

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ЯЦИК МИКОЛА ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 519.6:537:004.94


**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МОДЕЛІ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ  
ШАРОВИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ СТРУКТУР**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,  
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 М.В. Яцик

Науковий керівник:

Удовенко Сергій Григорович, доктор технічних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи  
ідентичний за змістом з іншими, поданими  
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д 64.052.02



Л.В. Колесник

Харків – 2021

## АНОТАЦІЯ

*Яцик М.В.* Моделі та обчислювальні методи дослідження нелінійних шарових електродинамічних структур. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2021.

У дисертаційній роботі запропоновано рішення актуальної науково-практичної задачі розробки математичної моделі та обчислювальних алгоритмів розв'язання в резонансному діапазоні частот крайових задач розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки нелінійних шарових електродинамічних структур. Задача базується на вирішенні еквівалентної системи комплексних нелінійних інтегральних рівнянь до системи комплексних нелінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Основою запропонованого в роботі підходу до її рішення є самоузгоджений метод, тобто ітераційний метод, побудований на базі блокових ітераційних процедур.

У роботі також удосконалено метод аналізу на частотах випромінювання спектральних задач з індукованою діелектричною проникністю нелінійного шару.

Об'єднання самоузгодженого методу і спектрального аналізу дозволило вперше в межах єдиного підходу дослідити нелінійні резонансні процеси на частотах резонансного розсіяння і генерації коливань, вибираючи в якості частот збудження величини, що визначаються дійсними частинами комплексних власних частот індукованих спектральних задач.

Наведено критерії оцінки достовірності обчислень: умови виконання балансу енергії; критеріїв обумовленості матриць для задач випромінювання на чутливість до похибок обчислення та перевірки індукованих спектральних задач на виродження.

Нелінійні діелектрики з контрольованою діелектричною проникністю є предметом інтенсивних досліджень і починають знаходити широке застосування в технології пристроїв та електроніці. Було розроблено моделі резонансного розсіяння та генерування хвиль на ізотропній немагнітній нелінійній шаровій діелектричній структурі. Розглянуто хвильові пакети, що складаються з сильних електромагнітних полів на частотах збудження нелінійної структури, які призводять до генерації хвиль та слабких полів на кратних частотах і не викликають генерації гармонік, але впливають на процес розсіяння та генерації хвиль нелінійною структурою.

Електромагнітні хвилі для нелінійного шару з кубічною поляризованістю середовища можуть бути описані нескінченною системою нелінійних граничних задач. При дослідженні окремих нелінійних ефектів виявлено можливість обмежити цю систему кінцевою кількістю задач, а також залишити певні умови у поданні поляризації.

В умовах самоузгодженого системного методу та з урахуванням особливостей поведінки комплексних спектрів створено блочно-ітераційний метод чисельного дослідження резонансних властивостей випромінюваних багаточастотних коливань нелінійним об'єктом поблизу власних частот.

Описано результати застосування запропонованих методів для аналізу властивостей резонансної хвилі випромінювання на деяких частотах нелінійним об'єктом. Показано, що ефект зменшення прозорості нелінійної шаруватої структури при резонансному збудженні є наслідком енергообміну, який витрачається на генерацію вищих гармонік.

Показано можливість дослідження процесів енергообміну, які відбуваються під час випромінювання багаточастотних хвиль нелійними об'єктами, за допомогою спектральних властивостей цих об'єктів, індукованих полем падаючого поля.

Було проведено порівняння обчислювальних особливостей, отриманих в результаті використання комплексних квадратурних методів Сімпсона і Уеддла, з вищим ступенем точності. Проаналізовано результати для

енергетичного балансу, швидкості збіжності методів Сімпсона і Уеддла із збільшенням амплітуди збудження. Дано оцінку обумовленості матриць, що описують як наведені власні частоти, так і резонансні багаточастотні хвильові процеси випромінювання нелінійною шаровою структурою. Це дозволило отримати непрямий критерій для тестування виродження матриць у точках спектра і оцінити чутливість до обчислювальних помилок запропонованого методу, а також здійснити дослідження процесів хвилі, що випромінюється поблизу резонансу частоти.

Показано, що використання квадратурних формул вищого ступеня точності дозволяє зменшити розмірність систем рівнянь, що вирішуються, приблизно в 2.5 рази, що знижує обчислювальну складність запропонованого підходу. Це є суттєвою перевагою у вирішенні нових нелінійних задач випромінювання резонансних хвиль для шарових періодичних структур і відкриває перспективи для розвитку нових чисельно-аналітичних підходів в дослідженні нерегулярних властивостей хвильового випромінювання.

У розроблених рамках самоузгодженого вирішення систем нелінійних крайових задач було отримано ряд результатів обчислень. Розрахунки поблизу резонансних частот розсіяння та генерації демонструють ефект передачі від енергії хвилі на частоті розсіяння до енергії хвилі на частоті генерації для абсолютно непрозорих (в лінійному наближенні) нелінійних, деканалізуючих та каналізуючих шарів. Отримані результати можуть бути використані для вивчення процесів утворення періодичних структур.

У роботі досліджувались властивості розсіяння та генерації кубічно поляризованих шарових структур, які збуджуються досить сильним електромагнітним полем, зокрема, розглянуто тришарову структуру із знакоперемінною кубічною сприйнятливістю середовища та одношарову структуру з позитивною кубічною сприйнятливістю середовища.

Виявлено ефект перетворення при порушенні симетрії нелінійної задачі, спричинений різними амплітудами полів збудження. Вперше були враховані двосторонні діючі поля на частоті розсіяння і виявлені перетворення типів

коливань. Ефект спостерігався при порушенні симетрії нелінійної задачі, спричиненої різними амплітудами полів збудження. Цей ефект може бути враховано в чисельних та аналітичних методах синтезу та аналізу нелінійних структур в околі критичних точок амплітудно-фазової дисперсії, аналогічно до запропонованого в дисертації підходу.

В математичній моделі досліджуваних нелінійних структур використано систему крайових задач типу Штурма-Ліувілля та еквівалентну систему одновимірних нелінійних інтегральних рівнянь другого роду. Ефектів, які спричинені нелінійністю структури, досліджено за допомогою аналітичних та чисельних методів.

Досліджено динаміку резонансних хвильових процесів для шарових структур, що містять нелінійні середовища. В рамках розробленого самоузгодженого метода до вирішення систем нелінійних крайових задач показано, що за спектральними характеристиками структур, індукованих падаючими полями, можна аналізувати процеси енергообміну, що виникають через розсіяння та генерацію хвиль нелійними об'єктами. Таким чином, локальні критичні процеси обміну енергії відповідають мінімуму відносного  $Q$ -фактора розсіяних та генерованих коливань. Отримані результати можуть бути використані, зокрема, в задачах оптимізації нелінійних електродинамічних приладів, що володіють інтенсивними властивостями розсіяння та генерації.

Запропоновані математичні моделі можуть виявитися ефективними для визначення матеріальних та геометричних параметрів нелінійних структур з оптимальними резонансними властивостями розсіяння, генерації та накопичення енергії.

Окрема увага була зосереджена на дослідженні практичної поведінки різних чисельних алгоритмів для вирішення системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають внаслідок дискретизації інтегральних рівнянь за допомогою відповідних квадратурних формул Сімпсона і Уеддла. Було помічено, що лише самоузгоджений метод забезпечує закон балансу енергії.

Отримані результати дозволяють визначити рекомендації щодо

управління генерованим полем за допомогою інтенсивності збуджуючого поля. Зокрема, вони пропонують можливість проектування помножувача частоти та нелінійних діелектриків з керованою діелектричною проникністю.

Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 33 роботах: з них 7 статей (1 – розділ в монографії, що видана за кордоном, 2 – статті у міжнародних наукових періодичних виданнях, 2 – статті у наукових виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України з технічних наук, 2 – статті у міжнародних наукових періодичних виданнях, які включені до баз даних з технічних наук); 26 – матеріали наукових конференцій.

Ключові слова: нелінійні шарові структури, кубічна поляризуємість, математичне моделювання, самоузгоджений аналіз, резонансне розсіяння, генерація коливань, власні частоти, частоти розсіяння та генерації.

#### Список публікацій здобувача

1. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // In: Eds. L. Beilina and Y.V. Shestopalov, *Inverse Problems and Large-Scale Computations*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52. Switzerland: Springer International Publishing. 2013. Chapter 4. P. 41-56. (Web of Science, SciVerse Scopus).

2. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media // *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*. 2015. No.27. P. 13-21.

3. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Об одном подходе к анализу резонансного рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми и периодическими структурами // *Физические основы приборостроения*. 2017. Т. 6. № 1 (23). С. 106-117.

4. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Processes of Resonant Scattering and Generation of Waves by a Three-Layer Dielectric with a

Nonlinear Medium // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2017. Issue 33. P. 7-18.

5. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Методы анализа процессов рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми средами // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 46-55.

6. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Conversion of Excitation Energy into Generated Energy at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Advanced Electromagnetics. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 66-74. (Web of Science, SciVerse Scopus).

7. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Energy characteristics of a nonlinear layer at resonant frequencies of wave scattering and generation // Open Phys. 2019. Vol.17. Issue 1. P. 222-232. (Web of Science, SciVerse Scopus).

8. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Analyses of Process of Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Layered Structure // Proceedings of the 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'2010). Sevastopol, Ukraine, September 6-10, 2010. P. 68-70. (Web of Science, SciVerse Scopus).

9. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Nonlinear Dielectric Layer // Proceedings of the 15-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010). Tbilisi, Georgia, September 27-30, 2010. P. 127-131. (Web of Science, SciVerse Scopus).

10. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // Abstract of the Workshop on Large-Scale Modeling. Organized by Karlstad University and supported by Swedish Institute. Selma Spa, Sunne, Sweden, May 1-6, 2012. P. 20-21.

11. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Modeling and analysis of resonance scattering and generation of waves on cubically polarisable nonlinear

layered structures // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2012” (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 18-19.

12. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Weak fields at multiple frequencies and effects of scattering and generation of waves by nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2012” (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 19-20.

13. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Nonlinear Layered Structure and the Eigen Oscillations of the Linearised Problems near the Frequencies of Scattering and Generation // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 62.

14. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Self-consistent Problem of Scattering and Generation of Oscillations by a Nonlinear Layer Taking into Account the Influence of Weak Fields at Multiple Frequencies // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 706.

15. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Scattering and generation of waves by cubically polarisable layered media under the influence of weak fields // Proceedings of the 6-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2012). Sevastopol, Ukraine, September 17-21, 2012. P. 235-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

16. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Boundary-Value Problem of Resonant Scattering and Generation of Waves by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 7-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2014). Kharkiv, Ukraine, September 15-19, 2014. P. 92-95. (Web of Science, SciVerse Scopus).

17. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Multifunctional Nonlinear Layered Media by Resonant Scattering and Generation of Waves // Proceedings of the 19-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2014). Tbilisi, Georgia, September 22-25, 2014. P. 45-47. (Web of Science, SciVerse Scopus).



18. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Analysis of the generation properties of nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 19-20.

19. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Investigation of nonlinear cubically polarizable layered media with a controllable permittivity // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 20-21.

20. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of generated oscillations by a decanalizing nonlinear layer media // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 20-23.

21. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of scattered oscillations at the two-sided excitation of nonlinear layered structures // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 24-27.

22. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Type-Conversion of Oscillations by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 20-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2015). Lviv, Ukraine, 21-24 September, 2015. P. 29-32. (Web of Science, SciVerse Scopus).

23. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A mathematical model for resonance scattering and generation of oscillations by nonlinear layered or grating-like media // Abstract of the International Conference «Days on Diffraction 2016» (DD-2016). Saint Petersburg, Russia, 27 June - 1 July, 2016. P. 22.

24. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant scattering and third-harmonic generation by cubically polarizable grating structures // Proceedings of the 9-th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves,

Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW-2016). Kharkiv, Ukraine, 21-24 June, 2016. F-23. P. 1-4. (SciVerse Scopus).

25. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant Scattering and Generation of Oscillations for Nonlinear Layered and Grating-Like Media // Proceedings of the 8-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2016). Odessa, Ukraine, 5-11 September, 2016. P. 105-108. (Web of Science, SciVerse Scopus).

26. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Transparent Cubically Polarizable Media with Layered or Periodic Structures // Proceedings of the 21-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). Tbilisi, Georgia, 26-29 September, 2016. P. 13-16. (Web of Science, SciVerse Scopus).

27. Удовенко С.Г., Яцик Н.В. Компьютерное моделирование нелинейных структур рассеивания и генерации колебаний // Матеріали 4-ї Міжн. науково-технічної конференції «Проблеми інформатизації». Черкаси-Баку-БельскоБяла-Полтава-2016. Україна, Черкаси, листопад 3-4, 2016. С. 37.

28. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation Properties of Nonlinear Layered Objects and Eigen-Modes of the Linearized Problems // Proceedings of 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2017). Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Kyiv, Ukraine, 29 May - 2 June, 2017. P. 221-224. (Web of Science, SciVerse Scopus).

29. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Resonant Scattering and Wave Generation by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Proceedings of the XVIII-th International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2017). Kharkiv, Ukraine, 26-28 June, 2017. P. 10-13.

30. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Methods for the Analysis of Wave Scattering and Generation by Layered and Periodic Structures // Proceedings of the XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017). Dnipro, Ukraine, 25-28

September, 2017. P. 93-96. (Web of Science, SciVerse Scopus).

31. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Computation of Excitation Frequencies for Nonlinear Wave Scattering and Generation Processes // Proceedings of the 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2018). Odessa, Ukraine, 4-7 September, 2018. P. 234-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

32. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Numerical Specifics in Nonlinear Layer Computation Near Eigen Frequencies of Scattering and Generation // Proceedings of the XXIII-rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018). Tbilisi, Georgia, 24-27 September, 2018. P. 47-50. (Web of Science, SciVerse Scopus).

33. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generating Properties of Waves at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Proceedings of 2019 IEEE 2-nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2019). Lviv, Ukraine, 2-6 July, 2019. P. 153-156. (Web of Science, SciVerse Scopus).

## ABSTRACT

Yatsyk M.V. Models and computational methods for the investigation of nonlinear layered electrodynamic structures. – Qualifying scientific work printed as a manuscript.

Dissertation for the degree of candidate of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 - Mathematical Modeling and Computational Methods. - Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2021.

In the dissertation, a solution to a challenging scientific and practical problem of developing a mathematical model and computational algorithms for solving boundary value problems of scattering and generation of third harmonic waves by means of nonlinear layered electrodynamic structures in the resonant frequency range

is proposed. The problem is based on solving an equivalent system of complex nonlinear integral Hammerstein equations, which, using quadrature formulas, is reduced to a system of complex nonlinear algebraic equations of the second kind. The developed algorithm for the numerical analysis is based on a self-consistent approach, that is, an iterative method based on block-iterative procedures.

In the work, algorithms are also constructed and the induced spectral problems are investigated at the frequencies of radiation (scattering and generation) - that is spectral problems with layers of induced dielectric permeability.

The combination of self-consistent and spectral analysis made it possible, for the first time, within the framework of a unified approach, to study nonlinear resonance processes at the frequencies of resonant scattering and generation of oscillations, choosing as the excitation frequencies the quantities determined by the real parts of the complex eigen frequencies of the induced spectral problems.

Criteria for evaluating the reliability of calculations are given: conditions for fulfilling the energy balance law; estimates of the condition number of the matrices of the radiation problems via the sensitivity of the self-consistent analysis to computational errors, as well as investigation of the matrices of induced spectral problems for degeneracy.

Nonlinear dielectrics with controllable permittivity are subject of intense studies and begin to find broad applications in device technology and electronics. We develop a model of resonance scattering and generation of waves on an isotropic nonmagnetic nonlinear layered dielectric structure excited by a packet of plane waves in the resonance frequency range in a selfconsistent formulation. Here, both the radio and optical frequency ranges are of interest. We consider wave packets consisting of both strong electromagnetic fields at the excitation frequency of the non-linear structure, leading to the generation of waves, and of weak fields at the multiple frequencies, which do not cause generation of harmonics but influence on the process of scattering and generation of waves by the non-linear structure.

The electromagnetic waves for a non-linear layer with a cubic polarisability of the medium can be described by an infinite system of non-linear boundary-value

problems. In the study of particular nonlinear effects it proves to be possible to restrict this system to a finite number of problems, and also to leave certain terms in the representation of the polarisation.

In the setting of a coupled system approach and taking into special account the behaviour of the complex spectra, a block-iterative scheme for the numerical exploration of the resonance properties of radiated multi-frequency oscillations by a nonlinear object in the vicinity of the eigenvalues of induced eigenvalue problems is discussed.

The results of numerical investigations of the properties of resonant wave radiation at multiple frequencies by a nonlinear object are described. It could be observed that the effect of the transparency diminution of a nonreflecting nonlinear layered structure at the resonant excitation is a consequence of the energy exchange that is expended for the generation of higher harmonics.

It has been demonstrated that it is possible to study the energy exchange processes occurring during multifrequency wave radiation by nonlinear objects indirectly by means of the spectral properties of those objects induced by the incident field.

A comparison of the computational features, resulting from the use of the composite Simpson's and Weddle's quadrature rules (the latter with a higher degree of accuracy) is presented. Results for the energy balance, the convergence rate of the coupled system approach with increasing excitation amplitude are discussed. Estimations of the conditionalities of the matrices describing both the induced eigenmodes and the resonant multi-frequency wave radiation processes by a nonlinear layered structure are given. This made it possible to obtain an indirect criterion for testing the degeneration of the matrices of the eigenvalue problems at the points of the spectrum, and also to estimate the sensitiveness to computing errors of the algorithm or the investigation of the processes of wave radiated near resonant frequencies.

It is shown that the use of quadrature formulas of a higher degree of accuracy allows to decrease the dimension of the equation systems to be solved by about 2.5,

which saves considerable computing time. This is a significant advantage in solving new nonlinear problems of resonant wave radiation for both layered as well as layered periodic structures. It opens the prospects for the development of new numerical-analytical approaches to the investigation of irregular properties of wave radiation.

The computational results are obtained within the developed framework of self-consistent solution of the systems of nonlinear boundary value problems. Calculations near the resonance frequencies of scattering and generation demonstrate the transfer effect from the wave energy at the scattering frequency to the wave energy at the generation frequency for nonlinear, decanalizing and canelizing layers that are absolutely transparent (in the linear approximation). The results obtained can be used to study the properties of laser plasma and to describe the processes of spontaneous formation of periodic structures.

The type-conversion effect was observed at a symmetry violation of the nonlinear problem caused by different amplitudes of the excitation fields. For the first time, twosided acting fields at the scattering frequency were taken into account and a typeconversion of the oscillations could be observed. The latter effect was observed at a symmetry violation of the nonlinear problem caused by different amplitudes of the excitation fields. This effect may serve as a basis for numerical and analytical methods for the synthesis and analysis of nonlinear structures in the vicinity of critical points of the amplitude-phase dispersion, similar to the approach developed in the papers

The dynamics of resonant wave processes for layered structures containing nonlinear media has been investigated. In the framework of the developed selfconsistent approach for the solution of systems of nonlinear boundary value problems, it is shown that, according to the spectral characteristics of the structures induced by the incident fields, it is possible to indirectly analyze the energy exchange processes that arise through the scattering and generation of waves by nonlinear objects. Thus, local critical processes of energy exchange correspond to a minimum of the relative Q-factor of the scattered and generated oscillations. The obtained

results can be used, in particular, in problems of optimization of nonlinear electrodynamic devices possessing intense scattering and generation properties.

The proposed mathematical model can prove to be very effective in the synthesis of material and geometric parameters of nonlinear structures with optimal resonant properties of scattering, generation, and energy storage.

We have investigated the scattering and generation properties of cubically polarisable layered structures which are excited by a sufficiently strong electromagnetic field.

In particular, we considered a three-layered structure with sign-alternating cubic susceptibility of the medium and a single-layered structure with positive cubic susceptibility of the medium.

The mathematical model consists of a system of boundary-value problems of Sturm–Liouville type and of an equivalent system of one-dimensional nonlinear integral equations of the second kind. Various effects caused by the nonlinearity of the structure were investigated using analytical and numerical techniques.

The main focus was on the investigation of the practical behaviour of different numerical algorithms for the solution of the system of nonlinear algebraic equations resulting from the discretisation of the integral equations by means of appropriate quadrature rules. It could be observed that only the self-consistent approach ensures the physically important law of the balance of energy. The results principally indicate how to control the generated field by means of the intensity of the exciting field. In particular, they offer the possibility of designing a frequency multiplier and nonlinear dielectrics with controllable permittivity.

The materials of the thesis are sufficiently detailed in 33 papers: 7 of them (1 chapter of the monograph Springer International Publishing, 2 in international scientific journals, 2 in scientific journals, which are included in the list of professional editions of Ukraine in physical & mathematical and technical sciences, 2 in international scientific journal, which are included in the list of professional editions in physical & mathematical and technical sciences); 26 materials of scientific conferences.

Keywords: nonlinear layered structures, cubic polarizability, mathematical modeling, self-consistent analysis, resonant scattering, generation of oscillations, eigen frequencies, frequencies of scattering and generation.

#### List of publications of the applicant

1. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // In: Eds. L. Beilina and Y.V. Shestopalov, *Inverse Problems and Large-Scale Computations*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52. Switzerland: Springer International Publishing. 2013. Chapter 4. P. 41-56. (Web of Science, SciVerse Scopus).

2. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media // *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*. 2015. No.27. P. 13-21.

3. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Об одном подходе к анализу резонансного рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми и периодическими структурами // *Физические основы приборостроения*. 2017. Т. 6. № 1 (23). С. 106-117.

4. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Processes of Resonant Scattering and Generation of Waves by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*. 2017. Issue 33. P. 7-18.

5. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Методы анализа процессов рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми средами // *Физические основы приборостроения*. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 46-55.

6. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Conversion of Excitation Energy into Generated Energy at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // *Advanced Electromagnetics*. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 66-74. (Web



of Science, SciVerse Scopus).

7. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Energy characteristics of a nonlinear layer at resonant frequencies of wave scattering and generation // *Open Phys.* 2019. Vol.17. Issue 1. P. 222-232. (Web of Science, SciVerse Scopus).

8. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Analyses of Process of Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Layered Structure // *Proceedings of the 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'2010)*. Sevastopol, Ukraine, September 6-10, 2010. P. 68-70. (Web of Science, SciVerse Scopus).

9. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Nonlinear Dielectric Layer // *Proceedings of the 15-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010)*. Tbilisi, Georgia, September 27-30, 2010. P. 127-131. (Web of Science, SciVerse Scopus).

10. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // *Abstract of the Workshop on Large-Scale Modeling*. Organized by Karlstad University and supported by Swedish Institute. Selma Spa, Sunne, Sweden, May 1-6, 2012. P. 20-21.

11. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Modeling and analysis of resonance scattering and generation of waves on cubically polarisable nonlinear layered structures // *Abstract of the International Conference "Days on Diffraction 2012"* (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 18-19.

12. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Weak fields at multiple frequencies and effects of scattering and generation of waves by nonlinear layered media // *Abstract of the International Conference "Days on Diffraction 2012"* (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 19-20.

13. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Nonlinear Layered Structure and the Eigen Oscillations of the Linearised Problems near the Frequencies of Scattering and Generation // *Abstract of the Progress in Electromagnetics Research*

Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 62.

14. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Self-consistent Problem of Scattering and Generation of Oscillations by a Nonlinear Layer Taking into Account the Influence of Weak Fields at Multiple Frequencies // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 706.

15. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Scattering and generation of waves by cubically polarisable layered media under the influence of weak fields // Proceedings of the 6-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2012). Sevastopol, Ukraine, September 17-21, 2012. P. 235-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

16. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Boundary-Value Problem of Resonant Scattering and Generation of Waves by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 7-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2014). Kharkiv, Ukraine, September 15-19, 2014. P. 92-95. (Web of Science, SciVerse Scopus).

17. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Multifunctional Nonlinear Layered Media by Resonant Scattering and Generation of Waves // Proceedings of the 19-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2014). Tbilisi, Georgia, September 22-25, 2014. P. 45-47. (Web of Science, SciVerse Scopus).

18. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Analysis of the generation properties of nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 19-20.

19. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Investigation of nonlinear cubically polarizable layered media with a controllable permittivity // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 20-21.

20. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of

generated oscillations by a decanalizing nonlinear layer media // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 20-23.

21. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of scattered oscillations at the two-sided excitation of nonlinear layered structures // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 24-27.

22. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Type-Conversion of Oscillations by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 20-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2015). Lviv, Ukraine, 21-24 September, 2015. P. 29-32. (Web of Science, SciVerse Scopus).

23. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A mathematical model for resonance scattering and generation of oscillations by nonlinear layered or grating-like media // Abstract of the International Conference «Days on Diffraction 2016» (DD-2016). Saint Petersburg, Russia, 27 June - 1 July, 2016. P. 22.

24. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant scattering and third-harmonic generation by cubically polarizable grating structures // Proceedings of the 9-th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW-2016). Kharkiv, Ukraine, 21-24 June, 2016. F-23. P. 1-4. (SciVerse Scopus).

25. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant Scattering and Generation of Oscillations for Nonlinear Layered and Grating-Like Media // Proceedings of the 8-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2016). Odessa, Ukraine, 5-11 September, 2016. P. 105-108. (Web of Science, SciVerse Scopus).

26. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Transparent Cubically Polarizable Media with Layered or Periodic Structures // Proceedings of the 21-th

International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). Tbilisi, Georgia, 26-29 September, 2016. P. 13-16. (Web of Science, SciVerse Scopus).

27. Удовенко С.Г., Яцик Н.В. Компьютерное моделирование нелинейных структур рассеивания и генерации колебаний // Матеріали 4-ї Міжн. науково-технічної конференції «Проблеми інформатизації». Черкаси-Баку-БельскоБяла-Полтава-2016. Україна, Черкаси, листопад 3-4, 2016. С. 37.

28. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation Properties of Nonlinear Layered Objects and Eigen-Modes of the Linearized Problems // Proceedings of 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2017). Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Kyiv, Ukraine, 29 May - 2 June, 2017. P. 221-224. (Web of Science, SciVerse Scopus).

29. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Resonant Scattering and Wave Generation by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Proceedings of the XVIII-th International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2017). Kharkiv, Ukraine, 26-28 June, 2017. P. 10-13.

30. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Methods for the Analysis of Wave Scattering and Generation by Layered and Periodic Structures // Proceedings of the XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017). Dnipro, Ukraine, 25-28 September, 2017. P. 93-96. (Web of Science, SciVerse Scopus).

31. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Computation of Excitation Frequencies for Nonlinear Wave Scattering and Generation Processes // Proceedings of the 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2018). Odessa, Ukraine, 4-7 September, 2018. P. 234-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

32. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Numerical Specifics in Nonlinear Layer Computation Near Eigen Frequencies of Scattering and Generation // Proceedings of the XXIII-rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse

Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018). Tbilisi, Georgia, 24-27 September, 2018. P. 47-50. (Web of Science, SciVerse Scopus).

33. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generating Properties of Waves at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Proceedings of 2019 IEEE 2-nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2019). Lviv, Ukraine, 2-6 July, 2019. P. 153-156. (Web of Science, SciVerse Scopus).

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ .....	25
ВСТУП.....	26
1 НЕЛІНІЙНІ ШАРОВІ СЕРЕДОВИЩА. СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСТОТАХ РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ .....	36
1.1 Нелінійне хвильове рівняння в просторі і часі .....	37
1.2 Система нелінійних рівнянь для хвиль в частотній області .....	41
1.3 Система нелінійних рівнянь при генерації третьої гармоніки.....	46
1.4 Квазіоднорідні електромагнітні поля і умова фазового синхронізму хвиль .....	50
1.5 Висновки по розділу.....	55
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ ТРЕТЬОЇ ГАРМОНІКИ .....	57
2.1 Постановка граничних задач розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки нелінійної шарової структури.....	57
2.2 Самоузгоджений чисельний аналіз систем нелінійних інтегральних рівнянь .....	63
2.3 Характеристики розсіяння і генерації нелінійної шарової структури.....	66
2.4 Метод заданого поля і самоузгоджене рішення .....	69
2.5 Самоузгоджений аналіз процесів розсіяння і генерації хвиль .....	78
2.5.1 Двостороннє збудження тришарової структури .....	78
2.5.2 Одношарова структура з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища .....	85
2.5.3 Генерація третьої гармоніки при наявності слабкого поля збудження нелінійного шару .....	89
2.6 Самоузгоджений аналіз абсолютно прозорих шарів .....	92
2.6.1 Шар з негативною сприйнятливістю середовища .....	93
2.6.2 Шар з позитивною сприйнятливістю середовища.....	95
2.7 Висновки по розділу.....	97

3 ІНДУКОВАНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ І ПРОЦЕС РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ ТРЕТЬОЇ ГАРМОНІКИ .....	99
3.1 Індуковані спектральні задачі.....	99
3.2 Алгоритм і характеристики власних режимів .....	105
3.3 Випромінювання нелінійного шару і індуковані власні режими при фіксованій частоті збудження .....	108
3.4 Динаміка резонансного випромінювання тришарової структури з нелінійним середовищем .....	114
3.4.1 Структура з негативною сприйнятливістю середовища. Резонанс розсіяння .....	115
3.4.2 Структура з негативною сприйнятливістю середовища. Резонанс генерації .....	118
3.4.3 Структура з позитивною сприйнятливістю середовища. Резонанс розсіяння .....	120
3.4.4 Структура з позитивною сприйнятливістю середовища. Резонанс генерації .....	123
3.5 Динаміка резонансного випромінювання нелінійної шарової структури з поглинанням .....	124
3.6 Висновки по розділу.....	127
4 МОДЕЛЮВАННЯ РЕЗОНАНСНИХ ПРОЦЕСІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ШАРУ.....	129
4.1 Алгоритм резонансного випромінювання нелінійного шару. Особливості обчислень на ріманових поверхнях. Критерії достовірності.....	129
4.2 Тришарові резонансні структури. Алгоритм на основі складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла.....	135
4.2.1 Резонансне випромінювання поблизу власних частот .....	136
4.2.2 Обчислення з використанням складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла .....	139
4.3 Нелінійний шар з позитивною сприйнятливістю середовища .....	146
4.4 Енергетичні властивості резонансного випромінювання абсолютно прозорого нелінійного шару.....	153

	24
4.4.1 Резонансне розсіяння і генерація нелінійного шару.....	154
4.4.2. Розсіяння і резонансна генерація нелінійного шару.....	158
4.5 Висновки по розділу.....	165
ВИСНОВКИ .....	167
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	169
ДОДАТОК А. Акт використання і впровадження результатів дисертаційних досліджень.....	182
ДОДАТОК Б. Список власних публікацій.....	184



## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

ЕОМ – електронна обчислювальна машина;

НВЧ – надвисокі частоти;

ТГВ – терагерцове випромінювання;

ІЧВ – інфрачервоне випромінювання;

СНІР – система нелінійних інтегральних рівнянь;

ЗП – задане поле (наближення/метод заданого поля – наближення/метод ЗП);

АР – алгебраїчне рівняння;

СУ (або SC) – самоузгоджений (або SC – the self-consistent);

ДП – діелектрична проникність;

ІСЗ – індукована спектральна задача;

ЧЗ – частота збудження.

## ВСТУП

У даний час спостерігається динамічний розвиток нелінійної оптики і радіофізики. Ці області фізики крім чисто теоретичної системи знань придбали також істотну практичну складову, що дозволило вирішити ряд важливих прикладних та інженерних задач у технічних системах. Дослідження нелінійних оптичних і електродинамічних процесів обумовили створення цілої низки практичних додатків. Зокрема вони сприяли розвитку лазерної техніки, спектроскопії, оптоволоконних ліній зв'язку, а також знайшли численні застосування в таких галузях як екологія та медицина.

**Актуальність теми.** Нелінійні діелектрики з керованою діелектричною проникністю інтенсивно досліджуються і знаходять застосування в оптиці, радіофізиці, приладобудуванні і електроніці [1-18]. Для сучасної електронної апаратури актуальним є підвищення багатofункціональності пристроїв і пошук нових науково-технічних рішень в області інформаційної та перетворюючої техніки. Розробка нових типів діелектриків, а також впровадження та виробництво сучасних пристроїв функціональної електроніки вимагають всебічного ознайомлення з властивостями цих матеріалів. Деякі важливі властивості твердих, рідких і газоподібних нелінійних середовищ дозволяють використовувати їх для перетворення енергії або інформації, модуляції, детектування, посилення, реєстрації, запам'ятовування, відображення і інших видів перетворення електричних і оптичних сигналів, що несуть інформацію.

Освоєння ТГВ частотного діапазону [17, 18], проміжного між НВЧ і оптичними хвилями, вимагає розвитку нових підходів і методів аналізу властивостей електродинамічних об'єктів. Особливо це відноситься до дослідження резонансних структур. Тут, в силу пропорційності характерного розміру електродинамічного об'єкта довжині хвилі, на перший план виходять строгі методи аналізу граничних лінійних і нелінійних задач радіофізики [9-16].

Тому актуальною є науково-технічна задача розвитку математичних методів аналізу лінійних і нелінійних електродинамічних структур в

резонансному діапазоні частот на основі рішення строгих граничних задач математичної фізики, і створення ефективних обчислювальних методів розв'язання задач розсіяння і генерації хвиль.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами.** Дисертаційна робота пов'язана з реалізацією планів і програм що виконувалися: на кафедрі електронних обчислювальних машин Харківського національного університету радіоелектроніки (ХНУРЕ), 2014-2019 рр.; у відділі теорії дифракції та дифракційної електроніки Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України (ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАНУ), 2010-2019 рр.; на кафедрі обчислювальної математики відділення математики Технічного університету Клаустхал, Німеччина, 2010-2019 рр.). Робота дисертанта пов'язана з реалізацією міжнародних програм що проводились спільно: Національною академією наук України (НАНУ), «Електродинаміка відновлення інформаційних параметрів природних середовищ з використанням атомарних функцій і вейвлетів», (грант №12.02.90425, 2012-2013); Шведським Інститутом та НАНУ, «Передові методи вирішення великомасштабних завдань для суперкомп'ютерів і паралельних обчислень», грант по програмі «Вісбі» Шведського Інституту, 2012-2013. Дисертаційна робота також є узагальненням результатів досліджень, які проводилися у відділі теорії дифракції і дифракційної електроніки (2007-2019 рр.) в ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАНУ у рамках держбюджетних тем: «Електродинаміка відкритих резонансних систем та періодичних структур із композитними матеріалами; розробка когерентних джерел і вимірювальних пристроїв міліметрового та субміліметрового діапазонів електромагнітних хвиль» (№ державної реєстрації (ДР) 0107U001082, 2007-2011 рр.), «Електродинаміка відкритих резонансних систем, періодичних структур із композитними матеріалами та антенних систем; прямі та зворотні задачі; розробка когерентних джерел, елементної бази і вимірювальних пристроїв міліметрового та субміліметрового діапазонів електромагнітних хвиль» (№ ДР 0111U010480, 2012-2016 рр.); «Генерація, посилення детектування та розповсюдження терагерцового випромінювання:

електродинамічне моделювання та експеримент» (№ ДР 0117U004034, 2017-2019 рр.); «Нові теоретичні та експериментальні методи в електродинамічному моделюванні, генерації та випромінюванні електромагнітних хвиль гігагерцового та терагерцового діапазонів частот» (№ ДР 0120U100980).

У рамках даної тематики здобувачем проведено математичне моделювання процесів резонансного розсіяння і генерації хвиль в нелінійних шарових електродинамічних структурах.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є побудова обчислювальних методів дослідження процесів резонансного розсіяння і генерації хвиль в нелінійних шарових електродинамічних структурах.

Для досягнення даної мети в дисертаційній роботі необхідно вирішити такі задачі:

– розробити обчислювальний самоузгоджений метод вирішення систем нелінійних задач; провести порівняння рішень нелінійних задач з використанням самоузгодженого аналізу і наближення заданого поля;

– розвинути обчислювальний метод аналізу спектральних задач з індукованими падаючим полем діелектричними проникностями; провести аналіз задач розсіяння і генерації хвиль та дослідити динаміку власних частот індукованих спектральних задач;

– розробити обчислювальні моделі аналізу резонансних властивостей розсіяння і генерації хвиль нелійними шаровими об'єктами поблизу власних частот індукованих спектральних задач;

– здійснити моделювання отриманих методів та провести перевірку виконання умови балансу енергії, критеріїв обумовленості матриць задач випромінювання на чутливість до похибок обчислення, а також матриць індукованих спектральних задач на виродженість.

*Об'єкт дослідження* – процеси резонансного розсіяння і генерації хвиль в нелінійних шарових електродинамічних структурах.

*Предмет дослідження* – обчислювальні методи аналізу процесів резонансного розсіяння і генерації хвиль в нелінійних кубічно-поляризованих

шарових структурах.

**Методи дослідження.** У роботі використані методи теорії крайових задач математичної фізики; теорії нелінійних інтегральних рівнянь, теорії функцій комплексних змінних і матричної алгебри. Наведені в дисертації результати отримані на основі строгого рішення систем нелінійних крайових задач математичної фізики. Математична модель граничної задачі зводиться до системи одномірних нелінійних інтегральних рівнянь. В основі чисельного аналізу лежить ітераційна процедура вирішення СНР. Використовуються квадратурні формули і блочно ітераційний метод, на кожному кроці якого вирішується система лінійних АР. Аналітичне продовження лінеаризованих задач в область комплексних значень частотного параметра дозволяє перейти також і до аналізу не самоспряжених однорідних граничних задач електродинаміки, тобто спектральних задач, де на ріманових поверхнях (області зміни дискретного спектра) відшукуються комплексні власні частоти, а також знаходяться власні поля, що відповідають спектру рішення однорідних лінійних задач з індукованим падаючим полем ДП. Застосування матричної алгебри дозволило не тільки об'єднати розроблені методи рішення систем нелінійних АР і рішення відповідних однорідних не самоспряжених ІСЗ, але і провести перевірку точності обчислень за величинами логарифма обумовленості матриць досліджуваних задач. Таким чином, в рамках СУ підходу побудовані алгоритми і проведено чисельний аналіз резонансних властивостей розсіяння і генерації хвиль нелінійними шаровими структурами. При цьому резонансна ЧЗ нелінійної структури визначається в процесі обчислення за величинами реальних складових комплексних власних частот ІСЗ. Для підтвердження достовірності отриманих теоретичних результатів використано критерії оцінки виродження матриць спектральних задач і чутливості алгоритму СУ аналізу до похибки.

**Наукова новизна отриманих результатів.** У рамках вирішення завдань дисертаційного дослідження отримані такі наукові результати, що виносяться на захист:

– уперше запропоновано самоузгоджений метод аналізу системи нелінійних граничних задач, що зводиться до вирішення еквівалентної системи нелінійних інтегральних рівнянь. Проведено порівняння самоузгодженого підходу з наближенням заданого поля. Показано, що хоча наближення заданого поля і дозволяє оцінити без істотних обчислювальних витрат деякі електродинамічні властивості досліджуваного нелінійного об'єкту, до нього не може бути застосована така важлива фізична характеристика як баланс енергії;

– удосконалено метод аналізу спектральних задач з індукованою діелектричною проникністю нелінійного шару. Згідно з цим методом доведено, що для нелінійних шарів на частотах збудження і генерації, близьких до власних частот, збільшення енергії з ростом амплітуди падаючого поля супроводжується монотонним зменшенням величини відносної добротності власних коливань. Це дозволяє побічно за результатами аналізу індукованих спектральних задач прогнозувати зони максимальної генерації енергії;

– удосконалено обчислювальні моделі аналізу резонансних властивостей розсіяння і генерації хвиль нелінійними шаровими структурами, що дозволяє в якості резонансних частот збудження вибирати величини, які визначаються дійсною частиною комплексних власних частот індукованих спектральних задач. Це суттєво спрощує аналіз резонансних процесів розсіяння та генерації коливань;

– отримав подальший розвиток підхід до проведення чисельного експерименту для аналізу резонансних процесів розсіяння та генерації коливань за рахунок використання таких критеріїв оцінки достовірності обчислень, як виконання умови балансу енергії, а також оцінки обумовленості матриць для задач випромінювання на чутливість до похибок обчислення та перевірки індукованих спектральних задач на виродження матриць.

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечується і підтверджується коректним використанням основних положень апробованого математичного апарату, несуперечність результатів теоретичних і чисельно-експериментальних досліджень, збігом з результатами науковців, які

застосовують підходи, в основі яких закладені інші методи. Зокрема, спостерігається збіг з результатами науковців з Німеччини, які аналізують еквівалентну задачу, в основі якої закладено вирішення системи нелінійних граничних задач типу Штурма-Ліувілля з використанням методу скінченних елементів.

**Практичне значення отриманих результатів.** В дисертаційній роботі проведено математичне моделювання та створені ефективні алгоритми численного аналізу нелінійних резонансних шарових діелектричних структур з керованою діелектричною проникністю. Інтерес до дослідження нелінійних об'єктів обумовлений можливістю їх застосування у фізиці, матеріалознавстві, аналітичній хімії, ідентифікації речовин, медичній діагностиці, томографії, екології, безпеці та інших прикладних задачах. Розробка нових типів діелектриків, а також впровадження та виробництво сучасних пристроїв функціональної електроніки вимагають всебічного дослідження властивостей електродинамічних структур. Важливі властивості твердих і рідких нелінійних середовищ дозволяють використовувати їх для перетворення енергії або інформації, модуляції, детектування, посилення, реєстрації, запам'ятовування, відображення і інших видів перетворення електричних і оптичних сигналів, що несуть інформацію. Все це визначає практичну значимість розроблених обчислювальних підходів самоузгодженого аналізу нелінійних шарових структур. Результати проведених досліджень дозволили виявити нові фізичні закономірності, що вказують на можливість підвищення багатофункціональності електронних приладів; проектування множників частоти і інших електродинамічних пристроїв, що містять нелінійні діелектрики. Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та методи використано у відділі теорії дифракції та дифракційної електроніки ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАНУ при проведенні науково-дослідних робіт зі створення електродинамічних засобів генерації, посилення, детектування та розповсюдження терагерцового випромінювання, а також в навчальному

процесі при підготовці аспірантів (акт впровадження від 20.10.2020). Здобуті в роботі результати пов'язані з реалізацією міжнародних програм, що спільно проводились НАН України та Шведським Інститутом.

**Особистий внесок здобувача.** Всі основні наукові і практичні результати, отримані в дисертаційній роботі, здобувач отримав самостійно. У спільно опублікованих роботах здобувачеві належить: в [19] – розробка обчислювального методу і порівняння підходів, заснованих на наближенні заданого поля і самоузгодженому вирішенні задачі резонансного розсіяння пакету хвиль на нелінійному шаруватому об'єкті; в [20] – розробка обчислювального методу двостороннього збудження нелінійної шарової структури та аналіз ефекту перетворення типу коливання, обумовленого порушенням симетрії нелінійної задачі при нерівності амплітуд полів збудження нелінійної структури; в [21] – участь у розробці єдиного підходу до аналізу резонансних процесів розсіяння і генерації коливань нелінійними поперечно-шаровими і поздовжньо періодичними середовищами, проведенні обчислень, які описують ефект перекачування більше 60% енергії падаючого поля в поле генерації для нелінійних, абсолютно прозорих шарів; в [22] – проведення чисельних експериментів опису динаміки процесів резонансного розсіяння і генерації хвиль нелінійною шаровою структурою поблизу резонансних частот індукованих спектральних задач; в [23] – порівняння обчислювальних особливостей алгоритмів, побудованих на основі складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла, це дозволило знизити розмірність досліджуваних систем рівнянь і скоротити час обчислень; в [24] – дослідження нового резонансного ефекту перетворення енергії збудження, прозорої структури в пройдене поле що пройшло в генерації третьої гармоніки; в [25] – перевірка балансу енергії, швидкості збіжності самоузгодженого підходу з ростом амплітуди збудження, а також оцінка чисел обумовленості матриць, що описують, як індуковані власні режими, так і процеси резонансного розсіяння і генерації хвиль нелінійної структури; в [26-50] – участь у проведенні чисельних експериментів, обговоренні результатів досліджень, підготовці тез доповідей.



**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації обговорені й опубліковані в 26 працях, з них 16 – індексуються в наукометричних базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection на 22 науково-технічних конференціях:

1. The 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'10). (Ukraine, Sevastopol. September 6-10, 2010) [26].

2. The XV-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010). (Georgia, Tbilisi, September 27-30, 2010) [27].

3. Workshop on Large-Scale Modeling. Organized by Karlstad University and supported by Swedish Institute. (Sweden, Sunne, Selma Spa, May 1-6, 2012) [28].

4. The International Conference “Days on Diffraction 2012” (DD-2012). (Russia, Saint Petersburg, May 28 - June 1, 2012) [29, 30].

5. The Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012 - Moscow). (Russia, Moscow, August 19-23, 2012) [31, 32].

6. The 6-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2012). (Ukraine, Sevastopol, September 17-21, 2012) [33].

7. The 7-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2014). (Ukraine, Kharkiv, September 15-19, 2014) [34].

8. The XIX-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2014). (Georgia, Tbilisi, September 22-25, 2014) [35].

9. The International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). (Russia, Saint Petersburg, May 25-29, 2015) [36, 37].

10. International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2015). (Ukraine, Sumy, June 8-13, 2015) [38, 39].

11. The XX-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2015). (Ukraine, Lviv, September 21-24, 2015) [40].

12. The International Conference «Days on Diffraction 2016» (DD-2016). (Russia, Saint Petersburg, June 27 - July 1, 2016) [41].

13. The 9-th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW-2016). (Ukraine, Kharkiv, June 21-24, 2016) [42].

14. The 8-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2016). (Ukraine, Odessa, September 5-11, 2016) [43].

15. The XXI-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). (Georgia, Tbilisi, September 26-29, 2016) [44].

16. Матеріали 4-ї Міжн. науково-технічної конференції «Проблеми інформатизації». Черкаси-Баку-БельськоБяла-Полтава-2016. (Україна, Черкаси, листопад 3-4, 2016).

17. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2017). (Ukraine, Kyiv, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, May 29 - June 2, 2017) [45].

18. The 18-th International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2017). (Ukraine, Kharkiv, June 26-28, 2017) [46].

19. The XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017). (Ukraine, Dnipro, September 25-28, 2017) [47].

20. The 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2018). (Ukraine, Odessa, September 4-7, 2018) [48].

21. The XXIII-rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018). (Georgia, Tbilisi, September 24-27, 2018) [49].

22. 2019 IEEE 2-nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2019). (Ukraine, Lviv, July 2-6, 2019) [50].

**Публікації.** Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 33 роботах: з них 7 науково-технічних статей [19-25] (1 – розділ в монографії, що

видана за кордоном [19], 2 – статті у міжнародних наукових періодичних виданнях [21, 23], 2 – статті у наукових виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України з технічних наук [20, 22], 2 – статті у міжнародних наукових періодичних виданнях, які включені до баз даних з фізико-математичних та технічних наук [24, 25]). Також 26 публікацій у збірниках матеріалів міжнародних наукових конференцій, симпозіумів та семінарів, з них 17 в збірниках праць [26, 27, 33-35, 38-40, 42-50] і 8 в збірниках тез [28-32, 36, 37, 41].

## **1 НЕЛІНІЙНІ ШАРОВІ СЕРЕДОВИЩА. СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСТОТАХ РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ**

У рамках сучасної енциклопедичної термінології обчислювальна математика – частина інформатики, що відноситься до методології застосування комп'ютерних засобів для вирішення задач науки, техніки, виробництва і практично всіх областей людської діяльності [51].

Математичне моделювання обчислювальних процесів характеризується наступними етапами: створення якісної моделі досліджуваного об'єкта або явища; створення відповідної математичної моделі; вивчення математичної задачі, яка породжує розглянуту модель; розробка (удосконалення) методу та алгоритму для вирішення отриманої математичної задачі з застосуванням комп'ютерних засобів та його програмна реалізація; аналіз результатів з накопиченням отриманих знань; управління об'єктом або явищем на базі отриманих знань і уточнення математичної моделі.

Досліджувана в дисертації математична модель заснована на строгому рішенні систем нелінійних граничних задач електродинаміки та орієнтована на вивчення процесів резонансного розсіяння і генерації хвиль шаровими кубічно-поляризованими об'єктами. При її реалізації простежуються всі зазначені вище етапи математичного моделювання.

На сьогодні існує чимало наукових праць, присвячених проблемам нелінійної фізики і оптики [1, 6, 7, 52-81], де, зокрема: наведені фундаментальні принципи нелінійної фізики; вказано на нелінійні явища, що виникають в результаті взаємодії випромінювання з речовиною (твердими тілами, рідинами, газом і плазмою); відзначено зростання числа досліджень в найрізноманітніших галузях науки і технологій з використанням випромінювання в ТГВ області спектра; наведені фізичні механізми нелінійної поляризованості середовищ.

Нелінійна поляризованість середовища, що обумовлена впливом електромагнітних полів, призводить до нелінійних ефектів, перебіг яких істотно залежить від інтенсивності збуджуючого поля. Поле викликає зміщення

електронних оболонок атомів щодо ядер, в результаті чого атоми набувають електричний дипольний момент та відбувається електронна поляризуємість діелектрика. Наряду з електронною можливі і інші види поляризуємість, наведеної зовнішнім полем. Відносні зміщення позитивних і негативних іонів під дією поля призводять до іонної поляризуємість. Якщо в середовищі є постійні диполі (дипольні молекули), то може спостерігатися орієнтаційна (обертальна) поляризуємість, обумовлена поворотом диполів у напрямку поля. Прояв того або іншого механізму поляризуємість залежить від величини поля збудження, частоти, речовини, його параметрів тощо.

### 1.1 Нелінійне хвильове рівняння в просторі і часі

Хвильові процеси в електродинаміці і оптиці в *просторово часових* координатах  $\{\mathbf{r}, t\} \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$  описуються векторними рівняннями Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

доповненими матеріальними рівняннями

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{M}$  – вектори напруженості електричного і магнітного поля, електричного зміщення і магнітної індукції, поляризуємість і магнітного моменту, відповідно.

Символом  $\nabla$  в (1.1) позначений векторний диференціальний оператор Гамільтона  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^\top$ ,  $\mathbf{R}$  – множина дійсних чисел, знак “ $\top$ ” означає транспонування.

Розглянемо шарову нелінійну структуру (рис. 1.1), розташовану в нескінченній пластині  $\{\mathbf{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 2\pi\delta\}$ .

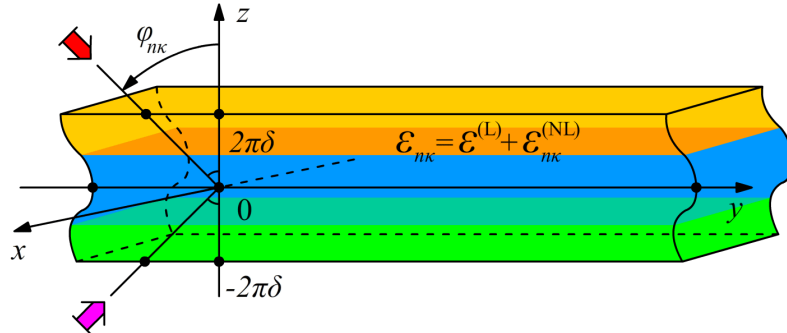


Рисунок 1.1 – Нелінійна діелектрична шарова структура

У загальному випадку, вектор поляризованості  $\mathbf{P}$  є нелінійним щодо напруженості електричного поля  $\mathbf{E}$  і нелокальним в часі і просторі [82]. У роботах [19-50], також як і в монографіях [4, 5, 11, 12, 16], проведено аналіз нелінійних середовищ без дисперсії. В цьому випадку в однорідних матеріалах вектор поляризованості носить тензорний характер. Його розкладання за ступенями компонент електричного поля може бути записано у вигляді наступного ряду:

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)}\mathbf{E} + (\chi^{(2)}\mathbf{E})\mathbf{E} + ((\chi^{(3)}\mathbf{E})\mathbf{E})\mathbf{E} + \dots, \quad (1.3)$$

де  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$  – тензори сприйнятливості середовища другого, третього і четвертого рангу з компонентами  $\{\chi_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^3$ ,  $\{\chi_{ijk}^{(2)}\}_{i,j,k=1}^3$  і  $\{\chi_{ijkl}^{(3)}\}_{i,j,k,l=1}^3$ , відповідно [83].

У разі середовищ інваріантних щодо операцій інверсії, відображення і обертання (зокрема в ізотропних речовинах, рідинах і газах) квадратичний член в (1.3) відсутній [7].

Представимо  $\mathbf{P}$  у вигляді суми лінійної і нелінійної частин

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)},$$

де  $\mathbf{P}^{(L)} = \chi^{(1)} \mathbf{E}$ .

Так само,  $\mathbf{D}^{(L)} = \epsilon \mathbf{E}$  при лінійної частини тензора діелектричної проникності  $\epsilon = \mathbf{I} + 4\pi\chi^{(1)}$ , де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця в  $\mathbf{C}^3$ . Вектор електричного зміщення представимо таким чином

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(L)} + 4\pi\mathbf{P}^{(NL)}. \quad (1.4)$$

Крім того передбачається, що навколишнє середовище немагнітне, тобто

$$\mathbf{M} = 0, \quad (1.5)$$

так що, згідно з (1.2)

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \quad (1.6)$$

Рівняння (1.1), (1.4) і (1.6) після виключення магнітного поля  $\mathbf{H}$  можна звести до одного векторного хвильового рівняння:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(L)} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} = 0. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.7) носить загальний характер і разом з матеріальними рівняннями (1.4) використовується в різних задачах електродинаміки і оптики. В кожному окремому випадку можуть бути застосовані інші наближення, що дозволяють спростити його форму (зокрема, другий доданок в (1.7) в ряді випадків може бути опущено). Одним з таких випадків є дослідження ізотропних середовищ, де

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{(L)} \mathbf{I}$$

зі скалярною (можливо комплексною) функцією  $\varepsilon^{(L)}$ . Тоді

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) = \nabla \varepsilon^{(L)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon^{(L)} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (1.8)$$

З (1.1), (1.4) і (1.8) випливає, що

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)} = \\ &= \nabla \varepsilon^{(L)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon^{(L)} \nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}, \end{aligned}$$

отже

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon^{(L)}} \nabla \varepsilon^{(L)} \cdot \mathbf{E} - \frac{4\pi}{\varepsilon^{(L)}} \nabla \cdot \mathbf{P}^{(NL)}. \quad (1.9)$$

Крім того, перший доданок в (1.9) зникає, якщо розглянута структура є поперечно неоднорідною вздовж  $z$ , тобто  $\varepsilon^{(L)} = \varepsilon^{(L)}(z)$ , якщо хвиля лінійно  $E$ -поляризована. В цьому випадку  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)^\top$  та  $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)^\top$ , де електричне поле  $\mathbf{E}$  є однорідним уздовж координати  $x$ , тобто

$$\mathbf{E}(r, t) = (E_x(t; y, z), 0, 0)^\top, \quad (1.10)$$

що виконується для лінійних середовищ, зокрема для середовища поза шару.

В шарі, розкладання (1.3) разом з (1.10) вказує на те, що вектор  $\mathbf{P}^{(NL)}$  має тільки один нетривіальний компонент однорідний вздовж координати  $x$ , тобто



$$\mathbf{P}^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, t) = \left( P_x^{(\text{NL})}(t; y, z), 0, 0 \right)^\top.$$

Тоді другий доданок в (1.9) зникає також і в шарі, що дозволяє отримати в просторово часовій області наступне нелінійне хвильове рівняння

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(\text{L})} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(\text{NL})} = 0, \quad (1.11)$$

де  $\nabla^2$  редукується до оператора Лапласа за координатами  $y$  і  $z$ , тобто  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ .

## 1.2 Система нелінійних рівнянь для хвиль в частотній області

Розглянемо математичну модель збудження нелінійного діелектричного шару електромагнітним полем, що складається з пакета плоских хвиль на кратних частотах  $s\omega > 0$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Модель випадку слабо нелінійного шару типу Керра, що не генерує хвиль на кратних гармоніках спектра, розглядається в роботах [9, 10, 84-90], а урахування можливої генерації поля на кратних частотах розглянуто в [16, 19-50, 91-103].

В цих роботах беруться до уваги кратні частоти  $s\omega > 0$ ,  $s \in \mathbf{N}$ , які генеруються нелінійною структурою при гармонійній часовій залежності виду  $\exp(-is\omega t)$ .

Перехід між часовою областю і частотною областю, здійснюється за допомогою прямого і зворотного перетворень Фур'є:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \exp(i\tilde{\omega}t) dt, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) \exp(-i\tilde{\omega}t) d\tilde{\omega}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{F}$  – одне з векторних полів ( $\mathbf{E}$  або  $\mathbf{P}^{(\text{NL})}$ ).

Застосувавши формально перетворення Фур'є до рівняння (1.11), в частотній області отримуємо уявлення такого вигляду:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) + \frac{\varepsilon^{(\text{L})} \tilde{\omega}^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) + \frac{4\pi \tilde{\omega}^2}{c^2} \tilde{\mathbf{P}}^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) = 0. \quad (1.12)$$

Стаціонарна (тобто така, що має залежність від часу виду  $\sim \exp(-i\tilde{\omega}t)$ ) електромагнітна хвиля, яка розповсюджується в нелінійній діелектричній структурі, породжує поле, що містить всі кратні гармоніки [82, 104]. Тому, величини, які описують поведінку електромагнітного поля в часовій області рівнянням (1.11), можуть бути представлені рядами Фур'є:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbf{Z}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, s\omega) \exp(-is\omega t), \quad \mathbf{F} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{P}^{(\text{NL})}\}. \quad (1.13)$$

Застосувавши до (1.13) перетворення Фур'є, отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \sum_{s \in \mathbf{Z}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, s\omega) \exp(-is\omega t) \exp(i\tilde{\omega}t) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, s\omega) \delta(\tilde{\omega}, s\omega), \quad \mathbf{F} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{P}^{(\text{NL})}\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

де

$$\delta(s, s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \exp[i(s - s_0)t] dt -$$

дельта-функція Дірака.

Підставляючи (1.14) в (1.12), отримуємо в частотній області нескінченну

систему рівнянь щодо шуканих комплексних амплітуд Фур'є електромагнітного поля нелінійної структури:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, s\omega) + \frac{\varepsilon^{(L)}(s\omega)^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, s\omega) + \frac{4\pi(s\omega)^2}{c^2} \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, s\omega) = 0, \quad s \in \mathbf{Z}. \quad (1.15)$$

Для лінійних електродинамічних об'єктів рівняння системи (1.15) незалежні. У разі нелінійного об'єкта присутність функцій  $\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, s\omega)$  робить їх пов'язаними, так як кожна з цих гармонік залежить від серії гармонік  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, s\omega)$ . Дійсно, розглянемо трикомпонентне Е-поляризоване електромагнітне поле

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, s\omega) &= (E_x(s\omega; y, z), 0, 0)^\top, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, s\omega) &= (0, H_y(s\omega; y, z), H_z(s\omega; y, z))^\top. \end{aligned}$$

Наявність однієї компоненти в полі  $\mathbf{E}$  дозволяє розглядати (1.15) як систему скалярних рівнянь щодо шуканої  $E_x$  складової електромагнітного поля:

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}, s\omega) + \frac{\varepsilon^{(L)}(s\omega)^2}{c^2} E_x(\mathbf{r}, s\omega) + \frac{4\pi(s\omega)^2}{c^2} P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, s\omega) = 0, \quad s \in \mathbf{N}. \quad (1.16)$$

При запису системи рівнянь (1.16) були враховані властивості коефіцієнтів Фур'є

$$E_x(\mathbf{r}, j\omega) = E_x^*(\mathbf{r}, -j\omega)$$

і відсутність впливу статичного електричного поля  $E_x(\mathbf{r}, s\omega)|_{s=0} = 0$  на

нелінійну структуру.

Для лінійних електродинамічних об'єктів рівняння системи (1.16) незалежні. У разі нелінійного об'єкта, присутність функцій  $P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, n\kappa)$  робить їх пов'язаними, так як кожна з цих гармонік залежить від серії гармонік  $E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$ , тобто, нелінійність в (1.16) обумовлена складовою з  $P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, s\omega)$  [16, 19, 91-93]. Обмежимося розглядом молодших членів ряду Тейлора в поданні нелінійної частини вектора поляризації в околі нульового значення напруженості електричного поля (згідно з (1.3)). В цьому випадку, єдина відмінна від нуля компонента вектора поляризації  $\mathbf{P}^{(\text{NL})} = (P_x^{(\text{NL})}, 0, 0)^T$  визначається тензором сприйнятливості четвертого порядку  $\chi^{(3)}$ , що характерно для *нелінійного ізотропного середовища з кубічною поляризуємостю*. У часовій області ця компонента бути подана в вигляді (згідно з (1.3) і (1.13)):

$$\begin{aligned}
 P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} P_x^{(\text{NL})}(\vec{r}, s\omega) \exp(-i\omega st) \doteq \\
 &\doteq \chi_{xxxx}^{(3)} E_x(\mathbf{r}, t) E_x(\mathbf{r}, t) E_x(\mathbf{r}, t) \doteq \\
 &\doteq \frac{1}{8} \sum_{\substack{n, m, p, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ n+m+p=s}} \chi_{xxxx}^{(3)}(s\omega; n\omega, m\omega, p\omega) E_x(\mathbf{r}, n\omega) E_x(\mathbf{r}, m\omega) E_x(\mathbf{r}, p\omega) \exp(-i\omega st),
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

де символ “ $\doteq$ ” означає, що в (1.17) складові більш високого порядку (див. (1.3)) не беруться до уваги. Застосувавши до (1.17) перетворення Фур'є за часом (1.14), отримуємо в частотному просторі розкладання складової вектора поляризації такого вигляду:

$$\begin{aligned}
P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, s\omega) &= \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n,m,p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ n+m+p=s}} \chi_{xxxx}^{(3)}(s\omega; n\omega, m\omega, p\omega) E_x(\mathbf{r}, n\omega) E_x(\mathbf{r}, m\omega) E_x(\mathbf{r}, p\omega) = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} 3 \chi_{xxxx}^{(3)}(s\omega; j\omega, -j\omega, s\omega) |E_x(\mathbf{r}, j\omega)|^2 E_x(\mathbf{r}, s\omega) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\substack{n,m,p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ n \neq -m \\ m \neq -p \\ n \neq -p \\ n+m+p=s}} \chi_{xxxx}^{(3)}(s\omega; n\omega, m\omega, p\omega) E_x(\mathbf{r}, n\omega) E_x(\mathbf{r}, m\omega) E_x(\mathbf{r}, p\omega).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Складові першої суми в заключному поданні (1.18) зазвичай називають членами фазової само модуляції (FSM) [5]. Вони безпосередньо входять в ліву частину кожного з рівнянь (1.16) (оскільки містять співмножник, що є шуканою функцією кожного з рівнянь (1.16) на заданій частоті  $s\omega$ ). Очевидно, що ці складові відповідають за варіацію діелектричної проникності нелінійного середовища, обумовлену зростанням амплітуди поля збудження. Позначимо їх  $P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, s\omega)$ . При їх запису враховано властивість коефіцієнтів Фур'є  $E_x(\mathbf{r}, j\omega) = E_x^*(\mathbf{r}, -j\omega)$ , а множники 3 з'являються як наслідок перестановок  $\{j\omega, -j\omega, s\omega\}$  трьох останніх параметрів в співмножниках  $\chi_{xxxx}^{(3)}(s\omega; j\omega, -j\omega, s\omega)$ .

Складові другої суми в поданні  $P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, s\omega)$  (див. (1.18)) відповідають за генерацію кратних гармонік. Одні з них генерують випромінювання на кратних частотах, інші описують взаємний вплив генерованих на кратних частотах полів на нелінійну структуру. Причому, ті з них, які на кратній частоті  $s\omega$  явно залежать від шуканого поля дифракції, індукують комплексну величину діелектричної проникності нелінійного середовища, позначимо їх  $P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, s\omega)$ . Решту складових другої суми в поданні  $P_x^{(\text{NL})}(\mathbf{r}, s\omega)$ , що можуть бути перенесені в праві частини відповідних рівнянь, позначимо за допомогою

$P_x^G(\mathbf{r}, s\omega)$ . Ці складові відіграють роль джерел, що генерують випромінювання.

Тоді (1.18) можна записати таким чином

$$P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, s\omega) \equiv P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, s\omega) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, s\omega) + P_x^G(\mathbf{r}, s\omega). \quad (1.19)$$

Аналіз процесора генерації і розсіяння хвиль нелінійними кубічно поляризованими діелектричними структурами зводиться до відшукування комплексних амплітуд Фур'є електромагнітного поля, що задовольняють нескінченній системі нелінійних рівнянь (1.16) з компонентою поляризованості середовища (1.18) [16, 19, 91-93].

### 1.3 Система нелінійних рівнянь при генерації третьої гармоніки

При дослідженні окремих нелінійних ефектів виявляється можливим в системі рівнянь (1.16) і поданні (1.18) обмежитися розглядом кінцевого числа рівнянь і доданків, відповідно. Розглянемо приклад оцінки нелінійних ефектів, викликаних породженням в нелінійному середовищі лише гармонік на трьох комбінованих частотах, в ситуації, обумовленій збудженням нелінійного об'єкта пакетом хвиль.

Надалі будемо розглядати рівняння в частотному просторі, і замість кругової частоти  $\omega$  будемо використовувати частоту  $\kappa$ , приймаючи до уваги відношення  $\kappa = \omega/c$ .

У разі, коли збудження складається з сильного хвильового поля частотою  $\kappa$  (яке генерує випромінювання на потроєній частоті) і слабких полів з частотами  $2\kappa$ ,  $3\kappa$  (що не приводять до генерації гармонік на відповідних кратних частотах), можна обмежитися розглядом трьох характерних рівнянь в (1.16) на трьох кратних частотах [16, 19, 91-93]. При цьому залишимо в поданні коефіцієнтів поляризації (1.18) окремі відмінні від нуля складові, що характеризують досліджувану фізичну задачу. У частотному просторі така

система подана в вигляді:

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, \kappa) + 4\pi\kappa^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, \kappa) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 2\kappa) + 4\pi(2\kappa)^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 3\kappa) + 4\pi(3\kappa)^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, 3\kappa) = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

де

$$\begin{aligned} P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa) = & \frac{3}{2} \left( \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; \kappa, -\kappa, n\kappa) |E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + \right. \\ & + \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; 2\kappa, -2\kappa, n\kappa) |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + \\ & \left. + \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; 3\kappa, -3\kappa, n\kappa) |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) E_x(\mathbf{r}, n\kappa) + \\ & + \delta_n^1 \frac{3}{4} \left\{ \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa; -\kappa, -\kappa, 3\kappa) [E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \right. \\ & \left. + \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa; 2\kappa, 2\kappa, -3\kappa) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa) \right\} + \\ & + \delta_n^2 \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)}(2\kappa; -2\kappa, \kappa, 3\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \\ & + \delta_n^3 \left\{ \frac{1}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; \kappa, \kappa, \kappa) E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; 2\kappa, 2\kappa, -\kappa) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\}, \quad n=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Аналіз даної задачі істотно спрощується шляхом зменшення числа заданих параметрів, коефіцієнтів кубічної сприйнятливості даного нелінійного середовища, згідно з правилом Клейнмана [7, 105]:

$$\left\{ \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; l\kappa, m\kappa, p\kappa) \equiv \chi_{xxxx}^{(3)} : l + m + p = n; l, m, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; n = 1, 2, 3 \right\}. \quad (1.21)$$

З урахуванням (1.19) і (1.21), систему рівнянь (1.20) запишемо так:

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, \kappa) + 4\pi\kappa^2 (P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, \kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa)) = -4\pi\kappa^2 P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, \kappa), \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 2\kappa) + 4\pi(2\kappa)^2 (P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, 2\kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa)) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 3\kappa) + 4\pi(3\kappa)^2 P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, 3\kappa) = -4\pi(3\kappa)^2 P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, 3\kappa); \end{cases} \quad (1.22)$$

де

$$P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) = \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} \left( |E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) E_x(\mathbf{r}, n\kappa);$$

$$n = 1, 2, 3;$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[ E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right]^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) =$$

$$= \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{\left[ E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right]^2}{E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa),$$

$$P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa);$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa) = \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) =$$

$$= \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa);$$

$$P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, 3\kappa) = \frac{1}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left\{ E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + 3E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\},$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv 0.$$

ДП нелінійного середовища, яка заповнює шар, подана в вигляді суми

$$\varepsilon_{n\kappa} = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)} \quad \text{при } |z| \leq 2\pi\delta. \quad (1.23)$$

При цьому, поза шару  $\varepsilon_{n\kappa} = 1$  при  $|z| > 2\pi\delta$  (рис. 1).

Лінійні і нелінійні доданки (1.23) діелектричної проникності шару задаються співмножниками при величинах  $(n\kappa)^2 E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$  в других і третіх



складових кожного з рівнянь системи (1.22). Так

$$\varepsilon^{(L)} = D_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) / E_x(\mathbf{r}, n\kappa) = 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}, \quad (1.24)$$

де враховані уявлення для лінійної частини комплексних компонент електричного зміщення

$$\begin{aligned} D_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) &= E_x(\mathbf{r}, n\kappa) + 4\pi P_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) = \\ &= \varepsilon^{(L)} E_x(\mathbf{r}, n\kappa) \end{aligned}$$

і поляризації

$$P_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) = \chi_{xx}^{(1)} E_x(\mathbf{r}, n\kappa).$$

Аналогічно, треті складові кожного з рівнянь системи (1.22) дозволяють записати нелінійні складові діелектричної проникності в вигляді

$$\varepsilon_{nk}^{(NL)} = 4\pi \left( P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa) \right) / E_x(\mathbf{r}, n\kappa). \quad (1.25)$$

У розглянутому випадку, лінійна частина діелектричної проникності (1.24) шарової структури залежать лише від поперечної координати  $z$  і має вигляд

$$\varepsilon^{(L)}(z) = 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}(z). \quad (1.26)$$

Записуючи нелінійну складову діелектричної проникності (1.25), з урахування умови Клейнмана (1.21), введемо функцію кубічної сприйнятливості нелінійного середовища

$$\alpha(z) = 6\pi\chi_{xxxx}^{(3)}(z). \quad (1.27)$$

Відзначимо, що для поперечно неоднорідних середовищ (шару або шарової структури) лінійна частина  $\varepsilon^{(L)}(z)$  діелектричної проникності яких описується кусково-гладкою або кусково-постійною функцією, а функція  $\alpha(z)$  також відповідно кусково-гладка або кусково-постійна. Це зауваження дозволяє в рамках однієї математичної моделі дослідити дифракційні характеристики як нелінійного шару, так і шарової структури, що складається з кінцевого числа нелінійних діелектричних шарів.

#### **1.4 Квазіоднорідні електромагнітні поля і умова фазового синхронізму хвиль**

При збудженні нелінійної структури полем плоскої хвилі (яке є квазіоднорідним уздовж координати  $y$ ), розсіяні та генеровані поля у поперек неоднорідному нелінійному діелектричному шарі також є *квазіоднорідними* уздовж координати  $y$ , тобто мають вигляд

$$E_x(nk; y, z) = U(nk; z) \exp(i\Phi_{nk} y), \quad \text{при } |z| \leq 2\pi\delta, \quad (1.28)$$

де  $U(nk; z)$  – комплексні величини амплітуди Фур'є електричного поля;  
 $\Phi_{nk} = nk \sin \varphi_{nk}$  – значення поздовжньої постійної поширення на частотах  $nk$ ;  
 $\varphi_{nk}$  – задані величини кутів збудження нелінійної структури.

Діелектричні проникності шарової структури на кратних частотах  $nk$  визначаються величинами поперечних складових комплексних амплітуд Фур'є розсіяних і генерованих полів, тобто перерозподілом енергії електричних полів на кратних частотах при заданому куті збудження нелінійної структури, залишаючи при цьому досліджувану структуру поперечно неоднорідною.

Умову поздовжньої однорідності діелектричного проникнення нелінійної шаруватої структури (уздовж координати  $y$ ) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk}^{(\text{NL})}(\alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) = \\ = \varepsilon_{nk}^{(\text{NL})}(\alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уявлення (1.25), (1.28) і умова (1.29) дозволяють записати фізично не суперечливі вимоги, які називають умовою фазового синхронізму хвиль [16, 21, 92],

$$\Phi_{nk} = n \cdot \Phi_{\kappa}, \text{ при } n = 1, 2, 3. \quad (1.30)$$

Наведемо виведення умови (1.30) згідно з (1.25) і (1.22)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk}^{(\text{NL})} = 4\pi \frac{P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, n\kappa)} + 4\pi \frac{P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, n\kappa)}; \\ n = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

де

$$P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) = \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} \left( |E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) E_x(\mathbf{r}, n\kappa);$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{[E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2}{E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa);$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa) = \frac{3}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa);$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv 0;$$

$$n = 1, 2, 3;$$

які, з урахуванням (1.27) і (1.28), запишемо так

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})} &= \alpha(z) \left( |E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) + \\
&+ \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2}{2E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \\
&+ \delta_n^2 \alpha(z) \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) = \\
&= \alpha(z) \left( |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 \right) + \\
&+ \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{2U(\kappa; z)} \exp(-3i\Phi_\kappa y) U(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{3\kappa} y) + \\
&+ \delta_n^2 \alpha(z) \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} \exp(-2i\Phi_{2\kappa} y) U(\kappa; z) \exp(i\Phi_\kappa y) U(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{3\kappa} y) = \\
&= \alpha(z) \left( |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 \right) + \\
&+ \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{2U(\kappa; z)} U(3\kappa; z) \exp[i(-3\Phi_\kappa + \Phi_{3\kappa}) y] + \\
&+ \delta_n^2 \alpha(z) \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \exp[i(-2\Phi_{2\kappa} + \Phi_\kappa + \Phi_{3\kappa}) y]; \\
& \hspace{20em} n=1, 2, 3;
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Вимога (1.29) справедлива, якщо

$$\begin{cases} -3\Phi_\kappa + \Phi_{3\kappa} = 0 \\ -2\Phi_{2\kappa} + \Phi_\kappa + \Phi_{3\kappa} = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

Із системи рівнянь (1.32) випливає справедливість умови фазового синхронізму хвиль (1.30).

ДП нелінійного шару, згідно з рівняннями (1.23), (1.26), (1.31), (1.30), подана в вигляді:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) = \\
& = \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)) = \\
& = \varepsilon^{(L)}(z) + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}(\alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)) = \\
& = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left( \sum_{n=1}^3 |U(n\kappa; z)|^2 + \delta_n^1 \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{2U(\kappa; z)} U(3\kappa; z) + \right. \\
& \left. + \delta_n^2 \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \right) = \\
& = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left\{ |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \delta_n^1 U^*(\kappa; z) \exp[-2i \arg U(\kappa; z)] U(3\kappa; z) + \right. \\
& \left. + \delta_n^2 \exp[-2i \arg U(2\kappa; z)] U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \right\} = \\
& = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left\{ |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \delta_n^1 |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp[i\{-3 \arg U(\kappa; z) + \arg U(3\kappa; z)\}] + \right. \quad (1.33) \\
& \left. + \delta_n^2 |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp[i\{-2 \arg U(2\kappa; z) + \arg U(\kappa; z) + \right. \\
& \left. + \arg U(3\kappa; z)\}] \right\}; \quad n=1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Аналіз квазіоднорідних полів  $E_x(n\kappa; y, z)$  (див. (1.28)) в поперек неоднорідному нелінійному діелектричному шарі дозволяє показати, що за умови фазового синхронізму хвиль (1.30), що вектори нелінійної поляризації  $P_x^G(\mathbf{r}, n\kappa)$  (які грають роль джерел генерації випромінювання в правих частинах системи рівнянь (1.22)) задовольняють умові квазіоднорідності.

Дійсно, на частотах  $n\kappa$ , праві частини першого і третього рівнянь системи (1.22) з урахуванням функції кубічної сприйнятливості нелінійного середовища (1.27), (1.28) і умови фазового синхронізму хвиль (1.30) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
-4\pi\kappa^2 P_x^G(\mathbf{r}, \kappa) &= -\kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa) = \\
&= -\kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} U^2(2\kappa; z) \exp(2i\Phi_{2\kappa} y) U^*(3\kappa; z) \exp(-i\Phi_{3\kappa} y) = \\
&= -\kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) \exp(4i\Phi_{\kappa} y - 3i\Phi_{\kappa} y) = \\
&= -\kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{\kappa} y);
\end{aligned} \tag{1.34}$$

та

$$\begin{aligned}
-4\pi(3\kappa)^2 P_x^G(\mathbf{r}, 3\kappa) &= -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\} = \\
&= -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) \exp(3i\Phi_{\kappa} y) + \right. \\
&\quad \left. + U^2(2\kappa; z) \exp(2i\Phi_{2\kappa} y) U^*(\kappa; z) \exp(-i\Phi_{\kappa} y) \right\} = \\
&= -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) \exp(3i\Phi_{\kappa} y) + \right. \\
&\quad \left. + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \exp(4i\Phi_{\kappa} y - i\Phi_{\kappa} y) \right\} = \\
&= -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \right\} \exp(3i\Phi_{\kappa} y) = \\
&= -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \right\} \exp(i\Phi_{3\kappa} y).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Рівняння (1.34) і (1.35) доводять виконання умови квазіоднорідності для компонент  $P_x^G(\mathbf{r}, n\kappa)$  при  $n = 1, 3$ .

Умова фазового синхронізму хвиль (1.30) (в даному випадку просторової квазіоднорідності електромагнітних полів уздовж координати  $y$  (1.28)), представимо також у вигляді

$$n\kappa \sin \varphi_{n\kappa} = n\kappa \sin \varphi_{\kappa}, \quad n = 1, 2, 3. \tag{1.36}$$

Звідси випливає, що задана величина  $\varphi_{\kappa}$  кута падіння плоскої хвилі на частоті  $\kappa$  збігається з можливими напрямками  $\varphi_{n\kappa} = \varphi_{\kappa}$  кутів падіння плоских хвиль на кратних частотах  $n\kappa$ . При цьому кути хвиль, що йдуть від шару, дорівнюють:  $\varphi_{n\kappa}^{\text{scat}} = -\varphi_{n\kappa}$  в зоні відбиття  $z > 2\pi\delta$  і  $\varphi_{n\kappa}^{\text{scat}} = \pi + \varphi_{n\kappa}$  в зоні проходження нелінійного шару  $z < -2\pi\delta$ . Ці кути відраховуються в площині  $u$ ,  $z$  від осі  $z$  проти годинникової стрілки.

## 1.5 Висновки по розділу

1. Здійснено аналіз наукових досліджень, де розглядаються системи рівнянь Максвелла, що описують нелінійні хвильові процеси ізотропної, немагнітної, лінійно поляризованої (Е-поляризація), нелінійної шарової діелектричної структури з кубічною поляризацією середовища. Відповідний цій системі процес в просторово часових координатах описується скалярним нелінійним хвильовим рівнянням щодо електричної складової компоненти електромагнітного поля. Опис нелінійних гармонійних процесів проводиться в частотній області. При переході з часової в частотну область нелінійне хвильове рівняння перетворюється в нескінченну систему нелінійних рівнянь в часткових похідних, що відповідають кратним частотам розсіяння і генерації хвиль.

2. Розглянуто систему нелінійних рівнянь в часткових похідних, що описує процес генерації третьої гармоніки при збудженні поперек неоднорідної нелінійної діелектричної шаруватої структури квазіоднорідним електромагнітним полем (пакетом плоских хвиль). Аналіз системи нелінійних рівнянь дозволяє отримати умову фазового синхронізму хвиль, тобто умову збереження властивості нелінійної діелектричної структури як шарового об'єкта.

3. Аналіз резонансних властивостей нелінійних електродинамічних об'єктів вимагає розвитку нових підходів, пов'язаних з застосуванням ефективних методів розв'язання граничних нелінійних задач радіофізики. Тому

актуальною є науково-технічна задача розвитку математичних моделей аналізу нелінійних електродинамічних структур в резонансному діапазоні частот на основі рішення строгих граничних задач математичної фізики, створення ефективних обчислювальних методів розв'язання задач розсіяння і генерації хвиль.

У зв'язку з цим в дисертаційній роботі передбачається вирішити такі задачі:

– розробити обчислювальний самоузгоджений метод вирішення систем нелінійних задач; провести порівняння рішень нелінійних задач з використанням самоузгодженого аналізу і наближення заданого поля;

– розвинути обчислювальний метод аналізу спектральних задач з індукованими падаючим полем діелектричними проникностями; провести аналіз задач розсіяння і генерації хвиль та дослідити динаміку власних частот індукованих спектральних задач;

– розробити обчислювальні моделі аналізу резонансних властивостей розсіяння і генерації хвиль нелінійними шаровими об'єктами поблизу власних частот індукованих спектральних задач;

– здійснити моделювання отриманих методів та провести перевірку виконання умови балансу енергії, критеріїв обумовленості матриць задач випромінювання на чутливість до похибок обчислення, а також матриць індукованих спектральних задач на виродженість.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [19, 21].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у переліку джерел посилання [1, 4–7, 9–12, 16, 19–105]



## 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ ТРЕТЬОЇ ГАРМОНІКИ

### 2.1 Постановка граничних задач розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки нелінійної шарової структури

Розглянемо задачу розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки при двосторонньому збудженні нелінійної, ізотропної, немагнітної, лінійно E-поляризованої

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, n\kappa) = (E_x(n\kappa; y, z), 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, n\kappa) = \left( 0, H_y \equiv \frac{1}{in\omega\mu_0} \frac{\partial E_x(n\kappa; y, z)}{\partial z}, H_z \equiv -\frac{1}{in\omega\mu_0} \frac{\partial E_x(n\kappa; y, z)}{\partial y} \right)^T,$$

поперечно неоднорідної  $\varepsilon^{(L)}(z) = \varepsilon_{xx}^{(L)}(z) = 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}(z)$  діелектричної шарової структури (рис. 1.1) з кубічною поляризуємістю середовища пакетами плоских хвиль. Кожен з пакетів збудження може містити окремо або одночасно сильні поля з частотою  $\kappa$  (що генерують поле на потроєній частоті) і слабкі поля з частотами  $2\kappa$  і  $3\kappa$  (які впливають на процес розсіяння і генерації третьої гармоніки та є внеском слабких електромагнітних полів), див. (1.22). Вплив статичного електричного поля не враховується, тобто  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, s\kappa|_{s=0}) = \mathbf{0}$ .

Задача розглядається в безрозмірних просторово-часових координатах  $\{x, y, z, t\}$  при гармонійній часовій залежності  $\exp(-in\omega t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , де  $\mathbb{N}$  – множина натуральних чисел. У цих координатах використовуються такі позначення: висота нелінійного шару  $4\pi\delta$ ,  $\omega = \kappa c$  – безрозмірна кругова частота;  $\kappa$  – безрозмірний частотний параметр (такий, що  $\kappa = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ), який характеризує відношення дійсної висоти нелінійного шару  $h$  до довжини хвилі збудження  $\lambda$ , тобто  $h/\lambda = 2\kappa\delta$ ;  $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$  з  $\text{Im}c = 0$  – безрозмірний

параметр, рівний по абсолютній величині швидкості світла в середовищі, що містить нелінійний шар;  $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$  – матеріальні параметри середовища.

Абсолютне значення істинних величин  $\{x', y', z', t'\}$ ,  $\omega'$  відновлюється за

$$\text{формулами } (x', y', z')^\top = \frac{h}{4\pi\delta}(x, y, z)^\top, \quad t' = \frac{h}{4\pi\delta}t, \quad \omega' = \frac{4\pi\delta}{h}\omega.$$

Поле збудження, що складається з пакетів плоских хвиль та відповідає умовам квазіоднорідності (1.28) і фазового синхронізму (1.30), можна подати у вигляді:

$$\left\{ \overline{E}_x^{\text{inc}}(nk; y, z) \right\}_{n=1}^3 \cup \left\{ \underline{E}_x^{\text{inc}}(nk; y, z) \right\}_{n=1}^3, \quad (2.1)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \overline{E}_x^{\text{inc}}(nk; y, z) \right] \\ \left[ \underline{E}_x^{\text{inc}}(nk; y, z) \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} a_{nk}^{\text{inc}} \\ b_{nk}^{\text{inc}} \end{array} \right\} \exp \left[ i(\Phi_{nk} y \mp \Gamma_{nk}(z \mp 2\pi\delta)) \right], \quad \left. \begin{array}{l} z > \\ z < \end{array} \right\} \pm 2\pi\delta \Bigg\}_{n=1}^3$$

з  $\delta > 0$ , амплітудами  $\left\{ a_{nk}^{\text{inc}}, b_{nk}^{\text{inc}} \right\}_{n=1}^3$ ; кутами падіння  $\left\{ \varphi_{nk}, \pi - \varphi_{nk} \right\}_{n=1}^3$ ,  $|\varphi_{nk}| < \pi/2$

(див. рис. 1.1), і частотами  $nk = n\omega/c = n2\pi/\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Досліджувана задача з урахуванням *правила Клеймана* (тобто рівності коефіцієнтів  $\chi_{xxx}^{(3)}$  при кратних частотах [7, 105]) зводиться до *системи нелінійних граничних задач* щодо шуканих комплексних амплітуд Фур'є повних полів розсіяння і генерації [16, 20]

$$\begin{aligned} E_1(nk; y, z) &= E_1^{\text{scat/gen}}(nk; y, z) + \chi(z - 2\pi\delta) \overline{E}_1^{\text{inc}}(nk; y, z) + \\ &+ \chi(-z - 2\pi\delta) \underline{E}_1^{\text{inc}}(nk; y, z), \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

які задовольняють, згідно (1.22), з урахуванням уявлень (1.33) - (1.35), системі нелінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 \varepsilon_\kappa(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, \kappa) = \\ \qquad \qquad \qquad = -\kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa), \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 \varepsilon_{2\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 \varepsilon_{3\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) = \\ \qquad \qquad \qquad = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\}, \end{array} \right.$$

що у компактній формі записується як

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta + (n\kappa)^2 \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\kappa; y, z), E_x(2\kappa; y, z), E_x(3\kappa; y, z)) \right] E_x(n\kappa; y, z) = \\ & = -\delta_n^1 \kappa^2 \alpha(z) \frac{1}{2} E_x^2(2\kappa; y, z) E_x^*(3\kappa; y, z) - \\ & - \delta_n^3 (3\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; y, z) + E_x^2(2\kappa; y, z) E_x^*(\kappa; y, z) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

з наступними узагальненими граничними умовами:

Умова 2.1 – умова просторової квазіоднорідності поля по координаті  $y$  (див. (1.28)):

$$E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), \quad n = 1, 2, 3;$$

Умова 2.2 – умова фазового синхронізму хвиль (див. (1.30), (1.36)):

$$\Phi_{n\kappa} = n \cdot \Phi_\kappa \quad \text{або} \quad \varphi_{n\kappa} = \varphi_\kappa, \quad n = 1, 2, 3;$$

Умова 2.3 – умова безперервності  $\mathbf{E}_{\text{tg}}$  і  $\mathbf{H}_{\text{tg}}$  на поверхнях шарів  $\varepsilon_{nk}$ :

$$\mathbf{E}_{\text{tg}}(nk; y, z) \text{ і } \mathbf{H}_{\text{tg}}(nk; y, z) \in C([-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]), \quad n = 1, 2, 3;$$

Умова 2.4 – умова випромінювання для полів розсіяння і генерації:

$$E_x^{\text{scat/gen}}(nk; y, z) = \begin{cases} a_{nk}^{\text{scat/gen}} \\ b_{nk}^{\text{scat/gen}} \end{cases} \exp \left[ i \left( \Phi_{nk} y \pm \Gamma_{nk} (z \mp 2\pi\delta) \right) \right], \quad \begin{matrix} z > \\ < \end{matrix} \pm 2\pi\delta,$$

для  $\text{Im}\Gamma_{nk} \equiv 0$  і  $\text{Re}\Gamma_{nk} > 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Умова 2.4 є математичним формулюванням обмежень випромінювання на нескінченності. Вона забезпечує фізично несуперечливу поведінку енергетичних характеристик розсіяння і генерації та гарантує відсутність хвиль, які приходять з нескінченності (тобто  $z = \pm\infty$ ) [106].

Тут:  $\chi(z) = \{0, z < 0; i1, z \geq 0\}$  – функція Хевісайда; символи надкреслення та підкреслення означають верхнє та нижнє поле збудження;  $\Delta = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа;  $\delta_n^k$  – символ Кронекера;  $\mathbf{E}_{\text{tg}}(nk; y, z)$  і  $\mathbf{H}_{\text{tg}}(nk; y, z)$  – тангенціальні компоненти векторів повних електромагнітних полів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$ ;  $\Gamma_{nk} = \sqrt{(nk)^2 - \Phi_{nk}^2}$  і  $\Phi_{nk} = nk \sin \varphi_{nk}$  – поперечні і поздовжні постійні поширення хвиль;

ДП досліджуваного нелінійного об'єкта визначається таким чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk} &= \left\{ 1, |z| > 2\pi\delta; \text{ і } \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{nk}^{(NL)}, |z| \leq 2\pi\delta \right\}, \\ \varepsilon^{(L)} &= 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}(z), \\ \varepsilon_{nk}^{(NL)} &= \alpha(z) \left[ \sum_{m=1}^3 |E_x(mk; y, z)|^2 + \left\{ \delta_n^1 \frac{[E_x^*(k; y, z)]^2}{2E_x(k; y, z)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_n^2 \frac{E_x^*(2k; y, z)}{E_x(2k; y, z)} E_x(k; y, z) \right\} E_x(3k; y, z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $\alpha(z) = 6\pi\chi_{xxx}^{(3)}(z)$  – функція кубічної сприйнятливості нелінійного середовища;  $\chi_{xx}^{(1)} \equiv \chi_{11}^{(1)}$  і  $\chi_{xxx}^{(3)} \equiv \chi_{1111}^{(3)}$  – компоненти тензорів сприйнятливості нелінійного середовища.

Шукані комплексні амплітуди Фур'є повних полів розсіяння і генерації на кратних частотах  $\{n\kappa\}_{n=1}^3$ , (задача (2.2), умови 2.1-2.4) можуть бути представлені у вигляді

$$E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y) = \begin{cases} a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))] + \\ + a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))], & z > 2\pi\delta, \\ U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), & |z| \leq 2\pi\delta, \\ b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta))] + \\ + b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta))], & z < -2\pi\delta, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

З огляду на (2.4), нелінійна система (2.2) (за умов 2.1-2.4) еквівалентна системі нелінійних крайових задач типу Штурма-Ліувілля [16, 92, 93]:

$$\begin{aligned} & \left[ d^2/dz^2 + \Gamma_{n\kappa}^2 - (n\kappa)^2 \{1 - \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z))\} \right] U(n\kappa; z) = \\ & = -(n\kappa)^2 \alpha(z) \frac{1}{2} \left[ \delta_n^1 U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) + \right. \\ & \quad \left. + \delta_n^3 \{U^3(\kappa; z)/3 + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z)\} \right], \quad |z| \leq 2\pi\delta, \quad (2.5) \\ & [i\Gamma_{n\kappa} - d/dz] U(n\kappa; 2\pi\delta) = 2i\Gamma_{n\kappa} \bar{U}^{\text{inc}}(n\kappa; 2\pi\delta), \\ & [i\Gamma_{n\kappa} + d/dz] U(n\kappa; -2\pi\delta) = 2i\Gamma_{n\kappa} \underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; -2\pi\delta), \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

а також системі одновимірних нелінійних інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій  $U(n\kappa; z) \in L_2(-2\pi\delta, 2\pi\delta)$ :

$$\begin{aligned}
& U(n\kappa; z) + \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - \xi|) \times \\
& \times \left[ 1 - \varepsilon_{n\kappa}(\xi, \alpha(\xi), U(\kappa; \xi), U(2\kappa; \xi), U(3\kappa; \xi)) \right] U(n\kappa; \xi) d\xi = \\
& = \delta_n^1 \frac{i(n\kappa)^2}{4\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - \xi|) \alpha(\xi) U^2(2\kappa; \xi) U^*(3\kappa; \xi) d\xi + \\
& + \delta_n^3 \frac{i(n\kappa)^2}{4\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - \xi|) \alpha(\xi) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; \xi) + U^2(2\kappa; \xi) U^*(\kappa; \xi) \right\} d\xi + \\
& + \overline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) + \underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z), \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Тут (в задачах (2.5) і (2.6)):

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) &= a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[-i\Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta)], \\
\underline{U}^{\text{inc}}(n\kappa; z) &= b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[+i\Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta)];
\end{aligned}$$

Згідно з (2.3), в силу виконання умов 2.1 і 2.2, ДП структури може бути подана в вигляді (див. 1.33):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n\kappa} \equiv \varepsilon_{n\kappa} &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})}, \quad \varepsilon^{(\text{L})} = 1 + 4\pi\chi_{11}^{(1)}(z), \\
\varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})} &= \alpha(z) \left( \sum_{m=1}^3 |U(m\kappa; z)|^2 + \delta_n^1 \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{2U(\kappa; z)} U(3\kappa; z) + \right. \\
& \left. + \delta_n^2 \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \right) = \alpha(z) \left\{ \sum_{m=1}^3 |U(m\kappa; z)|^2 + \right. \\
& + \delta_n^1 \frac{1}{2} |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp\left[ i \{ -3 \arg U(\kappa; z) + \arg U(3\kappa; z) \} \right] + \\
& \left. + \delta_n^2 |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp\left[ i \{ -2 \arg U(2\kappa; z) + \arg U(\kappa; z) + \arg U(3\kappa; z) \} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Рішення задачі (2.2) (за умов 2.1-2.4), представлене у формі (2.4), може бути отримано за допомогою (2.5) або (2.6) з використанням перерахункових формул:

$$U(n\kappa; 2\pi\delta) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} + a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}, \quad U(n\kappa; -2\pi\delta) = b_{n\kappa}^{\text{inc}} + b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}, \quad n = 1, 2, 3.$$

СНІР (2.6) можна розглядати як інтегральне представлення шуканих рішень задачі (2.2) за умов 2.1-2.4 (тобто рішень виду  $E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , див. (2.4)) для точок з координатами  $\{(y, z) : -\infty < y < \infty; |z| > 2\pi\delta\}$  поза нелінійного шару. Дійсно, відшукавши в області  $|z| \leq 2\pi\delta$  рішення СНІР (2.6) і підставивши його під знак інтегралів в (2.6), отримуємо явні вирази шуканих рішень  $U(n\kappa; z)$  для точок  $|z| > 2\pi\delta$ , що лежать поза нелінійним шаром на кожній з частот  $n\kappa$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

## 2.2 Самоузгоджений чисельний аналіз систем нелінійних інтегральних рівнянь

Застосування квадратурних формул дозволяє звести систему нелінійних інтегрованих рівнянь (2.6) до системи, що складається з систем комплексних нелінійних АР другого роду [16, 20-25]:

$$\begin{cases} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_\kappa = \mathbf{C}_\kappa(\mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) + \overline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{2\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{2\kappa} = \overline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{3\kappa} = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}) + \overline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}}, \end{cases}$$

яку в компактній формі представимо так

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{n\kappa} = \\ & = \delta_n^1 \mathbf{C}_\kappa(\mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) + \delta_n^3 \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}) + \overline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}}, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тут:  $\mathbf{U}_{n\kappa} = \{U_l(n\kappa)\}_{l=1}^N \approx \{U(n\kappa; z_l)\}_{l=1}^N$  – вектори невідомих шуканих рішень;  $\{z_l\}_{l=1}^N : z_1 = -2\pi\delta < \dots < z_l < \dots < z_N = 2\pi\delta$  – дискретний набір вузлів інтерполяції;  $\mathbf{B}_{n\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) = \{A_m K_{lm}(n\kappa, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})\}_{l,m=1}^N$  – нелінійні матриці з матричними елементами;

$$\begin{aligned}
K_{lm}(n\kappa, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) = & -\frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \exp(i\Gamma_{n\kappa} |z_l - z_m|) \times \\
& \times \left[ 1 - \left\{ \varepsilon^{(L)}(z_m) + \alpha(z_m) \left( |U_m(\kappa)|^2 + |U_m(2\kappa)|^2 + |U_m(3\kappa)|^2 + \right. \right. \right. \\
& + \delta_n^1 \frac{1}{2} |U_m(\kappa)| |U_m(3\kappa)| \exp\{i[-3\arg U_m(\kappa) + \arg U_m(3\kappa)]\} + \\
& \left. \left. \left. + \delta_n^2 |U_m(\kappa)| |U_m(3\kappa)| \exp\{i[-2\arg U_m(2\kappa) + \arg U_m(\kappa) + \arg U_m(3\kappa)]\} \right\} \right]; \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$A_m$  – коефіцієнти, які визначаються вибором квадратурної форми;

$\mathbf{I} = \{\delta_l^m\}_{l,m=1}^N$  – одинична матриця;

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_\kappa(\mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) = & \\
= & \left\{ \frac{i\kappa^2}{4\Gamma_\kappa} \sum_{m=1}^N A_m \exp(i\Gamma_\kappa |z_l - z_m|) \alpha(z_m) U_m^2(2\kappa) U_m^*(3\kappa) \right\}_{l=1}^N, \\
\mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}) = & \\
= & \left\{ \frac{i(3\kappa)^2}{4\Gamma_{3\kappa}} \sum_{m=1}^N A_m \exp(i\Gamma_{3\kappa} |z_l - z_m|) \alpha(z_m) \left[ \frac{1}{3} U_m^3(\kappa) + U_m^2(2\kappa) U_m^*(\kappa) \right] \right\}_{l=1}^N; \quad (2.10)
\end{aligned}$$

– вектори правих частин, що залежать від вибору квадратурної формули;

$$\bar{\mathbf{U}}_{n\kappa}^{\text{inc}} = \left\{ a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[-i\Gamma_{n\kappa} (z_l - 2\pi\delta)] \right\}_{l=1}^N, \quad \mathbf{U}_{n\kappa}^{\text{inc}} = \left\{ b_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[+i\Gamma_{n\kappa} (z_l + 2\pi\delta)] \right\}_{l=1}^N$$



– вектори, які визначаються пакетами падаючих хвиль.

Рішення (2.8) може бути отримано на основі блочно ітераційного методу, на кожному кроці якого вирішуються системи лінеаризованих АР:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa \left( \mathbf{U}_\kappa^{(s-1)}, \mathbf{U}_{2\kappa}^{(S_2(q))}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(S_3(q))} \right) \right] \mathbf{U}_\kappa^{(s)} \\ & = \mathbf{C}_\kappa \left( \mathbf{U}_{2\kappa}^{(S_2(q))}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(S_3(q))} \right) + \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \end{aligned} \right\}_{s=1}^{S_1(q): \eta_1(S_1(q)) < \xi} \right\}_{s=1}^{S_2(q): \eta_2(S_2(q)) < \xi} \right\}_{s=1}^{S_3(q): \eta_3(S_3(q)) < \xi} \Bigg\}_{q=1}^Q \quad (2.11)$$

де

$$\left\{ S_n(q) = s \in \mathbf{N} : \eta_n(s) = \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} - \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s-1)} \right\| / \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} \right\| < \xi \right\}$$

– індекси закінчення внутрішніх ітерацій в блоках на кожній з кратних частот  $n\kappa$ ,  $n = 1, 2, 3$ , для кроку зовнішньої ітерації з номером  $q \in \mathbf{N}$ ;

$$\left\{ Q = q : \max \left\{ \eta_1[S_1(q)], \eta_2[S_2(q)], \eta_3[S_3(q)] \right\} < \xi \right\}$$

– завершальний крок досліджуваної СУ ітераційного алгоритму (2.11) для заданої величини відносної похибки обчислення  $\xi > 0$ , що задовольняє вимозі  $\max \{ \eta_1(Q), \eta_2(Q), \eta_3(Q) \} < \xi$ .

Наближені розв'язання системи нелінійних рівнянь (2.8) описуються рішеннями системи лінеаризованих рівнянь (2.11) при заданих значеннях

індукованих ДП і функцій джерел в правих частинах рівнянь системи. На кожному кроці блочно ітераційним методом вирішуються системи комплексних лінеаризованих АР другого роду.

### 2.3 Характеристики розсіяння і генерації нелінійної шарової структури

Розглянемо збудження нелінійної шарової діелектричної структури пакетами плоских хвиль (2.1), які складаються з сильних полів на основній частоті  $\kappa = \kappa^{\text{inc}}$ , що генерують поля на потроєній частоті, і слабких полів на частотах  $2\kappa$  і  $3\kappa$ , які не приводять до генерації нових гармонік, але впливають на процес випромінювання енергії, тобто коли справедлива умова

$$0 < \max \left\{ |a_{2\kappa}^{\text{inc}}|, |a_{3\kappa}^{\text{inc}}|, |b_{2\kappa}^{\text{inc}}|, |b_{3\kappa}^{\text{inc}}| \right\} \ll \max \left\{ |a_{\kappa}^{\text{inc}}|, |b_{\kappa}^{\text{inc}}| \right\}. \quad (2.12)$$

Щоб описати властивості розсіяння і генерації нелінійної структури, введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} R_{n\kappa}^+ &= |a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2 / \sum_{s=1}^3 \left( |a_{s\kappa}^{\text{inc}}|^2 + |b_{s\kappa}^{\text{inc}}|^2 \right) \quad \text{для } z > 2\pi\delta, \\ R_{n\kappa}^- &= |b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2 / \sum_{s=1}^3 \left( |a_{s\kappa}^{\text{inc}}|^2 + |b_{s\kappa}^{\text{inc}}|^2 \right) \quad \text{для } z < -2\pi\delta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Величини  $R_{n\kappa}^+$ ,  $R_{n\kappa}^-$  характеризують відносні частки енергії розсіяння/генерації (тобто випромінювання) до повної енергії поля пакета хвиль що падає на шарову структуру.

Позначимо комплексні Фур'є амплітуди повних полів розсіяння та генерації на частотах  $n\kappa$  (згідно з (2.4)) таким чином:

$$U_{n\kappa} = U(n\kappa; z).$$

Введемо також позначення для енергії полів розсіяння та генерації на частотах  $n\kappa$ :

$$W_{n\kappa} = |a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2 + |b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2, \quad n = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Тоді відношення величин енергій:

$$W_{\{3\kappa\}} = W_{3\kappa} / W_{\kappa}, \quad (2.15)$$

що задає відносну частку енергії, яка генерується в третю гармоніку до енергії розсіяної першою гармонікою

$$W_{\{3\kappa\}} = W_{3\kappa} / \sum_{n=1}^3 W_{n\kappa}, \quad (2.16)$$

описує відносну частку енергії, що генерується в третю гармоніку до повної випроміненої (розсіяної та генерованої) енергії.

У разі непоглинаючих середовищ (задача (2.2), умови 2.1-2.4) з  $\text{Im} \varepsilon^{(L)}(z) \equiv 0$  рівняння балансу енергії представимо у вигляді

$$\sum_{n=1}^3 [R_{n\kappa}^+ + R_{n\kappa}^-] = 1. \quad (2.17)$$

Відзначимо, що вивід рівняння балансу енергії для нелінійних поглинаючих і не поглинаючих енергію шарових структур наведено в монографії [16].

В сенсі проведення обчислювальних експериментів інтерес представляє перевірка похибки виконання балансу енергії (2.17), що описується величиною

$$W^{(\text{Error})} = 1 - \sum_{n=1}^3 [R_{nk}^+ + R_{nk}^-]. \quad (2.18)$$

Далі будемо розглядати випадки одностороннього збудження досліджуваних структур, коли відсутнє збудження знизу

$$\left\{ \underline{E}_1^{\text{inc}}(nk; y, z) \equiv 0 : b_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3$$

або зверху

$$\left\{ \bar{E}_1^{\text{inc}}(nk; y, z) \equiv 0 : a_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3.$$

Коефіцієнти розсіяної/генерованої енергії за інтенсивністю повного поля збудження будемо позначати таким чином

$$\begin{aligned} R_{nk} \equiv R_{nk}^+ \quad \text{для} \quad \left\{ b_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3 \quad \text{та} \quad T_{nk} \equiv R_{nk}^+ \quad \text{для} \quad \left\{ a_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3 \quad \text{при} \quad z > 2\pi\delta, \\ T_{nk} \equiv R_{nk}^- \quad \text{для} \quad \left\{ b_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3 \quad \text{та} \quad R_{nk} \equiv R_{nk}^- \quad \text{для} \quad \left\{ a_{nk}^{\text{inc}} \equiv 0 \right\}_{n=1}^3 \quad \text{при} \quad z < 2\pi\delta, \end{aligned}$$

і називати відповідно коефіцієнтами відбиття  $R_{nk}$  і проходження  $T_{nk}$  за інтенсивністю повного поля збудження на частоті  $nk$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

При описі електромагнітних полів розсіяння, генерації, або власних полів діелектричного шару прийнята класифікація за типами, що ідентична класифікації, наведеній в [16, 19-25, 106]. У досліджуваному випадку Е-поляризації, позначення  $H_{m,l,p}$  (або  $TE_{m,l,p}$ ) означає тип поляризації хвилі поля.

Індекси вказують на кількість локальних максимумів  $|E_x|$  (або  $|U|$ ), так як  $|U| = |E_x|$  (згідно з (2.4)) в заповненому діелектричним шаром просторі вздовж координатних осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  (рис. 1.1). Оскільки досліджувані нами хвилі однорідні уздовж осі  $x$  і квазіоднорідні уздовж осі  $y$ , то будемо вивчати поля  $H_{0,0,p}$  (або  $TE_{0,0,p}$ ) типу, де індекс  $p$  дорівнює числу локальних максимумів функції  $|U|$  по аргументу  $z$  на відрізку  $[-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ .

## 2.4 Метод заданого поля і самоузгоджене рішення

Під наближенням ЗП розуміється послідовне рішення відповідаючих кратним частотам лінійних задач (нульове наближення) або послідовне рішення нелінійних задач (перше наближення). Метод ЗП є початковим наближенням ітераційної процедури СУ аналізу [19].

Розглянемо одностороннє збудження нелінійної структури електромагнітним полем, що падає зверху на частоті  $\kappa$ , тобто:

$$\begin{aligned} a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, \quad a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0 \\ \text{і} \\ b_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

У цьому випадку кількість рівнянь в системі (2.2) може бути зменшено до двох видаленням другого рівняння, вважаючи  $E_x(2\kappa; y, z) \equiv 0$  (отже, і  $U(2\kappa; z) \equiv 0$ ), а ДП (2.3) нелінійного шару при цьому записується так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\kappa; y, z), 0, E_x(3\kappa; y, z)) = \\ = \varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), 0, U(3\kappa; z)) = \\ = \varepsilon^{(L)}(z) + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}(\alpha(z), U(\kappa; z), 0, U(3\kappa; z)), \quad n = 1, 3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогічно, видалимо друге рівняння в системі, що складається з пов'язаних систем нелінійних АР (2.8).

Врахуємо рівності нулю векторів:  $\mathbf{U}_{2\kappa} = \mathbf{0}$  – в силу того, що  $U(2\kappa; z) \equiv 0$ ;  $\mathbf{C}_\kappa(\mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}) = \mathbf{0}$  – згідно з поданням (2.10);  $\underline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} = \overline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{U}}_{2\kappa}^{\text{inc}} = \overline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{U}}_{3\kappa}^{\text{inc}} = \mathbf{0}$  – згідно з умовою (2.19). Тоді (2.8) набуде вигляду

$$\begin{cases} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}) \right] \mathbf{U}_\kappa = \overline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}}, \\ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}) \right] \mathbf{U}_{3\kappa} = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}). \end{cases} \quad (2.21)$$

СУ (або SC) чисельний метод вирішення системи нелінійних рівнянь (метод SC) використовує ітераційний алгоритм (з урахуванням величини відносної помилки  $\xi > 0$ ), згідно з (2.11) реалізується блочно-ітераційний метод пошуку рішення (2.21):

$$\left\{ \left\{ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa^{(s-1)}, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s_3(q))}) \right] \mathbf{U}_\kappa^{(s)} = \overline{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \right\}_{s=1}^{S_1(q): \eta_1(S_1(q)) < \xi} \right\}_{q=1}^Q, \quad (2.22)$$

$$\left\{ \left\{ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(S_1(q))}, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s-1)}) \right] \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s)} = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(S_1(q))}, \mathbf{0}) \right\}_{s=1}^{S_3(q): \eta_3(S_3(q)) < \xi} \right\}_{q=1}^Q,$$

де

$$\eta_n(s) = \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} - \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s-1)} \right\| / \left\| \mathbf{U}_{n\kappa}^{(s)} \right\|, \quad n = 1, 3;$$

а індекс закінчення ітераційного процесу  $Q \in \mathbb{N}$  визначається вимогою

$$\max \{ \eta_1(Q), \eta_3(Q) \} < \xi.$$

В якості вихідних значень в першій системі при знаходженні  $\mathbf{U}_\kappa^{(s)}$  на початковому етапі ітерації обрано такі величини:  $\mathbf{U}_\kappa^{(0)} = \mathbf{U}_{3\kappa}^{(0)} = \mathbf{0}$  і  $S_3(1) = 0$ .

Перший крок цього алгоритму іноді називають методом ЗП [19]. Він складається з відшукування рішення лінійної задачі на ЧЗ (тобто визначення ЗП), після чого на частоті генерації здійснюється рішення лінійної задачі, яка наближено описує поле генерації, джерелом якого є задане поле. Такий алгоритм назовемо неітераційним методом ЗП нульового порядку лінійної апроксимації (метод 0):

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_\kappa^{(1)} &= \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}}, \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(1)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_{3\kappa}^{(1)} &= \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(1)}, \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

До методу ЗП можна також віднести перший крок алгоритму (2.22), де вирішуються нелінійні задачі. Згідно з цим методом визначаються в наближенні апроксимації Керра поля на ЧЗ (тобто задане поле) і поля, що відповідають наближенню апроксимації Керра на частоті генерації з урахуванням знайденого ЗП. Назвемо цей метод ітераційним методом ЗП першого порядку нелінійної апроксимації Керра (метод 1)

$$\begin{aligned} \left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa^{(s-1)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_\kappa^{(s)} = \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \right\}_{s=1}^{S_1: \eta_1(S_1) < \xi}, \\ \left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(S_1)}, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s-1)})] \mathbf{U}_{3\kappa}^{(s)} = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa^{(S_1)}, \mathbf{0}) \right\}_{s=1}^{S_3: \eta_3(S_3) < \xi}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Зупинимось на лінійному, неітераційному (2.23), і нелінійному, ітераційному (2.24) методах рішення нелінійної задачі розсіяння і генерації коливань методом ЗП на ЧЗ.

Ці методи об'єднує той факт, що як при вирішенні лінійних задач (2.23), так і нелінійних задач в наближенні апроксимації Керра (2.24), комплексна нелінійна складова діелектричної проникності не індукується, тобто тут

$$\text{Im } \varepsilon_{nk}^{(\text{NL})} \equiv 0.$$

Характеристики діелектричної проникності для цих методів наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Методи заданого поля для 0 – лінійного, 1 – першого нелінійного наближень і метод SC аналізу

Метод	Алгоритм	Діелектрична проникність
0	$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_\kappa &= \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_{3\kappa} &= \\ &= \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varepsilon_\kappa &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \varepsilon_{3\kappa} &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})} &\equiv \mathbf{0}, \quad \text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}) \equiv \mathbf{0} \end{aligned}$
1	$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{0})] \mathbf{U}_\kappa &= \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{3\kappa} &= \\ &= \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varepsilon_\kappa &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \varepsilon_{3\kappa} &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}), \\ \text{Im}(\varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}) &\equiv \mathbf{0}, \quad \text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}) \equiv \mathbf{0} \end{aligned}$
SC	$\begin{cases} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_\kappa = \bar{\mathbf{U}}_\kappa^{\text{inc}} \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa})] \mathbf{U}_{3\kappa} = \\ = \mathbf{C}_{3\kappa}(\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}) \end{cases}$	$\begin{aligned} \varepsilon_\kappa &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}), \\ \varepsilon_{3\kappa} &= \varepsilon^{(\text{L})} + \varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}(\alpha, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{0}, \mathbf{U}_{3\kappa}), \\ \text{Im}(\varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}) &\neq \mathbf{0}, \quad \text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}) \equiv \mathbf{0} \end{aligned}$

Знайдені методом ЗП рішення (2.23) (див. табл. 2.1, метод 0), і (2.24) (див. табл. 2.1, метод 1) є початковими для SC підходу (2.22) (див. табл. 2.1, метод SC). Зокрема, метод SC аналізу індукує в нелінійному середовищі комплексні проникності з  $\text{Im } \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})} \neq 0$  (див. табл. 2.1), що обумовлено витратами енергії, яка



пішла на генерацію поля третьої гармоніки [16, 19, 100]. Цього не відбувається, якщо обмежитися використанням методу 0 або 1, де  $\text{Im}(\varepsilon_{\kappa}^{(\text{NL})}) \equiv \mathbf{0}$  (табл. 2.1).

Відзначимо, що нульові значення  $\text{Im}(\varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}) \equiv \mathbf{0}$  в методах 0, 1 і SC (табл. 2.1) обумовлені припущенням про слабкість поля, яке на потроєній частоті не приводить до генерації вищих гармонік поля.

Порівняння результатів обчислень, здійснених на основі наведених вище методів, а саме: ЗП (2.23) (табл. 2.1, метод 0), (2.24) (табл. 2.1, метод 1) і SC підходу (2.22) (табл. 2.1, метод SC) наведемо на прикладі тришарової структури з діелектричної проникністю, представленою у формі (2.20), де

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0.01, z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3], \\ -0.01, z \in [-2\pi\delta/3, 2\pi\delta/3], \\ 0.01, z \in (2\pi\delta/3, 2\pi\delta], \end{cases} \quad \varepsilon^{(\text{L})}(z) = \begin{cases} 16, z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3], \\ 64, z \in [-2\pi\delta/3, 2\pi\delta/3], \\ 16, z \in (2\pi\delta/3, 2\pi\delta], \end{cases} \quad (2.25)$$

$\delta = 0.5$ ,  $\kappa^{\text{inc}} = \kappa = 0.25$ ,  $\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})$  і падаючого поля з амплітудами (2.19).

Результати обчислень представлені на рис. 2.1-2.3. Метод ЗП дозволяє отримувати попереднє, приблизне рішення задачі і оцінити без істотних обчислювальних витрат деякі з якісних особливостей коливань розсіяння і генерації (рис. 2.1, 2.3).

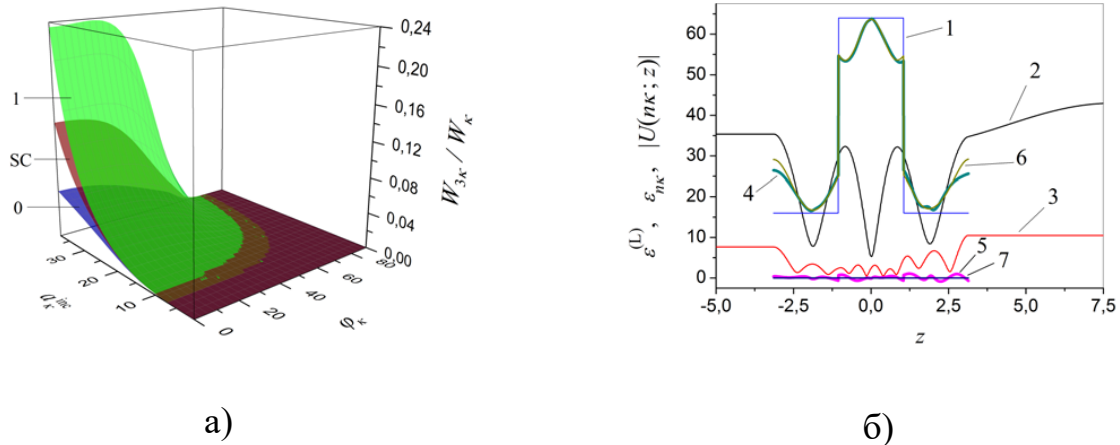
Властивості розсіяння і генерації нелінійного шару в досліджуваному випадку (2.19) можуть бути охарактеризовані такими коефіцієнтами відбиття/генерації і проходження/генерації (за інтенсивністю падаючого поля):

$$R_{n\kappa} = |a_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2 / |a_{\kappa}^{\text{inc}}|^2 \quad \text{і} \quad T_{n\kappa} = |b_{n\kappa}^{\text{scat/gen}}|^2 / |a_{\kappa}^{\text{inc}}|^2, \quad n = 1, 3. \quad (2.26)$$

В даному разі, для непоглинаючого середовища з  $\text{Im}(\varepsilon^{(\text{L})}) \equiv 0$ , рівняння балансу енергії

$$R_{\kappa} + T_{\kappa} + R_{3\kappa} + T_{3\kappa} = 1 \quad (2.27)$$

виконується при використанні SC формулювання (метод SC в табл. 2.1).



а – частка енергії, що генерується в третю гармоніку  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  :

0 – метод 0 і 1 – метод 1; SC – метод SC ;

б – криві, що характеризують властивості структури при SC аналізі для

$$a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38 \text{ і } \varphi_{\kappa} = 0^0 : 1 - \varepsilon^{(L)}, 2 - |U(\kappa; z)|, 3 - |U(3\kappa; z)|,$$

$$4 - \text{Re} \varepsilon_{\kappa}, 5 - \text{Im} \varepsilon_{\kappa}, 6 - \text{Re} \varepsilon_{3\kappa}, 7 - \text{Im} \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$$

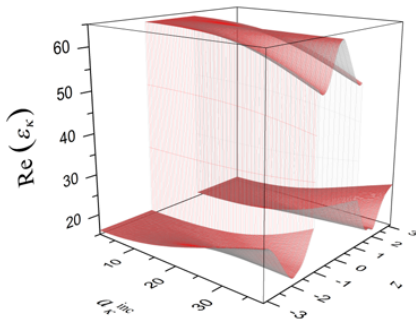
Рисунок 2.1 – Результати обчислень

Якщо скористатися поданням (2.14), рівняння балансу енергії набуде вигляду

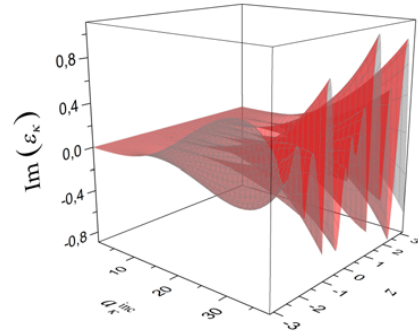
$$W_{\kappa} + W_{3\kappa} = |a_{n\kappa}^{\text{inc}}|^2.$$

У численних експериментах становить інтерес (2.26), див. (2.13), відношення  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ , див. (2.15), і величина, що характеризує порушення енергетичного балансу, див. (2.18):

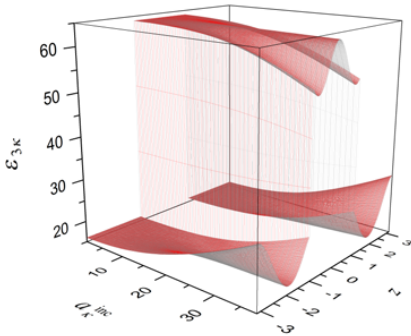
$$W^{(\text{Error})} = 1 - [R_{\kappa} + T_{\kappa} + R_{3\kappa} + T_{3\kappa}]. \quad (2.28)$$



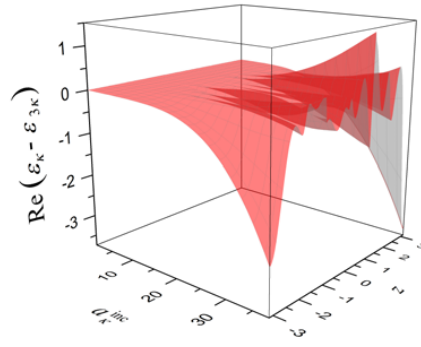
а)



б)



в)

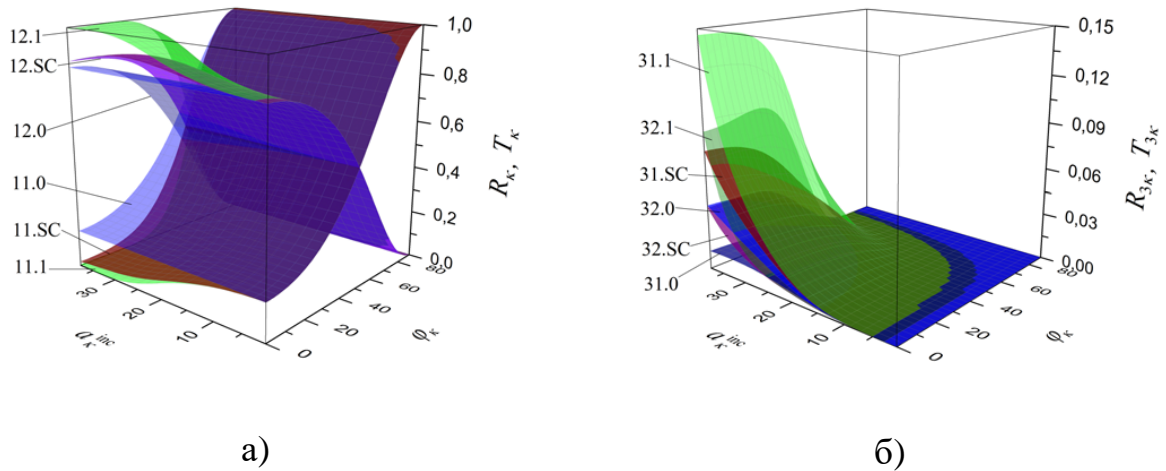


г)

а –  $\text{Re} \varepsilon_{\kappa}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, z)$ ; б –  $\text{Im} \varepsilon_{\kappa}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, z)$ ; в –  $\varepsilon_{3\kappa}$ ; г –  $\text{Re} \varepsilon_{\kappa}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, z) - \varepsilon_{3\kappa}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, z)$

Рисунок 2.2 – ДП при SC аналізі на ЧЗ  $\kappa = 0.25$  для  $\varphi_{\kappa} = 0^0$

У дослідженому діапазоні зміни параметрів розглядалися системи AP (2.22)-(2.24), отримані з використанням квадратурних формул Сімпсона. Порядок цих систем дорівнював:  $N = 501$ , а відносна помилка обчислень не перевищувала  $\xi = 10^{-7}$ . При цьому, в чисельних експериментах, при відсутності слабких полів на кратних частотах (2.19), тобто  $a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$  і  $b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$ , величина помилки (2.28) рівняння балансу енергії (2.27) SC задачі не перевищувала  $|W^{(\text{Error})}| < 10^{-8}$ .



а – розсіяння  $R_\kappa$  – 11.0, 11.1, 11.SC і  $T_\kappa$  – 12.0, 12.1, 12.SC для  $\kappa = 0.25$ ;  
 б – генерації  $R_{3\kappa}$  – 31.0, 31.1, 31.SC і  $T_{3\kappa}$  – 32.0, 32.1, 32.SC для  $3\kappa = 0.75$   
 Рисунок 2.3 – Поверхні коефіцієнтів отримані методом ЗП 11.0, 12.0, 31.0, 32.0 – метод 0 і 11.1, 12.1, 31.1, 32.1 – метод 1, а також з використанням SC аналізу 11.SC, 12.SC, 31.SC, 32.SC – метод SC

Нелінійним структурам в SC формулюванні властива наявність варіації уявної складової нелінійної діелектричної проникності  $\text{Im} \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}(a_\kappa^{\text{inc}}, z) \neq 0$  на ЧЗ  $\kappa$  (рис. 2.1 (б), рис. 2.2 (б), метод SC в таб. 2.1 і (2.3)). Така поведінка  $\text{Im} \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})}(a_\kappa^{\text{inc}}, z)$  пов'язана з витратами енергії, що пішла на генерацію третьої гармоніки.

До недоліків методу ЗП можна віднести невиконання умови балансу енергії (2.27). Дійсно, рішення задачі  $\mathbf{U}_\kappa$ , заданої першою системою рівнянь, відіграє роль ЗП і не залежить від рішення  $\mathbf{U}_{3\kappa}$  другої системи. Для цього наближення характерно

$$\text{Im} \varepsilon_\kappa^{(\text{NL})} \equiv 0, \text{Im} \varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})} \equiv 0,$$

згідно з методами 0 і 1 (табл. 2.1). Тут кожна із задач окремо задовольняє лише закону збереження енергії.

Для непоглинаючих середовищ (2.3)

$$\operatorname{Im} \varepsilon^{(L)} = 0,$$

тоді на ЧЗ нелінійної структури закон збереження має вигляд

$$R_{\kappa} + T_{\kappa} = 1. \quad (2.29)$$

Скориставшись (2.29), можна отримати співвідношення, які характеризують частку енергії, що генерується в третю гармоніку в наближенні ЗП ((2.23), (2.24) і метод 0 і 1 в таблиці 2.1). З урахуванням (2.14), (2.28), (2.29) отримуємо

$$W_{3\kappa}/W_{\kappa} = R_{3\kappa} + T_{3\kappa}$$

та

$$W^{(\text{Error})} = -[R_{3\kappa} + T_{3\kappa}],$$

звідки маємо

$$W_{3\kappa}/W_{\kappa} = -W^{(\text{Error})}. \quad (2.30)$$

Нехтування витратами енергії, яка пішла на генерацію третьої гармоніки, призводить до помилки балансу енергії, яка визначається відносною величиною енергії, що генерується (2.30). Очевидно, що хоча наближення ЗП і дозволяє оцінити без істотних обчислювальних витрат деякі характеристики досліджуваної задачі, до нього не може бути застосована така важлива фізична характеристика як баланс енергії. Виконання закону збереження енергії на

кожній з частот задачі не приводить до задоволення рівняння балансу енергії, що вказує на неприйнятність такого підходу. На відміну від наближення ЗП, SC метод позбавлений цих фізичних протиріч.

## 2.5 Самоузгоджений аналіз процесів розсіяння і генерації хвиль

### 2.5.1 Двостороннє збудження тришарової структури

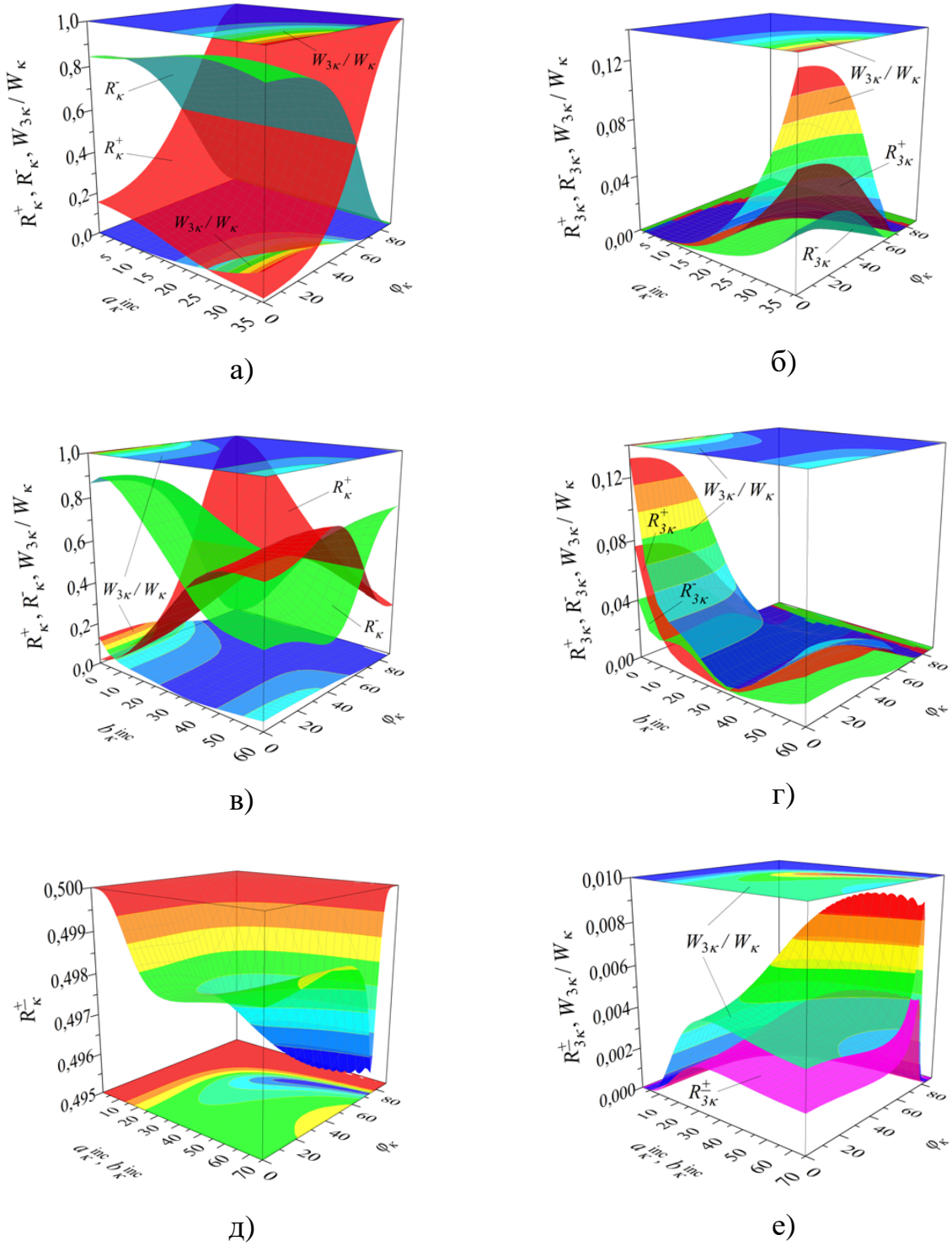
Застосуємо СУ аналіз при двосторонньому збудженні нелінійної структури до опису ефекту перетворення типу коливань [20, 34, 35, 39, 40]. Цей ефект спостерігається при порушенні симетрії нелінійної задачі і є обумовленим нерівністю амплітуд полів збудження.

Відзначимо, що нелінійний шар з  $\alpha < 0$  деканалізує енергію падаючого поля, а шар з  $\alpha > 0$ , навпаки, її каналізує [16, 89].

Дослідимо властивості тришарової нелінійної структури з параметрами (2.25) при її двосторонньому збудженні електромагнітними полями на основній частоті  $\kappa$ , падаючими під кутами  $\{\varphi_\kappa, 180^\circ - \varphi_\kappa\}$  з амплітудами  $\{a_\kappa^{\text{inc}}, b_\kappa^{\text{inc}}\}$  (згідно з рис. 1.1).

На рис. 2.4-2.7 наведено характеристики нелінійної тришарової структури, що складається з шару (з  $\alpha < 0$ ), який розміщено між двома шарами (з  $\alpha > 0$ ), при збудженні плоскими хвилями, що відповідають наступним значенням величин:

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa^{\text{inc}} = 0.25, \quad \varphi_\kappa \in [0^\circ, 90^\circ), \\ a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0, \quad b_\kappa^{\text{inc}} = \text{const}, \quad a_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0. \end{aligned}$$



а, б – при  $a_k^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $b_k^{\text{inc}} = 0$ ; в, г – при  $a_k^{\text{inc}} = 38$ ,  $b_k^{\text{inc}} \neq 0$ ; д, е – при  $a_k^{\text{inc}} = b_k^{\text{inc}}$

Рисунок 2.4 – Властивості нелінійної структури для кутів збудження

$\{\varphi_k, 180^\circ - \varphi_k\}$  з  $\varphi_k \in [0^\circ, 90^\circ)$  і амплітуд  $\{a_k^{\text{inc}}, b_k^{\text{inc}}\}$ ,  $R_{nk}^+ = R_{nk}^-$ ,  $n = 1, 3$

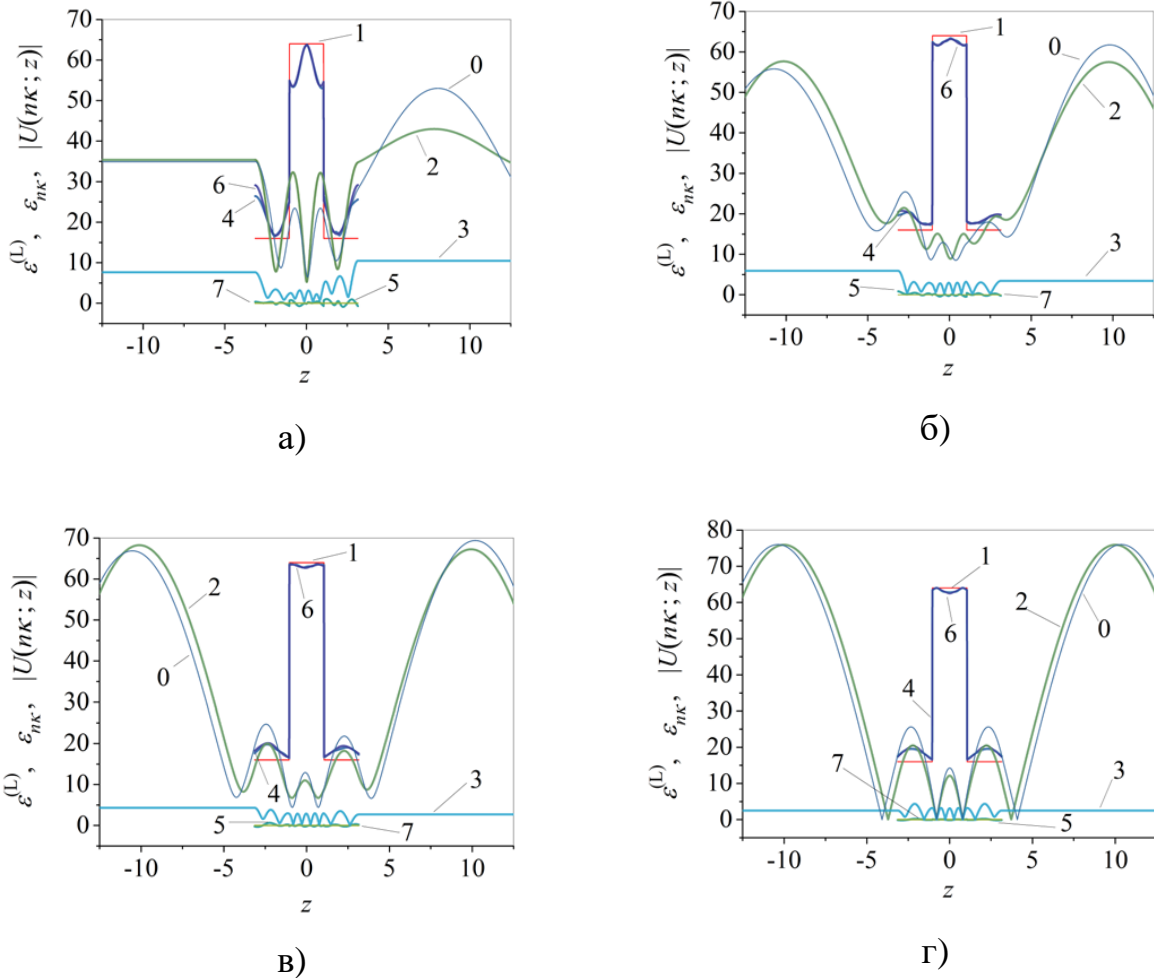
При односторонньому збудженні  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = 0$  досліджуваної шарової структури в діапазоні амплітуд  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [1, 38]$  і кутів  $\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})$  зі збільшенням амплітуди  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  спостерігається зростання частки енергії, що генерується  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ . Вона максимальна при нормальному  $\varphi_{\kappa} = 0^{\circ}$  збудженні, див. рис. 2.4 (а) і (б). Крім цього, в досліджуваному випадку зростання  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  супроводжується збільшенням прозорості шаруватої структури. Спостерігається каналізація енергії при мінімальному значенні коефіцієнта відбиття  $R_{\kappa}^{+} = 0.0172$  для амплітуди  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$  при нормальному  $\varphi_{\kappa} = 0^{\circ}$  збудженні, рис. 2.4 (а). У досліджуваній ситуації частка енергії, що генерується в область над структурою перевищує частку енергії, що генерується під структуру  $R_{3\kappa}^{+}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, \varphi_{\kappa}) > R_{3\kappa}^{-}(a_{\kappa}^{\text{inc}}, \varphi_{\kappa})$ , див. рис. 2.4 (б).

Енергетичні характеристики в разі двостороннього збудження  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$  шарової структури відображені на рис. 2.4 (в) і (г). Тут в діапазоні амплітуд  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}}\} \Big|_{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0, 65]}$  і кутів  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})}$  спостерігаються два локальних максимуми частки енергії, що генерується  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ , які відповідають нормальним кутам  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=0^{\circ}}$  збудження нелінійної шарової структури. Перший з них відповідає односторонньому збудженню з амплітудами  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = 0$  при  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=0^{\circ}}$ , де  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.1319$  (рис. 2.4 (а)-(г)). Зростання амплітуди  $b_{\kappa}^{\text{inc}}$  призводить до рівності характеристик розсіяння  $R_{\kappa}^{+} = R_{\kappa}^{-}$  і  $R_{3\kappa}^{+} = R_{3\kappa}^{-}$  генерації при рівності амплітуд збудження  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$  у всьому діапазоні кутів збудження  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})}$ . Це обумовлено симетрією як збудження, так і досліджуваної діелектричної структури. При цьому максимум частки енергії,



що генерується  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} \Big|_{\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=57^{\circ}}} = 0.0078$  для  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ , не перевищує 0.8% (рис. 2.4 (в)-(е)). Подальше зростання  $b_{\kappa}^{\text{inc}}$  призводить до порушення симетрії збудження  $b_{\kappa}^{\text{inc}} > a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ . При цьому змінюються властивості характеристики розсіяння і генерації зі значень  $R_{n\kappa}^+ \geq (\text{чи} \leq) R_{n\kappa}^-$  при  $b_{\kappa}^{\text{inc}} < a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$  на величини  $R_{n\kappa}^+ \leq (\text{чи} \geq) R_{n\kappa}^-$  при  $b_{\kappa}^{\text{inc}} > a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ , для  $n=1, 3$  (рис. 2.4 (в) і (г)). Другий локальний максимум  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.0457$  відповідає двосторонньому нормальному  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=0^{\circ}}$  збудженню з амплітудами  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = 65$ , (рис. 2.4 (в) і (г)). Тут зростання генерації  $R_{3\kappa}^+$ ,  $R_{3\kappa}^-$ ,  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  обумовлене властивостями до каналізації енергії шаруватої структури поблизу мінімуму коефіцієнта випромінювання  $R_{3\kappa}^- = 0.2302$  для  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = 65$  при  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=40^{\circ}}$  (рис. 2.4 (в) і (г)).

Результати чисельного аналізу характеристик розсіяння і генерації коливань при двосторонньому  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})}$  симетричному  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{\kappa}^{\text{inc}}$  збудженні даної нелінійної шарової структури наведені на рис. 2.4 (д), (е). Спостерігаються рівні значення величин коефіцієнтів розсіяння і генерації  $R_{n\kappa}^+ = R_{n\kappa}^-$ ,  $n=1, 3$ . Це обумовлено як симетрією збудження  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{\kappa}^{\text{inc}}$ , так і симетрією досліджуваної нелінійної діелектричної структури відносно площини  $y=0$ . Тут у всьому діапазоні параметрів амплітуд  $a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0, 75]$  і кутів  $\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})$  спостерігаємо наступне: величини коефіцієнтів відносної частки розсіяної енергії лежать в діапазоні  $0.4954 < R_{\kappa}^{\pm} \leq 0.5$ ; частки енергії, що генерується  $R_{3\kappa}^{\pm} < 0.0046$ , не вищі за 0.46%; частки повної енергії, що генерується ( $W_{3\kappa}/W_{\kappa} < 0.0093$ ) не перевищують 0.93% (рис. 2.4 (д), (е)).



а – при  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 0\}$ ; б – при  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 20\}$ ;  
 в – при  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}} = 38, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 30\}$ ; г – при  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}}\}$  с  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{\kappa}^{\text{inc}} = 38$

Рисунок 2.5 – Графіки 0 –  $|U(\kappa; z)|$  для  $\alpha(z) \equiv 0$ , 1 –  $\varepsilon^{(L)}$ ,  
 2 –  $|U(\kappa; z)|$ , 3 –  $|U(3\kappa; z)|$ , 4 –  $\text{Re } \varepsilon_{\kappa}$ , 5 –  $\text{Im } \varepsilon_{\kappa}$ , 6 –  $\text{Re } \varepsilon_{3\kappa}$ ,

7 –  $\text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$ , для  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\}$  де  $\varphi_{\kappa} = 0^{\circ}$

Модулі амплітуд повних полів розсіяння  $|U(\kappa; z)|$  і генерації  $|U(3\kappa; z)|$ , для різних варіантів одностороннього  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}} = 0\}$  і двостороннього  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}, b_{\kappa}^{\text{inc}}\}$  нормального  $\{\varphi_{\kappa}, 180^{\circ} - \varphi_{\kappa}\} \Big|_{\varphi_{\kappa}=0^{\circ}}$  збудження нелінійної шаруватої структури, що відповідають деяким описаним на рис. 2.4 ефектам, представлені графіками 2 і 3 на рис. 2.5. Вони можуть бути ідентифіковані відповідно як коливання

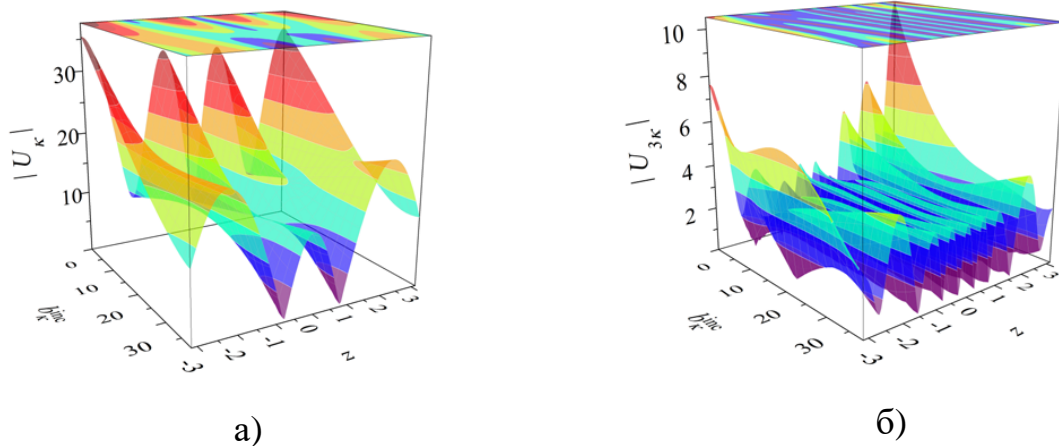
$\{H_{0,0,4} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=0\}}$  типу на рис. 2.5 (а),  $\{H_{0,0,4} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=20\}}$  типу на рис. 2.5 (б),  $\{H_{0,0,3} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=30\}}$  типу на рис. 2.5 (в),  $\{H_{0,0,3} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=38\}}$  типу на рис. 2.5 (г). Спостерігаємо динаміку резонансного ефекту перетворення типу коливання повного розсіяного поля  $\{H_{0,0,4} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=0\}} \Leftrightarrow \{H_{0,0,3} \text{ i } H_{0,0,9}\}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=38\}}$  від несиметричного  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=0\}$  до симетричного  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=38\}$  збудження нелінійної шаруватої структури.

Для розглянутих варіантів збудження лінійної структури наведено також повні розсіяні поля  $\{U(\kappa; z)\}_{\alpha(z)=0}$  (графіки з номерами 0 на рис. 2.5). Їх можна віднести до коливань  $H_{0,0,4}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=0\}}$  типу на рис. 2.5 (а),  $H_{0,0,3}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=20\}}$  типу (коливання близько до гібридного типу  $H_{0,0,4} \Leftrightarrow H_{0,0,3}$ , з характерною точкою перегину при  $z \approx 1.22$ , де  $|U(\kappa; z)| \approx 13.4321$ ) на рис. 2.5 (б),  $H_{0,0,3}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=30\}}$  типу на рис. 2.5 (в),  $H_{0,0,3}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=38\}}$  типу на рис. 2.5 (г). При цьому спостерігається інтерференційний механізм резонансного перетворення типів коливань  $H_{0,0,4}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=0\}} \Leftrightarrow H_{0,0,3}_{\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}}=38\}}$  (графіки 0 на рис. 2.5).

На рис. 2.6 і 2.7 наведено динаміку результатів обчислень, які були відображені раніше на рис. 2.5.

На рис. 2.6 спостерігаємо коливання  $\{H_{0,0,4} \text{ i } H_{0,0,9}\}$  типів для параметрів  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0, 26]\}$ , а також  $\{H_{0,0,3} \text{ i } H_{0,0,9}\}$  типів для величин  $\{a_{\kappa}^{\text{inc}}=38, b_{\kappa}^{\text{inc}} \in [26, 38]\}$ .

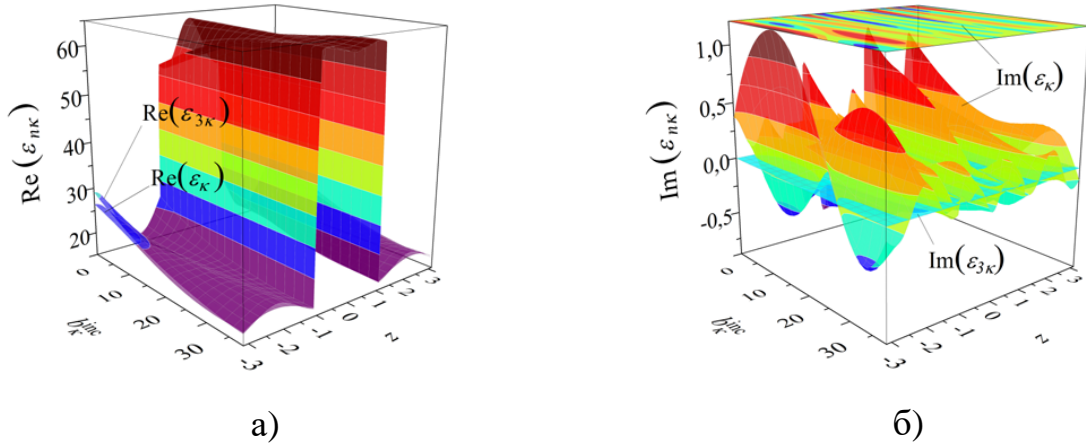
На частотах розсіяння реалізується зазначений вище, ефект резонансного перетворення типів коливань  $H_{0,0,4} \Leftrightarrow H_{0,0,3}$  (рис. 2.6 (а)).



а) –  $|U_k|$  – розсіяння; б) –  $|U_{3k}|$  – генерації

Рисунок 2.6 – Динаміка полів в нелінійній структурі

Ефект резонансного перетворення типів коливань, присутній при двосторонньому збудженні лінійних і нелінійних структур, виявляється при порушенні симетрії збудження. Принциповою відмінністю цього ефекту в нелінійному випадку від лінійного є присутність в діелектричній проникності нелінійної структури  $\varepsilon_{nk}$ , індукованої падаючим полем нелінійної складової  $\varepsilon_{nk}^{(NL)}$ ,  $n=1,3$  (згідно з (2.3)). Це призводить до порушення симетрії досліджуваної нелінійної діелектричної структури. Варіацію цієї величини  $\varepsilon_{nk}^{(NL)} = \varepsilon_{nk} - \varepsilon^{(L)}$  легко оцінити за графіками 4, 5, 6, 7 і 1 на рис. 2.5 і 2.7. На рис. 2.5, графіками 1 відображена ДП  $\varepsilon^{(L)}$  лінійної не поглинаючої  $\text{Im} \varepsilon^{(L)} \equiv 0$  структури. Графіками 4, 5, 6, 7 відображені реальні і уявні компоненти нелінійної діелектричної проникності  $\varepsilon_{nk}$ ,  $n=1,3$ , при розглянутих варіантах її збудження (рис. 2.5 і 2.7). Зокрема,  $\text{Im} \varepsilon_{nk}^{(NL)}$  приймає позитивні і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару при всіх розглянутих способах обурення нелінійної структури. Варіація цієї величини характеризує витрати енергії в нелінійному середовищі (на ЧЗ  $k$ ), які пішли на генерацію поля третьої гармоніки (на частоті генерації  $3k$ ).



а –  $\text{Re} \varepsilon_{\kappa}$  і  $\text{Re} \varepsilon_{3\kappa}$ ; б –  $\text{Im} \varepsilon_{\kappa}$  і  $\text{Im} \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

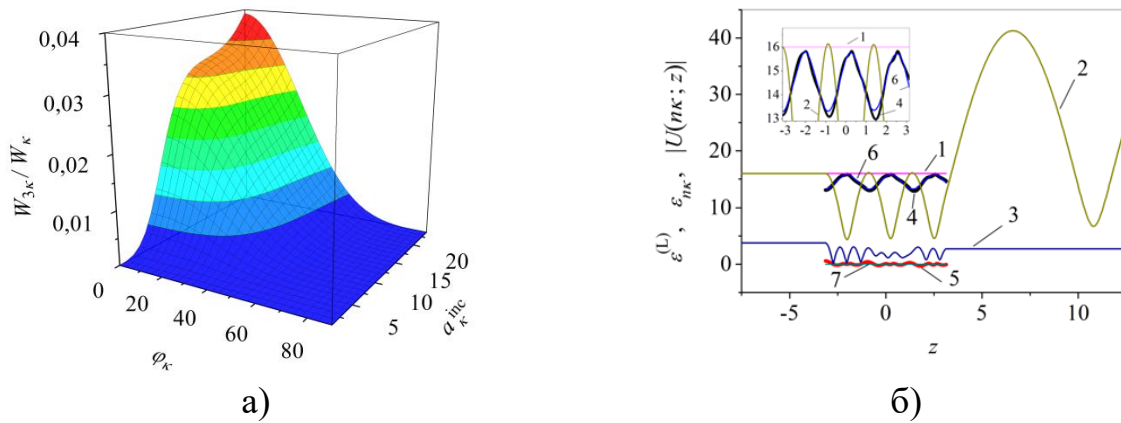
Рисунок 2.7 – Динаміка нелінійної діелектричної проникності

Відзначимо, що величина нелінійної проникності  $\varepsilon_{3\kappa}$  на частоті  $3\kappa$  є реальною (так як в (2.3)  $\text{Im} \varepsilon^{(L)} \equiv 0$ , отже і  $\text{Im} \varepsilon_{3\kappa}^{(NL)} \equiv 0$ ), (рис. 2.5 і 2.7).

### 2.5.2 Одношарова структура з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища

Розглянемо одностороннє збудження нелінійного шару з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища ( $\alpha(z) < 0$ ), вважаючи  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = b_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$ , при проникності нелінійної одношарової структури  $\varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(3\kappa; z)) = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , з  $\varepsilon^{(L)}(z) = 16$  і  $\alpha(z) = -0.01$  (див. (2.3)) для  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ , параметра  $\delta = 0.5$ , ЧЗ  $\kappa^{\text{inc}} \equiv \kappa = 0.375$ , частотою генерації поля третьої гармоніки  $\kappa^{\text{gen}} \equiv 3\kappa = 1.125$ , кутів падіння плоских хвиль  $\varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})$ .

Результати SC чисельного аналізу властивостей розсіяння і генерації нелінійного діелектричного шару з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища представлені на рис. 2.8 – рис. 2.11 [20, 27, 38].



а – поверхня  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}[\varphi_{\kappa}, a_{\kappa}^{inc}]$ , відносної частки енергії,  
що генерується в третю гармоніку;

б – криві, що характеризують властивості нелінійного шару при  $a_{\kappa}^{inc} = 24$  і

$$\varphi_{\kappa} = 0^0 : 1 - \varepsilon^{(L)}, 1 - |U(\kappa; z)|, 3 - |U(3\kappa; z)|,$$

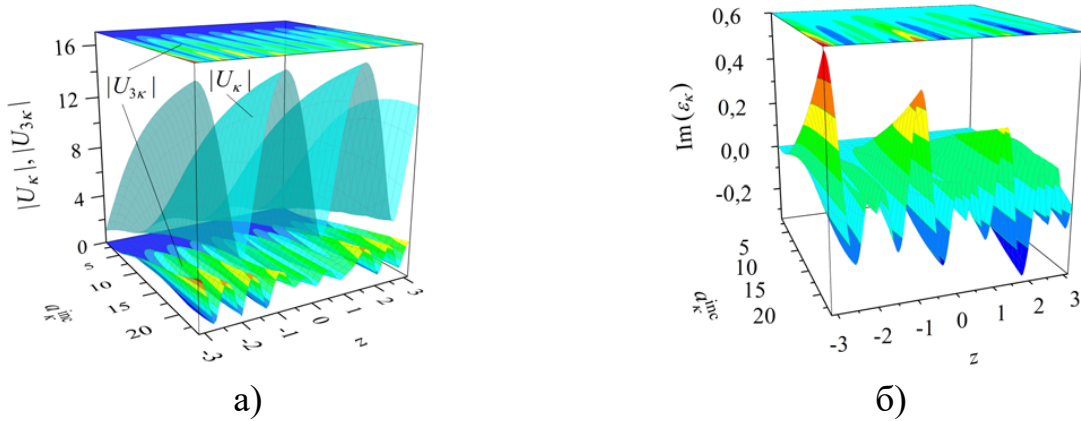
$$4 - \text{Re } \varepsilon_{\kappa}, 5 - \text{Im } \varepsilon_{\kappa}, 6 - \text{Re } \varepsilon_{3\kappa}, 7 - \text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$$

Рисунок 2.8 – Залежність поля збудження нелінійної структури

На рис. 2.8 (а) наведена залежність  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  від кута  $\varphi_{\kappa}$  і амплітуди  $a_{\kappa}^{inc}$  поля збудження нелінійної структури. Вона характеризує частку енергії, що генерується в третю гармоніку  $W_{3\kappa}$  на частоті генерації  $3\kappa$ , по відношенню до розсіяної нелінійним шаром енергії  $W_{\kappa}$  при падінні на нього плоскої хвилі під кутом  $\varphi_{\kappa}$  з амплітудою  $a_{\kappa}^{inc}$  на ЧЗ  $\kappa$ . Зокрема, величина  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.039$  при  $a_{\kappa}^{inc} = 24$  і  $\varphi_{\kappa} = 0^0$ , тобто  $W_{3\kappa}$  становить 3.9% від величини  $W_{\kappa}$  повної енергії розсіяння на ЧЗ  $\kappa$ .

На рис. 2.8 (б) відображені криві, що характеризують властивості розсіяння і генерації нелінійної структури. Крива 1 відповідає заданій величині лінійної частини діелектричної проникності  $\varepsilon^{(L)}$  нелінійної шаруватої структури. Лініями 4 і 5 нанесені величини діелектричної проникності на ЧЗ нелінійної структури, 6 і 7 – на частоті генерації. Тут же наведені величини модулів амплітуд  $|U(\kappa; z)|$  повних полів розсіяння  $H_{0,0,4}$  типу на ЧЗ  $\kappa$  (крива 2)

і  $|U(3\kappa; z)|$  генерації  $H_{0,0,9}$  типу на частоті  $3\kappa$  (крива 3). Значення  $|U(\kappa; z)|$  і  $|U(3\kappa; z)|$  наведені як в нелінійній шаровій структурі  $|z| \leq 2\pi\delta$ , так і поза нею (в зонах відбиття  $z > 2\pi\delta$  і проходження  $z < -2\pi\delta$ ).



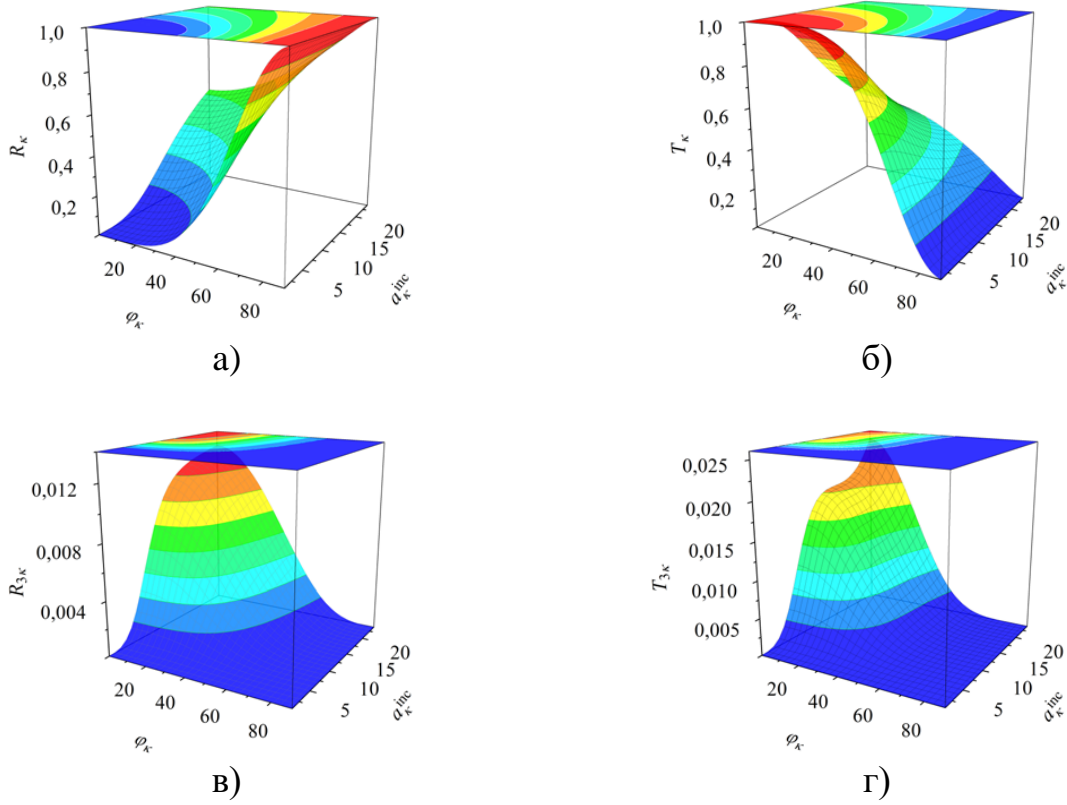
а – полів  $|U_\kappa| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  розсіяння і  $|U_{3\kappa}| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  генерації в нелінійному шарі;

б –  $\text{Im} \varepsilon_\kappa \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  індукованої уявної частини нелінійної проникності

Рисунок 2.9 – Поверхні при  $\varphi_\kappa = 0^0$

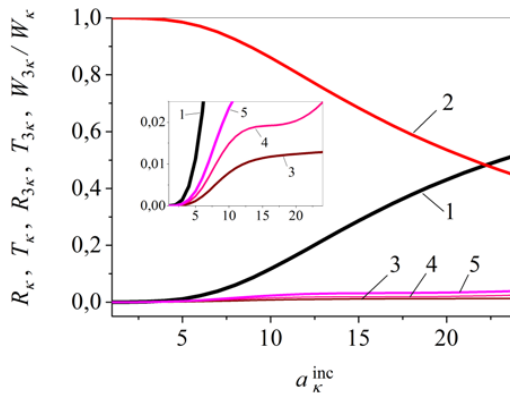
На рис. 2.9 (а) наведені поверхні  $|U_\kappa| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  і  $|U_{3\kappa}| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$ , які відображають динаміку поведінки відповідно розсіяних  $|U(\kappa; z)|$  і генеруємих  $|U(3\kappa; z)|$  полів в нелінійній шаруватій структурі вздовж координати  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$  при зміні амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$ , нормально падаючого (під кутом  $\varphi_\kappa = 0^0$ ) на частоті  $\kappa$  поля плоскої хвилі. Відзначимо, що в розглянутому діапазоні зміни амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}} \in (0, 24]$  розсіяне поле  $|U_\kappa| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  має  $H_{0,0,4}$  тип. Генерація поля третьої гармоніки  $|U_{3\kappa}| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  спостерігається в діапазоні  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [4, 24]$ . Тут поле генерації  $|U_{3\kappa}| \left[ a_\kappa^{\text{inc}}, z \right]$  має  $H_{0,0,10}$  тип при  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [4, 23)$ , і  $H_{0,0,9}$  тип при  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [23, 24]$ . Перетворення з ростом  $a_\kappa^{\text{inc}}$  типу хвилі генерації з  $H_{0,0,10}$  на  $H_{0,0,9}$  пов'язане з втратою одного локального максимуму функції

$|U(3\kappa; z)|$  аргументу  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$  при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 23$ , дивіться точку з координатами  $(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 23, z = 1.15, |U_{3\kappa}| = 1.61)$  на поверхні  $|U_{3\kappa}|[a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]$ .



а –  $R_{\kappa}[\varphi_{\kappa}, a_{\kappa}^{\text{inc}}]$ ; б –  $T_{\kappa}[\varphi_{\kappa}, a_{\kappa}^{\text{inc}}]$ ; в –  $R_{3\kappa}[\varphi_{\kappa}, a_{\kappa}^{\text{inc}}]$ ; г –  $T_{3\kappa}[\varphi_{\kappa}, a_{\kappa}^{\text{inc}}]$

Рисунок 2.10 – Характеристики розсіяння і генерації хвиль нелінійним шаром



1 –  $R_{\kappa}$ ; 2 –  $T_{\kappa}$ ; 3 –  $R_{3\kappa}$ ; 4 –  $T_{3\kappa}$ ; 5 –  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$

Рисунок 2.11 – Криві енергетичних характеристик при  $\varphi_{\kappa} = 0^0$



Наведена на рис. 2.9 (б) поверхня  $\text{Im} \varepsilon_\kappa [a_\kappa^{\text{inc}}, z]$  описує при заданій величині амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$  поведінку функції  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$ , яка характеризує витрати (втрати) енергії в нелінійному середовищі (на ЧЗ  $\kappa$ ), витрачені на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки (на частоті  $3\kappa$ ). Спостерігається варіація величини  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$ , при якій вона приймає як позитивні, так і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару (на відрізку  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ). Нульові значення  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$  визначаються фазовими співвідношеннями полів, розсіяних  $U(\kappa; z)$  і генерованих  $U(3\kappa; z)$  в нелінійному шарі [16].

Характеристики розсіяння і генерації нелінійного шару в діапазоні зміни параметрів поля збудження  $\varphi_\kappa \in [0^0, 90^0)$ ,  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [1, 24]$  представлені на рис. 2.10. Тут поверхнями представлена динаміка зміни  $R_\kappa [\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$ ,  $T_\kappa [\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$  – характеристик розсіяння і  $R_{3\kappa} [\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$ ,  $T_{3\kappa} [\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$  – генерації нелінійного шару. На рис. 2.11 графіками відображені всі енергетичні характеристики, наведені на рис. 2.10 і рис. 2.8 (а) для випадку нормального падаючого поля збудження (під кутом  $\varphi_\kappa = 0^0$ ).

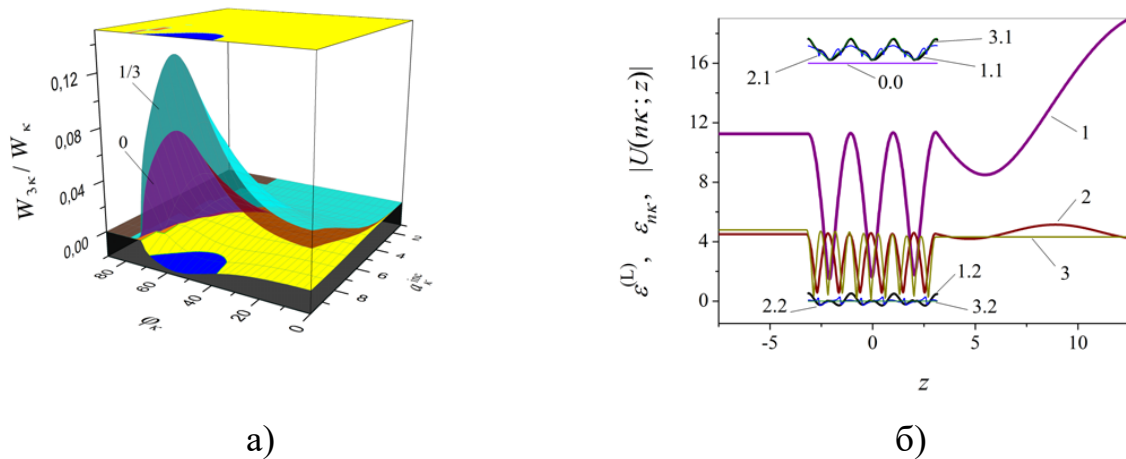
### 2.5.3 Генерація третьої гармоніки при наявності слабкого поля збудження нелінійного шару

Розглянемо одностороннє збудження нелінійного шару, який каналізує енергію (тобто з позитивною величиною кубічної сприйнятливості середовища  $\alpha(z) > 0$ ). Зупинимось на наступних випадках для амплітуд пакетів падаючих хвиль (див. (2.1)):

$$\begin{aligned} a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0, & \quad b_\kappa^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0 \quad \text{– позначимо його “0”}, \\ a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_\kappa^{\text{inc}}/3, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0, & \quad b_\kappa^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0 \quad \text{– позначимо його “1/3”}. \end{aligned}$$

Тут  $\varphi_\kappa \in [0^0, 90^0]$  (де  $\varphi_\kappa = \varphi_{n\kappa}$ ) при ЧЗ  $\kappa = 0.375$  і параметрах нелінійного шару (2.3), заданого величинами  $\varepsilon^{(L)}(z) = 16$ ,  $\alpha(z) = +0.01$ , при  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ,  $\delta = 0.5$ .

Аналіз результатів обчислень, отриманих на основі алгоритму SC моделі, наведено на рис. 2.12, 2.13, див. [16, 33, 100].



а – поверхні  $W_{3\kappa}/W_\kappa$  і  $W^{(\text{Error})}$ : ситуація 0 –  $a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = 0$

( $W^{(\text{Error})} \approx 0$  не відтворена), ситуація 1/3 –  $a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_\kappa^{\text{inc}}/3$ ;

б – графіки при величинах  $\varphi_\kappa = 60^0, a_\kappa^{\text{inc}} = 14, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_\kappa^{\text{inc}}/3$  для: 0.0 –  $\varepsilon^{(L)}$ ,

$n$  –  $|U(n\kappa; z)|$ , n.1 –  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ , n.2 –  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$

Рисунок 2.12 – Поверхня величини  $W^{(\text{Error})}$  похибки балансу енергії

На графіках рис. 2.12 також наводяться поверхня величини  $W^{(\text{Error})}$  похибки балансу енергії (див. (2.18)) і її проекція на верхню горизонтальну площину графіків, що відповідає випадку наявності слабкого поля збудження на подвоєній частоті. Зокрема, на графіках можемо визначити область локалізації параметрів задачі, де похибка балансу енергії не перевищує заданої величини, тобто  $|W^{(\text{Error})}| < \text{const}$ .

Результати, наведені на рис. 2.12 (а), дозволяють простежити динаміку поведінки величини  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ , що характеризує відношення енергій генерації і розсіяння з урахуванням впливу слабкого поля з амплітудою  $a_{2\kappa}^{\text{inc}}$ , а також дозволяє оцінити  $W^{(\text{Error})}$  похибку виконання рівняння балансу енергії (2.17). На рис. 2.12 (а) максимальне значення відносної частки енергії, що генерується  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ , і величини похибки балансу енергії  $W^{(\text{Error})}$  досягається при наступних значеннях параметрів:  $[a_{\kappa}^{\text{inc}}, a_{2\kappa}^{\text{inc}}, \varphi_{\kappa}]$ . Ситуація 0 – відсутність слабкого поля на подвоєній частоті  $[a_{\kappa}^{\text{inc}} = 14, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = 0, \varphi_{\kappa} = 60^{\circ}]$ ,  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.25054$ ,  $W^{(\text{Error})} = -9.29243 \cdot 10^{-10}$  (в цьому випадку  $W^{(\text{Error})} \approx 0$  не відтворена на рис. 2.12 (а)). Ситуація 1/3 – наявність слабкого поля на подвоєній частоті  $[a_{\kappa}^{\text{inc}} = 14, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc}}/3, \varphi_{\kappa} = 60^{\circ}]$ ,  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.26589$ ,  $W^{(\text{Error})} = -0.00578$ .

Графіки на рис. 2.12 (б) відображають властивості розсіяння і генерації нелінійної структури. Зокрема видно, що крива 1 описує повне поле  $H_{0,0,4}$  типу, 2 – повне поле  $H_{0,0,7}$  тип, 3 – поле генерації  $H_{0,0,10}$  типу. Тут же наведені величини  $\text{Re} \varepsilon_{n\kappa}$  і  $\text{Im} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n=1, 2, 3$ , складових індукованих діелектричної проникності. При цьому на рис. 2.12 (б) похибка балансу енергії  $W^{(\text{Error})} = -5.782328 \cdot 10^{-3}$  (менш 0.58%).

Поверхні на рис. 2.13 описують уявні частини нелінійної діелектричної проникності шару, індуковані полями розсіяння і генерації. Тут величини  $\text{Im} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n=1, 2$  приймають, як позитивні, так і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару (на відрізку  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ). Поведінка  $\text{Im} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n=1, 2$ , при заданих величинах амплітуд  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$ ,  $a_{2\kappa}^{\text{inc}}$ , характеризує витрати енергії в нелінійному шарі, що пішли на генерацію електромагнітного поля. Припущення слабкості електромагнітного поля на подвоєній частоті в ситуації 1/3 спрацьовує в тому діапазоні амплітуд  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  і  $a_{2\kappa}^{\text{inc}}$ , де  $\text{Im} \varepsilon_{2\kappa} \approx 0$  (рис. 2.13 (б)), тут же похибка балансу енергії  $W^{(\text{Error})} \approx 0$  (рис. 2.12 (а)).

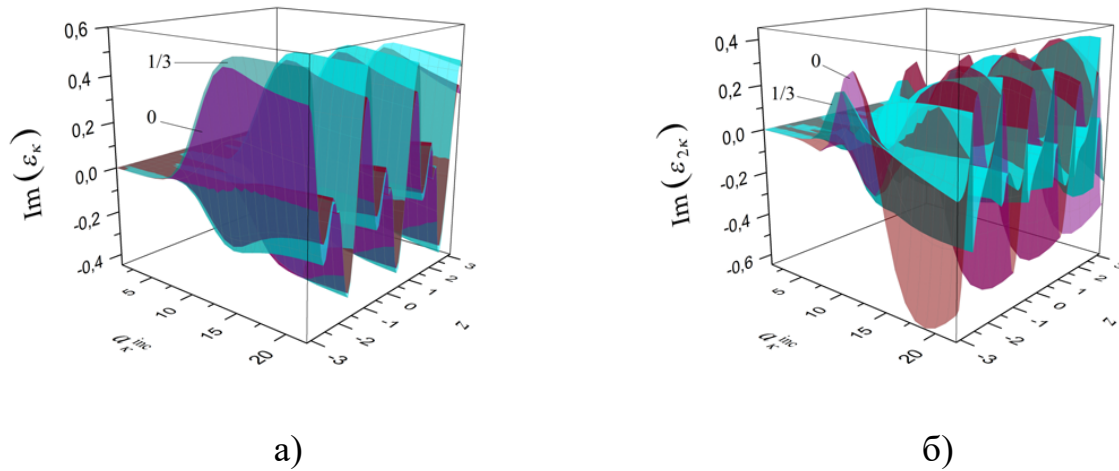


Рисунок 2.13 – Поверхні  $\text{Im } \varepsilon_{nk}$ ,  $n=1, 2$ , при  $\varphi = 60^\circ$ , для ситуацій:

$$0 - a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = 0 \text{ і } 1/3 - a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc}} / 3$$

Урахування слабких полів на кратних частотах при аналізі процесів розсіяння і генерації коливань може призводити до погрешностей в рівнянні балансу, які досягають декількох відсотків [16, 33, 96-98, 100]. Це вказує на те, що поля збудження нелінійної структури, що відповідають кратним частотам, не є настільки слабкими, як передбачалося. У таких ситуаціях наведена математична модель має враховувати як комплексні амплітуди Фур'є статичного поля з  $n=0$ , так і можливі коливання на частотах  $n\kappa$  з номерами  $n$  вище третього [16].

## 2.6 Самоузгоджений аналіз абсолютно прозорих шарів

Представлені результати досліджень, що демонструють ефект перекачування енергії коливання з частоти розсіяння в енергію коливання на частоті генерації для нелінійних, абсолютно прозорих (в лінійному наближенні) шарів, що деканалізують (при  $\alpha < 0$ ) і каналізують (при  $\alpha > 0$ ) енергію.

Для досліджень були обрані наступні характеристики нелінійного шару і параметри збудження:  $\varepsilon_{nk}^{(L)} = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\kappa = 1$  і  $\alpha = -0.01$  при  $\varphi_{\kappa} = 0^\circ$  (для шару

що деканалізує),  $\alpha = +0.01$  при  $\varphi_\kappa = 45^\circ$  (для шару, який каналізує), з амплітудами падаючих плоских хвиль  $a_\kappa^{\text{inc}} \neq 0$  і  $a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = b_\kappa^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$ .

У цьому розділі введені позначення:  $a_{0,\kappa}^{\text{inc}} \equiv a_\kappa^{\text{inc}}$ ,  $|U_{0,n\kappa}| \equiv |U_{n\kappa}|$ ,  $R_{0,n\kappa}^\pm \equiv R_{n\kappa}^\pm$ .

### 2.6.1 Шар з негативною сприйнятливістю середовища

Енергетичні та матеріальні параметри нелінійного абсолютно прозорого в лінійному наближенні шару, який деканалізує з  $\alpha = -0.01$ , наведені на рис. 2.14-2.16 [16, 21, 44].

На рис. 2.14 наведені енергетичні характеристики коливань розсіяння і генерації, типові для нелінійного, абсолютно прозорого (в лінійному наближенні) шару, який деканалізує енергію.

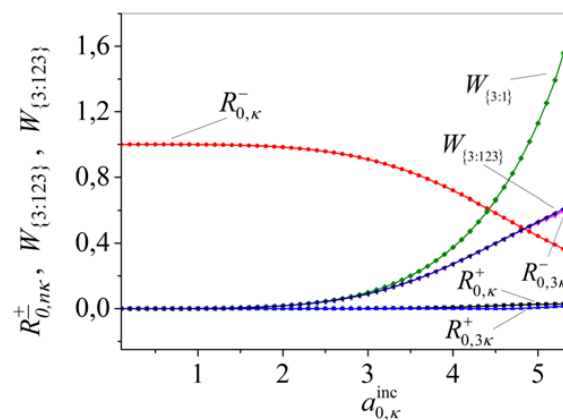
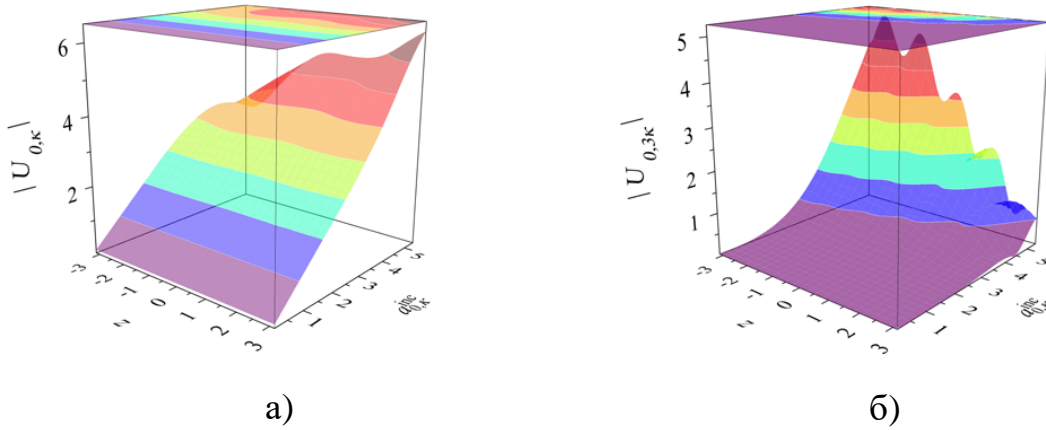


Рисунок 2.14 – Енергетичні характеристики структури що деканалізує енергію з параметрами  $\varepsilon_{n\kappa}^{(L)} = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = -0.01$  для  $\kappa = 1$ ,  $\varphi_\kappa = 0^\circ$

Тут:  $W_{\{3:1\}} = 1.77202$  і  $W_{\{3:123\}} = 0.63925$  при  $a_\kappa^{\text{inc}} = 5.4$ , тобто,  $W_{\{3:1\}} > 1.77$  (частка енергії, що генерується в третю гармоніку більш ніж в 1.77 разів перевершує енергію розсіяну першою гармонікою) і  $W_{\{3:123\}} > 0.63$  (більше 63% повної розсіяної енергії генерується в третю гармоніку).



а – розсіяння; б – генерації

Рисунок 2.15 – Амплітудні характеристики полів, в структурі що де каналізує енергію, з параметрами  $\varepsilon_{nk}^{(L)} = 1, \delta = 0.5, \alpha = -0.01$

для  $\kappa = 1, \varphi_{\kappa} = 0^0$

Динаміка полів розсіяння і генерації зі збільшенням  $a_{\kappa}^{inc}$  супроводжується зміною типу коливань  $H_{0,0,2}(a_{\kappa}^{inc} \in [0.1, 5.3]) \rightarrow H_{0,0,1}(a_{\kappa}^{inc} = 5.4)$ , див. рис. 2.15 (а), і  $H_{0,0,5}(a_{\kappa}^{inc} \in [3.0, 3.7]) \rightarrow H_{0,0,6}(a_{\kappa}^{inc} \in [3.8, 4.0]) \rightarrow H_{0,0,5}(a_{\kappa}^{inc} \in [4.5, 5.4])$  (рис. 2.15 (б)).

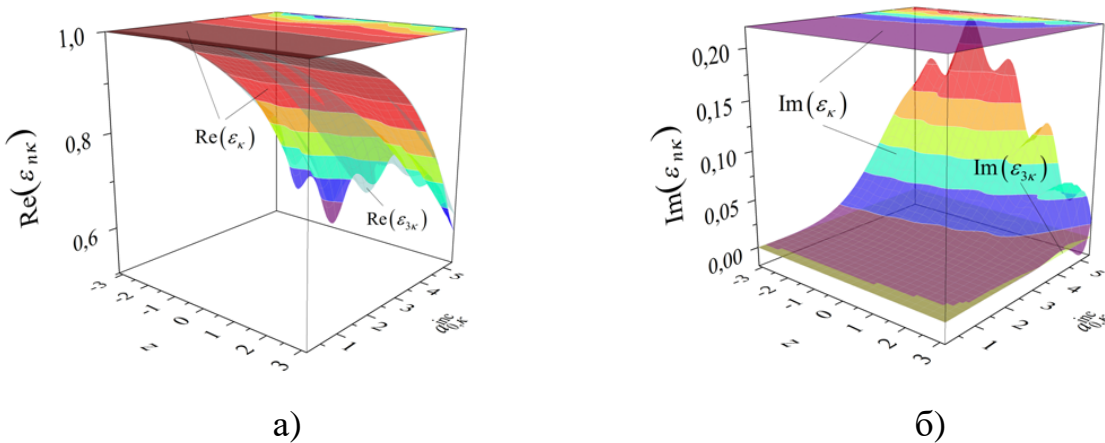


Рисунок 2.16 – ДП структури, що деканалізує енергію, з параметрами

$\varepsilon_{nk}^{(L)} = 1, \delta = 0.5, \alpha = -0.01$  для  $\kappa = 1, \varphi_{\kappa} = 0^0$

Варіація діелектричної проникності (2.3) (див. також (2.7)) зображена на рис. 2.16. У разі абсолютно прозорого в лінійному наближенні  $\varepsilon_{nk}^{(L)} = 1$ , нелінійного шару, що деканалізує енергію, величина  $\text{Re} \varepsilon_{nk} < \text{Re} \varepsilon_{nk}^{(L)} = 1$ ,  $n = 1, 3$ , див. (2.3) при  $\alpha < 0$  і рис. 2.16 (а). Варіація  $\text{Im} \varepsilon_k$  (рис. 2.16 (б)) характеризує втрату енергії на ЧЗ  $k$ , яка пішла на генерацію поля третьої гармоніки (див.  $|U_{3k}|$  на рис. 2.15 (б)). Поле  $|U_{3k}|$  на потроєній частоті  $3k$  передбачається слабким, тому  $\text{Im} \varepsilon_{3k} \equiv 0$ , див. (2.3) і рис. 2.16 (б).

### 2.6.2 Шар з позитивною сприйнятливістю середовища

Енергетичні та матеріальні параметри нелінійного абсолютно прозорого в лінійному наближенні шару з  $\alpha = +0.01$ , що каналізує енергію, наведені на рис. 2.17-2.19 [21, 43].

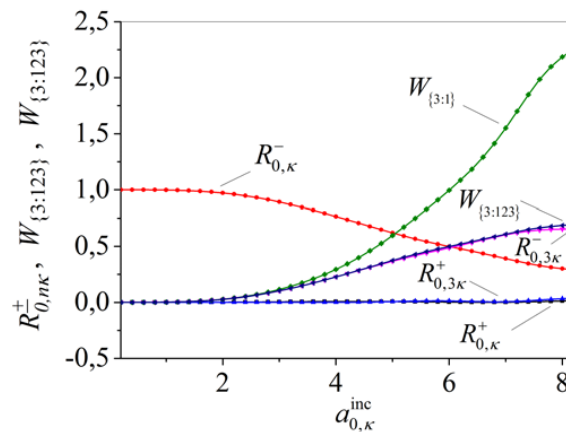


Рисунок 2.17 – Енергетичні характеристики структури, що каналізує енергію, з параметрами  $\varepsilon_{nk}^{(L)} = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = +0.01$  для  $k = 1$ ,  $\varphi_k = 45^\circ$

На рис. 2.17 наведені типові характеристики коливань розсіяння і генерації нелінійного, абсолютно прозорого в лінійному наближенні (з  $\varepsilon_{nk}^{(L)}(y, z) = 1$ ) шару.

Тут:

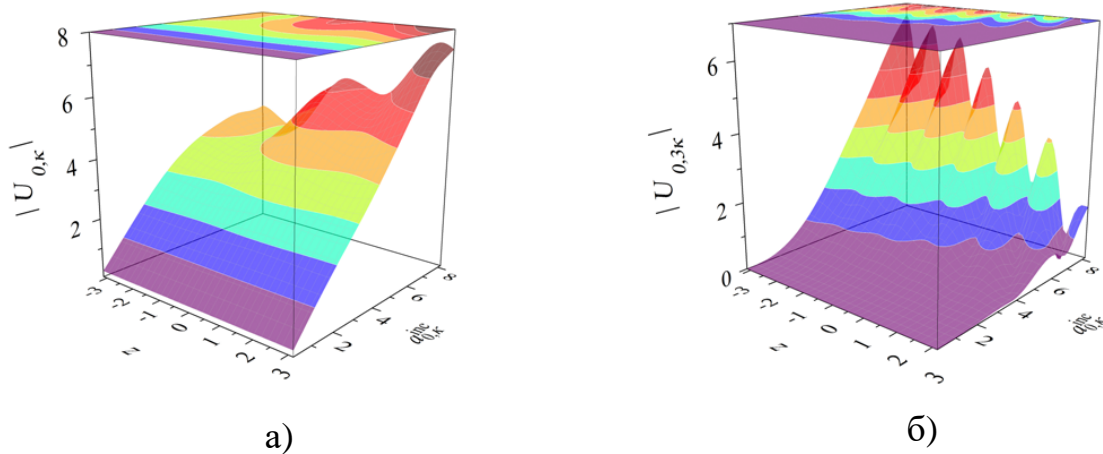
$$W_{\{3:1\}} = 2.251321 \text{ і } W_{\{3:123\}} = 0.692433 \text{ при } a_{\kappa}^{\text{inc}} = 8.2.$$

Таким чином,  $W_{\{3:1\}} > 2.25$  (частка енергії, що генерується в третю гармоніку більш ніж в 2.25 разів перевершує енергію розсіяну першою гармонікою) і  $W_{\{3:123\}} > 0,69$  (більше 69% повної розсіяної енергії генерується в третю гармоніку).

Динаміка полів розсіяння і генерації з ростом  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  супроводжується зміною типів коливань:

$$H_{0,0,2}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0.2, 2.4]) \rightarrow H_{0,0,3}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in (2.4, 8.2]), \text{ див. рис. 2.18 (а);}$$

$$H_{0,0,5}(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 2.6) \rightarrow H_{0,0,6}(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 4.2) \rightarrow H_{0,0,7}(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 8), \text{ див. рис. 2.18 (б).}$$



а – розсіяння; б – генерації

Рисунок 2.18 – Амплітудні характеристики полів в структурі, що каналізує енергію, з параметрами  $\varepsilon_{n\kappa}^{(L)} = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = +0.01$  для  $\kappa = 1$ ,  $\varphi_{\kappa} = 45^{\circ}$



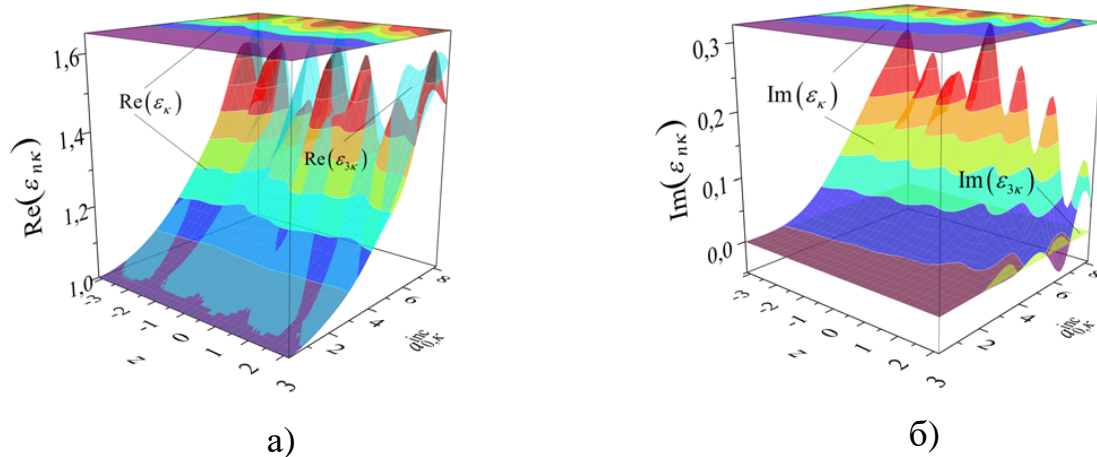


Рисунок 2.19 – ДП структури, що каналізує енергію, з параметрами

$$\varepsilon_{n\kappa}^{(L)} = 1, \delta = 0.5, \alpha = +0.01 \text{ для } \kappa = 1, \varphi_{\kappa} = 45^{\circ}$$

Особливості динаміки діелектричної проникності (2.3) (див. також (2.7)) нелінійної шарової структури відображені на рис. 2.19. У разі абсолютно прозорого в лінійному наближенні  $\varepsilon_{n\kappa}^{(L)} = 1$ , нелінійного шару, що каналізує енергію, величина  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa} > \text{Re } \varepsilon_{n\kappa}^{(L)} = 1$ ,  $n = 1, 3$ , див. (2.3) при  $\alpha > 0$  і рис. 2.19 (а). Варіація  $\text{Im } \varepsilon_{\kappa}$ , на рис. 2.19 (б) характеризує втрати на ЧЗ  $\kappa$ , витрачені на генерацію поля третьої гармоніки (див.  $|U_{3\kappa}|$  на рис. 2.18 (б)). Поле  $|U_{3\kappa}|$  на потроєній частоті  $3\kappa$  передбачається слабким, тому  $\text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$ , див. (2.3) і рис. 2.19 (б).

## 2.7 Висновки по розділу

1. Досліджено завдання побудови моделі розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки нелінійної шарової діелектричної структури з використанням системи нелінійних крайових задач та еквівалентної їй системи одновимірних (уздовж висоти структури) нелінійних інтегральних рівнянь Гаммерштейна, а також системи граничних задач типу Штурма-Ліувілля.

2. Система нелінійних інтегрованих рівнянь досліджуваної математичної моделі з використанням квадратурних формул зведена до пов'язаної нелінійної

системи комплексних систем нелінійних АР другого роду. Наведено ітераційний алгоритм чисельного самоузгодженого аналізу пов'язаних комплексних систем нелінійних АР.

3. Проведено порівняння результатів обчислень, отриманих за методом наближення ЗП і SC підходом, при вирішенні задачі генерації третьої гармоніки на нелінійній тришаровій структурі. Показано, що хоча наближення ЗП і дозволяє оцінити без істотних обчислювальних витрат деякі характеристики досліджуваної проблеми, до нього не може бути застосована така важлива фізична характеристика, як баланс енергії. На відміну від наближення ЗП, SC метод позбавлений цих фізичних протиріч.

4. На основі процедур методу самоузгодженого чисельного аналізу отримано математичні моделі, що описують процеси генерації поля третьої гармоніки шаром: двостороннього збудження нелінійної структури; одностороннього збудження поля з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища; генерації поля третьої гармоніки шаром з позитивною величиною кубічної сприйнятливості середовища при наявності слабкого поля збудження на подвоєній частоті; перекачування енергії падаючого поля в поле генерації третьої гармоніки абсолютно прозорими (в лінійному наближенні) шарами з негативною і позитивною величиною кубічної сприйнятливості середовища.

Основні результати другого розділу опубліковано у роботах [19-21, 26, 27, 33-35, 38-40, 43, 44].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у переліку джерел посилання [7, 16, 19-25, 27, 33-35, 38-40, 43, 44, 89, 92, 93, 96-98, 100, 105, 106].

## 3 ІНДУКОВАНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ І ПРОЦЕС РОЗСІЯННЯ І ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛЬ ТРЕТЬОЇ ГАРМОНІКИ

### 3.1 Індуковані спектральні задачі

Наближені розв'язання комплексних СНР Гаммерштейна другого роду (2.6) описуються рішеннями систем комплексних нелінійних АР другого роду (2.8). Ці рівняння зв'язані за допомогою поляризуємості нелінійного середовища шуканими полями випромінювання. Нелінійна поляризуємість породжує залежні від полів випромінювання індуковані діелектричні проникності в лівих частинах систем і функції джерел в правих частинах досліджуваних систем. Пошук рішення здійснюється з використанням алгоритму (2.11), на кожному кроці якого блочно-ітераційним методом вирішуються системи комплексних нелінійних АР другого роду. У кожному з блоків алгоритму (2.11) закладено ітераційний процес, на кожному кроці якого здійснюється рішення комплексних систем лінеаризованих АР Фредгольма другого роду.

Аналітичне продовження цих лінеаризованих задач з індукованою діелектричною проникністю (2.7) в область комплексних значень частотного параметра дозволяє перейти до аналізу спектральних задач, тобто до відшукування власних частот і відповідних їм власних полів однорідних лінійних задач з індукованою діелектричною проникністю [16, 19, 22-25, 106-108].

Як було зазначено вище, задача розсіяння і генерації хвиль, що описується системою граничних задач (2.2) з умовами 2.1-2.4, дозволяє розглядати наступну сукупність спектральних крайових задач.

Потрібно знайти власні частоти  $\kappa_n$  і відповідні їм власні значення функцій  $E_x(\mathbf{r}, \kappa_n)$ , які є однорідними уздовж координати  $u$  для індукованої діелектричної проникності  $\varepsilon_{nk}$ , тобто

$$\{\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset \mathbb{H}_{nk}, i E_x(\mathbf{r}, \kappa_n)\}_{n=1}^3.$$

Сукупність однорідних граничних задач задається рівняннями (див. (2.2)):

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa_1) + \kappa_1^2 \varepsilon_{\kappa_1}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, \kappa_1) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa_2) + \kappa_2^2 \varepsilon_{\kappa_2}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, \kappa_2) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa_3) + \kappa_3^2 \varepsilon_{\kappa_3}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, \kappa_3) = 0, \end{cases}$$

які в компактному записі набувають вигляд

$$\begin{aligned} \left[ \Delta + \kappa_n^2 \varepsilon_{\kappa_n}(z, \alpha(z), E_x(\kappa; y, z), E_x(2\kappa; y, z), E_x(3\kappa; y, z)) \right] E_x(\kappa_n; y, z) = 0, \\ n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

з наступними узагальненими граничними умовами:

Умова 3.1 – умова просторової квазіоднорідності власних полів по  $y$ :

$$E_x(\kappa_n; y, z) = U(\kappa_n; z) \exp(i\Phi_{nk} y), \quad n = 1, 2, 3;$$

Умова 3.2 – умова безперервності власних полів

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tg}}(\kappa_n; y, z) \text{ і } \mathbf{H}_{\text{tg}}(\kappa_n; y, z) \\ \text{(тобто } E_x(\kappa_n; y, z) \text{ і } H_y(\kappa_n; y, z)) \end{aligned}$$

на кордонах шарів індукованих діелектричних структур  $\{\varepsilon_{nk}\}_{n=1}^3$  при  $\kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}$ ;

Умова 3.3 – умова випромінювання для власного поля:

$$E_x(\kappa_n; y, z) = \begin{cases} a_{\kappa_n} \\ b_{\kappa_n} \end{cases} \exp \left[ i \left( \Phi_{n\kappa} y \pm \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})(z \mp 2\pi\delta) \right) \right], \quad \begin{matrix} z > \\ < \end{matrix} \pm 2\pi\delta, \\ n = 1, 2, 3,$$

Ці умови узгоджені з вимогою відсутності у власному полі хвиль, що приходять з нескінченності  $z = \pm\infty$ , яка при дійсних значеннях  $\kappa_n$  і  $\Phi_{n\kappa}$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa}) \geq 0, \quad \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa}) \operatorname{Re} \kappa_n \geq 0, \\ \text{при } \operatorname{Im} \Phi_{n\kappa} = 0, \quad \operatorname{Im} \kappa_n = 0, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Відзначимо, що умова фазового синхронізму хвиль (умова 2.2) при постановці спектральної задачі (3.1) з умовами 3.1-3.3, не розглядається, оскільки повні поля розсіяння і генерації  $\{E_x(n\kappa; y, z)\}_{n=1}^3$  формують індуковані діелектричні проникності  $\{\varepsilon_{n\kappa}\}_{n=1}^3$  в рівняннях (3.1), які вже задовольняють (2.2) з умовами 2.1-2.4.

Нетривіальні рішення (власні поля) рівнянь (3.1) з ум. 3.1-3.3, представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} E_x(\kappa_n; y, z) &= U(\kappa_n; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y) = \\ &= \begin{cases} a_{\kappa_n} \exp \left[ i \left( \Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})(z - 2\pi\delta) \right) \right], & z > 2\pi\delta, \\ U(\kappa_n; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), & |z| \leq 2\pi\delta, \\ b_{\kappa_n} \exp \left[ i \left( \Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})(z + 2\pi\delta) \right) \right], & z < -2\pi\delta, \end{cases} \quad (3.3) \\ &\quad \kappa_n \in \Omega_{n\kappa} \subset \mathbb{H}_{n\kappa}, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тут:  $\kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}$  – задане значення ЧЗ нелінійної структури;  $a_{\kappa_n} = U(\kappa_n; 2\pi\delta)$  і  $b_{\kappa_n} = U(\kappa_n; -2\pi\delta)$  – коефіцієнти випромінювання власного поля;  $\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa}) = (\kappa_n^2 - \Phi_{n\kappa}^2)^{1/2}$  – функції (комплексних частотних спектральних

змінних  $\kappa_n$ ) поперечних коефіцієнтів поширення;  $\Phi_{n\kappa} = n\kappa \sin \varphi_{n\kappa}$  – задані постійні дійсні величини поздовжніх постійних поширення;  $\varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa))$  – індуковані діелектричні проникності структури на частотах  $n\kappa$ ;  $\Omega_{n\kappa}$  – дискретна множина шуканих власних частот  $\kappa_n$ ;  $H_{n\kappa}$  – комплексні дволисті ріманові поверхні, простору зміни частотних спектральних параметрів  $\kappa_n \in \Omega_{n\kappa}$  (рис. 3.1).

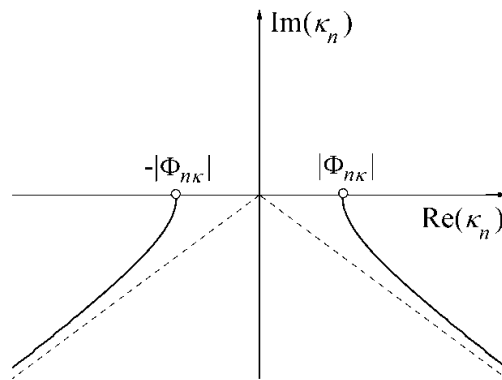


Рисунок 3.1 – Геометрія дволистих ріманових поверхонь  $H_{n\kappa}$

Ріманові поверхні  $H_{n\kappa}$  повністю визначаються межами можливого аналітичного продовження в комплексний простір частотних спектральних параметрів  $\kappa_n$  канонічних функцій Гріна (для незбуреної квазіоднорідної задачі (3.1) з умовами 3.1-3.3 при  $\varepsilon_{n\kappa} \equiv 1$ ,  $n = 1, 2, 3$ ).

$$G_0(\kappa_n; y, z, z_0) = \frac{i}{2} \exp\left\{i\left[\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})|z - z_0|\right]\right\} / \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa}), \quad (3.4)$$

$$n = 1, 2, 3.$$

Комплексні простори поверхонь  $H_{n\kappa}$  (рис. 3.1) мають дійсні алгебраїчні точки розгалуження другого порядку  $\kappa_n^\pm : \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n^\pm, \Phi_{n\kappa}) = 0$  (тобто  $\kappa_n^\pm = \pm|\Phi_{n\kappa}|$ ,  $n = 1, 2, 3$ ) з розрізами, що виходять з них уздовж ліній

$$(\operatorname{Re} \kappa_n)^2 - (\operatorname{Im} \kappa_n)^2 - \Phi_{nk}^2 = 0, \quad \operatorname{Im} \kappa_n \leq 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Перші, фізичні листи (пара значень  $\{\kappa_n, \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{nk})\}$ ) на кожній з поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$  повністю визначаються умовою (3.2) і розрізами (3.5). На перших листах  $H_{nk}$  знаки у пар  $\{\kappa_n, \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}\}$  і  $\{\kappa_n, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n}\}$  розподілені наступним чином: при  $0 < \arg \kappa_n < \pi$ ,  $\operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} > 0$ , а  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \geq 0$  в області з  $0 < \arg \kappa_n < \pi/2$  і  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \leq 0$  в області з  $\pi/2 \leq \arg \kappa_n < \pi$ . Для точок  $\kappa_n$  з  $3\pi/2 \leq \arg \kappa_n \leq 2\pi$  значення функцій (там, де  $(\operatorname{Re} \kappa_n)^2 - (\operatorname{Im} \kappa_n)^2 - \Phi_{nk}^2 > 0$ ) визначаються умовою  $\operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} < 0$ ,  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} > 0$ , для інших  $\kappa_n$  функція  $\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{nk})$  визначається умовою  $\operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} > 0$ ,  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \leq 0$ . В області з  $\pi < \arg \kappa_n < 3\pi/2$  ситуація аналогічна попередній з точністю до зміни знака перед значенням  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}$ . Другі, нефізичні листи поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$  відрізняються від фізичних тим, що на них для кожного  $\kappa_n$  знаки при  $\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}$  і  $\operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n}$  змінені на протилежні.

Якісний аналіз власних режимів індукованих лінійних граничних спектральних задач (3.1) з умовами 3.1-3.3 проводиться з використанням еквівалентної постановки спектральних задач для відповідних лінеаризованих однорідних інтегральних рівнянь (індукованих системою нелінійних інтегральних рівнянь (2.6)) [106-108]. В основі цього лежить аналітичне продовження (2.6) в простір спектральних значень  $\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Спектральна задача зводиться до відшукування нетривіальних рішень  $U(\kappa_n; z)$  сукупності однорідних (з нульовими функціями джерел в правих частинах рівнянь) лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з індукованою діелектричною проникністю (2.7) на частотах випромінювання (тобто розсіяння і генерації)  $nk$ :

$$\begin{aligned}
& U(\kappa_n; z) + \frac{i\kappa_n^2}{2\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})|z - z_0|) \times \\
& \times \left[ 1 - \varepsilon_{n\kappa}(z_0, \alpha(z_0), U(\kappa; z_0), U(2\kappa; z_0), U(3\kappa; z_0)) \right] U(\kappa_n; z_0) dz_0 = 0; \quad (3.6) \\
& |z| \leq 2\pi\delta; \quad \kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}; \quad \kappa_n \in \Omega_{n\kappa} \subset \mathbb{H}_{n\kappa}, \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Рішення граничних задач (3.1) з умовами 3.1-3.3 можуть бути отримані з рішення еквівалентних задач (3.6), де згідно з умовою 3.2 в поданні власних полів (3.3) використовуються перерахункові формули:

$$U(\kappa_n; 2\pi\delta) = a_{\kappa_n}, \quad U(\kappa_n; -2\pi\delta) = b_{\kappa_n}; \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Компактність і аналітичність оператору функцій (3.6)

$$B_{n\kappa}(\kappa_n)[U(\kappa_n; z)]: \quad L_2(-2\pi\delta, 2\pi\delta) \rightarrow L_2(-2\pi\delta, 2\pi\delta), \quad n = 1, 2, 3,$$

де

$$\begin{aligned}
B_{n\kappa}(\kappa_n)[U(\kappa_n; z)] &= -\frac{i\kappa_n^2}{2\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n, \Phi_{n\kappa})|z - z_0|) \times \\
& \times \left[ 1 - \varepsilon_{n\kappa}(z_0, \alpha(z_0), U(\kappa; z_0), U(2\kappa; z_0), U(3\kappa; z_0)) \right] U(\kappa_n; z_0) dz_0, \quad (3.8) \\
& \kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}, \quad n = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

по аргументу  $\kappa_n \in \mathbb{H}_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 2, 3$  є необхідними умовами аналітичної теореми Фредгольма [109]. З неї випливає (з урахуванням того, що множини резольвент задач (3.6) не порожні в  $\mathbb{H}_{n\kappa}$ ), що резольвенти  $[I - B_{n\kappa}(\kappa_n)]^{-1}$  (де  $I$  – одиничний оператор) існують і є голоморфні оператору функції параметрів  $\kappa_n \in \mathbb{H}_{n\kappa}$ , за винятком не більше ніж лічильних множин ізольованих точок  $\Omega_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 2, 3$  (тобто множин, які не мають граничних точок накопичення в кінцевій



частині кожної з поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n=1, 2, 3$ ). В цьому випадку  $[I - B_{nk}(\kappa_n)]^{-1}$  мероморфні в  $H_{nk}$ , залишок в полюсах – оператори кінцевого рангу, і якщо  $\kappa_n \in \Omega_{nk}$ , то рівняння (3.6)  $B_{nk}(\kappa_n)U = U$  мають ненульові рішення в  $H_{nk}$ ,  $n=1, 2, 3$ .

Підсумовуючи представлені вище результати, отримуємо наступне твердження: спектри  $\Omega_{nk}$  кожної з крайових задач (3.1) з умовами 3.1-3.3, а також еквівалентних їй задач (3.6) для діелектричного шару з індукованою кусково-безперервною діелектричною проникністю на частотах розсіяння і генерації  $nk$  складаються з лічильних множин ізольованих точок, без граничних точок накопичення в кінцевій області кожної з поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n=1, 2, 3$ . Резольвенти спектральних задач мають в цих точках полюси кінцевого порядку.

### 3.2 Алгоритм і характеристики власних режимів

Якісний аналіз характеристик спектрів дозволяє створити алгоритми вирішення спектральних крайових задач (3.1) з ум. 3.1-3.3 шляхом зведення даної задачі до еквівалентної спектральної задачі про відшукування нетривіальних рішень однорідних інтегральних рівнянь (3.6) [16, 19, 106-108]. Можливість розв'язання (3.6) впливає з аналізу основних якісних характеристик спектрів.

Застосувавши до інтегральних рівнянь (3.6) квадратурні формули, отримуємо сукупність незалежних систем лінійних АР другого роду з нелінійним входженням спектрального параметра  $[I - B_{nk}(\kappa_n)]U_{\kappa_n} = \mathbf{0}$ , де  $\kappa_n \in H_{nk}$ ,  $\kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}$ ,  $n=1, 2, 3$ . Отже, спектральна задача відшукування власних частот  $\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset H_{nk}$  і відповідних їм власних полів (нетривіальних рішень інтегральних рівнянь (3.6)), зводиться до наступного алгоритму

$$\left[ \begin{array}{l} f_{n\kappa}(\kappa_n) = \det[\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n\kappa}(\kappa_n)] = 0, \\ [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n\kappa}(\kappa_n)] \mathbf{U}_{\kappa_n} = \mathbf{0}; \\ \kappa \equiv \kappa^{\text{inc}}; \quad \kappa_n \in \Omega_{n\kappa} \subset \mathbb{H}_{n\kappa}, \quad n = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Тут прийняті позначення:  $\{z_l : z_1 = -2\pi\delta < z_2 < \dots < z_l < \dots < z_N = 2\pi\delta\}_{l=1}^N$  – дискретний набір вузлів інтерполяції;  $\kappa_n$  – шукані власні частоти;  $\mathbf{U}_{\kappa_n} = \{U(\kappa_n; z_l)\}_{l=1}^N \equiv \{U_l(\kappa_n)\}_{l=1}^N$  – шукані власні поля, що відповідають власній частоті  $\kappa_n$ ;  $\mathbf{I} = \{\delta_l^m\}_{l,m=1}^N$  – одинична матриця (де  $\delta_l^m$  – символ Кронекера); матриці систем

$$\mathbf{B}_{n\kappa}(\kappa_n) \equiv \mathbf{B}_{n\kappa}(\kappa_n; \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) = \left\{ A_m K_{lm}(\kappa_n, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}) \right\}_{l,m=1}^N \quad (3.10)$$

з заданими величинами векторів полів розсіяння і генерації  $\mathbf{U}_{n\kappa} = \{U(n\kappa; z_l)\}_{l=1}^N \equiv \{U_l(n\kappa)\}_{l=1}^N$  на частотах збудження і генерації  $n\kappa$ ,  $n = 1, 2, 3$ , див. (2.8);  $A_m$  – коефіцієнти, які визначаються вибором квадратурної форми;  $K_{lm}(\kappa_n, \mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa})$  – матричні елементи, що знаходяться за поданням (2.9) з заміною в ньому першого аргументу  $n\kappa$  на  $\kappa_n$ .

Власні частоти

$$\kappa_n \in \Omega_{n\kappa} \subset \mathbb{H}_{n\kappa}, \quad n = 1, 2, 3,$$

тобто характеристичні числа дисперсійних рівнянь задачі (3.9), знаходяться при вирішенні відповідних дисперсійних рівнянь

$$f_{n\kappa}(\kappa_n) = \det[\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n\kappa}(\kappa_n)] = 0$$

із застосуванням методу Ньютона або його модифікацій. Відповідні цим характеристичним числам нетривіальні рішення  $\mathbf{U}_{\kappa_n}$  однорідних систем

$$[\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)] \mathbf{U}_{\kappa_n} = \mathbf{0}$$

лінійних АР (3.9) є власними полями (3.3) шарових структур з індукованою діелектричною проникністю (2.7). Якщо рішення  $\mathbf{U}_{\kappa_n}$  знаходити з точністю до множення на довільну константу, то при поданні  $\mathbf{U}_{\kappa_n}$  у вигляді (3.3) приймаємо  $U(\kappa_n; 2\pi\delta) = a_{\kappa_n} \equiv 1$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Серед характерних особливостей чисельного аналізу індукованих власних режимів нелінійних шарових структур відзначимо наступні:

– в рівнянні (3.9), згідно з (3.10) діелектричні проникності входять в матричні елементи, які визначаються полями розсіяння і генерації  $\mathbf{U}_\kappa, \mathbf{U}_{2\kappa}, \mathbf{U}_{3\kappa}$  задачі (2.6) з використанням алгоритму (3.11). Це задає структуру проведення численних досліджень. Дослідженню власних режимів лінеаризованих структур (3.9) завжди має передувати рішення в SC постановці нелінійних задач розсіяння і генерації хвиль (2.11). Відзначимо, що при аналізі лінійних структур задача збудження (розсіяння) і спектральна задача можуть вирішуватися незалежно;

– у фізичних додатках є корисною теорема [110] про безперервну залежність оператора (3.8) (або (3.10)) спектральної задачі від певного не спектрального параметра  $\tau$  досліджуваної задачі, тобто  $B_{nk}(\kappa_n, \tau)$  (або  $\mathbf{B}_{nk}(\kappa_n, \tau)$ ). З цієї теореми, зокрема, випливає, що характеристичні числа  $\kappa_n(\tau)$ , тобто полюси функції  $[I - B_{nk}(\kappa_n, \tau)]^{-1}$  (або  $[\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n, \tau)]^{-1}$ ), залежать від  $\tau$  безперервно. Отже, вони можуть з'явитися або зникнути тільки на кордоні довільно заданої відкритої зв'язної області  $D \subset \mathbb{H}_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Далі  $\kappa_n(\tau) \in \Omega_{nk}(\tau) \subset \mathbb{H}_{nk}$  будемо інтерпретувати як гілки дисперсійних

залежностей, що відповідають власним полям  $U(\kappa_n(\tau); z)$  досліджуваної задачі.

Аналіз пов'язаних станів полів розсіяння і генерації (2.4), що індукують діелектричні проникності (2.3) і (2.7) нелінійних електродинамічних структур, які призводять до обміну енергією і вирішуються в рамках SC процесу, зручно виконувати, вводячи поняття відносних величин випромінювання енергії  $R_{nk}^{\pm}, W_{\{3:1\}}, W_{\{3:123\}}$ , згідно з (2.13), (2.15), (2.16).

Застосувавши спектральний підхід, для опису процесів розсіяння і генерації коливань нелінійними структурами доцільно скористатися поняттями добротності ( $Q$ -factor) власних коливань [16, 106, 111-113]

$$Q_{\kappa_n} = \text{Re } \kappa_n / (-2 \text{Im } \kappa_n) \quad (3.11)$$

і аналізувати динаміку досліджуваного енергетичного режиму розсіяння і генерації  $R_{nk}^{\pm}, W_{\{3:1\}}, W_{\{3:123\}}$ , відстежуючи поведінку величини відносної добротності (relative  $Q$ -factor) власних коливань

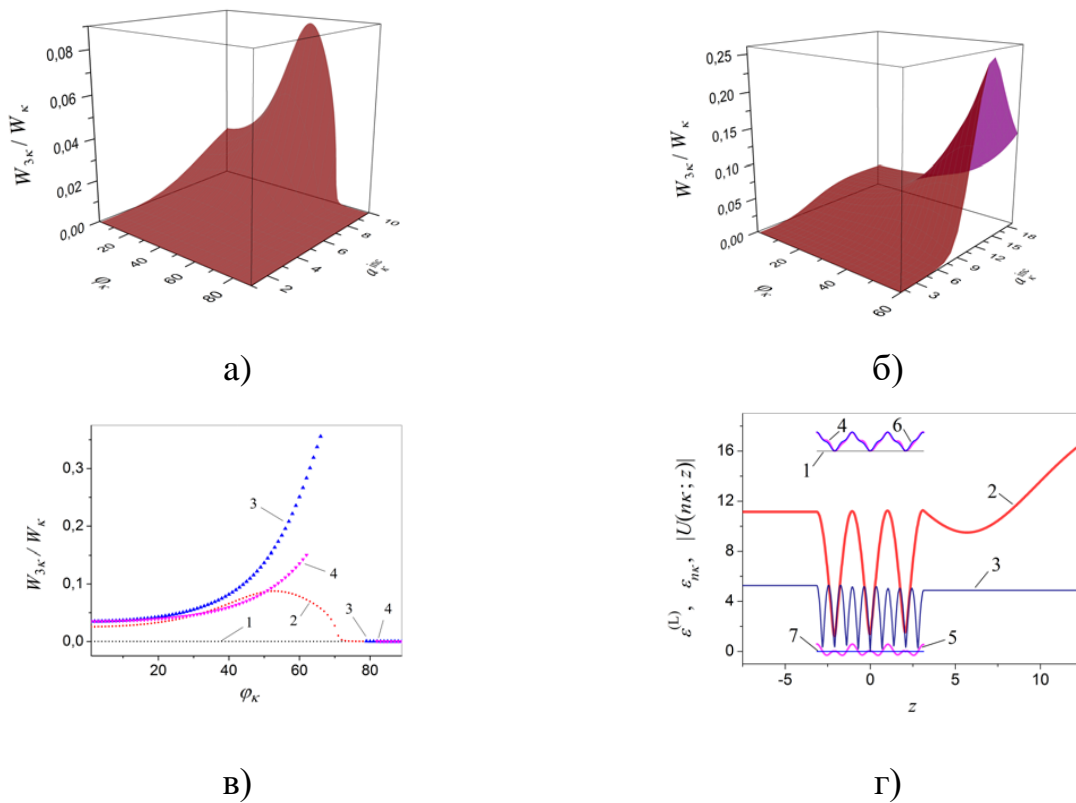
$$Q_{\{1:3\}} = Q_{\kappa_1} / Q_{\kappa_3} \quad (3.12)$$

Відзначимо, що класифікація полів розсіяння і генерації власних полів діелектричної шаруватої структури за  $H_{m,l,p}$  типам ідентична тій, яка наведена в [16, 19-25, 106] (див. також розділ 2, п. 2.3).

### **3.3 Випромінювання нелінійного шару і індуковані власні режими при фіксованій частоті збудження**

Розглянемо одностороннє збудження нелінійного шару, що каналізує енергію (тобто має позитивну величину кубічної сприйнятливості нелінійного

середовища  $\alpha(z) > 0$ ), при фіксованому значенні ЧЗ  $\kappa = \kappa^{\text{inc}} = 0.375$ . При цьому:  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0, b_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0, \varphi_{\kappa} \in [0^{\circ}, 90^{\circ})$  (де  $\varphi_{\kappa} = \varphi_{n\kappa}$ ). Параметри нелінійного шару  $\varepsilon_{n\kappa}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(3\kappa; z)) = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}$ ,  $n = 1, 2, 3$  (див. (2.3), а також (2.7)), задані величинами:  $\varepsilon^{(L)}(z) = 16$ ,  $\alpha(z) = +0.01$  для  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ,  $\delta = 0.5$ . Результати застосування SC методу і спектрального чисельного аналізу представлені на рис. 3.2 – 3.7 [19].



а, б, в – частка енергії, що генерується в третю гармоніку:

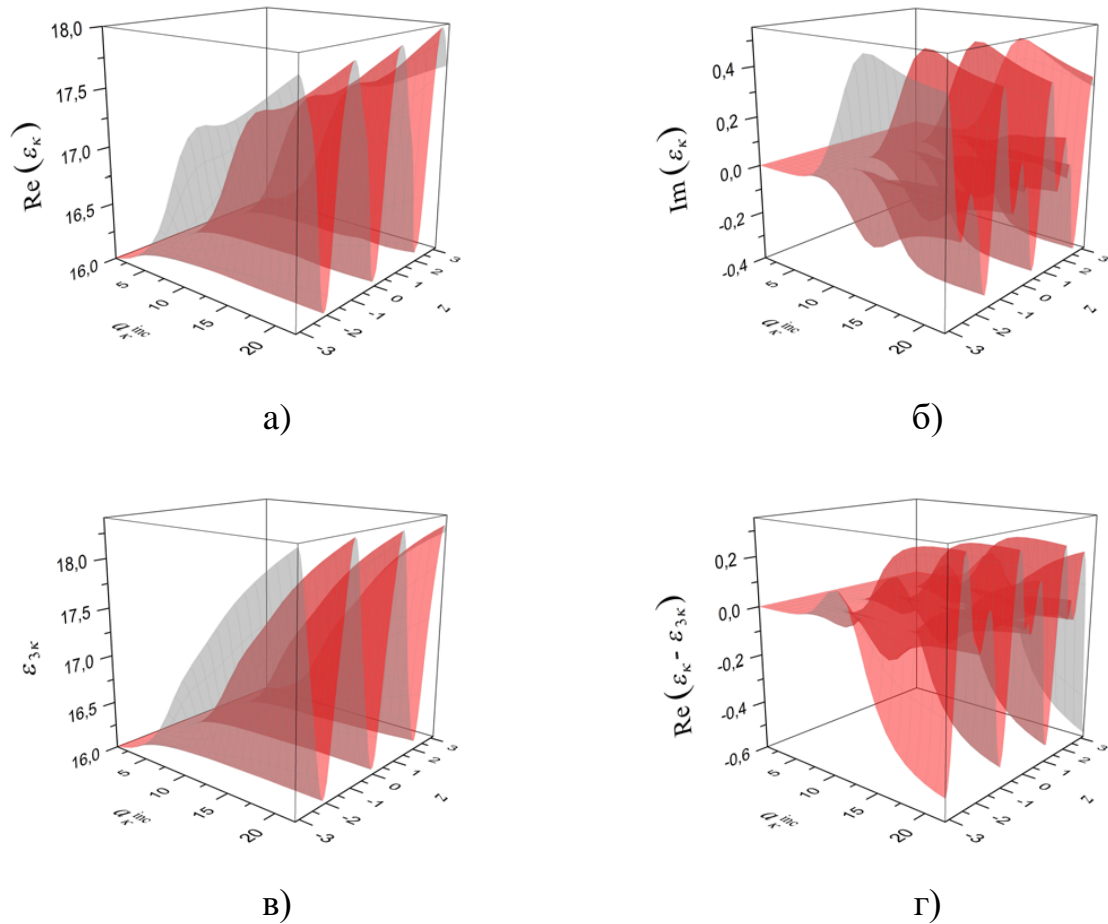
1 – при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 1$ , 2 – при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 9.93$ , 3 – при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 14$ , 4 – при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 19$ ;

г – криві, що характеризують властивості нелінійного шару при

$$a_{\kappa}^{\text{inc}} = 14 \text{ і } \varphi_{\kappa} = 66^{\circ}: 1 - \varepsilon^{(L)}, 2 - |U(\kappa; z)|, 3 - |U(3\kappa; z)|,$$

$$4 - \text{Re } \varepsilon_{\kappa}, 5 - \text{Im } \varepsilon_{\kappa}, 6 - \text{Re } \varepsilon_{3\kappa}, 7 - \text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$$

Рисунок 3.2 – Динаміка поведінки відношення енергії генерації і розсіяння

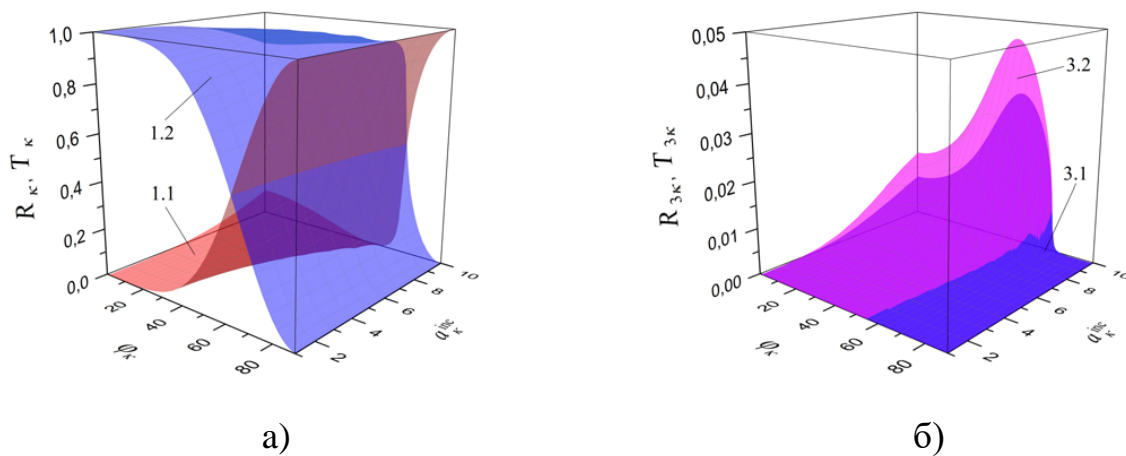


а –  $\text{Re } \varepsilon_{\kappa} [a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]$ ; б –  $\text{Im } \varepsilon_{\kappa} [a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]$ ; в –  $\varepsilon_{3\kappa} [a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]$ ; г –  $\text{Re}(\varepsilon_{\kappa} - \varepsilon_{3\kappa}) [a_{\kappa}^{\text{inc}}, z]$

Рисунок 3.3 – Поверхні, що характеризують нелінійні ДП шару при  $\varphi_{\kappa} = 60^{\circ}$

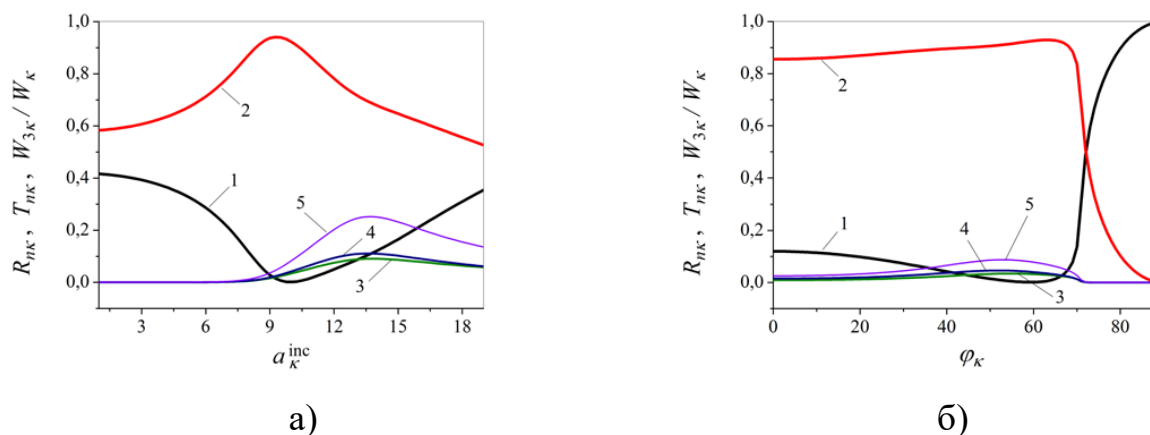
Наведені на рис. 3.2 (а), (б) і (в) результати дозволяють простежити динаміку поведінки величини  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  що характеризує відношення енергії генерації і розсіяння. Зокрема, величина  $W_{3\kappa}/W_{\kappa} = 0.3558$  при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 14$  і  $\varphi_{\kappa} = 66^{\circ}$  (див. криву 3 на рис. 3.2 (в)), тобто  $W_{3\kappa}$  становить 35.58% від величини  $W_{\kappa}$ . Це максимальне значення  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$ , яке вдалося досягти. Чисельний аналіз процесів, відображених кривими 3 в діапазоні кутів  $\varphi_{\kappa} \in (66^{\circ}, 79^{\circ})$ , і кривими 4 в діапазоні кутів  $\varphi_{\kappa} \in (62^{\circ}, 82^{\circ})$  не приводить до збіжності обчислювального алгоритму. Серед результатів, наведених на рис. 3.2 (г), відзначимо, що крива 2 описує розсіяне поле  $H_{0,0,4}$  типу, а крива 3 – поле генерації  $H_{0,0,10}$  типу.

Представлені на рис. 3.3 поверхні характеризують нелінійні ДП шару (2.7), індуковані полями розсіяння і генерації. Тут величина  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$  приймає як позитивні, так і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару (на відрізку  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ) (рис. 3.3 (б)). Поведінка  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$  (при заданій величині амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$ ) характеризує витрати енергії в нелінійному шарі на ЧЗ, які пішли на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки.



а – 1.1 –  $R_\kappa[\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$ , 1.2 –  $T_\kappa[\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$ ; б – 3.1 –  $R_{3\kappa}[\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$ , 3.2 –  $T_{3\kappa}[\varphi_\kappa, a_\kappa^{\text{inc}}]$

Рисунок 3.4 – Властивості розсіяння і генерації нелінійного шару



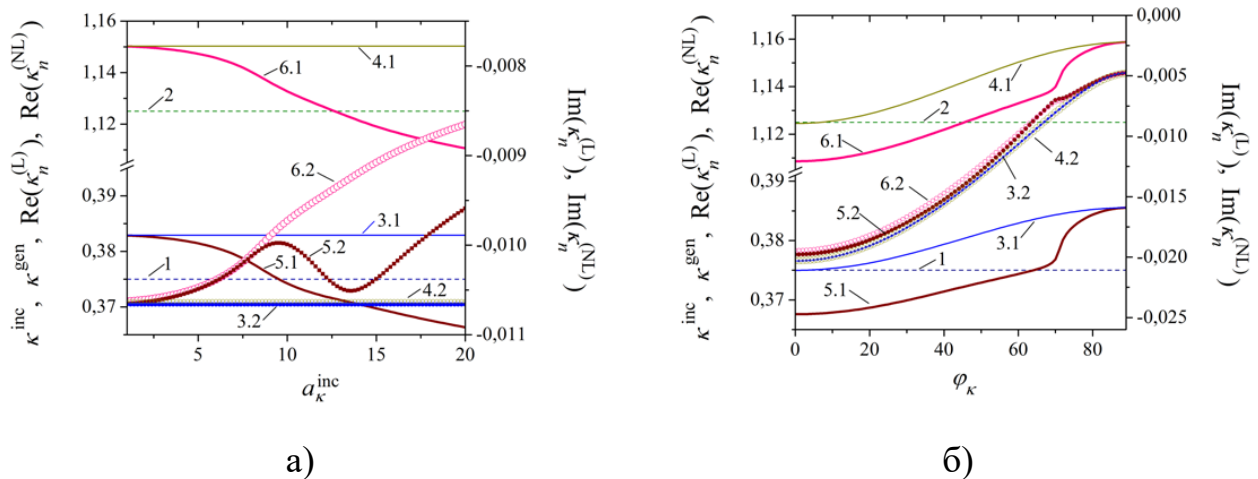
Криві 1 –  $R_\kappa$ , 2 –  $T_\kappa$ , 3 –  $R_{3\kappa}$ , 4 –  $T_{3\kappa}$ , 5 –  $W_{3\kappa}/W_\kappa$ :

а – при  $\varphi_\kappa = 60^\circ$ ; б – при  $a_\kappa^{\text{inc}} = 9.93$

Рисунок 3.5 – Динаміка наведених характеристик

Властивості розсіяння і генерації нелінійного шару в діапазоні зміни параметрів  $\varphi_\kappa \in [0^0, 90^0)$ ,  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [1, 9.93]$  представлені поверхнями  $R_\kappa$ ,  $T_\kappa$ ,  $R_{3\kappa}$ ,  $T_{3\kappa}$  на рис. 3.4. Перетин цих поверхонь, а також поверхонь  $W_{3\kappa}/W_\kappa$  (див. рис. 3.2 (а) і (б)) площинами  $\varphi_\kappa = 60^0$  і  $a_\kappa^{\text{inc}} = 9.93$  відображено графіками на рис. 3.5.

Динаміка наведених на рис. 3.4 і рис. 3.5 характеристик обумовлена варіацією відповідних власних частот задач (3.1) з умовами 3.1-3.3, їх близькістю до частот розсіяння (збудження)  $\kappa^{\text{scat}} \equiv \kappa^{\text{inc}} = \kappa$  і генерації  $\kappa^{\text{gen}} = 3\kappa$  хвиль.



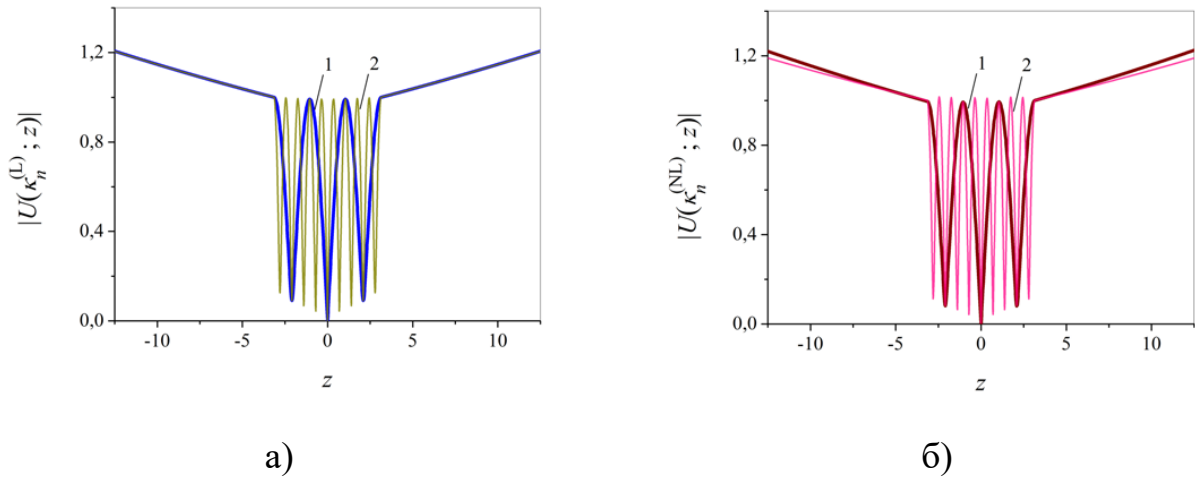
а – при  $\varphi_\kappa = 60^0$ ; б – при  $a_\kappa^{\text{inc}} = 9.93$

Рисунок 3.6 – Лінії: 1 –  $\kappa = 0.375$ , 2 –  $3\kappa = 1.125$ ; комплексних власних частот лінійної задачі ( $\alpha = 0$ ), 3.1 –  $\text{Re } \kappa_1^{(L)}$ , 3.2 –  $\text{Im } \kappa_1^{(L)}$ , 4.1 –  $\text{Re } \kappa_3^{(L)}$ , 4.2 –  $\text{Im } \kappa_3^{(L)}$ ; і ІСЗ ( $\alpha = +0.01$ ), 5.1 –  $\text{Re } \kappa_1^{(NL)}$ , 5.2 –  $\text{Im } \kappa_1^{(NL)}$ , 6.1 –  $\text{Re } \kappa_3^{(NL)}$ , 6.2 –  $\text{Im } \kappa_3^{(NL)}$

Порівняємо результати, представлені на рис. 3.5 і рис. 3.6. Перетин кривих 1 і 5.1 на рис. 3.6 задає параметри, в околі яких спостерігається каналізація (прозорість) нелінійної структури. На рис. 3.6 (а) перетин кривих 1 і 5.1 відбувається при  $a_\kappa^{\text{inc}} = 9.5$ , тут же крива 5.2 досягає локального максимуму. Поблизу цього значення спостерігається явище каналізації (прозорості) шару на



рис. 3.5 (а), рис. 3.5 (б) і рис. 3.6 (б). Перетин кривих 1 і 5.1 задає параметр  $\varphi_\kappa = 64^0$ , поблизу якого спостерігаємо ефект каналізації на рис. 3.6 (б).



а – лінійна задача ( $\alpha = 0$ ),  $1 - \left| U\left(\kappa_1^{(L)}; z\right) \right|$  з  $\kappa_1^{(L)} = 0.3829155 - i0.01066148$ ,

$2 - \left| U\left(\kappa_3^{(L)}; z\right) \right|$  з  $\kappa_3^{(L)} = 1.150293 - i0.01062912$ ;

б – лінеаризована задача ( $\alpha = +0.01$ ),  $1 - \left| U\left(\kappa_1^{(NL)}; z\right) \right|$  з

$\kappa_1^{(NL)} = 0.3705110 - i0.01049613$ ,  $2 - \left| U\left(\kappa_3^{(NL)}; z\right) \right|$  з  $\kappa_3^{(NL)} = 1.121473 - i0.009194824$

Рисунок 3.7 – Криві власних полів шару при  $\varphi_\kappa = 60^0$ ,  $a_\kappa^{\text{inc}} = 14$

Проведемо аналіз властивостей генерації поля нелінійною шаровою структурою. В ситуації на рис. 3.6 (а) перетин кривих 2 і 6.1 супроводжується появою інтервалу монотонного спадання кривої 5.2. Перетин кривих 2 і 6.1 задає параметр  $a_\kappa^{\text{inc}} = 12.6$ , який потрапляє в інтервал значень амплітуд  $[9.5, 13.6]$ , на якому крива 5.2 монотонно спадає. Це призводить до зрушення уявної частини власної частоти розсіяння (кривої 5.2) щодо власної частоти генерації (кривої 5.2). Величина зсуву визначається відстанню між кривими 6.2 і 5.2 при заданому значенні  $a_\kappa^{\text{inc}}$ . Максимальна відстань між кривими 6.2 і 5.2 досягається в точці мінімуму кривої 5.2 при  $a_\kappa^{\text{inc}} = 13.6$ , далі з ростом амплітуди

$a_{\kappa}^{\text{inc}}$  відстань між кривими 6.2 і 5.2 не зазнає суттєвих змін. Максимальна величина генерації досягається при амплітуді близькою до перетину кривих 2 і 6.1, але зрушеною до точки  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 13.6$  локального мінімуму кривої 5.2. Дивіться  $R_{3\kappa}$ ,  $T_{3\kappa}$ ,  $W_{3\kappa}/W_{\kappa}$  на рис. 3.5 (а) і рис. 3.2 (б).

На рис. 3.6 (б), поблизу перетину кривих 2 і 6.1 (коли  $\varphi_{\kappa} \approx 45^{\circ}$ ), при порівнянних значеннях уявних частин гілок власних частот 5.2 і 6.2, також більш сильно проявляються властивості генерації шару (рис. 3.5, рис. 3.4).

На рис. 3.5 наведені характерні розподіли власних полів які відповідають досліджуваним власним гілкам рис. 3.6. Лініями 1 відзначені власні поля  $H_{0,0,4}$  типу 2 -  $H_{0,0,10}$  типу.

### 3.4 Динаміка резонансного випромінювання тришарової структури з нелінійним середовищем

Оскільки оптимальні енергетичні властивості резонансних процесів розсіяння і генерації хвиль спостерігаються поблизу власних частот досліджуваного об'єкта (див. розділ 3, п. 3.3), інтерес представляють ЧЗ  $\kappa \in [0, +\infty)$ , які визначаються однією з величин:

$$\begin{aligned} \kappa &= \text{Re} \kappa_n / n \quad \text{для} \quad \forall n \in \{1, 2, 3\}; \\ \kappa &= \text{Re}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) / (1 + 2 + 3); \\ \kappa &= \text{Re}(\kappa_1 + \kappa_3) / (1 + 3); \\ \kappa &= \text{const}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Задовольнити будь-яку з вимог (3.13) можна за допомогою ітераційного підходу, на кожному кроці якого виконуються ітераційні процеси послідовного вирішення задач (2.8) (див. алгоритм (2.11)) і (3.9). В якості початкового наближення, до вирішення задач (2.8), (3.9) за умови (3.13), можна взяти

рішення відповідної лінійної задачі з коефіцієнтом нелінійної сприйнятливості  $\alpha(z) \equiv 0$ .

Розглянемо нелінійні шарові об'єкти з параметрами (див. (2.3) і рис. 1.1):

$$\{\varepsilon^{(L)}(z), \alpha(z)\} = \begin{cases} \{\varepsilon^{(L)} = 1.5, \alpha = 0\}, & [z \in -2\pi\delta, -2\pi\delta/3) \cup (2\pi\delta/3, 2\pi\delta]; \\ \{\varepsilon^{(L)} = 1, \alpha = \mp 0.01\}, & z \in [-2\pi\delta/3, 2\pi\delta/3]; \end{cases} \quad (3.14)$$

при  $\delta = 0.5$  і  $\varphi_{nk} = 0^0$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Збудження відбувається зверху електромагнітним полем з  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $\{a_{nk}^{\text{inc}} = 0\}_{n=2}^3$ ,  $\{b_{nk}^{\text{inc}} = 0\}_{n=1}^3$  на основній частоті  $\kappa$  і відповідає резонансам розсіяння ( $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ ,  $\kappa^{(L)} = \text{Re } \kappa_1^{(L)}$ , для  $\alpha \equiv 0$ ) та генерації ( $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$ ,  $\kappa^{(L)} = \text{Re } \kappa_3^{(L)}/3$ , для  $\alpha \equiv 0$ ) на потроєну частоту.

У цьому розділі введені позначення:  $a_{0,\kappa}^{\text{inc}} \equiv a_{\kappa}^{\text{inc}}$ ,  $|U_{0,n\kappa}| \equiv |U_{n\kappa}|$ ,  $R_{0,n\kappa}^{\pm} \equiv R_{n\kappa}^{\pm}$ .

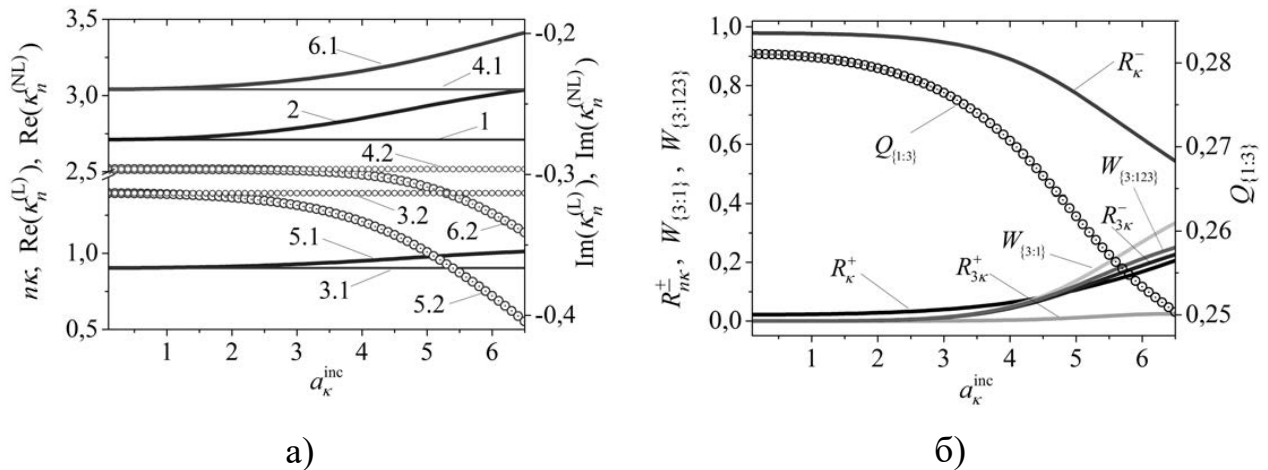
### 3.4.1 Структура з негативною сприйнятливістю середовища. Резонанс розсіяння

Чисельний аналіз процесу резонансного випромінювання (розсіяння і генерації) хвиль нелінійним об'єктом на резонансних частотах розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ ,  $\kappa^{(L)} = \text{Re } \kappa_1^{(L)}$  (близьких до власних частот ІСЗ) проведено на прикладі шарової структури, яка містить абсолютно прозоре в лінійному наближенні середовище, що деканалізує енергію (тобто з  $\alpha \leq 0$ ) згідно з (3.14). Результати досліджень представлені на рис. 3.8 - рис. 3.10 [22].

На рис. 3.8 відображені результати аналізу властивостей розсіяння і генерації хвиль тришаровим об'єктом, який містить нелінійний шар, що деканалізує енергію, які отримані при вирішенні задач (2.8), (3.9) для  $\kappa = \text{Re}(\kappa_1)$ , див. (3.13). Гілки власних частот  $\kappa_n = \kappa_n(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  досліджуваної шарової структури представлені кривими 5.1, 5.2, 6.1, 6.2 на рис. 3.8 (а). Тут же лініями 3.1, 3.2, 4.1, 4.2 нанесені значення величин відповідних власних частот

$\kappa_n^{(L)} = \kappa_n^{(L)}(a_\kappa^{\text{inc}}) = \text{const}$  лінійних задач (при  $\alpha \equiv 0$ ). Власні частоти  $\kappa_n^{(L)}$  не залежать від амплітудних характеристик поля, зокрема, спостерігається рівність

$$\lim_{a_\kappa^{\text{inc}} \rightarrow 0} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) = \kappa_n^{(L)}, \text{ див. рис. 3.8 (а).}$$



а – лінії для  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  і  $\alpha \leq 0$ : 1 –  $3\kappa^{(L)}$  при  $\alpha \equiv 0$ , 2 –  $3\kappa$ ,  
 3.1 –  $\kappa^{(L)} \equiv \text{Re} \kappa_1^{(L)}$ , 3.2 –  $\text{Im} \kappa_1^{(L)}$ , 4.1 –  $\text{Re} \kappa_3^{(L)}$ , 4.2 –  $\text{Im} \kappa_3^{(L)}$ ,  
 5.1 –  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$ , 5.2 –  $\text{Im} \kappa_1$ , 6.1 –  $\text{Re} \kappa_3$ , 6.2 –  $\text{Im} \kappa_3$ ;  
 б –  $R_{n\kappa}^\pm, W_{\{3:1\}}, W_{\{3:123\}}$  – енергетичних характеристик

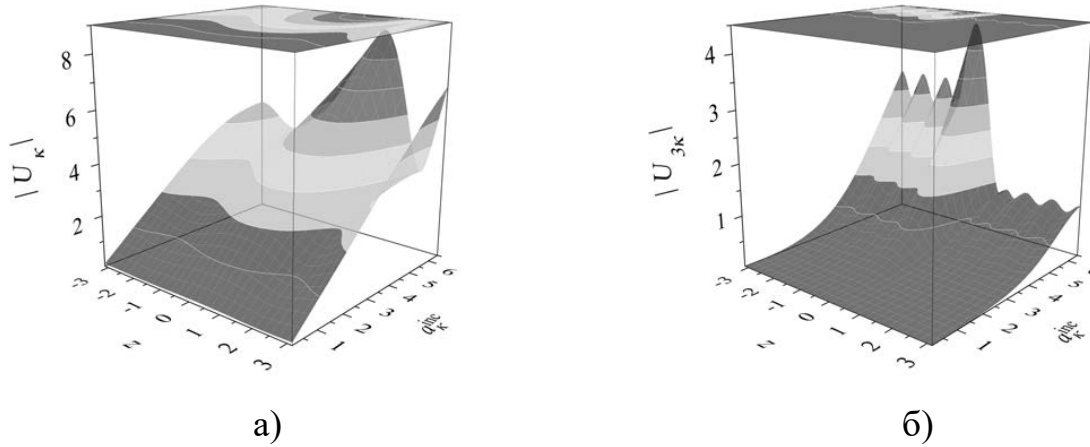
$Q_{\{1:3\}}$  – відносної добротності

Рисунок 3.8 – Спектральні характеристики

У разі присутності в шаровому об'єкті шару, що деканалізує енергію, зростання амплітуди збудження  $a_\kappa^{\text{inc}}$  призводить до зростання  $\text{Re} \kappa_n$ ,  $n=1, 3$  (криві 5.1, 6.1), і зменшення  $\text{Im} \kappa_n$ ,  $n=1, 3$  (криві 5.2, 6.2). Тут зростання  $\text{Re} \kappa_n$ ,  $n=1, 3$  (рис. 3.8 (а)) зумовлене зменшенням величин  $\text{Re} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n=1, 3$  (див. (2.3) і рис. 3.10).

Наведені на рис. 3.8 (а) спектральні характеристики дозволяють в рамках розвиненого SC підходу побічно аналізувати процеси обміну енергією, що мають місце при розсіянні і генерації хвиль нелінійними об'єктами (зокрема, за

величиною відносної добротності коливань  $Q_{\{1:3\}}$ ). Зіставимо нанесені на кривій величини  $Q_{\{1:3\}}$  з енергетичними характеристиками  $W_{\{3:1\}}$  або  $W_{\{3:123\}}$ , представленими кривими на рис. 3.8 (б).



а –  $|U_{\kappa}|$  розсіяння; б –  $|U_{3\kappa}|$  генерації

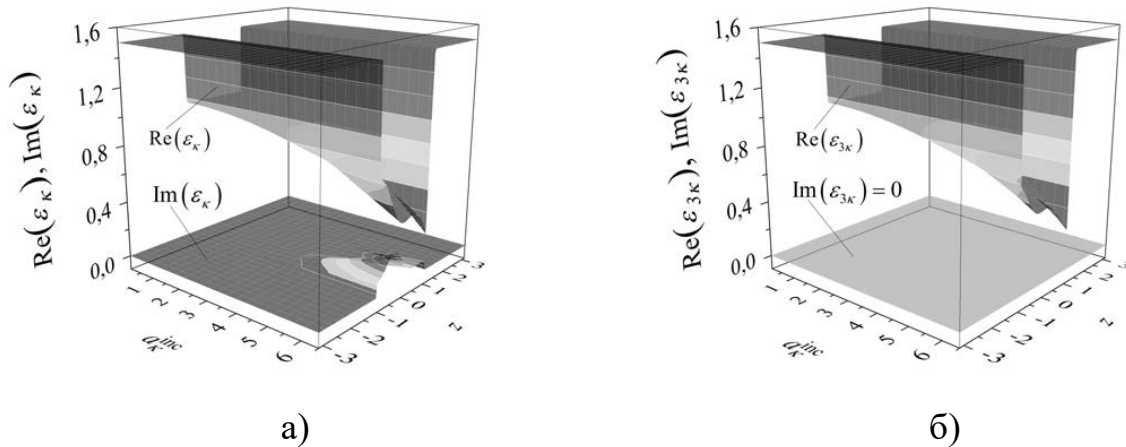
Рисунок 3.9 – Поверхні величин  $|U_{n\kappa}|$  поля для  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$  і  $\alpha \leq 0$

Локальне спадання величини відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}$  з ростом амплітуди падаючого поля  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  призводить до сплеску енергії  $W_{\{3:1\}}$  і  $W_{\{3:123\}}$ , що генерується в третю гармоніку (рис. 3.8 (б)). При цьому тип коливань розсіяння і генерації не змінюється. У досліджуваному діапазоні амплітуд падаючого поля спостерігаються розсіяні поля  $H_{0,0,3}$  типу (див. рис. 3.9 (а)) і поля генерації  $H_{0,0,8}$  типу (рис. 3.9 (б)).

Нелінійні складові  $\varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})}$  діелектричної проникності  $\varepsilon_{n\kappa}$  на кожній з частот  $\kappa$  і  $3\kappa$  визначаються величинами полів  $U(\kappa; z)$  і  $U(3\kappa; z)$ . Для непоглинаючих середовищ  $\text{Im } \varepsilon^{(\text{L})}(z) \equiv 0$ , з урахуванням реальної кубічної сприйнятливості  $\alpha(z)$ , вірна рівність (згідно з (2.3))

$$\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}(z) = \text{Im } \varepsilon_{n\kappa}^{(\text{NL})}(z).$$

Зростання амплітуди  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  падаючого поля на частоті  $\kappa$  призводить до генерації поля третьої гармоніки  $U(3\kappa; z)$ . У досліджуваному випадку величина  $\text{Im}\varepsilon_{\kappa}^{(\text{NL})}(z)$  (або  $\text{Im}\varepsilon_{\kappa}(z)$  при  $\text{Im}\varepsilon^{(\text{L})}(z) \equiv 0$ ) приймає позитивні значення уздовж висоти нелінійного шару (рис. 3.10 (а)).



а –  $\text{Re}\varepsilon_{\kappa}, \text{Im}\varepsilon_{\kappa}$ ; б –  $\text{Re}\varepsilon_{3\kappa}, \text{Im}\varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

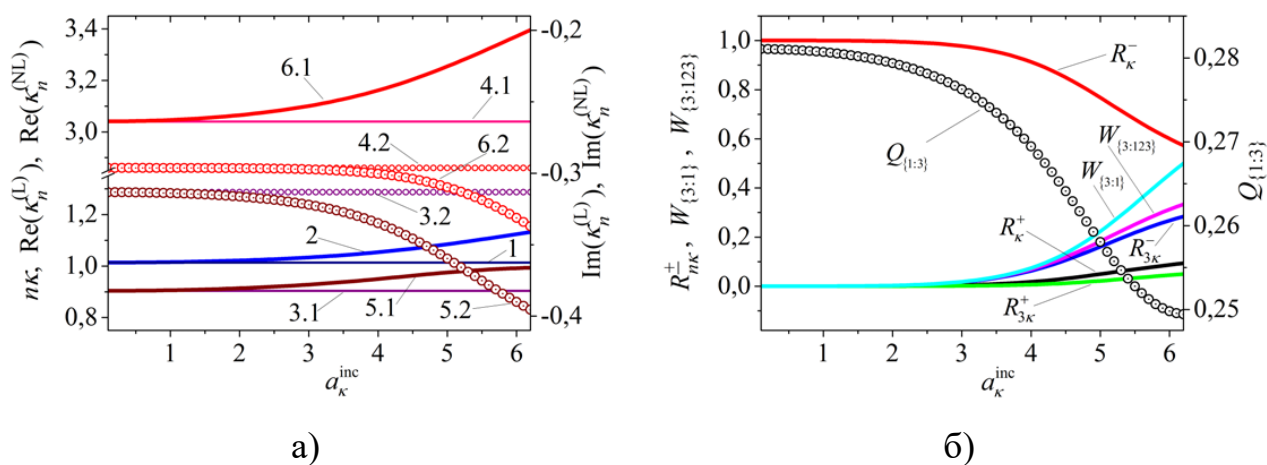
Рисунок 3.10 – Діелектричні проникності нелінійних шарових структур для  $\kappa = \text{Re}\kappa_1$  і  $\alpha \leq 0$

Описана ситуація характеризує витрати (втрати) енергії в нелінійному середовищі (на ЧЗ  $\kappa$ ), які пішли на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки (на частоті  $3\kappa$ ) [16, 19, 100, 103]. Поля генерації на частоті  $3\kappa$  є слабкими та не віддають енергію на генерацію нових гармонік. Тут  $\text{Im}\varepsilon_{3\kappa}^{(\text{NL})}(z) \equiv 0$ , (рис. 3.10 (б)), де  $\text{Im}\varepsilon_{3\kappa}(z) \equiv 0$  при  $\text{Im}\varepsilon^{(\text{L})}(z) \equiv 0$ .

### 3.4.2 Структура з негативною сприйнятливістю середовища. Резонанс генерації

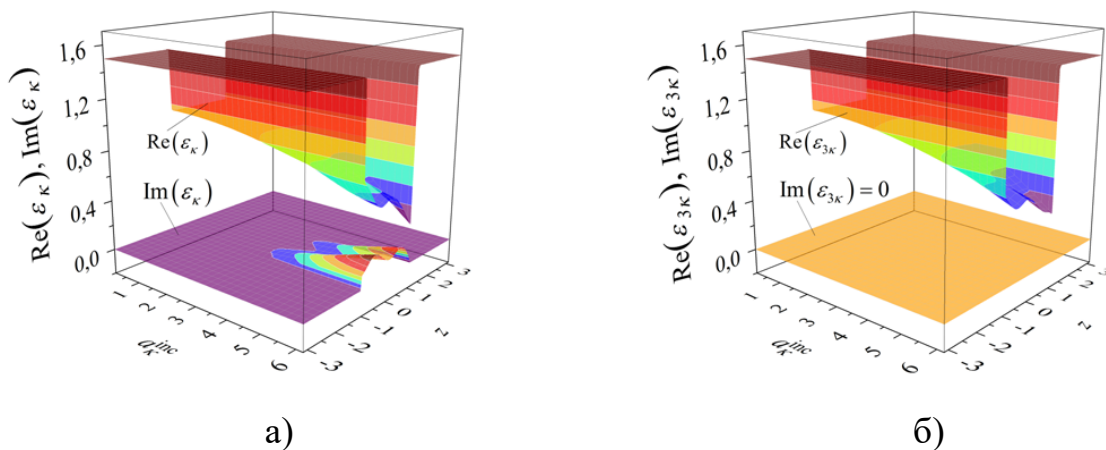
Результати чисельного аналізу процесу випромінювання хвиль нелінійною структурою з негативною сприйнятливістю середовища  $\alpha \leq 0$ , див. (3.14), при збудженні на частотах  $\kappa = \text{Re}\kappa_3(a_{\kappa}^{\text{inc}})/3$ , що відповідають

резонансним частотам  $3\kappa = \text{Re} \kappa_3 (a_\kappa^{\text{inc}})$  генерації хвиль, наведені на рис. 3.11 і рис. 3.12 [46].



а –  $1 - \kappa^{(L)} = \text{Re} \kappa_3^{(L)} / 3$  при  $\alpha \equiv 0$ , 2 –  $\kappa$ , 3.1 –  $\text{Re} \kappa_1^{(L)}$ , 3.2 –  $\text{Im} \kappa_1^{(L)}$ ,  
 4.1 –  $\text{Re} \kappa_3^{(L)}$ , 4.2 –  $\text{Im} \kappa_3^{(L)}$ , 5.1 –  $\text{Re} \kappa_1$ , 5.2 –  $\text{Im} \kappa_1$ , 6.1 –  $\text{Re} \kappa_3$ , 6.2 –  $\text{Im} \kappa_3$ ;  
 б –  $R_{n\kappa}^\pm, W_{\{3:1\}}, W_{\{3:123\}}$  – енергетичних характеристик і  
 $Q_{\{1:3\}}$  – відносної добротності

Рисунок 3.11 – Випадок резонансів на частоті генерації для  $\kappa = \text{Re} \kappa_3 / 3$  і  $\alpha \leq 0$



а –  $\text{Re} \varepsilon_\kappa, \text{Im} \varepsilon_\kappa$ ; б –  $\text{Re} \varepsilon_{3\kappa}, \text{Im} \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

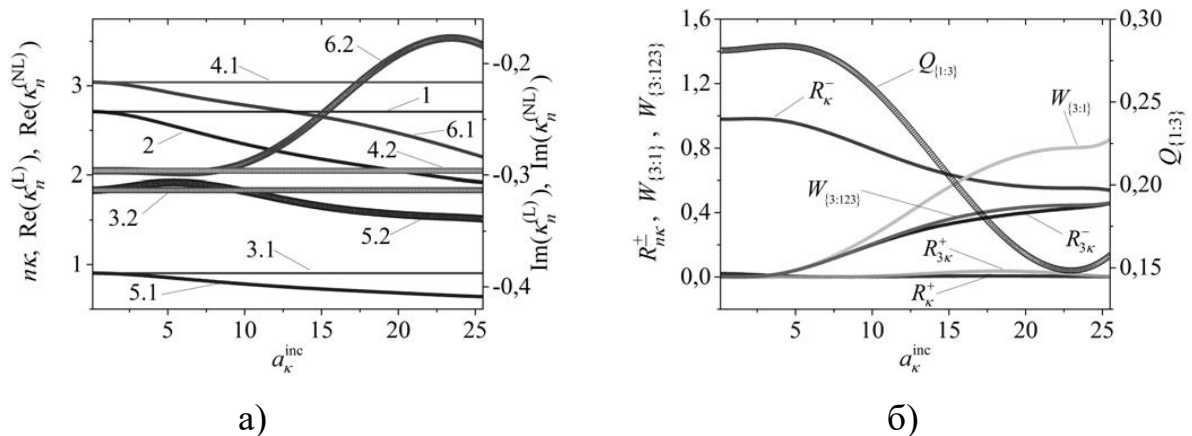
Рисунок 3.12 – Діелектричні проникності нелінійних шарових структур для  $\kappa = \text{Re} \kappa_3 / 3$  і  $\alpha \leq 0$

Зіставивши результати на рис. 3.11 і рис. 3.12, які описують випадок резонансів на частоті генерації з графіками на рис. 3.8 і рис. 3.10 в ситуації резонансного розсіяння на ЧЗ в обох випадках, спостерігаємо схожу поведінку енергетичних характеристик розсіяння і генерації. Це пояснюється близькістю ЧЗ нелінійної структури до відповідних власних частот ІСЗ.

Відмінність резонансного розсіяння (рис. 3.8) від резонансної генерації (рис. 3.11) полягає в наступному. У першому випадку більш яскраво виражені резонансні властивості розсіяння нелінійного об'єкту (в силу вибору ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ ), а в другому – властивості генерації (оскільки  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$ ). Це видно з динаміки величини  $W_{\{3:1\}}$  на рис. 3.8 і рис. 3.11.

### 3.4.3 Структура з позитивною сприйнятливістю середовища. Резонанс розсіяння

На рис. 3.13 - рис. 3.15 наведені властивості нелінійної шарової структури, яка містить абсолютно прозору середу, що каналізує енергію (тобто нелінійний шар з  $\alpha \geq 0$ ), див. (3.14) і [22].



а – лінії для  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$  і  $\alpha \geq 0$ : 1 –  $3\kappa^{(L)}$  при  $\alpha \equiv 0$ , 2 –  $3\kappa$ ; 3.1 –  $\kappa^{(L)} = \text{Re } \kappa_1^{(L)}$ , 3.2 –  $\text{Im } \kappa_1^{(L)}$ , 4.1 –  $\text{Re } \kappa_3^{(L)}$ , 4.2 –  $\text{Im } \kappa_3^{(L)}$ , 5.1 –  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ , 5.2 –  $\text{Im } \kappa_1$ , 6.1 –  $\text{Re } \kappa_3$ ,

6.2 –  $\text{Im } \kappa_3$ ; б –  $R_{nk}^\pm$ ,  $W_{\{3:1\}}$ ,  $W_{\{3:123\}}$  – енергетичних характеристик і

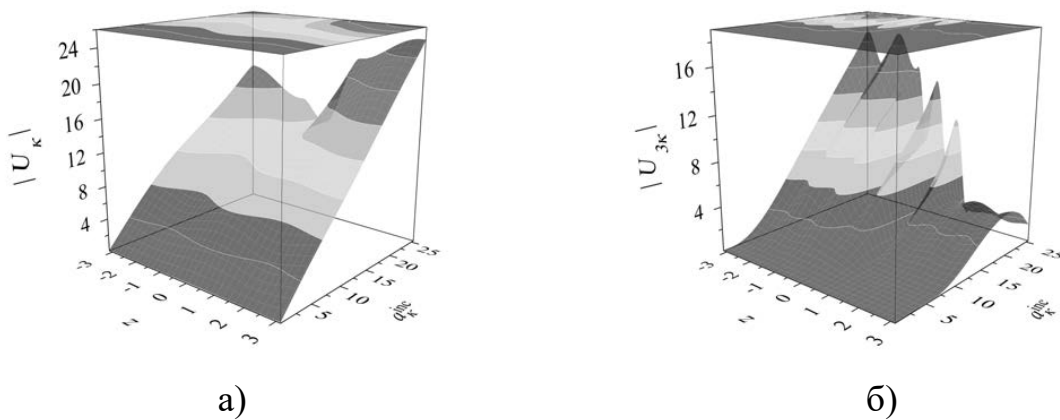
$Q_{\{1:3\}}$  – відносної добротності

Рисунок 3.13 – Характеристики в шаровому об'єкті шару



У разі присутності в шаровому об'єкті шару з позитивною сприйнятливістю середовища зростання амплітуди збудження  $a_\kappa^{\text{inc}}$  призводить до зменшення  $\text{Re} \kappa_n$ ,  $n=1,3$  (криві 5.1, 6.1) і варіації величин  $\text{Im} \kappa_n$ ,  $n=1,3$  (криві 5.2, 6.2). Така поведінка  $\text{Re} \kappa_n$ ,  $n=1,3$  (див. криві 5.1, 6.1 на рис. 3.13 (а)), обумовлена збільшенням величин  $\text{Re} \varepsilon_{nk}$ ,  $n=1,3$  (див. (2.3) і рис. 3.15).

З ростом амплітуди падаючого поля  $a_\kappa^{\text{inc}}$  в області монотонності функції  $Q_{\{1:3\}}$  спостерігається збільшення енергії  $W_{\{3:1\}}$  і  $W_{\{3:123\}}$ , яка генерує в третю гармоніку (рис. 3.13 (б)). Основний приріст енергії, що генерується, спостерігається в області монотонного спадання  $a_\kappa^{\text{inc}} \in (5, 23)$ . Амплітуда  $a_\kappa^{\text{inc}} \approx 23$  відповідна мінімуму  $Q_{\{1:3\}}$ , є критичною точкою перегину для функцій  $W_{\{3:1\}}$  і  $W_{\{3:123\}}$ . Тому в діапазоні  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [23, 25.5]$  спостерігається зростання  $Q_{\{1:3\}}$  і сплеск енергії, що генерується  $W_{\{3:1\}}$ ,  $W_{\{3:123\}}$ .



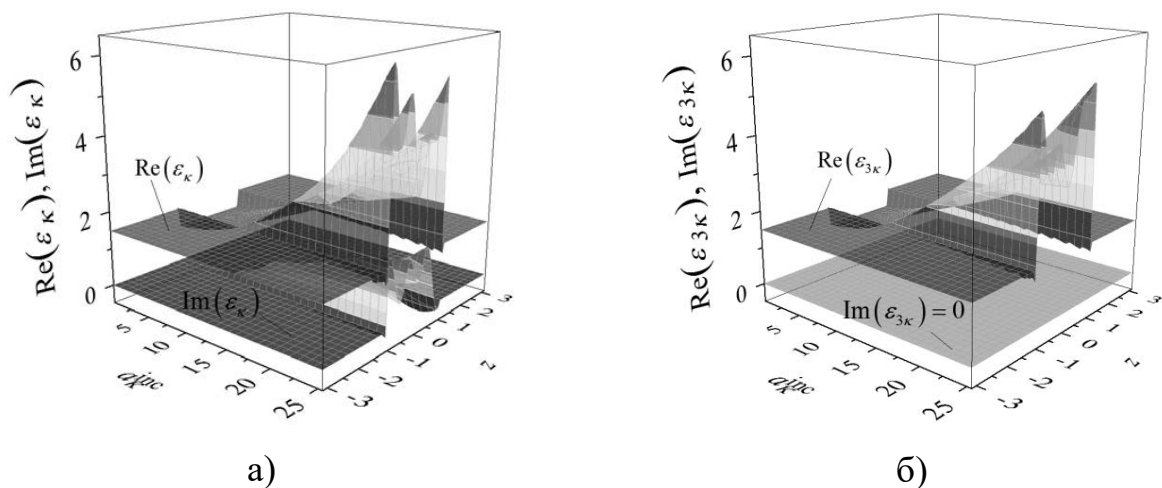
а –  $|U_\kappa|$  розсіяння; б –  $|U_{3\kappa}|$  генерації

Рисунок 3.14 – Поверхні величин  $|U_{nk}|$  поля для  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  і  $\alpha \geq 0$

Відзначимо, що в околі критичних точок (таких як  $a_\kappa^{\text{inc}} \approx 5$ ,  $a_\kappa^{\text{inc}} \approx 23$ ) і точок перегину ( $a_\kappa^{\text{inc}} \approx 12$ ) функції  $Q_{\{1:3\}}$  (рис. 3.13 (б)) спостерігається перетворення типу, тобто зміна конфігурації коливань розсіяння і генерації (рис. 3.14). Так з ростом  $a_\kappa^{\text{inc}}$  спостерігаються зміни динаміки типів розсіяних

коливань  $H_{0,0,3}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0.1, 12)) \rightarrow H_{0,0,2}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [12, 23)) \rightarrow H_{0,0,3}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [23, 25)) \rightarrow H_{0,0,4}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [25, 25.5])$ , (рис. 3.14 (а)), і коливань генерації  $H_{0,0,3}(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 5) \rightarrow H_{0,0,4}(a_{\kappa}^{\text{inc}} = 8) \rightarrow H_{0,0,7}(a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [12, 25.5])$ , (рис. 3.14 (б)).

Характерною є осциляція величин  $\text{Im}\varepsilon_{\kappa}^{(\text{NL})}(z)$  (або  $\text{Im}\varepsilon_{\kappa}(z)$ ), так як тут величина  $\text{Im}\varepsilon^{(\text{L})}(z) \equiv 0$  вздовж висоти нелінійного шару описує витрати енергії нелінійного середовища, що пішли на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки [16, 22, 100, 103]. У досліджуваному випадку, значення величини  $\text{Im}\varepsilon_{\kappa}(z)$  осцилюють. Крім того, вони є позитивні в діапазоні  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0.1, 16.7)$ , та позитивні і негативні при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [16.7, 25.5]$  (рис. 3.15 (а)).



а –  $\text{Re}\varepsilon_{\kappa}, \text{Im}\varepsilon_{\kappa}$ ; б –  $\text{Re}\varepsilon_{3\kappa}, \text{Im}\varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

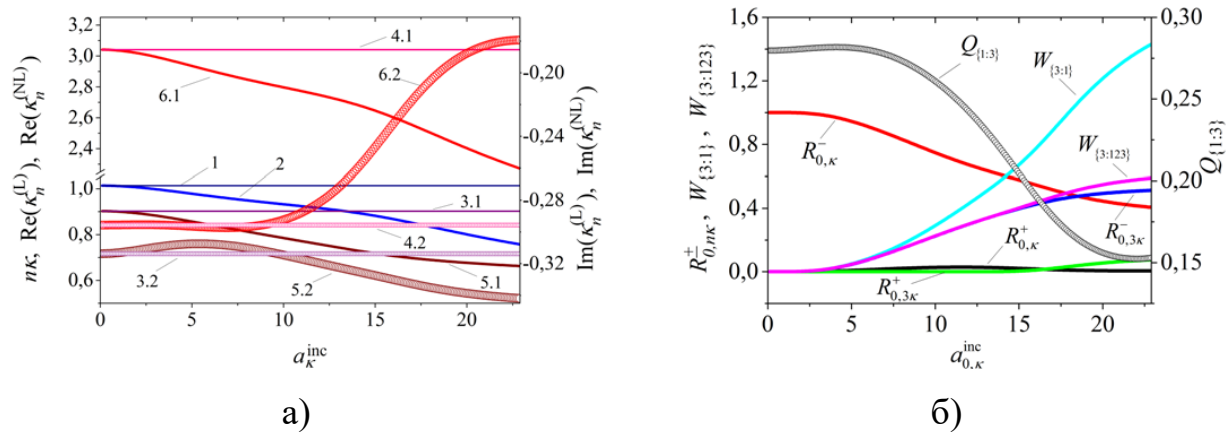
Рисунок 3.15 – Діелектричні проникності нелінійних шарових структур для  $\kappa = \text{Re}\kappa_1$  і  $\alpha \geq 0$

Дослідження динаміки резонансних хвильових процесів нелінійних шарових структур в рамках SC підходу рішення систем нелінійних крайових задач, показало наступне. Урахування дисперсійних характеристик ІСЗ дозволяє побічно аналізувати енергетичні процеси розсіяння і генерації хвиль нелійними об'єктами. Так, з ростом амплітуди падаючого поля  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$ , збільшення енергії генерації спостерігається на ділянках монотонності

відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ . При цьому значний приріст енергії, що генерується, супроводжується монотонним спаданням  $Q_{\{1:3\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ .

### 3.4.4 Структура з позитивною сприйнятливістю середовища. Резонанс генерації

На рис. 3.16 і рис. 3.17 відображені властивості шарової структури, яка містить абсолютно прозору середу з  $\alpha \geq 0$ , див. (3.14) і [45].



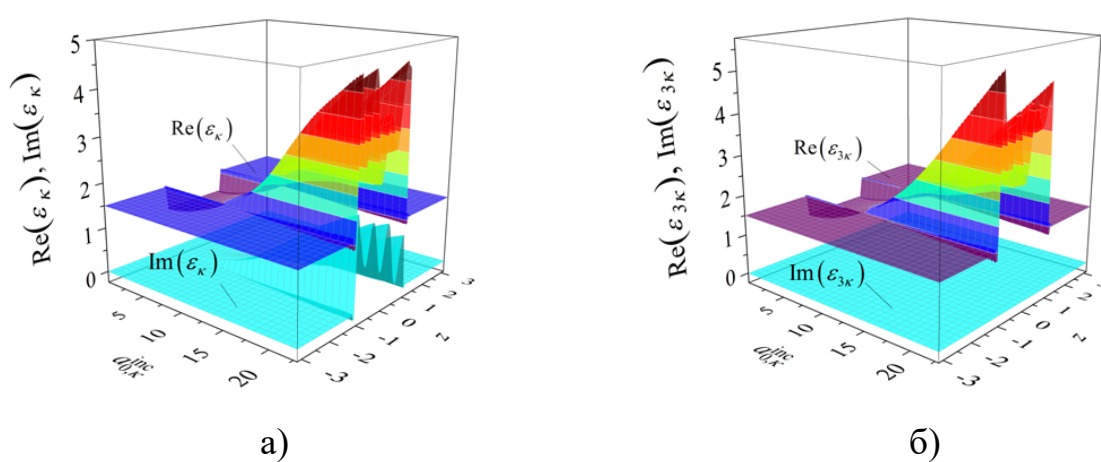
а – 1 –  $\kappa^{(L)} = \text{Re } \kappa_3^{(L)}/3$  при  $\alpha \equiv 0$ , 2 –  $\kappa$ , 3.1 –  $\text{Re } \kappa_1^{(L)}$ , 3.2 –  $\text{Im } \kappa_1^{(L)}$ ,  
4.1 –  $\text{Re } \kappa_3^{(L)}$ , 4.2 –  $\text{Im } \kappa_3^{(L)}$ , 5.1 –  $\text{Re } \kappa_1$ , 5.2 –  $\text{Im } \kappa_1$ , 6.1 –  $\text{Re } \kappa_3$ , 6.2 –  $\text{Im } \kappa_3$ ;  
б –  $R_{nk}^{\pm}$ ,  $W_{\{3:1\}}$ ,  $W_{\{3:123\}}$  – енергетичних характеристик і

$Q_{\{1:3\}}$  – відносної добротності

Рисунок 3.16 – Лінії для  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$  і  $\alpha \geq 0$

Зіставивши графіки, які описують резонанс на частоті генерації на рис. 3.16, рис. 3.17, а також резонанс на ЧЗ на рис. 3.13 і рис. 3.15, спостерігаємо схожу поведінку як спектральних, так і енергетичних характеристик розсіяння і генерації. Виявляється властивий досліджуваній структурі ефект прозорості, що супроводжується перетворенням енергії падаючого поля в поле генерації, тобто, низьких значень відбитої енергії  $R_{\kappa}^+$  і

$R_{3\kappa}^+$  з ростом  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$ . В області прозорості нелінійної структури спостерігаються процеси монотонного спадання енергії  $R_{\kappa}^-$  на ЧЗ  $\kappa$  та наростання енергії генерації  $R_{3\kappa}^-$  на частоті  $3\kappa$ . В разі  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$  (резонансної генерації) описаний ефект більш яскраво виражений ніж коли  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$  (при резонансному розсіянні). Це добре видно з переважної більшості частки енергії генерації  $W_{\{3;1\}}$  на резонансній частоті генерації  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$ , ніж на резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ , що впливає з порівняння динаміку величин  $W_{\{3;1\}}$  на рис. 3.16 (б) і рис. 3.13 (б).



а –  $\text{Re } \varepsilon_{\kappa}, \text{Im } \varepsilon_{\kappa}$ ; б –  $\text{Re } \varepsilon_{3\kappa}, \text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

Рисунок 3.17 – Діелектричні проникності нелінійних шарових структур для  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$  і  $\alpha \geq 0$ .

Отримані результати можуть бути використані в задачах оптимізації та синтезу нелінійних електродинамічних пристроїв, що мають оптимальні властивості розсіяння і генерації енергії, зокрема проектування множників частоти.

### 3.5 Динаміка резонансного випромінювання нелінійної шарової структури з поглинанням

В рамках запропонованого ітераційного підходу, заснованого на рішенні задач (2.8), (3.9), при виконанні вимоги (3.13) в [47] проведено аналіз динаміки

властивостей розсіяння і генерації поля третьої гармоніки двошарової структури, яка складається з нелінійного, абсолютно прозорого (в лінійному наближенні) середовища, що каналізує енергію

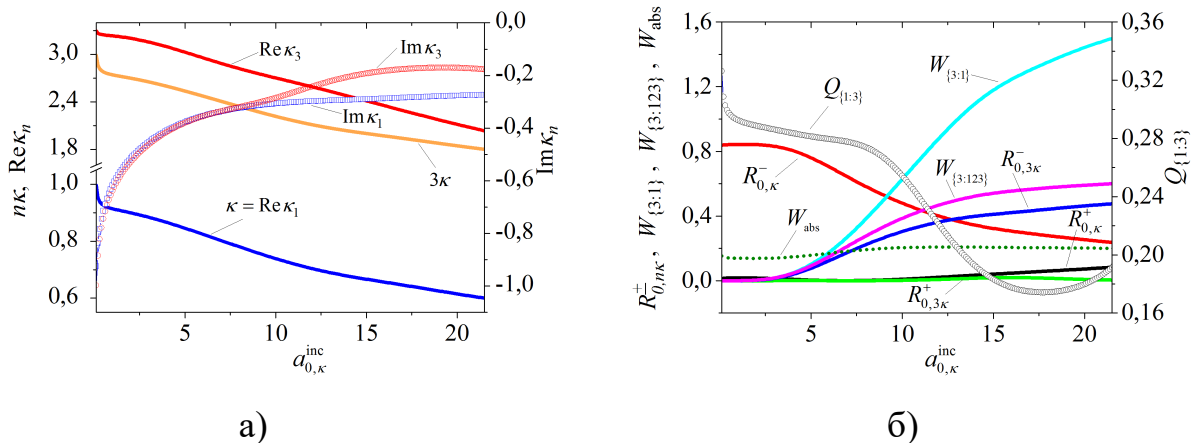
$$\{\varepsilon^{(L)} = 1, \alpha = +0.01\}, \quad z \in (-2\pi\delta/3, 2\pi\delta],$$

і поглинаючого лінійного діелектричного шару

$$\{\varepsilon^{(L)} = 1.5 + i0.1, \alpha \equiv 0\}, \quad z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3],$$

при параметрі  $\delta = 0.5$  (див. (2.3) і рис. 1.1).

Збудження відбувається зверху, по нормалі  $\varphi_{nk} = 0^0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , до нелінійної структури, електромагнітним полем з амплітудами  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $\{a_{nk}^{\text{inc}} = 0\}_{n=2}^3$ ,  $\{b_{nk}^{\text{inc}} = 0\}_{n=1}^3$  на резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ , заданій згідно з умовою (3.13). Результати чисельного аналізу наведені на рис. 3.18 і рис. 3.19.



а – криві частот випромінювання  $n\kappa$  і компоненти  $\text{Re } \kappa_n$ ,  $\text{Im } \kappa_n$  власних частот  $\kappa_n = \text{Re } \kappa_n + i \text{Im } \kappa_n$  для  $n = 1, 3$ ; б – енергетичні характеристики  $R_{nk}^{\pm}$ ,  $W_{\{3:1\}}$ ,

$W_{\{3:123\}}$ ,  $W_{\text{abs}}$  і відносна добротність  $Q_{\{1:3\}}$  при ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$

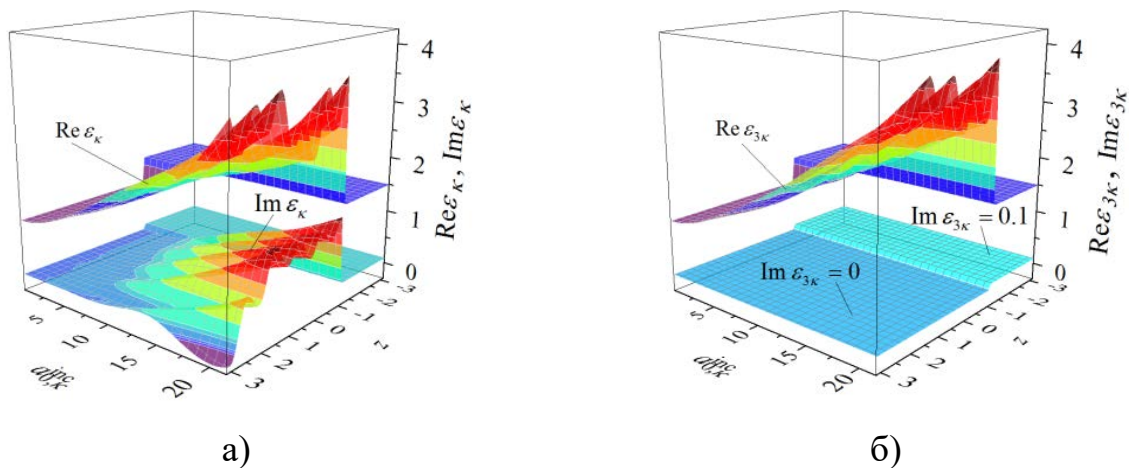
Рисунок 3.18 – Результати чисельного аналізу

У випадку нелінійної шарової структури з поглинаючим лінійним середовищем  $\text{Im} \varepsilon_{nk}^{(L)}(y, z) = 0.1 \neq 0$  при  $z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3]$ , а величина

$$W_{\text{abs}} = \left| 1 - \sum_{n=1}^3 (R_{nk}^+ + R_{nk}^-) \right|$$

характеризує відносну частку енергії, втрачену в поглинаючому середовищі (рис. 3.18 (б)).

Зіставивши на рис. 3.18 (б) динаміку енергетичних характеристик  $R_{3\kappa}^\pm$ ,  $W_{\{3:1\}}$ ,  $W_{\{3:123\}}$  випромінювання на частоті генерації  $3\kappa$  і динаміку величини відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}$ , спостерігаємо наступне. Зростання амплітуди падаючого поля  $a_\kappa^{\text{inc}}$  супроводжується зростанням енергії генерації  $R_{3\kappa}^\pm(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3:1\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3:123\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ . Процесу зростання генерації відповідають ділянки монотонності функції  $Q_{\{1:3\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , при цьому значний приріст енергії генерації спостерігається в області монотонного спадання  $Q_{\{1:3\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , рис. 3.18 (б).



а –  $\text{Re} \varepsilon_\kappa, \text{Im} \varepsilon_\kappa$ ; б –  $\text{Re} \varepsilon_{3\kappa}, \text{Im} \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$

Рисунок 3.19 – Поверхні величин  $\text{Re} \varepsilon_{nk}, \text{Im} \varepsilon_{nk} [a_\kappa^{\text{inc}}, z]$  діелектричної

проникності при  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$

На рис. 3.19 наведено динаміку зміни діелектричної проникності нелінійної шарової структури. Осциляції  $\text{Im} \varepsilon_{\kappa}(z)$  при  $z \in (-2\pi\delta/3, 2\pi\delta]$  на рис. 3.19 (а) характеризують витрати енергії в нелінійному шарі, які пішли на генерацію поля третьої гармоніки. Постійність  $\text{Im} \varepsilon_{\kappa}(z) = 0.1$  при  $z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3]$  на рис. 3.19 (а) і (б) відповідає за втрати енергії в поглинаючому лінійному діелектричному шарі.

В рамках досліджуваної моделі поля генерації на частоті  $3\kappa$  є слабкими та не призводять до генерації нелінійним шаром нових гармонік поля. Згідно з рис. 3.19 (б),  $\text{Im} \varepsilon_{3\kappa}(z) \equiv 0$  при  $z \in (-2\pi\delta/3, 2\pi\delta]$ , тобто енергія на генерацію не витрачається. Рівність  $\text{Im} \varepsilon_{\kappa}(z) = 0.1$  при  $z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3]$  пов'язана з втратами енергії на поглинання в лінійній (поглинаючій) складовій шарової структури.

В рамках розробленого SC підходу, з урахуванням дисперсійних характеристик ІСЗ, проведено аналіз резонансного випромінювання хвиль нелінійними шаровими поглинаючими структурами. Розроблені математичні моделі та обчислювальні алгоритми є основою для задач аналізу та синтезу нелінійних структур, що мають необхідні енергетичні властивості розсіяння і генерації хвиль нелінійними об'єктами.

### 3.6 Висновки по розділу

1. Удосконалено математичну модель та досліджено спектральні задачі з індукованою на частотах випромінювання (розсіяння і генерації) ДП нелінійного шару. Проведено обчислення відносної добротності власних коливань, яке розглядається як відношення добротності поля власного коливання ІСЗ на частоті розсіяння до добротності поля власного коливання ІСЗ на частоті генерації.

2. Показано, що резонансні властивості нелінійних структур при фіксованій ЧЗ обумовлені близькістю частот випромінювання нелінійної структури до комплексних власних частот ІСЗ.

3. За результатами аналізу динаміки випромінювання нелінійних шарових структур і відповідної поведінки характеристичних чисел ІСЗ проведено дослідження резонансних енергетичних процесів розсіяння і генерації хвиль нелінійними об'єктами. Зі збільшенням амплітуди падаючого поля зростанню генерації енергії відповідають ділянки монотонності функції відносної добротності власних коливань. Суттєвий приріст генерації енергії спостерігається в області монотонного спадання цієї функції.

4. У рамках розробленого СУ підходу, з урахуванням дисперсійних характеристик ІСЗ проведено аналіз резонансного випромінювання хвиль нелінійними шаровими структурами, в тому числі і поглинаючими. Розроблена математична модель і створені обчислювальні процедури є основою для задач аналізу та синтезу нелінійних структур з заданими енергетичними властивостями розсіяння і генерації хвиль. Зокрема, вони можуть бути застосовані при проектуванні пристроїв множення частоти.

Основні результати третього розділу опубліковано у роботах [19, 22, 45-47].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у переліку джерел посилання [16, 19-25, 45-47, 100, 103, 106-113].



## 4 МОДЕЛЮВАННЯ РЕЗОНАНСНИХ ПРОЦЕСІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ШАРУ

### 4.1 Алгоритм резонансного випромінювання нелінійного шару. Особливості обчислень на ріманових поверхнях. Критерії достовірності

Аналіз динаміки резонансного розсіяння і генерації коливань на частотах близьких до власних частот ІСЗ досліджуваного нелінійного об'єкта проведемо з використанням наступного ітераційного алгоритму [23-25, 48-50]:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{I. Самоузгоджене рішення задачі} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{2k}, \mathbf{U}_{3k})] \mathbf{U}_{nk} = \delta_n^1 \mathbf{C}_k(\mathbf{U}_{2k}, \mathbf{U}_{3k}) + \delta_n^3 \mathbf{C}_{3k}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{2k}) + \\
 + \bar{\mathbf{U}}_{nk}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{U}}_{nk}^{\text{inc}}, \kappa := \kappa^{(j-1)}, n = 1, 2, 3, \text{ см. (2.6) (і алгоритм (2.11));}
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \text{II. Рішення індукованих спектральних задач} \\
 \left[ \begin{array}{l}
 f_{nk}(\kappa_n) = \det[\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)] = 0, \text{ при } \kappa := \kappa^{(j-1)}; \\
 \text{знаходимо } \kappa_n \in \Omega_{nk} \subset \mathbb{H}_{nk}, n = 1, 2, 3, \text{ см. (3.6) (і алгоритм (3.9));}
 \end{array} \right] \\
 \\
 \text{III. Завдання частот збудження} \\
 \kappa^{(j)} = \text{Re}(\kappa_n)/n \text{ для одого з } n \in \{1, 2, 3\}, \\
 (\text{або } \kappa^{(j)} = \text{Re}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)/(1 + 2 + 3), \\
 \kappa^{(j)} = \text{Re}(\kappa_1 + \kappa_3)/(1 + 3) \text{ чи } \kappa^{(j)} = \text{const}), \text{ см. (3.13)}.
 \end{array} \right\}_{j=1}^J \quad (4.1)$$

На кожному кроці (4.1) виконуються послідовно наступні процеси: (блок I) знаходяться SC рішення задачі (2.6) (з використанням блочно ітераційного алгоритму (2.11)); (блок II) визначаються власні частоти відповідних ІСЗ (3.6); (блок III) ЧЗ  $\kappa^{(j)}$  присвоюється одна з необхідних значень (3.13).

Критерієм закінчення (4.1) є виконання умови

$$\{J = j \in \mathbb{N} : \eta(j) = \|\kappa^{(j)} - \kappa^{(j-1)}\| / \|\kappa^{(j)}\| < \xi\} \quad (4.2)$$

Початкове наближення до ЧЗ  $\kappa := \kappa^{(0)}$  в алгоритмі (4.1) може бути отримано при вирішенні відповідних ІСЗ (3.6) при малих значеннях амплітуд падаючого поля  $\{|a_{nk}^{\text{inc}}| \ll 1, |b_{nk}^{\text{inc}}| \ll 1\}_{n=1}^3$  в блоці I алгоритму (4.1), або при вирішенні відповідних лінійних задач (3.6) зі значенням функції нелінійної сприйнятливості структури  $\alpha(z) \equiv 0$ .

Слід зазначити, що власні частоти шарових об'єктів, що відповідають власним полям малої добротності, можуть належати фізичному, а при більш низькій добротності – нефізичному листу дволистої ріманової поверхні наведеної на рис. 3.1, див. також рис. 4.1. При варіюванні амплітудами поля збудження, геометричними або матеріальними параметрами задачі відповідні гілки спектральних (дисперсійних) кривих можуть переходити з одного листа на інший. Фізичні та нефізичні листи ріманових поверхонь (ідентичні рімановій поверхні наведеної на рис. 3.1) відображені на рис. 4.1.

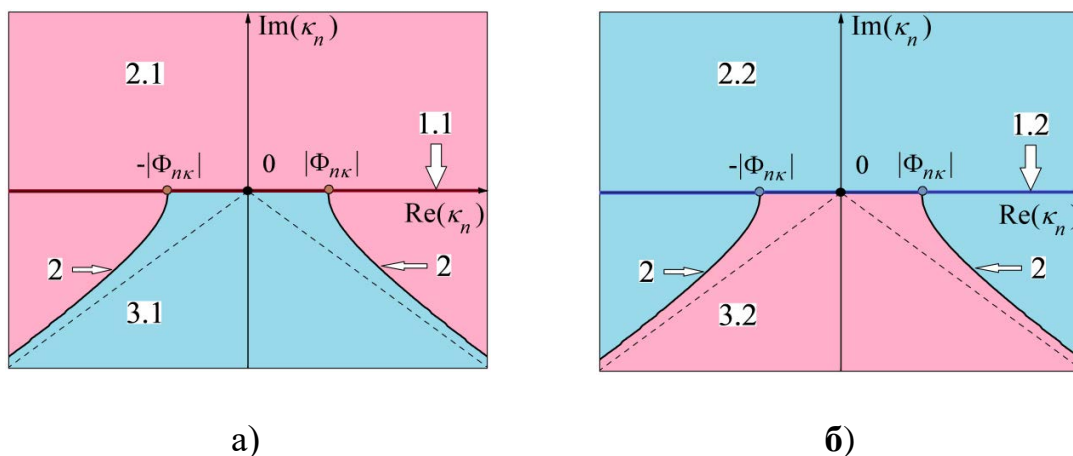


Рисунок 4.1 – (а) Фізичний і (б) нефізичний листи  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$

На рис. 4.1 (а) і (б) позначені: точки розгалуження  $\kappa_n^{\pm} = \pm|\Phi_{nk}|$ ; розрізи  $(\text{Re } \kappa_n)^2 - (\text{Im } \kappa_n)^2 - \Phi_{nk}^2 = 0$ ,  $\text{Im } \kappa_n \leq 0$  – лінії 2; умови випромінювання для

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \left\{ \left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\} : \operatorname{Re} \kappa_n \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \left( \operatorname{Im} \kappa_n = 0 \right) \right\} \quad \text{на лініях} \quad \begin{matrix} 1.1 \\ 1.2 \end{matrix}, \\
& \text{(б)} \quad \left\{ \left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\} : \operatorname{Re} \kappa_n \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \operatorname{Im} \kappa_n \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \left( \operatorname{Im} \kappa_n \neq 0 \right) \right\} \quad \text{на підпросторах} \quad \begin{matrix} 2.1 \\ 2.2 \end{matrix}, \\
& \left\{ \left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\} : \operatorname{Re} \kappa_n \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0, \operatorname{Im} \kappa_n \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \right\} \quad \text{на підпросторах} \quad \begin{matrix} 3.1 \\ 3.2 \end{matrix}.
\end{aligned}$$

В обчислювальних експериментах скористуємося структурою ріманових поверхонь  $H_{nk}$ , які представлені на рис. 4.1 (а) і (б), переходячи при необхідності з одного листа на інший. Структура дволистих ріманових поверхонь  $H_{nk}$  (див. рис. 4.1) задається комплексними просторами з дійсними алгебраїчними точками розгалуження другого роду  $\kappa_n^\pm : \Gamma_{\kappa_n}(\kappa_n^\pm, \Phi_{nk}) = 0$  (тобто  $\kappa_n^\pm = \pm |\Phi_{nk}|$ ,  $n = 1, 2, 3$ ) і розрізами уздовж ліній 2. Фізичний та нефізичний листи  $H_{nk}$ , які задані однаковою конфігурацією розрізів 2, будемо називати *подвійними*. Підпростори двоїстих листів  $H_{nk}$  з ідентичним знаками величин  $\left\{ \operatorname{Re} \kappa_n \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \kappa_n \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\}$  відзначені на фізичному і нефізичних листах поверхні  $H_{nk}$  однаковим кольором, див. рис. 4.1. На дійсній осі  $\operatorname{Re} \kappa_n$  першого фізичного листа, див. рис. 4.1 (а), значення  $\left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\}$  відповідає завданню фізично обґрунтованої умови випромінювання 1.1. Аналітичне продовження  $\Gamma_{\kappa_n}$  в простір комплексних значень частотного параметра  $\kappa_n$ , з урахуванням 1.1 і розрізів 2, однозначно визначає значення величин  $\left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\}$  вимогами 2.1 і 3.1 на першому фізичному листі  $H_{nk}$ , див. рис. 4.1 (а). Другий нефізичний лист відрізняється від першого фізичною заміною знаків у парі величин  $\left\{ \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \right\}$  на протилежні, див. 1.2, 2.2 і 2.3 на рис. 4.1 (б). При цьому вимога 1.2 умови випромінювання грає роль умови збудження.

Відзначимо, що лінії розрізів 2 можуть бути задані довільними кривими, розташованими в третій і четвертій четвертях комплексної площини, на листі ріманової поверхні  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , див. [16, 24, 106].

Приклади фізичних листів ріманових поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$  з різною конфігурацією розрізів уздовж координатних осей наведені на рис. 4.2

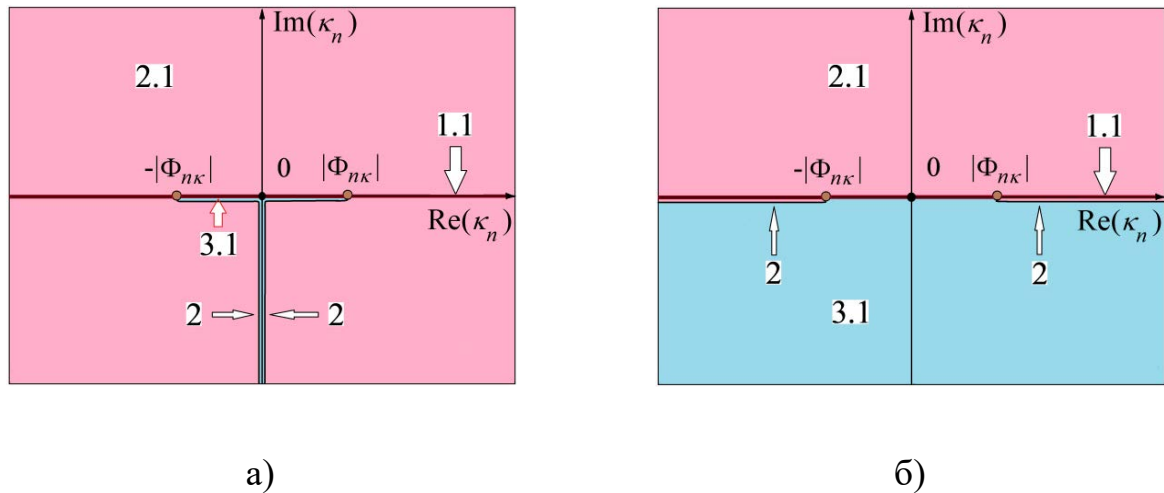


Рисунок 4.2 – Варіанти фізичних листів ріманових поверхонь  $H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$

На рис. 4.2 (а) і (б) введені позначення: точок розгалуження  $\kappa_n^\pm = \pm|\Phi_{nk}|$ ; розрізів – лінії 2, проведені уздовж (а) відрізків дійсних і уявних полуось, (б) умови випромінювання  $\left\{ \left\{ \text{Re}\Gamma_{\kappa_n}, \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \right\} : \text{Re}\kappa_n \text{Re}\Gamma_{\kappa_n} \geq 0, \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \geq 0 (\text{Im}\kappa_n = 0) \right\}$  на лінії 1.1,  $\left\{ \left\{ \text{Re}\Gamma_{\kappa_n}, \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \right\} : \text{Re}\kappa_n \text{Re}\Gamma_{\kappa_n} \geq 0, \text{Im}\kappa_n \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \geq 0 (\text{Im}\kappa_n \neq 0) \right\}$  на підпросторі 2.1, і  $\left\{ \left\{ \text{Re}\Gamma_{\kappa_n}, \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \right\} : \text{Re}\kappa_n \text{Re}\Gamma_{\kappa_n} \leq 0, \text{Im}\kappa_n \text{Im}\Gamma_{\kappa_n} \leq 0 \right\}$  на підпросторі 3.1.

Належність частотного спектрального параметра  $\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset H_{nk}$  (тобто пари величин  $(\text{Re}\kappa_n, \text{Im}\kappa_n)$ ) до фізичних або нефізичних листів поверхні  $H_{nk}$  з різними конфігураціями розрізів перевіряється виконанням умов що задають підпростори 2.1, 3.1 і 2.2, 3.2, див. рис. 4.1 і рис. 4.2.

Розглянемо третій або четвертий квадрант поверхні  $H_{nk}$ , представленої на рис. 4.1. Нехай гілка дисперсійної кривої  $\kappa_n(\tau) \in \Omega_{nk}(\tau) \subset H_{nk}$  (з деяким керованим параметром  $\tau$ ) переходить через розріз 2 з фізичного листа (області 2.1) на нефізичний лист (області 3.2). Така динаміка кривої  $\kappa_n(\tau)$  (в силу збігу умов формування областей 2.1 і 3.2, тобто  $\operatorname{Re} \kappa_n \operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n} \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \kappa_n \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n} \geq 0$ , ( $\operatorname{Im} \kappa_n \neq 0$ )) супроводжується *незмінними* при зміні листа знаками величин  $\{\operatorname{Re} \Gamma_{\kappa_n}, \operatorname{Im} \Gamma_{\kappa_n}\}$ . Ці ж дисперсійні кривої  $\kappa_n(\tau)$  повністю належать окремим листам поверхонь  $H_{nk}$ , заданих різними варіантами розрізів 2 на рис. 4.2. Фізичному листу  $H_{nk}$ , наведеному на рис. 4.2 (а), і нефізичному листу  $H_{nk}$ , подвійному до фізичного листа  $H_{nk}$ , представленою на рис. 4.2 (б).

Відзначимо деякі технічні параметри чисельного аналізу процесів резонансного випромінювання хвиль нелінійними шаровими структурами:

– обчислення були проведені з подвоєною точністю в стандартній арифметиці комплексних чисел, що дорівнює величині  $\varepsilon_{\text{mash}} = 2^{-52} \approx 2.22045 \cdot 10^{-16}$ , тобто кількість значущих десяткових цифр у мантиї не перевищує 16;

– відносна помилка обчислень для SC рішення задачі (блок I в (4.1)), рішення ІСЗ (блок II в (4.1)) і в цілому обчислень по ітераційному алгоритму (4.1) (див. критерій закінчення обчислень (4.2)) не перевищувала величини  $10^{-7}$ .

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечується і підтверджується використанням основних положень апробованого математичного апарату, збігом результатів теоретичних і чисельно-експериментальних досліджень, збігом з результатами відомих досліджень, де застосовуються інші підходи, а в основі яких закладені інші методи. Зокрема, спостерігається збіг розрахунків з результатами аналізу еквівалентної задачі, в основі якої закладено вирішення системи нелінійних граничних задач типу Штурма-Ліувілля (2.5) з використанням методу скінченних елементів [16, 87, 114].

Серед критеріїв достовірності результатів обчислень, отриманих з використанням алгоритму (4.1), відзначимо наступні:

– перевірка рівняння балансу енергії. Зокрема, для непоглинаючих середовищ  $\text{Im } \varepsilon_{nk}^{(L)} \equiv 0$  обчислення величини похибки балансу енергії

$W^{(\text{Error})} = 1 - \sum_{n=1}^3 [R_{nk}^+ + R_{nk}^-]$ , див. (2.18). Загальне вираження рівняння балансу, з

урахуванням поглинання в нелінійній шаруватій структурі, приведено в [16].

Цей критерій дозволяє оцінити також адекватність зроблених фізичних припущень що до використаної математичної моделі;

– перевірка матриць  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}$  при частотах випромінювання  $nk$ ,  $n = 1, 2, 3$  в блоці I – SC аналізу, див. (4.1) і (2.6), на чутливість до похибки, що характеризується значеннями величин:

$$Y_{nk} = \lg \{ \text{cond} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}] \}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Логарифм числа обумовленості матриці приблизно дорівнює числу значущих цифр, що втрачаються в рішенні системи [115, 116];

– виродження спектральних матриць  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)$  в точках власних частот  $\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset H_{nk}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , див. (4.1) і (3.6), описується величинами:

$$Y_{\kappa_n} = \lg \{ \text{cond} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)] \}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Цим величинам відповідають високі значення чисел обумовленості матриць, що є непрямою характеристикою виродження цих матриць.

Оцінка чисел обумовленості матриць в (4.3) і (4.4) проведена на основі методики, викладеної в [115, 116], а її обчислення для вже проведеного розкладення матриць розмірності  $N \times N$  за допомогою виключення Гаусса

потребує  $O(N^3)$  арифметичних операцій, що є несуттєвим порівняно з вирішенням задач в блоках I і II алгоритму (4.1).

Зазначені вище критерії є визначальними при виборі прийнятних квадратурних формул Ньютона-Котеса [117-120], що переводять інтегральні подання досліджуваних задач в матричні.

Порівняння результатів обчислень з використанням складових квадратурних формул Ньютона-Котеса замкнутого типу з різним порядком точності дозволяє визначити прийнятні параметри (накладені на кількість вузлів розбиття області інтегрування), що призводить до зниження розмірності матриць задач (в блоках I і II алгоритму (4.1)) і тим самим забезпечує скорочення часу обчислень. При проведенні обчислень обмежимося використанням квадратурних формул Сімпсона і Уеддла [117].

#### **4.2 Тришарові резонансні структури. Алгоритм на основі складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла**

Розглянемо результати чисельного аналізу властивостей резонансного випромінювання хвиль нелінійним шаруватим об'єктом, який складається з абсолютно прозорого в лінійному наближенні (з  $\varepsilon^{(L)} = 1$ ) шару з негативною величиною кубічної сприйнятливості середовища  $\alpha < 0$ , розташованого між шарами з позитивними значеннями сприйнятливості  $\alpha > 0$ , див. [23, 48, 49].

Досліджуваний нелінійний об'єкт описується параметрами, див. рис. 1.1:

$$\left\{ \varepsilon^{(L)}(z), \alpha(z) \right\} = \begin{cases} \left\{ \varepsilon^{(L)} = 2.4, \alpha = +0.01 \right\}, & \text{для } z \in [-2\pi\delta, -2\pi\delta/3) \cup (2\pi\delta/3, 2\pi\delta]; \\ \left\{ \varepsilon^{(L)} = 1, \alpha = -0.01 \right\}, & \text{для } z \in [-2\pi\delta/3, 2\pi\delta/3]; \end{cases}$$

при  $\delta = 0.5$ . З верхнього півпростору здійснюється нормальне падіння  $\varphi_{nk} = 0^0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , електромагнітного поля на частоті  $\kappa$ , див. блок III алгоритму (4.1), з амплітудою  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0$  і  $a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$ ,  $b_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$ .

#### 4.2.1 Резонансне випромінювання поблизу власних частот

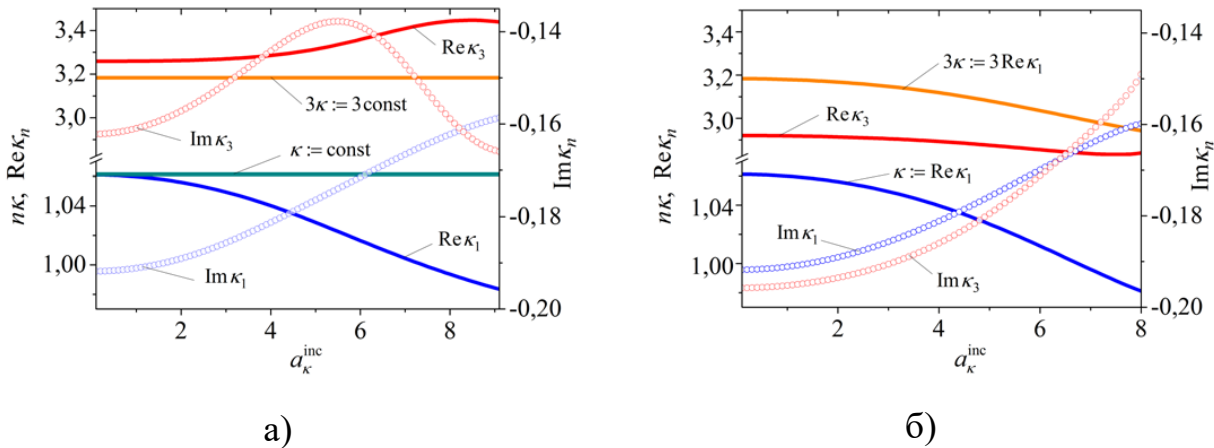
В рамках ітераційного алгоритму (4.1) проведено чисельний аналіз властивостей резонансного випромінювання хвиль нелінійною шаровою структурою поблизу власних частот ІСЗ [48]. У досліджуваному діапазоні параметрів задач розглядалися системи рівнянь 301 порядку, які отримані з використанням складових квадратурних форм Сімпсона. Відносна помилка обчислень не перевищувала  $10^{-7}$ .

В одному з випадків частота збудження (частота розсіяння) обрана постійною величиною  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}}) \Big|_{\alpha(z)=0} \approx 1.061173$ , близькою до власної частоти  $\kappa_1$  лінійної спектральної задачі з  $\alpha(z) \equiv 0$ , див. рис. 4.3 (а). У другому випадку ЧЗ  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  визначається за величиною знайденої комплексної власній частоті  $\kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  ІСЗ з  $\alpha(z) \neq 0$ , див. рис. 4.3 (б). Генерація коливань відбувається в кожній з розглянутих ситуацій на частоті  $3\kappa$ .

Енергетичні характеристики нелінійного шару, що відповідають дисперсійним (спектральним) характеристикам, наведеним на рис. 4.3, відображені на рис. 4.4.

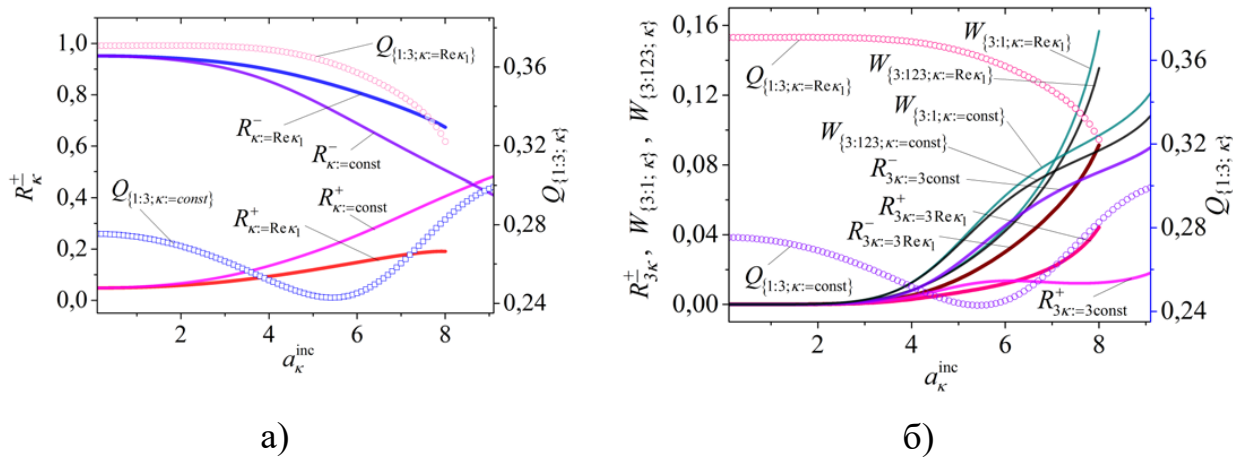
Згідно з рис. 4.4 (а) можна бачити, що віддалення власної частоти  $\text{Re} \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  від ЧЗ  $\kappa := \text{const} = 1.061173$  (як показано на рис. 4.3 (а)) призводить до втрати резонансних властивостей нелінійної структурою. В результаті цього величини значень  $R_{\kappa:=\text{const}}^-$  і  $R_{\kappa:=\text{const}}^+$  розсіяної енергії зближуються в зонах проходження  $z < -2\pi\delta$  і відбиття  $z > 2\pi\delta$ .





а – для  $\kappa := \text{const} = 1.061173$ ; б – для  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$

Рисунок 4.3 – Компоненти власних частот  $\kappa_n = \text{Re } \kappa_n + i \text{Im } \kappa_n$ ,  $n = 1, 3$ , частоти  $\kappa$  збудження і  $3\kappa$  генерації



а – розсіяння; б – генерації

Рисунок 4.4 – Енергетичні характеристики відносної добротності  $Q_{\{1:3;\kappa\}}$

при ЧЗ  $\kappa := \text{const} = 1.061173$  і  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$

Енергетичні характеристики нелінійного шару, що відповідають дисперсійним (спектральним) характеристикам, наведеним на рис. 4.3, відображені на рис. 4.4.

На рис. 4.4 (а) можна бачити, що віддалення власної частоти  $\text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  від ЧЗ  $\kappa := \text{const} = 1.061173$  (як показано на рис. 4.3 (а)) призводить до втрати резонансних властивостей нелінійною структурою. В результаті цього величини значень  $R_{\kappa:=\text{const}}^-$  і  $R_{\kappa:=\text{const}}^+$  розсіяної енергії зближуються в зонах проходження  $z < -2\pi\delta$  і відбиття  $z > 2\pi\delta$ .

Порівнюючи результати на рис. 4.4 (а) і рис. 4.3 (б), бачимо, що при збудженні на резонансних частотах  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  нелінійна структура зі збільшенням амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$  падаючого поля зберігає свої резонансні властивості прозорості. При цьому коефіцієнт відбиття є близьким до значення  $R_{\kappa:=\text{Re } \kappa_1}^+(a_\kappa^{\text{inc}}) \ll 1$ , а коефіцієнт проходження  $R_{\kappa:=\text{Re } \kappa_1}^-(a_\kappa^{\text{inc}})$  приймає максимально можливе значення (*ефект оптимальної прозорості*).

Зменшення прозорості нелінійної структури на резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  відбувається внаслідок енергетичного обміну, пов'язаного з перетворенням енергії поля на ЧЗ в енергію генерації поля третьої гармоніки. Цей процес супроводжується, зокрема монотонним зменшенням функції відносної добротності  $Q_{\{1;3;\kappa:=\text{Re } \kappa_1\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , див. рис. 4.4 (а).

На рис. 4.4 (б) наведено динаміку енергетичних характеристик нелінійного об'єкта в області генерації. Вона відповідає збудженню нелінійної структури на резонансній частоті  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  та фіксованій частоті  $\kappa = 1.061173$ . Різниця в поведінці енергетичних характеристик  $R_{3\kappa}^\pm(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;1;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;123;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  поля генерації (див. рис. 4.4 (б)) пояснюється резонансним характером збудження  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ , пов'язаним з проявом ефекту оптимальної прозорості падаючого поля, див. також рис. 4.4 (а).

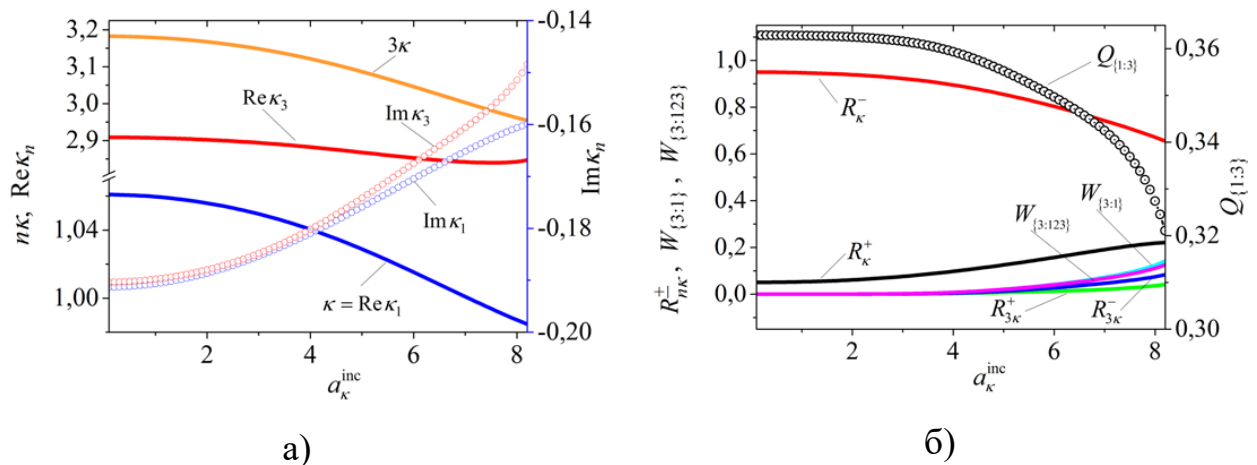
Запропонований алгоритм (4.1) і отримані на його основі результати показують, що розвинений метод може бути застосований до опису

оптимальних властивостей резонансного розсіяння та генерації хвилі нелінійними шаровими структурами.

#### 4.2.2 Обчислення з використанням складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла

На основі алгоритму (4.1) були проведені обчислення, здійснені з використанням складової квадратурної формули Сімпсона для систем рівнянь 301 і 55 порядку та квадратурної формули Уеддла, що має більш високий порядок точності для систем рівнянь 55 порядку, див. [23, 48, 49]. ЧЗ задавалися як резонансні частоти розсіяння  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$ , а генерація коливань проходила на частоті  $3\kappa$ .

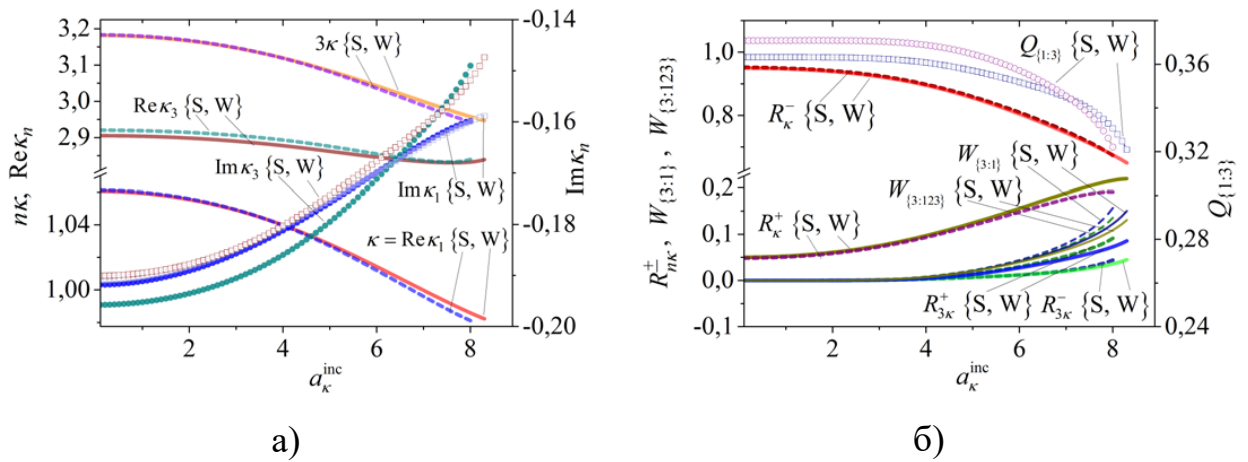
Представлені на рис. 4.5-рис. 4.13 результати, отримані на основі квадратурних формул Сімпсона і Уеддла, відзначені відповідно {S} (Simpson) і {W} (Weddle).



а – власних частот  $\kappa_n = \text{Re} \kappa_n + i \text{Im} \kappa_n \in \Omega_{nk}$ ,  $n = 1, 3$ , частот розсіяння  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  і генерації  $3\kappa$ ; б – енергетичних характеристик структури, а також відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}$  коливань

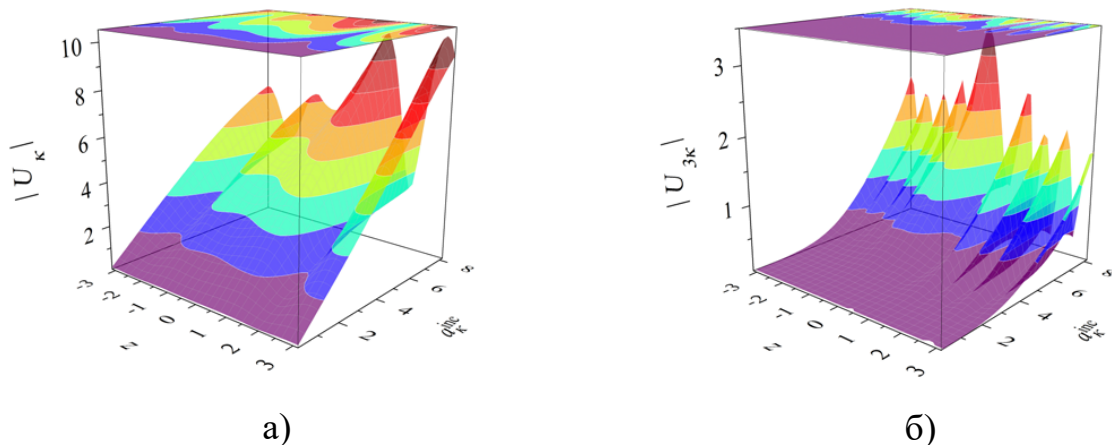
Рисунок 4.5 – Криві характеристик, отримані на основі квадратурних формул Сімпсона з  $N = 55$

На рис. 4.5 (а) і рис. 4.6 (а) відображені відповідні гілки власних частот  $\text{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $\text{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ , тобто дисперсійні характеристики  $\kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) = \text{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) + i \text{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) \in \Omega_{n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}}) \subset H_{n\kappa}$ ,  $n=1, 3$ , а також криві частот резонансного розсіяння  $\kappa(a_\kappa^{\text{inc}}) = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і генерації  $3\kappa(a_\kappa^{\text{inc}})$ .



а – власних частот  $\kappa_n = \text{Re} \kappa_n + i \text{Im} \kappa_n \in \Omega_{n\kappa}$ ,  $n=1, 3$ , частот випромінювання  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  і  $3\kappa$ ; б – енергетичних характеристик, відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}$

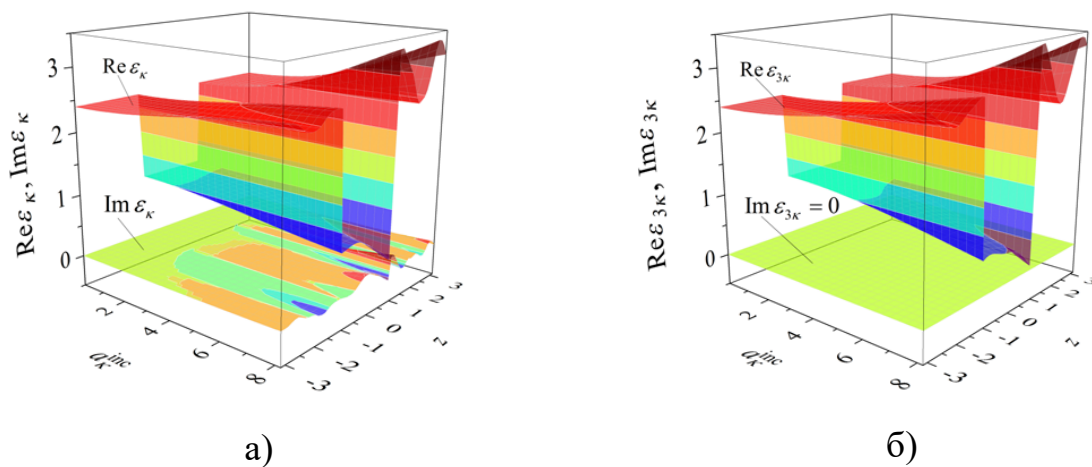
Рисунок 4.6 – Криві характеристик, отримані на основі квадратурних формул Сімпсона з  $N=301$  і Уеддла з  $N=55$



а – розсіяння на частотах  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ ; б – генерації на частотах  $3\kappa$

Рисунок 4.7 – Амплітудні характеристики полів  $|U_{n\kappa}|$ ,  $n=1, 3$ , отримані на основі квадратурних формул Сімпсона з  $N=55$

Наведені на рис. 4.5, рис. 4.6 результати підтверджують зазначену раніше якісну закономірність динаміки відносної добротності коливальних  $Q_{\{1:3\}}$ , яка характеризує властивості генерації нелінійної шарової структури. Зокрема, в області монотонності (локального зменшення) величини відносної добротності  $Q_{\{1:3\}}$  з ростом амплітуди падаючого поля  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  спостерігається сплеск генерації енергії в третю гармоніку, див.  $W_{\{3:1\}}$  і  $W_{\{3:123\}}$ .



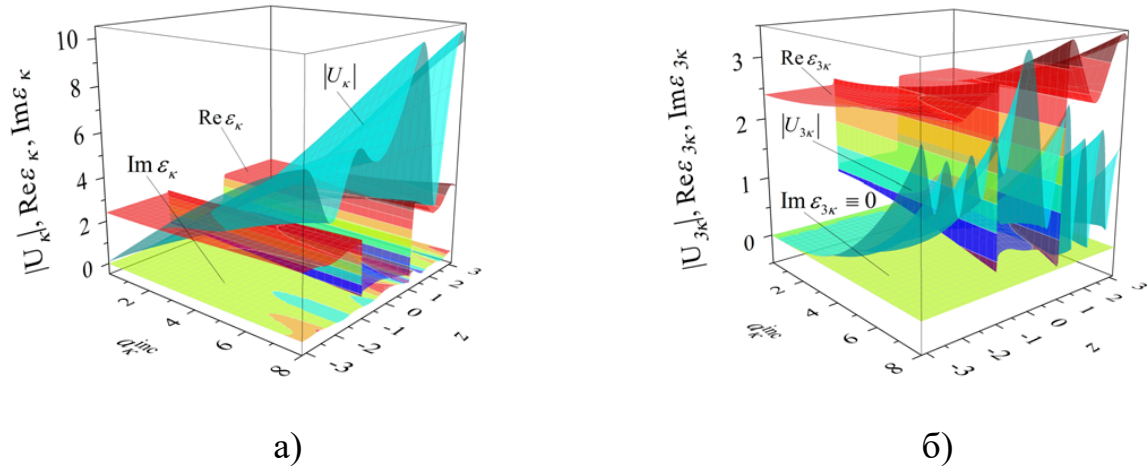
а – розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ; б – генерації  $3\kappa$

Рисунок 4.8 – Діелектричні проникності  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , з використанням квадратурних формул Сімпсона при  $N = 55$  для частот

Досліджувана ситуація характеризується незмінністю типу коливальних розсіяння і генерації. У розглянутому діапазоні амплітуд падаючого поля розсіяні поля  $H_{0,0,4}$  типу (див. рис. 4.7 (а) і рис. 4.9 (а)) і поля генерації  $H_{0,0,9}$  типу (див. рис. 4.7 (б) і рис. 4.9 (б)).

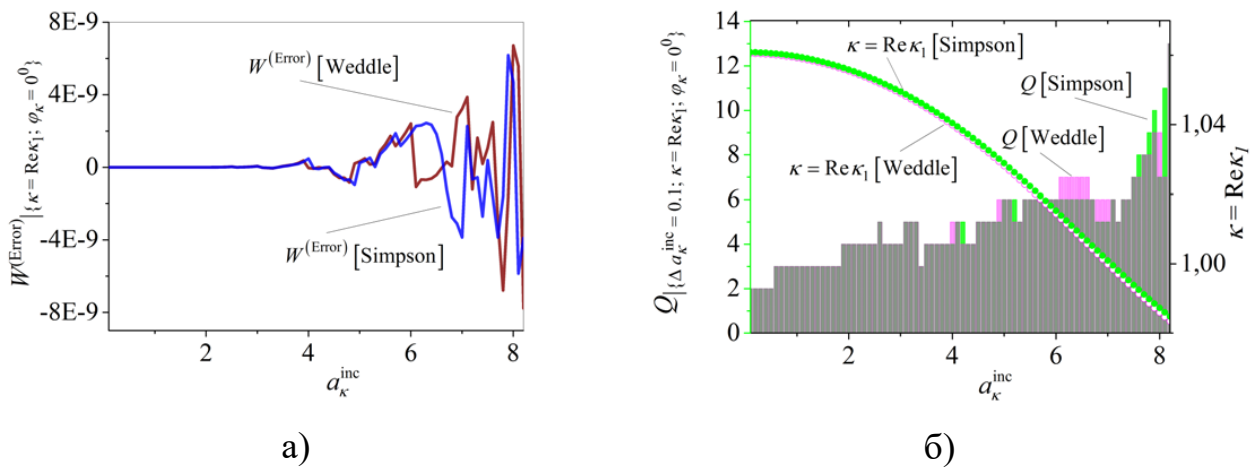
На рис. 4.8 і рис. 4.9 відображена властива нелінійним шаруватим середам динаміка діелектричної проникності. Для розглянутого непоглинаючого середовища  $\text{Im } \varepsilon^{(L)}(z) \equiv 0$  зростання амплітуди  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  падаючого поля на частоті  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  призводить до генерації поля третьої гармоніки

$U(3\kappa; z)$  і осциляціям величини  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$ , яка приймає позитивні і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару, див. рис. 4.8 (а) і рис. 4.9 (а).



а – розсіяння  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ ; б – генерації  $3\kappa$

Рисунок 4.9 – Поверхні амплітудних характеристик  $|U_{n\kappa}|$  і проникності  $\text{Re} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im} \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , з використанням квадратурних формул Сімпсона при  $N = 301$  на частотах



а –  $W^{(\text{Error})}$  похибка енергетичного балансу;

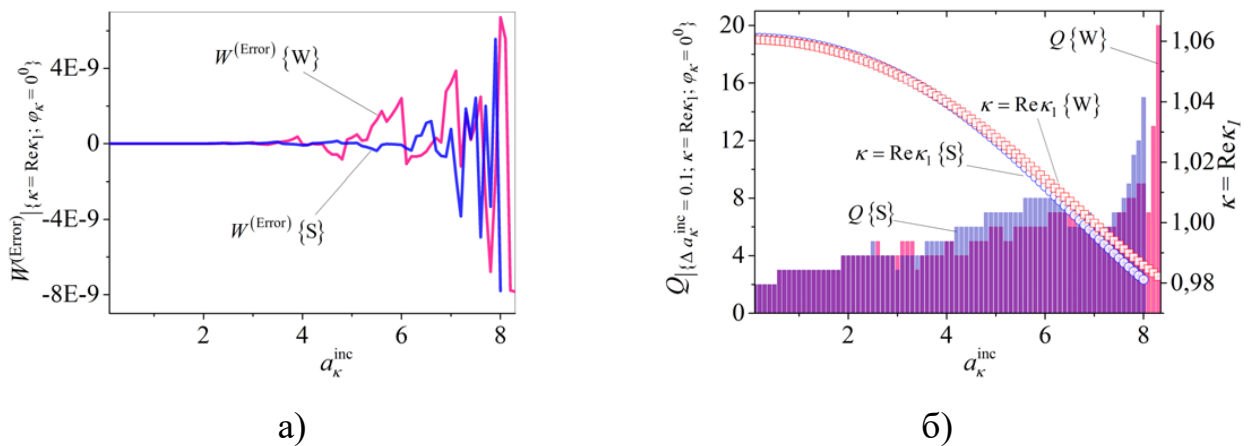
б –  $Q$  числа ітерацій в SC підході,  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  – графіки резонансних частот

Рисунок 4.10 – Аналіз на основі квадратурних формул Сімпсона і Уеддла при  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  для систем рівнянь порядку  $N = 55$

Описана ситуація характеризує витрати енергії в нелінійному середовищі (на резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ ), які пішли на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки (на частоті  $3\kappa$ ) [16, 23, 48, 100]. Поля генерації на частоті  $3\kappa$  є слабкими та не віддають енергію на генерацію нових гармонік, тобто  $\text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$ , див. рис. 4.8 (б) і рис. 4.9 (б).

Матричні рівняння в алгоритмі (4.1) отримані із застосуванням квадратурних формул до СНІР Гаммерштейна другого роду при аналізі випромінювання хвиль (блок I) і лінеаризованих однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду при визначенні власних частот ІСЗ (блок II).

На рис. 4.10-рис. 4.13 проведена перевірка критеріїв *достовірності* результатів обчислень при використанні складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла [23, 49].



а)

б)

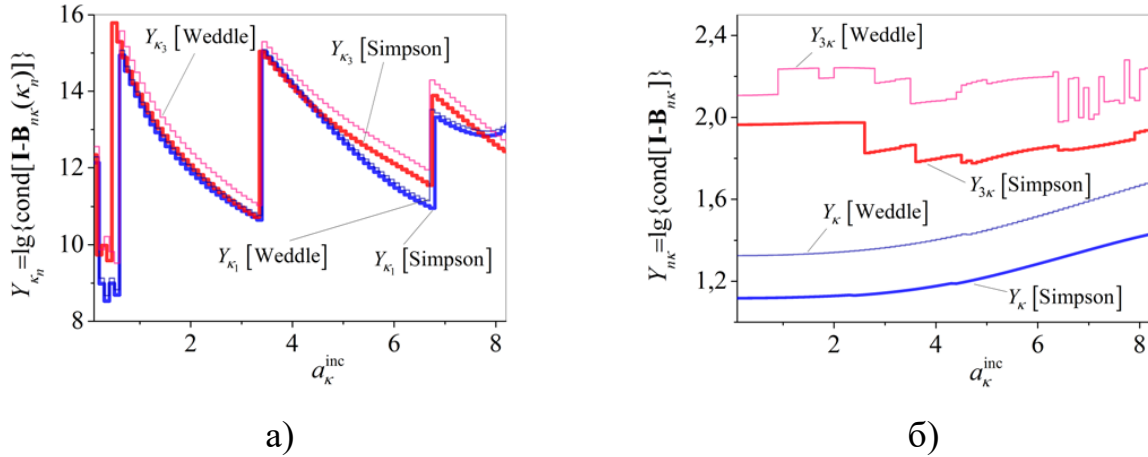
а –  $W^{(\text{Error})}$  похибка балансу енергії;

б –  $Q$  числа ітерацій в SC підході,  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  – графіки резонансних частот

Рисунок 4.11 – Аналіз на основі квадратурних формул Сімпсона для систем рівнянь порядку  $N = 301$  і Уеддла з  $N = 55$  при  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ :

У досліджуваному діапазоні параметрів, при відносній помилці обчислень, що не перевищує величини  $10^{-7}$ , для непоглинаючих середовищ з

$\text{Im} \varepsilon_{nk}^{(L)}(y, z) \equiv 0$ , співвідношення енергетичного балансу (2.17) було перевірено чисельно. Обчислювалася величина  $W^{(\text{Error})}$  похибки балансу енергії (2.18).



а – виродження  $I - B_{nk}(\kappa_n)$  в точках спектра  $\kappa_n \in \Omega_{nk}$ ,  $n = 1, 3$ ;

б – чутливість  $I - B_{nk}$  до похибки при  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$ ,  $n = 1, 3$

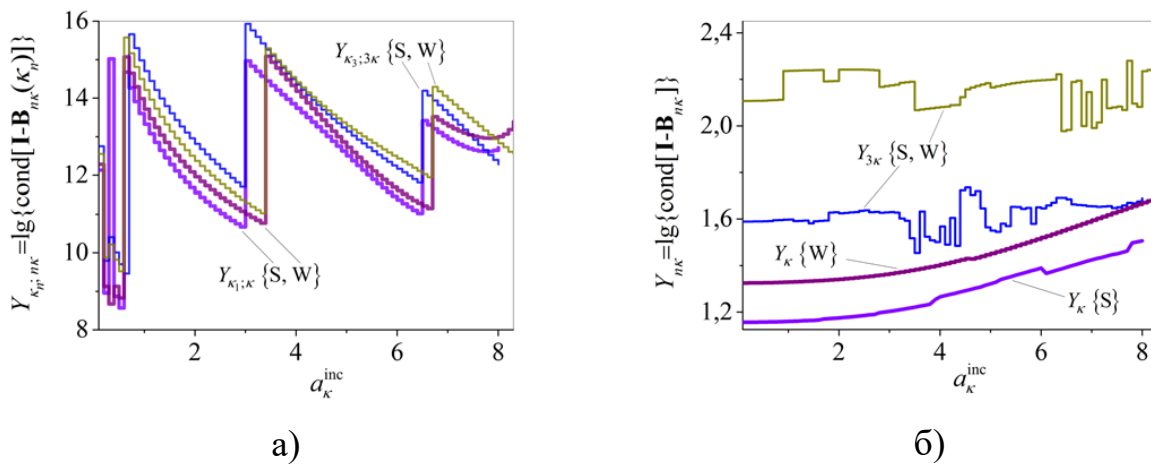
Рисунок 4.12 – Логарифми обумовленості матриць, отриманих на основі квадратурних формул Сімпсона і Уеддла з  $N = 55$

У розглянутих випадках реалізації ітераційного процесу (4.1) з  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$ , заснованих на застосуванні квадратурних формул Сімпсона (Simpson) і Уеддла (Weddle), абсолютна помилка обчислень є прийнятною величиною  $|W^{(\text{Error})}| < 8 \cdot 10^{-9}$ , див. рис. 4.10 (а) і рис. 4.11 (б). При цьому відмінність в числі ітерацій  $Q$  при кроці  $\Delta a_k^{\text{inc}} = 0.1$  в блоці SC аналізу процесів розсіяння і генерації є несуттєвою, див. рис. 4.10 (б) і рис. 4.11 (б). Попередньо обчислені значення величин резонансних частот розсіяння  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_k^{\text{inc}})$  рис. 4.10 (б) і рис. 4.11 (б) близькі (див. збіг з графічною точністю криві  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  [Simpson],  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$  [Weddle] на рис. 4.10 (б) і близьке розташування кривих  $\kappa = \text{Re} \kappa_1 \{S\}$ ,  $\kappa = \text{Re} \kappa_1 \{W\}$  на рис. 4.11 (б)).



На рис. 4.12 і рис. 4.13 наведені оцінки, які характеризують обумовленості матриць в блоках I і II алгоритму (4.1), отримані з використанням квадратурної формули Сімпсона для систем рівнянь 301 і 55 порядку, а також квадратурної формули Уеддла для систем рівнянь 55 порядку.

Виродження спектральних матриць  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)$  в точках власних частот  $\kappa_n \in \Omega_{nk} \subset \mathbb{H}_{nk}$ ,  $n = 1, 3$ , див. блок II в (4.1), (3.6) і (3.9) описується величинами  $Y_{\kappa_n}$ ,  $n = 1, 3$ , див. (4.4). Цим величинам відповідають високі значення чисел обумовленості матриць, що вказує на виродження цих матриць, див. рис. 4.12 (а) і рис. 4.13 (а).



а – виродження  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}(\kappa_n)$  в точках спектра  $\kappa_n \in \Omega_{nk}$ ,  $n = 1, 3$ ;

б – чутливість  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}$  до похибки при  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ ,  $n = 1, 3$

Рисунок 4.13 – Логарифми обумовленості матриць отриманих на основі квадратурних формул Сімпсона з  $N = 301$  і Уеддла з  $N = 55$

Чутливість матриць  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{nk}$  в блоці SC аналізу, див. блок I алгоритму (4.1), (2.6) і (2.11), до похибки поблизу резонансних частот розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$  і генерації  $3\kappa$  характеризується значеннями величин  $Y_{nk}$ ,  $n = 1, 3$ , див. (4.3). Логарифм числа обумовленості матриці приблизно дорівнює числу значущих цифр, що втрачаються в рішенні системи [116, 117]. Зіставивши результати

обчислень, наведені на рис. 4.12 (б) і рис. 4.13 (б) кривими  $Y_{nk}$  [Simpson],  $Y_{nk}$  [Weddle] і  $Y_{nk} \{S\}$ ,  $Y_{nk} \{W\}$  при  $n=1, 3$ , можна зробити наступні висновки.

Алгоритм (4.1), побудований з використанням квадратурних формул Уеддла і Сімпсона для систем рівнянь 55 порядку, є чутливий до похибок обчислень, див. рис. 4.12 (б). Підвищення розмірності систем призводить до незначного зниження чутливості матриць до помилок обчислень, див. графіки  $Y_{3k}$  [Simpson],  $Y_{3k} \{S\}$  на рис. 4.12 (б) і рис. 4.13 (б). Проте, оскільки зниження розмірності систем рівнянь істотно зменшує час обчислень, це є значною перевагою і відкриває перспективи до вирішення низки нових нелінійних задач резонансного розсіяння і генерації хвиль як шаровими, так і шарово періодичними структурами.

### 4.3 Нелінійний шар з позитивною сприйнятливістю середовища

Розглянемо збудження з верхнього півпростору  $z > 2\pi\delta$  нелінійного шару з позитивною сприйнятливістю середовища ( $\alpha > 0$ ), див. рис. 1.1, з параметрами

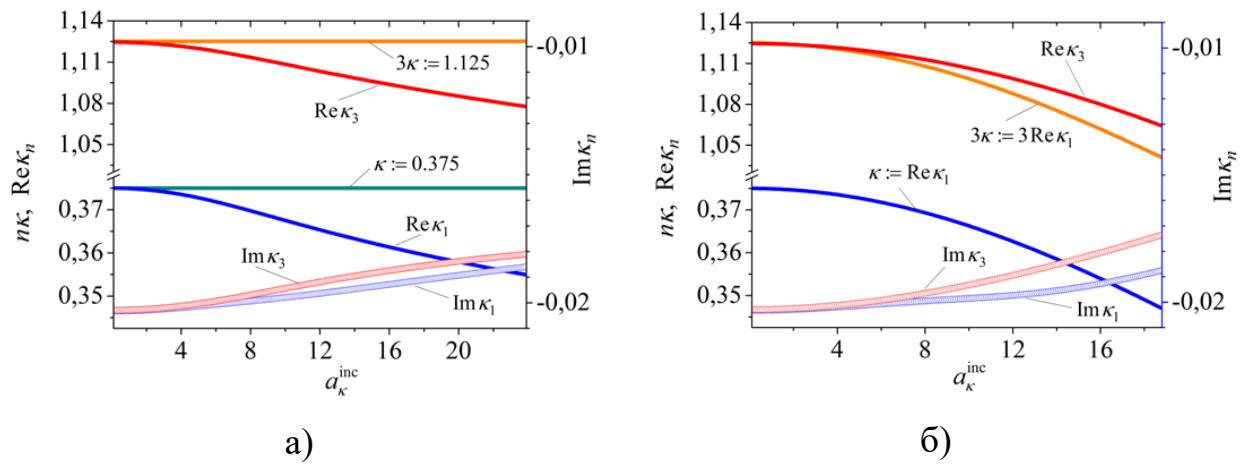
$$\{\varepsilon^{(L)}(z), \alpha(z)\} = \{\varepsilon^{(L)} = 16, \alpha = +0.01\},$$

при  $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ ,  $\delta = 0.5$ , нормально падаючим  $\varphi_{nk} = 0^0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , електромагнітним полем з амплітудами  $a_k^{\text{inc}} \neq 0$ ,  $a_{2k}^{\text{inc}} = a_{3k}^{\text{inc}} = b_k^{\text{inc}} = b_{2k}^{\text{inc}} = b_{3k}^{\text{inc}} = 0$ .

На рис. 4.14-рис. 4.16 наведені результати чисельного аналізу електродинамічних властивостей резонансного розсіяння і генерації хвиль нелінійним шаром, отримані з використанням складовою квадратурної формули Сімпсона для систем рівнянь 301 порядку [25].

На основі алгоритму (4.1) були проведені обчислення у резонансній області частот для ситуацій, пов'язаних із завданням і визначенням величин реальних ЧЗ  $nk$ , близьких до комплексних власних частот  $\kappa_n(a_k^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$

індукованих діелектричних структур. В одному з розглянутих випадків як ЧЗ була обрана частота  $\kappa = \operatorname{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}}) \Big|_{\alpha(z) \equiv 0} \approx 0.375$ , близька до власної частоти  $\kappa_1$  спектральної задачі з  $\alpha(z) \equiv 0$ , див. блок II алгоритму (4.1) і рис. 4.14 (а). У другому випадку ЧЗ  $\kappa = \operatorname{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  визначалася по знайденій величині комплексної власної частоти  $\kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  індукованої спектральної задачі з  $\alpha(z) \neq 0$ , див. блок II алгоритму (4.1) і рис. 4.14 (б). Генерація коливань в досліджуваних випадках відбувалася на частоті  $3\kappa$ .



а – при  $\kappa = 0.375$ ; б – при  $\kappa = \operatorname{Re} \kappa_1$

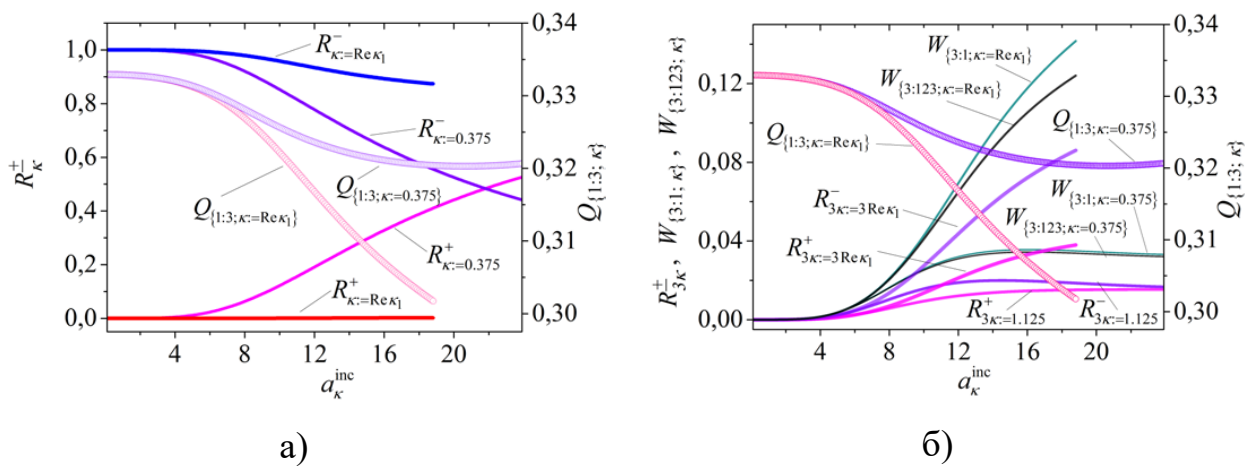
Рисунок 4.14 – Гілки власних частот  $\kappa_n = \operatorname{Re} \kappa_n + i \operatorname{Im} \kappa_n$ ,  $n = 1, 3$ , частот  $\kappa$  розсіяння і  $3\kappa$  генерації

Криві  $\operatorname{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $\operatorname{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ , які відповідають гілкам власних частот, тобто дисперсійним характеристикам

$$\kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) = \operatorname{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) + i \operatorname{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) \in \Omega_{n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}}) \subset \mathbb{H}_{n\kappa}, n = 1, 3,$$

а також криві частот збудження (розсіяння)  $\kappa(a_\kappa^{\text{inc}}) = \operatorname{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і генерації  $3\kappa(a_\kappa^{\text{inc}})$  відображені на рис. 4.14. Можна бачити, що з ростом амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$

падаючого поля відбувається зсув гілок власних частот. У разі фіксованої ЧЗ  $\kappa = 0.375$ , див. рис. 4.14 (а), комплексні гілки дисперсійних кривих  $\kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $n=1,3$ , віддаляються від ЧЗ  $\kappa$  і частот генерації  $3\kappa$ . Випадок збудження нелінійного шару на резонансній частоті  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  відображено на рис. 4.14 (б). У цій ситуації гілки комплексних спектрів  $\kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $n=1,3$ , проходять поблизу резонансних частот розсіяння  $\kappa(a_\kappa^{\text{inc}})$  і генерації  $3\kappa(a_\kappa^{\text{inc}})$ .



а – розсіяння; б – генерації

Рисунок 4.15 – Криві: енергетичних характеристик відносної добротності коливань  $Q_{\{1:3; \kappa\}}$  при ЧЗ  $\kappa = 0.375$  і  $\kappa = \text{Re} \kappa_1$

Енергетичні характеристики нелінійного шару, що відповідають описаним на рис. 4.14 випадкам, наведені на рис. 4.15. На рис. 4.15 (а) можна бачити, що відзначене раніше (рис. 4.14 (а)) відхилення власної частоти  $\text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  від ЧЗ  $\kappa = 0.375$  призводить до втрати резонансних властивостей нелінійної структури. В результаті цього відбувається зближення величин розсіяної енергії  $R_{\kappa=0.375}^{\pm}$  з  $R_{\kappa=\text{Re} \kappa_1}^{\pm}$  відповідно в зонах відбиття  $z > 2\pi\delta$  і проходження  $z < -2\pi\delta$ . Зіставивши результати на рис. 4.15 (а) і рис. 4.14 (б), бачимо, що на резонансних ЧЗ  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  нелінійна структура з ростом

амплітуди падаючого поля  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  зберігає свої резонансні властивості прозорості. При цьому коефіцієнт відбиття є близьким до нуля ( $R_{\kappa=\text{Re}\kappa_1}^+(a_{\kappa}^{\text{inc}}) \approx 0$ ), а коефіцієнт проходження  $R_{\kappa=\text{Re}\kappa_1}^-(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  приймає максимально можливе значення, яке не перевершує одиницю.

Відзначимо також, що зниження прозорості (зі збереженням властивості невідбиття) з ростом амплітуди резонансного поля збудження нелінійної шарової структури обумовлено витратами енергії, що пішла на генерацію хвиль вищих гармонік.

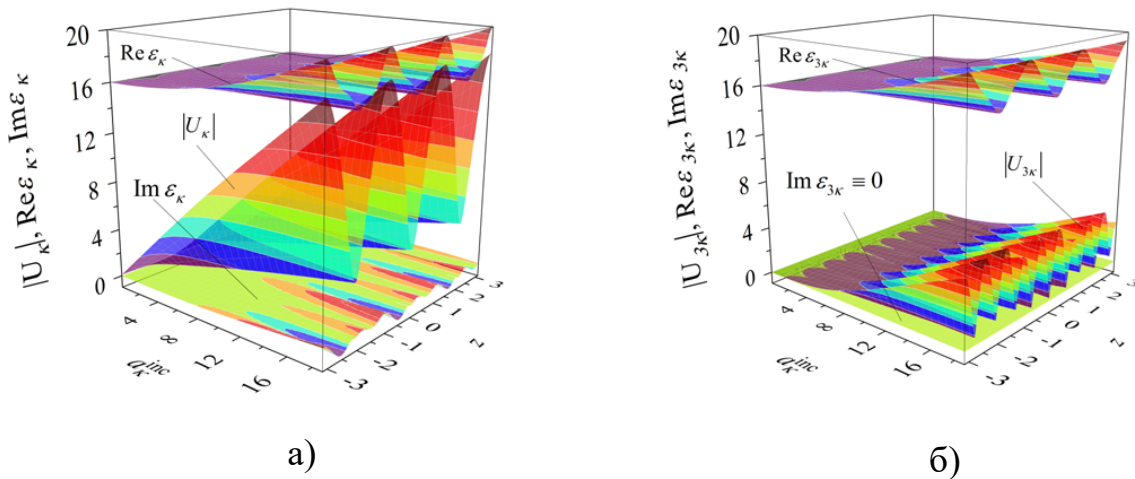
Зростання амплітуди збудження  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  нелінійного шару (на резонансній частоті падаючого поля  $\kappa = \text{Re}\kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ) призводить до зменшення величини коефіцієнта проходження  $R_{\kappa=\text{Re}\kappa_1}^-(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ , при цьому коефіцієнт відбиття залишається близьким до нуля  $R_{\kappa=\text{Re}\kappa_1}^+(a_{\kappa}^{\text{inc}}) \approx 0$ , див. рис. 4.15 (а). Таке зниження прозорості нелінійної структури на резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re}\kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  обумовлено витратами енергії падаючого поля на генерацію поля третьої гармоніки. Про це, зокрема, свідчить монотонне спадання функції відносної добротності коливачів  $Q_{\{1;3;\kappa=\text{Re}\kappa_1\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ , див. рис. 4.15 (а).

Наведені на рис. 4.15 (б) результати показують, що з ростом амплітуди збудження  $a_{\kappa}^{\text{inc}}$  в області генерації енергетичні властивості нелінійного шару при резонансній ЧЗ  $\kappa = \text{Re}\kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  значно (в кілька разів) вище, ніж при фіксованій постійній величині ЧЗ  $\kappa = 0.375$ . Це видно з порівняння наведених на рис. 4.15 (б) значень величин  $R_{3\kappa}^{\pm}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;1;\kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;123;\kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ , а також швидкості спадання функцій  $Q_{\{1;3;\kappa=\text{Re}\kappa_1\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  (відповідно при  $\kappa = \text{Re}\kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  і  $\kappa = 0.375$ ).

Відзначимо, що за величиною і швидкістю спадання відносної добротності коливачів  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  можна побічно аналізувати процеси обміну

енергією, що протікають при розсіянні і генерації хвиль нелінійними об'єктами. Зіставивши криві величини  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  з енергетичними характеристиками представленими кривими  $R_{3\kappa}^\pm(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;1;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $W_{\{3;123;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , при  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і  $\kappa = 0.375$  на рис. 4.15 (б), можна бачити, що локальне спадання величини відносної добротності  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  супроводжується сплеском енергії, яка генерується в третю гармоніку. При цьому, чим вище швидкість спадання  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , тим більше частка енергії, що генерується.

На рис. 4.16 наведені поверхні амплітудних характеристик  $|U_\kappa|$ ,  $n = 1, 3$ , полів розсіяння і генерації, а також значення величин діелектричної проникності  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , які відповідають резонансним ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і генерації  $3\kappa$ . Результати наведені в діапазоні  $a_\kappa^{\text{inc}} \times z \in [0.1, 18.8] \times [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$ .



а – розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ ; б – генерації  $3\kappa$

Рисунок 4.16 – Поверхні амплітудних характеристик  $|U_{n\kappa}|$  і проникності  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , нелінійного шару на частотах

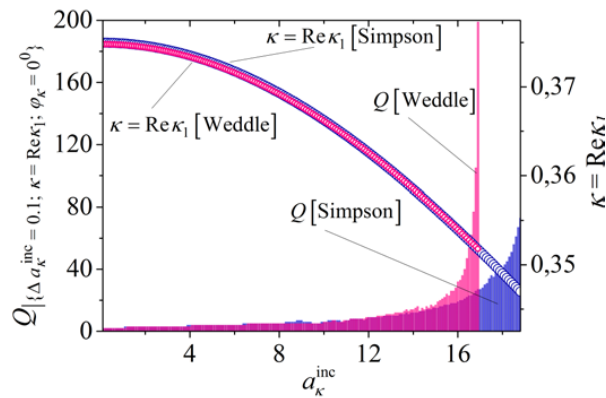
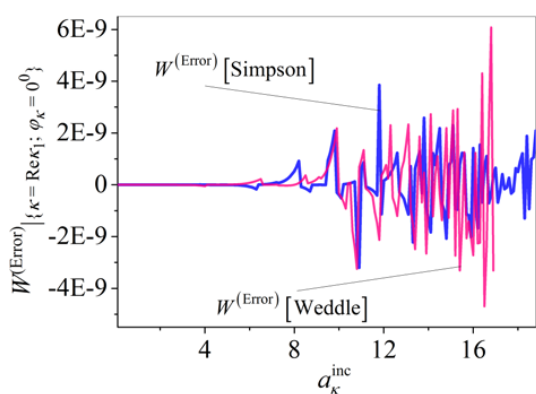
У досліджуваному діапазоні амплітуд падаючого поля спостерігаються розсіяні поля  $H_{0,0,4}$  типу (див.  $|U_\kappa|$  на рис. 4.16 (а)) і поля генерації  $H_{0,0,10}$  типу (див.  $|U_{3\kappa}|$  на рис. 4.16 (б)).

Нелінійні складові  $\varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}$  діелектричної проникності  $\varepsilon_{n\kappa}$  на кожній з частот  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і  $3\kappa$  визначаються величинами полів  $U(\kappa; z)$  і  $U(3\kappa; z)$ , див. (2.3), (2.4) і рис. 4.16. Для розглянутого непоглинаючого шару  $\text{Im } \varepsilon^{(L)}(z) \equiv 0$ , з урахуванням дійсності (тобто  $\text{Im } \alpha(z) \equiv 0$ ) кубічної сприйнятливості  $\alpha(z)$  виконується рівність  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa} = \text{Im } \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)}$ , див. (2.3). Зростання амплітуди  $a_\kappa^{\text{inc}}$  падаючого поля на частоті  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  призводить до генерації поля третьої гармоніки  $U(3\kappa; z)$ .

У досліджуваному випадку величина  $\text{Im } \varepsilon_\kappa$  здійснює осциляцію, приймаючи позитивні і негативні значення уздовж висоти нелінійного шару, див. рис. 4.16 (а). Описана ситуація характеризує витрати енергії в нелінійному середовищі (на ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ ), які пішли на генерацію електромагнітного поля третьої гармоніки (на частоті  $3\kappa$ ) [16, 25, 100]. Поля генерації на частоті  $3\kappa$  є слабкими та не віддають енергію на генерацію нових гармонік, тобто  $\text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$ , див. рис. 4.16 (б).

На рис. 4.17 і рис. 4.18. наведено результати порівняння обчислювальних особливостей процесу (4.1), пов'язаних з використанням складових квадратурних формул Сімпсона (для систем рівнянь 301 порядку), і таких, що мають більш високу ступінь точності квадратурних формул Уеддла (для систем рівнянь 121 порядку) [25].

У досліджуваному діапазоні параметрів, при відносній помилці обчислень, що не перевищує величини  $10^{-7}$ , для непоглинаючих середовищ  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}^{(L)}(y, z) \equiv 0$ , співвідношення енергетичного балансу (2.17) було перевірено чисельно. При цьому обчислювалася величина похибки балансу енергії  $W^{(\text{Error})}$  (2.18).

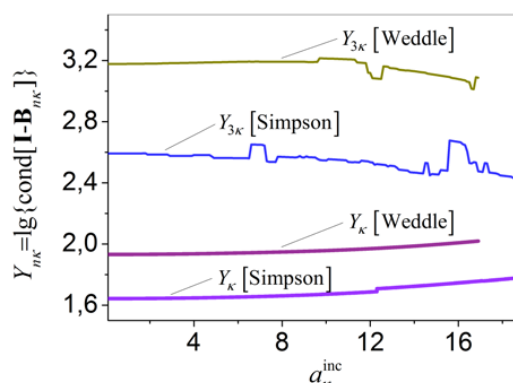
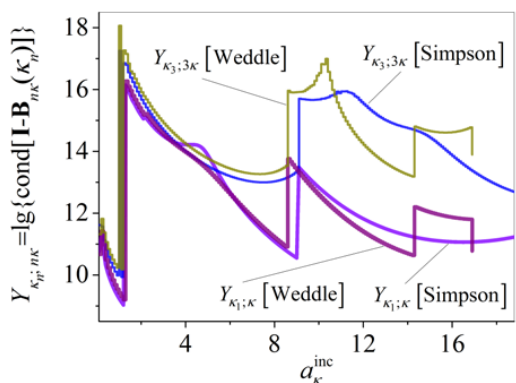


а)

б)

а –  $W^{(Error)}$  похибки енергетичного балансу; б –  $Q$  – числа ітерацій в SC підході,  $\kappa = Re \kappa_1(a_k^{inc})$  – криві резонансних частот розсіяння

Рисунок 4.17 – Аналіз ітераційних процесів з  $\kappa = Re \kappa_1$ , отриманих на основі квадратурних формул Сімпсона для систем рівнянь порядку  $N = 301$  і Уеддла для  $N = 121$



а)

б)

а – виродження  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n_k}(\kappa_n)$  в точках спектра  $\kappa_n \in \Omega_{n_k}$ ;

б – чутливість  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n_k}$  до похибки при  $\kappa = Re \kappa_1$

Рисунок 4.18 – Логарифми числа обумовленості матриць  $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n_k}$  розмірності  $N \times N$  при  $\kappa = Re \kappa_1$ , отримані на основі квадратурних формул Сімпсона з  $N = 301$  і Уеддла з  $N = 121$ , для  $n = 1, 3$



В обох з розглянутих випадків реалізації ітераційного процесу (4.1) з  $\kappa = \text{Re } \kappa_1$ , заснованих на застосуванні квадратурних формул Сімпсона і Уеддла, абсолютна помилка обчислень є прийнятною величиною:  $|W^{(\text{Error})}| < 6.1 \cdot 10^{-9}$ , див. рис. 4.17 (а). При цьому, різниця в числі ітерацій  $Q$  при кроці  $\Delta a_{\kappa}^{\text{inc}} = 0.1$  в блоці SC аналізу процесів розсіяння і генерації спостерігається лише на заключних етапах обчислень для  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [15, 16.9]$ , див. рис. 4.17 (б). Крім цього, обчислені значення величин резонансних частот розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  при  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [0.1, 16.9]$  (див. збіг з графічною точністю кривих  $\kappa = \text{Re } \kappa_1[\text{Simpson}]$  і  $\kappa = \text{Re } \kappa_1[\text{Weddle}]$  на рис. 4.17 (б)) відповідають опису еквівалентних процесів, відображених на рис. 4.14 (б), рис. 4.15 і рис. 4.16.

На рис. 4.18 наведені оцінки характеристик обумовленості матриць, які отримані в (4.1) з використанням квадратурних формул Сімпсона і Уеддла відповідно для систем рівнянь 301 і 121 порядку. Зіставивши результати обчислень, наведених на рис. 4.18 (б) кривими  $Y_{n\kappa}[\text{Simpson}]$  і  $Y_{n\kappa}[\text{Weddle}]$  при  $n = 1, 3$ , можна зробити наступні висновки. Алгоритм (4.1), побудований з використанням квадратурних формул Уеддла для систем рівнянь 121 порядку, більш чутливий до похибок обчислень, ніж той же алгоритм, реалізований за допомогою квадратурних формул Сімпсона для систем 301 порядку. При цьому, зменшення розмірності системи приблизно в 2.5 рази (з 301 порядку до 121 порядку) призводить до втрати в рішенні не більше ніж однієї значущої цифри, див. різницю значень  $Y_{n\kappa}[\text{Weddle}]$  і  $Y_{n\kappa}[\text{Simpson}]$ , при  $n = 1, 3$  на рис. 4.18 (б).

#### **4.4 Енергетичні властивості резонансного випромінювання абсолютно прозорого нелінійного шару**

На основі алгоритму (4.1) проведені чисельні дослідження резонансних властивостей випромінювання абсолютно прозорого (в лінійному наближенні) нелінійного шару з параметрами (див. (2.3))

$$\left\{ \left\{ \varepsilon^{(L)}(z), \alpha(z) \right\} : \left\{ \varepsilon^{(L)} = 1, \alpha = +0.01 \right\}, \delta = 0.5 \right\},$$

при нормальному збудженні  $\varphi_{n\kappa} = 0^0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , падаючим полем з амплітудами

$$a_{\kappa}^{\text{inc}} \neq 0, \quad a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc}} = b_{\kappa}^{\text{inc}} = b_{2\kappa}^{\text{inc}} = b_{3\kappa}^{\text{inc}} = 0$$

і резонансній ЧЗ  $\kappa$ , що визначається однією з величин, наведених в блоці III алгоритму (4.1), див. [24, 50].

#### 4.4.1 Резонансне розсіяння і генерація нелінійного шару

Розглянемо випадок збудження нелінійного шару на резонансній частоті розсіяння  $\kappa := \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ , генерація третьої гармоніки поля відбувається на частоті  $3\kappa = 3\text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  (див. блок III алгоритму (4.1)) [50].

На рис. 4.19 зображені дійсна і уявна частини власних значень  $\kappa_n(a_{\kappa}^{\text{inc}}) = \text{Re } \kappa_n(a_{\kappa}^{\text{inc}}) + i \text{Im } \kappa_n(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$ .

Динаміка величин добротності  $Q_{\kappa_n; n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$  і відносної добротності  $Q_{\{1:3, \kappa\}}$  власних хвиль з характеристичними числами  $\kappa_n(a_{\kappa}^{\text{inc}}) \in \Omega_{n\kappa}(a_{\kappa}^{\text{inc}}) \subset \mathbb{H}_{n\kappa}$  відповідних задач на власні значення, індукованих на частотах випромінювання  $n\kappa$ ,  $n = 1, 3$ , приведена на рис. 4.20 (а) і (б).

На рис. 4.20 також показана динаміка  $R_{n\kappa}^{\pm}, W_{\{3:1; \kappa\}}, W_{\{3:123; \kappa\}}$  енергетичних характеристик полів розсіяння і генерації.

Тут на частотах резонансного розсіяння  $\kappa := \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і генерації  $3\kappa$  спостерігаємо, що з наростанням  $a_\kappa^{\text{inc}}$  у діапазоні  $[0,9, 11,5]$  в зоні відбиття відбувається лише незначне збільшення часток енергій, тобто  $R_\kappa^+$  не перевищує 0.161% і  $R_{3\kappa}^+$  менше 0.945%, див. рис. 4.20 (а) і (б).

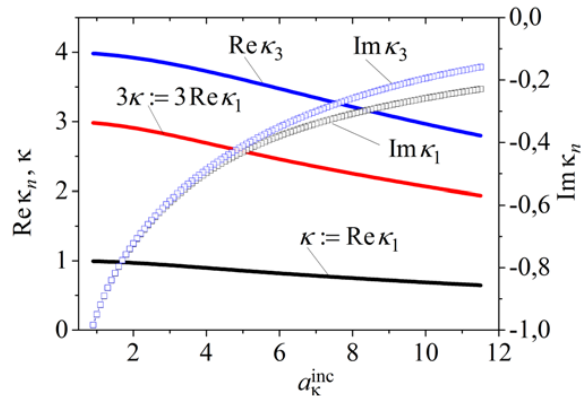
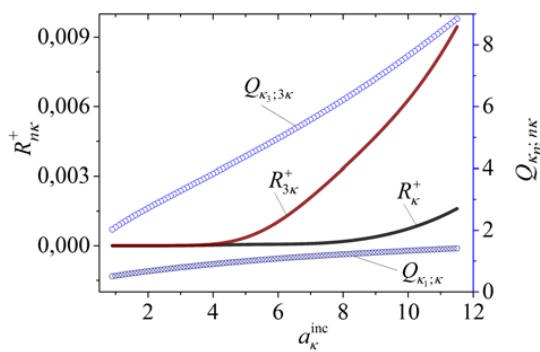


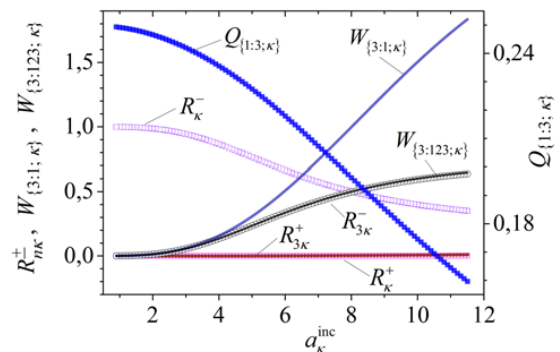
Рисунок 4.19 – Криві резонансної ЧЗ  $\kappa := \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$ , генерації

$3\kappa := 3 \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  і спектральних характеристик

$\text{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}), \text{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$



а)



б)

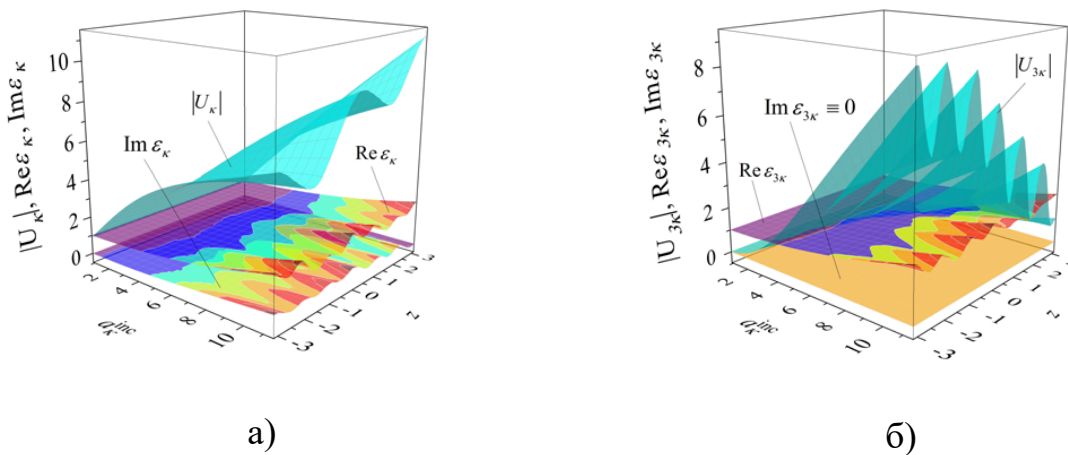
а –  $R_{nk}^+(a_\kappa^{\text{inc}})$  і добротності  $Q_{\kappa_n;n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$ , б –  $R_{nk}^\pm(a_\kappa^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$ ,

$W_{\{3;1;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}}), W_{\{3;123;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  і відносна добротність  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$

Рисунок 4.20 – Динаміка енергетичних характеристик при ЧЗ  $\kappa = \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$

Частка розсіяної енергії  $R_{\kappa}^{-}$  в зону проходження на ЧЗ значно зменшується від 99.937% до 35.119%, а енергія генерації  $R_{3\kappa}^{-}$  збільшується від 0.063% до 63.775%, див. рис. 4.20 (б). Малі значення енергій розсіяння  $R_{\kappa}^{+} < 0,00161$  і генерації  $R_{3\kappa}^{+} < 0,00945$  в зоні відбиття, призводить до близькості величин  $R_{3\kappa}^{-}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  і  $W_{\{3123; \kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  які описують долю енергії, що генерується, див. рис. 4.20 (б).

При цьому для амплітуди  $a_{\kappa}^{\text{inc}} = 11.5$  частка енергії, що генерується в третю гармоніку  $W_{\{31; \kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  в 1.834496 рази перевищує енергію розсіяну першою гармонікою поля, див. рис. 4.20 (б). Збільшення здатності нелінійного шару до генерації супроводжується монотонне зменшення відносної добротності  $Q_{\{1;3; \kappa\}}(a_{\kappa}^{\text{inc}})$  на резонансній частоті  $\kappa = \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ .



а – частотах резонансного розсіяння  $\kappa := \text{Re } \kappa_1(a_{\kappa}^{\text{inc}})$ ; б – частотах генерації  $3\kappa$

Рисунок 4.21 – Поверхні амплітудних характеристик  $|U_{n\kappa}|$  і індукованих ДП

$\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$ , нелінійного шару

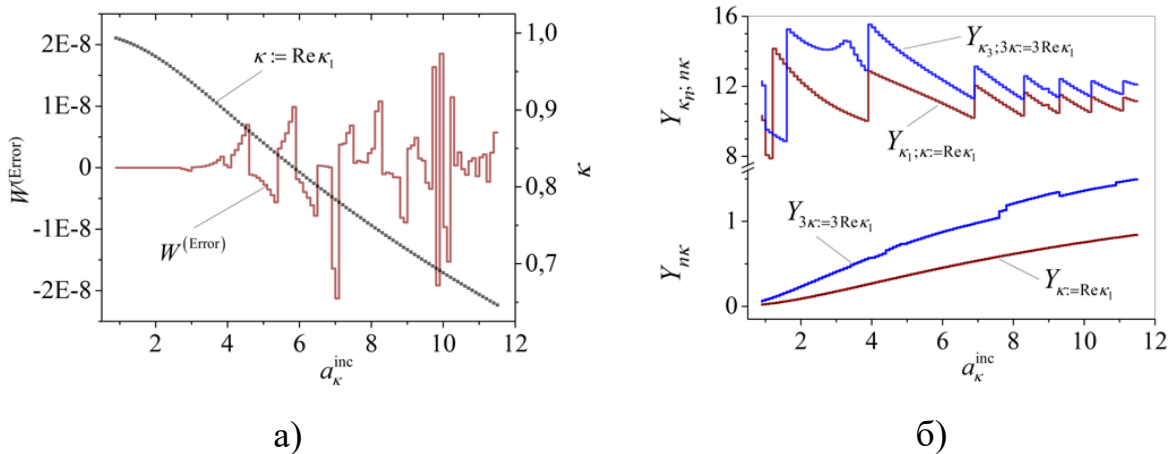
Наведені на рис. 4.20 результати відображають ефект резонансного перетворення енергії збудження прозорої нелінійної структури в енергію

пройденного поля випромінювання з наростаючою часткою енергії генерації в зоні проходження.

На рис. 4.21 показані резонансні амплітудні характеристики полів  $|U_\kappa|$  розсіяння і  $|U_{3\kappa}|$  генерації (2.4), які відповідають описаному ефекту, а також відображені значення діелектричної проникності (2.3).

Варіації  $\text{Im} \varepsilon_\kappa$  характеризують витрати енергії на генерацію поля третьої гармоніки, див. рис. 4.21 (а). Виконання рівності  $\text{Im} \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$  обумовлено слабкістю поля генерації, яке не витрачає енергію на генерацію нових гармонік, див. рис. 4.21 (б).

Результати перевірки критеріїв достовірності проведених обчислень наведено на рис. 4.22.



а –  $W^{(\text{Error})}(a_\kappa^{\text{inc}})$  похибки балансу енергії і  $\kappa := \text{Re} \kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  ЧЗ;

б –  $Y_{\kappa;n;n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$  міра виродження матриць задач на власні значення,  $Y_{n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$

величини чутливості систем рівнянь до похибок обчислень

Рисунок 4.22 – Характеристики достовірності результатів обчислень з використанням квадратурної формули Уеддла (Weddle)

для систем рівнянь розмірності  $N = 43$  при  $\kappa := \text{Re} \kappa_1$  і  $n = 1, 3$

Так на рис. 4.22 (а) спостерігається прийнятна величина похибки балансу енергії  $W^{(\text{Error})}$ . На рис. 4.22 (б) великі значення величин  $Y_{\kappa_n; n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$ , є непрямим критерієм виродження матриць ІСЗ (див. блок II алгоритму (4.1)).

Динаміка кривих  $Y_{n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$ , вказує на стійкість систем SC аналізу до похибок обчислень (див. блок I алгоритму (4.1)). У досліджуваному діапазоні параметрів SC задачі зростання  $a_\kappa^{\text{inc}}$  амплітуди падаючого поля призводить до втрати не більше двох значущих цифр.

В результаті проведених обчислень, на прикладі нелінійного шару з лінійною складовою ДП, що дорівнює одиниці, виявлено і описано ефект резонансної прозорості, пов'язаний з резонансним перетворенням енергії поля збудження в енергію поля випромінювання, пройденого скрізь нелінійний шар. На резонансних ЧЗ в зоні проходження спостерігається перетворення до 63.775% падаючої енергії в енергію поля генерації при незначній долі енергії розсіяння і генерації в зоні відбиття.

#### 4.4.2. Розсіяння і резонансна генерація нелінійного шару

У досліджуваній ситуації ЧЗ

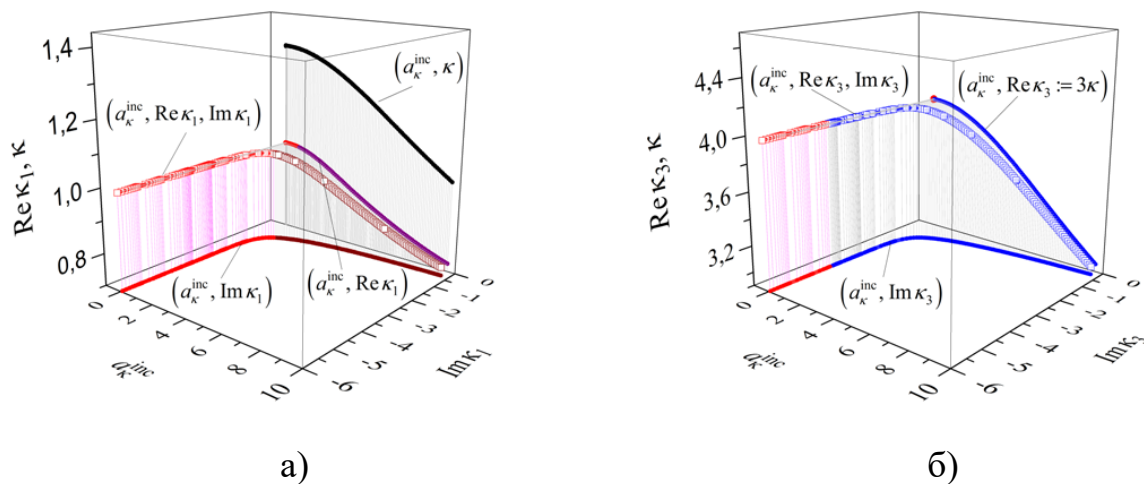
$$\kappa := \text{Re } \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})/3$$

відповідає резонансній частоті генерації третьої гармоніки, тобто

$$3\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})$$

(див. блок III алгоритму (4.1)).

Результати проведених обчислень, отриманих в інтервалі амплітуд падаючого поля  $a_{\kappa}^{\text{inc}} \in [1.1 \cdot 10^{-7}, 9.6]$ , відображені на рис. 4.23- рис. 4.27, див. [24].



а – для  $n = 1$  і лінії частот збудження  $(a_{\kappa}^{\text{inc}}, \kappa)$

б – для  $n = 3$  і лінії частот генерації  $(a_{\kappa}^{\text{inc}}, \text{Re } \kappa_3 =: 3\kappa)$

Рисунок 4.23 – Гілки власних частот  $(a_{\kappa}^{\text{inc}}, \text{Re } \kappa_n, \text{Im } \kappa_n)$  при  $\kappa = \text{Re } \kappa_3 / 3$  і їх проекції на координатні площини

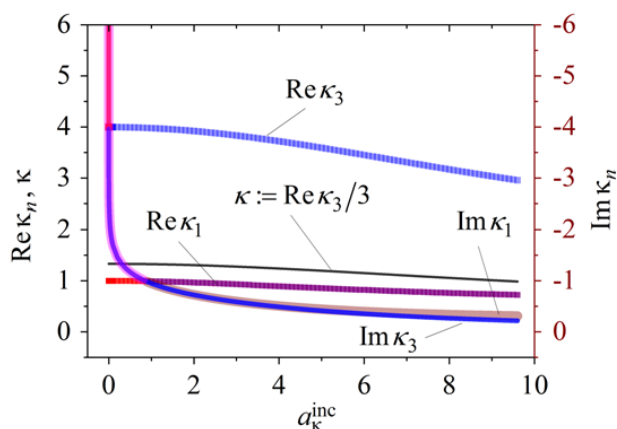


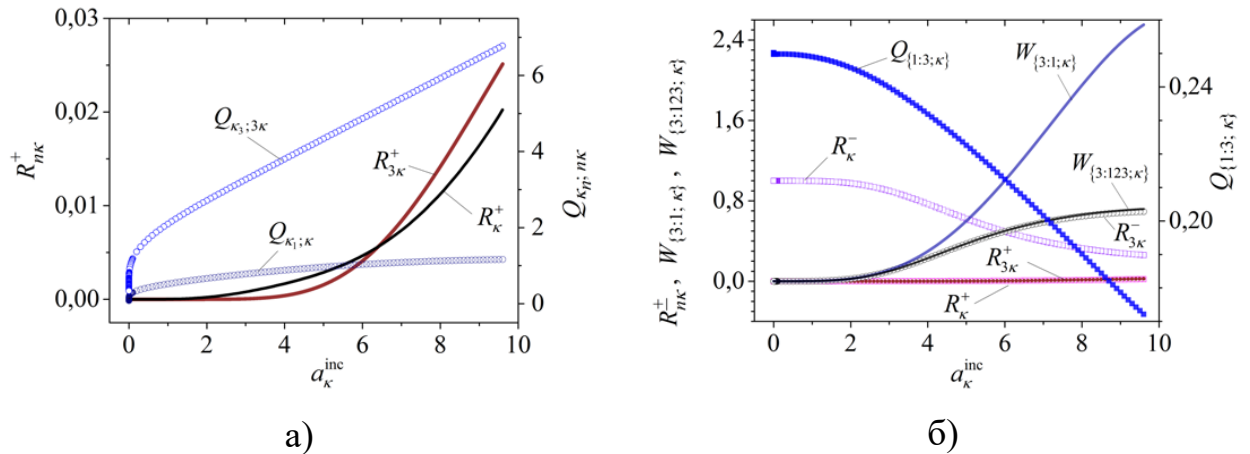
Рисунок 4.24 – Крива ЧЗ  $\kappa := \text{Re } \kappa_3 (a_{\kappa}^{\text{inc}}) / 3$  і лінії спектральних характеристик  $\text{Re } \kappa_n (a_{\kappa}^{\text{inc}}), \text{Im } \kappa_n (a_{\kappa}^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$

Обчислення частотних характеристик  $\kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) = \text{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) + i \text{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}}) \in \Omega_{n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}}) \subset H_{n\kappa}$ ,  $n=1, 3$  ІСЗ (блок II алгоритму (4.1)) проведено з використанням ріманових поверхонь, представлених на рис. 4.1.

Ділянки гілок власних частот  $(a_\kappa^{\text{inc}}, \text{Re} \kappa_n, \text{Im} \kappa_n)$ ,  $n=1, 3$  і їх проєкцій на координатні площини, що належать різним листам ріманових поверхонь  $H_{n\kappa}$ ,  $n=1, 3$ , відзначені на рис. 4.23 різним кольором. Це відноситься і до ліній спектральних характеристик  $\text{Re} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $\text{Im} \kappa_n(a_\kappa^{\text{inc}})$ ,  $n=1, 3$  на рис. 4.24. Лінію гілки власних частот  $\kappa_1(a_\kappa^{\text{inc}})$  при  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [1.1 \cdot 10^{-7}, 0.86)$  і  $[1.1 \cdot 10^{-7}, 0.86]$  представлено, відповідно, на нефізичному і фізичному листах поверхні  $H_\kappa$ , див. рис. 4.23 (а), рис. 4.24. Аналогічно, лінію гілки  $\kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})$  при  $a_\kappa^{\text{inc}} \in [1.1 \cdot 10^{-7}, 7 \cdot 10^{-5})$  і  $[7 \cdot 10^{-5}, 0.86]$  представлено, відповідно, на нефізичному і фізичному листах поверхні  $H_{3\kappa}$ , див. рис. 4.23 (б), рис. 4.24. На рис. 4.23 і рис. 4.24 представлені також визначені в блоці III алгоритму (4.1) лінії ЧЗ  $(a_\kappa^{\text{inc}}, \kappa)$ ,  $\kappa := \text{Re} \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})/3$  (див. рис. 4.23 (а), рис. 4.24) і генерації  $(a_\kappa^{\text{inc}}, \text{Re} \kappa_3 = 3\kappa)$ ,  $\text{Re} \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})$  (див. рис. 4.23 (б), рис. 4.24).

На рис. 4.25, крім енергетичних характеристик, отриманих при вирішенні SC задачі блоку I алгоритму (4.1), наведено також (у відповідності з зазначеними вище на рис. 4.23, рис. 4.24 гілками власних частот) гілки значень добротності  $Q_{\kappa_n; n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$  для  $n=1, 3$  (див. рис. 4.25 (а)) та відносної добротності  $Q_{\{1;3;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  (див. рис. 4.25 (б)). Малим значенням добротності  $Q_{\kappa_n; n\kappa}(a_\kappa^{\text{inc}})$  при досить малих значеннях амплітуд  $a_\kappa^{\text{inc}}$  падаючого поля відповідають власні частоти з великими негативними значеннями  $\text{Im} \kappa_n$ ,  $n=1, 3$ , див. рис. 4.23, рис. 4.24. Таким власним частотам відповідають *власні (резонансні) поля простору випромінювання*. Цей результат добре узгоджується з висновками про асимптотичну поведінку спектрів нелінійних задач, отриманими в роботі [15].





а – енергетичні характеристики  $R_{nk}^+(a_k^{\text{inc}})$  і добротності  $Q_{k_n;nk}(a_k^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$ ;

б – енергетичні характеристики  $R_{nk}^+(a_k^{\text{inc}})$  для  $n = 1, 3$ ,  $W_{\{3:1;\kappa\}}(a_k^{\text{inc}})$ ,

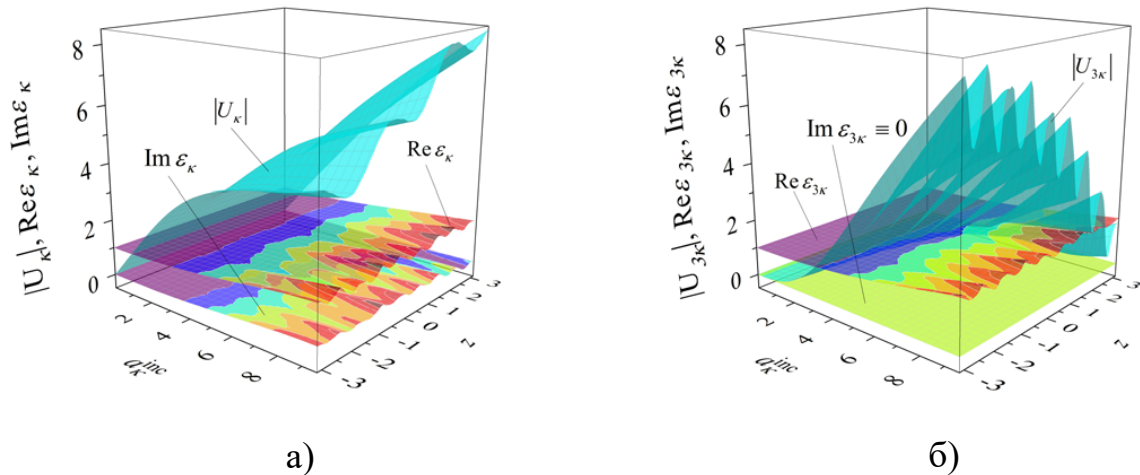
$W_{\{3:123;\kappa\}}(a_k^{\text{inc}})$  і відносна добротність  $Q_{\{1:3;\kappa\}}(a_k^{\text{inc}})$

Рисунок 4.25 – Графіки, що відповідають ЧЗ  $\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_k^{\text{inc}})/3$  нелінійного шару

Інтерес представляє дослідження динаміки зміни величини відносної добротності  $Q_{\{1:3;\kappa\}}(a_k^{\text{inc}})$ . Монотонне спадання цієї величини з ростом амплітуди падаючого поля на резонансних ЧЗ, що визначаються блоком III алгоритму (4.1), супроводжується зростанням здатності нелінійного шару до генерації, див. рис. 4.25 (б).

В даному випадку, збільшення амплітуди падаючого поля  $a_k^{\text{inc}}$  супроводжується незначним зростанням величин енергії розсіяння  $R_{\kappa}^+(a_k^{\text{inc}})$  і генерації  $R_{3\kappa}^+(a_k^{\text{inc}})$  в зону відбиття. Максимальні значення цих величин при  $a_k^{\text{inc}} = 9.6$  не перевищує 2.1% і 2.52%, відповідно (див. рис. 4.25). У зоні проходження спостерігається ефект перетворення енергії, тобто зниження розсіяння  $R_{\kappa}^-(a_k^{\text{inc}})$  до 26.125% і зростання генерації  $R_{3\kappa}^-(a_k^{\text{inc}})$  до 69.338% при  $a_k^{\text{inc}} = 9.6$ , див. рис. 4.25 (б)). При цьому, для амплітуди  $a_k^{\text{inc}} = 9.6$  частка повної

розсіяної енергії в третю гармоніку  $W_{\{3;1;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$  в 2.55247 перевершує енергію, що розсіюється першою гармонікою, а відносна величина  $W_{\{3;123;\kappa\}}(a_\kappa^{\text{inc}})$ , що описує відношення енергії третьої гармоніки до повної випроміненої енергії, становить 71.851%.



а – при ЧЗ (частотах розсіяння)  $\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})/3$ ;

б – при частотах резонансної генерації  $3\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})$

Рисунок 4.26 – Поверхні амплітудних характеристик  $|U_{n\kappa}|$  і індукованих ДП  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$ ,  $n = 1, 3$  нелінійного шару

На рис. 4.26 наведені поверхні абсолютних значень амплітуд розсіяння  $|U_\kappa|$  і генерації  $|U_{3\kappa}|$  в нелінійному шарі на частотах розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_\kappa^{\text{inc}})/3$  і резонансної генерації  $3\kappa$ , див. (2.4). Крім того, тут відображені поверхні реальних  $\text{Re } \varepsilon_{n\kappa}$  і уявних  $\text{Im } \varepsilon_{n\kappa}$  складових нелінійної діелектричної проникності (2.3), що індуковані полями (2.4). Ці результати отримано з використанням SC аналіз систем нелінійних задач, див. блок I алгоритму (4.1). У досліджуваному просторі параметрів  $\{\{a_\kappa^{\text{inc}}, z\} : a_\kappa^{\text{inc}} \in [1.1 \cdot 10^{-7}, 9.6], z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]\}$  з ростом амплітуди поля збудження  $a_\kappa^{\text{inc}}$  вздовж висоти нелінійного шару (за

координатою  $z$ ) спостерігається більш яскраво виражена резонансна поведінка амплітудних характеристик полів розсіяння  $|U_\kappa|$  і генерації  $|U_{3\kappa}|$ . При цьому шар перетворюється в резонансну шарувату структуру, див. рис. 4.26.

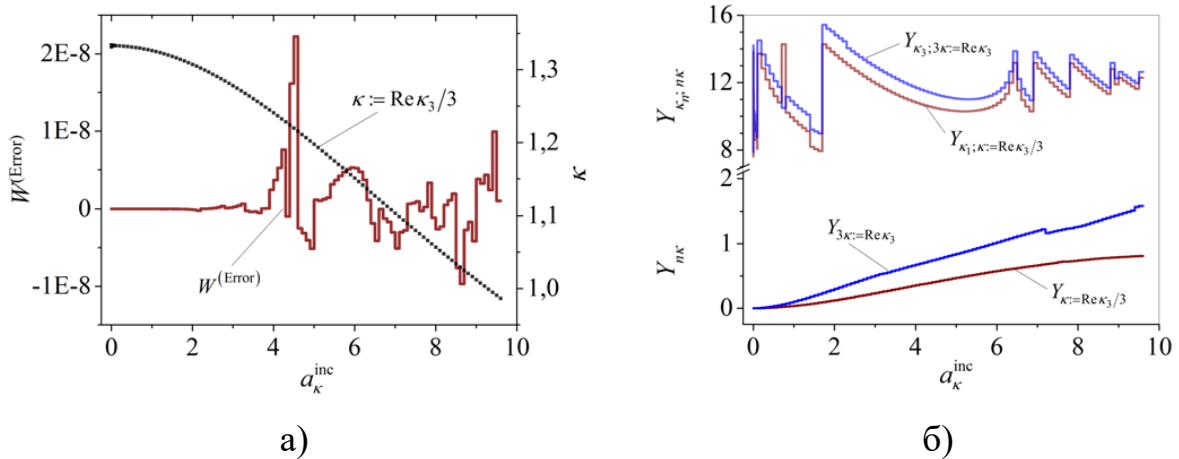
Варіації дійсних частин проникності спостерігаються в діапазоні  $1 \leq \text{Re } \varepsilon_{n\kappa} \leq 1.87979$ ,  $n = 1, 3$ , див. рис. 4.26. Уявна складова діелектричної проникності на частоті розсіяння  $\kappa$  позитивна, вона приймає значення в діапазоні  $0 \leq \text{Im } \varepsilon_\kappa \leq 0.44146$ , див. рис. 4.26 (а). Така поведінка  $\text{Im } \varepsilon_\kappa$  обумовлена проявом ефекту перетворення енергії падаючого поля в поля генерації, тобто витратами енергії що пішла на генерацію поля третьої гармоніки. На частоті генерації  $3\kappa$  величина  $\text{Im } \varepsilon_{3\kappa} \equiv 0$ , див. рис. 4.26 (б). Це пояснюється прийнятим вище припущенням про слабкість поля генерації третьої гармоніки, що бере участь в процесі генерації, але не призводить до генерації нових вищих гармонік.

Відзначимо деякі параметри і критерії достовірності отриманих результатів обчислень. Аналіз резонансних процесів проведено на основі ітераційного алгоритму (4.1). Системи нелінійних АР самоузгодженої задачі (блок I алгоритму (4.1)) і лінійних АР ІСЗ (блок II алгоритму (4.1)) отримані відповідно з систем інтегральних рівнянь Гаммерштейна і Фредгольма другого роду з застосуванням складових квадратурних формул Уеддла.

У досліджуваному діапазоні параметрів розглядалися системи рівнянь 43 порядку. Відносна помилка обчислень алгоритму (4.1) не перевищувала величини  $\xi < 10^{-7}$  (див. (4.2)).

В випадку непоглинаючого середовища з  $\text{Im } \varepsilon^{(L)} \equiv 0$  співвідношення енергетичного балансу (2.17) було перевірено чисельно. У численних експериментах аналізувалася величина  $W^{(\text{Error})}$  похибки балансу енергії (2.18). У досліджуваному діапазоні параметрів задачі отримана оцінка цієї величини  $|W^{(\text{Error})}| < 2.2236 \cdot 10^{-8}$  є прийнятною, див. рис. 4.27 (а).

На рис. 4.27 (б) наведені графіки величин, що характеризують обумовленості матриць в алгоритмі (4.1), які були отримані з використанням складової квадратурної формули Уеддла для систем рівнянь 43 порядку.



а –  $W^{(\text{Error})}(a_k^{\text{inc}})$  похибки балансу енергії і  $\kappa = \text{Re } \kappa_3(a_k^{\text{inc}})/3$  ЧЗ;

б –  $Y_{k_n; n, k}(a_k^{\text{inc}})$  характеризують виродження матриць спектральних задач і  $Y_{nk}(a_k^{\text{inc}})$  чутливість матриць SC аналізу до похибок обчислень, для  $n = 1, 3$

Рисунок 4.27 – Аналіз ітераційних процесів алгоритму (4.1)

при  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$  на основі квадратурної формули Уеддла (Weddle)

для систем рівнянь розмірності  $N = 43$ . Криві:

Величинам  $Y_{k_n; n, k}(a_k^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$  (4.4) відповідають великі значення чисел обумовленості матриць індукованих спектральних задач в блоці II алгоритму (4.1), що є підтвердженням виконання критерію виродження цих матриць.

Чутливість матриць задач SC аналізу, див. блок I алгоритму (4.1), до похибки на частотах розсіяння  $\kappa = \text{Re } \kappa_3/3$  і резонансної генерації  $3\kappa$  характеризується значеннями величин  $Y_{nk}$ ,  $n = 1, 3$  (4.3). Графіки  $Y_{nk}(a_k^{\text{inc}})$ ,  $n = 1, 3$  наведено на рис. 4.27 (б). Логарифми чисел обумовленості матриць приймають прийнятні для проведення обчислень значення.

Обчислення підтвердили ефективність запропонованого підходу. Зокрема, при чисельному аналізі властивостей нелінійного абсолютно прозорого шару, лінійна складова діелектричної проникності якого дорівнює одиниці, виявлений і описаний ефект перетворення енергії падаючого поля в резонансне поле генерації. Тут в зоні проходження спостерігається перетворення 69% падаючої енергії в енергію поля генерації. Частка енергії третьої гармоніки в 2.5 перевершує енергію, яка розсіяна першою гармонікою, а відносна величина енергії генерації (для третьої гармоніки) до повної енергії випромінювання (розсіяння і генерації), більш ніж 71%.

#### **4.5 Висновки по розділу**

1. Наведено результати моделювання запропонованих в роботі методів. Зокрема, на прикладі задачі розсіяння і генерації хвиль третьої гармоніки поля нелінійної шарової структури здійснено реалізацію та моделювання алгоритму чисельного аналізу резонансних енергетичних властивостей випромінювання хвиль. В його основі лежить рішення на резонансних частотах нелінійної структури відповідних матричних рівнянь, отриманих із застосуванням квадратурних формул до СНР Гаммерштейна другого роду (при аналізі випромінювання хвиль) та лінійних однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (при визначенні власних частот ІСЗ). Вибір резонансних ЧЗ за значенням реальних частин власних частот дозволив дослідити, як резонансні властивості розсіяння при генерації хвиль, так і розсіяння при резонансній генерації.

2. Достовірність отриманих результатів контролюється наступними критеріями: виконанням балансу енергії; перевірки (за величинами чисел обумовленості матриць) чутливості систем SC аналізу до похибки, та виродження матриць ІСЗ. Зазначені критерії є визначальними при виборі прийнятних квадратурних формул Ньютона-Котеса, які переводять інтегральні

рівняння задач в матричні. Це дозволяє знизити розмірність матриць задач та скоротити час обчислень.

3. Порівняння результатів обчислень, отриманих з використанням складових квадратурних формул Сімпсона і Уеддла, показало, що при порівняно суттєвій чутливості до похибки обчислень, застосування квадратурної формули вищого порядку точності Уеддла може призводити до зменшення розмірності системи приблизно в 2.5 рази. Оскільки зниження розмірності систем рівнянь істотно зменшує час обчислень, це є значною перевагою і відкриває перспективи до вирішення низки нових нелінійних задач резонансного розсіяння і генерації хвиль, як шаровими, так і шаровими періодичними структурами.

4. Обчислення підтвердили ефективність запропонованого підходу. Зокрема, при чисельному аналізі властивостей нелінійного абсолютно прозорого (в лінійному наближенні) шару, а також тришарової структури з абсолютно прозорим нелінійним шаром, виявлено і описано ефект резонансного перетворення енергії падаючого поля в пройдене поле розсіяння та генерації. При цьому показник частини енергії генерації в зону проходження на резонансних частотах розсіяння є високим, а на резонансних частотах генерації він приймає оптимально допустимі значення.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у роботах [23-25, 48-50].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у переліку джерел посилання [15, 16, 23-25, 48-50, 87, 100, 106, 114-120].

## ВИСНОВКИ

В результаті проведеного в дисертаційній роботі дослідження вирішено науково-практичну задачу побудови математичних методів аналізу нелінійних шарових електродинамічних структур в резонансному діапазоні частот на основі рішення строгих граничних задач математичної фізики, а також розробки ефективних обчислювальних методів розв'язання задач розсіяння і генерації хвиль. У процесі вирішення поставлених завдань було отримано ряд нових наукових і практичних результатів.

1. Виконано аналіз системи рівнянь Максвелла, що описує нелінійні хвильові процеси ізотропної, немагнітної, лінійно поляризованої та нелінійної шарової діелектричної структури з кубічною поляризацією. Отримано систему нелінійних рівнянь в часткових похідних, що призначена для аналізу процесу генерації третьої гармоніки при збудженні неоднорідної нелінійної діелектричної шарової структури квазіоднорідним електромагнітним полем.

2. Уперше запропоновано самоузгоджений ітераційний обчислювальний метод аналізу системи нелінійних граничних задач, що зводиться до вирішення еквівалентної системи нелінійних інтегральних рівнянь. Проведено порівняння самоузгодженого підходу з методом наближення заданого поля. Показано, що хоча метод наближення заданого поля і дозволяє оцінити без істотних обчислювальних витрат деякі електродинамічні властивості досліджуваного нелінійного об'єкту, до нього (на відміну від запропонованого методу) не може бути застосована така важлива фізична характеристика як баланс енергії.

3. Удосконалено метод аналізу спектральних задач з індукованою діелектричною проникністю нелінійного шару. Згідно з цим методом доведено, що для нелінійних шарів на частотах збудження і генерації, близьких до власних частот, збільшення енергії з ростом амплітуди падаючого поля супроводжується монотонним зменшенням величини відносної добротності власних коливань. Це дозволяє побічно за результатами аналізу індукованих спектральних задач прогнозувати зони максимальної генерації енергії.

4. Удосконалено обчислювальну модель аналізу резонансних властивостей розсіяння і генерації хвиль нелінійними шаровими структурами, що дозволяє як резонансні частоти збудження вибирати величини з дійсною частиною комплексних власних частот індукованих спектральних задач. Це суттєво спрощує аналіз резонансних процесів розсіяння та генерації коливань.

5. Розвинуто методику чисельного експерименту за рахунок використання таких критеріїв оцінки достовірності обчислень, як виконання умови балансу енергії, а також оцінки обумовленості матриць для задач випромінювання на чутливість до похибок обчислення та перевірки індукованих спектральних задач на виродження матриць.

6. Здійснено моделювання запропонованих в роботі методів за допомогою обчислювальних експериментів на основі створених здобувачем програм. Зокрема, на прикладі задачі розсіяння і генерації хвиль поля третьої гармоніки нелінійної шарової структури здійснено моделювання алгоритму чисельного аналізу резонансних енергетичних властивостей випромінювання хвиль. Показано, що використання запропонованих методів дозволяє знизити розмірність систем рівнянь та істотно зменшити час обчислень, що відкриває перспективи до вирішення низки нових задач резонансного розсіяння і генерації хвиль, як шаровими, так і шаровими періодичними структурами.

7. Результати проведених досліджень дозволили виявити нові фізичні закономірності, що вказують на можливість підвищення багатофункціональності електронних приборів; проектування множників частоти і інших електродинамічних пристроїв, що містять нелінійні діелектрики. Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та методи використано у відділі теорії дифракції та дифракційної електроніки ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАНУ при проведенні науково-дослідних робіт зі створення електродинамічних засобів генерації, посилення, детектування та розповсюдження терагерцового випромінювання, а також в навчальному процесі при підготовці аспірантів.



**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики // М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.
2. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика // Пер. с англ. М.: Мир. 1976. 261 с.
3. Gibbs H.M. Optical Bistability: Controlling Light with Light // New York: Academic Press. 1985.
4. Кившарь Ю.С., Агровал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов // Пер. с. англ. М.: Физматлит. 2005. 648 с. ISBN 5-9221-0584-1 (Kivshar Y. S., Agrawal G. P. Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. New York: Academic Press. 2003).
5. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны // Пер. с. англ. М.: Физматлит. 2003. 304 с. ISBN 5-9221-0344-X.
6. Черногор Л.Ф. Нелинейная радиофизика // Учебное пособие – 2-е изд., перераб. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина. 2004. 200 с.
7. Милославский В.К. Нелинейная оптика // Учебное пособие. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина. 2008. 312 с. ISBN 978-966-623-507-0.
8. Дифракция плоской электромагнитной волны на нелинейном диэлектрическом слое / М.В. Давидович, С.В. Алексутова, И.В. Шилин, В.С. Борисов // Изв. Саратовского университета, сер. Физика. 2007. Т. 7. В. 1. С. 32-40.
9. Serov V., Schürmann H.W., Svetogorova E. Integral Equation Approach to Reflection and Transmission of a Plane TE-wave at a (Linear/Nonlinear) Dielectric Film with Spatially Varying Permittivities // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. vol. 37. pp. 3489-3500.
10. Smirnov Y., Schürmann H.W., Shestopalov Y. Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Physical Review E. 2005. vol. 71. pp. 0166141-10.
11. Gavrilenko V.I. Optics of Nanomaterials // Singapore: Pan Stanford

Publishing. 2011.

12. Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г. Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах // Пенза: Изд-во ПензГУ. 2009.

13. Kochetova L.A., Prosvirnin S.L., Tuz V.R. Optical Bistability in a Grating with Slits Filled Nonlinear Media // Progress In Electromagnetics Research M. 2014. Vol. 35. P. 133-139.

14. Численный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоском слое с Керровской нелинейностью / А.В. Бровенко, П.Н. Мележик, А.Е. Поединчук, А.С. Троцило // Радіофізика та електроніка. 2017. Т. 22. № 3. С. 8-13.

15. Meklachi T., Moskow S., Schotland J.C. Asymptotic analysis of resonances of small volume high contrast linear and nonlinear scatterers // J. Math. Phys. 2018. Vol. 59. P. 083502-20.

16. Angermann L., Yatsyk V.V. Resonant Scattering and Generation of Waves: Cubically Polarizable Layers // Cham, Switzerland: Springer. 2019. 228 p. ISBN 978-3-319-96300-6. ISBN 978-3-319-96301-3 (eBook).

17. Siegel P.H. Terahertz Technology // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2002. Vol. 50. No. 3. P. 910-928.

18. Reimann K. Table-top sources of ultrashort THz pulses // Rep. Prog. Phys. 2007. Vol. 70. P. 1597–1632.

19. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // In: Eds. L. Beilina and Y.V. Shestopalov, Inverse Problems and Large-Scale Computations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52. Switzerland: Springer International Publishing. 2013. Chapter 4. P. 41-56.

20. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2015. No.27. P. 13-21.

21. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Об одном подходе к анализу

резонансного рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми и периодическими структурами // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 1 (23). С. 106-117.

22. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Processes of Resonant Scattering and Generation of Waves by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2017. Issue 33. P. 7-18.

23. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Методы анализа процессов рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми средами // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 46-55.

24. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Conversion of Excitation Energy into Generated Energy at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Advanced Electromagnetics. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 66-74.

25. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Energy characteristics of a nonlinear layer at resonant frequencies of wave scattering and generation // Open Phys. 2019. Vol.17. Issue 1. P. 222-232.

26. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Analyses of Process of Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Layered Structure // Proceedings of the 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'2010). Sevastopol, Ukraine, September 6-10, 2010. P. 68-70.

27. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Nonlinear Dielectric Layer // Proceedings of the 15-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010). Tbilisi, Georgia, September 27-30, 2010. P. 127-131.

28. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // Abstract of the Workshop on Large-Scale Modeling. Organized by

Karlstad University and supported by Swedish Institute. Selma Spa, Sunne, Sweden, May 1-6, 2012. P. 20-21.

29. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Modeling and analysis of resonance scattering and generation of waves on cubically polarisable nonlinear layered structures // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2012” (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 18-19.

30. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Weak fields at multiple frequencies and effects of scattering and generation of waves by nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2012” (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 19-20.

31. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Nonlinear Layered Structure and the Eigen Oscillations of the Linearised Problems near the Frequencies of Scattering and Generation // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 62.

32. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Self-consistent Problem of Scattering and Generation of Oscillations by a Nonlinear Layer Taking into Account the Influence of Weak Fields at Multiple Frequencies // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 706.

33. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Scattering and generation of waves by cubically polarisable layered media under the influence of weak fields // Proceedings of the 6-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2012). Sevastopol, Ukraine, September 17-21, 2012. P. 235-237.

34. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Boundary-Value Problem of Resonant Scattering and Generation of Waves by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 7-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2014). Kharkiv, Ukraine, September 15-19, 2014. P. 92-95.

35. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Multifunctional Nonlinear

Layered Media by Resonant Scattering and Generation of Waves // Proceedings of the 19-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2014). Tbilisi, Georgia, September 22-25, 2014. P. 45-47.

36. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Analysis of the generation properties of nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 19-20.

37. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Investigation of nonlinear cubically polarizable layered media with a controllable permittivity // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 20-21.

38. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of generated oscillations by a decanalizing nonlinear layer media // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 20-23.

39. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of scattered oscillations at the two-sided excitation of nonlinear layered structures // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPH-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 24-27.

40. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Type-Conversion of Oscillations by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 20-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2015). Lviv, Ukraine, 21-24 September, 2015. P. 29-32.

41. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A mathematical model for resonance scattering and generation of oscillations by nonlinear layered or grating-like media // Abstract of the International Conference «Days on Diffraction 2016»

(DD-2016). Saint Petersburg, Russia, 27 June - 1 July, 2016. P. 22.

42. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant scattering and third-harmonic generation by cubically polarizable grating structures // Proceedings of the 9-th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW-2016). Kharkiv, Ukraine, 21-24 June, 2016. F-23. P. 1-4.

43. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant Scattering and Generation of Oscillations for Nonlinear Layered and Grating-Like Media // Proceedings of the 8-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2016). Odessa, Ukraine, 5-11 September, 2016. P. 105-108.

44. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Transparent Cubically Polarizable Media with Layered or Periodic Structures // Proceedings of the 21-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). Tbilisi, Georgia, 26-29 September, 2016. P. 13-16.

45. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation Properties of Nonlinear Layered Objects and Eigen-Modes of the Linearized Problems // Proceedings of 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2017). Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Kyiv, Ukraine, 29 May - 2 June, 2017. P. 221-224.

46. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Resonant Scattering and Wave Generation by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Proceedings of the XVIII-th International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2017). Kharkiv, Ukraine, 26-28 June, 2017. P. 10-13.

47. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Methods for the Analysis of Wave Scattering and Generation by Layered and Periodic Structures // Proceedings of the XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017). Dnipro, Ukraine, 25-28

September, 2017. P. 93-96.

48. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Computation of Excitation Frequencies for Nonlinear Wave Scattering and Generation Processes // Proceedings of the 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2018). Odessa, Ukraine, 4-7 September, 2018. P. 234-237.

49. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Numerical Specifics in Nonlinear Layer Computation Near Eigen Frequencies of Scattering and Generation // Proceedings of the XXIII-rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018). Tbilisi, Georgia, 24-27 September, 2018. P. 47-50.

50. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generating Properties of Waves at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Proceedings of 2019 IEEE 2-nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2019). Lviv, Ukraine, 2-6 July, 2019. P. 153-156.

51. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров, ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцкая, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. // М.: Сов. Энциклопедия. 1988. 847 с.

52. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики // М.: Изд. АН СССР. 1964. 295 с.

53. Бломберген Н. Нелинейная оптика // Пер. с англ. М.: Мир. 1966. 424 с.

54. Ахманов С.А. Современная нелинейная оптика // Успехи физических наук. 1985. Декабрь Том 147. вып. 4. С. 789-792.

55. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика // Пер. с англ. М.: Мир. 1976. 261 с.

56. Летохов В.С., Чеботаев В.Н. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии // М.: Наука. 1975. 279 с.

57. Демтредер В. Лазерная спектроскопия. Основные принципы и техника эксперимента // Пер. с англ. М.: Наука. 1985. 607 с.

58. Коротеев Н.И., Шумай И.Л. Физика мощного лазерного излучения //

М.: Наука. 1991. 312 с.

59. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере // М.: Наука. 1973. 272 с.

60. Gurevich A.V. Nonlinear Phenomena in the Ionosphere // N.-Y., Springer-Verlag. 1978. 372 p.

61. Борисов Н.Д., Гуревич А.В., Милих Г.М. Искусственная ионизированная область в атмосфере // М.: ИЗМИРАН. 1986. 184 с.

62. Cherkassky V.S., Knyazev V.A. Terahertz radiation: Last decade publications // Препринт Института ядерной физики им. Г.И. Будкера 2002-44. 2002. 45 с.

63. Князев Б.А., Кузьмин А.В. Поверхностные электромагнитные волны: основные свойства, формирование, транспортировка // Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск. 2003. 27 с.

64. Davis C.C. Lasers and electro-optics. Fundamentals and engineering // Cambridge University Press, 2 edition (May 12, 2014). 882 p.

65. Han P.Y., Zhang X.C. Free-space coherent broadband terahertz timedomain spectroscopy // Meas. Sci. Technol. 2001. V. 12. No. 11. P. 1747-1756.

66. Hangyo M., Nagashima T., Nashima S. Spectroscopy by pulsed terahertz radiation // Meas. Sci. Technol. 2002. V. 13. No. 11. P. 1727-1738.

67. Neil G.R. Trends and opportunities in light source development // Nucl. Instrum. Methods A. 2002. V. 483. No. 1-2. P. 14-20.

68. Анализ патентной активности в области перспективных локационных технологий терагерцового диапазона / А.Г. Черевко, Е.М. Ильин, Ю.В. Моргачев, А.И. Полубехин // Вестник СибГУТИ. 2015. №2. С. 164-173.

69. Кулипанов Г.Н. Генерация и использование терагерцового излучения: история и перспективы // Вестник НГУ. Серия; Физика. 2010. Т. 5. вып. 4. С. 24-27.

70. Li M., Jiang Y. Signature analysis of ballistic missile warhead with micronutation in terahertz band // Proc. of SPIE. 2013. Vol. 8909. P. 890902-8.

71. Melvin W.L., Scheer J.A. Principles of Modern Radar // Vol. II: Advanced



Techniques. Edison, N.J.: SciTech Publishing. 2013. 842 с.

72. Усанов Д.А., Романова Н.В., Салдина Е.А. Перспективы и тенденции развития терагерцовых технологий: патентный ландшафт // Экономика науки. 2017. Т. 3. № 3. С. 189-202.

73. Terahertz atmospheric attenuation and continuum effects / D.M. Slocum, T.M. Goyette, E.J. Slingerland, R.H. Giles, W.E. Nixon // Terahertz Physics, Devices, and Systems VII: Advanced Applications in Industry and Defense, edited by Mehdi F. Anwar, Thomas W. Crowe, Tariq Manzur, Proc. of SPIE. 2013. Vol. 8716. P. 871607-14. doi:10.1117/12.2015471.

74. Yamamoto S. Atacama Large Millimeter/submillimeter Array in Operation // Molecular Science. 2014. Vol. 8. No. 1. P. 72-86.

75. Черевко А.Г., Моргачев Ю.В. Особенности компьютерного моделирования антенн терагерцового диапазона // «Мониторинг. Наука и технологии» («МНТ»). №1 (30). 2017. С. 84-87.

76. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда // М.: Наука. 1975. 400 с.

77. Геккер И.Р. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой // М., Атомиздат. 1978. 310 с.

78. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме // М.: Наука. 1976. 240 с.

79. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму // М.: Наука. 1973. 288 с.

80. Шварцбург А.Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн // М.: Наука. 1976. 120 с.

81. Беспрозванных В.Г., Первадчук В.П. Нелинейная оптика: учеб. пособие // Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 2011. 200 с.

82. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов // 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1979. 432 с.

83. Butcher P.N. Nonlinear optical phenomena // Bulletin 200, Engineering Experiment Station, Ohio State University. Columbus: Ohio State University. 1965.

143 p.

84. Яцик В.В. Задача дифракции на поперечно неоднородном диэлектрическом слое с нелинейностью типа Керра // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12, № 1. С. 59-69.

85. Шестопалов Ю.В., Яцик В.В. Резонансное рассеяние электромагнитных волн диэлектрическим слоем с нелинейностью типа Керра // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 11. С. 1285-1300.

86. Кравченко В.Ф., Яцик В.В. Эффекты резонансного рассеяния волн слоистой диэлектрической структурой с нелинейностью типа Керра // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 12. С. 17-40.

87. Angermann L., Yatsyk V.V. Numerical Simulation of the Diffraction of Weak Electromagnetic Waves by a Kerr-Type Nonlinear Dielectric Layer // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13, № 12. С. 15-30. (Technische Universität Clausthal, Mathematik-Bericht. 2008. No. 3. 24 p.)

88. Shestopalov Y.V., Yatsyk V.V. Diffraction of Electromagnetic Waves by a Layer Filled with a Kerr-type Nonlinear Medium // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2010. Vol. 17. No. 3. P. 311-335.

89. Яцик В.В. Дифракция на слое и слоистой структуре с положительными и отрицательными восприимчивостями нелинейных сред типа Керра // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 8. С. 68-80.

90. Schürmann H.W., Serov V., Shestopalov Y. Reflection and Transmission of a TE-plane Wave at a Lossless Nonlinear Dielectric Film // Physica D. 2001. vol. 158. P. 197-215.

91. Ангерман Л., Яцик В.В. Математические модели анализа процессов резонансного рассеивания и генерации третьей гармоники при дифракции плоской волны на слоистой кубически поляризуемой структуре // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 1. С. 36-49.

92. Angermann L., Yatsyk V.V. Generation and resonance scattering of waves on cubically polarisable layered structures // Numerical Simulations – Applications, Examples and Theory / edited by Lutz Angermann. InTech, Rijeka/Vienna, Croatia/Austria. 2011. Chapter 8. P. 175-212.

93. Angermann L., Yatsyk V.V. Resonance properties of scattering and

generation of waves on cubically polarisable dielectric layers // *Electromagnetic Waves* / edited by Vitaliy Zhurbenko. InTech, Rijeka/Vienna, Croatia/Austria. 2011. Chapter 15. P. 299-340.

94. Яцик В.В. Резонансное рассеяние и генерация волн изотропной нелинейной кубически поляризуемой слоистой структурой. Постановка задачи // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2011. Т. 16. № 9. С. 33-48.

95. Яцик В.В. Резонансное рассеяние и генерация волн изотропной нелинейной кубически поляризуемой слоистой структурой. Численный анализ // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2012. Т. 17. № 8. С. 22-31.

96. Angermann L., Yatsyk V.V. The effect of weak fields at multiple frequencies on the scattering and generation of waves by nonlinear layered media // *Solutions and Applications of Scattering, Propagation, Radiation and Emission of Electromagnetic Waves* / edited by Ahmed Kishk. InTech, Rijeka/Vienna, Croatia/Austria. 2012. Chapter 11. P. 303-332.

97. Ангерман Л., Яцик В.В. Влияние слабых полей кратных частот на процесс резонансного рассеяния и генерации колебаний нелинейными слоистыми структурами // *Физические основы приборостроения*. 2013. Том 2. № 1. С. 48-71.

98. Yatsyk V.V. System of nonlinear boundary-value problems and self-consistent analysis of resonance scattering and generation oscillations by a cubically polarisable layered structure // *Inverse Problems and Large-Scale Computations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52* / editeds Larisa Beilina and Yury V. Shestopalov. Switzerland: Springer International Publishing. 2013. Chapter 13. P. 199-217.

99. Angermann L., Yatsyk V.V. Mathematical models of electrodynamic processes of wave scattering and generation on cubically polarisable layers // *Progress In Electromagnetics Research B*. 2013. Vol. 56. P. 109-136.

100. Резонансное рассеяние и генерация колебаний канализирующими нелинейными слоистыми средами / Л. Ангерман, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, В.В. Яцик // *ДАН*. 2013. Т. 453. № 5. С. 496-500. (*English translation: Angermann L., Kravchenko V.F., Pustovoit V.I., Yatsyk V.V. Resonance Scattering and Generation of Oscillations by Channeling Nonlinear Layered Media* //

Doklady Physics. 2013. Vol. 58, No. 12. P. 535-539).

101. Angermann L., Shestopalov Y.V., Yatsyk V.V. Mathematical models for scattering and generation of plane wave packets on layered, cubically polarisable structures // Far East Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 81, No. 1-2. P. 1-31.

102. Angermann L., Shestopalov Y.V., Yatsyk V.V. Eigenmodes of linearised problems of scattering and generation of oscillations on cubically polarisable layers // Inverse Problems and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 120 / edited Larisa Beilina. Switzerland: Springer International Publishing. 2015. Chapter 5. P. 67-80.

103. Angermann L., Yatsyk V.V. The multifunctional process of resonance scattering and generation of oscillations by nonlinear layered structures // Cogent Physics. 2016. Vol. 3, No. 1. P. 1-19.

104. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн // Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 432 с. ISBN 5-02-014050-3.

105. Kleinman D.A. Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media // Phys. Rev. 1962. Vol. 126. P. 1977-1979.

106. Шестопапов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток // Киев: Наук. думка. 1989. 216 с. ISBN 5-12-000870-4.

107. Shestopalov V.P., Yatsik (Yatsyk) V.V. Spectral Theory of a Dielectric Layer and the Morse Critical Points of Dispersion Equations. // Ukrainian Journal of Physics. 1997. Т. 42, № 7. P. 861-869.

108. Яцик В.В. Конструктивный подход построения локальных уравнений нерегулярной дисперсии и эволюции полей квазиоднородной электродинамической структуры // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 10. С. 27-44. (English translation: Yatsyk V.V. A Constructive Approach to Construction of Local Equations of Irregular Dispersion and Evolution of Fields in a Quasi-Homogeneous Electrodynamical Structure. // Telecommunications and Radio Engineering. 2001. Vol. 56, No. 8 & 9. P. 89-113).

109. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики //

1. Функциональный анализ: Пер. с англ. М.: Мир. 1977. 360 с.

110. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний // Пер. с англ. М.: Мир. 1984. 472 с.

111. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы // М.: Сов. радио. 1966. 476 с.

112. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции / Н.Н. Войтович, Б.З. Каценеленбаум, А.Н. Сивов. С дополнением М.С. Аграновича // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977. 416 с.

113. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики // Т. 4. Анализ операторов. Пер. с англ. М.: Мир. 1982. 428 с.

114. Hoff J. Numerische Simulation der Oberwellengeneration in nichtlinearen elektromagnetischen Diffraktionsproblemen // Diploma thesis (supervisor: L. Angermann), Dept. of Mathematics, Clausthal Univ. of Technology, 2014.

115. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений // Пер. с англ. М.: Мир. 1980. 280 с. (Forsythe G., Malcolm M., Moler C. Computer Methods for Mathematical Computations. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1977. 259 p.)

116. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение // Пер. с англ. Изд. второе, стереотип. М.: Мир. 2001. 575 с. ISBN 5-03-003392-0. (Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon and Schuster Englewood Cliffs. 1989. 495 p.)

117. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973.

118. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы // Справочное пособие. К.: Наук. думка. 1986. 544 с.

119. Milovanovic G.V., Dordevic D.R. Numerical Methods in Computational Engineering // Nis: Grafilm Petkoyic. 2007. 188 p. ISBN 978 86-80295-81-7

120. Bose S.K. Numerical Methods of Mathematics Implemented in Fortran // Singapore: Springer. 2019. 484 p. ISBN 978-981-13-7113-4. ISBN 978-981-13-7114-1 (eBook). DOI 10.1007/978-981-13-7114-1.

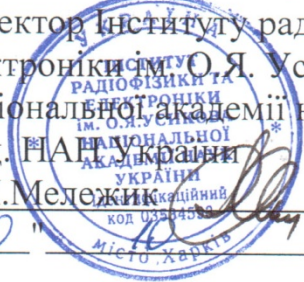
## ДОДАТОК А.

Акт використання і впровадження результатів дисертаційних досліджень

## ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова  
Національної академії наук України  
акад. НАН України  
П.М. Мележик

" 20 " \_\_\_\_\_ 2020 р.



### АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи  
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук  
Яцика Миколи Васильовича

Комісія у складі: зав. відділу теорії дифракції та дифракційної електроніки к.ф.-м.н., с.н.с Поєдинчук О.Є., учений секретар, зав. аспірантурою к.ф.-м.н. Почанія І.Є. підтверджує, що практичне значення результатів дисертаційної роботи Яцика Миколи Васильовича «Моделі та обчислювальні методи дослідження нелінійних шарових електродинамічних структур» підтверджується їх впровадженням.

Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та здобуті результати впроваджені:

– у держбюджетні науково-дослідні роботи:

- «Генерація, посилення, детектування та розповсюдження терагерцового випромінювання: електродинамічне моделювання та експеримент» (шифр «Старт-4»), номер держреєстрації 0117U004034,
- «Нові теоретичні та експериментальні методи в електродинамічному моделюванні, генерації та випромінюванні електромагнітних хвиль гігагерцового та терагерцового діапазонів частот» (шифр «Старт-5») номер держреєстрації 0120U100980,

що виконувалися в рамках тематичних планів науково-дослідних робіт у відділі теорії дифракції та дифракційної електроніки ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАН України;

– в навчальному процесі при підготовці аспірантів, що навчаються за дисципліною «Вибрані питання сучасної теоретичної радіофізики» в ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАН України.

Завідувач відділу,  
к.ф.-м.н.

  
Поєдинчук А.Ю.

Учений секретар Інституту  
зав. аспірантурою, к.ф.-м.н.

  
Почанія І.Є.

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02



Л.В. Колесник

## ДОДАТОК Б.

## Список власних публікацій

1. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // In: Eds. L. Beilina and Y.V. Shestopalov, Inverse Problems and Large-Scale Computations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 52. Switzerland: Springer International Publishing. 2013. Chapter 4. P. 41-56. (Web of Science, SciVerse Scopus).

2. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Type-Conversion of Oscillations at the Excitation of Nonlinear Layered Media // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2015. No.27. P. 13-21.

3. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Об одном подходе к анализу резонансного рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми и периодическими структурами // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 1 (23). С. 106-117.

4. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Processes of Resonant Scattering and Generation of Waves by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2017. Issue 33. P. 7-18.

5. Ангерман Л., Яцик В.В., Яцик Н.В. Методы анализа процессов рассеяния и генерации волн нелинейными слоистыми средами // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 46-55.

6. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Conversion of Excitation Energy into Generated Energy at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Advanced Electromagnetics. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 66-74. (Web of Science, SciVerse Scopus).

7. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Energy characteristics of a nonlinear layer at resonant frequencies of wave scattering and generation // Open



Phys. 2019. Vol.17. Issue 1. P. 222-232. (Web of Science, SciVerse Scopus).

8. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Analyses of Process of Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Layered Structure // Proceedings of the 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'2010). Sevastopol, Ukraine, September 6-10, 2010. P. 68-70. (Web of Science, SciVerse Scopus).

9. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation and Resonance Scattering of Waves on Cubically Polarisable Nonlinear Dielectric Layer // Proceedings of the 15-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010). Tbilisi, Georgia, September 27-30, 2010. P. 127-131. (Web of Science, SciVerse Scopus).

10. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Preset field approximation and self-consistent analysis of the scattering and generation of oscillations by a layered structure // Abstract of the Workshop on Large-Scale Modeling. Organized by Karlstad University and supported by Swedish Institute. Selma Spa, Sunne, Sweden, May 1-6, 2012. P. 20-21.

11. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Modeling and analysis of resonance scattering and generation of waves on cubically polarisable nonlinear layered structures // Abstract of the International Conference "Days on Diffraction 2012" (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 18-19.

12. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Weak fields at multiple frequencies and effects of scattering and generation of waves by nonlinear layered media // Abstract of the International Conference "Days on Diffraction 2012" (DD-2012). Saint Petersburg, Russia, May 28 - June 1, 2012. P. 19-20.

13. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Nonlinear Layered Structure and the Eigen Oscillations of the Linearised Problems near the Frequencies of Scattering and Generation // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 62.

14. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Self-consistent Problem of Scattering and Generation of Oscillations by a Nonlinear Layer Taking into Account

the Influence of Weak Fields at Multiple Frequencies // Abstract of the Progress in Electromagnetics Research Symposium 2012 (PIERS 2012). Moscow, Russia, August 19-23, 2012. P. 706.

15. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Scattering and generation of waves by cubically polarisable layered media under the influence of weak fields // Proceedings of the 6-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2012). Sevastopol, Ukraine, September 17-21, 2012. P. 235-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

16. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A Boundary-Value Problem of Resonant Scattering and Generation of Waves by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 7-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2014). Kharkiv, Ukraine, September 15-19, 2014. P. 92-95. (Web of Science, SciVerse Scopus).

17. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Multifunctional Nonlinear Layered Media by Resonant Scattering and Generation of Waves // Proceedings of the 19-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2014). Tbilisi, Georgia, September 22-25, 2014. P. 45-47. (Web of Science, SciVerse Scopus).

18. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Analysis of the generation properties of nonlinear layered media // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 19-20.

19. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Investigation of nonlinear cubically polarizable layered media with a controllable permittivity // Abstract of the International Conference “Days on Diffraction 2015” (DD-2015). Saint Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 20-21.

20. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of generated oscillations by a decanalizing nonlinear layer media // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPh-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015.

P. 20-23.

21. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The type-conversion of scattered oscillations at the two-sided excitation of nonlinear layered structures // Proceedings of the XVII International Symposium “Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics” (DSMMPh-2015). Sumy, 8-13 June, 2015. Kharkiv-Sumy, Ukraine. 2015. P. 24-27.

22. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Type-Conversion of Oscillations by Nonlinear Layered Media // Proceedings of the 20-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2015). Lviv, Ukraine, 21-24 September, 2015. P. 29-32. (Web of Science, SciVerse Scopus).

23. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. A mathematical model for resonance scattering and generation of oscillations by nonlinear layered or grating-like media // Abstract of the International Conference «Days on Diffraction 2016» (DD-2016). Saint Petersburg, Russia, 27 June - 1 July, 2016. P. 22.

24. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant scattering and third-harmonic generation by cubically polarizable grating structures // Proceedings of the 9-th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW-2016). Kharkiv, Ukraine, 21-24 June, 2016. F-23. P. 1-4. (SciVerse Scopus).

25. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Resonant Scattering and Generation of Oscillations for Nonlinear Layered and Grating-Like Media // Proceedings of the 8-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2016). Odessa, Ukraine, 5-11 September, 2016. P. 105-108. (Web of Science, SciVerse Scopus).

26. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Transparent Cubically Polarizable Media with Layered or Periodic Structures // Proceedings of the 21-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). Tbilisi, Georgia, 26-29 September, 2016. P. 13-16. (Web of Science, SciVerse Scopus).

27. Удовенко С.Г., Яцик Н.В. Компьютерное моделирование нелинейных структур рассеивания и генерации колебаний // Матеріали 4-ї Міжн. науково-

технічної конференції «Проблеми інформатизації». Черкаси-Баку-БельскоБяла-Полтава-2016. Україна, Черкаси, листопад 3-4, 2016. С. 37.

28. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generation Properties of Nonlinear Layered Objects and Eigen-Modes of the Linearized Problems // Proceedings of 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2017). Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Kyiv, Ukraine, 29 May - 2 June, 2017. P. 221-224. (Web of Science, SciVerse Scopus).

29. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. The Dynamics of Resonant Scattering and Wave Generation by a Three-Layer Dielectric with a Nonlinear Medium // Proceedings of the XVIII-th International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics» (DSMMPH-2017). Kharkiv, Ukraine, 26-28 June, 2017. P. 10-13.

30. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Methods for the Analysis of Wave Scattering and Generation by Layered and Periodic Structures // Proceedings of the XXII-nd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2017). Dnipro, Ukraine, 25-28 September, 2017. P. 93-96. (Web of Science, SciVerse Scopus).

31. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Computation of Excitation Frequencies for Nonlinear Wave Scattering and Generation Processes // Proceedings of the 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS-2018). Odessa, Ukraine, 4-7 September, 2018. P. 234-237. (Web of Science, SciVerse Scopus).

32. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Numerical Specifics in Nonlinear Layer Computation Near Eigen Frequencies of Scattering and Generation // Proceedings of the XXIII-rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018). Tbilisi, Georgia, 24-27 September, 2018. P. 47-50. (Web of Science, SciVerse Scopus).

33. Angermann L., Yatsyk V.V., Yatsyk M.V. Generating Properties of Waves at the Resonant Frequencies of a Transparent Nonlinear Layer // Proceedings of 2019 IEEE 2-nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (IEEE UKRCON-2019). Lviv, Ukraine, 2-6 July, 2019. P. 153-156. (Web of Science, SciVerse Scopus).