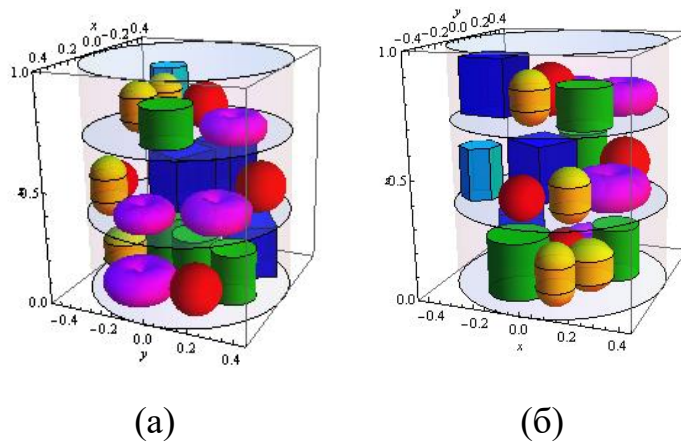


Рисунок 2.6 – Локально-оптимальні розміщення об'єктів в підконтейнерах, відповідні: а) кортежу q^1 ; б) кортежу q^2 .

Значення функції цілі $d^* = 0.0018$ при

$$q^3 = (1, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20 | 2, 4, 8, 10, 12, 14, 17 | 3, 6, 9, 16, 18).$$

Значення функції цілі $d^* = 0.0030$ при

$$q^4 = (2, 3, 7, 9, 13, 16, 18, 19 | 5, 6, 8, 11, 12, 14, 20 | 1, 4, 10, 15, 17).$$

На Рис. 2.7 наведені проєкції локально-оптимальних розміщень об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні кортежам q^3 і q^4 .

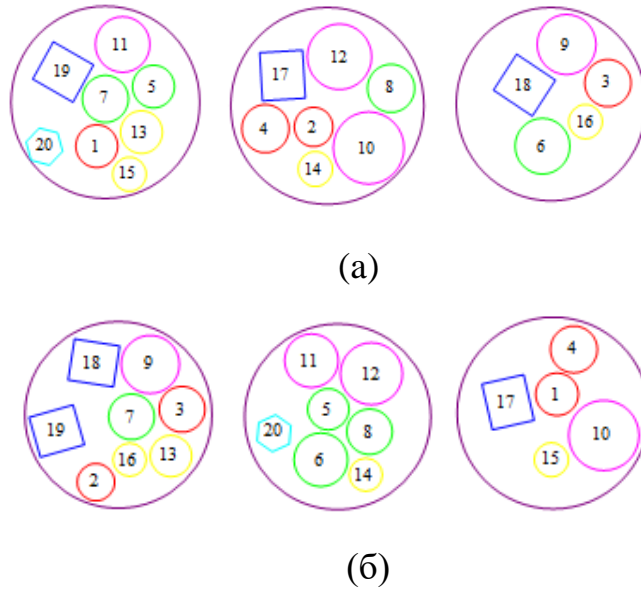


Рисунок 2.7 – Проєкції локально-оптимальних розміщень об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні а) кортежу q^3 ; б) кортежу q^4 .

На Рис. 2.8 наведені локально-оптимальні розміщення об'єктів в підконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, відповідні кортежам q^3 і q^4 .

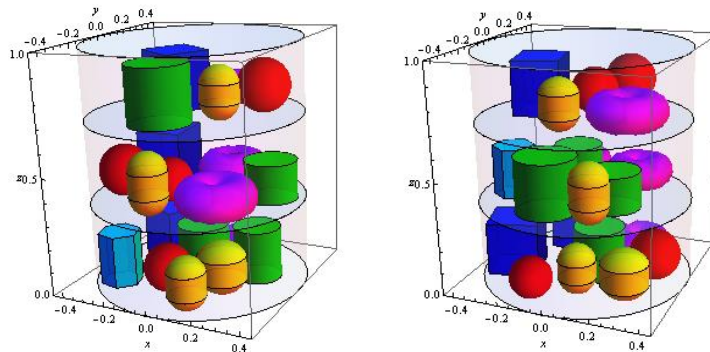


Рисунок 2.8 – Локально-оптимальні розміщення об'єктів в підконтейнерах, відповідні: а) кортежу q^3 ; б) кортежу q^4 .

Найкращий результат $d^* = 0.0018$ отриманий для Задачі 2 при

$$q^3 = (1, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20 | 2, 4, 8, 10, 12, 14, 17 | 3, 6, 9, 16, 18).$$

2.5 Комбінаторна задача рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними обмеженнями та умовами балансу

У підрозділі розглядається упаковка набору опуклих геометричних об'єктів у контейнер з опорними полицями (стелажми) з урахуванням спеціальних геометричних та механічних (поведінкових) обмежень. Ця задача є розвитком задач балансної упаковки, досліджених у [27, 123, 124] та, зокрема, задачі побудови комбінаторної задачі рівноважної компоновки, представленої в підрозділах 2.1–2.4.

Опуклий контейнер може мати форму циліндра, параболоїда або усіченого кругового конуса. В якості об'єктів розміщення розглядається набір опуклих тривимірних об'єктів, включаючи (але не обмежуючись цим) циліндри, кулі, диски (опукла оболонка тора), кубоїди та праві призми з багатокутною основою. Задача упаковки, що розглядається, враховує мінімальні та максимально допустимі відстані, а також комбінаторні характеристики розміщення об'єктів усередині підконтейнерів (об'єкт може бути розміщений лише на або під опорними полицями).

Метод ϕ -функцій [25, 45, 128–130] використовується для аналітичного опису обмежень розміщення: неперекриття об'єктів, утримання об'єктів у контейнері, обмеження відстані, що представляють спеціальні вимоги щодо розташування об'єктів у підконтейнерах. Механічні обмеження, що відповідають рівновазі, моментам інерції та стійкості, викладені аналогічно [124]. Також розглядаються спеціальні комбінаторні характеристики (див. підрозділ 2.1), пов'язані з розбиттям об'єктів на підмножини, які розміщуються в підконтейнерах. Побудована математична модель задачі упаковки, запропоновано та чисельно перевірено підхід до її розв'язання.

2.5.1 Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклим контейнером (наприклад, циліндром, параболоїдом, усіченим конусом). Контейнер Ω поділяється на підконтейнери Ω^k , $k=1,2,\dots,m$, круговими опорними дошками (полицями) S_k , $k=1,2,\dots,m+1$, за умови, що S_1 є основою Ω . Відстань t_k між опорними дошками S_k і S_{k+1} задано.

Нехай $A = \{\mathbb{T}_i, i \in J_n\}$ – набір опуклих об'єктів. Кожний об'єкт \mathbb{T}_i висотою h_i (“вертикальна довжина” об'єкта) та вагою m_i , визначається в його локальній системі координат $O_i x_i y_i z_i$, $i \in J_n$. Розташування об'єкта \mathbb{T}_i всередині контейнера Ω визначається вектором $u_i = (v_i, z_i, \theta_i)$, де (v_i, z_i) є вектором трансляції у фіксованій системі координат $Oxyz$, θ_i – кут повороту об'єкта \mathbb{T}_i в площині $O_i x_i y_i$, де $v_i = (x_i, y_i)$. Значення z_i , $i \in J_n$, однозначно визначається підконтейнером Ω^j , $j \in J_m$, в якому об'єкт \mathbb{T}_i повинен бути розміщений. Кожен об'єкт \mathbb{T}_i може переміщатися по відповідній опорній дошці.

Можуть бути задані мінімальна ρ_{ij}^- та максимальна $\rho_{ij}^+ \geq \rho_{ij}^-$ допустимі відстані між об'єктами $\mathbb{T}_i, \mathbb{T}_j$, $j > i \in J_n$. Мінімум допустимих відстань ρ_i^- між об'єктом \mathbb{T}_i , $i \in J_n$, і боковою поверхнею контейнера Ω також можна визначити. Встановлюємо $\rho_{ij}^- = 0$ (або $\rho_{ij}^+ = \varpi$) якщо мінімальна (та / або максимальна) допустима відстань між об'єктами $\mathbb{T}_i, \mathbb{T}_j$ не визначені, $j > i \in J_n$. Тут ϖ - задане досить велике число. Також встановлюємо $\rho_i^- = 0$, якщо мінімум допустимих відстань між об'єктом \mathbb{T}_i і боковою поверхнею контейнера Ω не визначено.

Обмеження розміщення у задачі упаковки можуть бути представлені наступним чином: $\rho_{ij}^- \leq \text{dist}(\mathbb{T}_i, \mathbb{T}_j) \leq \rho_{ij}^+$, $j > i \in J_n$, і $\text{dist}(\mathbb{T}_i, \Omega^*) \geq \rho_i^-$, $i \in J_n$, де $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega$.

Позначимо підмножину об'єктів, які мають бути розміщені на опорній дощі S_j всередині Ω^j через A^j , $j \in J_m$.

Для того, щоб помістити об'єкт \mathbb{T}_i , $i \in J_n$, в підконтейнер Ω^j , $j \in J_m$ мають бути виконані наступні умови

$$z_i = \sum_{l=1}^j t_{l-1} + h_i. \quad (2.21)$$

Вважаємо, що $t_0 = 0$ та $\forall i \in J_n$ існує $j^* \in J_m$: $h_i \leq t_{j^*}$.

Нехай $J_n^j \subseteq J_n$ – набір індексів об'єктів, які поміщаються в підконтейнер Ω^j , $j \in J_m$,

$$\bigcup_{j=1}^m J_n^j = J_n, \quad J_n^i \cap J_n^j = \emptyset, \quad i \neq j \in J_m; \quad (2.22)$$

$k_j = |A^j|$ – кількість об'єктів, які поміщаються в підконтейнер Ω^j , $k_j > 0$, $j \in J_m$,

$$\sum_{j=1}^m k_j = n, \quad (2.23)$$

$$\rho_{ij}^- \leq \text{dist}(\mathbb{T}_{i_1}, \mathbb{T}_{i_2}) \leq \rho_{ij}^+, \quad i_1 < i_2 \in J_n^j, \quad j \in J_m, \quad (2.24)$$

$$\text{dist}(\mathbb{T}_i, \Omega^{j^*}) \geq \rho_i^-, \quad i \in J_n^j, \quad j \in J_m, \quad (2.25)$$

$$h^j \leq t_j, \quad h^j = \max\{h_i^j + \rho_i^*, i \in J_n^j\}, \quad j \in J_m. \quad (2.26)$$

Також потрібно врахувати варіанти розбиття набору об'єктів A на непорожні підмножини $A^j, j \in J_m$, та визначити відповідні параметри розміщення $u_i = (v_i, z_i, \theta_i)$ об'єктів $\mathbb{T}_i, i \in J_n$, із врахуванням співвідношень (2.22) – (2.26).

Позначимо $u = (v, z, \theta), v = (v_1, \dots, v_n), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), v_i = (x_i, y_i), i \in J_n, z = (z_1, \dots, z_n)$.

Позначимо систему, отриману в результаті розміщення об'єктів \mathbb{T}_i множини A в контейнері Ω як Ω_A . Відповідно, система координат Ω_A позначається як O_sXYZ , де $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s(v))$ – центр ваги Ω_A :

$$x_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, y_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, z_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}, \quad (2.27)$$

де $M = \sum_{i=1}^n m_i$ вага системи Ω_A та $O_sX \parallel Ox, O_sY \parallel Oy, O_sZ \parallel Oz$.

Найбільш часто використовуваними цільовими функціями (див., наприклад, [27, 105, 118–120]) є: 1) розміри контейнера Ω ; 2) відхилення центра ваги Ω_A від заданої точки; 3) моменти інерції Ω_A .

Задача упаковки може бути сформульована таким чином:

Комбінаторна задача рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними обмеженнями та умовами балансу. Упакувати набір об'єктів $\mathbb{T}_i, i \in J_n$, всередині контейнера Ω , так щоб задана цільова функція досягла свого екстремального значення з урахуванням обмежень розміщення та умов балансування.

Для аналітичного опису обмежень розміщення використовується метод ϕ -функцій (див. підрозділ 1.4).

Для генерації підмножин A^j , $j \in J_m$, використовуємо спеціальний алгоритм, описаний у [27]. Цей алгоритм базується на комбінаторних конфігураціях, що називаються $Y_2(u) \geq 0$ -множинами.

Значення змінних z_i , $i \in J_n$, визначаються в порядку, заданому елементами $q(\mathbb{k})$ комбінаторної множини $Q(\mathbb{k})$ визначеної в п. 2.1:

$$z_{q_i} = \sum_{l=1}^g t_{l-1} + h_{q_i}, \text{ де}$$

$$g = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq k_1, \\ 2, & \text{if } k_1 < i \leq k_1 + k_2, \\ \dots & \\ m, & \text{if } k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} < i \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, q_i \in \{1, 2, \dots, n\}, q(\mathbb{k}) \in Q(\mathbb{k}).$$

Розглянемо механічні характеристики системи Ω_A .

Обмеження рівноваги визначаються наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} \mu_{11}(u, p) = \min\{-(x_s(u) - x_e) + \Delta x_e, (x_s(u) - x_e) + \Delta x_e\} \geq 0 \\ \mu_{12}(u, p) = \min\{-(y_s(u) - y_e) + \Delta y_e, (y_s(u) - y_e) + \Delta y_e\} \geq 0, \\ \mu_{13}(u, p) = \min\{-(z_s(u) - z_e) + \Delta z_e, (z_s(u) - z_e) + \Delta z_e\} \geq 0 \end{cases}$$

де (x_e, y_e, z_e) – очікувані координати O_s , $(\Delta x_e, \Delta y_e, \Delta z_e)$ є допустимими відхиленнями від точки (x_e, y_e, z_e) .

Обмеження для моментів інерції визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} \mu_{21}(u, p) = -J_X(u, p) + \Delta J_X \geq 0 \\ \mu_{22}(u, p) = -J_Y(u, p) + \Delta J_Y \geq 0, \\ \mu_{23}(u, p) = -J_Z(u, p) + \Delta J_Z \geq 0 \end{cases}$$

де $J_X(u, p), J_Y(u, p), J_Z(u, p)$ - моменти інерції системи Ω_A відносно осей системи координат O_sXYZ та $\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z$ – допустимі відхилення для значень $J_X(u, p), J_Y(u, p), J_Z(u, p)$, де

$$J_X(u, p) = J_{x_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \cos^2 \theta_i + J_{y_i} \sin^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - M(y_s^2 + z_s^2),$$

$$J_Y(u, p) = J_{y_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \sin^2 \theta_i + J_{y_i} \cos^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i - M(x_s^2 + z_s^2)$$

$$J_Z(u, p) = \sum_{i=0}^n J_{z_i} + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - M(x_s^2 + y_s^2),$$

$J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}$ – моменти інерції Ω відносно осей системи координат $Oxyz$ та $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$, $i \in I_n$, моменти інерції об'єкту A_i відносно осей системи координат $O_i x_i y_i z_i$.

Обмеження стабільності визначаються наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} \mu_{31}(u, p) = \min\{-J_{XY}(u, p) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(u, p) + \Delta J_{XY}\} \geq 0 \\ \mu_{32}(u, p) = \min\{-J_{YZ}(u, p) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(u, p) + \Delta J_{YZ}\} \geq 0, \\ \mu_{33}(u, p) = \min\{-J_{XZ}(u, p) + \Delta J_{XZ}, J_{XZ}(u, p) + \Delta J_{XZ}\} \geq 0 \end{cases}$$

де $J_{XY}(u, p), J_{YZ}(u, p), J_{XZ}(u, p)$ – моменти інерції Ω_A відносно осей системи координат $O_s XYZ$ та $\Delta J_{XY}, \Delta J_{YZ}, \Delta J_{XZ}$ – допустимі відхилення для значень $J_{XY}(u, p), J_{YZ}(u, p), J_{XZ}(u, p)$, відповідно,

$$J_{XY}(u, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{x_i} - J_{y_i}) \sin 2\theta_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M x_s y_s,$$

$$J_{YZ}(u, p) = \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M y_s z_s, \quad J_{XZ}(u, p) = \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M x_s z_s.$$

2.5.2 Математична модель

Математична модель *Комбінаторної задачі рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними обмеженнями та умовами балансу* може бути представлена у формі

$$\min F(p, u, \tau) \text{ s.t. } (u, p) \in W \quad (2.28)$$

$$W = \{(u, p, \tau) \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u, \tau) \geq 0, \Upsilon_2^*(u, p) \geq 0, \mu(u, p) \geq 0, \zeta(u, p) \geq 0\} \quad (2.29)$$

де $F(p, u, \tau) = \alpha_1 F_1(p, u, \tau) + \alpha_2 F_2(p, u, \tau) + \dots + \alpha_k F_k(p, u, \tau)$,

$$\sum_{l=1}^k \alpha_l = 1, \alpha_l \geq 0, u = (v, z, \theta), v = (v_1, \dots, v_n), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), v_i = (x_i, y_i),$$

$i \in J_n, z = (z_1, \dots, z_n), \tau$ є вектором усіх допоміжних змінних для квазі-phi-функцій,

$$\Upsilon_1(u, \tau) = \min \{ \Upsilon_1^j(u, \tau), j \in J_m \}, \quad (2.30)$$

$$\Upsilon_1^j(u, \tau) = \min \{ \Upsilon_{q_1 q_2}^{-j}(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}), q_1 < q_2 \in J_n^j, (q_1, q_2) \in \Xi_-^k, \}$$

$$\Upsilon_{q_1 q_2}^{+j}(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2}), q_1 < q_2 \in J_n^j, (q_1, q_2) \in \Xi_+^k, k = 1, 2, \dots, m \},$$

$$\tau = (u'_{q_1 q_2}^-, (q_1, q_2) \in \Xi_-^k, u'_{q_1 q_2}^+, (q_1, q_2) \in \Xi_+^k, k = 1, \dots, m),$$

$$\Xi_-^k = \{(i, j) : |z_i - z_j| < h_i + h_j + \rho_{ij}^-, i < j \in I^k \},$$

$$\Xi_+^k = \{(i, j) : \rho_{ij}^+ < \varpi, i < j \in I^k \},$$

$$\Upsilon_{q_1 q_2}^{-j} \in \{ \widehat{\Phi}_{q_1 q_2}^{-j}, \widehat{\Phi}'_{q_1 q_2}^{-j} \}, (q_1, q_2) \in \Xi_-^k,$$

$$\Upsilon_{q_1 q_2}^{+j} \in \{ \widehat{\Phi}_{q_1 q_2}^{+j}, \widehat{\Phi}'_{q_1 q_2}^{+j} \}, (q_1, q_2) \in \Xi_+^k,$$

$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2})$ – це функція, яка відповідає за обмеження відстані між об'єктами \mathbb{T}_{q_1} та \mathbb{T}_{q_2} , $u_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1}, z_{q_1}, \theta_{q_1})$, $u_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2}, z_{q_2}, \theta_{q_2})$,

$$\Upsilon_2^*(u, p) = \min\{\Upsilon_2^{*j}(u, p), j \in J_m\}, \quad \Upsilon_2^{*j}(u, p) = \min\{\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}, p), q_i \in J_n^j\}, \quad (2.31)$$

$\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}, p)$ – це функція, яка описує обмеження відстані для об'єктів \mathbb{T}_{q_i} і $\Omega^{*j} = \mathbb{R}^3 / \text{int } \Omega^j$.

Таким чином, у виразах (2.30), (2.31) для фіксованих z_{q_1} і z_{q_2} , маємо:

$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2})$ є ρ -функцією [129] $\Phi_{q_1 q_2}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2})$ для об'єктів \mathbb{T}_{q_1} та \mathbb{T}_{q_2} або квазі- ρ -функцією [25, 128] $\Phi_{q_1 q_2}^{\mathbb{T}\mathbb{T}}(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_1 q_2})$ для об'єктів \mathbb{T}_{q_1} та \mathbb{T}_{q_2} ; $\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i})$ є ρ -функцією $\Phi_{q_i}^{\mathbb{T}\Omega^{*j}}(u_{q_i})$ для об'єктів \mathbb{T}_{q_i} і Ω^{*j} .

У (2.29) функція $\mu(u, p) = \min\{\mu_s(u, p), s = 1, 2, 3\}$ відповідає за поведінкові обмеження, де

$$\mu_1(u, p) = \min\{\mu_{11}(u, p), \mu_{12}(u, p), \mu_{13}(u, p)\},$$

$$\mu_2(u, p) = \min\{\mu_{21}(u, p), \mu_{22}(u, p), \mu_{23}(u, p)\},$$

$$\mu_3(u, p) = \min\{\mu_{31}(u, p), \mu_{32}(u, p), \mu_{33}(u, p)\}.$$

У (2.29) $\zeta(u, p) \geq 0$ є системою додаткових обмежень на метричні характеристики контейнера Ω та параметри розміщення об'єктів.

Залежно від вибору цільових функцій $F_1(p, u), F_2(p, u), \dots, F_k(p, u)$ може бути згенеровано різні варіанти математичної моделі (2.28) – (2.29).

Розглянемо кілька варіантів математичної моделі (2.28) – (2.29):

$$a) F(p, u) = d = (x_s(p, u) - x_e)^2 + (y_s(p, u) - y_e)^2 + (z_s(p, u) - z_e)^2,$$

$$W_1 = \{(p, u, \tau) \in \mathbb{R}^\xi : Y_1(u, \tau) \geq 0, Y_2(p, u) \geq 0, \mu_2(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0\};$$

$$b) F(p, u, \tau) = \alpha_1 F_1(p, u, \tau) + \alpha_2 F_2(p, u), F_1(p, u, \tau) = f(p), F_2(p, u) = d,$$

$$W_2 = \{(p, u, \tau) \in \mathbb{R}^\xi : Y_1(u, \tau) \geq 0, Y_2(p, u) \geq 0, \mu_2(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0\};$$

$$c) F(p, u) = \alpha_1 F_1(p, u, \tau) + \alpha_2 F_2(p, u) + \alpha_3 F_3(p, u),$$

$$F_1(p, u) = J_X(p, u), F_2(p, u) = J_Y(p, u), F_3(p, u) = J_Z(p, u),$$

$$W_3 = \{(p, u, \tau) \in \mathbb{R}^\xi : Y_1(u, \tau) \geq 0, Y_2(p, u) \geq 0, \mu_1(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0\}.$$

2.5.3 Стратегія розв'язання

Задача (2.28) – (2.29) є задачею нелінійного програмування. Її область допустимих розв'язків описується нерівностями з негладкими функціями.

Псевдонормалізовані (adjusted) phi-функції та псевдонормалізовані квазі-phi-функції у (2.29) складаються, як правило, з max- та min- операцій диференційованих функцій. В результаті множина допустимих рішень W не є опуклою, що призводить до появи багатьох локальних екстремумів.

Однією з важливих особливостей допустимої області (2.29) є те, що $W = W_1 \cup \dots \cup W_s \cup \dots \cup W_\eta$, де кожна підобласть W_s задається системою нерівностей з диференційованими функціями (див., наприклад, [131]).

Задачу (2.28) – (2.29) можна звести до наступної задачі оптимізації:

$$F(p^*, u^*, \tau^*) = \min \{F(p^{s*}, u^{s*}, \tau^{s*}), s = 1, 2, \dots, \eta\}, \quad (2.32)$$

де

$$F(p^{s*}, u^{s*}, \tau^{s*}) = \min_{(p, u, \tau) \in W_s} F(p, u, \tau). \quad (2.33)$$

Модель вимагає пошуку локальних екстремумів у всіх підобластях та забезпечує загальний мінімум, якщо кожна підзадачу (2.33) можна розв'язати оптимально. Підзадачі (2.33) є задачами нелінійного програмування, і їх можна безпосередньо розв'язати (принаймні теоретично) за допомогою глобальних NLP-солверів.

Виходячи з особливостей ρ -функцій, квазі- ρ -функцій та форм механічних обмежень, задіяних у (2.29), допустиму область задачі (2.33) можна описати системою нерівностей з диференційованими функціями.

Для розв'язання кожної задачі нелінійного програмування (2.33) поєднуємо стратегію мультистарта з розумним вибором початкових точок, залежно від форми цільової функції та типів обмежень, використаних у (2.29).

З метою зменшення обчислювальних витрат (часу та пам'яті) використовуємо модифікацію алгоритму декомпозиції, запропоновану в [130]. Алгоритм дозволяє зменшити кожен задачу (2.33) великої розмірності до послідовності підзадач нелінійного програмування меншої розмірності.

На рис. 2.9 наведено кілька прикладів локальних оптимальних упаковок тривимірних об'єктів з різними цільовими функціями, умовами балансу та з урахуванням допустимих відстаней.

Цікавим напрямом подальших досліджень є вивчення багатокритеріального аналога задачі (2.28) – (2.29). Насправді цільову функцію (2.28) можна розглядати як лінійну комбінацію різних цілей $F_k(p, u, \tau)$ з фіксованими вагами. Аналіз багатокритеріальної постановки цієї задачі є дійсно складною метою, оскільки навіть для фіксованих ваг однокритеріальну задачу розв'язати важко. Наступний підрозділ присвячено розгляду цього питання.

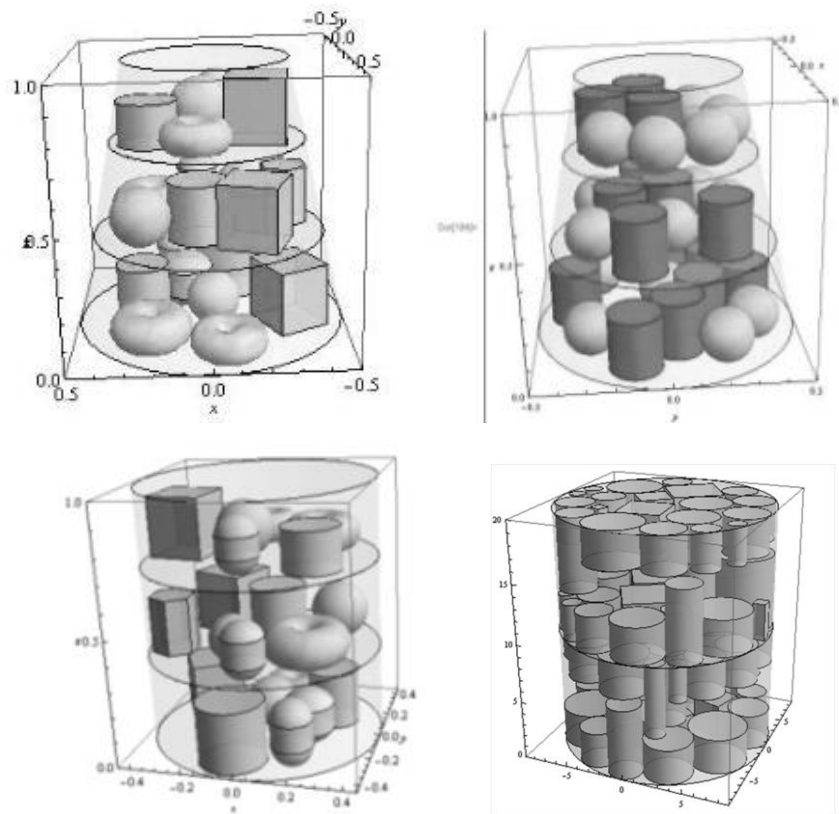


Рисунок 2.9. Локально оптимальні упаковки 3D об'єктів в усіченому конусі і циліндрі з умовами балансування

2.6 Багатокритеріальна задача рівноважної компоновки

В даному підрозділі розглядається задача балансної компоновки 3D-об'єктів в наступному формулюванні: розмістити 3D-об'єкти в контейнері з урахуванням мінімально та максимально допустимих відстаней між об'єктами та умови балансу, так щоб цільова функція досягала свого екстремального значення. При цьому задача балансної 3D-компоновки формулюється у вигляді багатокритеріальної задачі оптимізації – у подальшому багатокритеріальна задача рівноважної компоновки (MBLP).

Для аналітичного опису обмежень неперетину, включення з урахуванням допустимих відстаней застосовуються класи псевдонормалізованих ρ -функцій та псевдонормалізованих квазі- ρ -функцій. Умови балансу (рівновага, моменти інерції та обмеження

стабільності) формалізовано в [105]. В якості контейнера розглядаються круговий циліндр, параболоїд або усічений конус. Об'єктами розміщення є циліндри, сфери, тори, сферичні циліндри та прямі опуклі призми. Побудовано точну математичну модель задачі у вигляді NLP задачі.

2.6.1 Постановка задачі MBLP

Нехай $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) \geq 0\}$ - контейнер висотою H . Розглядаємо такі типи контейнерів: 1) $\Omega \equiv \mathbf{C}$, \mathbf{C} являє собою прямий круговий циліндр з основою радіуса R , $G(x, y, z) = \min\{-x^2 - y^2 + R^2, -z + H, z\}$; 2) $\Omega \equiv \mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}$ є параболоїдом обертання з основою радіуса $R = \sqrt{H}$, $G(x, y, z) = \min\{-z - x^2 - y^2 + H, z\}$; 3) $\Omega \equiv \mathbf{E}$, \mathbf{E} являє собою прямий круговий затуплений конус з нижньою і верхньою основами радіусів R_1 та $R_2 < R_1$ відповідно,

$$G(x, y, z) = \min\{-z - H(\sqrt{x^2 + y^2} - R_1)/(R_1 - R_2), -z + H, z\}.$$

Припустимо, що Ω ділиться круглими стелажми S_k , $k = 1, 2, \dots, m+1$, на підконтейнери Ω^k , $k = 1, 2, \dots, m$. Вважаємо, що S_1 є базою Ω . Між стелажми S_k і S_{k+1} відстань t_k задано.

Сімейство $A = \{A_i, i \in I_n\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, включає в себе такі форми об'єктів: кулі S_i радіуса r_i ; прямі кругові циліндри C_i радіуса r_i висотою $2h_i$; тори T_i з метричними характеристиками (r_i, h_i) , де r_i - відстань від центру породжуючого кола до осі обертання, $2h_i$ є висотою T_i , h_i - радіус утворюючого кола; сфероциліндри S_{C_i} з метричними характеристиками (l_i, r_i, h_i) , де l_i - висоти кульових сегментів, r_i - радіус і $2h_i$ - висота циліндра; прямі правильні призми та кубоїди K_i з метричними характеристиками $(h_i, \tilde{v}_{il},)$, де $2h_i$ - висота K_i , $\tilde{v}_{il} = (x_{il}, y_{il})$, $l = 1, \dots, s_i$, є

вершинами основи \mathbb{K}_i (яка являє собою опуклий багатокутник K_i), s_i – кількість вершин K_i .

Багатокритеріальна задача рівноважної компоновки (MBLP) полягає в наступному.

Упакувати 3D-об'єкти $A_i \in A$, $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, всередині контейнера Ω , так щоб вектор-функція цілі досягла екстремального значення з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

Обмеження розміщення в задачі MBLP генеруються умовами неперетинання об'єктів A_i, A_j , $i > j \in I_n$, які повинні бути розміщені всередині контейнера Ω , і включення об'єкту A_i в контейнер Ω , $i \in I_n$. Крім того, мінімальна ρ_{ij}^- і максимальна $\rho_{ij}^+ \geq \rho_{ij}^-$ допустимі відстані між об'єктами A_i, A_j , $i > j \in I_n$, можуть бути задані. Крім того, може бути визначена мінімально допустима відстань ρ_i^- між об'єктом $A_i \in A$, $i \in I_n$, і боковою поверхнею контейнера Ω . Без обмеження загальності встановлюємо $\rho_{ij}^- = 0$ (або $\rho_{ij}^+ = \varpi$) якщо мінімальна (або максимальна) допустима відстань між об'єктами A_i та A_j не задано, $i > j \in I_n$. Тут ϖ - задане досить велике число. Зокрема, умова $\rho_{ij}^+ = \rho_{ij}^-$ забезпечує розташування об'єктів A_i та A_j на точній відстані. Також встановлюємо $\rho_i^- = 0$, якщо мінімально допустима відстань між об'єктом A_i і боковою поверхнею контейнера Ω не задана.

Обмеження розміщення в задачі MBLP може бути представлено наступним чином: $\rho_{ij}^- \leq \text{dist}(A_i, A_j) \leq \rho_{ij}^+$, $i > j \in I_n$, і $\text{dist}(A_i, \Omega^*) \geq \rho_i^-$, $i = 1, \dots, n$, де $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega$.

Для аналітичного опису зазначених вище обмежень розміщення використовуємо метод ρ -функцій (див. підрозділ 1.4).

Розглянемо обмеження механічних характеристик системи Ω_A .

Обмеження рівноваги визначаються наступною системою нерівностей:

$$\begin{aligned}\mu_{11}(u) &= \min\{-(x_s(u) - x_e) + \Delta x_e, (x_s(u) - x_e) + \Delta x_e\} \geq 0 \\ \mu_{12}(u) &= \min\{-(y_s(u) - y_e) + \Delta y_e, (y_s(u) - y_e) + \Delta y_e\} \geq 0, \\ \mu_{13}(u) &= \min\{-(z_s(u) - z_e) + \Delta z_e, (z_s(u) - z_e) + \Delta z_e\} \geq 0,\end{aligned}$$

де (x_e, y_e, z_e) – це очікувана позиція O_s , $(\Delta x_e, \Delta y_e, \Delta z_e)$ є допустимими відхиленнями від точки (x_e, y_e, z_e) .

Обмеження моментів інерції визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}\mu_{21}(u) &= -J_X(u) + \Delta J_X \geq 0, \\ \mu_{22}(u) &= -J_Y(u) + \Delta J_Y \geq 0, \\ \mu_{23}(u) &= -J_Z(u) + \Delta J_Z \geq 0,\end{aligned}$$

де $J_X(u), J_Y(u), J_Z(u)$ – моменти інерції системи Ω_A відносно осей системи координат O_sXYZ , $\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z$ є допустимими значеннями для $J_X(u), J_Y(u), J_Z(u)$, де

$$J_X(u) = J_{x_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \cos^2 \theta_i + J_{y_i} \sin^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - M(y_s^2 + z_s^2),$$

$$J_Y(u) = J_{y_0} + \sum_{i=1}^n (J_{x_i} \sin^2 \theta_i + J_{y_i} \cos^2 \theta_i) + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i - M(x_s^2 + z_s^2)$$

$$J_Z(u) = \sum_{i=0}^n J_{z_i} + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - M(x_s^2 + y_s^2),$$

$J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}$ – моменти інерції контейнера Ω відносно осей системи координат $Oxyz$, $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$, $i \in I_n$, – моменти інерції об'єкта A_i відносно осей системи координат $O_i x_i y_i z_i$.

Обмеження стабільності визначаються наступною системою нерівностей:

$$\mu_{31}(u) = \min\{-J_{XY}(u) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(u) + \Delta J_{XY}\} \geq 0,$$

$$\mu_{32}(u) = \min\{-J_{YZ}(u) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(u) + \Delta J_{YZ}\} \geq 0,$$

$$\mu_{33}(u) = \min\{-J_{XZ}(u) + \Delta J_{XZ}, J_{XZ}(u) + \Delta J_{XZ}\} \geq 0,$$

де $J_{XY}(u), J_{YZ}(u), J_{XZ}(u)$ є моменти інерції системи Ω_A відносно осей системи координат O_sXYZ , $\Delta J_{XY}, \Delta J_{YZ}, \Delta J_{XZ}$ є допустимими значеннями для $J_{XY}(u), J_{YZ}(u), J_{XZ}(u)$, відповідно,

$$J_{XY}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{x_i} - J_{y_i}) \sin 2\theta_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M x_s y_s,$$

$$J_{YZ}(u) = \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M y_s z_s, \quad J_{XZ}(u) = \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M x_s z_s.$$

Умови балансу задачі MBLP визначаємо як систему нерівностей $\mu_1(u) \geq 0, \mu_2(u) \geq 0, \mu_3(u) \geq 0$,

де

$$\mu_1(u) = \min\{\mu_{11}(u), \mu_{12}(u), \mu_{13}(u)\}, \quad (2.34)$$

$$\mu_2(u) = \min\{\mu_{21}(u), \mu_{22}(u), \mu_{23}(u)\}, \quad (2.35)$$

$$\mu_3(u) = \min\{\mu_{31}(u), \mu_{32}(u), \mu_{33}(u)\}. \quad (2.36)$$

Тут $O_s = (x_s, y_s, z_s)$ є центром мас системи Ω_A , $x_s(u) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$,

$$y_s(u) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_s(u) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i - \text{маса системи } \Omega_A.$$

2.6.2 Математична модель задачі MBLP

Математична модель задачі MBLP може бути представлена у формі

$$\text{extr}F(p, u) \text{ s.t. } (u, p) \in W \quad (2.37)$$

$$W = \{(u, p) \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon(u, p) \geq 0, \mu(u, p) \geq 0, \zeta \geq 0\}, \quad (2.38)$$

де $F(p, u) = (F_1(p, u), F_2(p, u), \dots, F_k(p, u))$,

$\Upsilon(u, p)$ описує обмеження розміщення, $\Upsilon(u, p) = \min\{\Upsilon_1(u), \Upsilon_2(u, p)\}$,

$\Upsilon_1(u)$ відповідає за обмеження неперетинання,

$\Upsilon_2(u, p)$ відповідає за обмеження включення,

$\mu(u) = \min\{\mu_s(u), s \in U_t\}$ відповідає за умови балансу, $U_t \in P(U)$,

$P(U)$ – потужність множини $U = \{1, 2, 3\}$, функції $\mu_1(u), \mu_2(u), \mu_3(u)$ задані співвідношеннями (2.34) – (2.36), $\zeta \geq 0$ є системою додаткових обмежень метричних характеристик контейнера Ω та параметрів розміщення об'єктів. Якщо $s = \emptyset$, тобто умови балансу не беруть участь у (2.38), тоді цільова функція $F(u)$ відповідає механічним характеристикам системи Ω_A .

Залежно від різних комбінацій цільових функцій $F_1(p, u), F_2(p, u), \dots, F_k(p, u)$ можуть бути сформовані різні варіанти математичної моделі (2.37) – (2.38). Найбільш часто зустрічаються цільові функції, знайдені у відповідних публікаціях [105, 120, 123, 132–134], такі:

1) розмір контейнера Ω ; 2) відхилення центру мас системи Ω_A від заданої точки; 3) моменти інерції системи Ω_A .

Розглянемо деякі реалізації моделі (2.37) – (2.38):

$$\bullet F(p, u) = p \text{ s.t. } (p, u) \in W \subset \mathbb{R}^\xi,$$

$$W = \{(p, u) \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u) \geq 0, \Upsilon_2(p, u) \geq 0, \mu(p, u) \geq 0, \zeta \geq 0\}$$

$$\bullet F(u) = d, (p, u) \in W \subset \mathbb{R}^\xi,$$

$$d = (x_s(u) - x_e)^2 + (y_s(u) - y_e)^2 + (z_s(u) - z_e)^2,$$

$$W = \{(p, u) \in \mathbb{R}^\xi : \Upsilon_1(u) \geq 0, \Upsilon_2(p, u) \geq 0, \mu_2(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0, \zeta \geq 0\};$$

$$\bullet F(p, u) = (F_1(p, u) = p, F_2(p, u) = d), (p, u) \in W \subset \mathbb{R}^\xi,$$

$$W = \{(p, u) \in \mathbb{R}^\xi : Y_1(u) \geq 0, Y_2(p, u) \geq 0, \mu_2(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0, \zeta \geq 0\};$$

$$\bullet F(p, u) = (F_1(p, u) = J_X(p, u), F_2(p, u) = J_Y(p, u), F_3(p, u) = J_Z(p, u)) \\ (p, u) \in W \subset \mathbb{R}^\xi,$$

$$W = \{(p, u) \in \mathbb{R}^\xi : Y_1(u) \geq 0, Y_2(p, u) \geq 0, \mu_1(p, u) \geq 0, \mu_3(p, u) \geq 0, \zeta \geq 0\}.$$

2.6.3 Результати обчислювальних експериментів

Приклад 1. Нехай $\Omega \equiv \mathbf{E}$, $m = 2$, $H = 0.6, R_1 = 0.5, R_3 = 0.3$,
 $A = \{S_1, S_2, C_3, C_4, T_5, T_6, S_{C7}, S_{C8}, K_9, K_{10}\}$, $A_-^1 = \{S_1, C_3, T_5, S_{C7}, K_9\}$,
 $A_+^2 = \{S_2, C_4, T_6, S_{C8}, K_{10}\}$, $\rho_{ij}^- = 0.03, i < j \in I_{10}$, $\rho_{39}^+ = 0.1, \rho_{26}^+ = 0.08$,
 $(x_e, y_e, z_e) = (0, 0, 0.275)$, $t_1 = 0.3, n = 10$,

$\{z_i, i = 1, \dots, 10\} = \{0.19, 0.4, 0.19, 0.41, 0.24, 0.35, 0.19, 0.39, 0.18, 0.42\}$, $\{$
 $m_i, i = 1, \dots, 10\} = \{27.8764, 20.944, 34.5575, 16.9332, 28.4245, 22.2066, 17.2159,$
 $19.2265, 38.4, 19.9532\}$, $r_1 = 0.11, r_2 = 0.1, r_3 = 0.1, h_3 = 0.11, r_4 = 0.07,$
 $h_4 = 0.11, r_5 = 0.08, h_5 = 0.06, r_6 = 0.09, h_6 = 0.05, r_7 = 0.08, h_7 = 0.05,$
 $l_7 = 0.06, h_8 = 0.06, l_8 = 0.03, s_9 = 4, h_9 = 0.12, \tilde{v}_{91} = (0.08, 0.1), \tilde{v}_{92} = (0.08,$
 $0.1), \tilde{v}_{93} = (-0.08, -0.1), \tilde{v}_{94} = (-0.08, 0.1), s_{10} = 6, h_{10} = 0.12,$
 $\tilde{v}_{(10)1} = (0.04, 0.07), \tilde{v}_{(10)2} = (0.08, 0), \tilde{v}_{(10)3} = (0.04, -0.07), \tilde{v}_{(10)4} = (-0.04, -0.07),$
 $\tilde{v}_{(10)5} = (-0.08, 0), \tilde{v}_{(10)6} = (-0.04, 0.07).$

Локальне оптимальне рішення, знайдене NLP-солвером CAS Math 9
(Рис. 2.10) є $F(u^*, u'^*) = 1.12726 \times 10^{-6}$.

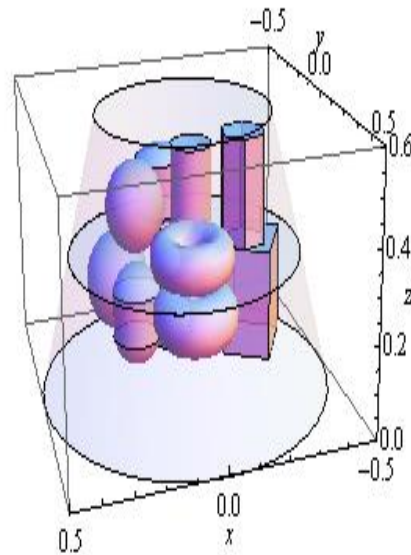


Рисунок 2.10 – Локальне оптимальне розміщення 3D-об'єктів в прикладі 1.

Приклад 2. Let $\Omega \equiv \mathbf{C}$, $m = 3$, $H = 1$, $R = 0.45$, $t_2 = 0.35$, $n = 20$,
 $A = \{S_i, i = 1, \dots, 4, C_i, i = 5, \dots, 8, T_i, i = 9 \dots 12, S_{C_i}, i = 13, \dots, 16,$
 $K_i, i = 17, \dots, 20\}$, $A_+^1 = \{S_1, C_5, C_6, T_9, S_{C_{14}}, P_{17}\}$, $A_+^2 = \{S_2, S_3, C_7, T_{10},$
 $S_{C_{15}}, P_{18}, K_{20}\}$, $A_+^3 = \{S_4, C_8, T_{11}, T_{12}, S_{C_{16}}, P_{19}\}$, $U_t = \emptyset$, $\rho_{ij}^- = 0.02$,
 $i < j = 1, \dots, 20$, $(x_e, y_e, z_e) = (0, 0, 0.5)$, $\{z_i, i = 1, \dots, 20\} = \{0.1, 0.44, 0.46, 0.81,$
 $0.11, 0.12, 0.46, 0.78, 0.06, 0.425, 0.76, 0.77, 0.11, 0.13, 0.46, 0.81, 0.12, 0.47,$
 $0.82, 0.46\}$, $\{m_i, i = 1, \dots, 20\} = \{20.944, 15.2681, 27.8764, 34.5575, 63.7115,$
 $41.8146, 30.4106, 28.4245, 49.9649, 24.8714, 38.6888, 26.2637, 20.7764,$
 $17.2159, 16.8756, 52.8, 52.8, 52.8, 23.1489\}$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.09$, $r_3 = 0.11$,
 $r_4 = 0.11$, $r_5 = 0.1$, $h_5 = 0.11$, $h_6 = 0.12$, $r_7 = 0.11$, $r_8 = 0.11$, $h_8 = 0.08$,
 $r_9 = 0.08$, $h_9 = 0.07$, $r_{10} = 0.09$, $h_{10} = 0.075$, $r_{11} = 0.07$, $h_{11} = 0.06$,
 $r_{12} = 0.08$, $h_{12} = 0.07$, $r_{13} = 0.1$, $h_{13} = 0.05$, $l_{13} = 0.07$, $r_{14} = 0.05$, $h_{14} = 0.05$
, $l_{14} = 0.08$, $r_{15} = 0.08$, $h_{15} = 0.05$, $l_{15} = 0.06$, $r_{16} = 0.08$, $h_{16} = 0.04$,
 $l_{16} = 0.07$, $s_i = 4$, $\tilde{v}_{i1} = (-0.11, -0.1)$, $\tilde{v}_{i2} = (0.11, -0.1)$, $\tilde{v}_{i3} = (0.11, 0.1)$,
 $\tilde{v}_{i4} = (-0.11, 0.1)$, $h_i = 0.12$, $i = 17, 18, 19$, $s_{20} = 6$, $\tilde{v}_{(20)1} = (0.045, 0.078)$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{(20)2} &= (0.09, 0), & \tilde{v}_{(20)3} &= (0.045, -0.078), & \tilde{v}_{(20)4} &= (-0.045, -0.078), \\ \tilde{v}_{(20)5} &= (-0.09, 0), & \tilde{v}_{(20)6} &= (-0.045, 0.078), & h_{20} &= 0.11. \end{aligned}$$

Локальне оптимальне рішення, знайдене NLP-солвером CAS Math 9 є $F(u^*, u'^*) = 0.001911$ (Рис. 2.11).

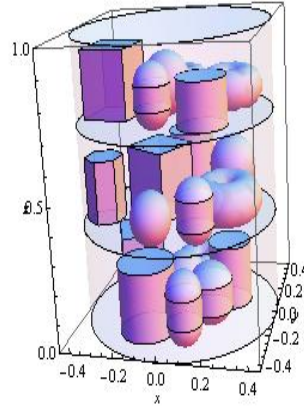


Рисунок 2.11 – Локальне оптимальне розміщення 3D-об'єктів в прикладі 2.

Приклад 3. Let $\Omega \equiv \mathbf{C}$, $m = 2$, $H = 20$, $R = 8.8$, $t_1 = 10$, $n = 80$,
 $A = \{C_i, i = 1, \dots, 64, K_i, i = 65, \dots, 80\}$, $A_+^1 = \{C_i, i = 1, \dots, 16, K_i, i = 65, \dots, 68\}$,
 $A_-^1 = \{C_i, i = 17, \dots, 32, K_i, i = 69, \dots, 72\}$, $A_-^2 = \{C_i, i = 49, \dots, 64, K_i, i = 77,$
 $\dots, 80\}$, $A_+^2 = \{C_i, i = 33, \dots, 48, K_i, i = 73, \dots, 76\}$, $\{r_i, i = 1, \dots, 64\} = \{2.0, 2.4, 0.8,$
 $1.1, 1.3, 0.7, 0.7, 1.5, 2.4, 1.8, 1.5, 1.7, 1.7, 1.4, 1.6, 2.1, 2.0, 2.4, 0.8, 1.1, 1.3, 0.7,$
 $0.7, 1.5, 2.4, 1.8, 1.5, 1.7, 1.7, 1.4, 1.6, 2.1, 2.0, 2.4, 0.8, 1.1, 1.3, 0.7, 0.7, 1.5, 2.4,$
 $1.8, 1.5, 1.7, 1.7, 1.4, 1.6, 2.1, 2.0, 2.4, 0.8, 1.1, 1.3, 0.7, 0.7, 1.5, 2.4, 1.8, 1.5, 1.7,$
 $1.7, 1.4, 1.6, 2.1\}$, $s_i = 4$, $i = 65, \dots, 80$, $\tilde{v}_{i1} = (-1.8, -1.8)$, $\tilde{v}_{i2} = (1.8, -1.8)$,
 $\tilde{v}_{i3} = (1.8, 1.8)$, $\tilde{v}_{i4} = (-1.8, 1.8)$, $i = 65, 69, 73, 77$, $\tilde{v}_{i1} = (-0.5, -0.5)$,
 $\tilde{v}_{i2} = (0.5, -0.5)$, $\tilde{v}_{i3} = (0.5, 0.5)$, $\tilde{v}_{i4} = (-0.5, 0.5)$, $i = 66, 70, 74, 78$,
 $\tilde{v}_{i1} = (-2.1, -2.1)$, $\tilde{v}_{i2} = (2.1, -2.1)$, $\tilde{v}_{i3} = (2.1, 2.1)$, $\tilde{v}_{i4} = (-2.1, 2.1)$,
 $i = 67, 71, 75, 79$, $\tilde{v}_{i1} = (-1.3, -1.3)$, $\tilde{v}_{i2} = (1.3, -1.3)$, $\tilde{v}_{i3} = (1.3, 1.3)$,
 $\tilde{v}_{i4} = (-1.3, 1.3)$, $i = 68, 72, 76, 80$, $\{h_i, i = 1, \dots, 62\} = \{1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 3.0,$

1.5, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 3.0, 1.5, 3.0, 3.0, 1.5, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, 1.5, 1.5, 3.0, { $h_i, i=63, \dots, 80$ }={1.5}, { $m_i, i=1, \dots, 80$ }={86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20}.

Локальне оптимальне рішення, знайдене IPOPT є $F(u^*, u'^*) = 0.000000$
(Рис. 2.12).

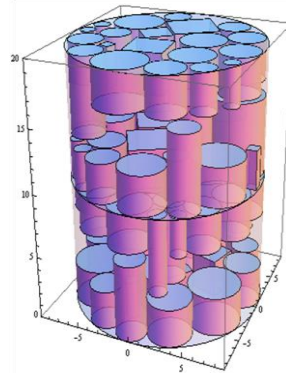


Рисунок 2.12 – Локальне оптимальне розміщення 3D-об'єктів в прикладі 3.

2.7 Висновки за другим розділом.

1. Досліджено задачу побудови рівноважної компоновки 3D-об'єктів в контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери. Побудовано математичну модель, що враховує не тільки геометричні обмеження та умови балансу, а й комбінаторні особливості задачі, пов'язані з необхідністю побудови розбиття множини розміщуваних об'єктів по підконтейнерах. Запропоновано стратегію розв'язання, яка включає процедури: генерації кортежів розбиття; побудови стартових точок з області допустимих рішень; локальної оптимізації. Даний підхід використовує принцип мультистарту для пошуку «хороших» допустимих розв'язків.

Результати чисельних експериментів показали ефективність запропонованого підходу для розглянутого класу задач рівноважної компоновки.

2. Проаналізовано задачу оптимального упакування опуклих 3D-об'єктів у контейнер з опорними полицями (стелажами) з урахуванням обмежень розміщення та умови балансу. Для аналітичного опису обмежень розміщення використовується метод ρ -функцій.

Побудовано загальну математичну модель комбінаторної задачі рівноважної компоновки зі спеціальними геометричними та балансними умовами. Залежно від видів цільових функцій, форм об'єктів та контейнерів, комбінацій геометричних та балансових обмежень можуть створюватися різні варіанти задачі пакування.

Пропонується стратегія розв'язання на основі методу мультистарта і передбачає використання допустимої стартової точки та алгоритму локальної оптимізації. Зокрема, у випадку пакування циліндрів задача зводиться до задачі пакування кіл.

3. Сформульовано багатокритеріальну задачу оптимізації розміщення 3D-об'єктів у контейнер з урахуванням обмежень розміщення (неперетинання, включення, відстань) та балансу (рівноваги, інерції та стабільності) - багатокритеріальну задачу рівноважної компоновки (MBLP). Для аналітичного опису обмежень розміщення використано метод ρ -функцій. Побудовано математичну модель задачі у вигляді багатокритеріальної задачі оптимізації. Представлено варіанти задачі MBLP залежно від форм цільових функцій, форм об'єктів і контейнерів та комбінацій обмежень.

Результати розділу опубліковано в роботах [41], [43], [46], [47], [49], [51], [53]–[56], [58].

3 ОПТИМІЗОВАНА УПАКОВКА ГРУП ОБ'ЄКТІВ У ПРЯМОКУТНОМУ КОНТЕЙНЕРІ

Досліджується проблема пакування (компонування) для набору груп, що складаються з опуклих тривимірних об'єктів, основами яких є опуклі двовимірні фігури (наприклад, кола, еліпси або опуклі багатокутники). Ця проблема зводиться до двовимірної задачі розміщення. Групи об'єктів повинні бути упаковані в заданий прямокутний контейнер, без перетину між об'єктами в кожній групі. Кожна група об'єктів представлена опуклою оболонкою об'єктів, що утворюють групу. Дві групи об'єктів не перетинаються, якщо не перетинаються їх опуклі оболонки. Вважається, що група повністю розміщена в контейнері, якщо це справедливо для її опуклої оболонки. Усі об'єкти в групі мають однакову форму (допускаються різні розміри) і їх можна неперервно переміщувати та обертати. Задачею оптимізації пакування є побудова максимально розрідженої компоновки для груп об'єктів, з урахуванням обмежень їх неперетинання та включення у контейнер. Тут термін «розріджений» означає, що групи досить віддалені одна від одної. Представлені нові квазі- ρ -функції та ρ -функції для аналітичного опису обмежень неперетинання, включення у контейнер та обмежень на відстані між групами об'єктів. Задача компоновки формулюється як нелінійна неопукла неперервна задача оптимізації. Розроблено новий алгоритм пошуку локально-оптимальних розв'язків. Для демонстрації ефективності запропонованого підходу представлено результати обчислень. Це дослідження мотивовано проблемою завантаження контейнера, але подібні задачі виникають і в інших галузях науки і техніки.

3.1 Задача компоновки груп об'єктів

Як відомо [117], задачі пакування об'єктів у контейнер є NP-складними. Задача компоновки груп об'єктів характерна для логістики

(транспортування рулонів шпалер, труб, коробок, відер для фарби тощо), а також має важливе застосування в інформатиці, промислового машинобудуванні, виробничих процесах, охороні здоров'я, виборі портфелю проєктів, нанофізиці, сільському господарстві (див., наприклад, [135] та посилання в них).

В задачах пакування вивчались різні форми об'єктів. Зокрема, задачі розкрою та пакування для еліпсів представлені в [25, 136–138], задачі пакування кіл досліджені в [26, 139–145], задачі пакування для опуклих багатокутників розглянуті в [143–148]. Роботи [21, 129, 149–151] присвячені нерегулярній упаковці об'єктів довільної форми.

У багатьох випадках об'єкти не є незалежними, і їх доводиться об'єднувати в групи об'єктів, що не перетинаються. Це характерно, наприклад, для проблеми завантаження контейнера [152], коли об'єкти у великому морському контейнері можуть утворювати різні групи відповідно до типу об'єктів (подібні фігури, деталі однієї машини). Аналогічним чином, групи можуть бути сформовані відповідно до постачальника або клієнта (кінцевого пункту призначення) для полегшення завантаження або розвантаження контейнера.

Хоча групи (кількість об'єктів та їх форми), як правило, заздалегідь визначено, загальна форма групи об'єктів часто не вказується. Розглядаючи групу як набір об'єктів, поміщених у гнучкий «мішок», визначаємо форму групи як опуклу оболонку множини об'єктів у групі. Відзначимо, що об'єкти не перетинаються, і форма групи (опукла оболонка) залежить від розташування об'єктів у групі.

У цьому розділі передбачається однорідність груп, що складаються з однакових форм (допускаються різні розміри). Задано кількість груп, а також кількість об'єктів та їх форми та розміри. Форма групи представлена опуклою оболонкою об'єктів групи. Допустиме розташування груп повинно відповідати наступним умовам: об'єкти в групі взаємно не перетинаються;

групи об'єктів взаємно не перетинаються та не перетинаються з доповненням до прямокутного контейнера.

Для оптимізації пакування груп об'єктів можна використовувати різні цілі. Наприклад, можна шукати найбільш щільну компоновку, при якій фіксується один розмір прямокутного контейнера і мінімізується інший розмір до можливості здійснення компоновки груп об'єктів. Навпаки, можна зафіксувати обидва розміри контейнера і шукати „найрідкішу” схему, яка максимізує певну відстань між групами об'єктів. Ця мета мотивована необхідністю більшого простору між групами для полегшення доступу для їх завантаження / розвантаження, який розглядається у цій роботі.

Сформулюємо постановку задачі.

Нехай $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w\}$ – прямокутна область (контейнер) і $T_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$, – упорядкований набір опуклих об'єктів. Кожен об'єкт T_i визначається його метричними характеристиками. Зокрема, еліпс E_i визначається його піввісями a_i та b_i , коло C_i визначається його радіусом r_i , опуклий багатокутник K_i визначається його вершинами $p_{ik} = (p_{ik}^x, p_{ik}^y), k = 1, \dots, l_i$.

Положення об'єкта T_i характеризується вектором змінних параметрів розміщення $u_i = (v_i, \theta_i)$, де $v_i = (x_i, y_i)$ – вектор трансляції, θ_i – кут повороту. Центр об'єкта збігається з початком його локальної системи координат. Об'єкт T_i , повернутий на кут θ_i і трансльований на вектор v_i визначається як $T_i(u_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = v_i + M(\theta_i) \cdot p^0, \forall p^0 \in T_i^0\}$, де T_i^0 позначає нетрансльований і не повернений об'єкт T_i ,

$M(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ – стандартна матриця обертання.

Зауваження. Положення кола C_i характеризується вектором руху $u_i = (v_i, 0) = (x_i, y_i, 0)$.

Визначається група об'єктів, що мають однакову форму. Впорядкований набір об'єктів T_i , $i=1, \dots, n$, розділений на N груп $\Lambda_1 = \{T_1, \dots, T_{n_1}\}$, $\Lambda_2 = \{T_{n_1+1}, \dots, T_{n_2}\}$, \dots , $\Lambda_N = \{T_{n_{N-1}+1}, \dots, T_n\}$ за допомогою наборів індексів $\Xi_1 = \{1, \dots, n_1\}$, $\Xi_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$, \dots , $\Xi_N = \{n_{N-1} + 1, \dots, n\}$, $n = \sum_{q=1}^N m_q$, де $m_q = \text{card}(\Xi_q)$, $q \in \{1, 2, \dots, N\} = J_N$.

Введемо вектори параметрів розміщення груп $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ у вигляді $z_1 = (u_1, \dots, u_{n_1})$, $z_2 = (u_{n_1+1}, \dots, u_{n_2})$, \dots , $z_N = (u_{n_{N-1}+1}, \dots, u_n)$ і використаємо позначення $\Lambda_q(z_q)$ для групи Λ_q , що включає рухомі об'єкти $T_i(u_i)$, $i \in \Xi_q$.

З кожною групою $\Lambda_q(z_q) = \bigcup_{i \in \Xi_q} T_i(u_i)$ пов'язується опукла оболонка об'єктів $T_i(u_i)$, $i \in \Xi_q$, що позначається як $\widehat{\Lambda}_q(z_q) = \text{conv} \Lambda_q(z_q)$, $q \in J_N$.

В цьому розділі використовуються такі визначення: 1) дві групи $\Lambda_q(z_q)$ і $\Lambda_g(z_g)$ не перетинаються одна з одною, якщо їх опуклі оболонки $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$ не перетинаються, $q > g \in J_N$; 2) група $\Lambda_q(z_q)$ належить контейнеру Ω , якщо її опукла оболонка $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ належить контейнеру Ω , $q \in I_N$.

Задача компоновки груп об'єктів (Group Layout Problem, GLP). Розмістити набір груп $\Lambda_q(z_q)$, $q \in J_N$, достатньо віддалено одну від одної в прямокутному контейнері Ω , так що

$$\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) = \emptyset, \text{ для } i > j, (i, j) \in \Sigma_q \times \Sigma_q, q \in J_N, \quad (3.1)$$

$$\text{int } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \text{int } \widehat{\Lambda}_g(z_g) = \emptyset, \text{ для } q > g \in J_N, \quad (3.2)$$

$$\widehat{\Lambda}_q(z_q) \subset \Omega \text{ для кожного } q \in I_N. \quad (3.3)$$

Перше обмеження забезпечує неперетинання об'єктів однієї групи, друге гарантує неперетинання груп, третє обмеження представляє умови приналежності груп контейнеру Ω .

3.2 Засоби математичного моделювання компоновки груп об'єктів у прямокутному контейнері

У цьому підрозділі використовується метод ϕ -функцій (див. підрозділ 1.4). Представлено нові засоби для опису обмежень розміщення (3.2), (3.3) в аналітичному вигляді.

3.2.1 Неперетинання об'єктів у групі

Для опису обмеження (3.1) використовуємо ϕ -функції та квазі- ϕ -функції для пари різних форм опуклих об'єктів.

Розглянемо два об'єкти $T_i(u_i)$ та $T_j(u_j)$ які належать до групи $\Lambda_q(z_q)$, $i > j, (i, j) \in \Sigma_q \times \Sigma_q, q \in J_N$.

Згідно з визначенням ϕ -функції [122], маємо $\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j) \geq 0$, якщо і тільки, якщо $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) = \emptyset$.

З основної властивості квазі- ϕ -функції [25] випливає, що якщо $\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij}) \geq 0$ для деякого u_{ij} , то $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) = \emptyset$, де u_{ij} вектор додаткових змінних.

Зокрема, пропонуємо засоби опису обмеження неперетинання для пари еліпсів, кіл та опуклих багатокутників.

Квазі- ϕ -функція для еліпсів. Нехай $E_i(u_i)$ та $E_j(u_j)$ – еліпси, задані їх піввісями (a_i, b_i) та (a_j, b_j) , з параметрами розміщення $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ і $u_j = (x_j, y_j, \theta_j)$.

Квазі- ϕ -функція для $E_i(u_i)$ та $E_j(u_j)$ може бути визначена як

$$\Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j, u_{ij} = \phi_{ij}) = x'_{ij}(v_i, \phi_{ij}) - x'_{ji}(v_j, \phi_{ij}) - (d_{ij}(\theta_i, \phi_{ij}) + d_{ji}(\theta_j, \phi_{ij})),$$

де

$$x'_{ij}(v_i, \phi_{ij}) = x_i \cos \phi_{ij} - y_i \sin \phi_{ij}, \quad x'_{ji}(v_j, \phi_{ij}) = x_j \cos \phi_{ij} - y_j \sin \phi_{ij},$$

$$d_{ij}(\theta_i, \phi_{ij}) = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(\theta_i - \phi_{ij})},$$

$$d_{ji}(\theta_j, \phi_{ij}) = \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(\theta_j - \phi_{ij})},$$

$\phi_{ij} \in R^1$ – допоміжна змінна (кут між прямою, що проходить через початок глобальної системи координат XOY та віссю OX).

Phi- функція для кіл. Нехай $C_i(v_i)$ та $C_j(v_j)$ – кола, задані своїми радіусами r_i та r_j з параметрами розміщення $v_i = (x_i, y_i)$ та $v_j = (x_j, y_j)$.

Phi- функція для $C(v_i)$ та $C_j(v_j)$ має вигляд [122]

$$\Phi^{C_i C_j}(v_i, v_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2.$$

Квазі-phi-функція для опуклих багатогранників. Нехай опуклі багатокутники $K_i(u_i)$ та $K_j(u_j)$ визначені їх вершинами $p_{ik} = (p_{ik}^x, p_{ik}^y)$, $k = 1, \dots, l_i$, $p_{jk} = (p_{jk}^x, p_{jk}^y)$, $k = 1, \dots, l_j$, та параметрами розміщення $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ і $u_j = (x_j, y_j, \theta_j)$ та нехай $P(u_{ij}) = \{(x, y) : \mu_{ij} = \cos \phi_{ij} \cdot x + \sin \phi_{ij} \cdot y + \gamma_{ij} \leq 0\}$ – напівплощина.

Виходячи з [130] квазі-phi-функція для $K_i(u_i)$ та $K_j(u_j)$ може бути представлена у формі

$$\Phi^{K_i K_j}(u_i, u_j, u_{ij}) = \min \{ \Phi^{K_i P}(u_i, u_{ij}), \Phi^{K_j P^*}(u_j, u_{ij}) \},$$

де $u_{ij} = (\phi_{ij}, \gamma_{ij}) \in R^2$ є вектором допоміжних змінних,

$$\Phi^{K_i P}(u_i, u_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq l_i} \mu_{ij}(p_{ik})$$

є ϕ -функцією для $K_i(u_i)$ і $P(u_{ij})$ та

$$\Phi^{K_j P^*}(u_j, u_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq l_j} (-\mu_{ij}(p_{jk}))$$

є ϕ -функцією $K_j(u_j)$ та $P^*(u_{ij}) = R^2 \setminus \text{int } P(u_{ij})$.

3.2.2 Неперетинання груп об'єктів

Опишемо аналітично обмеження розміщення (3.2). З цією метою вводимо квазі- ϕ -функцію для двох конфігурацій $\hat{\Lambda}_q(z_q)$ та $\hat{\Lambda}_g(z_g)$.

Розглянемо розширення методу ϕ -функцій на опуклі оболонки груп об'єктів. Відмітимо, що опукла оболонка об'єктів у групі має змінну форму та змінні метричні характеристики, які залежать від змінних параметрів розміщення об'єктів у групі.

Нехай $P_{qg} = \{(x, y) : \mu_{qg}(x, y) = \cos \varphi_{qg} \cdot x + \sin \varphi_{qg} \cdot y + \gamma_{qg} \geq 0\}$ – напівплощина зі змінними параметрами розміщення $(\varphi_{qg}, \gamma_{qg})$.

Твердження 1. Неперервна і скрізь визначена функція

$$\Phi^{\hat{\Lambda}_q \hat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = \min \{ \Phi^{\hat{\Lambda}_q P_{qg}}(z_q, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), \Phi^{\hat{\Lambda}_g P_{qg}^*}(z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) \} \quad (3.4)$$

є квазі- ϕ -функцією для конфігурацій $\hat{\Lambda}_q(z_q)$ та $\hat{\Lambda}_g(z_g)$, де

$\Phi^{\hat{\Lambda}_q P_{qg}}(z_q, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ – ϕ -функція для конфігурації $\hat{\Lambda}_q(z_q)$ і напівплощини P_{qg} ,

$\Phi^{\hat{\Lambda}_g P_{qg}^*}(z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ – ϕ -функція для конфігурації $\hat{\Lambda}_g(z_g)$ і напівплощини $P_{qg}^* = R^2 \setminus \text{int } P_{qg}$.

Доведення. На основі властивостей квазі- ϕ -функції [25], визначеної для двох опуклих об'єктів, можна зробити висновок, що

$\Phi^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна відокремлена лінія $L_{qg} \{(x, y) : \mu_{qg}(x, y) = 0\}$ для деякого $\varphi_{qg}, \gamma_{qg}$, така що $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \subset P_{qg}$ та $\widehat{\Lambda}_g(z_g) \subset P_{qg}^*$ і таким чином $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \widehat{\Lambda}_g(z_g) = \emptyset$ для $q > g \in J_N$.

Визначимо ϕ -функцію для конфігурації $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і напівплощини P_{qg} в (3.4) у вигляді

$$\Phi^{\widehat{\Lambda}_q P_{qg}}(z_q, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = \min\{\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), i \in \Xi_q\}, \quad (3.5)$$

де $\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ є ϕ -функцією об'єкту $T_i(u_i)$ і напівплощини P_{qg} , $i \in \Xi_q$.

З властивостей опуклої оболонки $\Lambda_q(z_q) = \bigcup_{i \in \Xi_q} T_i(u_i)$ та характеристик розділювальної прямої між двома опуклими об'єктами, випливає, що:

1) $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap P_{qg} = \emptyset \Leftrightarrow \Lambda_q(z_q) \cap P_{qg} = \emptyset$ таким чином, $T_i(u_i) \cap P_{qg} = \emptyset$, для всіх $i \in \Xi_q$. З цього випливає, що $\min\{\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), i \in \Xi_q\} > 0$.

2) $\text{int } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \text{int } P_{qg} \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{int } \Lambda_q(z_q) \cap \text{int } P_{qg} \neq \emptyset$ таким чином існує принаймні один об'єкт $T_i(u_i)$, такий що $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } P_{qg} \neq \emptyset$, $i \in \Xi_q$. З цього випливає, що $\min\{\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), i \in \Xi_q\} < 0$.

3) $(\text{int } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \text{int } P_{qg} = \emptyset) \wedge (\text{fr } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \text{fr } P_{qg} \neq \emptyset) \Leftrightarrow$
 $(\text{int } \Lambda_q(z_q) \cap \text{int } P_{qg} = \emptyset) \wedge (\text{fr } \Lambda_q(z_q) \cap \text{fr } P_{qg} \neq \emptyset)$ і таким чином $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } P_{qg} = \emptyset$, для всіх $i \in \Xi_q$, таким чином існує принаймні один

об'єкт $T_i(u_i)$, такий що $fr T_i(u_i) \cap fr P_{qg} \neq \emptyset$, $i \in \Xi_q$. З цього випливає, що $\min\{\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), i \in \Xi_q\} = 0$.

Таким чином, функція $\Phi^{\widehat{\Lambda}_q P_{qg}}(z_q, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ визначена у (3.5) є рhi-функцією для конфігурації $\widehat{\Lambda}_q$ і напівплощини P_{qg} .

Так само рhi-функція для конфігурації $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$ і напівплощини $P_{qg}^* = R^2 \setminus \text{int } P_{qg}$ приймає форму

$$\Phi^{\widehat{\Lambda}_g P_{qg}^*}(z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = \min\{\Phi^{T_j P_{qg}^*}(u_j, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}), j \in \Xi_g\},$$

де $\Phi^{T_j P_{qg}^*}(u_j, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ є рhi-функцією об'єкту $T_j(u_j)$, $j \in \Xi_g$, і напівплощини P_{qg}^* .

Таким чином, $\Phi^{\widehat{\Lambda}_q P_{qg}}(z_q, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) \geq 0$, якщо і тільки якщо $\Phi^{T_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) \geq 0$ для кожного $i \in \Xi_q$.

Можна зробити висновок, що $\max_{(\varphi_{qg}, \gamma_{qg})} \Phi'^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ є рhi-функцією для конфігурацій $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$, таким чином $\Phi'^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ є квазі-рhi-функцією цих конфігурацій.

Слід відмітити, що квазі-рhi-функція $\Phi'^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) - 0.5\rho$ є нормалізованою квазі-рhi-функцією для конфігурацій $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$ (див. п. 1.4). Це означає, що якщо $\rho > 0$ є відстань між $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$, визначається стандартним способом як мінімальна евклідова точкова відстань, тоді нерівність $\Phi'^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) - 0.5\rho \geq 0$ означає, що $\text{dist}(\widehat{\Lambda}_q(z_q), \widehat{\Lambda}_g(z_g)) \geq \rho$.

Зауваження. Для опису обмежень неперетинання (3.2) опуклі оболонки груп об'єктів не будуються в явному вигляді.

Далі пропонуємо засоби аналітичного опису неперетинання об'єктів – ϕ -функції для напівплощини

$$P_{qg} = \{(x, y) : \mu_{qg}(x, y) = \cos \varphi_{qg} \cdot x + \sin \varphi_{qg} \cdot y + \gamma_{qg} \geq 0\}$$

та наступних форм об'єктів $T_i(u_i)$, $i \in \Xi_q$: еліпс $E_i(u_i)$; коло $C_i(v_i)$; і опуклий багатокутник $K_i(u_i)$.

ϕ -функція для еліпса і напівплощини P_{qg} . ϕ -функція для еліпса $E_i(u_i)$ заданого його піввісями (a_i, b_i) і напівплощини P_{qg} може бути визначено у формі:

$$\Phi^{E_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = x_i \cos \varphi_{qg} + y_i \sin \varphi_{qg} + \gamma_{qg} - \sqrt{(a_i^2 - b_i^2) \cdot \cos^2(\theta_i + \varphi_{qg}) + b_i^2}.$$

ϕ -функція для кола і напівплощини P_{qg} . ϕ -функція для кола $C_i(v_i)$ заданого його радіусом r_i і напівплощини P_{qg} визначена в [87] і має вигляд

$$\Phi^{C_i P_{qg}}(v_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = x_i \cos \varphi_{qg} + y_i \sin \varphi_{qg} + \gamma_{qg} - r_i.$$

ϕ -функція для опуклого багатокутника і напівплощини P_{qg} . ϕ -функція для опуклого багатокутника $K_i(u_i)$ заданого його вершинами $p_{ik} = (p_{ik}^x, p_{ik}^y)$, $k = 1, \dots, l_i$, і напівплощини P_{qg} визначена в [87] і має вигляд:

$$\Phi^{K_i P_{qg}}(u_i, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) = \min_{k=1, \dots, l_i} (p_{ik}^x \cos \varphi_{qg} + p_{ik}^y \sin \varphi_{qg} + \gamma_{qg}).$$

3.2.3 Включення груп об'єктів у контейнер

Виведемо ϕ -функцію, яка аналітично представляє обмеження включення (3.3), $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \Omega^* = \emptyset$ для кожного $q \in I_N$, де $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega$.

Нехай $\Phi^{T_i \Omega^*}(u_i)$ ϕ -функція об'єктів $T_i(u_i)$ та Ω^* , $i \in \Xi_q$.

Твердження 2. Неперервна і скрізь визначена функція

$$\Phi^{\widehat{\Lambda}_q \Omega^*}(z_q) = \min \{ \Phi^{T_i \Omega^*}(u_i), i \in \Xi_q \}, \quad (3.6)$$

є ϕ -функцією для конфігурації $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ та об'єкту Ω^* .

Доведення. Покажемо, що якщо $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \subset \Omega$ то $T_i \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } T_i(u_i) \cap \Omega^* = \emptyset$, $i \in \Xi_q$.

Припускаємо, що $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup \Omega_3^* \cup \Omega_4^*$, де $\Omega_s^* = \{(x, y) \mid g_s(x, y) \leq 0\}$ – напівплощина, $s = 1, 2, 3, 4$, $g_1(x, y) = x_i$, $g_2(x, y) = y$, $g_3(x, y) = -x + l$, $g_4(x, y) = -y + w$,

Для кожної напівплощини Ω_s^* можемо зробити висновок, що

1) $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \Omega_s^* = \emptyset \Leftrightarrow \Lambda_q(z_q) \cap \Omega_s^* = \emptyset$ і тому $T_i(u_i) \cap \Omega_s^* = \emptyset$, для всіх $i \in \Xi_q$;

2) $\text{int } \widehat{\Lambda}_q \cap \text{int } \Omega_s^* \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{int } \Lambda_q(z_q) \cap \text{int } \Omega_s^* \neq \emptyset$ і, отже, існує принаймні один об'єкт $T_i(u_i)$, такий що $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } \Omega_s^* \neq \emptyset$, $i \in \Xi_q$;

3) $(\text{int } \widehat{\Lambda}_q(z_q) \cap \text{int } \Omega_s^* = \emptyset) \wedge (\text{fr } \widehat{\Lambda}_q \cap \text{fr } \Omega_s^* \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\text{int } \Lambda_q(z_q) \cap \text{int } \Omega_s^* = \emptyset) \wedge (\text{fr } \Lambda_q(z_q) \cap \text{fr } \Omega_s^* \neq \emptyset)$ і тому $\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } \Omega_s^* = \emptyset$, для всіх $i \in \Xi_q$, і існує принаймні один об'єкт $T_i(u_i)$, такий що $\text{fr } T_i(u_i) \cap \text{fr } \Omega_s^* \neq \emptyset$, $i \in \Xi_q$.

Таким чином, $\widehat{\Lambda}_q(z_q) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } T_i(u_i) \cap \Omega^* = \emptyset, i \in \Xi_q$. Це означає, що $\Phi^{\widehat{\Lambda}_q \Omega^*}(z_q) \geq 0$, якщо і тільки якщо $\Phi^{T_i \Omega^*}(u_i) \geq 0$ для всіх $i \in \Xi_q$.

Тепер сформулюємо за допомогою ϕ -функцій умови включення в контейнер Ω об'єктів $T_i(u_i), i \in \Xi_q$ наступних форм: еліпса $E_i(u_i)$; кола $C_i(v_i)$; опуклого багатокутника $K_i(u_i)$.

Phi-функція для включення еліпса. ϕ -функція для еліпса $E(u_i)$ заданого його піввісями (a_i, b_i) і об'єкту Ω^* може бути визначена у вигляді

$$\Phi^{E_i \Omega^*}(u_i) = \min_{s=1, \dots, 4} g_{is}(u_i),$$

$$g_{i1}(u_i) = x_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 \theta_i},$$

$$g_{i2}(u_i) = y_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 \theta_i},$$

$$g_{i3}(u_i) = l - x_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2 \theta_i},$$

$$g_{i4}(u_i) = w - y_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \sin^2 \theta_i}.$$

Нерівність $\Phi^{E_i \Omega^*}(u_i) \geq 0$ гарантує, що $E_i(u_i) \subset \Omega$. Визначимо ϕ -функцію на основі ідеї неперетинання еліпса та напівплощини, введеної в [137].

Phi-функція для включення кола. ϕ -функція для кола $C(u_i)$ заданого його радіусом r_i і об'єкту Ω^* має вигляд

$$\Phi^{C_i \Omega^*}(u_i) = \min_{s=1, \dots, 4} f_{is}(u_i),$$

$$g_{i1}(u_i) = x_i - r_i, g_{i2}(u_i) = y_i - r_i, g_{i3}(u_i) = -x_i + l - r_i, g_{i4}(u_i) = -y_i + w - r_i,$$

Нерівність $\Phi^{C_i \Omega^*}(u_i) \geq 0$ гарантує, що $C_i(v_i) \subset \Omega$.

Phi-функція для включення опуклого багатокутника. Phi-функція для опуклого багатокутника $K(u_i)$ заданого його вершинами $p_{ik} = (p_{ik}^x, p_{ik}^y)$, $k = 1, \dots, l_i$, і об'єкту Ω^* має вигляд

$$\Phi^{K_i \Omega^*}(u_i) = \min_{\substack{k=1, \dots, l_i \\ s=1, \dots, 4}} g_s(p_{ik}^x, p_{ik}^y).$$

Нерівність $\Phi^{K_i \Omega^*}(u_i) \geq 0$ гарантує, що $K_i(u_i) \subset \Omega$.

3.3 Математична модель задачі компоновки груп об'єктів

Математична модель для розміщення груп об'єктів у прямокутній області Ω можна сформулювати у формі

$$\max_{(u, \phi, \psi, \rho) \in W \subset R^\sigma} \rho, \quad (3.7)$$

$$W = \{(u, \phi, \psi, \rho) \in R^\sigma : \Phi^{\hat{\Lambda}_q \hat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}) - 0.5\rho \geq 0, q > g \in I_N, \rho \geq 0, (3.8)$$

$$\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij}) \geq 0, i > j, (i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q, q \in I_N, \Phi^{T_i \Omega^*}(u_i) \geq 0, i \in I_n\},$$

де ρ розглядаються як відстань між опуклими оболонками $\hat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\hat{\Lambda}_g(z_g)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор параметрів розміщення, $u_i = (v_i, \theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $\psi = (\varphi_{qg}, \gamma_{qg}, q > g \in J_N)$ є вектором допоміжних змінних у квазі-phi-функції опуклих оболонок $\hat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\hat{\Lambda}_g(z_g)$, $\phi = (u_{ij}, (i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q, q \in I_N)$ є вектором допоміжних змінних у квазі-phi-функції об'єктів $T_i(u_i)$ і $T_j(u_j)$, $\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij})$ є квазі-phi-функцією об'єктів $T_i(u_i)$ і $T_j(u_j)$, $\Phi^{T_i \Omega^*}(u_i)$ є phi-функцією об'єктів $T_i(u_i)$ і Ω^* ,

визначеної в (3.6), $\Phi^{\widehat{\Lambda}_q \widehat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$ є квазі-phi-функцією опуклих оболонок $\widehat{\Lambda}_q(z_q)$ і $\widehat{\Lambda}_g(z_g)$, визначеної в (3.4),

$\sigma = 1 + 3n + \frac{\tau_q}{2} \sum_{q=1}^N m_q(m_q - 1) + N(N - 1)$ – число змінних задачі. τ_q – кількість

допоміжних змінних для функції, яка описує обмеження неперетинання для пари об'єктів $T_i(u_i)$ і $T_j(u_j)$, $(i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q$, $q \in I_N$. Зокрема, $\tau_q = 0$ для двох кіл, $\tau_q = 1$ для двох еліпсів, $\tau_q = 2$ для двох опуклих багатокутників (див. підрозділ 3.2).

Зауваження. У випадку двох кіл $C_i(u_i)$ і $C_j(u_j)$ використовується phi-функція $\Phi^{C_i C_j}(u_i, u_j)$ замість квазі-phi-функції $\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij})$.

Область W задана (3.8) визначається системою нерівностей з диференційованими функціями. Модель (3.7) – (3.8) є неопуклою і неперервною задачею нелінійного програмування. Це точне формулювання в тому сенсі, що вона містить у собі всі оптимальні розв'язки.

Модель (3.7) – (3.8) містить $O(\sum_{q=1}^N m_q^2) + O(N^2)$ нелінійних нерівностей

та $O(\sum_{q=1}^N m_q^2) + O(N^2)$ змінних завдяки допоміжним змінним у квазі-phi-функціях.

Розроблено ефективний підхід, який використовує новий алгоритм для створення допустимих стартових розв'язків для знаходження локальних екстремумів задачі (3.7) – (3.8).

3.4 Алгоритм розв'язання задачі компоновки груп об'єктів

Стратегія розв'язання заснована на багатостартовому (multistart) алгоритмі і складається з трьох основних етапів: 1. Формування набору

можливих вихідних точок для задачі (3.7) – (3.8). 2. Пошук набору локальних максимумів для задачі (3.7) – (3.8), починаючи з кожної допустимої точки, отриманої на етапі 1. 3. Вибір найбільшого локального максимуму зі знайдених на етапі 2.

Для формування допустимих стартових точок задачі (3.7) – (3.8) розроблено спеціальний алгоритм (алгоритм допустимих стартових точок), який включає наступні кроки.

Крок 1. З кожною групою $\Lambda_q(z_q)$ асоціюється кругова область λC_q зі змінною центральною точкою $v_q = (x_q, y_q)$ і змінним радіусом λR_q , де λ є параметром масштабування (scaling parameter), $R_q = \sqrt{\sum_{i \in \Xi_q} S_i}$, S_i – площа

об'єкта T_i , $i \in \Xi_q$, $q \in I_N$.

Крок 2. Потім всі кругові області λC_q , $q \in I_N$, збільшуються в межах прямокутного контейнера Ω якомога більше, за допомогою розв'язання наступної підзадачі NLP:

$$\max_{(v, \lambda) \in V} \lambda, \quad (3.9)$$

$$V = \{(v, \lambda) \in R^{2N+1} : \Phi^{C_q C_g}(v_q, v_g, \lambda) \geq 0, q > g \in I_N, \Phi^{C_q \Omega^*}(v_q, \lambda) \geq 0, q \in I_N, \lambda \geq 0\} \quad (3.10)$$

де $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ – вектор змінних параметрів розміщення кругових областей λC_q , $q \in I_N$;

$\Phi^{C_q C_g}(v_q, v_g, \lambda)$ є phi-функцією областей λC_q і λC_g із центрами у точках $v_q = (x_q, y_q)$ і $v_g = (x_g, y_g)$ та відповідними радіусами λR_q і λR_g , $q > g \in I_N$,

$$\Phi^{C_q C_g}(v_q, v_g, \lambda) = (x_q - x_g)^2 + (y_q - y_g)^2 - (\lambda R_q + \lambda R_g)^2;$$

$\Phi^{C_q \Omega^*}(v_q, \lambda)$ – phi-функція кругової області λC_q та об'єкту

$$\Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega, q \in I_N,$$

$$\Phi^{C_q \Omega^*}(v_q, \lambda) = \min_{s=1, \dots, 4} f_{qs}(v_q, \lambda),$$

$$f_{q1}(v_q, \lambda) = x_q - \lambda R_q, \quad f_{q2}(v_q, \lambda) = y_q - \lambda R_q, \quad f_{q3}(v_q, \lambda) = l - x_q - \lambda R_q, \\ f_{q4}(v_q, \lambda) = w - y_q - \lambda R_q.$$

Шукаємо локальний максимум задачі (3.9) – (3.10), починаючи з допустимої точки $(v^0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_N^0), \lambda^0 = 0)$, де $v_q^0 \in \Omega$, $q \in I_N$ – випадково сформовані точки. Позначимо локальну точку максимуму задачі (3.9) - (3.10) через (v^*, λ^*) .

Крок 3. Далі визначаються початкові значення змінних $\varphi_{qg}^0, \gamma_{qg}^0$ (отримані за допомогою тривіальних геометричних побудов) для кожної квазі-phi-функції $\Phi^{\hat{\Lambda}_q \hat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg})$, $q > g \in I_N$ у задачі (3.7) – (3.8). Ці змінні розглядаються як параметри розділювальних прямих між кожною парою кругових областей $\lambda^* C_q$ і $\lambda^* C_g$ радіусів $\lambda^* R_q$ і $\lambda^* R_g$ з центрами у точках v_q^* та v_g^* , $q > g \in I_N$.

Крок 4. Потім шукаються допустимі точки задачі (3.7) – (3.8) за допомогою розв'язання наступної NLP підзадачі :

$$\max_{(u, \phi, \psi, \beta) \in G} \beta, \quad (3.11)$$

$$G = \{(u, \phi, \psi, \beta) \in R^\sigma : \Phi^{\hat{\Lambda}_q \hat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}, \beta) \geq 0, q > g \in I_N, 0 \leq \beta \leq 1, (3.12)$$

$$\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij}, \beta) \geq 0, i > j, (i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q, q \in I_N, \Phi^{T_i \Omega^*}(u_i, \mu) \geq 0, i \in I_n\},$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i = (v_i, \theta_i)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $\psi = (\varphi_{qg}, \gamma_{qg}, q > g \in J_N)$; $\beta \in$ параметром масштабування об'єктів; $\phi = (u_{ij}, (i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q, q \in I_N)$ є вектором допоміжних змінних у квазі-phi-функції об'єктів $\beta T_i(u_i)$ і $\beta T_j(u_j)$;

$\Phi^{T_i T_j}(u_i, u_j, u_{ij}, \beta)$ – квазі-phi-функція об'єктів $\beta T_i(u_i)$ і $\beta T_j(u_j)$;

$\Phi^{T_i \Omega^*}(u_i)$ – phi-функція об'єктів $\beta T_i(u_i)$ та Ω^* ; $\Phi^{\hat{\Lambda}_q \hat{\Lambda}_g}(z_q, z_g, \varphi_{qg}, \gamma_{qg}, \beta)$ – квазі-pi-функція для двох груп визначених в (3.4);

$\sigma = 1 + 3n + \frac{\tau_q}{2} \sum_{q=1}^N m_q(m_q - 1) + N(N - 1)$ – число змінних задачі, τ_q – кількість

допоміжних змінних.

Використовуємо допустиму стартову точку $(u^0, \phi^0, \psi^0, \beta^0 = 0)$ для розв'язання задачі (3.11) – (3.12), де $\psi^0 = (\varphi_{qg}^0, \gamma_{qg}^0, q > g \in J_N)$ отримано на кроці 3; $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0) \in C_q$ – вектор випадково сформованих параметрів трансляції і $\theta_i^0 \in [0, 2\pi]$ є випадковим чином згенерованим параметром обертання об'єкта $\beta T_i(u_i)$ для $i \in \Xi_q, q \in I_N$; $\phi^0 = (u_{ij}^0, (i, j) \in \Xi_q \times \Xi_q, q \in I_N)$, вектор u_{ij}^0 допоміжних змінних знайдено з тривіальних геометричних обчислень залежно від форми об'єкта (крім кіл), так що $\Phi^{T_i T_j}(u_i^0, u_j^0, u_{ij}^0, \beta^0 = 0) \geq 0$. Зокрема, для двох еліпсів $u_{ij}^0 = \phi_{ij}^0$, для двох опуклих багатокутників $u_{ij}^0 = (\phi_{ij}^0, \gamma_{ij}^0)$ (див. підрозділ 3.2).

Глобальний максимум задачі (3.11) – (3.12), (і.е. $\beta^* = 1$), забезпечує допустимий розв'язок задачі (3.7) – (3.8). Точку глобального максимуму можна використовувати як стартову точку для пошуку локального максимуму задачі (3.7) – (3.8).

Зауваження. Застосування алгоритму декомпозиції, описаного в [25], рекомендується для розв'язання задачі (3.7) – (3.8), коли $m_q \geq 11$ для груп $\Lambda_q(z_q), q \in J_N$, з метою зменшення обчислювальних витрат (часу та пам'яті).

3.5 Обчислювальні експерименти

Наведемо ряд прикладів, щоб продемонструвати ефективність запропонованого підходу. Експерименти проведено на комп'ютері AMD FX

(tm) -6100, 3,30 ГГц, мові програмування C ++, Windows 7. Для локальної оптимізації використано код IPOPT (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>), розроблене в [127]. Для запуску цього програмного забезпечення використовувались параметри за замовчуванням.

Нижче представлено приклади для задачі компоновки в прямокутному контейнері $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq l = 15, 0 \leq y \leq w = 15\}$. Для кожного прикладу програму запускали 100 разів.

Приклад 1. Задано впорядкований набір $n = 30$ еліпсів. Набір еліпсів розділений на $N=3$ групи $\Lambda_q(z_q)$, $q = 1, 2, 3$: $m_1 = 10, m_2 = 10, m_3 = 10$.

Всі еліпси визначаються їх розмірами $\{(a_i, b_i), i=1, \dots, 30\} = \{(2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8), (1.0 \ 0.75), (0.9 \ 0.6), (0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8), (1.0 \ 0.75), (0.9 \ 0.6), (0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8), (1.0 \ 0.75)\}$.

Результат розв'язання:

Параметри розміщення еліпсів

$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=1, \dots, 30\} = \{(10.469949 \ 12.267537 \ 2.244218), (7.279733 \ 12.352075 \ 2.063582), (2.471444 \ 12.548774 \ 13.249926), (8.464111 \ 9.691723 \ 0.145847), (12.920038 \ 11.433172 \ 5.530417), (4.909339 \ 12.890715 \ 1.640578), (4.716335 \ 10.894489 \ 0.195532), (13.092110 \ 13.335890 \ 6.393843), (10.806375 \ 9.993924 \ -0.401328), (6.267221 \ 10.149879 \ 6.032813), (0.813462 \ 5.582920 \ 1.582319), (2.129866 \ 4.016161 \ 2.043699), (4.516627 \ 2.106510 \ 5.713416), (2.014535 \ 8.617626 \ 4.606157), (5.875381 \ 7.080877 \ 1.710554), (5.246435 \ 4.663067 \ 0.181324), (3.712908 \ 6.439680 \ 3.845887), (1.613133 \ 1.313706 \ 6.313737), (4.250763 \ 8.301450 \ 4.942235), (1.768064 \ 6.435263 \ 0.065954), (13.527926 \ 1.206001 \ 2.906999), (10.087641 \ 4.308896 \ 2.501728), (12.390656 \ 5.699737 \ 2.716022), (8.409176 \ 2.472279 \ 4.931800), (9.003824 \ 5.818192 \ 1.638294), (13.004545 \ 2.937130 \ 5.336177), (13.095024 \ 8.392657 \ -0.572537),$

(10.944860 1.726727 0.720864), (10.969680 7.572605 5.373848), (10.898378 3.513018 -0.101262)}.

Значення цільової функції становить $\rho^* = 2.109291$, час обчислення доівнює 7131.446 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.1.

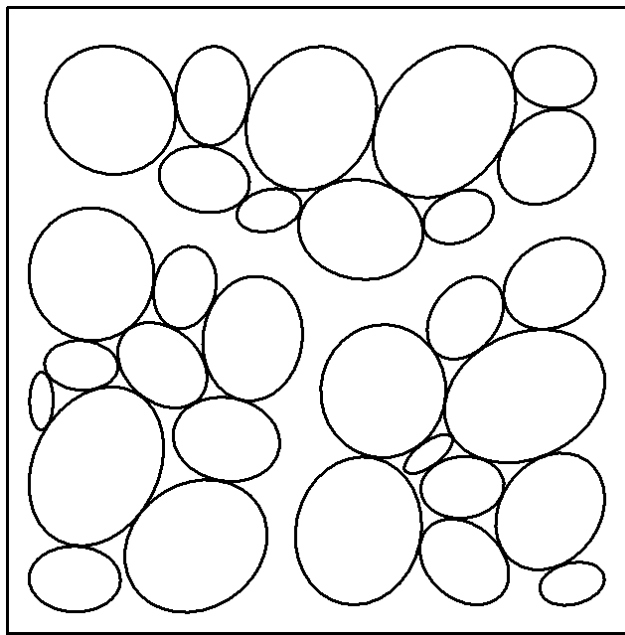


Рисунок 3.1 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 1.

Приклад 2. Задано впорядкований набір $n = 36$ кіл. Набір кіл розділений на $N=4$ групи $\Lambda_q(z_q)$, $q = 1, 2, 3, 4$: $m_1 = 10$, $m_2 = 10$, $m_3 = 8$, $m_4 = 8$.

Усі кола визначаються радіусами:

$\{(r_i), i=1, \dots, 36\} = \{(1.495), (1.500), (1.501), (1.206), (1.009), (0.912), (0.815), (0.765), (0.621), (0.524), (0.336), (1.550), (1.533), (1.512), (1.239), (1.042), (0.945), (0.848), (0.7925), (0.654), (0.557), (0.380), (1.605), (1.566), (1.523), (1.272), (1.075), (0.978), (0.881), (0.820), (0.687), (0.590), (0.424), (1.660), (1.599), (1.534)\}$.

Результат розв'язання:

Параметри розміщення кіл

$\{(x_i, y_i), i=1, \dots, 36\} = \{(13.089089 \ 1.910911), (9.282866 \ 1.915911), (11.652953 \ 4.566297), (13.378089 \ 7.152616), (9.147148 \ 4.421237), (11.269926 \ 6.948703), (9.688888 \ 6.189878), (13.819089 \ 5.231585), (13.954597 \ 3.846912), (11.189529 \ 2.595038), (3.381819 \ 14.237068), (4.209528 \ 11.030014), (6.318116 \ 8.780847), (1.927911 \ 13.072089), (2.506044 \ 8.821697), (6.003824 \ 12.979437), (1.360911 \ 10.681408), (6.604792 \ 11.144527), (4.222026 \ 13.460604), (4.247002 \ 8.078382), (3.849810 \ 0.972911), (4.971098 \ 4.766312), (5.740826 \ 2.020911), (1.981911 \ 1.981911), (1.938911 \ 5.681867), (6.544523 \ 5.269738), (3.814234 \ 3.883877), (4.418702 \ 6.006885), (13.509939 \ 9.758354), (11.287589 \ 11.489670), (11.993830 \ 10.158402), (13.994089 \ 11.147396), (11.771968 \ 9.049173), (9.264512 \ 12.924089), (9.777002 \ 9.600308), (13.050089 \ 13.050089)\}.$

Значення цільової функції становить $\rho^* = 0.415912$, час обчислення доівнює 484.461 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.2.

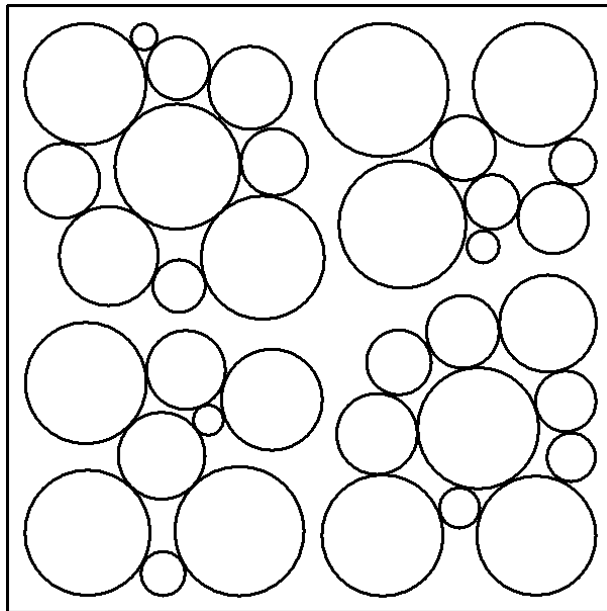


Рисунок 3.2 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 2.

Приклад 3. Задано впорядкований набір $n = 36$ об'єктів – еліпсів та кіл. Набір об'єктів поділяється на $N=4$ груп $\Lambda_q(z_q)$, $q=1, 2, 3, 4$: $m_1 = 10$ кіл, $m_2 = 10$ кіл, $m_3 = 8$ еліпсів, $m_4 = 8$ еліпсів.

Усі кола визначаються своїми радіусами:

$$\{(r_i), i=1, \dots, 20\} = \{(1.5), (1.5), (1.5), (1.2), (1.0), (0.9), (0.8), (0.75), (0.6), (0.5), (0.3), (1.5), (1.5), (1.5), (1.2), (1.0), (0.9), (0.8), (0.75), (0.6)\}.$$

Всі еліпси визначаються їх розмірами:

$$\{(a_i, b_i), i=21, \dots, 36\} = \{(0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8), (1.0 \ 0.75), (0.9 \ 0.6), (0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5)\}.$$

Результат розв'язання:

Параметри розміщення кіл:

$$\{(x_i, y_i), i=1, \dots, 20\} = \{(5.969333, 5.831559), (1.910221, 4.910224), (1.910221, 1.910223), (4.593503, 1.610221), (3.633171, 6.721701), (3.920715, 3.599532), (5.620213, 3.558210), (1.160222, 7.031545), (4.001869, 5.097335), (6.120123, 2.358173), (11.629726, 8.900163), (13.089779, 13.089779), (13.089779, 10.089779), (8.950916, 11.115733), (10.406497, 13.389779), (7.836995, 8.063426), (9.688425, 8.490281), (10.812773, 9.765367), (11.294872, 11.568861), (7.474932, 9.621922)\}.$$

Параметри розміщення еліпсів:

$$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=21, \dots, 36\} = \{(11.912729, 0.916670, 9.295412), (10.183793, 0.775760, -0.039353), (9.620035, 5.473407, -0.639827), (11.012582, 2.782653, -3.922661), (12.998276, 6.515842, -3.441852), (8.195878, 1.909350, 1.627631), (13.574899, 3.775017, 13.927174), (13.533974, 1.475715, 3.943306), (4.818922, 13.635480, -0.705039), (6.200920, 12.630733, 3.035222), (6.736535, 13.971098, -0.026565), (3.486483, 11.514966, 5.442422), (4.430982, 12.359577, 0.186450)\}.$$

(4.973013 10.072013 -1.233481), (2.113962 12.981281 2.518350), (1.910433 9.773977 17.233423)}.

Значення цільової функції становить $\rho^* = 0.410222$, час обчислення дорівнює 1344.9 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.3.

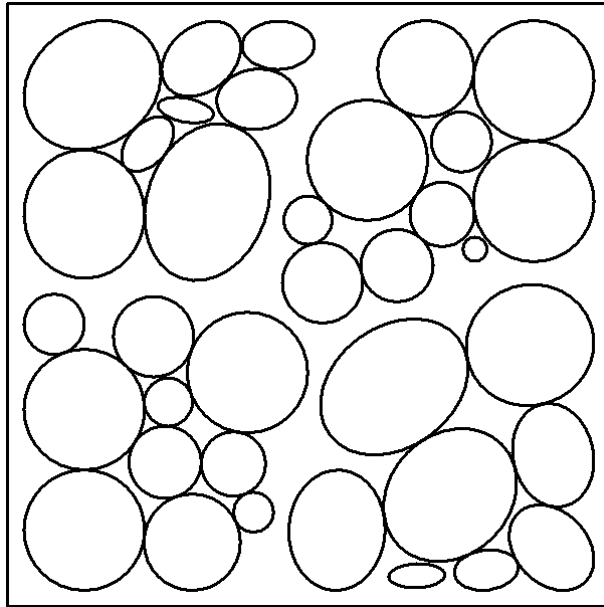


Рисунок 3.3 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 3.

Приклад 4. Задано впорядкований набір $n = 36$ об'єктів. Набір об'єктів поділяється на $N=4$ груп $\Lambda_q(z_q)$, $q = 1, 2, 3, 4$; $m_1 = 10$ кіл, $m_2 = 10$ кіл, $m_3 = 8$ еліпсів, $m_4 = 8$ еліпсів.

Усі кола визначаються своїми радіусами:

$\{(r_i), i=1, \dots, 20\} = \{(1.625), (1.575), (1.525), (1.275), (1.075), (0.975), (0.875), (0.8125), (0.675), (0.575), (0.400), (1.625), (1.575), (1.525), (1.275), (1.075), (0.975), (0.875), (0.8125), (0.675)\}$.

Всі еліпси визначаються їх розмірами:

$\{(a_i, b_i), i=21, \dots, 36\} = \{(0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8), (1.0 \ 0.75), (0.9 \ 0.6), (0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5)\}$.

Результат розв'язання:

Параметри розміщення кіл:

$\{(x_i, y_i), i=1, \dots, 20\} = \{(5.025933 \ 1.876324), (1.826324 \ 1.826324), (3.974219 \ 6.518053), (6.563760 \ 7.583078), (3.350845 \ 3.993889), (1.451364 \ 5.929808), (6.228908 \ 4.078766), (1.109501 \ 4.136463), (6.051897 \ 5.654399), (4.881146 \ 4.620133), (2.547234 \ 11.199363), (1.876324 \ 13.109992), (1.826324 \ 9.360637), (7.011083 \ 11.353004), (4.211329 \ 11.390181), (8.183466 \ 13.673676), (4.390190 \ 13.773676), (6.234106 \ 13.623755), (4.213121 \ 9.302682), (5.668491 \ 9.610177)\}$.

Параметри розміщення еліпсів:

$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=21, \dots, 36\} = \{(11.954503 \ 13.951223 \ 14.239492), (11.755667 \ 12.554007 \ 2.556380), (9.866202 \ 7.871985 \ -11.985510), (13.200316 \ 7.946103 \ 4.316218), (11.218788 \ 10.594559 \ -25.265057), (13.543329 \ 13.252969 \ -23.435600), (10.483036 \ 13.231361 \ 1.774510), (13.776518 \ 10.616527 \ 16.797305), (8.189442 \ 2.594354 \ -21.480649), (7.771967 \ 1.076809 \ 22.539607), (14.052522 \ 1.182705 \ 20.790155), (9.223332 \ 1.011216 \ -8.266075), (14.056688 \ 2.541830 \ -19.537970), (11.441889 \ 1.774003 \ -12.367135), (12.971454 \ 4.412810 \ -15.416986), (9.596560 \ 4.458588 \ 44.002983)\}$.

Значення цільової функції становить $\rho^* = 0.251325$, час обчислення дорівнює 1285.73 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.4.

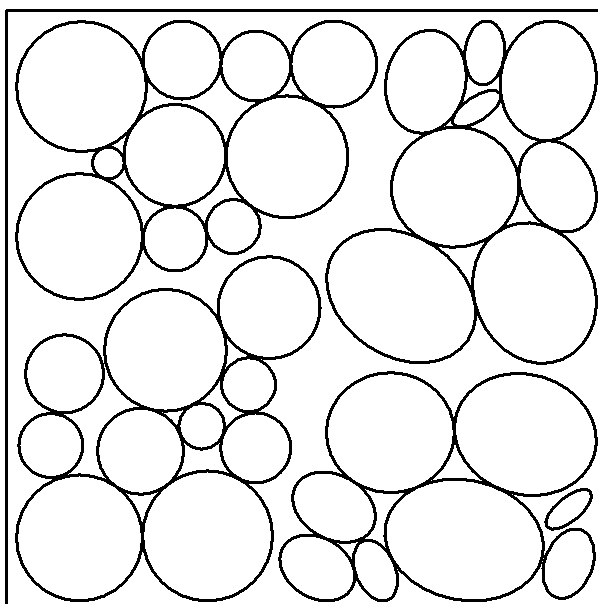


Рисунок 3.4 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 4.

Приклад 5. Задано впорядкований набір $n = 36$ об'єктів. Набір об'єктів поділяється на $N=4$ groups $\Lambda_q(z_q)$, $q=1, 2, 3, 4$: $m_1=10$ опуклих багатокутників, $m_2=10$ кіл, $m_3=8$ еліпсів, $m_4=8$ еліпсів.

Усі багатокутники визначаються їх вершинами:

$$\{(p_{ik}^x, p_{ik}^y), k=1, \dots, 6, i=1, \dots, 10\} = \{(1.975377 \ 0.234652), (0.716736 \ 1.400371), (-1.258641 \ 1.165719), (-1.975377 \ -0.234652), (-0.716736 \ -1.400371), (1.258641 \ -1.165719)\}, \{(1.711902 \ 0.463525), (0.374241 \ 1.467221), (-1.337661 \ 1.003696), (-1.711902 \ -0.463525), (-0.374241 \ -1.467221), (1.337661 \ -1.003696)\}, \{(1.425610 \ 0.680986), (0.083738 \ 1.497944), (-1.341873 \ 0.816959), (-1.425610 \ -0.680986), (-0.083738 \ -1.497944), (1.341873 \ -0.816959)\}, \{(1.213525 \ 0.705342), (-0.156793 \ 1.193426), (-1.370318 \ 0.488084), (-1.213525 \ -0.705342), (0.156793 \ -1.193426), (1.370318 \ -0.488084)\}, \{(0.919239 \ 0.707107), (-0.336465 \ 0.965926), (-1.255704 \ 0.258819), (-0.919239 \ -0.707107), (0.336465 \ -0.965926), (1.255704 \ -0.258819)\}, \{(0.705342 \ 0.728115), (-0.488084 \ 0.822191), (-1.193426 \ 0.094076), (-0.705342 \ -0.728115), (0.488084 \ -0.822191), (1.193426 \ -0.094076)\}, \{(0.499390 \ 0.712805), (-0.599103 \ 0.670936), (-1.098492 \ -0.041869), (-0.499390 \ -0.712805), (0.599103 \ -0.670936), (1.098492 \ 0.041869)\}, \{(0.309017 \ 0.713292), (-0.669131$$

0.557359), (-0.978148 -0.155934), (-0.309017 -0.713292), (0.669131 -0.557359), (0.978148 0.155934)}, {(0.140791 0.592613), (-0.699431 0.377592), (-0.840222 -0.215021), (-0.140791 -0.592613), (0.699431 -0.377592), (0.840222 0.215021)}, {(0.062767 0.498459), (-0.659301 0.283203), (-0.722068 -0.215256), (-0.062767 -0.498459), (0.659301 -0.283203), (0.722068 0.215256)}.

Усі кола визначаються своїми радіусами:

$$\{r_i, i=11,\dots,20\}=\{(0.336, 1.55, 1.533, 1.512, 1.239, 1.042, 0.945, 0.848, 0.7925, 0.654)\}$$

Всі еліпси визначаються їх розмірами:

$$\{(a_i, b_i), i=21,\dots,36\}=\{(0.8 0.5), (0.7 0.3), (2.0 1.5), (1.8 1.5), (1.6 1.5), (1.5 1.2), (1.3 1.0), (1.2 0.9), (1.1 0.8), (1.0 0.75), (0.9 0.6), (0.8 0.5), (0.7 0.3), (2.0 1.5), (1.8 1.5), (1.6 1.5)\}.$$

Результат розв'язання:

Параметри розміщення багатокутників:

$$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=1,\dots,10\} = \{(3.447806 9.597127 2.606907), (4.632826 12.154203 6.031453), (1.935707 13.328641 2.695960), (7.137488 11.281372 4.553086), (6.594090 13.766083 3.344861), (6.187148 9.257646 -0.386618), (1.270813 11.108185 0.670004), (5.355596 7.966335 0.229233), (4.062287 14.055842 3.636614), (7.862803 9.559287 6.671758)\}.$$

Параметри розміщення кіл:

$$\{(x_i, y_i), i=11,\dots,20\} = \{(14.242145 4.607830), (11.278663 1.905800), (8.391616 6.969211), (9.039026 3.993831), (11.103865 5.862139), (13.546072 3.321421), (13.699200 1.300800), (8.985716 1.203801), (13.126975 5.194957), (11.917846 4.076973)\}.$$

Параметри розміщення еліпсів:

$$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=21,\dots,36\} = \{(3.646227 1.155469 1.533947), (1.038618 8.531725 0.246199), (2.256484 6.610724 0.489860), (5.799650 1.865204$$

6.453077), (5.363840 4.958834 1.597596), (1.798943 1.623608 5.811350),
 (1.423676 4.102206 7.386076), (3.423022 3.445736 4.374109), (9.931251
 9.996600 5.101874), (11.636070 11.136792 2.665959), (13.383614 11.035564
 2.838929), (13.844824 7.219741 6.333814), (14.343409 10.348285 1.605276),
 (12.459639 8.974386 0.003111), (9.963431 12.848701 1.699000), (13.051879
 13.13605 10.285045)}.

Значення цільової функції становить $\rho^* = 0.355801$, час обчислення дорівнює 4625.15 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.5.

Приклад 6. Задано впорядкований набір $n = 30$ об'єктів. Набір об'єктів поділяється на $N=3$ груп $\Lambda_q(z_q)$, $q = 1, 2, 3$: $m_1 = 10$ опуклих багатокутників, $m_2 = 10$ кіл, $m_3 = 10$ еліпсів.

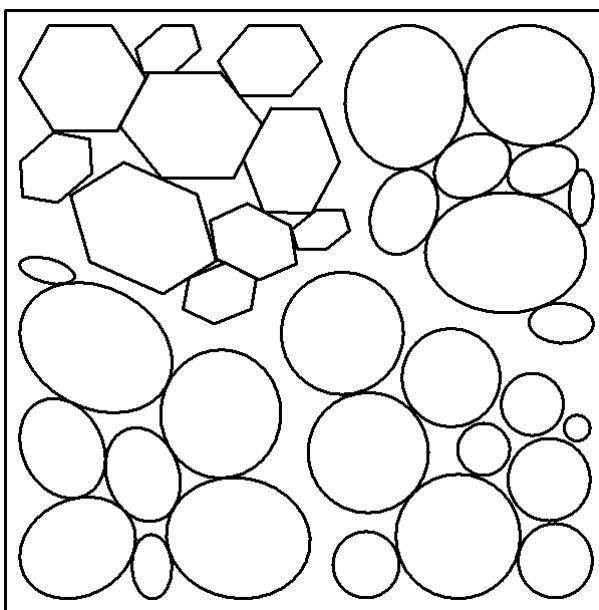


Рисунок 3.5 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 5.

Усі багатокутники визначаються їх вершинами:

$$\{(p_{ik}^x, p_{ik}^y), k=1, \dots, 6, i=1, \dots, 10\} = \{(2.000000 \ 0.000000), (1.000000 \ 1.732051), (-1.000000 \ 1.732051), (-2.000000 \ 0.000000), (-1.000000 \ -1.732051), (1.000000 \ -1.732051)\}, \{(1.800000 \ 0.000000), (0.900000 \ 1.558846), (-0.900000 \ 1.558846), (-1.800000 \ 0.000000), (-0.900000 \ -1.558846), (0.900000 \ -1.558846)\}, \{(1.700000 \ 0.000000), (0.850000 \ 1.472243), (-0.850000 \ 1.472243), (-1.700000 \ 0.000000), (-0.850000 \ -1.472243), (0.850000 \ -1.472243)\}, \{(1.600000 \ 0.000000), (0.800000 \ 1.385641), (-0.800000 \ 1.385641), (-1.600000 \ 0.000000), (-0.800000 \ -1.385641), (0.800000 \ -1.385641)\}, \{(1.400000 \ 0.000000), (0.700000 \ 1.212436), (-0.700000 \ 1.212436), (-1.400000 \ 0.000000), (-0.700000 \ -1.212436), (0.700000 \ -1.212436)\}, \{(1.300000 \ 0.000000), (0.650000 \ 1.125833), (-0.650000 \ 1.125833), (-1.300000 \ 0.000000), (-0.650000 \ -1.125833), (0.650000 \ -1.125833)\}, \{(1.200000 \ 0.000000), (0.600000 \ 1.039230), (-0.600000 \ 1.039230), (-1.200000 \ 0.000000), (-0.600000 \ -1.039230), (0.600000 \ -1.039230)\}, \{(1.100000 \ 0.000000), (0.550000 \ 0.952628), (-0.550000 \ 0.952628), (-1.100000 \ 0.000000), (-0.550000 \ -0.952628), (0.550000 \ -0.952628)\}, \{(1.000000 \ 0.000000), (0.500000 \ 0.866025), (-0.500000 \ 0.866025), (-1.000000 \ 0.000000), (-0.500000 \ -0.866025), (0.500000 \ -0.866025)\}, \{(0.900000 \ 0.000000), (0.450000 \ 0.779423), (-0.450000 \ 0.779423), (-0.900000 \ 0.000000), (-0.450000 \ -0.779423), (0.450000 \ -0.779423)\}.$$

Усі кола визначаються своїми радіусами:

$$\{r_i, i=11, \dots, 20\} = \{0.336, 1.55, 1.533, 1.524, 1.513, 1.242, 1.23, 1.048, 0.951, 0.854\}.$$

Всі еліпси визначаються їх розмірами:

$$\{(a_i, b_i), i=21, \dots, 30\} = \{(0.8 \ 0.5), (0.7 \ 0.3), (2.0 \ 1.5), (1.9 \ 1.6), (1.8 \ 1.5), (1.6 \ 1.5), (1.5 \ 1.2), (1.3 \ 1.0), (1.2 \ 0.9), (1.1 \ 0.8)\}.$$

Результат розв'язання:

Параметри розміщення багатокутників:

$$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=1, \dots, 10\} = \{(13.006728 \ 7.204303 \ 2.567940), (7.917914 \ 11.613054 \ 4.423250), (13.314400 \ 11.008183 \ 4.712389), (11.061231 \ 13.271814$$

2.094380), (10.629721 10.486177 3.665191), (10.185459 8.006747 3.615137) ,
 (13.586642 13.747413 3.141592), (13.807690 4.598105 2.567940), (8.341396
 9.221119 3.376054) (8.985800 14.007219 6.283185)}.

Параметри розміщення кіл:

$\{(x_i, y_i), i=11,\dots,20\} = \{(8.537177 3.208783), (12.787093 1.765862),$
 $(9.700995 1.746357), (4.878381 1.737357), (7.206433 6.712881), (5.794319$
 $4.347302), (9.055276 4.686597), (11.178919 3.862321), (7.286139 1.164357),$
 $(7.371932 2.967318)\}.$

Параметри розміщення еліпсів:

$\{(x_i, y_i, \theta_i), i=21,\dots,30\} = \{(0.720674 11.248417 4.850299), (4.490215$
 $8.752444 3.338436), (1.734800 2.740444 1.764414), (1.981734 9.367337$
 $5.537979), (4.912270 13.064601 2.125433), (1.778636 13.250446 3.779380),$
 $(1.425379 6.137135 4.902743), (3.677896 7.396278 2.407474), (4.702453$
 $10.211496 2.031648), (3.268506 5.159948 1.494571)\}.$

Значення цільової функції становить $\rho^* = 0.213358$, час обчислення дорівнює
 7986.627 секунд.

Відповідна оптимізована компоновка представлена на рис. 3.6.

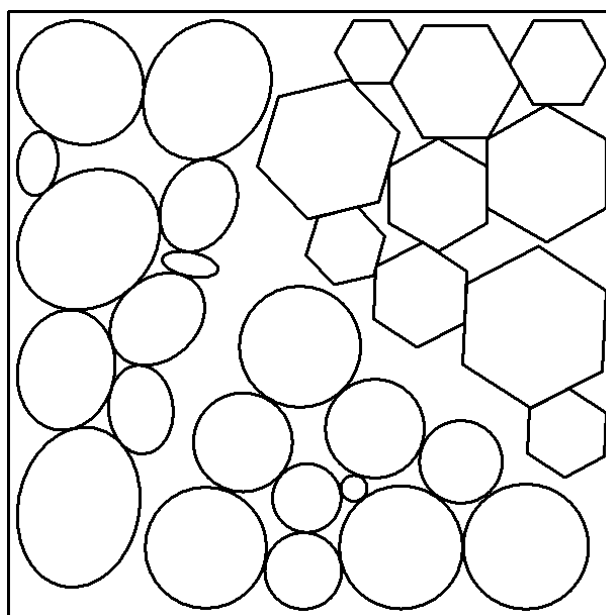


Рисунок 3.6 – Локально-оптимальне розміщення груп у прикладі 6.

3.6 Висновки за третім розділом

Досліджено задачу пакування (компоновки) для набору груп опуклих об'єктів, що мотивовано проблемою завантаження контейнера та подібними проблемами, які виникають у задачах логістики. Завантаження розглядається для прямокутного контейнера заданого розміру за умови неперетину (неперервно трансльованих та таких, що обертаються) об'єктів у групі. Об'єкти визначаються своїми розмірами та мають однакову форму для відповідної групи. Кожна група представлена опуклою оболонкою об'єктів, що утворюють цю групу. Передбачається, що дві групи не перетинають одна одну, якщо це виконується для їх опуклих оболонок, і група належить до прямокутного контейнера, якщо це справедливо для відповідної опуклої оболонки.

Запропоновано нові засоби математичного моделювання груп, що не перетинаються та розміщуються всередині контейнера. Представлено розширення методу ϕ -функцій на опуклі оболонки груп об'єктів з урахуванням мінливості їх форм та метричних характеристик. Визначено нові квазі- ϕ -функції та ϕ -функції. Ці функції не потребують побудови опуклої оболонки для кожної групи. Побудовано нову математичну модель для оптимального розміщення груп, яка формулюється як нелінійна неперервна задача оптимізації. Розроблено новий алгоритм пошуку допустимих стартових розв'язків для прискорення та поліпшення процедури локальної оптимізації.

Для демонстрації ефективності запропонованого підходу представлені результати обчислень, які демонструють розв'язання нової задачі пакування для груп об'єктів, що включають еліпси, кола та опуклі багатокутники.

Результати розділу опубліковано в роботах [45], [58] та представлено на наукових семінарах Харківської секції Наукової ради з проблеми «Кібернетика» в Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2020 р.).

4 ЗАДАЧІ ЗАВАНТАЖЕННЯ КОНТЕЙНЕРІВ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТЕРМІНАЛУ

Досліджено підвищення ефективності роботи залізничних терміналів. Сформульовано проблеми побудови оптимального розкладу обслуговування потягів і оптимізації розміщення контейнерів на залізничних платформах та в зоні зберігання на залізничному терміналі. Представлено підходи до розв'язання задачі на різних рівнях деталізації. Побудовано комбінаторні оптимізаційні моделі задачі на двох рівнях, обговорено їх властивості, розглянуто приклади.

4.1 Контейнерні операції на залізничному терміналі

Контейнерні операції на залізничних терміналах мають велике значення в сучасній логістиці [81, 153]. Більшість із них полягає у обробці контейнерів, що мають форму паралелепіпедів, на залізничних перевантажувальних станціях (терміналах) [83–85]. Виходячи з цього, однією з актуальних проблем є оптимізація роботи залізничного терміналу під час обробки вантажних потягів на залізничному перевалочному майданчику. Операціями, які можна оптимізувати, є: планування процесів (прибуття, відправлення, завантаження та розвантаження) потягів та розміщення контейнерів з цих поїздів на залізничних платформах та на відкритому складському майданчику (зоні зберігання). У деяких ситуаціях формулюються додаткові вимоги до балансування контейнерів та об'єктів усередині них. Проблеми цього класу досліджуються в багатьох наукових працях (див., наприклад, [81–85, 153–155] та посилання в них).

Обслуговування вантажних потягів включає такі процеси [83–85]: прибуття потягу на залізничний термінал, завантаження та розвантаження контейнерів із потягу та відправлення потягу із залізничного терміналу. Потяг може повернутися до станції, щоб завершити завантаження. Обробка

контейнерів полягає у перенесенні контейнера безпосередньо з одного потягу до іншого, перенесенні контейнера з потягу в зону зберігання, перенесенні контейнера із зони зберігання до потягу.

Сучасний залізничний термінал складається з декількох основних елементів [85]:

- 1) платформа з певною кількістю паралельних колій; на цих коліях розташовані потяги;
- 2) зона для зберігання контейнерів, яка розташована паралельно коліям;
- 3) козлові крани, які переміщують контейнери безпосередньо між поїздами та між потягами та зоною зберігання.

Є залізничні колії, по яким потяги прибувають і залишають залізничний термінал, або чекають обслуговування перед залізничним терміналом і позаду нього. Крім того, залізничні термінали також можуть бути обладнані автомобільними під'їзними шляхами. Такий залізничний термінал забезпечує мультимодальні транспортні послуги. Схему типового залізничного терміналу представлено на рис. 4.1 [85].

Залізничний термінал призначений для того, щоб потяги перевантажували контейнери на своєму шляху. На станцію прибуває потяг з контейнерами для інших потягів (потяг-джерело). Контейнери перевантажуються в інші (цільові) потяги безпосередньо на станції або в зону зберігання для подальшого завантаження. Якщо в зоні зберігання є контейнери для цільового потягу, то їх слід перенести на вільні платформи цього потягу. Після здійснення всіх операцій з перевантаження контейнерів потяг залишає залізничний термінал.

Стаття [85] містить огляд проблем планування робіт на залізничному терміналі. Автори аналізують актуальні проблеми, розв'язання яких дозволяє підвищити ефективність перевантажувальних операцій на залізничному терміналі.

Загальна проблема планування роботи залізничного терміналу, сформульована в [85], полягає в плануванні руху вантажних потягів та плануванні операцій перевантаження контейнерів. Через складність загальної проблеми пропонуються наступні рівні для її розв'язання [84, 85]:

I. Розклад обслуговування слотів потягів (Transshipment Yards Scheduling Problem, TYSP).

II. Призначення кожного потягу на залізничну колію.

III. Ухвалення рішення про позиції контейнерів на потягах.

IV. Призначення переміщень контейнерів краном.

V. Визначення послідовності переміщення контейнерів краном.

У роботі [85] пропонується рішення проблеми на рівні I (TYSP). Розроблено підхід до планування руху потягів, що прибувають на залізничний термінал. Відповідно до підходу потяги призначаються в сервісні слоти для одночасного обслуговування. Побудовано математичну модель задачі TYSP на основі булевих змінних, для аналізу моделі та розв'язання задачі використовується евристичний алгоритм.

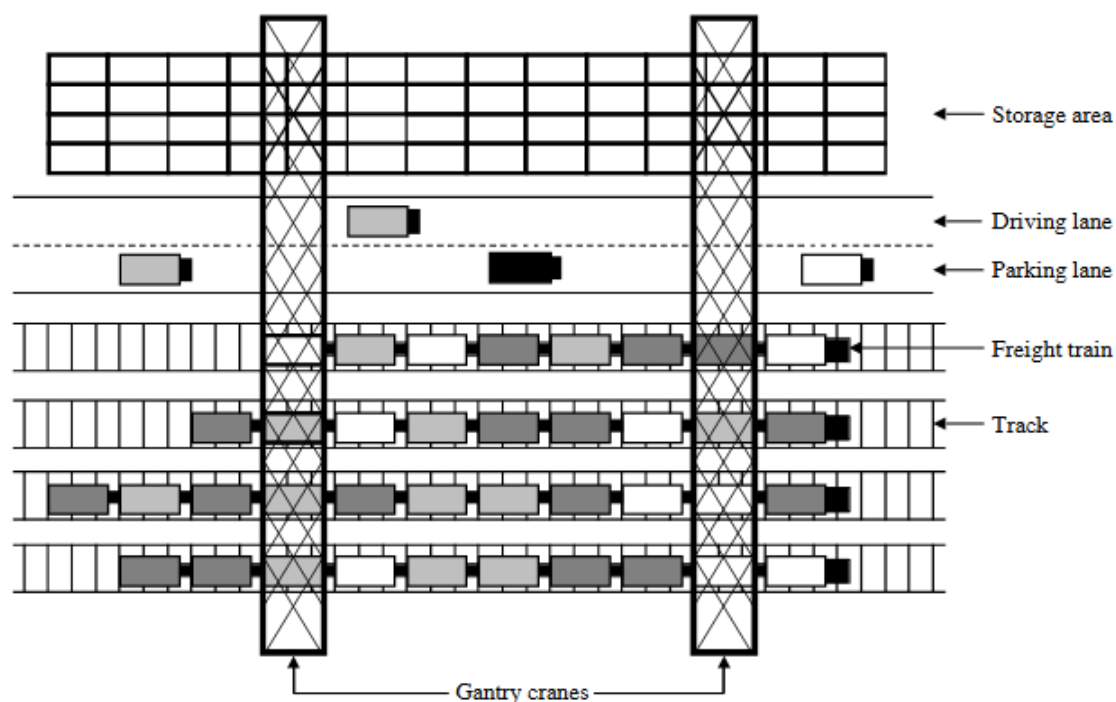


Рисунок 4.1 - Схема типового залізничного терміналу

4.2 Задача складання розкладу руху вантажних поїздів та обробки вантажів на залізничному терміналі

Опишемо задачу TYSP в оригінальній постановці, наведеній в [85]. Задано множину потягів $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Кожен потяг везе контейнери, які потрібно перевантажити в один чи декілька інших (цільових) потягів та має отримати контейнери від одного чи декількох потягів. Матриця $A_{N \times N}$ задає кількість контейнерів, які потяг i має перевантажити до потягу j , $i, j = 1, 2, \dots, N$. Перевантаження контейнерів з одного потягу в інший здійснюється на залізничному терміналі за допомогою козлових кранів. Залізничний термінал має G колій (G значно менше N), час роботи терміналу розбито на проміжки - сервісні слоти (service slot), протягом одного слоту обслуговується максимум G потягів. Необхідно знайти оптимальний за вартістю розклад прибуття потягів та перевантаження контейнерів на залізничному терміналі.

В процесі обслуговування потягів на залізничному терміналі можливі такі ситуації:

- повторне відвідування (revisit), коли після обслуговування потяг повинен повторно заходити на залізничний термінал для завантаження контейнерів, які надійшли пізніше;

- розділені переміщення контейнерів (split moves), коли потяг i , що перевозить контейнери для потягу j , обслуговується в сервісному слоті t , раніше сервісного слота t' потягу j . Тоді контейнери з потягу i тимчасово переміщуються в зону зберігання (storage area), звідки потім перевантажуються на потяг j в сервісному слоті t' .

Робота [85] описує розв'язання лише першого рівня задачі – формування сервісних слотів, тобто, Transshipment Yards Scheduling Problem, TYSP. На цьому рівні розв'язком задачі є розбиття множини потягів на сервісні слоти, тобто, розклад обслуговування потягів. При цьому для

кожного потягу i береться до уваги найбільш ранній e_i та найбільш пізній l_i допустимі слоти прибуття на залізничний термінал.

Розглянемо другий рівень деталізації задачі TYSP [85]. При формуванні сервісних слотів для обслуговування потягів приймається рішення щодо призначення потягів на певні колії. Будемо виходити з таких міркувань.

1. Якщо вихідний і цільовий потяги обслуговуються в одному і тому самому сервісному слоті, доцільно призначити їх на якомога ближчі одна до одної колії.

2. Якщо вихідний і цільовий потяги обслуговуються в різних сервісних слотах, важливо призначити колії вихідному і цільовому потягам виходячи з того, щоб відстань, пройдена козовим краном при обслуговуванні цих потягів, була мінімальною. В цьому випадку кран має спочатку перемістити контейнери з вихідного потягу до зони зберігання, а потім, в наступному слоті, із зони зберігання в цільовий потяг, отже, вихідний та цільовий потяги слід призначити на колії, ближчі до зони зберігання.

Врахування призначення потягів на колії дозволяє знизити витрати на обслуговування потягів на залізничному терміналі за рахунок скорочення відстані, подоланої козовим краном при перевантаженні контейнерів.

Розглянемо задачу знаходження оптимального розкладу прибуття вантажних потягів та перевантаження контейнерів на залізничному терміналі з призначенням потягів на колії, виходячи з відомих: кількості колій; кількості контейнерів для перевантаження з кожного потягу до інших; обмежень на найбільш ранній e_i та найбільш пізній l_i допустимі слоти прибуття потягу i ; вартості одиниці відстані переміщення контейнеру порталним краном.

Побудуємо математичну модель задачі. Представимо сервісний слот $t = 1, 2, \dots, T$ за допомогою кортежу $K^t = (k_1^t, k_2^t, \dots, k_g^t, \dots, k_G^t)$, що містить номери всіх потягів, які обслуговуються в слоті; порядок потягів відповідає їх

призначенню на колії. Тут $k_g^t \in I$, $g = 1, 2, \dots, G$ – потяг, який обслуговується в слоті t і призначений на колію g .

Розклад прибуття потягів та обробки вантажів на залізничному терміналі представляється послідовністю кортежів відповідно до слотів K^1, K^2, \dots, K^T , що визначає змінні задачі: $X = (K^1, K^2, \dots, K^T) \in \mathbb{R}^{G \cdot T}$.

Представимо обмеження задачі у формальному вигляді:

$$e_{\kappa_g^t} \leq t \leq l_{\kappa_g^t}, t = 1, 2, \dots, T, g = 1, 2, \dots, G \quad (4.1)$$

$$\kappa_p^t, \kappa_q^{t'} : t \leq t' + y_{\kappa_q^{t'}} \cdot M, t = 1, 2, \dots, T, t' = t, t+1, \dots, T, p, q = 1, 2, \dots, G, \quad (4.2)$$

де T – кількість сервісних слотів, t – номер слоту;

G – кількість колій на залізничному терміналі;

e_i та l_i – найбільш ранній та найбільш пізній допустимі слоти прибуття потягу i ;

M – достатньо велике ціле число;

y_i – булева змінна, що дорівнює 1, якщо потяг i повторно відвідує залізничний термінал, тобто входить до 2 сервісних слотів $t \neq t'$:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \exists t, t', g, g' : t \neq t', \kappa_g^t = \kappa_{g'}^{t'}, = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Обмеження (4.1) гарантує, що кожний потяг обслуговується не раніше слоту e_i та не пізніше слоту l_i .

Умова (4.2) забезпечує прибуття потягу-джерела κ_p^t перед цільовим поїздом $\kappa_q^{t'}$; крім того, якщо цільовий потяг відвідає термінал повторно (revisit), то умова завжди задовольняється завдяки доданку $y_{\kappa_q^{t'}} \cdot M$.

Введемо позначення:

$$z_{tt'} = \begin{cases} 1, & \text{if } t < t' \\ 0, & \text{if } t = t' \end{cases} - \text{булева змінна, що дорівнює 1, якщо сервісні слоти } t$$

та t' є різними, та 0 – якщо однаковими;

C_{pq} – вартість перевантаження козловим краном одного контейнера з потягу, розміщеного на колії p , на потяг, розміщений на колії q , в межах одного слоту;

C_{pq}^* – вартість перевантаження козловим краном одного контейнера з потягу, розміщеного на колії p , на потяг, розміщений на колії q , в різних слотах (вартість роздільного руху);

C^r – вартість одного повторного відвідування залізничного терміналу.

Величини C_{pq} та C_{pq}^* не залежать від слоту і можуть бути заздалегідь:

$$C_{pq} = c_{pq} \quad (4.3)$$

$$C_{pq}^* = c_{p0} + c_{0q}, \quad (4.4)$$

де c_{pq} – фіксована вартість переміщення контейнера між коліями p та q .

Зона зберігання позначається як колія 0. При безпосередньому перевантаженні контейнера з потягу до потягу вартість C_{pq} дорівнює вартості безпосереднього переміщення контейнера c_{pq} . При обслуговуванні потягів в різних слотах контейнер перевантажуватиметься через зону зберігання:

$$C_{pq}^* = c_{p0} + c_{0q}.$$

Значення величин c_{pq} залежать від особливостей конкретного залізничного терміналу. Вважатимемо, що вартість переміщення одного контейнера визначається виключно відстанню між залізничними коліями, а сусідні колії знаходяться на однаковій відстані, тому

$$c_{pq} = |p - q|.$$

Допустимі розклади можуть бути оцінені за сумарними витратами на повторні відвідування потягів, розділені переміщення контейнерів та безпосередні перевантаження контейнерів між потягами в межах одного слоту. Тому критерій ефективності розкладу представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \Psi'(X) = & \alpha_1 \sum_{i \in I} C^r y_i + \alpha_2 \sum_{t=1}^T \sum_{t'=t+1}^T \sum_{p=1}^G \sum_{q=1}^G z_{tt'} A_{\kappa_p^t \kappa_q^{t'}} C_{pq}^* \\ & + \alpha_3 \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^G \sum_{q=1}^G A_{\kappa_p^t \kappa_q^t} C_{pq}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $I = \{1, 2, \dots, N\}$ – множина потягів

$A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ – кількість контейнерів, які потяг i перевозить для потягу j ;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – вагові коефіцієнти витрат на повторні відвідування потягів, розділені переміщення контейнерів та безпосередні перевантаження контейнерів між потягами в межах одного слоту.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} & \min_{X \in \mathbb{W}} \Psi'(X) \\ & \mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^{G \cdot T}\} \\ & X = (K^1, K^2, \dots, K^T) \in \mathbb{R}^{G \cdot T}, \\ & K^t = (\kappa_1^t, \kappa_2^t, \dots, \kappa_G^t) \in E_N^G \subset R^G, \kappa_g^t \in I, g = 1, 2, \dots, G \\ & t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де допустимі розв'язки X задовольняють обмеження (4.1) та (4.2).

Метод розв'язання задачі та обчислювальні експерименти описано в роботі [42].

4.3 Задача розміщення контейнерів при експлуатації залізничного терміналу

У підрозділі досліджується загальна проблема планування роботи залізничного терміналу на рівні III. Пропонується вибрати оптимальне за вартістю розташування контейнерів на залізничних платформах та в зоні зберігання, під час обробки потягів на залізничному терміналі.

Розміщення контейнерів на залізничному терміналі передбачає перенесення контейнерів безпосередньо з потягу до потягу, від потягу до зони зберігання або від зони зберігання до потягу з вибором місця для кожного контейнера. Вартість операцій з переробки контейнерів визначається відстанню, пройденою контейнерами. Оптимізація обробки контейнерів на рівні III полягає у зменшенні витрат на переміщення контейнерів на основі вибору їхніх позицій на платформах та в зоні зберігання.

Отже, проблема розміщення контейнерів при обробці потягів на залізничному терміналі полягає у визначенні оптимального розташування контейнерів у цільових потягах та в зоні зберігання на основі розв'язку проблеми рівня I (тобто, задачі TYSP). Використовуючи сформовані часові слоти обслуговування, а також відомі положення поїздів на коліях на станції (розв'язок задачі знаходження оптимального розкладу прибуття вантажних потягів та перевантаження контейнерів на залізничному терміналі з призначенням потягів на колії, підрозділ 4.2), необхідно визначити оптимальні положення контейнерів на цільових потягах та в зоні зберігання.

У кожному сервісному слоті певні контейнери з потягів-джерел та визначені контейнери із зони зберігання повинні бути переміщені та розміщені на платформах у відповідних цільових потягах. Приймальні

платформи в потягах-цілях слід вибирати з вільних платформ та платформ, на яких контейнери призначені для переміщення до зони зберігання. Зазначені контейнери з потягів-джерел слід перемістити у вільні місця в зоні зберігання.

Проблема полягає в побудові розкладу обробки потягів (віднесення потягів до слотів), визначенні місць розташування потягів на коліях залізничного терміналу (призначення потягів на колії) та створенні розкладу розміщення контейнерів з метою мінімізації витрат на переробку поїздів.

Пропонується стратегія розв'язання, яка включає два етапи: на першому етапі вирішується задача планування руху вантажних потягів на залізничному терміналі із формуванням сервісних слотів та призначенням потягів на колії. Математична модель і метод розв'язання задачі запропоновані в [42] і викладені в підрозділі 4.2. На другому етапі для кожного сервісного слота, сформованого на першому етапі, визначаються оптимальні позиції для контейнерів у цільових потягах та в зоні зберігання, виходячи з умови мінімізації загальних витрат на обробку контейнерів.

Сформулюємо наступну задачу, яка має бути розв'язана на другому етапі запропонованої стратегії для кожного сервісного слота.

Задача розміщення контейнерів при експлуатації залізничного терміналу (Containers Placement In Rail Terminal Operations Problem, CPRTOP). Для заданого сервісного слота вантажних поїздів визначити оптимальні позиції контейнерів у цільових потягах та в зоні зберігання на залізничному терміналі, мінімізуючи загальні витрати на переміщення контейнерів.

Побудуємо математичну модель задачі CPRTOP. Введемо наступні параметри і змінні для формалізації задачі:

G – кількість колій та кількість вантажних потягів у сервісному слоті;

$J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – індексна множина;

$N = [n_{ij}]$, $i, j \in J_G$ – кількість контейнерів у потязі-джерелі i , призначених для цільового потягу j ;

$l_j, j \in J_G$ – кількість контейнерів у зоні зберігання, призначених для цільового потягу j ;

$k_i, i \in J_G$ – кількість контейнерів у потязі-джерелі i призначених для переміщення в зону зберігання;

$m_j, j \in J_G$ – кількість вільних платформ в цільовому поїзді j ;

d – кількість вільних позицій для контейнерів у зоні зберігання.

Нехай A – множина контейнерів, пов'язаних з операціями залізничного терміналу, на поточному слоті обслуговування, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_D\}$. Кожний контейнер $a_i \in A$ опишемо кортежем 4 параметрів, $a_i = (a_x^i, a_y^i, a_f^i, a_t^i)$. Тут (a_x^i, a_y^i) – координати контейнера a_i у потязі-джерелі $a_f^i \in J_G$ або в зоні зберігання ($a_f^i = 0$), призначеного для розміщення у цільовому потязі $a_t^i \in J_G$ або в зоні зберігання ($a_t^i = 0$). Представляємо вільні платформи в цільових поїздах і вільні місця в зоні зберігання контейнерів тими самими засобами, що і контейнери.

Впорядкуємо всі контейнери з множини A : $A_1, A_2, \dots, A_G, A_{G+1}$. Тут множина A_i складається з контейнерів потягу i поточному слоті, $i \in J_G$. Елементи множини A_{G+1} є контейнерами із зони зберігання, призначеними для потягів $1, 2, \dots, G$. Впорядкуємо всі контейнери з множини A_i в такий спосіб:

$$A_i = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{n_{11}}^i \mid a_{n_{11}+1}^i, \dots, a_{n_{11}+n_{12}}^i \mid \dots \mid a_{n_{11}+\dots+n_{1G-1}}^i, \dots, a_{n_{11}+\dots+n_{1G}}^i \mid a_{N_1+1}^i, \dots, a_{N_1+k_i}^i \mid a_{N_1+k_i+1}^i, \dots, a_{N_1+k_i+m_i}^i\},$$

де $a_1^i, a_2^i, \dots, a_{n_{11}}^i$ – контейнери потягу i призначеними для потягу (i колії) $j \in J_G$, $1, \dots, a_{n_{11}+\dots+n_{1G-1}}^i, \dots, a_{n_{11}+\dots+n_{1G}}^i$ – контейнери для потягу G , $a_{N_1+1}^i, \dots, a_{N_1+k_i}^i$ – контейнери потягу i , призначені для переміщення в зону зберігання, $a_{N_1+k_i+1}^i, \dots, a_{N_1+k_i+m_i}^i$ – вільні платформи в поїзді i .

Визначимо змінні моделі. Нехай $U = \{u \in R^\sigma\}$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_G)$ де $u_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, $X_i = (X_1^i, X_2^i, \dots, X_{N_i}^i)$, $X_i^t = (x_1^{it}, x_2^{it}, \dots, x_{n_{it}}^{it}) \in A_{m_t}^{n_{it}}$, $N_i = \sum_{j=1}^G n_{ij}$,

$A_{m_t}^{n_{it}}$ – множина розміщень m_t елементів, що відповідають вільним платформам у цільовому потязі t по n_{ij} , що дорівнює кількості контейнерів у потязі-джерелі i призначеному для цільового потягу j , $x_j^{it} = (x_x^{itj}, x_y^{itj})$.

$Z_i = (z_1^i, z_2^i, \dots, z_{k_i}^i) \in A_{d_i}^{k_i}$, де $z_j^i = (z_x^{ij}, z_y^{ij})$ – позиції в зоні зберігання для k_i контейнерів з потягу-джерела i , $d_i = d - \sum_{j=1}^{i-1} k_j$. Y_i – вільні платформи у потязі

i для контейнерів з усіх потягів-джерел, для яких потяг i є цільовим потягом $y_j^i = (y_x^{ij}, y_y^{ij})$.

$$Y_i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_{\bar{N}_i}^i, y_{\bar{N}_i+1}^i, \dots, y_{\bar{N}_i+l_i}^i) \in A_{m_i-n_{it}}^{\bar{N}_i+l_i}, \bar{N}_i = \sum_{j=1}^G n_{ji},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^G (\bar{N}_i + l_i + k_i + \sum_{t=1}^{N_i} n_{it}).$$

Вважаємо, що витрати на експлуатацію залізничного терміналу визначаються відстанями, пройденими козовим краном. Щоб зменшити загальну вартість, ми повинні мінімізувати загальну відстань, пройдену козовим краном за всі операції залізничного терміналу. Враховуючи специфіку руху козового крана (вздовж двох ортогональних осей), ми використовуємо манхеттенську відстань (метрику) для розрахунку довжини шляху, пройденого краном. Виходячи з цього, загальна вартість контейнерних операцій з потягом i дорівнює:

$$F_i(u) = \sum_{t=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{n_{it}} \rho(a_{n_{i1}+\dots+n_{it-1}+s}^i, x_s^{it}) + \sum_{s=1}^{k_i} \rho(a_{N_1+s}^i, z_s^i) + \\ + \sum_{t=1}^{G+1} \sum_{s=1}^{n_{iti}} \rho(y_s^i, a_{n_{1i}+n_{12}+\dots+n_{i-1i}+s}^i) \quad (4.7)$$

де $\rho(a_i, x_i) = |a_x^i - x_x^i| + |a_y^i - x_y^i|$.

Загальна вартість операцій з усіма потягами для поточного слота обслуговування дорівнює:

$$F(u) = \sum_{i=1}^G F_i(u)$$

На основі введених позначень та припущень представляємо математичну модель задачі CPRTOP наступним чином:

$$F(u) = \sum_{i=1}^G F_i(u) \rightarrow \min \quad (4.8)$$

$$u \in U \subset R^\sigma \quad (4.9)$$

Ця задача комбінаторної оптимізації є NP-складною і може бути розв'язана як за допомогою точних, так і евристичних методів. Деякі підходи до розв'язання задач комбінаторної оптимізації на основі генерації комбінаторних конфігурацій зі спеціальними властивостями представлено в роботі [156].

Побудова математичної моделі задачі CPRTOP є першим кроком у дослідженні процесу оптимізації розміщення контейнерів на залізничному терміналі. Наступним етапом дослідження повинен стати аналіз математичної моделі одним із методів комбінаторної оптимізації. Оскільки результати, отримані в цьому підрозділі, є продовженням досліджень, представлених у підрозділі 4.2 для задачі на рівні 2, для аналізу математичної моделі може бути використана модифікація евристичного методу, запропонована в [42]. Програмне забезпечення, розроблене на основі обох

етапів дослідження, може бути використане для планування руху потягів на сучасному залізничному терміналі.

Приклад. Нехай сервісний слот складається з двох потягів на двох коліях і $n_{12}=0$, $n_{21}=2$; $l_1=2$, $l_2=0$; $k_1=0$, $k_2=2$; $m_1=4$, $m_2=0$; $d=3$; $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Координати контейнерів наведені в таблиці 1. Розрахуємо вартість двох різних варіантів переміщення контейнерів в слоті обслуговування.

Перший варіант. Вартість переміщення контейнера a_1 до платформи x_3 і контейнера a_2 до платформи x_4 дорівнює $C_1=\rho(a_1, x_3)+\rho(a_2, x_4)=|1-4|+|2-1|+|3-5|+|2-1|=7$. Вартість переміщення контейнера a_4 до платформи y_1 і контейнера a_3 до платформи y_2 дорівнює $C_2=\rho(a_4, y_1)+\rho(a_3, y_2)=|1-2|+|0-1|+|2-1|+|0-1|=4$. Вартість переміщення контейнера a_5 до платформи z_1 і контейнера a_6 до платформи z_2 дорівнює $C_3=\rho(a_5, z_1)+\rho(a_6, z_2)=|2-3|+|2-0|+|4-1|+|2-0|=5$.

Загальна вартість операцій з усіма поїздами для поточного слота обслуговування дорівнює $F(u)=C_1+ C_2+ C_3=7+5+4=16$.

Таблиця 4.1 – Координати контейнерів

Контейнери	Вільні платформи
$a_1=(1,2,2,1)$ $a_2=(3,2,2,1)$	$x_1=(1,1),$ $x_2=(2,1)$ $x_3=(4,1),$ $x_4=(5,1)$
$a_3=(1,0,0,1)$ $a_4=(2,0,0,1)$	$y_1=(1,1)$ $y_2=(2,1)$
$a_5=(2,2,2,0)$ $a_6=(4,2,2,0)$	$z_1=(3,0)$ $z_2=(4,0)$ $z_3=(5,0)$

Другий варіант. Обчислимо значення цільової функції, якщо розміщення контейнерів a_3 і a_4 змінюються. Контейнер a_3 переміщується на

платформу y_1 і контейнер a_4 переміщується на платформу y_2 , тоді $C_3 = \rho(a_3, y_1) + \rho(a_4, y_2) = |1-1| + |0-1| + |2-2| + |0-1| = 2$.

Загальна вартість операцій з усіма потягами для поточного слота обслуговування дорівнює $F(u) = C_1 + C_2 + C_3 = 7 + 5 + 2 = 14$.

Отже, зміна розміщення контейнерів зменшує загальну вартість роботи залізничного терміналу.

4.4 Застосування задач завантаження контейнерів в логістичних процесах попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій

Розповсюдженість та актуальність задач завантаження контейнерів визначають широкий спектр їх практичних застосувань. Розглянемо роль і місце задач завантаження контейнерів в системах попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій.

В умовах сучасних ризиків техногенного і природного характеру, що призводять до надзвичайних ситуацій, актуальним питанням є розробка інформаційно-аналітичних систем попередження і усунення таких ситуацій.

До ефективності систем зазначеного класу має пред'являтися низка вимог, а саме: забезпечення мінімізації як людських, так і економічних втрат при усуненні надзвичайних ситуацій (НС); по можливості своєчасне попередження можливих надзвичайних ситуацій в режимі моніторингу [157, 158].

Для кожної з можливих причин виникнення надзвичайної ситуації інформаційно-аналітична система повинна давати можливість вирішувати такі завдання:

- попередження виникнення надзвичайної ситуації;
- своєчасне реагування на надзвичайну ситуацію, при її виникненні;
- формування ефективного плану усунення надзвичайної ситуації за рахунок координації всіх служб сил і засобів;
- координація плану усунення наслідків НС.

В роботі [144] запропоновано концепцію РІАП НС – Регіональної інформаційно-аналітичної підсистеми з надзвичайних ситуацій – інформаційно-аналітичної системи щодо запобігання і усунення наслідків НС в рамках регіону і країни в цілому (рис. 4.2).

Концепція передбачає оперативне забезпечення керівних органів виконавчої влади експертно-аналітичною, прогнозною, довідково-статистичною, фактографічною, контрольною-звітною та управлінською інформацією з використанням сучасних інформаційних технологій для розв'язування задач, пов'язаних з техногенною та екологічною безпекою та НС.

Одним з розділів інформаційно-аналітичної системи є підсистема "Планування заходів і підготовка рішень", орієнтована на розв'язання таких задач:

- підготовка проєктів рішень з планування заходів по ліквідації наслідків НС;
- формування експертної інформації на основі аналізу інформації з бази даних прецедентів по конкретним НС;
- визначення оцінки необхідних ресурсів і розробки планів їх використання при ліквідації наслідків НС.

Надзвичайні ситуації, як потенційні, так і ті, що відбулись і потребують ліквідації, характеризуються необхідністю зосередження та транспортування великих обсягів матеріальних ресурсів в район події. Основним способом транспортування зазначених вантажів є контейнерні перевезення всіма доступними видами транспорту [157, 158]. Це призводить до необхідності розв'язання задач завантаження контейнерів на етапах планування заходів щодо постачання ресурсів та реагування на надзвичайну ситуацію, що відбулась. Так, матеріальні ресурси, які заздалегідь зберігаються на складах на випадок виникнення НС, мають бути щільно упаковані у спеціальні контейнери та готові до транспортування.

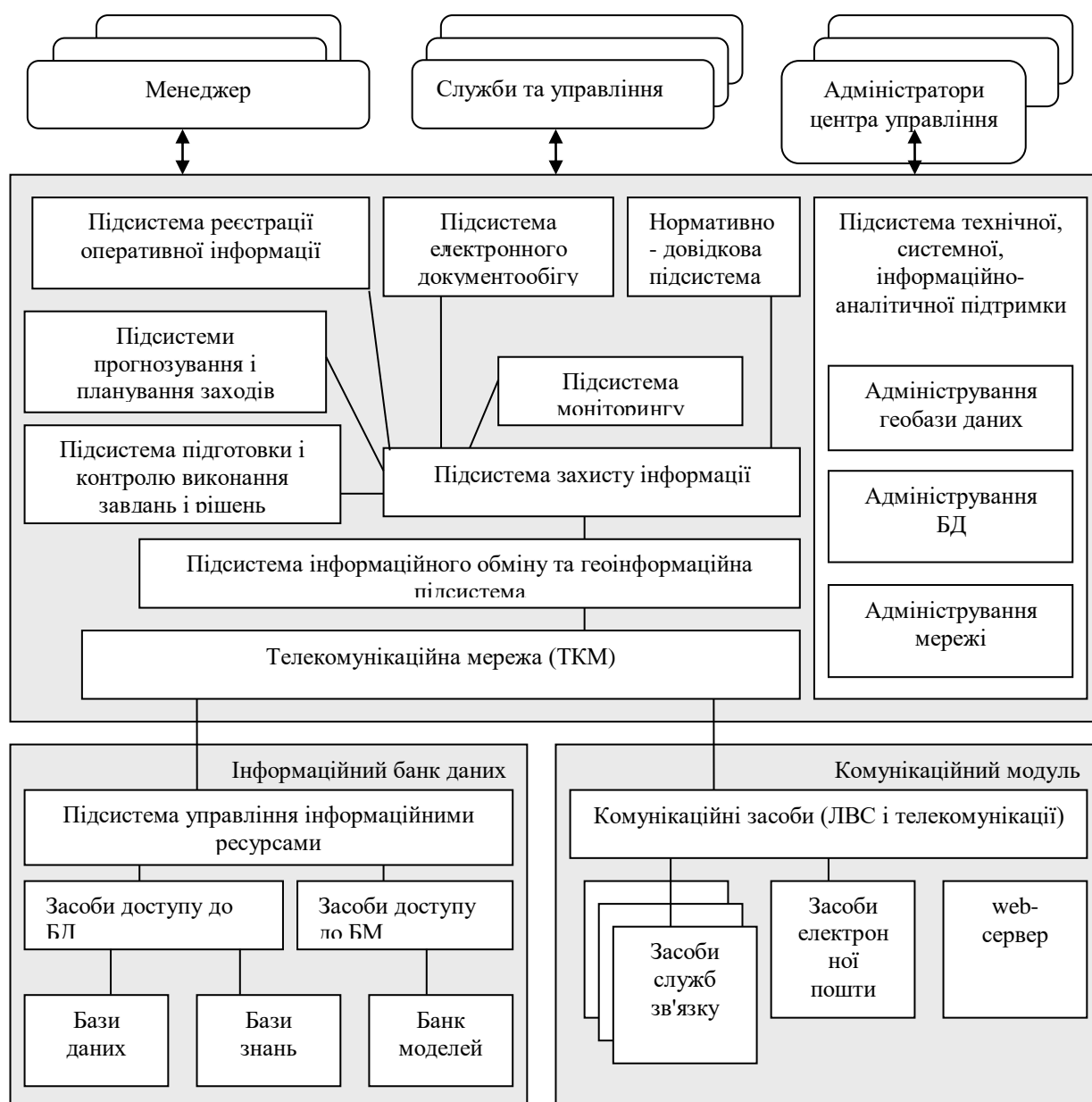


Рисунок 4.2 – Структурно-функціональна схема РІАП НС

При виникненні надзвичайних ситуацій постає задача пошуку найкоротших шляхів транспортування контейнерів з ресурсами за умов, коли частина шляхів може бути пошкодженою, що призведе до використання різних видів транспорту. Отже, необхідно перевантажувати контейнери в процесі транспортування в район події.

Зазначене є підставою для використання запропонованих в роботі алгоритмів розв'язання задач завантаження контейнерів в підсистемі "Планування заходів і підготовка рішень" Регіональної інформаційно-аналітичної підсистеми з надзвичайних ситуацій РІАП НС.

4.5 Висновки за четвертим розділом

Проаналізовано проблему аналізу та моделювання роботи залізничного терміналу при здійсненні операцій перевантаження контейнерів.

Досліджено задачу оптимізації призначення потягів на залізничні колії при обробці вантажів на залізничному терміналі. Представлено математичну модель і метод розв'язання досліджуваної задачі. Математична модель описує задачу в термінах комбінаторних конфігурацій та враховує призначення поїздів на залізничні колії, що у сукупності дозволяє знизити розмірність задачі та підвищити ефективність її розв'язання.

Запропоновано підхід для підвищення ефективності виконання операцій перевантаження контейнерів на залізничному терміналі. Відповідно до підходу підвищення ефективності операцій базується на оптимізації розміщення контейнерів на залізничних платформах та в зоні зберігання на залізничному терміналі. Побудовано математичну модель у вигляді задачі комбінаторної оптимізації; проаналізовано властивості моделі. Наведено приклади розрахунків ефективності виконання операцій перевантаження контейнерів за допомогою запропонованої моделі.

Описано використання запропонованих в роботі алгоритмів розв'язання задач завантаження контейнерів в підсистемі "Планування заходів і підготовка рішень" Регіональної інформаційно-аналітичної підсистеми з надзвичайних ситуацій РІАП НС.

Результати розділу опубліковано в роботах [42], [44], [48], [50], [52], [57].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розвинуто сучасні комп'ютерні технології (математичні моделі, методи, алгоритми та програми) для розв'язання задач проєктування оптимального завантаження контейнерів з урахуванням геометричних обмежень та умов балансу.

1. Проведено системний аналіз задачі оптимального завантаження контейнерів в різних сферах застосування. В результаті зроблено висновки:

- контейнерні перевезення є підсистемою глобальної економічної та геополітичної системи, яка здійснює значний вплив на світові процеси;

- контейнерні перевезення мають тенденцію до кількісного зростання та технологічного розвитку на всіх рівнях – глобальному, регіональному та місцевому;

- оптимізацію завантаження контейнерів варто розглядати як на етапі виконання операцій переміщення контейнерів у контейнерному терміналі, так і на етапі завантаження окремих контейнерів, що є джерелом суттєвого економічного ефекту.

2. Введено комбінаторні конфігурації, що описують комбінаторну структуру задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів (вантажів) у контейнері, розділеному горизонтальними стелажми на підконтейнери.

3. Побудовано математичну модель задачі оптимального рівноважного завантаження 3D об'єктів, в якій враховуються не тільки геометричні обмеження та баланс системи, але й комбінаторні особливості, пов'язані з генерацією розбиття множини об'єктів, що розміщуються всередині підконтейнерів.

4. Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування для оптимізації компоновки груп об'єктів (вантажів) у прямокутному контейнері, що дозволяє застосування сучасних НЛП-розв'язувачів для її розв'язання.

5. Запропоновано швидкий метод генерації допустимих стартових точок для прискорення процедури локальної оптимізації та поліпшення значення функції цілі.

6. Отримали подальший розвиток стратегії, моделі та методи розв'язання задач розміщення контейнерів в процесі їх перевантаження в частині побудови математичної моделі задачі розміщення контейнерів на залізничному терміналі та врахування геометричних та технологічних властивостей для її розв'язання, що дозволяє знизити загальну вартість контейнерних операцій на залізничному терміналі.

7. Надано рекомендації щодо практичного застосування запропонованих моделей, методів та алгоритмів для розв'язання задач оптимального завантаження контейнерів для підвищення ефективності діяльності транспортних компаній. Зокрема, рекомендовано використання запропонованих в роботі алгоритмів в підсистемі "Планування заходів і підготовка рішень" Регіональної інформаційно-аналітичної підсистеми з надзвичайних ситуацій.

8. Практичне значення результатів щодо сучасних комп'ютерних технологій побудови оптимальних компоновок у проектуванні полягає у використанні в освітньому процесі Харківського національного університету радіоелектроніки, зокрема, у навчальній дисципліні «Моделі та методи прийняття рішень в системному проектуванні» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, про що свідчить відповідний акт.

9. Можливі напрями продовження досліджень за тематикою дисертації:

- розробка методів та алгоритмів розв'язання задачі оптимізації компонування груп об'єктів (вантажів) у контейнерах, які мають інші геометричні форми;

- розробка методів та алгоритмів розв'язання задачі розміщення контейнерів на залізничному терміналі;

- розробка методів та алгоритмів розв'язання загальної проблеми планування роботи залізничного терміналу на четвертому та п'ятому рівнях;

- адаптація розробленого в роботі програмного забезпечення до розв'язання практичних задач завантаження контейнерів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы решения, исследования // НАН Украины; Институт кибернетики. К.: Наукова думка, 2003. 264с.
2. Сергієнко І.В. Інформатика та комп'ютерні технології // Київ: Наук. думка, 2004. 432 с.
3. Сергієнко І.В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності // К.: Академперіодика, 2010. 296 с.
4. М. З. Згуровский, А. А. Павлов. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Киев: Наукова думка. 2016.
5. Lyashko S.I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters. Dordrecht, Boston, London. – Kluwer Academic Publishers. 2002. 455 p.
6. Klyushin D.A, Lyashko S.I., Nomirovsky D.A., Petunin Yu.,I., Semenov V.V. Generalized solutions of operator equations and extreme elements. Springer. 2012. New York, Dordrecht, Heidelberg, London. 200 p.
7. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems In: Optimization Methods and Applications (eds. Butenko S., Pardalos P. M., Shylo V.) // Cham: Springer International Publishing AG, 2017. P. 239–250.
8. Lebedeva, T.T., Semenova, N.V. & Sergienko, T.I. Multi-Objective Optimization Problem: Stability against Perturbations of Input Data in Vector-Valued Criterion // Cybern Syst Anal. 2020, 56, pp. 953–958.
9. Sergienko I.V., Semenova N.V., Semenov V.V. Bilevel Optimization Problems of Distribution of Interbudgetary Transfers Under Given Limitations // Cybern Syst Anal. 2019, 55, pp. 905–913.
10. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах. Київ: Наукова думка. 2009.

11. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов // Кибернетика и системный анализ. 2003. №3. С. 141–146.
12. Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 80 – 94.
13. Крак Ю.В. Оптимізаційні постановки та методи в задачах дослідження маніпуляційних систем // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. 2000. № 2. С. 56–62.
14. Грицик В.В., Шевченко А.І., Кісельова О.М. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів // Донецьк: ІІІ "Наука і освіта", 2011. 480 с.
15. Сергиенко И.В., Шило В.П. Современные подходы к решению сложных задач дискретной оптимизации // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 32–40.
16. Бидюк П.И., Касицкий А.В. Анализ сходимости метода оптимизации Розенброка // Системні технології, № 3, 2011. С. 51–60.
17. Базилевич Р., Ждан А. Ієрархічна кластеризація складних схем // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Комп'ют. науки та інформ. технології. 2008. N 616. С. 41–46.
18. Донець Г. П., Колечкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ. 2001.
19. Стоян Ю.Г., Яковлев С.И. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования // Киев: Наукова думка. 1986. 268 с.
20. Элементы теории геометрического проектирования: монография // С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В.М. Комяк, И. В. Аристова и др.; под ред. В.Л.Рвачева. Киев: Наукова думка, 1995. 247 с.

21. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Placement Problems for Irregular Objects: Mathematical Modeling // Optimization and Applications. Springer, Cham. 2017. pp. 521–559.

22. Романова Т.Е. Средства построения математических моделей оптимизационных задач размещения геометрических объектов и их применение // Дис. д-ра техн. наук, 01.05.02. Харьков. 2003. 324 с.

23. Панкратов А. В. Математические модели, методы и информационные технологии решения оптимизационных задач размещения геометрических объектов // Дис. д-ра техн. наук, 01.05.02. Харьков. 2013. 334 с.

24. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. 2010. Vol. 43, N 5. P. 535-553.

25. Chernov N., Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses // Subm. to J. of Glob. Optim. 2014. Vol. 65. Issue 2. P 283-307.

26. Стоян Ю.Г., Яськов Г.М., Романова Т.Є., Яковлев С.В. Пакування сферичних об'єктів: моделі, методи, застосування // Київ: Наукова думка, 2021. 280 с.

27. Stoyan Yu., Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A. Optimized Packings in Space Engineering Applications: Part II. Chapter in contributed book "Modeling and Optimization in Space Engineering – State of the Art and New Challenges" // Springer Optimization and its Applications, G. Fasano and J.Pintér (Editors), Springer, New York, 2019 439–457.

28. Стоян Ю.Г., Семкин В.В., Чугай А.М. Оптимизация компоновки трехмерных объектов в многосвязной области с учетом кратчайших расстояний // Кибернетика и системный анализ. 2014 №3. С.58–70.

29. Grebennik I. V., Pankratov A. V., Chugay A. M., Baranov A. V. Packing n-dimensional parallelepipeds with the feasibility of changing their orthogonal

orientation in an n-dimensional parallelepiped // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, No. 5. pp. 793–802.

30. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Эвклидовы комбинаторные конфигурации: монографія // Харьков: Константа. 2017.

31. Яковлев С. В. Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 54(1). С. 111–123.

32. Яковлев С. В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов // *Доклады НАН Украины*. 2017. № 9. С. 63–68.

33. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монографія // Харьков: Золотая миля. 2018.

34. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // *Optimization Methods and applications*. Butenko S. et al. (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 576–584

35. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації // Інститут системних досліджень освіти. Київ. 1993.

36. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи // Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с.

37. Емец О., Роскладка А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // *Кибернетика и системный анализ*. 2008. №44(5). С.35–44.

38. Гребенник И. В. Математические модели и методы комбинаторной оптимизации в геометрическом проектировании // Дис. д-ра техн. наук, 01.05.02. Харьков. 2006. 354 с.

39. Семенец В.В., Гребенник И.В., Листровой С.В., Минухин С.В., Овезгельдыев А.О. Модели и методы комбинаторной оптимизации в проектировании и управлении // Киев: Наукова думка, 2019. 176 с.

40. Литвиненко О.С. Методи генерації комбінаторних конфігурацій та їх застосування в математичному і комп'ютерному моделюванні задач

перевезення та обробки вантажів // Дис. канд. техн. наук, 01.05.02, Харків, 2018.

41. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Задача балансной компоновки цилиндрических объектов с учетом ее комбинаторных особенностей // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал, 2017. №1 (88). С.22–28.

42. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Scheduling Freight Trains in Rail-rail Transshipment Yards with Train Arrangements // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA), 2017. Vol.9, No.10, pp.12-19.

43. Гребеннік І.В., Коваленко А.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки // Кібернетика та системний аналіз. 2018. т. 54 №2.– С. 55–67.

44. Grebennik I., Khriapkin O., Ovezgeldyyev A., Pisklakova V., Urniaieva I. The Concept of a Regional Information-Analytical System for Emergency Situations // In: Murayama Y., Velev D., Zlateva P. (eds) Information Technology in Disaster Risk Reduction. ITDRR 2017. IFIP Advances in Information and Communication Technology, 2019. vol 516. Springer, Cham.

45. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Pankratova Yu., Urniaieva I., Optimized Packing Clusters of Objects in a Rectangular Container // Mathematical Problems in Engineering. 2019. vol. 2019, Article ID 4136430, 12 pages.

46. Romanova T., Litvinchev I., Grebennik I., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Packing Convex 3D Objects with Special Geometric and Balancing Conditions // Chapter in contributed book "Intelligent Computing and Optimization", Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Computing and Optimization 2019 (ICO 2019) / Springer Optimization and its Applications, Vasant, P., Zelinka, I., Weber, G.-W. (Editors), Springer, New York, 2020. 273–281.

47. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбінаторні особливості задачі балансної компоновки 3D-об'єктів // Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS-2015) 18-20 листопада 2015 р. Дніпропетровськ, Україна.

48. Урняєва І.А., Гребеннік І.В., Романова Т.Є., Шеховцов С.Б. Про задачу завантаження для інтермодальних контейнерних перевезень // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2016, Дніпро, 16-18 листопада 2016 р. – Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара. – С.224-225.

49. Коваленко Г., Урняєва І., Шеховцов С. Задача балансної компоновки 3D-об'єктів та її комбінаторні властивості // Матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ICT 2016, 12–17 вересня. –Харків–Коблево. – 2016.– С. 277–278.

50. Grebennik I., Khriapkin O., Pisklakova V., Urniaieva I. Concept of a regional information-analytical system for emergency situations // 2nd IFIP Conference on Information Technology in Disaster Risk Reduction ITDRR 2017, October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria.

51. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I. Combinatorial balance layout problem of cylindrical objects // 30 International Conf. “Problems of decision making under uncertainties”, August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania – P. 57.

52. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Train arrangement in scheduling for Rail-rail transshipment yard // 7-th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

53. Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Multicriteria balance layout problems of 3D- objects // 7-th International

Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

54. Гребеннік І., Коваленко Г., Романова Т., Урняєва І., Шеховцов С. Метод розв'язання задач балансної компоновки // Матеріали 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ICT 2018, 10-15 вересня. –Харків – Коблево. – 2018. – С. 145–148.

55. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Mathematical Model of Balanced Layout Problem Using Combinatorial Configurations // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 18–21. Scopus

56. Urniaieva I., Grebennik I., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A. Muticriteria Model of Balanced Layout Problem of 3D-Objects // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 22–25.

57. Grebennik I., Dupas R., Urniaieva I., Kalaida N., Ivanov V. Mathematical Model of Containers Placement in Rail Terminal Operations Problem // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 129 –132.

58. Urniaieva I., Pankratov A., Romanova T., Grebennik I., Dupas R., Shekhovtsov S. Balance Packing Problem of Cuboids in an Optimized Cylindrical Container // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 133–136.

59. Container Handbook // German Insurance Association. 2006.
http://www.containerhandbuch.de/chb_e/index.html

60. Levinson, Marc The Box: How the Shipping Container Made the World Smaller and the World Economy Bigger // Princeton University Press. Retrieved 17 February 2013. <http://press.princeton.edu/chapters/s9383.html>

61. Container Supply Review (Report). World Shipping Council. May 2011. p. 1. Retrieved 18 July 2015. https://www.worldshipping.org/public-statements/2011_container_supply_review_final.pdf
62. Pieriegud J. Analysis of the potential of the development of rail container transport market in Poland. Final report. European Commission, Directorate-General for Regional and Urban Policy, European Union, 2019. https://ec.europa.eu/regional_policy/sources/docgener/studies/pdf/report_pl_rail_container_transport_en.pdf
63. Crainic T., Kim K. Intermodal transportation // Handbooks in operations research and management science. 2006. Vol. 14. 796 p.
64. Rodrigue J.-P. The Geography of Transport Systems // fifth edition, New York: Routledge. 2020. 456 pages.
65. Steenken, D., Voß, S., Stahlbock, R. Container terminal operation and operations research – a classification and literature review // OR Spectrum. 2004, 26, 3–49.
66. Port Economics, Management and Policy <https://porteconomicsmanagement.org/pemp/contents/part3/container-terminal-design-equipment/>
67. Container Terminals: Facts and Figures <https://container-xchange.com/blog/container-terminals/>
68. Мультимодальные и интермодальные пассажирские перевозки - разными видами транспорта. [Электронный ресурс]. 2017. Режим доступа до ресурсу: <http://wikitransport.com/transport/intermodal/>.
69. <https://www.railfreight.com/intermodal/2019/03/05/fully-automated-rail-terminals-how-far-away/?gdpr=accept>
70. <https://www.reartek.com/klassifikaciya-konteinernih-terminalov/>
71. <http://ukrspec.com/articles/containers.htm>
72. https://www.boeing.com/resources/boeingdotcom/company/about_bca/pdf/CargoPalletsContainers.pdf

73. https://www.airbus.com/content/dam/corporate-topics/publications/backgrounders/techdata/aircraft_characteristics/Airbus-Commercial-Aircraft-AC-A330.pdf

74. Modeling and Optimization in Space Engineering // Springer Optimization and Its Applications Editors G. Fasano and J.Pintér, Publisher Springer New York. 2012. Volume 73.

75. Choong S. T., Cole M. H., Kutanoglu E. Empty container management for intermodal transportation networks // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2002. Vol. 38, No. 6. pp. 423–438.

76. Tsamboulas D., Kapros S. Decision-Making Process in Intermodal Transportation // Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2000. Vol. 1707. pp. 86–93.

77. Bruns F., Knust S. Optimized load planning of trains in intermodal transportation // OR Spectrum. 2012. Vol. 34, No. 3. pp. 511–533.

78. Bontekoning Y., Macharis C., Trip J. Is a new applied transportation research field emerging? – A review of intermodal rail–truck freight transport literature // Transportation Research Part A: Policy and Practice. 2004. Vol. 38, No. 1. pp. 1–34.

79. Falzarano A., Ketha S., Hawker J. S. Development of an intermodal network for freight transportation analysis // Rochester Institute of Technology, Accessed from <https://scholarworks.rit.edu/article/1206>

80. Bruns F., Goerigk M., Knust S., Schöbel A. Robust load planning of trains in intermodal transportation //OR Spectrum. 2014.Vol.36, No.3. pp.631–668.

81. Boysen N., Briskorn D., Knust S. Rail terminal operations // OR Spectrum. 2018. Vol. 40, No. 2. pp. 317–318.

82. Guo P., Cheng W., Wang Y., Boysen N. Gantry crane scheduling in intermodal rail-road container terminals // International Journal of Production Research. Mar. 2018. pp. 1–18.

83. Pesch E., Boysen N., Flidner M., Jaehn F. A Survey on Container Processing in Railway Yards // *Transportation Science*. 2013. Vol. 47, No. 3. pp. 312–329.

84. Pesch E., Boysen N., Jaehn F. // *Scheduling Freight Trains in Rail-Rail Transshipment Yards*. *Transportation Science*. 2011. Vol. 45, No. 2. pp. 199–211.

85. Boysen N., Jaehn F., Pesch E. New bounds and algorithms for the transshipment yard scheduling problem // *Journal of Scheduling*. 2012. Vol. 15, No. 4. pp. 499–511.

86. Barketau M., Kopfer H., Pesch E. A Lagrangian lower bound for the container transshipment problem at a railway hub for a fast branch-and-bound algorithm // *Journal of the Operational Research Society*. 2013. Vol. 64, No. 11. pp. 1614–1621.

87. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // *Advances in Operations Research*. 2012, vol. 2012, Article ID 346358, 26 pages.

88. Stoyan Y., Gil N., Romanova T., Scheithauer G. Phi-functions for complex 2D objects // *4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*. 2004. Vol. 2(1). P. 69–84.

89. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // *Annals of Operations Research*, Publisher Springer Netherlands. 2010. Vol. 179I.1. P. 343–368.

90. Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects // *Cybernet. Systems Anal.* 2005. Vol 41, 3. P. 332–342.

91. Stoyan Y., Terno J., Gil M., Romanova T., Scheithauer G. Construction of a Φ -function for two convex polytopes // *Applicationes Mathematicae*. 2002. Vol. 2, №29. P. 199–218.

92. Стоян Ю.Г., Придатко Д.И., Романова Т.Е., Уварова М.А. Ф-функции параллелепипедов и цилиндров // *Докл. НАН Украины*. 2002. № 10. С. 68–72.

93. Стоян Ю.Г. Чугай А.М. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника // Доповіді НАН України. 2011. №12. С. 44–50.

94. Семкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов // Доповіді НАН України. 2012. №12. С.41–48.

95. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry: Theory and Applications*. 2010. Vol. 43(5). P. 535–553.

96. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with jump algorithm // *Optimization Letters*. 2013. DOI10.1007/s 11590-013-0646-1, Online ISSN 1862–4480.

97. Комяк В.М. Моделирование размещения геометрических объектов в областях произвольной пространственной формы // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДАТОХ. 2002. Вип.1. С. 46–50.

98. Stoyan Yu., Romanova T., Zlotnik M., Scheithauer G., E.Stupak Packing of circles, rotating circular segments and polygons // Проблемы машиностроения. 2008. №1(11). С. 56–62.

99. Стоян Ю.Г., Семкин В.В., Чугай А.М. Оптимизация компоновки трехмерных объектов в многосвязной области с учетом кратчайших расстояний // Кибернетика и системный анализ. 2014 №3. С.58–70.

100. Стоян Ю.Г., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Чернов Н.И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов // Доповіді НАН України. 2014. Т.9. С. 49–54.

101. Dyckhoff H. A typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. 1990. vol. 44. P. 145–159.

102. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. 2007. vol. 183. P. 1109–1130.

103. Srirama P. A., Varthini P.B. State-of-the-Art Review of Bin Packing Techniques // *Eur. J. Scien. Res*. 2012. Vol. 86, N 3. P. 360–364.

104. <https://www.nefab.com/en/insights/load-optimization/>
105. Che C., Wang Y., Teng H. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known // Optimization Online (2008) http://www.optimizationonline.org/DB_HTML/2008/09/2093.html
106. Birgin E. G., Martinez J. M., Ronconi D. P. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container // European Journal on Operations Research. 2005. Vol. 160, Issue 1. P. 19–33.
107. Egeblad J., Garavelli C., Lisi S., Pisinger D. Heuristics for Container Loading of Furniture // European Journal of Operational Research. 2010. Vol. 200, Issue 3. P. 881–892.
108. Fasano G. MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems // 4OR: Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. 2008. Vol. 6, Issue 3. P. 291–310.
109. Айгнер М. Комбинаторная теория // М.: Мир, 1982. 558 с.
110. Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. // М.: Мир, 1980. 478 с.
111. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации // К.: Наук. думка, 1988. 472 с.
112. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Паршин О.В. Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С.73–77.
113. Stoyan Yu., Yaskov G., Scheithauer G. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped // Central European Journal of Operations Research. 2003. – Vol. 11, № 4. – P. 389 – 407.
114. Коваленко А. А., Панкратов А. В., Романова Т. Е. Размещение объектов в контейнере параболоидной формы с круговыми стеллажами с учетом ограничений поведения // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. № 2 (112). С. 75–82.

115. Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) *Optimization Methods and Applications // Springer Optimization and Its Applications*, vol 130. Springer, Cham.
116. Семкин В.В., Чугай А.М. Нормализованная Ф-функция сферических сегментов // *Доповіді НАН України*. 2012. №12. С.41–48.
117. Chazelle B, Edelsbrunner H, Guibas L.J. The complexity of cutting complexes // *Discrete & Computational Geometry*. 1989. 4(2). P. 139–81.
118. Fasano G., Pintér J. *Modeling and Optimization in Space Engineering // Series:Springer Optimization and Its Applications*. 2013, Vol. 73, XII. 2013. 404 p.
119. Fasano G., Pintér J. *Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies // Springer Optimization and its Applications*, New York, 2016. Vol. 114, XV. 487 p.
120. Sun Z., Teng H. Optimal layout design of a satellite module // *Engineering optimization*. 2003. Vol. 35, № 5. P. 513–530.
121. Lei K. Constrained Layout Optimization Based on Adaptive Particle Swarm Optimizer // *Advances in Computation and Intelligence*. Series: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Zihua C., Zhenhua L., Zhuo K., Yong L. (Eds.). – 2009. № 1. P. 434–442.
122. Stoyan Yu., Romanova T. *Mathematical Models of Placement Optimization: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications // Modeling and optimization in space engineering*. Series: Springer optimization and its applications. Fasano G, Pinter J.D. (Eds.), XII. 2013. Vol. 73. P. 363–388.
123. Kovalenko A. A., Romanova T. E., Stetsyuk P. I. Balance layout problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods // *Cybernetics and Systems Analysis*, 2015. Vol. 51, No. 4, P. 556–565.
124. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. *Modeling and Optimization of Balance Layout Problems // Chapter in contributed book Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies/ Springer Optimization and its Applications*, Editors G. Fasano and J.Pintér, New York, 2016. Vol. 114, XV, pp. 177–208.

125. Stoyan Yu. G., Grebennik I.V. Description and Generation of Combinatorial Sets Having Special Characteristics // International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences, Special Volume “Bilevel Programming, Optimization Methods, and Applications to Economics” 2013. Vol. 18, №1. P. 83–88.

126. Grebennik I., Lytvynenko O. Random generation of combinatorial sets with special properties // An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes (ECONTECHMOD). 2016. Vol. 5, № 4. – pp. 43–48.

127. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // Mathematical Programming. 2006. Vol. 106, № 1, P. 25–57.

128. Stoyan, Yu., Romanova, T., Pankratov, A., Chugay, A. Optimized object packings using quasi-phi-functions // In: Fasano, G., Pinter, J. (eds.) Optimized Packings with Applications. Springer, New York. 2015, vol. 105, pp. 265–293.

129. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization // Journal of the Operational Research Society. 2016, 67(5), 786–800.

130. Romanova, T., Bennell, J., Stoyan, Y., Pankratov, A.: Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimization // European Journal of Operational Research. 2018. 268, pp. 37–53.

131. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical Models of Placement Optimisation: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications // In: Fasano G., Pinter J. (eds.) Modeling and Optimization in Space Engineering Springer, New York. 2012, vol. 73, pp. 363-388.

132. Jingfa L., Gang L. Basin filling algorithm for the circular packing problem with equilibrium behavioural constraints // SCIENCE CHINA Inf. Sci., 2010, 53(5), pp. 885–895.

133. Oliveira W.A., Moretti A.C., Salles-Neto L.L. A heuristic for the nonidentical circle packing problem // *Anais do CNMAC*. 2010, 3, pp. 626–632.

134. Xu Y.-C., Xiao R.-B., Amos M. A novel algorithm for the layout optimisation problem // *Proc. 2007 IEEE Congr. Evolut. Comput. (CEC07)*, IEEE Press, pp. 3938–3942.

135. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Approximate packing: integer programming models, valid inequalities and nesting // In: Fasano G., Pinter J.D, (Eds.), *Optimized Packings and Their Applications (Ser.: Springer Optimization and Its Applications)*, 2015. vol. 105, pp. 117–135.

136. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing ellipses in an optimized rectangular container // *Wireless Networks*. 2018. doi.org/10.1007/s11276-018-1890-1.

137. Kallrath J., Rebennack S. Cutting ellipses from area-minimizing rectangles // *Journal of Global Optimization*, 2014. vol. 59, no. 2, pp. 405–437.

138. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization // *Journal of Global Optimization*, 2016. vol. 65, no. 4, pp. 709–743.

139. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem // *Optimisation Letters*, 2016. vol. 10, pp. 347–1360.

140. Zhanghua Fu., Wenqi Huang, Zhipeng Lü Iterated tabu search for the circular open dimension problem // *European Journal of Operational Research*. 2013, vol. 225, no. 2, pp. 236–243.

141. Stoyan Y., Yaskov G., Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas // *International Journal of Computer Mathematics*. 2012, vol. 89, no. 10, pp.1355–1369.

142. Akeb H., Hifi M., Negre S. An augmented beam search-based algorithm for the circular open dimension problem // *Computers & Industrial Engineering*. 2011, vol. 61, no. 2, pp. 373–381.

143. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Packing circular like objects in a rectangular container // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015, vol. 54, no. 2, pp. 259–267.

144. Peralta J., Andretta M., Oliveira J. Packing Circles and Irregular Polygons using Separation Lines // *Proceedings of the 7th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2018)*, 2018. pp. 71–77.

145. Kallrath J. Cutting circles and polygons from area minimizing rectangles // *Journal of Global Optimization*. 2009, vol. 43, pp. 299–328.

146. Alt H., Hurtado F. Packing Convex Polygons into Rectangular Boxes // *Lecture Notes in Computer Science*. 2000, vol. 2098, pp. 67–80, DOI: 10.1007/3-540-47738-1_5. Source Conference: Discrete and Computational Geometry, Japanese Conference, JCDCG 2000, Tokyo, Japan, November, 22-25, 2000.

147. H. Alt, Berg M., Knauer C. Approximating minimum-area rectangular and convex containers for packing convex polygons // *Journal of Computational Geometry*. 2017, vol 8, no 1, pp. 1–10.

148. Kai Tang, Charlie Wang, Danny Z. Chen Minimum Area Convex Packing of Two Convex Polygons // *International Journal of Computational Geometry & Applications*. 2006, vol. 16, no. 1, pp. 41–74.

149. Jones D. R. A fully general, exact algorithm for nesting irregular shapes // *Journal of Global Optimization*. 2013, vol. 59, pp.367–404.

150. Toledo F.M., Carravilla M.A., Ribeiro C., Oliveira J. F., Gomes A. M. The dotted board model: A new mip model for nesting irregular shapes // *International Journal of Production Economics*. 2013, vol. 145, no. 2, pp. 478–487.

151. Bennell, J., Scheithauer, G., Stoyan, Y. et al. Optimal clustering of a pair of irregular objects // *J Glob Optim*. 2015, 61, pp. 497–524.

152. Bortfeldt A., Wäscher G. Constraints in container loading – A state-of-the-art review // *European Journal of Operational Research*. 2013, vol. 229, no. 1, pp. 1–20.

153. Crainic T. Transportation Science Special Issue on Freight Transportation and Logistics, Part II // Transportation Science. 2016, vol. 50(4), pp. 1204-1205.

154. Yang W., Song H. Railway Container Terminal Station Layout and Operation Plan of Container Trucks // LISS 2014: Proceedings of 4th International Conference on Logistics, Informatics and Service Science, 2015, pp. 369–375.

155. Jaehn F., Otto A., Seifried K. Shunting operations at flat yards: retrieving freight railcars from storage tracks // OR Spectrum: Quantitative Approaches in Management, Springer. 2018, vol. 40(3), pp. 367–393.

156. Grebennik I., Lytvynenko O. Generating combinatorial sets with given properties // Cybern. Syst. Anal., 2012, vol. 48(6), pp. 890– 898.

157. Van De Walle B., Turoff M., Hiltz S. R. // Information Systems for Emergency Management. 2014. Business & Economics. 424 p.

158. <http://ieeexplore.ieee.org/document/6601662>

Додаток А

Список публікацій здобувача

1. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Задача балансной компоновки цилиндрических объектов с учетом ее комбинаторных особенностей // Біоніка інтелекту: науково-технічний журнал, 2017. №1 (88). С.22–28.
2. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Scheduling Freight Trains in Rail-rail Transshipment Yards with Train Arrangements // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA), 2017. Vol.9, No.10, pp.12-19. Scopus.
3. Гребеннік І.В., Коваленко А.А., Романова Т.Є., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбинаторные конфигурации в оптимизационных задачах балансной компоновки // Кібернетика та системний аналіз. 2018. т. 54 №2.– С. 55–67.
4. Grebennik I., Khriapkin O., Ovezgeldyyev A., Pisklakova V., Urniaieva I. (2019) The Concept of a Regional Information-Analytical System for Emergency Situations // In: Murayama Y., Veleev D., Zlateva P. (eds) Information Technology in Disaster Risk Reduction. ITDRR 2017. IFIP Advances in Information and Communication Technology, vol 516. Springer, Cham. Scopus.
5. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Pankratova Yu., Urniaieva I., Optimized Packing Clusters of Objects in a Rectangular Container // Mathematical Problems in Engineering. 2019. vol. 2019, Article ID 4136430, 12 pages. Scopus.
6. Romanova T., Litvinchev I., Grebennik I., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. (2020) Packing Convex 3D Objects with Special Geometric and Balancing Conditions // Chapter in contributed book "Intelligent Computing and Optimization", Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Computing and Optimization 2019 (ICO 2019) / Springer Optimization and its Applications, Vasant, P., Zelinka, I., Weber, G.-W. (Editors), Springer, New York, 273–281. Scopus.

7. Гребеннік І.В., Коваленко Г.А., Урняєва І.А., Шеховцов С.Б. Комбінаторні особливості задачі балансної компоновки 3D-об'єктів // Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (MPZIS-2015) 18-20 листопада 2015 р. Дніпропетровськ, Україна.

8. Урняєва І.А., Гребеннік І.В., Романова Т.Є., Шеховцов С.Б. Про задачу завантаження для інтермодальних контейнерних перевезень // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2016, Дніпро, 16-18 листопада 2016 р. – Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара. – С.224-225.

9. Коваленко Г., Урняєва І., Шеховцов С. Задача балансної компоновки 3D-об'єктів та її комбінаторні властивості // Матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ІСТ 2016, 12–17 вересня. –Харків–Коблево. – 2016.– С. 277–278.

10. Grebennik I., Khriapkin O., Pisklakova V., Urniaieva I. Concept of a regional information-analytical system for emergency situations // 2nd IFIP Conference on Information Technology in Disaster Risk Reduction ITDRR 2017, October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria.

11. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I. Combinatorial balance layout problem of cylindrical objects // 30 International Conf. “Problems of decision making under uncertainties”, August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania – P. 57.

12. Grebennik I., Dupas R., Lytvynenko O., Urniaieva I. Train arrangement in scheduling for Rail-rail transshipment yard // 7-th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

13. Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Multicriteria balance layout problems of 3D- objects // 7-th International

Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), October 25 – 27th, 2017, University of National and World Economy Sofia, Bulgaria.

14. Гребеннік І., Коваленко Г., Романова Т., Урняєва І., Шеховцов С. Метод розв'язання задач балансної компоновки // Матеріали 7-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології» ICT 2018, 10-15 вересня. –Харків – Коблево. – 2018. – С. 145–148.

15. Grebennik I., Romanova T., Urniaieva I., Shekhovtsov S. Mathematical Model of Balanced Layout Problem Using Combinatorial Configurations // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 18–21. Scopus.

16. Urniaieva I., Grebennik I., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A. Muticriteria Model of Balanced Layout Problem of 3D-Objects // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2018), June 1 – 3, 2018, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 22–25. Scopus.

17. Grebennik I., Dupas R., Urniaieva I., Kalaida N., Ivanov V. Mathematical Model of Containers Placement in Rail Terminal Operations Problem // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 129 –132. Scopus.

18. Urniaieva I., Pankratov A., Romanova T., Grebennik I., Dupas R., Shekhovtsov S. Balance Packing Problem of Cuboids in an Optimized Cylindrical Container // Proc. International Conference on Advanced Computer Information Technology (ACIT 2019, IEEE), June 5 – 7, 2019, Ceske Budejovice, Czech Republic. – P. 133–136. Scopus.

Додаток Б Акт про використання отриманих результатів в навчальному процесі

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Ректор Харківського
національного університету
радіоелектроніки

В.В. Семішевський
«16» 2020 р.



АКТ

**про використання результатів дисертаційної роботи Урняєвої Інни
Анатоліївни «Оптимізаційні задачі завантаження контейнерів:
математичні моделі, методи розв'язання і застосування»**

Ми, що нижче підписалися, начальник Навчального відділу ХНУРЕ Міхнова А.В., завідувач кафедри системотехніки професор Гребеннік І.В., професор кафедри системотехніки Вишняк М.Ю. склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи на здобуття ступеня доктора філософії Урняєвої Інни Анатоліївни, щодо математичного і комп'ютерного моделювання та методів розв'язання задач оптимізації завантаження контейнерів, впроваджені у навчальний процес на кафедрі системотехніки в дисципліні «Моделі та методи прийняття рішень в системному проектуванні» (тема 3.3 робочої програми І.В. Гребенніка, І.А. Урняєвої) відповідно до освітньо-наукової програми «Системне проектування» для здобувачів другого (магістерського рівня) вищої освіти. Комісія відзначає, що використання нових результатів наукових досліджень щодо сучасних комп'ютерних технологій (математичних моделей, методів, алгоритмів та програм), орієнтованих на розв'язання задач оптимальних компоновок у проектуванні, забезпечує поглиблене вивчення перспективних напрямків системного аналізу в системному проектуванні, а також знайомство студентів старших курсів з практичними аспектами застосування фундаментальних результатів при розв'язанні прикладних та наукових задач.

Начальник навчального відділу

А.В. Міхнова

Завідувач кафедри системотехніки, проф., д.т.н.

І.В. Гребеннік

Професор кафедри системотехніки, к.т.н., доц.

М.Ю. Вишняк