

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГНАТЮК МАКСИМ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 537.874

ДИСЕРТАЦІЯ

РОЗВИТОК МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧАСТКОВИХ ОБЛАСТЕЙ,
ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ХВИЛЕВОДНИХ ЗАДАЧ
ДИФРАКЦІЇ

01.04.03 — радіофізика
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ М. О. Гнатюк

Науковий керівник:

Морозов Валентин Михайлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Дніпро – 2021

АНОТАЦІЯ

Гнатюк М. О. Розвиток методу інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, для розв'язання хвилеводних задач дифракції. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 «Радіофізика». — Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, Міністерство освіти і науки України; Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України; Дніпро, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розвитку ітераційного методу Шварца та методу часткових областей, що перетинаються (МЧОП), для розв'язку задач дифракції електромагнітних хвиль на пласкошаруватих діелектричних та ступінчастих неоднорідностях у хвилеводних лініях передачі. У даній роботі використовується поширений метод розв'язування системи рівнянь Максвелла, який полягає у зведенні її до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду за допомогою функцій Гріна, яке далі розв'язується з використанням проєкційних та ітераційних методів. Для отримання остаточного інтегрального рівняння або їх системи застосовується ітераційний метод Шварца.

У першому розділі дисертації, як розвиток методу Шварца, побудований обчислювальний алгоритм розв'язку двовимірної хвилеводної задачі дифракції на прикладі задачі про випромінювання електромагнітної хвилі з нескінченної лінійної хвилеводної фазованої антенної решітки (ФАР), що сканує в H -площині. Запропоновано підхід, що полягає у представленні вкладених циклів підсумовування в виразах для коефіцієнта відбиття матричними арифметичними операціями. Для визначення коефіцієнта відбиття падаючої хвилі побудовано ітераційний процес довільного порядку у вигляді матричного рівняння. Такий підхід дозволяє скоротити час рахунку і спрощує побудову алгоритму чисельного розрахунку. Проведено дослідження збіжності та визначено межі застосування розробленого алгоритму Шварца для розглянутої задачі.

Також для цієї задачі побудовано алгоритм методу часткових областей, що перетинаються, з використанням представлення операцій підсумовування у вигляді добутку матриць. Проведено порівняння збіжності результатів для методу часткових областей, що перетинаються, і методу Шварца для обраних параметрів решітки і кута сканування в залежності від числа врахованих типів хвиль. Порівняння результатів, отриманих за допомогою представлених методів, з уже відомими результатами, отриманими іншими методами, підтвердило правильність розроблених алгоритмів. При цьому, використання матричних операцій дозволило збільшити обчислювальну швидкість існуючих методів Шварца і часткових областей, що перетинаються, а також спростило отримання остаточного виразу для визначення коефіцієнта відбиття.

У другому розділі запропоновано метод «оптимальної ітерації», що дозволяє поліпшити збіжність методу Шварца для випадків, коли існуючий метод простої ітерації не дозволяє отримати збіжного розв'язання. Досліджено чисельну збіжність методу оптимальної ітерації і проведено порівняння отриманих результатів з відомими. Показано, що застосування запропонованого методу дозволяє отримати збіжний ітераційний процес для задач, коли існуючий алгоритм Шварца становиться розбіжним, при цьому складність побудови алгоритму чисельного розрахунку для розробленого методу підвищується незначно. З використанням запропонованого методу оптимальної ітерації розглянуто задачі дифракції електромагнітних хвиль на нескінченних ФАР з пласкопаралельних хвилеводів із їх суцільним діелектричним заповненням, а також діелектричними вставками і покриттям хвилеводів решітки. На прикладі розглянутих задач була запропонована методика побудови функції Гріна часткових областей при наявності такого типу неоднорідностей. Представлено чисельні результати розрахунку амплітуди і фази коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в одиничній комірці нескінченної ФАР за допомогою методу оптимальної ітерації для випадків наявності суцільного і шаруватого діелектричного заповнення і покриття хвилеводів решітки.

У третьому розділі вперше методом Шварца розв'язана тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на співвісному з'єднанні двох прямокутних хвилеводів з різними поперечними розмірами. Розроблено методику побудови системи інтегральних рівнянь шуканих полів для методу Шварца на основі виділення часткових областей, що перетинаються. Запропоновано підхід до побудови тензорних функцій Гріна поставленої задачі на основі використання функцій потенційного типу. Також запропонований алгоритм зведення вихідної системи інтегральних рівнянь до матричного рівняння, яке розв'язується методом послідовних наближень. Розглянуто особливості побудови матриць підсумкового рівняння. Досліджено чисельну збіжність отриманого розв'язання в залежності від числа врахованих типів хвиль. Встановлено оптимальне співвідношення числа врахованих типів хвиль в часткових областях, при якому досягається прийнятна точність з мінімальним часом розрахунків.

У четвертому розділі запропоновано узагальнений підхід в межах методу часткових областей, що перетинаються, і методу Шварца для розв'язку задач дифракції електромагнітної хвилі на неоднорідностях, що взаємодіють по вищих типах хвиль. У таких задачах вихідна система інтегральних представлень полів часткових областей не може бути зведена до одного підсумкового інтегрального рівняння. У запропонованому узагальненому підході поле кожної часткової області представляються у вигляді розкладення у ряд по ортогональній системі власних функцій відповідної часткової області з невідомими коефіцієнтами розкладення. Система інтегральних представлень полів часткових областей зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладення. Розв'язування цієї системи рівнянь дозволяє знайти коефіцієнти розкладення для кожної часткової області.

На основі запропонованого підходу з використанням методу оптимальної ітерації і методу часткових областей, що перетинаються, розв'язано задачу дифракції електромагнітної хвилі на нескінченній ФАР з пласкопаралельних хвилеводів зі ступінчастими вирізами в стінках хвилеводів. Запропоновано оптимальні розміри узгоджувальної неоднорідності, яка дозволяє отримати

найбільш рівномірну залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування.

Вперше методом часткових областей, що перетинаються, з використанням запропонованого підходу розв'язана тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на співвісному каскадному з'єднанні трьох прямокутних хвилеводів з різним поперечним перерізом. Досліджено вплив поздовжніх розмірів узгоджувальної області на частотну залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі типу H_{10} в першому хвилеводі. Показано, що підбір довжини узгоджувального хвилеводу дозволяє знизити величину коефіцієнта відбиття і отримати як широкосмугове, так і вузькосмугове узгодження. Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з результатами, отриманими за допомогою пакета програм HFSS. Отримані результати дозволяють стверджувати, що розроблені алгоритми є ефективними для розв'язання таких хвилеводних задач дифракції, в яких можна виділити основну область поширення електромагнітної хвилі і декілька підобластей, які представляють собою відхилення від регулярності (хвилеводні трансформатори, фільтри, тощо). При цьому, зміна геометричних розмірів досліджуваної структури не призводить до перебудови алгоритму, що може надавати певні переваги при розв'язанні задач оптимізації хвилеводних пристроїв. Також, запропонований узагальнений підхід дозволяє значно скоротити обсяг аналітичних перетворень необхідних для отримання чисельного розв'язання у порівнянні з існуючими алгоритмами методу Шварца та МЧОП.

Матеріали дисертації опубліковані в 15 наукових роботах, серед яких 5 статей у спеціалізованих наукових журналах (з них 2 статті видано в зарубіжних наукових виданнях, що індексуються у Scopus), 10 тез доповідей на конференціях (з них дві індексуються у Scopus).

Ключові слова: інтегральні рівняння Фредгольма, функція Гріна, метод Шварца, прямокутний хвилевод, хвилеводна антенна решітка.

ABSTRACT

M. A. Gnatyuk. The development of the integral equation method of partial overlapping domains for solving waveguide diffraction problems. — The qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences on the specialty 01.04.03 "Radiophysics". – Dnipro National University named after O. Gonchar, Ministry of Education and Science of Ukraine; Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine; Dnipro, 2021.

The thesis is devoted to the development of the alternating Schwarz method and the method of partial overlapping subdomains for the solution of electromagnetic wave diffraction problems on plane-layered dielectric and step discontinuities in rectangular waveguides.

The mathematical modeling of electromagnetic processes leads to solving the system of Maxwell equations, which is a system of first-order partial differential equations for electric and magnetic field vectors. This thesis uses one of the most common methods for solving this system. Then, using the Green's functions, the original problem is reduced to integral equation, which can be solved by using the iterative method or the Galerkin's method. The Schwartz method algorithm is used to compose the final integral equation or their system.

The first chapter describes an original algorithm for solving a two-dimensional diffraction problem that was developed using the example of the electromagnetic wave diffraction on an infinite linear waveguide phased array antenna, which scans in the H -plane. Taking into account that the waveguide walls are relatively thin, one can see that the transverse size of the "Floquet channel" differs little from the transverse size of the waveguide. Therefore, the function of the incident wave without the diffraction on the waveguide aperture was chosen as the initial approximation. A general expression for the reflection coefficient of the incident wave in the iteration of an arbitrary order is represented in the form of a matrix equation. An algorithm is proposed for converting nested summation cycles in expressions for the reflection

coefficient into arithmetic matrix operations. This approach allows reducing the counting time and simplifies the developing of a numerical calculation algorithm. A study of convergence has been performed and the limits of applicability of the developed Schwarz algorithm for the considered problem have been determined.

The method of partial overlapping domains algorithm is developed for the considered problem, using the representation of summation operations in the form of a matrix product. A comparison of the results of convergence for both methods was performed. The results obtained using the presented methods were compared with the already known results for the considered problem.

The second chapter describes an optimal iteration algorithm, which allows improving the convergence of the Schwartz method for cases when the simple iteration method gives incorrect solution. On the basis of the proposed algorithm, the problem of electromagnetic wave diffraction on a parallel-plate waveguide phased array antenna is considered. The numerical convergence of the optimal iteration method is investigated and obtained results are compared with known ones.

Problems of electromagnetic wave diffraction on an infinite parallel-plate phased array antenna are considered for several cases of waveguides filled with homogenous dielectric media, covered with layers and having a presence of dielectric inserts in their apertures. Using the examples of the considered problems, an approach was proposed for obtaining Green's functions for partial domains with such types of inhomogeneities.

Numerical results of calculating the amplitude and phase of the reflection coefficient of the incident wave in a single cell of an infinite PAA using the optimal iteration algorithm are presented for the cases of continuous and layered dielectric filling and covering of the antenna waveguides.

The third chapter is devoted to solving a vector three-dimensional problem. An approach for obtaining a system of integral equations of electric field vectors for the Schwartz method was developed. As an example the problem of electromagnetic wave diffraction on a coaxial junction of two rectangular waveguides is considered.

An approach for obtaining tensor Green's functions of the considered problem using potential type functions is proposed. Also, an algorithm that allows reducing the original system of integral equations to a matrix equation, which is solved by iterative method, is proposed.

The three-dimensional problem of electromagnetic wave diffraction on a coaxial junction of two rectangular waveguides with different cross section was solved by the Schwarz method. The numerical convergence of the obtained solution is investigated depending on the number waveguide modes taken into account. The optimal ratio of the number of considered wave types in partial regions is established, at which an acceptable accuracy with minimum counting time is achieved.

The fourth chapter proposes a generalized approach within the method of partial overlapping domains and the Schwarz method for solving problems of electromagnetic wave diffraction on inhomogeneities, which interact on higher modes. In such problems, the initial system of integral representations of the fields in partial domains cannot be reduced to a single integral equation. In the proposed generalized approach field in each partial domain is represented as a series of orthogonal system of eigenfunctions of the corresponding partial region with unknown expansion coefficients. The system of integral representations for partial domain fields is reduced to a system of linear algebraic equations for the unknown expansion coefficients. The solution of this system of equations allows finding the expansion coefficients for fields in each partial domain. The generalized approach is able to reduce significantly the amount of analytical transformations that are necessary to obtain a numerical solution.

Based on the generalized approach, with use of the method of optimal iteration and the method of partial overlapping domains, the electromagnetic wave diffraction problem on an infinite parallel-plate waveguide PAA with matching steps in apertures was solved. The optimal dimensions of the matching steps are proposed, which allows obtaining a uniform dependence of the reflection coefficient magnitude on the value of scan angle.

The three-dimensional problem of electromagnetic wave diffraction on a cascaded junction of three rectangular waveguides with different cross sections was solved by the method of partial intersecting regions using the proposed generalized approach. The numerical convergence of the obtained solution is investigated depending on the number of wave modes taken into account. The influence of the longitudinal dimensions of the matching region on the frequency dependence of the reflection coefficient magnitude of the H_{10} wave in the first waveguide is investigated. It is shown that the selection of the length of the matching waveguide allows reducing the value of the reflection coefficient and obtaining both broadband and narrowband matching. The correctness of the obtained results is confirmed by comparison with the results obtained using the HFSS software package.

The thesis results were published in 15 scientific papers, among which 5 articles are published in specialized scientific journals (2 of them were published in foreign scientific journals and are indexed in Scopus), 10 conference papers (two of them are indexed in Scopus).

Keywords: Fredholm integral equations, Green functions, Schwartz method, rectangular waveguide, waveguide antenna array.

Список власних публікацій здобувача:

1. M. A. Gnatyuk, V. M. Morozov and A. M. Sjanov, “A Schwarz algorithm for three-dimensional diffraction problems” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, Volume 74, Issue 1, pp. 1-8, 2015. (Scopus).
2. Morozov V. M., Gnatyuk M. A. Phased antenna array analysis with Schwartz alternating method. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка»*. Дніпропетровськ, 2015. Том 23. Вип. 22. С. 132 – 141.
3. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “The Schwarz method application to the calculation of waveguide phased arrays in the presence of dielectric insertions and coating” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)* Volume 77, Issue 1, pp. 1-11, 2018. (Scopus).

4. Gnatyuk M. A., Morozov V. M. An integral equation technique for the analysis of phased array antenna with matching step discontinuities. *Journal of Physics And Electronics*. Dnipro, Vol. 26(2). 2018 p. 101–106.
5. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Марченко С. В. Дифракция электромагнитной волны на каскадном соединении прямоугольных волноводов. *Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника*. Харьков, Украина, 2019. Вып.196. С. 130-137.
6. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Стык прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. *Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернівці, 24–26 жовтня 2013 р.)*. Чернівці, 2013. С. 101.
7. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Решение дифракционной задачи методом Шварца: метод простой и оптимальной итерации. *Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи: Матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Київ, 10 – 16 березня 2014)*. Київ, 2014. С. 123–125.
8. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет методом Шварца антенной решетки из волноводов с диэлектрическим заполнением. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті: Матеріали 19-го міжнародного молодіжного форуму*. (м. Харків, 20 – 22 квітня 2015). Харків, 2015. С. 7–8.
9. Гнатюк М. А., Марченко С. В., Морозов В. М., Сьянов А. М. Применение метода интегрального уравнения к решению дифракционных задач. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології: зб. доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених*. (м. Красноармійськ, 16-17 листопада 2015). Красноармійськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2015. С. 53–55.
10. M. A. Gnatyuk, and V. M. Morozov, “On the Schwarz alternating method for solving electromagnetic problems,” In Proc. XXth IEEE International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), Sep. 21-24, 2015, pp. 132-135. (Scopus).

11. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Анализ фазированных антенных решеток с плоскостойким диэлектрическим заполнением. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології*: зб. тез доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених (м. Покровськ, 29-30 листопада 2016 р.). Покровськ, 2016. С. 34–36.
12. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет альтернирующим методом Шварца антенной решетки при наличии диэлектрических вставок и покрытия. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті*: Матеріали 21-го міжнародного молодіжного форуму. (м. Харків, 25 – 27 квітня 2017), Харків, 2017, с. 5-6.
13. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Электродинамический алгоритм расчета фазированной антенной решетки на основе альтернирующего метода Шварца. *Проблеми навігації і управління рухом*: Тези доповідей всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів (м. Київ, 22–24 листопада 2017 р.). Київ, 2017. С. 48.
14. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Решение задач дифракции методом интегральных уравнений частичных пересекающихся областей. *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті*: Зб. матеріалів 22-го міжнародного молодіжного форуму. форуму. Т.3. (м. Харків, 17-19 квітня 2018). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 5–6.
15. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “An Integral-Equation Analysis of Waveguide Step Discontinuities,” In Proc. 17th IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET), Jul. 3-6, 2018, pp. 209 – 212. (Scopus).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	14
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ	
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ В ЗАКРИТИХ ХВИЛЕВОДАХ І	
ХВИЛЕВОДНИХ СИСТЕМАХ.....	
1.1 Огляд сучасного стану розвитку методів обчислювальної електродинаміки	21
1.2. Інтегральна теорема векторної теорії дифракції	29
1.3 Альтернуючий метод Шварца	33
1.4 Електродинамічний аналіз лінійної хвилеводної ФАР методом Шварца .	36
1.5 Електродинамічний аналіз лінійної хвилеводної ФАР методом часткових областей, що перетинаються	42
1.6 Чисельні результати.....	44
Висновки по розділу 1	49
РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДО	
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ХВИЛЕВОДНИХ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ	
2.1 Електродинамічний алгоритм методу оптимальної ітерації.....	51
2.2 Електродинамічні алгоритми методів простої і оптимальної ітерації розв'язування задачі дифракції на нескінченній лінійній ФАР з хвилеводів, заповнених діелектриком.....	58
2.3 Електродинамічні алгоритми методів простої і оптимальної ітерації розв'язування задачі дифракції на нескінченній лінійній ФАР при наявності діелектричного покриття і вставок у хвилеводах.....	65
2.3.1 Випадок наявності одношарової діелектричної вставки.....	65
2.3.2 Випадок наявності одношарового діелектричного покриття хвилеводів	73
2.3.3 Чисельні результати	79
Висновки до розділу 2	85
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ШВАРЦА ДЛЯ	
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ	
	86

3.1 Постановка задачі	87
3.2 Побудова функцій Гріна нескінченного і напівнескінченного прямокутних хвилеводів.....	90
3.3 Розв'язування системи інтегральних рівнянь методом послідовних наближень	94
3.4 Чисельні результати.....	101
Висновки до розділу 3	105
РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА НЕОДНОРІДНОСТЯХ, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ ПО ВИЩИХ ТИПАХ ХВИЛЬ.....	106
4.1 Дифракція електромагнітної хвилі на ФАР з пласкопаралельних хвилеводів зі східчастими узгоджувачами.....	106
4.2 Чисельні результати.....	112
4.3 Дифракція електромагнітної хвилі на каскадному з'єднанні прямокутних хвилеводів.....	116
4.4 Чисельні результати.....	122
Висновки до розділу 4	128
ВИСНОВКИ.....	131
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	134
ДОДАТОК А.....	146

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі дифракції електромагнітної хвилі в хвилеводах є важливими задачами сучасної електродинаміки надвисоких частот (НВЧ). Хвилеводні лінії передачі НВЧ широко використовуються при побудові різноманітних пристроїв [16-23], таких як фільтри, трансформатори, узгоджуючі пристрої, а також можуть бути використані в якості елементарних випромінювачів антенних решіток [24—26]. Розрахунок параметрів таких пристроїв найчастіше достатньо складний і виконується на ЕОМ за допомогою електродинамічних моделей, що значно полегшують розробку розглянутих НВЧ пристроїв на етапі їх проектування.

Методам електродинамічного аналізу хвилеводних пристроїв присвячена велика кількість робіт. В даний час розв'язування електродинамічних задач виконується як з використанням числових сіткових методів, наприклад, методу скінченних елементів і скінченних різниць, так і чисельно-аналітичних методів. Окремо слід відмітити аналітичні методи, зокрема метод факторизації [27, 28], які дозволяють отримати точний розв'язок задачі у аналітичній формі, але область застосування цих методів достатньо обмежена.

Числові сіткові методи посіли важливе місце у області обчислювальної електродинаміки завдяки своїй універсальності і можливості розв'язувати широкий клас задач електродинаміки [29–37]. Проте основним недоліком цих методів є їх високі вимоги до обчислювальних ресурсів, також постає питання вибору методів ефективної дискретизації і обмеження області, у якій відшукується розв'язок [38]. Також, ці методи часто не дозволяють врахувати і дослідити деякі характерні фізичні особливості конкретної задачі. В таких випадках застосування числових сіткових методів може виявитися малоефективним.

Велика увага приділяється розвитку чисельно-аналітичних методів. Такі методи дозволяють забезпечити високу ефективність у певному класі задач електродинаміки [39], оскільки дозволяють на аналітичному етапі

розв'язання задачі виявити і врахувати особливості фізичних процесів, що протікають у досліджуваній структурі.

Одним з ефективних чисельно-аналітичних методів є метод еквівалентного кола, який дозволяє проводити аналіз хвилеводної структури за допомогою методів теорії довгої лінії [40-50]. Цим методом отримують наближений розв'язок з використанням невеликих обчислювальних ресурсів, особливо в одномодовому наближенні, але за рахунок зменшення точності результатів.

Метод часткових областей [39, 51-63] є достатньо потужним і універсальним чисельно-аналітичним методом електродинамічного розрахунку хвилеводних пристроїв. Цей метод дозволяє розв'язувати задачі дифракції на неоднорідностях різних типів, а також застосовується для хвилеводів складного поперечного перерізу. В цілому метод є добре розвиненим і має значний потенціал подальшого розвитку.

Метод інтегрального рівняння є перспективним методом і також широко застосовується для розв'язування задач дифракції електромагнітної хвилі [64–69, 75–83]. Використання функцій Гріна дозволяє в інтегральній формі зв'язати джерела поля із полем дифракції або випромінювання. При цьому знижується розмірність задачі, а розв'язок інтегрального рівняння має більшу точність, ніж розв'язок диференціального або інтегро-диференціального рівнянь [38]. При цьому, методи розв'язання інтегральних рівнянь є добре розвиненими.

Метод Шварца [68–76] з використанням апарату функцій Гріна [75–76] та метод інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються [77–83], поєднують в собі особливості методів часткових областей та інтегрального рівняння. В основі методів лежить розбиття всієї складної області визначення поля на прості області, що перетинаються, для яких функція Гріна відома або може бути легко побудована. Початкова задача формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язується ітераційними або проєкційними методами. Методи є

перспективними з точки зору підвищення універсальності та швидкості обчислень, але їх застосування обмежується складністю побудови алгоритму чисельного розрахунку.

При проектуванні НВЧ пристроїв часто використовують комерційні програми комп'ютерного моделювання [84, 85]. Такі програми дозволяють розв'язувати широкий спектр електродинамічних задач, проте, навіть для сучасних ЕОМ процес моделювання НВЧ пристроїв вимагає значних витрат часу, а зміна геометрії досліджуваної структури призводить до необхідності повторного виконання всіх етапів обчислювальної процедури, що значно ускладнює розв'язок задач оптимізації НВЧ пристроїв, а у відсутності хорошого початкового наближення часто взагалі не дозволяють розв'язати поставлену задачу.

Таким чином, розвиток ефективних чисельно-аналітичних методів розрахунку і оптимізації хвилеводних пристроїв є актуальною науково-прикладною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційні дослідження пов'язані з НДР, яка виконувалася в Дніпровському національному університеті ім. О. Гончара на кафедрі прикладної і комп'ютерної радіофізики: "Взаємодія електромагнітних хвиль мікрохвильового та терагерцового діапазонів з об'єктами складної структури", 2016-2018 рр. (ДР № 0116U003360), в якій здобувач був виконавцем.

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є розвиток ефективних методів чисельного аналізу процесу дифракції електромагнітної хвилі в хвилеводних лініях передачі, а саме альтернуючого методу Шварца і методу інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються. Для досягнення поставленої мети необхідно було розв'язати такі задачі:

1. Провести аналіз обчислювальних алгоритмів на основі методу інтегрального рівняння для розв'язування задач електродинаміки НВЧ.

2. Розвинути альтернуючий метод Шварца для розв'язування задач дифракції електромагнітних хвиль на хвилеводних ФАР при наявності діелектричних вставок і покриття хвилеводів решітки, а також при наявності узгоджувальних неоднорідностей у вигляді ступеневих вирізів в стінках хвилеводів.

3. Розробити методику побудови функцій Гріна при наявності пласкошаруватого діелектричного заповнення для альтернуючого методу Шварца і методу часткових областей, що перетинаються.

4. Розвинути альтернуючий метод Шварца і метод часткових областей, що перетинаються, для розв'язання тривимірних задач дифракції електромагнітних хвиль на неоднорідностях у хвилеводних лініях передачі.

Об'єкт дослідження — процес дифракції електромагнітних хвиль на неоднорідностях у хвилеводних лініях передачі.

Предмет дослідження — електродинамічні моделі дифракції електромагнітних хвиль в хвилеводних лініях передачі.

Методи дослідження: метод інтегрального рівняння, математичний апарат електродинаміки НВЧ, апарат тензорних функцій Гріна, а також методи обчислювальної математики і чисельного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів:

1. Розроблено алгоритм оптимальної ітерації, який на відміну від відомого алгоритму простої ітерації, дозволяє розширити область застосування альтернуючого методу Шварца для зовнішніх і внутрішніх задач електродинаміки НВЧ.

2. Вперше альтернуючим методом Шварца розв'язана тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на з'єднанні двох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу з довільною величиною взаємного зміщення осей хвилеводів. Показано, що запропоновані підходи дозволяють спростити побудову алгоритму чисельного розрахунку, а також збільшити швидкодію методу Шварца.

3. Вперше методом Шварца на основі алгоритму оптимальної ітерації розв'язані двовимірні задачі дифракції на ФАР з плоскопаралельних хвилеводів при наявності апертурних плоскошаруватих діелектричних і ступінчастих неоднорідностей. Показано, що застосування алгоритму оптимальної ітерації дозволяє отримати збіжний ітераційний процес в умовах, коли існуючий алгоритм Шварца стає розбіжним.

4. Запропоновано підхід в межах методу часткових областей, що перетинаються, при якому система інтегральних представлень полів в кожній області безпосередньо зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дозволило значно скоротити кількість аналітичних перетворень необхідних для складання алгоритму чисельного розрахунку. Підхід особливо ефективний для тривимірних задач з неоднорідностями, що взаємодіють по вищим типам хвиль у порівнянні з існуючими алгоритмами методу Шварца та МЧОП.

5. На основі запропонованого підходу вперше методом часткових областей, що перетинаються, розв'язана векторна тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на послідовному з'єднанні трьох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу. Показана можливість ефективного застосування запропонованого підходу для задач оптимізації розмірів хвилеводних пристроїв на прикладі дослідження впливу розмірів секцій хвилеводного трансформатора на частотні характеристики модулю коефіцієнту відбиття.

Практичне значення отриманих результатів.

1. Представлено розвиток альтернуючого методу Шварца і методу часткових областей, що перетинаються, для розв'язування задач дифракції електромагнітної хвилі на нескінченних хвилеводних ФАР з апертурними неоднорідностями, а також в хвилеводних лініях передачі зі ступінчастою зміною поперечних розмірів..

2. Розроблено методику розв'язання електродинамічних задач і створений пакет програм, які дозволяють проводити аналіз хвилеводних

ліній передачі зі ступеневими неоднорідностями, а також плоских хвилеводних ФАР при наявності плоскошаруватого діелектричного заповнення і ступінчастих вирізів в стінках хвилеводів.

3. Розширено область застосування альтернуючого методу Шварца на основі виділення областей, що перетинаються, із застосуванням апарату тензорних функцій Гріна на тривимірні задачі дифракції.

4. Покращена чисельна збіжність альтернуючого методу Шварца на основі виділення областей, що перетинаються, для задач дифракції електромагнітної хвилі за рахунок застосування методу оптимальної ітерації. Отримані чисельні результати підтвердили доцільність використання ступеневих вирізів в стінках хвилеводів ФАР з плоскопаралельних хвилеводів як ефективний метод узгодження.

5. На основі запропонованого підходу в межах методу часткових областей, що перетинаються, досліджено процес дифракції електромагнітної хвилі у хвилеводному трансформаторі. Показано вплив проміжної секції хвилеводу на якість узгодження. Встановлено, що для проміжної секції з довжиною кратною чверті довжини хвилі вдається отримати коефіцієнт відбиття не більше 0.04 в діапазоні частот від 11 до 18 ГГц ($0.6 \dots 0.95 a_1/\lambda$). Для секції з довжиною кратною половині довжини хвилі отриманий коефіцієнт відбиття менш за 0.01 в діапазоні частот від 11.5 до 12.5 ГГц.

Особистий внесок здобувача

Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, особистий внесок автора наступний:

1. Розробка математичної моделі і алгоритму чисельного розрахунку, отримання підсумкового інтегрального рівняння і його розв'язок, отримання чисельних результатів і їх порівняння з відомими даними [1–3, 6].

2. Розробка алгоритму оптимальної ітерації у вигляді матричного рівняння, створення алгоритму розв'язку задач і отримання результатів та їх аналіз [2, 7–12].

3. Розробка методики розв'язання задачі, створення алгоритму розв'язування, отримання чисельних результатів і їх аналіз [4,5, 13–15].

Апробація результатів дисертації.

Викладені в дисертації результати доповідалися і обговорювалися на конференціях: III Міжнародна науково-практична конференція «Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки» (м. Чернівці, 24–26 жовтня 2013 р.), Міжнародна науково-технічна конференція «Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи» (м. Київ, 10 – 16 березня 2014), 19-й, 21-й та 22-й Міжнародний молодіжний форум Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті (м. Харків, 20 – 22 квітня 2015, 25–27 квітня 2017 р., 17-19 квітня 2018), Міжрегіональна науково-практична конференція молодих вчених, «ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології (м. Красноармійськ, 16-17 листопада 2015 р.), XXth IEEE International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED) 2015 (Львів, 21-24 вересня 2015), IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET) 2018 (Київ, 2-5 липня 2018).

Публікації

Матеріали дисертації опубліковані в 15 наукових роботах, серед яких 5 статей у спеціалізованих наукових журналах [1–5] (з них 2 статті видано в зарубіжних наукових виданнях [1, 3], що індексуються у Scopus), 10 тез доповідей на конференціях [6-15] (з них [10, 15] індексуються у Scopus).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Її загальний об'єм становить 148 сторінок. Дисертація містить 25 рисунків. Список використаних джерел на 12 сторінках містить 105 найменувань.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ В ЗАКРИТИХ ХВИЛЕВОДАХ І ХВИЛЕВОДНИХ СИСТЕМАХ

1.1 Огляд сучасного стану розвитку методів обчислювальної електродинаміки

Задачі дифракції електромагнітних хвиль у хвилеводних лініях передачі представляють значний практичний і теоретичний інтерес [16–26]. Дослідження процесу дифракції електромагнітних хвиль методами математичного моделювання відноситься до крайових задач математичної фізики, оскільки призводить до необхідності розв'язання системи диференціальних рівнянь Максвелла, які задовольняють крайовим умовам на межах областей [86]. Тому важливою задачею є створення ефективних методів електродинамічного моделювання, які дозволяють розраховувати характеристики досліджуваних хвилеводних пристроїв та отримувати адекватний опис фізичних процесів, що протікають в них. Математична модель у таких методах повинна забезпечувати розв'язання задач у строгій електродинамічній постановці, оскільки наближені методи часто не дають повного уявлення про особливості хвилеводних структур.

У сучасній обчислювальній електродинаміці найчастіше математичні методи поділяють на три групи: аналітичні, чисельно-аналітичні та прямі числові.

Строгі аналітичні методи дозволяють отримати розв'язок задачі у вигляді аналітичних виразів, але вони можуть бути застосовані лише до достатньо вузького класу електродинамічних задач. Так, в роботі [27] розвинений аналітичний метод, що дозволяє отримати розв'язання задач дифракції електромагнітних хвиль на відкритих кінцях хвилеводів. Отримано строге розв'язання задач для плаского і круглого хвилеводів. Метод, що застосований в роботі, заснований на зведенні початкової задачі до інтегрального рівняння відносно поверхневої густини струму на стінці

хвилеводу. При цьому, ядро одержуваного інтегрального рівняння залежить від різниці змінних, а метод, яким розв'язуються ці інтегральні рівняння називається методом факторизації або методом Вінера-Хопфа-Фока. Також в роботі [27] на основі методу факторизації і його узагальнень розв'язано задачі з коаксіальними резонаторами, гребінчастими структурами, хвилеводними діафрагмами і напівнескінченими імпедансними структурами. В роботі [28] метод факторизації розглядається на прикладі задач про нескінчену хвилеводну антенну решітку, розгалужений хвилевод та інші. Взагалі, цей метод придатний для розв'язання задач зі структурами, утвореними з'єднанням двох напівнескінчених підобластей, які утворюють область, що є координатною поверхнею у ортогональній системі координат.

В останній час важливе місце зайняли суто числові методи, а саме модифікації сіткових методів: методу скінчених елементів [29–35] та скінчених різниць [36–37]. Ці методи відрізняються високим ступенем універсальності, але, одночасно, основним недоліком є їх високі вимоги до обчислювальних ресурсів [32].

Метод скінчених різниць достатньо широко застосовується для розв'язання задач дифракції у хвилеводах [36-37]. Цей метод дозволяє складати універсальні числові алгоритми для широкого класу задач. Але при його застосуванні виникають певні труднощі. Дискретизація простору в об'ємі повинна бути детальною настільки, щоб поле у сусідніх точках змінювалося незначно, при цьому кількість об'ємних елементів може досягати десятків тисяч [38]. Тому виникає питання обмеження області, у якій шукається розв'язок, а також знаходження оптимального алгоритму дискретизації простору.

Метод скінчених елементів в останні роки отримав широке застосування, оскільки дозволяє розв'язувати задачі дифракції на тілах складної конфігурації [38]. Метод успішно застосовується і для розв'язання хвилеводних задач. Так, у роботах [34], [35] на основі методу скінчених елементів розглядаються тривимірні задачі дифракції електромагнітних

хвиль на з'єднаннях прямокутних хвилеводів. В роботі [34] авторами запропоновано в межах методу використання граничних елементів, які дозволяють розширити застосування методу скінчених елементів на задачі дифракції електромагнітних хвиль на металевих клинах. На основі запропонованого підходу розглянуто задачі дифракції електромагнітної хвилі у хвилеводах при наявності діелектричних і металевих виступів, а також на Γ -подібному з'єднанні прямокутних хвилеводів однакового розміру і співвісному з'єднанні прямокутних хвилеводів з різним поперечним перерізом. Представлено графіки частотних залежностей модулю коефіцієнта відбиття і передачі для кожного типу неоднорідності. В роботі [35] розглянуто різні типи неоднорідностей на стиках прямокутних хвилеводів. У запропонованому авторами підході в якості шуканої функції розглядається вектор електричного поля, оскільки таке формулювання задачі дозволяє зменшити число невідомих при обмеженості області визначення функції металевими стінками хвилеводів. Розглянуто ступінчасті неоднорідності в E - та H -площинах, співвісні і неспіввісні з'єднання прямокутних хвилеводів. Авторами відзначено, що представлений метод дозволяє проводити аналіз неоднорідностей довільної форми.

Метод скінчених елементів має очевидні переваги, однак його застосування також пов'язане з певними труднощами. Найбільш серйозною проблемою є той факт, що для реалізації алгоритмів на основі методу скінчених елементів потрібні великі обсяги обчислень і машинної пам'яті, що особливо помітно при розв'язанні тривимірних задач. У той же час, зміна геометрії досліджуваної структури призводить до необхідності повторювати всі етапи обчислювальної процедури.

І хоча методика застосування прямих числових методів у теперішній час добре розвинена і дозволяє розв'язувати широкий клас електродинамічних задач, проте для деяких випадків ці методи можуть виявитися малоефективними, оскільки не дозволяють врахувати деякі характерні фізичні особливості кожної конкретної задачі на етапі її постановки.

В останній час все більша увага приділяється розвитку чисельно-аналітичних методів. Такі методи дозволяють на початковому аналітичному етапі побудови алгоритму врахувати або виявити деякі характерні особливості досліджуваної структури і забезпечити найбільшу ефективність у певному класі задач електродинаміки [39].

Серед чисельно-аналітичних методів, які у даний час широко застосовуються для розв'язування хвилеводних задач дифракції, можна виділити наступні: метод еквівалентного кола [40-50], метод часткових областей [39, 51–63], метод інтегральних рівнянь [64–69, 75–83].

У методі еквівалентного кола аналіз хвилеводної структури виконують за допомогою методів теорії довгої лінії. Метод дозволяє розв'язувати такі задачі, які можуть бути розв'язані і іншими методами, але отримати наближений розв'язок цим методом часто вдається з використанням значно менших обчислювальних ресурсів, особливо в одномодовому наближенні [38]. У роботах [40–48] представлений строгий метод багатомодового еквівалентного кола (Multimode Equivalent Network), на основі якого виконується аналіз ступінчастих неоднорідностей і стиків прямокутних хвилеводів. В роботі [44] метод багатомодового еквівалентного кола був розвинений для застосування до задач дифракції на з'єднаннях прямокутних хвилеводів довільних конфігурацій. Основною особливістю представленого авторами методу є те, що ядро інтегрального рівняння не залежить від частоти ω , таким чином, розв'язання інтегрального рівняння необхідно виконати тільки один раз для заданої геометрії з'єднання. У даній роботі, для перевірки коректності представленого методу, авторами розв'язана задача дифракції на співвісному стикі двох прямокутних хвилеводів, а також проведено порівняння з відомими результатами. Використовуючи запропонований алгоритм, авторами розроблено хвилеводні фільтри і показані їх частотні характеристики.

В роботах [49, 50] для розрахунку східчастих неоднорідностей в E -площині у прямокутному хвилеводі застосовано метод еквівалентного кола з

урахуванням умови на ребрі. При цьому, вдається значно знизити обчислювальне навантаження і уникнути наявності відносної збіжності. Отримані результати порівнювалися з уже відомими для цієї задачі, що показало їх добру збіжність.

Метод часткових областей (метод зшивання) є добре розвиненим строгим методом розв'язування електродинамічних задач [39, 51–63]. Цей метод використовується для дослідження структур, геометрія яких дозволяє виконати розбиття на дві та більше прості суміжні часткові області. Невідоме поле у кожній такій області представляється у вигляді розкладення по повній системі власних функцій відповідної часткової області з невідомими коефіцієнтами, значення яких визначаються за допомогою граничних умов на спільних границях часткових областей. В роботі [51] за допомогою цього методу розглядається задача розсіювання електромагнітної хвилі на ступеневих неоднорідностях в прямокутних хвилеводах. Для випадку каскадних ступінчастих неоднорідностей авторами застосовується припущення, що типи хвиль, які знаходяться нижче частоти відсічення хвилеводу, загасають досить швидко уздовж осі поширення. Таким чином, враховуються тільки ті типи хвиль, в яких експонентний множник має негативний показник. На основі даного підходу, авторами розроблена конструкція оптимального хвилеводного трансформатора, а також проведено дослідження впливу діафрагм кінцевої товщини на поширення електромагнітних хвиль в прямокутних хвилеводах.

В роботі [59] на основі методу зшивання з використанням узагальненої матриці розсіювання розглядається дифракція електромагнітної хвилі на каскадних ступінчастих неоднорідностях в H -площині в прямокутних хвилеводах. Отримані чисельні результати порівнювалися з відомими результатами і підтвердили коректність використаного підходу.

В роботі [60] метод використовується для проектування рупорної антени, яка формує електромагнітну хвилю з еліптичною поляризацією. Результати розрахунків використані для виготовлення антени запропонованої

конфігурації. Представлено розраховані і виміряні діаграми спрямованості досліджуваної антени, а також частотна залежність КСХН і розподіл поля в апертурі антени.

В роботі [39] розвинений узагальнений метод часткових областей з урахуванням умови на ребрі [61-63] для хвильоводів із складною формою поперечного перерізу. В основі методу лежить зшивання полів часткових областей через додаткові невідомі поля, які вводяться на спільних границях. Можливість врахування особливостей поля на таких границях забезпечує високу збіжність цього методу [39].

Використання апарату функцій Гріна дозволяє звести дифракційну задачу до інтегрального рівняння, яке зв'язує розподіл джерел поля із полем дифракції або випромінювання [38]. При цьому вдається знизити розмірність задачі, оскільки формули Гріна дозволяють перейти від інтегрування об'ємів або поверхонь до інтегрування відповідно поверхонь і контурів.

У роботах [64, 65] за допомогою методів моментів та інтегрального рівняння електричного поля розв'язані задачі дифракції електромагнітної хвилі на співвісному з'єднанні двох прямокутних хвильоводів. Наведено частотні залежності модулів S -параметрів досліджуваного з'єднання в діапазоні від 0,5 до 0,7 a/λ . Отримані результати порівнюються з вже відомими експериментальними і чисельними результатами, отриманими раніше для такої задачі.

В роботі [66] також використовується метод інтегрального рівняння для дослідження процесу дифракції на ємнісних діафрагмах кінцевої товщини в прямокутних хвильоводах. Вихідна тривимірна задача зводиться до двовимірної з використанням функції Гріна пласкопаралельного хвильоводу. Перевірка коректності методу виконувалася шляхом розрахунку декількох структур фільтрів нижніх частот. Порівняння результатів, отриманих запропонованим методом, з результатами, отриманими за допомогою комерційних пакетів програм, показали правильність розглянутого методу.

Багато задач, які розв'язуються методом часткових областей, можуть бути сформульовані з використанням інтегральних рівнянь. В роботі [63] проведено дослідження плоских фазованих антенних решіток з відкритих кінців хвилеводів. Теоретичний аналіз заснований на строгому методі інтегральних рівнянь при розбитті області визначення поля на часткові області: напівнескінченний хвилеводний канал і "канал Флоке". На підставі теореми Флоке була побудована повна ортогональна система функцій для області випромінювання. Отримані інтегральні рівняння Фредгольма першого роду за допомогою простих аналітичних перетворень зведені до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. В роботі широко представлені чисельні результати і порівняння їх з точним розв'язанням для деяких граничних випадків, а також наведено характеристики різних типів решіток з плоскопаралельних, прямокутних і круглих хвилеводів.

В останні часи увага дослідників приділяється ітераційному методу Шварца та методам, побудованим на його основі [68–76]. Метод Шварца заснований на розбитті області визначення поля на часткові області, що можуть перетинатися. Також цей метод може бути сформульований у інтегральних рівняннях. При цьому, розв'язок, отриманий для однієї області, використовується у якості граничних умов для іншої. Існують варіанти методу Шварца, коли часткові області не перетинаються [70]. Застосування цього методу до задач дифракції розглянуто в роботі [68]. Для розв'язування задачі дифракції на з'єднанні хвилеводу з рупором вся область визначення поля розділяється на напівнескінченний хвилевод і область рупора. Використовуючи функції Гріна для кожної з підобластей початкова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма. У роботі відзначається надійність і ефективність запропонованого підходу в порівнянні з іншими методами. В роботі [69] метод Шварца застосовується для розрахунку коефіцієнта відбиття на згині прямокутного хвилеводу, а також для задач визначення частоти відсічення для хвилеводів із складною формою поперечного перерізу. Роботи [70–74] присвячено розвитку методу

Шварца для розв'язування задач математичної фізики. Запропоновані ефективні методи підвищення збіжності ітераційного процесу та розширено клас задач, що можуть бути розв'язані методом Шварца. В роботах [71, 73, 74] розглядаються переваги, які виникають при розбитті області визначення функції на підобласті, які перетинаються між собою. Також, в роботі [74] наголошується, що метод Шварца та його модифікації є перспективними з точки зору паралельних обчислень. Для розв'язання хвилеводних задач дифракції метод Шварца застосовується в роботах [75, 76] з використанням апарату функцій Гріна. Проте, незважаючи на приведені вище переваги цього методу, застосування його до хвилеводних задач все ще є обмеженим.

Метод інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, базується на методі Шварца, але інтегральні рівняння розв'язуються проєкційними, а не ітераційними методами. Розв'язанню задач дифракції в хвилеводах і хвилеводних антенних решітках за допомогою цього методу присвячено роботи [77–83]. В основі методу лежить принцип, аналогічний методу Шварца, а саме розбиття всієї складної області визначення поля на прості області, що перетинаються, для яких можна побудувати функції Гріна. Вихідна задача формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, але його розв'язання виконується проєкційними, а не ітераційними методами. Виділення часткових областей, які перетинаються між собою, має деякі переваги, а саме: інтегральні рівняння є рівняннями Фредгольма другого роду, а не першого; функції Гріна інтегрального рівняння не мають особливостей, оскільки у такій постановці задачі точки джерел і точки спостережень для них не співпадають; при виділенні областей, об'єми яких перекриваються (перетинаються) метод враховує умови на ребрах [38, с. 250]. Також метод може мати переваги для задач, у яких можна виділити основну область поширення електромагнітної хвилі та декілька областей, що представляють собою невеликі відхилення від регулярності. Такі задачі виникають при проектуванні та оптимізації хвилеводних трансформаторів або фільтрів.

До істотних недоліків методу можна віднести складність побудови алгоритму чисельного розрахунку через необхідність проведення великої кількості громіздких аналітичних перетворень, що ускладнює його алгоритмізацію та знижує універсальність при практичному застосуванні, особливо для векторних (тривимірних) задач або задач, у яких необхідно виділити більше двох часткових областей. Все вищезазначене справедливо і для методу Шварца. У той же час, інтенсивний розвиток сучасних апаратних і програмних засобів математичних розрахунків дає можливість зменшити вплив недоліків цього методу і, одночасно, підвищити його універсальність і ефективність.

Таким чином, задача розвитку альтернуючого методу Шварца та методу інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, для розв'язання хвилеводних задач представляється актуальною.

1.2. Інтегральна теорема векторної теорії дифракції

Метод, що використовується у дисертаційній роботі, базується на інтегральній теоремі векторної теорії дифракції. Суть теореми полягає в зведенні вихідної системи рівнянь Максвелла, які представляють собою диференціальні рівняння першого порядку, до диференціальних рівнянь другого порядку, які, в свою чергу, за допомогою функцій Гріна приводиться до інтегрального рівняння. У роботах [87–89] вид інтегральних виразів і процедура їх отримання дещо відрізняються в залежності від постановки задачі та інших припущень, тому наведемо послідовність отримання інтегральних виразів у тому вигляді, в якому вони будуть використовуватися в цій роботі.

Запишемо перші два рівняння Максвелла в диференціальній формі для випадку гармонійної залежності від часу виду ($e^{j\omega t}$) амплітуд напруженостей магнітного і електричного поля:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = j\omega\epsilon\vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}_{cm}(\vec{r}) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) \quad (1.2)$$

Де $\vec{J}_{cm}(\vec{r})$ — сторонні (задані) струми. Застосувавши операцію ротора до лівої і правої частин одного з рівнянь, враховуючи при цьому друге рівняння, отримаємо наступні хвильові рівняння для напруженостей електричного і магнітного полів:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k^2 \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{J}_{cm}(\vec{r}) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - k^2 \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{J}_{cm}(\vec{r}) \quad (1.4)$$

Як відомо з [89, с.710] оскільки шукана функція і її граничні умови представлені векторами, то функція Гріна повинна бути тензорною. Тензорні функції Гріна електричного і магнітного типів [87, 88] повинні задовольняти наступним векторним хвильовим рівнянням:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') - k^2 \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{G}_m(\vec{r}, \vec{r}') - k^2 \vec{G}_m(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla \times \vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.6)$$

Тут \vec{G}_e — тензор Гріна електричного типу, \vec{G}_m — тензор Гріна магнітного типу.

Отримаємо розв'язання рівняння (1.3) в інтегральній формі. Помножимо рівняння (1.3) на \vec{G}_e справа, а рівняння (1.5) на \vec{E} зліва, і віднімемо ліві і праві частини отриманих рівностей одне з одного:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') = \\ = -j\omega\mu\vec{J}_{cm}(\vec{r}) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (1.7)$$

Скористаємося наступною векторно-тензорною тотожністю [87, с.64]: $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{B} - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ і представимо ліву частину виразу (1.7) у вигляді дивергенції деякого тензора:

$$\nabla \cdot \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') \right] \quad (1.8)$$

Проінтегруємо обидві частини (1.8) за об'ємом і застосуємо послідовно теорему Гаусса і векторно-тензорну тотожність $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{C}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{C}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{C}$:

$$\begin{aligned}
& \oint_S \left[(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS = \\
& = - \iiint_V j\omega\mu \vec{J}_{cm} \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') dV + \iiint_V \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Тут \vec{n} — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S . В (1.9) вважатимемо змінну \vec{r} радіус-вектором точок джерел, а \vec{r}' радіус-вектором точок спостереження. З огляду на, що точки спостереження знаходяться всередині об'єму V охопленого поверхнею S , отримаємо загальну інтегральну теорему векторної теорії дифракції для вектора напруженості електричного поля:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}') &= \iiint_V j\omega\mu \vec{J}_{cm}(\vec{r}) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') dV + \\
&+ \oint_S \left[(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким чином, отримано вираз для визначення вектора напруженості електричного поля в точці спостереження \vec{r}' , при заданому розподілі сторонніх струмів $\vec{J}_{cm}(\vec{r})$ і розподілу $\nabla \times \vec{E}(\vec{r})$ і $\vec{E}(\vec{r})$ на поверхні S , що охоплює об'єм V .

Аналогічно можна отримати формулу для визначення вектора \vec{H} , яка має вигляд:

$$\begin{aligned}
\vec{H}(\vec{r}') &= \iiint_V \left[\nabla \times \vec{J}_{cm}(\vec{r}) \right] \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') dV - \\
&- \oint_S \left[(\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r})) \cdot \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + (\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r})) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS
\end{aligned} \tag{1.11}$$

У розв'язаннях (1.10) і (1.11) не були уточнені поверхні, що обмежують об'єм V . Так, якщо гранична поверхня S складається з деякої випромінюючої апертури S_a , ідеально провідної металевої поверхні S_m і поверхні S_∞ на нескінченності, то на поверхні S_∞ вектори \vec{E} і \vec{H} повинні задовольняти умовам випромінювання, а саме:

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} |R| \left[\nabla \times \vec{E}(\vec{R}) - ik\vec{E}(\vec{R}) \right] = 0 \tag{1.12}$$

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} |R| \left[\nabla \times \vec{H}(\vec{R}) - ik\vec{H}(\vec{R}) \right] = 0 \quad (1.13)$$

Таким же умовам повинні задовольняти тензори \vec{G}_e та \vec{G}_m :

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} |R| \left[\nabla \times \vec{G}_{e,m}(\vec{R}) - ik\vec{G}_{e,m}(\vec{R}) \right] = 0 \quad (1.14)$$

Для випадку ідеально провідної поверхні S_m граничні умови для векторів \vec{E} і \vec{H} приймають вид:

$$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S; \quad (1.15)$$

$$\vec{n} \times \left[\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S; \quad (1.16)$$

Граничні умови для тензорів Гріна:

$$\vec{n} \times \vec{G}_{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S; \quad (1.17)$$

$$\vec{n} \times \left[\nabla \times \vec{G}_{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \right] = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{G}_{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S; \quad (1.18)$$

Тут індекси (1) і (2) позначають рід граничних умов. Граничні умови (1.17) для тензорів Гріна називаються граничними умовами першого роду, а (1.18) – другого роду. Слід врахувати, що тензори Гріна повинні задовольняти тим же граничним умовам, що і шукані з їх допомогою вектори електричного і магнітного полів.

З урахуванням цих граничних умов інтегральні представлення для векторів електричного і магнітного поля приймають вигляд:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \iiint_V j\omega\mu\vec{J}_{cm} \cdot \vec{G}_{e(1)}(\vec{r}, \vec{r}') dV + \iint_{S_r} (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot \nabla \times \vec{G}_{e(1)}(\vec{r}, \vec{r}') dS_r \quad (1.19)$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = \iiint_V \left[\nabla \times \vec{J}_{cm}(\vec{r}) \right] \vec{G}_{e(2)}(\vec{r}, \vec{r}') dV - \iint_{S_r} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r})) \vec{G}_{e(2)}(\vec{r}, \vec{r}') dS_r \quad (1.20)$$

Вирази (1.19) і (1.20) представляють собою інтегральну теорему векторної теорії дифракції відносно векторів \vec{E} і \vec{H} і дозволяють визначити значення векторних функцій в точці спостереження \vec{r}' всередині об'єму V при заданому розподілі сторонніх джерел струму $\vec{J}_{cm}(\vec{r})$ всередині об'єму і розподілі поля на граничній поверхні S .

1.3 Альтернуючий метод Шварца

В дисертаційній роботі використовується варіант методу Шварца, який полягає в зведенні вихідної задачі до системи інтегральних рівнянь Фредгольма і її розв'язання методом послідовних наближень. Приведемо основні формулювання методу Шварца з [90] у тому вигляді, в якому вони будуть використовуватися в подальшій роботі.

Припустимо, що в площині xOy існують області B_1 і B_2 (рис. 1.1), що перетинають одна одну. Спільну частину цих областей позначимо як B' . Будемо вважати відомим розв'язання задачі Діріхле для кожної з областей при будь-яких граничних умовах.

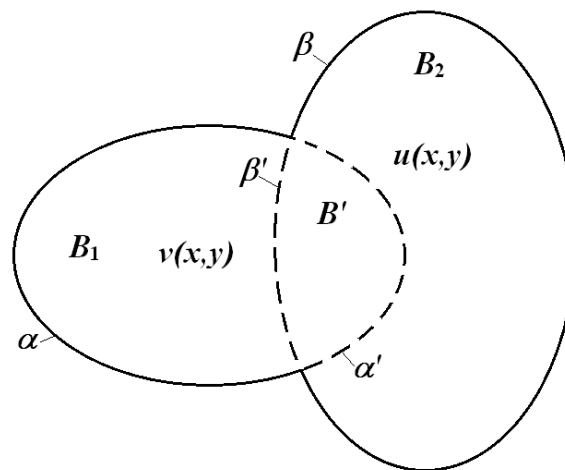


Рисунок 1.1 — Розбиття на області, що перетинаються

Шварцем [91] показано, що метод дозволяє за допомогою відомих розв'язків задачі Діріхле для простих областей, комбінуючи ці області, отримувати розв'язання для областей більш складної форми.

Припустимо, що для областей B_1 і B_2 відомі функції Гріна $G_1(x,y;\xi,\eta)$ і $G_2(x,y;\xi,\eta)$. Крайові умови для цих функцій такі, що вони обертаються в нуль на границях відповідних областей B_1 і B_2 . Тоді, функція $u(x,y)$, яка розв'язує задачу Діріхле в області B , має наступний вид:

$$\begin{cases} u(x, y) = - \int_{L_1} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } B_1, \\ u(x, y) = - \int_{L_2} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } B_2, \end{cases} \quad (1.21)$$

де L_1 та L_2 — контури областей B_1 та B_2 , n — зовнішня нормаль до контурів L_1 та L_2 в точці (ξ, η) .

Розкладемо інтеграли по L_1 і L_2 на суми інтегралів по α , α' і β , β' . Візьмемо до уваги, що крайові значення $u(x, y)$ на α і β відомі і дорівнюють $f(M)$, тоді інтеграли по контурах α і β дадуть відомі функції:

$$F_1(x, y) = - \int_{\alpha} f(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} dS; \quad F_2(x, y) = - \int_{\beta} f(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} dS. \quad (1.22)$$

$F_1(x, y)$ є функція, крайові значення якої на α рівні $f(M)$ і на α' дорівнюють нулю, функція $F_2(x, y)$ приймає на β значення, що дорівнюють $f(M)$, а на β' — нульові значення.

Будемо вважати що в першому рівнянні системи (1.21) точка спостереження $M(x, y)$ лежить на β' , а в другому — на α' . Тоді для невідомих значень $u(x, y)$ на β' і α' отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} u(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\beta'} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } \alpha', \\ u(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\alpha'} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } \beta'. \end{cases} \quad (1.23)$$

Позначимо значення функції $u(x, y)$ на β' через $v(x, y)$. Система (1.23) тоді приймає вигляд:

$$\begin{cases} u(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\beta'} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } \alpha', \\ v(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\alpha'} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS & \text{на } \beta'. \end{cases} \quad (1.24)$$

Задамо для функції u на контурі α' довільні обмежені і кусочно-безперервні значення $u_1 = \varphi(M)$ і підставимо їх замість u в праву частину

другого рівняння (1.24). Отриману функцію на β' приймемо за перше наближення v_1 до функції v :

$$v_1(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\alpha'} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS \quad (1.25)$$

Крайові значення цієї функції:

$$v_1(x, y) = \begin{cases} f(M) & M \in \alpha, \\ \varphi(\xi, \eta) & M \in \alpha'. \end{cases} \quad (1.26)$$

Потім визначаємо її значення на β' , які дають v_1 .

Знайшовши функцію v_1 , підставляємо її в праву частину першого рівняння (1.24), і отриману після підстановки на контурі α' функцію приймаємо за друге наближення u_2 до u :

$$u_2(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\alpha'} v_1(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS. \quad (1.27)$$

Крайові значення цієї функції:

$$u_2(x, y) = \begin{cases} f(M) & M \in \beta, \\ v_1(\xi, \eta) & M \in \beta'. \end{cases} \quad (1.28)$$

Далі визначаємо значення u_2 на α' . Продовжуючи цей процес отримуються послідовні наближення $u_1, v_1, u_2, v_2 \dots$ до u та v .

Для отримання коректного розв'язку задачі немає потреби обчислювати обидві серії послідовних наближень до функцій u та v . Одну з цих функцій можна виключити і обчислювати тільки одну серію послідовних наближень. Виключимо, наприклад, v . Для цього підставимо замість v значення з другого рівняння системи (1.24) в перше. Після підстановки отримаємо рівняння з тільки однією невідомою функцією:

$$u(x, y) = F(x, y) - \int_{\alpha'} u(\xi, \eta) k(x, y; \xi, \eta) dS. \quad (1.29)$$

Тут (x, y) – координати точки спостереження на α' , (ξ, η) – координати точки джерела по кривій інтегрування α' . Відома функція приймає вид:

$$F(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\beta'} F_1(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} dS \quad (1.30)$$

Ядро інтегрального рівняння:

$$k(x, y; \xi, \eta) = \int_{\beta'} \frac{\partial G_2(x, y; \xi_1, \eta_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G_1(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial n} dS_1. \quad (1.31)$$

Рівняння (1.29) розв'язується далі способом послідовних наближень. Після того, як буде знайдено u , функцію v можна відновити, користуючись другим з рівнянь (1.24).

1.4 Електродинамічний аналіз лінійної хвилеводної ФАР методом

Шварца

Модель нескінченної антенної решітки дозволяє значно спростити розв'язання електродинамічної задачі [67, 92], оскільки застосування теореми Флоке дозволяє описати поле в області випромінювання, як періодичну функцію і обмежитися розглядом поля в межах тільки одного періоду антенної решітки, а вихідна задача зводиться до задачі про стик двох хвилеводів: хвилеводу решітки та просторового хвилеводу, або комірки Флоке.

Розглянемо застосування альтернуючого методу Шварца до розв'язування задачі дифракції електромагнітної хвилі на нескінченній фазованій антенній решітці з прямокутних хвилеводів, розміщених у вузлах прямокутної сітки. Формулювання граничної задачі для даної антенної решітки в загальному випадку приводить до векторних інтегральних рівнянь. Однак, як показано в [67] при деяких спеціальних умовах задача зводиться до скалярних одновимірних інтегральних рівнянь.

Припустимо, що існує решітка з хвилеводів, що збуджується хвилями типу H_{10} , джерела яких знаходяться всередині хвилеводів далеко від їх апертур. Падаючі хвилі мають однакові амплітуди, поляризовані по осі Oy і мають фази, які змінюються при переході від хвилеводу до хвилеводу по арифметичній прогресії.

Якщо сканування здійснюється в H -площині і стінки хвилеводів, що перпендикулярні силовим лініям падаючого електричного поля, вважаються нескінченно тонкими, то решітка з прямокутних хвилеводів зводиться до решітки з хвилеводів, утворених паралельними пластинами. Оскільки в решітці з паралельних пластин немає неоднорідності вздовж осі Oy і збуджуюче поле не залежить від цієї координати, то вторинні поля містять тільки хвилі типу TE , які не мають варіацій по координаті y . Кожна з цих хвиль має тільки три складових поля E_y , H_x і H_z . Таким чином, задача стає одновимірною і скалярною.

При виведенні інтегральних рівнянь в якості невідомої функції будемо використовувати E_y компоненту поля, що задовольняє двовимірному рівнянню Гельмгольца: $\Delta E_y(x, z) + k^2 E_y(x, z) = -J(x, z)$, а також граничним умовам для тангенціальних складових вектора електричного поля на металевих стінках і умові випромінювання. Розв'язування цієї задачі методом Шварца полягає в зведенні диференціального рівняння в часткових похідних до системи інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, та її розв'язанні методом послідовних наближень [90].

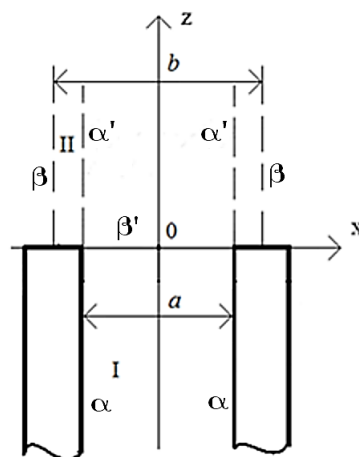


Рисунок 1.2 - Одинична комірка нескінченної фазованої решітки з пласкопаралельних хвилеводів

Розіб'ємо всю область визначення поля в вибраній комірці на дві області, що частково перетинаються (рис. 1.2). Область I ($-a/2 \leq x \leq a/2$) представляє собою пласкопаралельний хвилевод, продовжений в

нескінченність ($-\infty \leq z \leq \infty$). Область II ($-b/2 \leq x \leq b/2, 0 \leq z \leq \infty$) — область випромінювання. В області I при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля H_{10} пласкопаралельного хвилеводу. Припустимо, що нам відомі функції Гріна областей I і II. Тоді, скориставшись другою формулою Гріна, можна скласти систему інтегральних представлень полів для кожної з областей, за аналогією з системою (1.24):

$$E^I(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_0^{\infty} E^I\left(-\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' - \int_0^{\infty} E^I\left(\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz'; \quad (1.32)$$

$$E^{II}(x', z') = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^{II}(x'', 0) \frac{\partial}{\partial z''} G^{II}(x', z'; x'', 0) dx''. \quad (1.33)$$

Тут E^I — шукана функція області I, значення якої шукається на границі β' (площина $z=0, -a/2 \leq x \leq a/2$). Для області I змінні x та z описують координати точок спостереження, а x' та z' — точок джерел поля. Для області II: x' та z' — точки спостереження, x'' та z'' — точки джерел. На частині границі α , що належить площині $z \rightarrow -\infty$ граничні значення її описуються виразом для поля падаючої хвилі H_{10} , а саме:

$$E_{ex}(x, z) = -\int_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}\left[x' + \frac{a}{2}\right]\right) \exp(-j\gamma_1 z') \frac{\partial G_1(x, z; x', z')}{\partial \vec{n}} dS. \quad (1.34)$$

На частині границі α , утвореної стінками хвилеводу, функція E^I приймає граничні значення, що рівні нулю. На границі α' (стінки хвилеводу, які продовжені в нескінченність) $E^I(x', z') = E^{II}(x', z')$. E^{II} — шукана функція області II, яка розраховується на границі α' , з граничними значеннями, що дорівнюють нулю на β та $E^I(x'', z'')$ на β' .

Функція Гріна першої області представлена у «витокоподібній» формі [93]:

$$G^I(x, z; x', z') = \sum_{q=1}^{\infty} \varphi_q(x) \varphi_q(x') \frac{1}{2j\gamma_q} \exp(-j\gamma_q |z - z'|); \quad (1.35)$$

$$\varphi_q(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{q\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right), \gamma_q = -j \sqrt{\left(\frac{q\pi}{a} \right)^2 - k^2}, \quad k = 2\pi. \quad (1.36)$$

Оскільки розглянута решітка і її збудження мають періодичний характер, то функція Гріна другої області представляється у вигляді ряду гармонік Флоке [67]:

$$G^{II}(x', z'; x'', z'') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) \psi_m(x') \frac{1}{j\Gamma_m} \exp(-j\Gamma_m z) \operatorname{sh} j\Gamma_m z'; \quad (1.37)$$

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{b}} \exp\left(j \frac{U_m}{b} x\right), U_m = kb \sin \theta + 2m\pi, \quad (1.38)$$

$$\Gamma_m = -j \sqrt{\left(\frac{2m\pi + kb \sin \theta}{b} \right)^2 - k^2}.$$

Вид виразів для поздовжніх коефіцієнтів поширення Γ_m та γ_q вибирається таким чином, щоб для типів хвиль, що поширюються, вони приймали значення дійсне і позитивне, а для хвиль, що не поширюються — уявне негативне.

Враховуючи введені функції Гріна, а також виконуючи інтегрування в (1.34), вираз для падаючої хвилі можна записати в наступному вигляді:

$$E_{ex}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z). \quad (1.39)$$

Враховуючи граничні значення шуканих функцій, а також те, що в області перетину значення шуканої функції для кожної часткової області рівні, підставимо рівняння (1.33) в (1.31) і отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно поля першої області:

$$E^I(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx''; \quad (1.40)$$

$$K(x, z; x'', 0) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z''} G^{II} \left(-\frac{a}{2}, z'; x'', 0 \right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I \left(x, z; -\frac{a}{2}, z' \right) - \frac{\partial}{\partial z''} G^{II} \left(\frac{a}{2}, z'; x'', 0 \right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I \left(x, z; \frac{a}{2}, z' \right) \right] dz'. \quad (1.41)$$

Виконаємо інтегрування в ядрі інтегрального рівняння і отримаємо наступний його вираз:

$$K(x, z; x'', 0) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \psi_m^*(x'') C_{qm}. \quad (1.42)$$

$$C_{qm} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{-q\pi}{2a\gamma_q(\gamma_q + \Gamma_m)} \left[\exp\left(-j\frac{aU_m}{2b}\right) - \exp\left(j\frac{aU_m}{2b}\right) \cos(q\pi) \right]. \quad (1.43)$$

При взятті невласного інтеграла в (1.41) враховувався принцип граничного поглинання [86].

Приступимо до безпосереднього розв'язування отриманого інтегрального рівняння (1.40) методом послідовних наближень. В роботі [68] показано, що швидкість збіжності методу Шварца залежить від вибору початкового наближення. Врахуємо, що товщина стінок хвилеводу відносно мала в порівнянні з його розмірами, таким чином, «канал Флоке» можна розглядати як невелике відхилення від регулярності пласкопаралельного хвилеводу. Тому в якості нульового наближення доцільно вибрати поле падаючої хвилі виду (1.39), яке представляє собою поле в пласкопаралельному хвилеводі без урахування дифракції на апертурі. Знайдемо вираз для першого наближення:

$$\begin{aligned} E^{I(1)}(x, z) &= E_{ex}(x, z) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_1(x'') \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \psi_m^*(x'') C_{qm} dx'' = \\ &= E^{I(0)}(x, z) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) C_{qm} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_1(x'') \psi_m^*(x'') dx''. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Друге наближення знайдемо, підставивши вже отриманий вираз для поля в першому наближенні (1.44) в інтегральне рівняння (1.40):

$$\begin{aligned}
E^{I(2)}(x, z) &= E_{ex}(x, z) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^{I(1)}(x'', 0) \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \psi_m^*(x'') C_{qm} dx'' = \\
&= E_{ex}(x, z) + \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \varphi_{q_2}(x) \exp(j\gamma_{q_2} z) C_{q_2 m_2} D_{1 m_2} + \\
&+ \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \varphi_{q_2}(x) \exp(j\gamma_{q_2} z) C_{q_2 m_2} D_{q_1 m_2} C_{q_1 m_1} D_{1 m_1}.
\end{aligned}$$

Тут:

$$D_{mq} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_q(x'') \psi_m^*(x'') dx''. \quad (1.45)$$

Аналогічним способом можна отримати вирази для наближень вищих порядків. Для того щоб знайти значення коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в хвилеводі, представимо шукане поле у вигляді суми падаючої і відбитої хвиль:

$$E^I(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + \sum_{q=1}^{\infty} R_q \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \quad (1.46)$$

Тут R_q — невідомі коефіцієнти, які мають фізичний зміст коефіцієнтів відбиття хвиль типу H_{q0} . Підставивши (1.46) в ліві частині виразів для визначення поля в ітераціях, а також скориставшись властивістю ортогональності [94, с.223] функцій φ_q , отримаємо значення коефіцієнта відбиття R_q хвилі H_{q0} в кожній ітерації:

$$\begin{aligned}
R_q^{(1)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{qm} D_{m1} \\
R_{q_2}^{(2)} &= \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_2 m_2} D_{m_2 1} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1} = R_{q_2}^{(1)} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} (C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} \cdot R_{q_1}^{(1)}) \\
R_{q_3}^{(3)} &= \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 1} + \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} C_{q_2 m_2} D_{m_2 1} + \\
&+ \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1} = R_{q_3}^{(1)} + \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} \cdot R_{q_2}^{(2)}
\end{aligned}$$

Продовжуючи послідовно ітераційну процедуру можна отримати значення коефіцієнта відбиття q -хвилі в ітерації i -порядку. При цьому в кожній ітерації необхідно обчислювати суми як за індексами q так і за індексами m . Покажемо, що користуючись властивостями добутку матриць можна скоротити обсяг обчислень і збільшити швидкодію алгоритму. Вираз для коефіцієнта відбиття q -хвилі в ітерації i -порядку можна представити у вигляді:

$$R_q^{(i)} = R_q^{(1)} + \sum_{q_0=1}^Q \left[\left(\sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0} \right) \cdot R_{q_0}^{(i-1)} \right] \quad (1.47)$$

Тут M і Q максимальне число врахованих типів хвиль в областях I і II. Ввівши деяку матрицю \mathbf{A} розміром $Q \times Q$, елементи якої визначаються як $A_{qq_0} = \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0}$ і, представивши R_q у вигляді матриці-стовпця \mathbf{R} , вираз (1.47) можна записати у вигляді наступного матричного рівняння:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (1.48)$$

Це рівняння визначає значення матриці-стовпця \mathbf{R} в i -наближенні при його відомому наближенні $(i-1)$ порядку. Розв'язуючи дане рівняння методом простої ітерації (послідовних наближень) можна відшукати величину коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в ітерації i -порядку взявши в якості результату перший елемент матриці-стовпця \mathbf{R} . При цьому підсумовування за індексами m виконується тільки один раз при обчисленні елементів матриці \mathbf{A} перед початком ітераційної процедури, що дозволяє значно скоротити час, що витрачається на обчислення наступних ітерацій. Слід зазначити, що отримане внаслідок застосування розглянутого алгоритму розв'язання є наближенням.

1.5 Електродинамічний аналіз лінійної хвилеводної ФАР методом часткових областей, що перетинаються

Ядро (1.41) інтегрального рівняння (1.40) для даної задачі при врахуванні обмеженого числа типів хвиль в кожній області є кінцевою сумою

добутків лінійно незалежних функцій. Таким чином, ядро інтегрального рівняння є виродженим, а саме рівняння допускає отримання строгого розв'язання шляхом зведення його до кінцевої системи лінійних алгебраїчних рівнянь [90].

Розв'язання відносно невідомої функції $E^I(x, z)$ в рівнянні (1.40) будемо знаходити у вигляді (1.46). Тут, як і раніше, невідомі коефіцієнти R_q мають фізичний зміст коефіцієнтів відбиття хвилі типу H_{q0} . Підставивши вираз (1.46) в (1.40) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} R_q \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) = \\ & = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\varphi_1(x'') + \sum_{q_0=1}^{\infty} R_{q_0} \varphi_{q_0}(x'') \right) \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \Psi_m^*(x'') C_{qm} dx''. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Або розкривши дужки та врахувавши (1.45):

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} R_q \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{qm} D_{m1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{q_0=1}^{\infty} R_{q_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{qm} D_{mq_0} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Скориставшись властивістю ортогональності функцій $\varphi_q(x)$ і обмеживши кінцевою величиною число врахованих типів хвиль перейдемо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів R_i :

$$R_q - \sum_{q_0=1}^Q R_{q_0} \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0} = \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{m1}, \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (1.51)$$

Запишемо отриману систему рівнянь в матричному вигляді:

$$\Delta \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}. \quad (1.52)$$

Тут $\mathbf{F} = \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{m1}$ — матриця-стовпець вільних членів, \mathbf{R} — матриця

стовпець шуканих коефіцієнтів, а елементи головного визначника системи Δ визначаються наступним виразом:

$$\Delta_{qq_0} = \delta_{qq_0} - \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0}, \quad \delta_{qq_0} = \begin{cases} 1, & q = q_0 \\ 0, & q \neq q_0 \end{cases}. \quad (1.53)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь можна знайти величину коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} взявши в якості результату перший елемент матриці-стовпця \mathbf{R} .

1.6 Чисельні результати

Для розглянутої дифракційної задачі був складений алгоритм чисельного розрахунку на ПЕОМ величини коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в одиничній комірці ФАР з використанням методу Шварца і методу часткових областей, що перетинаються. Особливістю алгоритму чисельного розрахунку є перетворення циклів підсумовування за індексами m для отримання матриць \mathbf{A} і $\mathbf{\Delta}$ в матричні арифметичні операції у виразах (1.48) і (1.53) відповідно. Таким чином матрицю \mathbf{A} можна представити у вигляді добутку матриць \mathbf{C} і \mathbf{D} , елементи яких визначаються виразами (1.43) і (1.45), а матриця $\mathbf{\Delta}$ може бути отримана шляхом віднімання \mathbf{A} з одиничної діагональної матриці \mathbf{I} , а саме: $\mathbf{\Delta} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Такий підхід дозволяє виконати операцію підсумовування за індексами m без застосування вкладених циклів, що значно скорочує час рахунку. Оцінка отриманої при цьому переваги у часі розрахунку буде розглянута далі.

В ході розв'язання розглянутої задачі були отримані значення модуля і фази коефіцієнта відбиття падаючої хвилі H_{10} у хвилеводах. На основі отриманих результатів проведено дослідження чисельної збіжності альтернуючого методу Шварца і методу часткових областей, що перетинаються, в залежності від кількості врахованих типів хвиль в хвилеводній області і області випромінювання ($Q = 2M + 1$).

У табл. 1.1 наведені результати збіжності методу Шварца по ітераціях для розмірів хвилеводів $b/\lambda = 0,5714$, кута сканування $\theta = 2,87$ градусів і нескінченно тонких стінок ($b = a$) при різній кількості врахованих типів хвиль M . Чисельним алгоритмом передбачалася зупинка ітераційного процесу та інкременту числа M в тому випадку, коли приріст величини модуля коефіцієнта відбиття становив менш за $\xi < 10^{-5}$. В ході чисельного

експерименту було встановлено, що для даної решітки при будь-якому M ітераційний процес зупиняється на ітерації $i = 15$. При цьому подальше збільшення як кількості ітерацій при недостатньому числі M так і збільшення M при малому i не дозволяє поліпшити точність отриманих результатів.

Таблиця 1.1 – Дослідження збіжності методу Шварца

i	Модуль коефіцієнта відбиття R									
	$M=1$	$M=5$	$M=9$	$M=13$	$M=17$	$M=21$	$M=25$	$M=29$	$M=33$	$M=37$
1	0.4322	0.4521	0.4534	0.4537	0.4538	0.4539	0.4539	0.4540	0.4540	0.4540
2	0.3509	0.3749	0.3766	0.3771	0.3773	0.3774	0.3775	0.3775	0.3775	0.3775
3	0.3049	0.3134	0.3141	0.3143	0.3144	0.3144	0.3144	0.3145	0.3145	0.3145
4	0.3429	0.3584	0.3594	0.3597	0.3598	0.3598	0.3599	0.3599	0.3599	0.3599
5	0.3289	0.3450	0.3462	0.3465	0.3467	0.3467	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468
6	0.3294	0.3430	0.3440	0.3443	0.3444	0.3444	0.3445	0.3445	0.3445	0.3445
7	0.3319	0.3469	0.3480	0.3483	0.3484	0.3485	0.3485	0.3485	0.3486	0.3486
8	0.3303	0.3451	0.3462	0.3465	0.3466	0.3467	0.3467	0.3468	0.3468	0.3468
9	0.3307	0.3453	0.3464	0.3467	0.3468	0.3468	0.3469	0.3469	0.3469	0.3469
10	0.3308	0.3456	0.3467	0.3470	0.3471	0.3471	0.3472	0.3472	0.3472	0.3472
11	0.3307	0.3454	0.3465	0.3468	0.3469	0.3469	0.3470	0.3470	0.3470	0.3470
12	0.3307	0.3454	0.3465	0.3468	0.3469	0.3470	0.3470	0.3470	0.3471	0.3471
13	0.3307	0.3454	0.3465	0.3468	0.3469	0.3470	0.3470	0.3471	0.3471	0.3471
14	0.3307	0.3454	0.3465	0.3468	0.3469	0.3470	0.3470	0.3470	0.3471	0.3471
15	0.3307	0.3454	0.3465	0.3468	0.3469	0.3470	0.3470	0.3471	0.3471	0.3471

У табл. 1.2 наведено порівняння результатів збіжності для МЧОП і методу Шварца при $i=15$ для аналогічних параметрів решітки і кута сканування в залежності від числа врахованих типів хвиль. Як видно з таблиці обидва методи дозволяють отримати значення модуля коефіцієнта відображення з однаковою точністю при кожному M , а значення фази відрізняються в третьому знаку після коми.

Для оцінки ефективності запропонованих підходів в табл. 1.3 для даної антенної решітки з нескінченно тонкими стінками наведені значення модуля і фази коефіцієнта відбиття, отримані іншими методами, представленими в [67 с. 200], в тому числі і точне розв'язання.

У табл. 1.4 показані значення модуля і фази коефіцієнта відбиття для аналогічних кутів сканування, отримані методом Шварца і методом часткових областей, що перетинаються. Число врахованих типів хвиль для

обох методів при кожному значенні кута сканування становило $M = 37$. Також наведено кількість ітерацій i для розв'язку, отриманого методом Шварца.

Таблиця 1.2 - Порівняння методу Шварца та МЧОП

M	МЧОП		Метод Шварца	
	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза
1	0.3307	157.9822	0.3307	157.9820
3	0.3432	155.8313	0.3432	155.8308
5	0.3454	155.6637	0.3454	155.6632
7	0.3462	155.6550	0.3462	155.6545
9	0.3465	155.6714	0.3465	155.6709
11	0.3467	155.6910	0.3467	155.6905
13	0.3468	155.7090	0.3468	155.7085
15	0.3469	155.7247	0.3469	155.7242
17	0.3469	155.7382	0.3469	155.7377
19	0.3470	155.7498	0.3470	155.7493
21	0.3470	155.7598	0.3470	155.7593
23	0.3470	155.7685	0.3470	155.7680
25	0.3470	155.7762	0.3470	155.7757
27	0.3470	155.7829	0.3470	155.7824
29	0.3471	155.7889	0.3471	155.7884
31	0.3471	155.7942	0.3471	155.7937
33	0.3471	155.7990	0.3471	155.7985
35	0.3471	155.8033	0.3471	155.8028
37	0.3471	155.8072	0.3471	155.8067

Таблиця 1.3 – Результати, представлені в [63]

θ	N	Результати обчислення коефіцієнтів відбиття R на основі					
		Інтегрального рівняння		Варіаційного виразу		Точного розв'язання	
		Модуль	Фаза	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза
2,87	15	0,349	158,4	0,346	157,5	0,347	155,9
2,87	20	0,348	157,8	0,346	157,1		
2,87	25	0,348	157,2	0,347	156,8		
2,87	30	0,347	156,9	0,347	156,5		
20	30	0,320	149,4	0,320	149,0	0,320	148,4
40	30	0,226	113,4	0,225	112,9	0,226	112,3
51	30	$0,457 \cdot 10^{-1}$	25,05	$0,461 \cdot 10^{-1}$	24,4	$0,462 \cdot 10^{-1}$	23,86
60	15	$0,164 \cdot 10^{-2}$	163,7	$0,299 \cdot 10^{-3}$	31,3	$0,281 \cdot 10^{-3}$	24,0
60	20	$0,789 \cdot 10^{-3}$	169,7	$0,287 \cdot 10^{-3}$	26,6		
60	25	$0,422 \cdot 10^{-3}$	162,0	$0,286 \cdot 10^{-3}$	25,6		
60	30	$0,254 \cdot 10^{-3}$	141,9	$0,284 \cdot 10^{-3}$	24,9		

Таблиця 1.4 - Результати, отримані МЧОП і методом Шварца

θ	Коефіцієнт відбиття R				
	МЧОП		Метод Шварца		
	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза	i
2,87	0,3471	155,8072	0,3471	155,8067	15
20	0,320	148,3047	0,320	148,3046	14
40	0,2256	112,2247	0,2256	112,2668	10
51	$0,4616 \cdot 10^{-1}$	23,7655	$0,4616 \cdot 10^{-1}$	23,7682	12
60	$0,2842 \cdot 10^{-3}$	23,8768	$0,2840 \cdot 10^{-3}$	23,9169	9

В ході чисельного експерименту було встановлено, що для алгоритмів методу Шварца і МЧОП перетворення циклів підсумовування за індексами m в матричні арифметичні операції для отримання матриць \mathbf{A} і $\mathbf{\Delta}$ дозволяє скоротити час рахунку в 6 разів при $M = 33$ ($Q = 2M + 1$). Також, збільшення числа врахованих типів хвиль в два рази призводить до збільшення часу рахунку в 4 рази для алгоритмів з використанням матричних операцій і в 6 разів для алгоритмів з використанням вкладених циклів. Так, відносний час рахунку при $M = 33$ склав 1,28 секунди для запропонованого алгоритму і 7 секунд для алгоритму з вкладеними циклами, при $M = 15$ час рахунку склав 0,14 і 0,9 секунди відповідно, а при $M = 7$ — відповідно 0,07 і 0,14 секунди.

Додатково, для алгоритму Шварца представлення операцій підсумовування за індексами q у вигляді добутку матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ в порівнянні з застосуванням вкладених циклів підсумовування дозволяє значно скоротити час розрахунку величини коефіцієнта відбиття. Так, при $b/\lambda = 0.5714$, $\theta = 2,87$ градусів, $b = a$, $M = 15$ ($Q = 2M + 1$) і кількості ітерацій $i = 15$ запропонований підхід дозволяє обчислити величину коефіцієнта відбиття за час 0,27 секунди, в той час як алгоритм із застосуванням операцій простого підсумовування дозволяє отримати результат за 10,9 секунд. Також, збільшення числа M в два рази збільшує час рахунку для запропонованого алгоритму в 4 рази і в 6 разів для алгоритму із застосуванням операцій підсумовування.

Такі відмінності у швидкодії алгоритмів обумовлені тим, що в багатьох програмних пакетах математичних обчислень [95 – 98] для виконання операцій матричного множення застосовуються високопродуктивні алгоритми [99 – 101].

На рис. 1.3 (а) і (б) показані залежності модуля і фази коефіцієнта відбиття від кута сканування для різної товщини стінок хвильоводів, отримані методом часткових областей, що перетинаються. Символами «×» на кривих графіків позначені результати, отримані за допомогою методу Шварца для відповідних відносних товщин стінок хвильоводів. Порівняння отриманих значень з результатами з [67 с.201] показує їх збіг з графічною точністю.

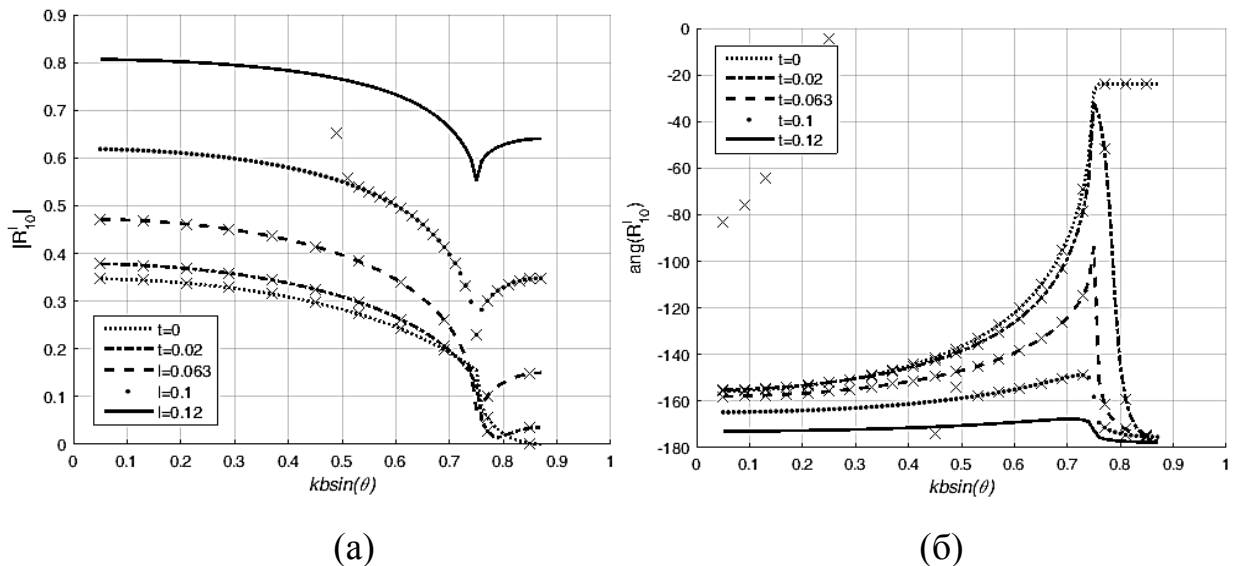


Рисунок 1.3 – Залежність модуля (а) і фази (б) коефіцієнта відбиття від кута сканування

З графіків видно, що у випадку, коли відносна товщина стінок хвильоводів приймає значення $t = (b - a)/b \geq 0,1$, метод Шварца не дозволяє отримати збіжного розв'язання. У наступному розділі запропоновано алгоритм, що дозволяє отримати збіжне розв'язання для подібних випадків.

Висновки до розділу 1

1. Для розвитку методу Шварца побудовано оригінальний алгоритм розв'язання двовимірної хвилеводної задачі дифракції на прикладі задачі про випромінювання електромагнітної хвилі з нескінченної лінійної хвилеводної ФАР, що сканує в H -площині. Враховуючи, що стінки хвилеводів є достатньо тонкими, внаслідок чого поперечний розмір «каналу Флоке» мало відрізняється від поперечного розміру хвилеводу, в якості початкового наближення була обрана функція падаючої хвилі без урахування дифракції на стику хвилеводу і «каналу Флоке».

2. Отримано загальний вираз для коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в ітерації довільного порядку в вигляді матричного рівняння. Проведено дослідження збіжності та визначено межі застосування розробленого алгоритму Шварца для розглянутої задачі.

3. Для розглянутої задачі побудований алгоритм методу часткових областей, що перетинаються, з використанням представлення операцій підсумовування у вигляді добутку матриць. Проведено порівняння результатів збіжності для методу часткових областей, що перетинаються, та методу Шварца для обраних параметрів решітки і кута сканування в залежності від числа врахованих типів хвиль. Виконано порівняння результатів, отриманих за допомогою представлених методів, з уже відомими результатами для розглянутої задачі, що підтвердило коректність розроблених алгоритмів.

4. Для алгоритмів методу Шварца і МЧОП запропоновано підхід, що полягає у перетворенні вкладених циклів підсумовування в матричні арифметичні операції у виразах для визначення коефіцієнта відбиття. Такий підхід дозволяє виконати операцію підсумовування по індексам m типів хвиль «каналу Флоке» тільки один раз при складанні головної матриці рівняння, що значно скорочує час рахунку і спрощує складання алгоритму чисельного розрахунку. Для алгоритмів методу Шварца і МЧОП

перетворення циклів підсумовування за індексами m в матричні арифметичні операції дозволяє скоротити час рахунку в 6 разів при $M = 33$ ($Q = 2M + 1$). Збільшення числа врахованих типів хвиль в два рази призводить до збільшення часу рахунку в 4 рази для алгоритмів з використанням матричних операцій і в 6 разів для алгоритмів з використанням вкладених циклів. Таким чином, з ростом числа врахованих типів хвиль перевага запропонованого алгоритму в швидкодії збільшується.

5. Для алгоритму методу Шварца запропоновано підхід, полягає в представленні операцій підсумовування за індексами q хвилеводних мод у вигляді добутку матриць, що дозволяє скоротити час розрахунку величини коефіцієнта відбиття для фіксованого значення величини кута сканування. Так, при $b/\lambda = 0.5714$, $\theta = 2,87$ градусів, $b=a$, $M=15$ ($Q= 2M + 1$) і кількості ітерацій $i=15$ в запропонованому підході час рахунку становить 0,27 секунди, у той час як алгоритм із застосуванням операцій простого підсумовування дозволяє отримати результат за 10,9 секунд.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ХВИЛЕВОДНИХ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ

У попередньому розділі наведено розв'язання задачі про нескінченну фазовану антенну решітку з прямокутних хвилеводів. За допомогою теореми Флоке вихідна задача була зведена до задачі про дифракцію на стику прямокутного і просторового хвилеводів. Однак, в деяких випадках, описаних в [67], векторні тривимірні інтегральні рівняння приводяться до скалярних двовимірних рівнянь відносно лише однієї невідомої компоненти вектора електричного поля. Такі задачі можуть бути використані для виявлення основних особливостей застосування методу Шварца до розв'язування дифракційних задач.

У даному розділі для розвитку методу Шварца і розширення границь його застосування для розв'язування хвилеводних задач дифракції запропоновано електродинамічні алгоритми, в яких описано особливості: побудови функцій Гріна і функції, пов'язаної з падаючою хвилею, отримання збіжного розв'язання в тих випадках, коли оригінальний метод Шварца не дозволяє його отримати. Як приклад розглянуто розв'язання задач дифракції електромагнітної хвилі на нескінченній ФАР з пласкопаралельних хвилеводів при наявності діелектриків.

2.1 Електродинамічний алгоритм методу оптимальної ітерації

У попередньому розділі показано, що при збільшенні відносної товщини стінок хвилеводів ФАР метод Шварца не дозволяє отримати збіжного розв'язання. Нижче пропонується підхід, що дозволяє розширити область застосування методу Шварца на такі задачі, а також розглядається застосування цього підходу упрі умові наявності діелектричного заповнення, вставок і покриття хвилеводів решітки.

В результаті чисельного дослідження було встановлено, що для відносних товщин стінок хвилеводів, при яких значення модуля коефіцієнта відбиття $|R_{10}| \geq 0,45$ і величини норми ядра інтегрального оператора $\|K\| > 1,12$, значно погіршується збіжність ітераційного ряду (1.47). При подальшому збільшенні товщини стінок хвилеводу ряд розбігається, і застосування розглянутого методу стає неможливим.

Для отримання збіжного розв'язання алгоритм простої ітерації методу Шварца може бути перетворений наступним чином. В рівнянні (1.40) ліву частину перенесемо вправо, а отриманий вираз помножимо на коефіцієнт β :

$$0 = -\beta E^I(x, z) + \beta E_{ex}(x, z) + \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx'' \quad (2.1)$$

Потім, до обох частин отриманої рівності додамо шукану функцію $E_y(x, z)$.

$$E^I(x, z) = E^I(x, z) - \beta E^I(x, z) + \beta E_{ex}(x, z) + \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx'' \quad (2.2)$$

Тоді, вираз в інтегральній формі для y -складової напруженості електричного поля в першій області в ітерації i -порядку набуває вигляду:

$$E^{I(i)}(x, z) = \beta E_{ex}(x, z) + (1 - \beta) E^{I(i-1)}(x, z) + \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^{I(i-1)}(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx'' \quad (2.3)$$

Знайдемо вираз для визначення величини коефіцієнта відбиття хвилі H_{q0} . В якості нульового наближення, як і раніше, візьмемо функцію $E_{ex}(x, z)$. Побудуємо перші три наближення для напруженості електричного поля, обмежуючи кінцевим значенням число врахованих типів хвиль в кожній ітерації. Поле в першому наближенні буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
E^{I(1)}(x, z) &= \beta \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + (1 - \beta) \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + \\
&+ \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{qm} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_1(x'') \Psi_m^*(x'') dx'' \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) = \\
&= \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{m1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тут Q , M — число врахованих типів хвиль в областях пласкопаралельного і просторового хвилеводів. Підставивши отриманий вираз в праву частину (2.3) отримаємо вираз для напруженості електричного поля в другому наближенні:

$$\begin{aligned}
E^{I(2)}(x, z) &= \beta \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + (1 - \beta) \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + \\
&+ (1 - \beta) \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ \beta^2 \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q,m} D_{m,q1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Аналогічно отримаємо вираз для третього наближення:

$$\begin{aligned}
E^{I(3)}(x, z) &= \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + (1 - \beta)^2 \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ (1 - \beta) \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ (1 - \beta) \beta^2 \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q,m} D_{m,q1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ \beta \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ (1 - \beta) \beta^2 \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M C_{q2,m2} D_{m2,1} C_{q,m} D_{m,q2} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&\beta^2 \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M C_{q2,m2} D_{m2,1} C_{q,m} D_{m,q2} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) + \\
&+ \beta^3 \sum_{q=1}^Q \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q2,m2} D_{m2,q1} C_{q,m} D_{m,q2} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Тут, qi, mi - індекси типів хвиль i -ої ітерації. Підставимо в ліві частини отриманих виразів функцію виду (1.46). Користуючись властивістю ортогональності функцій φ_q , отримаємо вирази для визначення коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в перших трьох ітераціях при фіксуванні точки спостереження на $z = 0$:

$$R_q^{(1)} = \beta \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{m1}. \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} R_q^{(2)} &= (1-\beta)\beta \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + \beta \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + \\ &+ \beta^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q,m} D_{m,q1} = \\ &= R_q^{(1)} + (1-\beta)R_q^{(1)} + \beta \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q R_{q1}^{(1)} C_{q,m} D_{m,q1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} R_q^{(3)} &= (1-\beta)^2 \beta \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + (1-\beta)\beta \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + \\ &+ (1-\beta)\beta^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q,m} D_{m,q1} + \beta \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + \\ &+ (1-\beta)\beta^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M C_{q2,m2} D_{m2,1} C_{q,m} D_{m,q2} + \\ &+ \beta^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M C_{q2,m2} D_{m2,1} C_{q,m} D_{m,q2} + \\ &+ \beta^3 \sum_{m=-M}^M \sum_{q2=1}^Q \sum_{m2=-M}^M \sum_{q1=1}^Q \sum_{m1=-M}^M C_{q1,m1} D_{m1,1} C_{q2,m2} D_{m2,q1} C_{q,m} D_{m,q2} = \\ &= R_q^{(1)} + (1-\beta)R_q^{(2)} + \beta \sum_{m=-M}^M \sum_{q1=1}^Q R_{q1}^{(2)} C_{q,m} D_{m,q1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким чином, вираз для коефіцієнта відбиття хвилі H_{q0} в ітерації i -порядку набуває вигляду:

$$R_q^{(i)} = R_q^{(1)} + (1 - \beta)R_q^{(i-1)} + \beta \sum_{m=-M}^M \sum_{q_1=1}^Q R_{q_1}^{(i-1)} C_{q,m} D_{m,q_1}. \quad (2.10)$$

Підхід, розроблений у першому розділі, дозволяє представити вираз (2.10) у матричній формі. Візьмемо до уваги, що число врахованих типів хвиль в ітераціях залишається незмінним, тобто $q_1=q$. Сума за індексами m може бути представлена як добуток матриці \mathbf{C} розміром $q \times m$ на матрицю \mathbf{D} з розмірами $m \times q_1$. Як результат цього множення введемо квадратну матрицю \mathbf{A} розмірами $q \times q$. Аналогічно, сума за індексами q являє собою добуток \mathbf{A} на матрицю-стовпець \mathbf{R} , утворену елементами R_q . Таким чином, вираз (2.10) приймає вид:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + (1 - \beta)\mathbf{R}^{(i-1)} + \beta \cdot \mathbf{A}\mathbf{R}^{(i-1)}. \quad (2.11)$$

Вибираючи коефіцієнт β таким, що дорівнює зворотній величині норми ядра інтегрального оператора, можна отримати ітераційний процес, який збігається до наближеного результату з мінімальною відносною похибкою. У тому випадку, коли коефіцієнт β приймає значення, рівне 1, запропонований метод оптимальної ітерації (МОІ), зводиться до методу простої ітерації.

Розглянемо вплив числа врахованих типів хвиль на чисельну збіжність і точність отриманого розв'язання для методів простої і оптимальної ітерації. Параметри решітки: $b/\lambda=0.5714$, $\sin\theta=0,05$, $t=(b-a)/b=0$. В точному розв'язку $|R_{10}| = 0,347$, а фаза дорівнює 155,9 градусів. У табл. 2.1 наведена збіжність методів оптимальної ітерації (МОІ) і простої ітерації (МПІ) в кожному наближенні для деяких значень числа врахованих типів хвиль M та $Q=2M+1$.

З табл. 2.1 видно, що для обох методів при малому числі врахованих типів хвиль точність результатів невелика. Для методу оптимальної ітерації збільшується число ітерацій, необхідних для отримання сталого розв'язання. При більшому M ітераційний ряд збігається при $i \leq 12$. У методі простої ітерації число врахованих типів хвиль слабо впливає на швидкість збіжності розв'язання.

Таблиця 2.1- Дослідження збіжності методів по ітераціям

i	$ R_{10} , \text{MOI}$			$ R_{10} , \text{МПП}$		
	$M=2$	$M=16$	$M=32$	$M=2$	$M=16$	$M=32$
1	0.5619	0.4762	0.4531	0.4452	0.4538	0.4540
2	0.3513	0.3748	0.3776	0.3665	0.3773	0.3775
3	0.3162	0.3068	0.3148	0.3100	0.3144	0.3145
4	0.4448	0.3703	0.3595	0.3530	0.3598	0.3599
5	0.2495	0.3419	0.3469	0.3391	0.3466	0.3468
6	0.3961	0.3443	0.3445	0.3380	0.3444	0.3445
7	0.3310	0.3501	0.3485	0.3415	0.3484	0.3486
8	0.3270	0.3454	0.3468	0.3397	0.3466	0.3468
9	0.3672	0.3471	0.3469	0.3400	0.3468	0.3469
10	0.3158	0.3472	0.3472	0.3402	0.3471	0.3472
11	0.3547	0.3467	0.3470	0.3400	0.3469	0.3470
12	0.3367	0.3470	0.3471	0.3401	0.3469	0.3471
13	0.3362	0.3469	0.3471	0.3401	0.3469	0.3471
14	0.3472	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
15	0.3336	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
16	0.3439	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
17	0.3391	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
18	0.3390	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
19	0.3419	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471
20	0.3383	0.3469	0.3471	0.3400	0.3469	0.3471

У табл. 2.2 показані значення модуля і фази коефіцієнта відбиття при різних значеннях M і $Q = 2M + 1$, а також число ітерацій i , необхідне для отримання розв'язання з точністю 10^{-5} . Для порівняння наведено значення, одержані за допомогою МЧОП.

З табл. 2.2 видно, що збільшення числа врахованих типів хвиль веде до покращення точності результатів. Для методу оптимальної ітерації також зменшується число ітерацій, необхідне для досягнення заданої точності результатів. Час рахунку при цьому пропорційний величині M^2 . Так, час рахунку для однієї величини кута сканування при $M=2$ становить для кожного з трьох розглянутих методів 0,0015 секунд. У той же час, при $M=64$ цей час становить 0,075 секунд, а при $M=256$ час рахунку однієї точки становить вже 1,17 секунди. Також, в ході чисельного експерименту було встановлено, що при досягненні певного значення подальше збільшення

числа врахованих типів хвиль не призводить до підвищення точності результату. Таким чином, доцільно збільшувати число врахованих типів хвиль до тих пір, поки не будуть досягнуті задані вимоги по точності при збереженні прийняттого часу рахунку.

Таблиця 2.2 - Дослідження збіжності за кількістю врахованих типів хвиль

<i>M</i>	МОІ			МПІ			МЧОП	
	Модуль	Фаза	<i>i</i>	Модуль	Фаза	<i>i</i>	Модуль	Фаза
2	0.34005	156.23272	43	0.34005	156.23299	15	0.34005	156.23336
4	0.34464	155.70440	29	0.34464	155.70449	15	0.34464	155.70495
6	0.34586	155.65204	24	0.34587	155.65212	15	0.34587	155.65260
8	0.34637	155.66133	22	0.34637	155.66127	15	0.34636	155.66176
10	0.34662	155.68075	20	0.34662	155.68033	15	0.34661	155.68083
12	0.34675	155.69970	19	0.34676	155.69934	15	0.34676	155.69984
14	0.34685	155.71713	18	0.34685	155.71623	15	0.34685	155.71673
16	0.34691	155.73148	18	0.34691	155.73081	15	0.34691	155.73131
18	0.34695	155.74336	17	0.34695	155.74332	15	0.34695	155.74382
20	0.34698	155.75430	17	0.34698	155.75410	15	0.34698	155.75459
22	0.34700	155.76452	16	0.34700	155.76343	15	0.34700	155.76393
24	0.34702	155.77253	16	0.34702	155.77157	15	0.34702	155.77207
26	0.34703	155.77959	16	0.34703	155.77873	15	0.34703	155.77922
28	0.34705	155.78583	16	0.34705	155.78505	15	0.34705	155.78555
30	0.34706	155.79065	15	0.34705	155.79068	15	0.34705	155.79118
32	0.34706	155.79575	15	0.34706	155.79572	15	0.34706	155.79622

У табл. 2.3 показано чисельні результати для решітки з кінцевою товщиною стінок хвилеводів, що отримані за допомогою розглянутих методів. Параметри решітки наступні: відносна товщина стінок $t = (b - a)/b = 0,063$; 0,1 и 0,12; $b/\lambda = 0.5714$. У розрахунках число M приймалося рівним 32.

З табл. 2.3 видно, що в міру збільшення відносної товщини стінок хвилеводів решітки погіршується збіжність методу простої ітерації. Так, при $t = 0,063$ і $\sin\theta = 0,05$ збіжне розв'язання можна отримати при кількості ітерацій рівному 42, що значно більше, ніж для випадку з нескінченно тонкими стінками. При цьому, як і раніше, число врахованих типів хвиль не впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу. Подальше збільшення

відносної товщини стінок хвилеводів призводить до того, що метод простої ітерації не дозволяє отримати коректного розв'язання.

Таблиця 2.3 — Чисельні результати для решітки з кінцевою відотною товщиною стінок хвилеводів

t	$\sin\theta$	МЧОП		МОІ			МПІ		
		$ R_{10} $	Фаза	$ R_{10} $	Фаза	i	$ R_{10} $	Фаза	i
0,063	0,05	0.47174	158.01391	0.47174	158.01361	19	0.47174	158.01404	42
	0,20	0.46256	156.65455	0.46256	156.65424	19	0.46256	156.65501	35
	0,40	0.42855	151.61744	0.42856	151.61717	19	0.42856	151.61772	22
	0,60	0.34546	139.2252	0.34546	139.22509	16	0.34546	139.22553	12
	0,70	0.24571	124.06685	0.24571	124.06696	13	0.24571	124.06689	8
0,1	0,05	0.61862	164.76655	0.61862	164.76672	17	>1	—	—
	0,20	0.61054	163.99452	0.61055	163.99468	17	>1	—	—
	0,40	0.57995	161.20331	0.57996	161.20301	16	>1	—	—
	0,60	0.50054	154.99336	0.50054	154.99313	15	0.50054	154.99338	43
	0,70	0.39769	149.71702	0.39769	149.71718	12	0.39769	149.71675	17
0,12	0,05	0.80653	172.93719	0.80651	172.93544	18	>1	—	—
	0,20	0.80172	172.61547	0.80170	172.61390	18	>1	—	—
	0,40	0.78315	171.47151	0.78313	171.47048	18	>1	—	—
	0,60	0.73267	169.10393	0.73265	169.10350	17	>1	—	—
	0,70	0.66363	167.65705	0.66362	167.65737	17	>1	—	—

У той же час, метод оптимальної ітерації дозволяє отримати збіжне розв'язання в означеному діапазоні кутів сканування і товщин стінок хвилеводів. Чисельне дослідження запропонованого алгоритму МОІ показало, що збільшення числа врахованих типів хвиль збільшує як точність одержуваних результатів, так і швидкість збіжності по ітераціям. Порівняння з результатами, отриманими за допомогою МЧОП і в роботі [67] показує коректність запропонованого алгоритму.

2.2 Електродинамічні алгоритми методів простої і оптимальної ітерації розв'язування задачі дифракції на нескінченній лінійній ФАР з хвилеводів, заповнених діелектриком

Розглянемо нескінченну фазовану антенну решітку з пласкопаралельних хвилеводів, що сканує в H -площині для випадку, коли в

решітці хвилеводна область $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-\infty \leq z \leq 0$ заповнена однорідним ізотропним діелектричним середовищем з проникністю ε (рис 2.1). Для розв'язання цієї задачі скористаємося описаним вище підходом на основі методу Шварца.

Вся область визначення напруженості електричного поля розбивається на дві області, що перетинаються: область I — пласкопаралельний хвилевод, продовжений в нескінченність і область II — просторовий хвилевод (область Флоке). Система інтегральних представлень щодо напруженості електричного поля кожної області набуде вигляду, аналогічного виразам (1.32) і (1.33). З огляду на те, що в області перетину поля рівні одне одному, підставимо (1.33) в (1.32). Для методу простої ітерації підсумкове інтегральне рівняння набирає вигляду, аналогічного виразу (1.40). Інтегральне рівняння відносно напруженості електричного поля для методу оптимальної ітерації набуде вигляду аналогічного рівнянню (2.3).

Функція Гріна області II описується виразом (1.37). Для відшукування функції Гріна хвилеводної області розділимо її на дві підобласті: підобласть, заповнену діелектриком (d) і підобласть вільного простору (f). Функцію Гріна плоскопаралельного хвилеводу, заповненого діелектриком, наведемо в наступному вигляді:

$$G^I(x, z; x', z') = \sum_{q=1}^{\infty} \varphi_q(x) \varphi_q(x') f^{d,f}(z, z') \quad (2.12)$$

Система поперечних власних функцій φ_q описується виразом (1.36). Необхідно знайти функцію $f^{d,f}(z, z')$, яка залежить від поздовжніх координат точок джерел z' і спостереження z . Невідому функцію будемо знаходити у вигляді суперпозиції падаючих та відбитих хвиль з невідомими амплітудними коефіцієнтами. Вид шуканої функції залежить від взаємного розташування точок джерел і точок спостереження.

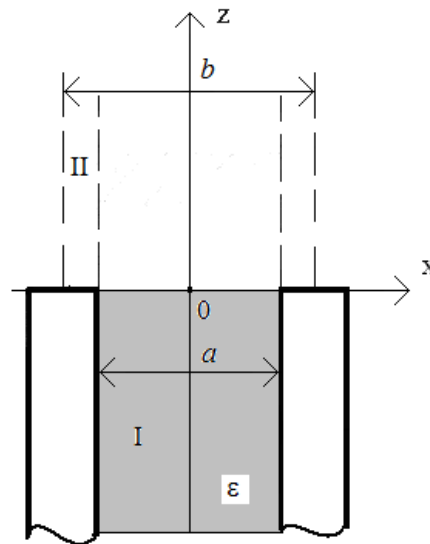


Рисунок 2.1 — Одинична комірка ФАР з діелектричним заповненням хвилеводів

З огляду на те, що координати точок джерел приймають значення $0 \leq z' \leq \infty$, отримаємо:

$$\begin{aligned} f_q^d(z, z') &= t \exp(j\gamma_q^d z), \quad -\infty \leq z \leq 0 \\ f_q^f(z, z') &= \frac{1}{2j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f |z - z'|) + r \exp(-j\gamma_q^f z), \quad 0 \leq z \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тут функція $\frac{1}{2j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f |z - z'|)$ описує плоску хвилю, що поширюється в обидва боки вздовж осі z від точкового джерела з координатою z' . Для знаходження невідомих коефіцієнтів r і t прирівняємо значення функцій і їх похідних на межі поділу середовищ і складемо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. У розглянутій задачі координати точок спостереження для рівняння відносно напруженості електричного поля першої області завжди приймають значення $z \leq 0$, тому достатньо знаходити тільки коефіцієнт t і використовувати в інтегральному рівнянні перший вираз з системи (2.13). Шукана функція поздовжніх координат набуде вигляду:

$$f_q^d(z, z') = \frac{1}{j\gamma_q^d + j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f z') \exp(j\gamma_q^d z). \quad (2.14)$$

Поздовжнє хвильове число кожної підобласті хвилеводу визначається виразом:

$$\gamma_q^{d(f)} = -j\sqrt{\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 - (k^{d(f)})^2}, \quad k^f = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k^d = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Ядро інтегрального рівняння описується виразом (1.41), а вираз для коефіцієнта C_{qm} набуде вигляду:

$$C_{qm} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{-q\pi}{2a(\gamma_q^d + \gamma_q^f)(\gamma_q^d + \Gamma_m)} \left[\exp\left(-j\frac{aU_m}{2b}\right) - \exp\left(j\frac{aU_m}{2b}\right) \cos(q\pi) \right].$$

Хвилеводи збуджуються при $z \rightarrow -\infty$ хвилями H_{10} одиничної амплітуди. За допомогою виразу (1.34), визначимо напруженість електричного поля збуджуючої хвилі H_{10} з урахуванням діелектричного заповнення хвилеводу:

$$E_{ex}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^d z) + R_1^{(0)} \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^d z). \quad (2.16)$$

Тут $R_1^{(0)}$ — коефіцієнт відбиття падаючої хвилі H_{10} в пласкопаралельному хвилеводі від границі розділу середовищ з різною діелектричною проникністю, який визначається виразом:

$$R_1^{(0)} = \frac{\gamma_q^d - \gamma_q^f}{\gamma_q^d + \gamma_q^f}. \quad (2.17)$$

Отримаємо вирази відносно напруженості електричного поля в першому і другому наближенні для методу простої ітерації, вибираючи в якості нульового наближення функцію поля падаючої хвилі виду (2.16):

$$E^{(1)}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^d z) + R_1^{(0)} \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^d z) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + R_1^{(0)}) C_{qm} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^d z);$$

$$E^{(2)}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^d z) + R_1^{(0)} \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^d z) + (1 + R_1^{(0)}) \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{q,m} D_{m,1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^d z) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (1 + R_1^{(0)}) C_{q_1,m_1} D_{q_1,1} C_{q,m} D_{m,q_1} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^d z);$$

Для розрахунку коефіцієнта відбиття представимо шукане поле в хвилеводі у вигляді суперпозиції падаючої хвилі E_{ex} і поля, відбитого від апертури:

$$E^I(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^d z) + R_1^{(0)} \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^d z) + \sum_{q=1}^{\infty} R_q \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^d z). \quad (2.18)$$

Підставимо це представлення в ліві частини виразів відносно шуканого поля в ітераціях, зробивши при цьому обмеження скінченною величиною числа врахованих типів хвиль. Вирази для коефіцієнта відбиття в перших двох ітераціях приймають вид:

$$R_q^{(1)} = \sum_{m=-M}^M (1 + R_1^{(0)}) C_{q,m} D_{m,1}$$

$$R_q^{(2)} = (1 + R_1^{(0)}) \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,1} + \sum_{m=-M}^M \sum_{q_1=1}^Q \sum_{m_1=-M}^M (1 + R_1^{(0)}) C_{q,m} D_{m,q_1} C_{q_1,m_1} D_{m_1,1}$$

Тут M і Q — число врахованих типів хвиль в областях I і II. Користуючись правилами множення матриць, перейдемо до виразу відносно коефіцієнта відбиття в ітерації i -порядку у вигляді матричного рівняння, аналогічного за видом (1.48):

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (2.19)$$

Елементи матриці \mathbf{A} розміром $Q \times Q$ визначаються як $A_{qq_0} = \sum_{m=-M}^M C_{q,m} D_{m,q_0}$.

Повний коефіцієнт відбиття визначається як сума $R_1^{<0>} + R_1^{<i>}$. Далі, користуючись алгоритмом оптимальної ітерації, можна виконати перехід до матричного рівняння відносно коефіцієнта відбиття, яке буде мати вигляд, аналогічний (2.11).

Знайдемо коефіцієнт відбиття падаючої хвилі для фазованої антенної решітки з пласкопаралельних хвилеводів, що сканує у H -площині та має наступні параметри: в першому варіанті $b = 0.5714\lambda$, у другому варіанті $b = 0.4\lambda$, відносна товщина стінок хвилеводів становить $t=(b-a)/b = 0,063$ для

кожного випадку. Діелектрична проникність середовища, що заповнює хвилевод, змінюється від 0,9 до 3,0 для першого варіанту і від 2,0 до 6,5 для другого. Величина відносної діелектричної проникності матеріалу заповнення вибиралася так, щоб в хвилеводах поширювався єдиний тип хвилі. Аналогічна задача розв'язувалася в роботі [67] методом зшивання. На рис. 2.2 і 2.3 наведені графіки залежностей модуля і фази коефіцієнта відбиття від кута сканування для кожного з варіантів розмірів решітки. Розрахунки виконувалися методом простої (суцільна лінія) і оптимальної ітерації (точки). У розрахунках враховувалося $M = 16$, $Q = 33$, ітераційний процес зупинявся в тому випадку, коли подальший приріст абсолютної величини отриманого розв'язання становив менш за 10^{-5} . Отримані результати з графічною точністю збігаються з результатами, наведеними в роботі [67]. Розв'язування аналогічної задачі за допомогою МЧОП при тому ж числі врахованих типів хвиль дає збіг результатів у п'ятому знаку після коми. Як видно з графіків на рис. 2.2 і 2.3 метод оптимальної ітерації дозволяє отримати збіжне розв'язання в тому випадку, коли метод простої ітерації дає невірне розв'язання. Таким чином, доцільно від самого початку створювати алгоритм методу оптимальної ітерації.

Умовою отримання коректного чисельного результату є адекватне врахування наявності діелектричного заповнення на етапі побудови функцій Гріна і функції для падаючої хвилі.

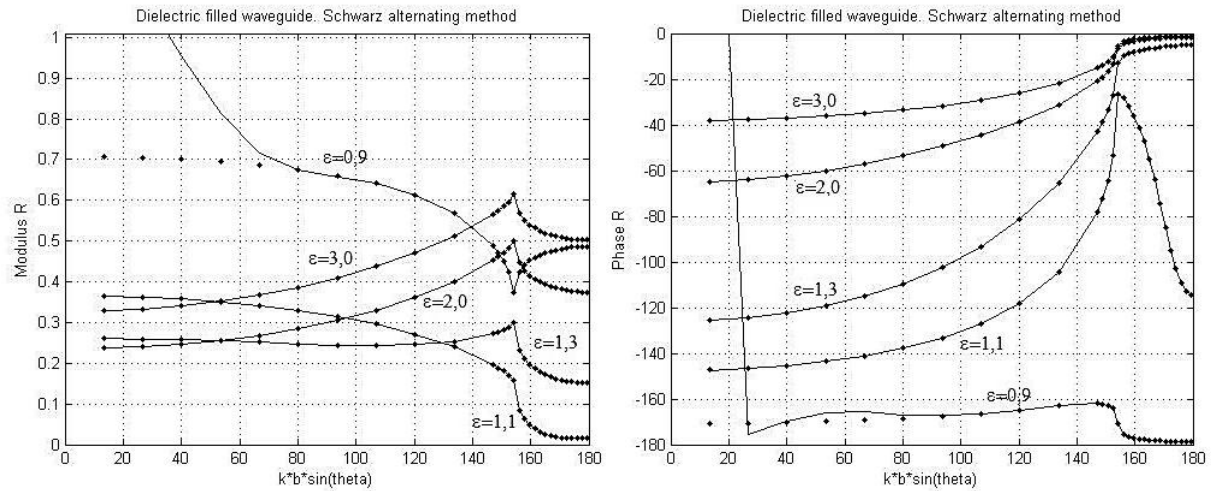


Рис. 2.2 — Залежність модуля і фази коефіцієнта відбиття від керуючого зсуву фаз ($b=0.5714\lambda$, $t = (b - a)/b = 0,063$).

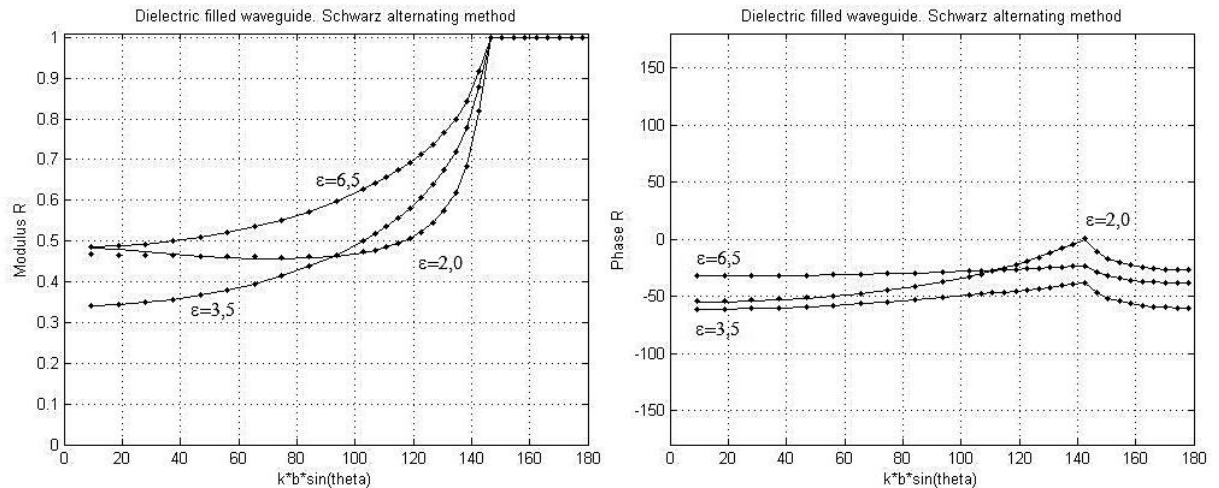


Рис. 2.3 — Залежність модуля і фази коефіцієнта відбиття від керуючого зсуву фаз ($b=0.4\lambda$, $t = (b - a)/b = 0,063$).

У наступному розділі розглядаються особливості побудови цих функцій при наявності шаруватого діелектричного заповнення і покриття волноводів решітки. Також описані особливості, що виникають при отриманні системи інтегральних представлень для такого типу неоднорідностей.

2.3 Електродинамічні алгоритми методів простої і оптимальної ітерації розв'язування задачі дифракції на нескінченній лінійній ФАР при наявності діелектричного покриття і вставок у хвилеводах

В даному розділі розглядаються особливості застосування методів простої і оптимальної ітерації до розв'язання дифракційних задач для ФАР, хвилеводи яких мають шарувате діелектричне заповнення або покриття. Розглянуті нижче задачі раніше були розв'язані методом зшивання в роботі [67] і за допомогою МЧПО в роботі [81].

В залежності від наявності діелектричних вставок або покриття хвилеводів решітки розв'язання задач мають свої особливості, які розглянуті далі.

2.3.1 Випадок наявності одношарової діелектричної вставки

Розглянемо розв'язання задачі для ФАР, хвилеводи якої мають діелектричні вставки. На рис. 2.4 (а) зображена одинична комірка ФАР з діелектричною вставкою товщиною $-l_w$ і відносною діелектричною проникністю ϵ . Розіб'ємо всю область визначення поля у вибраній комірці на дві області, що перетинаються між собою. Область I: $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-\infty \leq z \leq \infty$. Область II: $-b/2 \leq x \leq b/2$, $0 \leq z \leq \infty$. В області I при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля типу H_{10} плаского хвилеводу. Вважаємо відомими функції Гріна областей I і II. Скориставшись другою формулою Гріна, складемо систему інтегральних представлень відносно поля кожної з часткових областей:

$$E_1(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_0^{\infty} E_{II}\left(x' = -\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G_I\left(x, z; x' = -\frac{a}{2}, z'\right) dz' - \int_0^{\infty} E_{II}\left(x' = \frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G_I\left(x, z; x' = \frac{a}{2}, z'\right) dz'; \quad (2.20)$$

$$E_{II}(x', z') = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_I(x'', z'' = 0) \frac{\partial}{\partial z''} G_{II}(x', z'; x'', z'' = 0) dx''. \quad (2.21)$$

Тут: E_{ex} — напруженість електричного поля падаючої хвилі, G_I і G_{II} — функції Гріна кожної області. Для області I змінні x і z описують координати точок спостереження, а x' та z' — точок джерел. Для області II: x' та z' — точки спостереження, x'' та z'' — точки джерел.

Функція Гріна області II приймає вид (1.37). Функція Гріна області I знаходиться за допомогою підходу, показаного в попередньому розділі. Область хвилеводу умовно розділяється на три підобласті: підобласть w — плоскопаралельний хвилевод без діелектричного заповнення, підобласть dw — хвилеводна вставка ($-l_w \leq z \leq 0$), підобласть f — хвилевод без діелектричного заповнення, який продовжено в нескінченність.

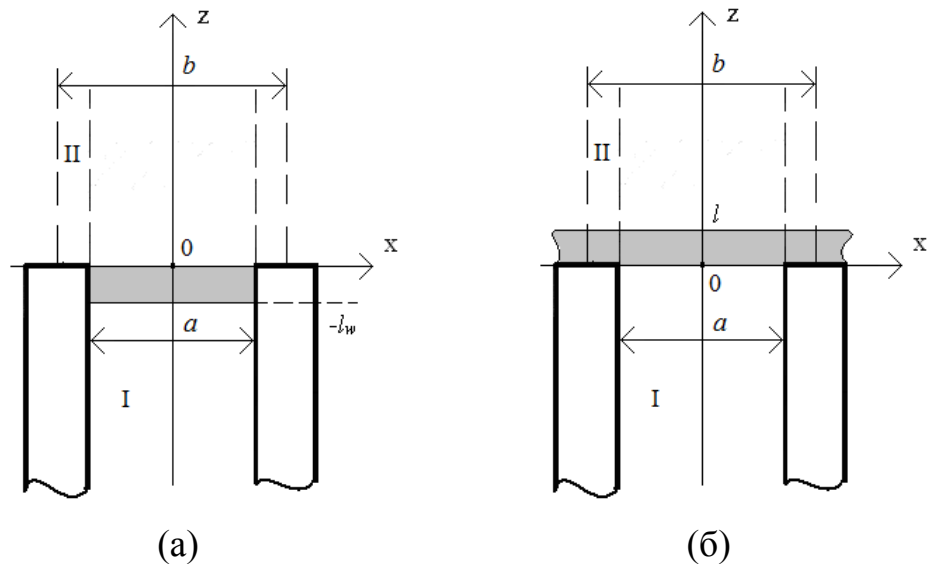


Рис. 2.4 — Одинична комірка нескінченної ФАР з діелектричною вставкою (а) і покриттям (б)

Функція Гріна області I в має вигляд:

$$G_I(x, z; x', z') = \sum_{q=0}^{\infty} \phi_q(x) \phi_q(x') f_q^{I(w, dw, f)}(z, z'); \quad (2.22)$$

При складанні виразів для повздовжньої функції $f_q^{I(w, dw, f)}(z, z')$ необхідно враховувати, що виходячи з постановки задачі точки спостереження в інтегральному рівнянні (2.20) будуть знаходитися в

підобласті dw , а точки джерел – в підобласті f . Вирази для поздовжньої функції:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_q^{I(w)}(z, z') = t^w \cdot \exp(j\gamma_q^w(z + l_w)), \quad -\infty < z \leq -l_w; \\ f_q^{I(dw)}(z, z') = r^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}(z + l_w)) + t^{dw} \cdot \exp(j\gamma_q^{dw}z), \quad -l_w \leq z \leq 0; \\ f_q^{I(f)}(z, z') = r^f \cdot \exp(-j\gamma_q^f z) + \frac{1}{2j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f |z - z'|), \quad 0 \leq z < \infty. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Поздовжні хвильові числа кожної підобласті визначаються як:

$$\gamma_q^w = \gamma_q^f = -j\sqrt{\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 - (k^f)^2};$$

$$\gamma_q^{dw} = -j\sqrt{\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 - (k^{dw})^2}; \quad k^f = 2\pi/\lambda; \quad k^{dw} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon}.$$

Невідомі коефіцієнти $t^{w,dw}$ і $r^{dw,f}$ мають фізичний зміст коефіцієнтів відбиття і проходження хвилі від точкового джерела, який описується другим доданком третього рівняння системи (2.23). При складанні виразу для поздовжньої функції Гріна вид показника ступеня експоненціального множника, що стоїть перед кожним невідомим коефіцієнтом в (2.23) визначається з умови рівності нулю цього множника на відповідній границі розділу середовищ. Прирівнюючи значення отриманої функції і її похідної по z на границях розділу середовищ ($z=-l_w$; $z=0$) можна отримати наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} t^w = r^{dw} + t^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w); \\ j\gamma_q^w t^w = -j\gamma_q^{dw} r^{dw} + j\gamma_q^{dw} t^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w); \\ r^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w) + t^{dw} = r^f + \frac{1}{2j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f z'); \\ -j\gamma_q^{dw} r^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w) + j\gamma_q^{dw} t^{dw} = -j\gamma_q^f r^f + \frac{1}{2} \exp(-j\gamma_q^f z'); \end{array} \right. \quad (2.24)$$

При розкритті знака модуля $|z-z'|$ в показнику експоненціального множника під час складання системи рівнянь необхідно враховувати взаємне

розташування точок джерел і точок спостереження, виходячи з постановки задачі. Для даної функції Гріна завжди виконується умова $z' \geq z$.

У задачі, що розглядається, точки спостереження розташовані в підобласті діелектричної вставки ($-l_w \leq z \leq 0$) на границі $z=0$. Тому необхідно знайти тільки коефіцієнти r^{dw} та t^{dw} . Розв'язок зручно отримати за допомогою методу Крамера. Застосування цього методу при побудові функції Гріна приводить до необхідності обчислення визначників розміром 4×4 . При зниженні порядку визначників розкладання зручно виконувати по стовпцям, експоненціальні множники яких залежать від координат точок джерел z' . Виконуючи всі необхідні перетворення, отримаємо вираз для поздовжньої функції Гріна хвильоводної області при $-l_w \leq z \leq 0$:

$$f_q^{I(dw)}(z, z') = \frac{1}{\Delta} \left[(j\gamma_q^{dw} - j\gamma_q^w) \exp(-2j\gamma_q^{dw} l_w) \exp(-j\gamma_q^{dw} z) + \right. \\ \left. + (j\gamma_q^{dw} + j\gamma_q^w) \exp(j\gamma_q^{dw} z) \right] \cdot \exp(-j\gamma_q^f z') = RT_q(z) \exp(-j\gamma_q^f z'); \quad (2.25)$$

Тут Δ - головний визначник системи (2.24).

Підставимо вираз (2.21) в (2.20) і врахуємо отримані раніше вирази для функцій Гріна. Зафіксувавши координати точок джерел і точок спостереження, отримаємо інтегральне рівняння відносно поля в першій області:

$$E^I(x, z=0) = E_{ex}(x, z=0) + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) \psi_m^*(x'') dx'' \cdot \frac{C_{q,m} RT_q(z=0) \varphi_q(x)}{j(\Gamma_m + \gamma_q^f)} \right]. \quad (2.26)$$

Тут:

$$C_{q,m} = \left[\psi_m \left(-\frac{a}{2} \right) \frac{\partial \varphi_q \left(-\frac{a}{2} \right)}{\partial x} - \psi_m \left(\frac{a}{2} \right) \frac{\partial \varphi_q \left(\frac{a}{2} \right)}{\partial x} \right]. \quad (2.27)$$

Знайдемо вид функції стороннього поля $E_{ex}(x, z)$. Для цього можна скористатися функцією Гріна області I з урахуванням того, що точки

спостереження будуть знаходитися в підобласті dw (діелектрична вставка), а точки джерел знаходяться на площині $z' \rightarrow \infty$.

Однак, при знаходженні функції Гріна необхідно скласти і розв'язувати систему рівнянь, в якій точкове джерело знаходиться в підобласті w (хвилевод без діелектричного заповнення). Нижче запропоновано підхід, що дозволяє знайти функцію стороннього поля без використання функцій Гріна, що значно скорочує час, необхідний для складання алгоритму.

Функція стороннього поля $E_{ex}(x, z)$ являє собою поле, що збуджується хвилею типу H_{10} в нескінченному плоскопаралельному хвилеводі з урахуванням наявності поперечного шаруватого діелектричного заповнення, але без урахування дифракції на апертурі. Функція стороннього поля представляється у вигляді суперпозиції падаючої і відбитої хвиль в залежності від координати точки спостереження:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ex}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^w(z + l_w)) + \\ \quad + R0^w \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_q^w(z + l_w)), \quad -\infty < z \leq -l_w; \\ E_{ex}(x, z) = T0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + \\ \quad + R0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z), \quad -l_w \leq z \leq 0; \\ E_{ex}(x, z) = T0^f \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^fz), \quad 0 \leq z < \infty. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Прирівняємо значення функції і її похідної на границі розділу середовищ і перейдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $R0^w$, $T0^{dw}$, $R0^{dw}$, $T0^f$:

$$\left\{ \begin{array}{l} R0^w - T0^{dw} - R0^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) = -1; \\ j\gamma_1^w R0^w + j\gamma_q^{dw} T0^{dw} - j\gamma_q^{dw} t^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w) = j\gamma_1^w; \\ T0^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw} - T0^f = 0; \\ -j\gamma_1^{dw} T0^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + j\gamma_1^{dw} R0^{dw} + j\gamma_q^f T0^f = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язання цієї системи дозволяє знайти функцію стороннього джерела. При розв'язанні інтегрального рівняння (2.26) необхідно використовувати друге рівняння системи (2.28) в якості функції стороннього поля, оскільки точки спостереження знаходяться в підобласті dw . Побудуємо перші три наближення для поля в області I. В якості початкового наближення виберемо функцію $E_{ex}(x,z)$ при $-l_w \leq z \leq 0$:

$$\begin{aligned}
 E^{(1)}(x, z) &= T0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + R0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z) + \\
 &+ (T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw}) \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{q,m} D_{m,1} \frac{RT_q(z)}{j(\Gamma_m + \gamma_q^f)} \varphi_q(x); \\
 \\
 E^{(2)}(x, z) &= T0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + R0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z) + \\
 &+ (T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw}) \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_2,m_2} D_{m_2,1} \frac{RT_{q_2}(z)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} \varphi_{q_2}(x) + \\
 &+ (T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw}) * \\
 &* \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_1,m_1} D_{m_1,1} \frac{RT_{q_1}(z)}{j(\Gamma_{m_1} + \gamma_{q_1}^f)} C_{q_2,m_2} D_{m_2,q_1} \frac{RT_{q_2}(z)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} \varphi_{q_2}(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^{(3)}(x, z) = & T0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + R0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z) + \\
& + \left(T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw} \right) \sum_{q2=1}^{\infty} \sum_{m2=-\infty}^{\infty} C_{q2,m2} D_{m2,1} \frac{RT_{q2}(z)}{j(\Gamma_{m2} + \gamma_{q2}^f)} \varphi_{q2}(x) + \\
& + \left(T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw} \right) * \\
& * \sum_{q2=1}^{\infty} \sum_{m2=-\infty}^{\infty} \sum_{q1=1}^{\infty} \sum_{m1=-\infty}^{\infty} C_{q1,m1} D_{m1,1} \frac{RT_{q1}(z)}{j(\Gamma_{m1} + \gamma_{q1}^f)} C_{q2,m2} D_{m2,q1} \frac{RT_{q2}(z)}{j(\Gamma_{m2} + \gamma_{q2}^f)} \varphi_{q2}(x) + \\
& + \left(T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw} \right) * \\
& * \sum_{q3=1}^{\infty} \sum_{m3=-\infty}^{\infty} \sum_{q2=1}^{\infty} \sum_{m2=-\infty}^{\infty} \sum_{q1=1}^{\infty} \sum_{m1=-\infty}^{\infty} C_{q1,m1} D_{m1,1} \frac{RT_{q1}(z)}{j(\Gamma_{m1} + \gamma_{q1}^f)} C_{q2,m2} D_{m2,q1} \frac{RT_{q2}(z)}{j(\Gamma_{m2} + \gamma_{q2}^f)} * \\
& * C_{q3,m3} D_{m3,q2} \frac{RT_{q3}(z)}{j(\Gamma_{m3} + \gamma_{q3}^f)} \varphi_{q3}(x);
\end{aligned}$$

Знайдемо вираз для визначення коефіцієнтів відбиття і проходження, підставивши в ліві частини отриманих виразів функцію шуканого поля у вигляді суперпозиції падаючої хвилі і хвиль, відбитих як від діелектричної вставки, так і від апертури:

$$\begin{aligned}
E^I(x, z) = & T0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + R0^{dw} \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z) + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} \left[T_q^{dw} \cdot \varphi_q(x) \exp(-j\gamma_q^{dw}(z + l_w)) + R_q^{dw} \cdot \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^{dw}z) \right]. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Зафіксуємо точки спостереження при $z = 0$ і скористаємося властивістю ортогональності власних функцій. Це дозволяє знайти розподіл поля на апертурі одиничної комірки у вигляді розкладання по системі поперечних власних функцій плоскопаралельного хвилеводу з невідомими амплітудними коефіцієнтами проходження і відбиття. Перші три наближення для коефіцієнтів відбиття і проходження:

$$\begin{aligned}
& \left[T_q^{dw} \exp(-j\gamma_q^{dw}l_w) + R_q^{dw} \right]^{(1)} = \\
& = \left(T0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw}l_w) + R0^{dw} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{q,m} D_{m,1} \frac{RT_q(0)}{j(\Gamma_m + \gamma_q^f)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[T_q^{dw} \exp(-j\gamma_q^{dw} l_w) + R_q^{dw} \right]^{(2)} = \\
& = \left(T_0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw} l_w) + R_0^{dw} \right) \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_2, m_2} D_{m_2, 1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} + \\
& \quad + \left(T_0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw} l_w) + R_0^{dw} \right) * \\
& \quad * \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_1, m_1} D_{m_1, 1} \frac{RT_{q_1}(0)}{j(\Gamma_{m_1} + \gamma_{q_1}^f)} C_{q_2, m_2} D_{m_2, q_1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} = \\
& = R_q^{(1)} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} C_{q_2, m_2} D_{m_2, q_1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} R_{q_1}^{(1)}; \\
& \left[T_q^{dw} \cdot \exp(-j\gamma_q^{dw} l_w) + R_q^{dw} \right]^{(3)} = \\
& = \left(T_0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw} l_w) + R_0^{dw} \right) \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_2, m_2} D_{m_2, 1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} + \\
& \quad + \left(T_0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw} l_w) + R_0^{dw} \right) * \\
& \quad * \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_1, m_1} D_{m_1, 1} \frac{RT_{q_1}(0)}{j(\Gamma_{m_1} + \gamma_{q_1}^f)} C_{q_2, m_2} D_{m_2, q_1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} + \\
& \quad + \left(T_0^{dw} \exp(-j\gamma_1^{dw} l_w) + R_0^{dw} \right) * \\
& \quad * \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_1, m_1} D_{m_1, 1} \frac{RT_{q_1}(0)}{j(\Gamma_{m_1} + \gamma_{q_1}^f)} C_{q_2, m_2} D_{m_2, q_1} \frac{RT_{q_2}(0)}{j(\Gamma_{m_2} + \gamma_{q_2}^f)} * \\
& \quad * C_{q_3, m_3} D_{m_3, q_2} \frac{RT_{q_3}(0)}{j(\Gamma_{m_3} + \gamma_{q_3}^f)} = R_q^{(1)} + \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} C_{q_3, m_3} D_{m_3, q_2} \frac{RT_{q_3}(0)}{j(\Gamma_{m_3} + \gamma_{q_3}^f)} R_{q_2}^{(2)};
\end{aligned}$$

Вираз для визначення розподілу поля по ітераціям представимо у вигляді матричного рівняння, аналогічного за видом (1.48):

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(i-1)} \quad (2.30)$$

Матриця-стовпець \mathbf{X} являє собою комплексний амплітудний коефіцієнт розподілу поля в апертурі хвилеводу ($z=0$). Матриця \mathbf{A} визначається як:

$$A_{q,p} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{q,m} D_{m,p} \frac{RT_q(0)}{j(\Gamma_m + \gamma_q^f)}.$$

Із знайденого розподілу поля в області діелектричної вставки необхідно знайти коефіцієнт відбиття падаючої хвилі в області незаповненого хвилеводу. Для цього представимо шукане поле в кожній підобласті у вигляді суми падаючих і відбитих хвиль з урахуванням знайденого розподілу поля на апертурі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E^I(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^w(z + l_w)) + \\ \quad + \sum_{q=1}^Q R_q^w \cdot \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^w(z + l_w)), \quad -\infty < z \leq -l_w; \\ E^I(x, z) = T_0^{dw} \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw}(z + l_w)) + R_0^{dw} \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw}z) + \\ \quad + \sum_{q=1}^Q [T_q^{dw} \varphi_q(x) \exp(-j\gamma_q^{dw}(z + l_w)) + R_q^{dw} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^{dw}z)], \quad -l_w \leq z \leq 0; \\ E^I(x, 0) = T_q^{dw} \varphi_q(x) \exp(-j\gamma_q^{dw}(0 + l_w)) + R_q^{dw} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^{dw}0) = X_q, \quad z = 0. \end{array} \right.$$

Прирівняємо значення функцій і їх перших похідних по z на границі розділу середовищ і складемо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Розв'язавши таку систему можна знайти сімейство коефіцієнтів, яке представляє собою значення коефіцієнтів відбиття q -хвилі в пласкопаралельному хвилеводі.

2.3.2 Випадок наявності одношарового діелектричного покриття хвилеводів

На рис. 2.4 (б) зображена одинична комірка ФАР з діелектричним покриттям хвилеводів товщиною l і відносною діелектричною проникністю ε . Для розв'язання задачі методом Шварца розіб'ємо всю область визначення поля у вибраній комірці на дві області, що перетинаються. Область I: $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-\infty < z < \infty$. Область II: $-b/2 \leq x \leq b/2$, $0 \leq z < \infty$. В області I при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля типу H_{10} плаского хвилевода.

Область хвилеводу розділяється на три підобласті: підобласть w - плоскопаралельний хвилевод без діелектричного заповнення ($-\infty \leq z \leq 0$), підобласть d - діелектричне покриття ($0 \leq z \leq l$), підобласть f - хвилевод без діелектричного заповнення, продовжений в нескінченність ($l \leq z < \infty$). Підобласті, аналогічні двом останнім, виділяються і в області II.

У цій задачі плоскошарувате діелектричне заповнення необхідно враховувати при побудові функцій Гріна як області I, так і області II. Також слід врахувати, що в інтегральному представленні відносно поля першої області точки джерел послідовно змінюють підобласть, в якій вони знаходяться. У той же час ці точки джерел є точками спостереження в інтегральному представленні відносно поля області II, що призводить до необхідності знаходження поля області II для двох випадків розташування точок спостереження. З огляду на вищесказане, складемо систему інтегральних представлень щодо поля кожної області:

$$\begin{aligned}
 E^I(x, z) = & E_{cm}(x, z) + \\
 & + \int_0^l E_{II}\left(-\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(d')}\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' - \\
 & - \int_0^l E_{II}\left(\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(d')}\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz' + \\
 & + \int_l^\infty E_{II}\left(-\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(f')}\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' - \\
 & - \int_l^\infty E_{II}\left(\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(f')}\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz';
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$E^{II}(x', z') = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', z'' = 0) \frac{\partial}{\partial z''} G^{II(d,f)}(x', z'; x'', z'' = 0) dx''. \tag{2.32}$$

Тут: E_{ex} — функція падаючої хвилі. $G^{I(d,f)}$ и $G^{II(d,f)}$ — функції Гріна областей I і II з урахуванням розташування точок джерел і точок спостереження, верхній індекс показує підобласть, в якій розташовано точки джерел (символ зі штрихом) або точки спостереження (символи без штриха). Для області I змінні x і z описують координати точок спостереження, а x' та

z' — точок джерел. Для області II: x' та z' — точки спостереження, x'' и z'' — точки джерел.

Функції Гріна кожної області, як і раніше, представлені в вигокоподібній формі:

$$G^{I(d',f')}(x,z;x',z') = \sum_{q=0}^{\infty} \phi_q(x)\phi_q(x')f_q^{I(w,d',f')}(z,z');$$

$$G^{II(d,f)}(x,z;x',z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_m^*(x')f_m^{II(d,f,d')}(z,z');$$

Складемо інтегральне рівняння відносно поля першої області. При цьому поздовжні координати точок спостереження будуть приймати значення $-\infty \leq z \leq 0$. Підставимо рівняння (2.32) в (2.31), враховуючи взаємне розташування точок джерел і точок спостереження, і отримаємо наступний вираз:

$$E^I(x,z) = E_{cm}(x,z) +$$

$$+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'',0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial z''} G^{II(d)}\left(-\frac{a}{2}, z'; x'', 0\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(d')}\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' dx'' -$$

$$- \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'',0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial z''} G^{II(d)}\left(\frac{a}{2}, z'; x'', 0\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(d')}\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz' dx'' + \quad (2.33)$$

$$+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'',0) \int_l^{\infty} \frac{\partial}{\partial z''} G^{II(f)}\left(-\frac{a}{2}, z'; x'', 0\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(f')}\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' dx'' -$$

$$- \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'',0) \int_l^{\infty} \frac{\partial}{\partial z''} G^{II(f)}\left(\frac{a}{2}, z'; x'', 0\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{I(f')}\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz' dx'';$$

Підставимо в отримане рівняння вирази для функцій Гріна і згрупуємо множники:

$$\begin{aligned}
E^l(x, z) = E_{cm}(x, z) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^l(x'', 0) \psi_m^*(x') dx'' C_{q,m} \varphi(x) * \\
* \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial z''} f_m^{II(d,d')}(z', 0) f_q^{I(w,d')}(z, z') dz' + \right. \\
\left. + \int_l^{\infty} \frac{\partial}{\partial z''} f_m^{II(f,d')}(z', 0) f_q^{I(w,f')}(z, z') dz' \right); \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Тут коефіцієнт $C_{q,m}$ визначається таким же чином, як і в (2.26).

Наведений вище вираз представляє собою неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно E_y -компоненти вектора напруженості електричного поля в хвилеводі розглянутої одиничної комірки.

Для розв'язання цього рівняння знайдемо також повздовжні функції Гріна $f^{I(w,d')}$, $f^{I(w,f')}$ и $f^{II(d,f)}$ и $f^{II(f,f)}$. Функції $f^{I(w,d')}$, $f^{I(w,f')}$ будемо, як і раніше, знаходити у вигляді суперпозиції падаючих і відбитих хвиль, що збуджуються точковим джерелом, який знаходиться (для випадку інтегрування в межах від 0 до l) в підобласті d :

$$\left\{ \begin{aligned} f_q^{I(w,d')}(z, z') &= t^w \cdot \exp(j\gamma_q^w z), & -\infty < z \leq 0; \\ f_q^{I(d,d')}(z, z') &= t^d \cdot \exp(-j\gamma_q^d z) + r^d \cdot \exp(j\gamma_q^d (z-l)) + \\ &+ \frac{1}{2j\gamma_q^d} \exp(-j\gamma_q^d |z-z'|), & 0 \leq z \leq l; \\ f_q^{I(f,d')}(z, z') &= t^f \cdot \exp(-j\gamma_q^f (z-l)), & l \leq z < \infty. \end{aligned} \right. \quad (2.35)$$

Для інтегрування в межах від l до ∞ точкове джерело знаходиться в підобласті f :

$$\left\{ \begin{aligned} f_q^{I(w,f')}(z, z') &= t^w \cdot \exp(j\gamma_q^w z), & -\infty < z \leq 0; \\ f_q^{I(d,f')}(z, z') &= t^d \cdot \exp(-j\gamma_q^d z) + r^d \cdot \exp(j\gamma_q^d (z-l)), & 0 \leq z \leq l; \\ f_q^{I(f,f')}(z, z') &= t^f \cdot \exp(-j\gamma_q^f (z-l)) + \frac{1}{2j\gamma_q^f} \exp(-j\gamma_q^f |z-z'|), & l \leq z < \infty. \end{aligned} \right. \quad (2.36)$$

Точки спостереження для цих двох функцій завжди будуть знаходитися в підобласті w , таким чином, в (2.35) і (2.36) необхідно знайти тільки

коефіцієнти t^w . Для цього прирівнюємо функції та їх перші похідні по z на границях розділу середовищ. Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яку розв'язуємо, як і раніше, методом Крамера. Вирази для поздовжніх функцій Гріна $f^{I(w,d')}$ и $f^{I(w,f')}$ приймають вид:

$$\begin{cases} f_q^{I(w,d')} (z, z') = \left[e^{-j\gamma_q^d z'} (j\gamma_q^f + j\gamma_q^d) + \right. \\ \left. + e^{j\gamma_q^d z'} e^{-j\gamma_q^d 2l} (j\gamma_q^d - j\gamma_q^f) \right] \cdot \frac{e^{j\gamma_q^w z}}{\Delta_q^I}, & 0 \leq z' \leq l; \\ f_q^{I(w,f')} (z, z') = 2j\gamma_q^d e^{-j\gamma_q^d l} e^{-j\gamma_q^f (z-l)} \frac{e^{j\gamma_q^w z}}{\Delta_q^I}, & l \leq z' < \infty. \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\Delta_q^I = \left(1 + e^{-j\gamma_q^d 2l}\right) (j\gamma_q^d j\gamma_q^f + j\gamma_q^d j\gamma_q^w) + \left(1 - e^{-j\gamma_q^d 2l}\right) (j\gamma_q^d j\gamma_q^d + j\gamma_q^f j\gamma_q^w). \quad (2.38)$$

Для знаходження функції f^{II} необхідно скласти тільки одну систему рівнянь, оскільки точки джерел для цієї функції завжди розташовані в підобласті d при $z=0$. Функція f^{II} шукається у вигляді:

$$\begin{cases} f_m^{II(d,d')} (z, z') = \frac{1}{2j\Gamma_m^d} \exp(-j\Gamma_q^d |z - z'|) + \\ \quad + t^d \cdot \exp(-j\Gamma_q^d z) + r^d \cdot \exp(j\Gamma_q^d (z - l)), & 0 \leq z \leq l \\ f_m^{II(f,d')} (z, z') = t^f \cdot \exp(-j\gamma_q^f (z - l)), & l \leq z < \infty. \end{cases} \quad (2.39)$$

Тут, виходячи з постановки задачі, необхідно знайти всі невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження прирівнюємо значення функції та її нормальної похідної на границях розділу середовищ. Ця функція описує поведінку E_y -компоненти електричного поля, яка є дотичною до торців металевих стінок хвилеводів решітки, тому введемо додаткову умову рівності нулю поздовжньої компоненти функції Гріна на металевій стінці $f^{II}(0, z')=0$.

Розв'язуючи складену систему рівнянь, отримаємо поздовжню компоненту функції Гріна області II в наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned}
f_m^{II(d,d')} (z, z') &= \frac{e^{-j\Gamma_m^d |z-z'|}}{2j\Gamma_m^d} + \frac{1}{2\Delta_m^{II}} \left[e^{-j\Gamma_m^d z} * \right. \\
&* \left. \left\{ e^{j\Gamma_m^d (z'-l)} \left(\frac{\Gamma_m^f}{\Gamma_m^d} - 1 \right) - e^{-j\Gamma_m^d (z'-l)} \left(\frac{\Gamma_m^f}{\Gamma_m^d} - 1 \right) \right\} + \right. \\
&\left. + 2 \operatorname{sh} \left(j\Gamma_m^d z' \right) \left(1 - \frac{\Gamma_m^f}{\Gamma_m^d} \right) e^{j\Gamma_m^d (z'-l)} \right]; \quad 0 \leq z \leq l; \\
f_m^{II(f,d')} (z, z') &= \frac{1}{\Delta_m^{II}} 2 \operatorname{sh} \left(j\Gamma_m^d z' \right) e^{-j\Gamma_m^f (z-l)}; \quad l \leq z < \infty,
\end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

Отримані вирази для функцій Гріна підставляються в підсумкове інтегральне рівняння (2.34). Останнє приведемо до вигляду, зручного для розрахунків, зафіксувавши при цьому точку спостереження при $z = 0$:

$$E^I(x, 0) = E_{ex}(x, 0) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) \Psi_m^*(x') dx'' \cdot I_{q,m}(0) \cdot C_{q,m} \cdot \varphi_q(x); \quad (2.41)$$

Тут:

$$\begin{aligned}
I_{q,m}(z) &= \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial z''} f_m^{II(d,d')} (z', 0) f_q^{I(w,d')} (z, z') dz' + \right. \\
&\left. + \int_l^{\infty} \frac{\partial}{\partial z''} f_m^{II(f,d')} (z', 0) f_q^{I(w,f')} (z, z') dz' \right); \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Функція стороннього поля визначається наступним виразом:

$$\left\{ \begin{aligned}
E_{ex}(x, z) &= \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^w z) + & -\infty < z \leq 0; \\
&\quad + R0^w \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^w z), \\
E_{ex}(x, z) &= T0^d \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^{dw} z) + & 0 \leq z \leq l; \\
&\quad + R0^d \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^{dw} (z-l)), \\
E_{ex}(x, z) &= T0^f \cdot \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^f (z-l)), & l \leq z < \infty.
\end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

Оскільки точки спостереження знаходяться в підобласті w ($-\infty < z \leq 0$), при розрахунках необхідно використовувати перше рівняння системи (2.43). Спосіб знаходження невідомих коефіцієнтів $R0^{w,d}$ и $T0^{w,d,f}$ аналогічний до випадку наявності діелектричної вставки.

Перетворимо рівняння (2.41) до виду, аналогічному (1.48) для методу простої ітерації, а потім до виду (2.11). Для цього, підставимо в ліву частину (2.41) шукане поле у вигляді:

$$E_{ex}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1^w z) + R0^w \cdot \varphi_1(x) \exp(j\gamma_1^w z) + \sum_{q=1}^Q R_q^w \cdot \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q^w z).$$

В якості першого наближення використаємо перше рівняння системи (2.42). Виконуючи ітераційну процедуру і розв'язуючи отримані рівняння відносно коефіцієнтів R_q^w , перейдемо до матричного рівняння виду (1.48): $\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(i-1)}$. Визначимо матрицю \mathbf{A} в наступному вигляді:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} \circ \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}.$$

Тут елементи матриць $\mathbf{C} = C_{qm}$, $\mathbf{D} = D_{mq}$ и $\mathbf{I} = I_{qm}$ визначаються виразами (2.27), (1.45) і (2.42) відповідно, символ « \circ » позначає матричний добуток Адамара. Перше наближення матриці $\mathbf{R}^{(1)}$ визначається як:

$$R_q^{(1)} = \sum_{m=-M}^M (1 + R0^w) I_{q,m} \cdot C_{q,m} \cdot D_{m,1}.$$

Повний коефіцієнт відбиття хвилі H_{10} плоскопаралельного хвилеводу визначається сумою коефіцієнтів відбиття від апертури і від границі розділу двох середовищ $R0^w + R_1$.

При переході до методу оптимальної ітерації і матричного рівняння виду $\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + (1 - \beta) \mathbf{R}^{(i-1)} + \beta \cdot \mathbf{A} \mathbf{R}^{(i-1)}$ елементи матриці $\mathbf{R}^{(1)}$ в першому наближенні визначаються як: $R_q^{(1)} = \beta \sum_{m=-M}^M (1 + R0^w) I_{q,m} \cdot C_{q,m} \cdot D_{m,1}$. Повний коефіцієнт відбиття визначається, як і в попередньому випадку, сумою $R0^w + R_1$.

2.3.3 Чисельні результати

Для розглянутої задачі була складена програма чисельного розрахунку на ПЕОМ коефіцієнта відбиття падаючої хвилі. Чисельна збіжність

результатів для ФАР з діелектричною вставкою в залежності від числа врахованих типів хвиль для розмірів решітки $b/\lambda=0,5714$, $a=b \cdot (1 - 0,063)$ наведена в табл. 2.4. Діелектрична проникність матеріалу вставки $\epsilon=2$, її товщина $l_w = 0,824b$, $\sin(\theta) = 0,05$.

Таблиця 2.4 — Дослідження збіжності за числом врахованих типів хвиль для задачі з хвилеводною вставкою ($\epsilon=2$, $b/\lambda=0.5714$, $a=0.937b$, $l_w=0,824b$, $\sin(\theta) = 0,05$).

M	МПІ			МОІ			МЧОП	
	Модуль	Фаза	i	Модуль	Фаза	i	Модуль	Фаза
2	0.46713	-158.36	41	0.46713	-158.36	28	0.46713	-158.36
4	0.47115	-157.91	41	0.47115	-157.91	28	0.47115	-157.91
6	0.47169	-157.94	42	0.47169	-157.94	26	0.47169	-157.94
8	0.47176	-158.01	42	0.47176	-158.01	24	0.47175	-158.01
10	0.47178	-158.06	42	0.47178	-158.06	22	0.47178	-158.06
12	0.47184	-158.09	42	0.47183	-158.09	21	0.47183	-158.09
14	0.47191	-158.08	42	0.47191	-158.08	21	0.47191	-158.08
16	0.47198	-158.07	42	0.47198	-158.07	20	0.47198	-158.07
18	0.47204	-158.06	42	0.47203	-158.06	20	0.47203	-158.06
20	0.47206	-158.06	42	0.47206	-158.06	20	0.47206	-158.06
22	0.47207	-158.06	42	0.47206	-158.06	20	0.47206	-158.06
24	0.47206	-158.07	42	0.47206	-158.07	20	0.47206	-158.07
26	0.47206	-158.07	42	0.47206	-158.07	19	0.47206	-158.07
28	0.47207	-158.08	42	0.47206	-158.08	19	0.47206	-158.08
30	0.47207	-158.07	42	0.47207	-158.07	19	0.47207	-158.07
32	0.47208	-158.07	42	0.47208	-158.07	19	0.47208	-158.07

У табл. 2.5 показана чисельна збіжність розв'язання для ФАР з діелектричним покриттям. Розміри решітки $b/\lambda=0,5714$, $a=b$, товщина шару покриття $l=\lambda/8$, діелектрична проникність матеріалу $\epsilon=3,0625$, $\sin(\theta) = 0,05$.

У табл. 2.4 і 2.5 для ітераційних методів також наведено необхідну кількість ітерацій, при якому абсолютне значення приросту результату в наступних ітераціях становить менше за 10^{-5} .

У табл. 2.6 наведена збіжність розглянутих методів по ітераціях для наведених вище умов задач. Число врахованих типів хвиль вибиралося рівним $M=32$.

Таблиця 2.5 - Дослідження збіжності за числом врахованих типів хвиль
для задачі з діелектричним покриттям
($b/\lambda=0,5714$, $a=b$, $\varepsilon=3,0625$, $l=\lambda/8$, $\sin(\theta) = 0,05$).

M	МПІ			МОІ			МЧПО	
	Модуль	Фаза	i	Модуль	Фаза	i	Модуль	Фаза
2	0,53377	164,27567	16	0,53377	164,27513	38	0,53377	164,27547
4	0,53139	164,65136	16	0,53139	164,65150	28	0,53139	164,65111
6	0,53124	164,76920	16	0,53124	164,76906	25	0,53124	164,76894
8	0,53134	164,82330	16	0,53135	164,82336	23	0,53134	164,82304
10	0,53148	164,85347	16	0,53147	164,85305	22	0,53147	164,85321
12	0,53159	164,87242	16	0,53159	164,87205	21	0,53159	164,87215
14	0,53169	164,88530	16	0,53169	164,88545	20	0,53169	164,88504
16	0,53177	164,89457	16	0,53177	164,89457	20	0,53177	164,89431
18	0,53184	164,90154	16	0,53184	164,90085	19	0,53184	164,90128
20	0,53190	164,90696	16	0,53190	164,90630	19	0,53190	164,90669
22	0,53196	164,91127	16	0,53196	164,91068	19	0,53195	164,91101
24	0,53200	164,91479	16	0,53200	164,91425	19	0,53200	164,91453
26	0,53204	164,91771	16	0,53204	164,91770	18	0,53204	164,91745
28	0,53207	164,92017	16	0,53207	164,92019	18	0,53207	164,91991
30	0,53210	164,92227	16	0,53210	164,92231	18	0,53210	164,92200
32	0,53213	164,92408	16	0,53213	164,92412	18	0,53213	164,92381

Таблиця 2.6 – Дослідження збіжності методів по ітераціях при $M = 32$

i	R_{10} , МПІ				$ R_{10} $, МОІ			
	Вставка		Покриття		Вставка		Покриття	
	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза	Модуль	Фаза
1	0.75792	137.51	0.42413	-154.87	0.63163	137.51	0.39920	-156.79
2	0.56293	-173.47	0.48854	-170.22	0.55235	169.82	0.51000	-172.93
3	0.33656	136.05	0.55060	-167.42	0.40164	158.3	0.57077	-166.09
4	0.62495	155.96	0.54497	-164.17	0.49091	154.23	0.53768	-162.69
5	0.41715	171.39	0.52968	-164.19	0.48276	160.07	0.52082	-164.68
6	0.46140	147.31	0.52870	-165.00	0.46157	158.11	0.53133	-165.58
7	0.53049	161.77	0.53220	-165.10	0.47473	157.48	0.53539	-164.95
8	0.42379	159.96	0.53294	-164.93	0.47365	158.38	0.53218	-164.74
9	0.49067	154.10	0.53223	-164.88	0.47051	158.08	0.53120	-164.93
10	0.48260	161.30	0.53195	-164.92	0.47247	157.98	0.53217	-164.98
11	0.45211	156.97	0.53208	-164.93	0.47232	158.12	0.53239	-164.92
12	0.48729	157.30	0.53216	-164.93	0.47185	158.07	0.53210	-164.91
13	0.46801	159.51	0.53215	-164.92	0.47214	158.06	0.53206	-164.93
14	0.46784	157.04	0.53212	-164.92	0.47212	158.08	0.53214	-164.93
15	0.47896	158.31	0.53212	-164.92	0.47205	158.07	0.53215	-164.92
16	0.46744	158.41	0.53213	-164.92	0.47209	158.07	0.53212	-164.92
17	0.47297	157.59	0.53213	-164.92	0.47209	158.07	0.53212	-164.92
18	0.47384	158.38	0.53213	-164.92	0.47208	158.07	0.53213	-164.92
19	0.46976	158.03	0.53213	-164.92	0.47208	158.07	0.53213	-164.92
20	0.47347	157.94	0.53213	-164.92	0.47208	158.07	0.53213	-164.92

На рис. 2.5 показано графіки залежності модуля і фази коефіцієнта відбиття від кута сканування для решітки с діелектричним покриттям ($b/\lambda=0,5714$, $a=b$, $\varepsilon=3,0625$). Товщина покриття вибиралася таким чином, щоб уникнути явища поширення поверхневих хвиль, описаного в [63]. Як видно з графіків, наявність покриття невеликої товщини ($\lambda/32$ або $\lambda/64$) дозволяє домогтися деякого зниження коефіцієнта відбиття.

На рис. 2.6 показано графіки залежності модуля і фази коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} від кута сканування $kbsin\theta$ для решітки з діелектричними вставками різної товщини: $l_w = 1,03b$; $0,824b$; $0,618b$ ($b/\lambda=0,5714$, $a=0,937b$, $\varepsilon=2$).

Порівняння отриманих результатів з результатами для аналогічних задач з [67] показує їх збіг з графічною точністю, що підтверджує коректність побудованого алгоритму.

В даному розділі були розглянуті задачі дифракції на нескінченних ФАР з пласко паралельних хвилеводів. Розв'язок задач отримувався відносно тільки однієї E_y -компоненти вектора напруженості електричного поля, що дозволило виявити основні особливості застосування ітераційного методу для розв'язування дифракційних задач без значних витрат часу на побудову алгоритму і чисельний аналіз задачі.

У наступних розділах показано що алгоритм, розроблений для ФАР, може бути успішно застосований до векторних тривимірних задач дифракції на ступінчастих неоднорідностях в прямокутних хвилеводах.

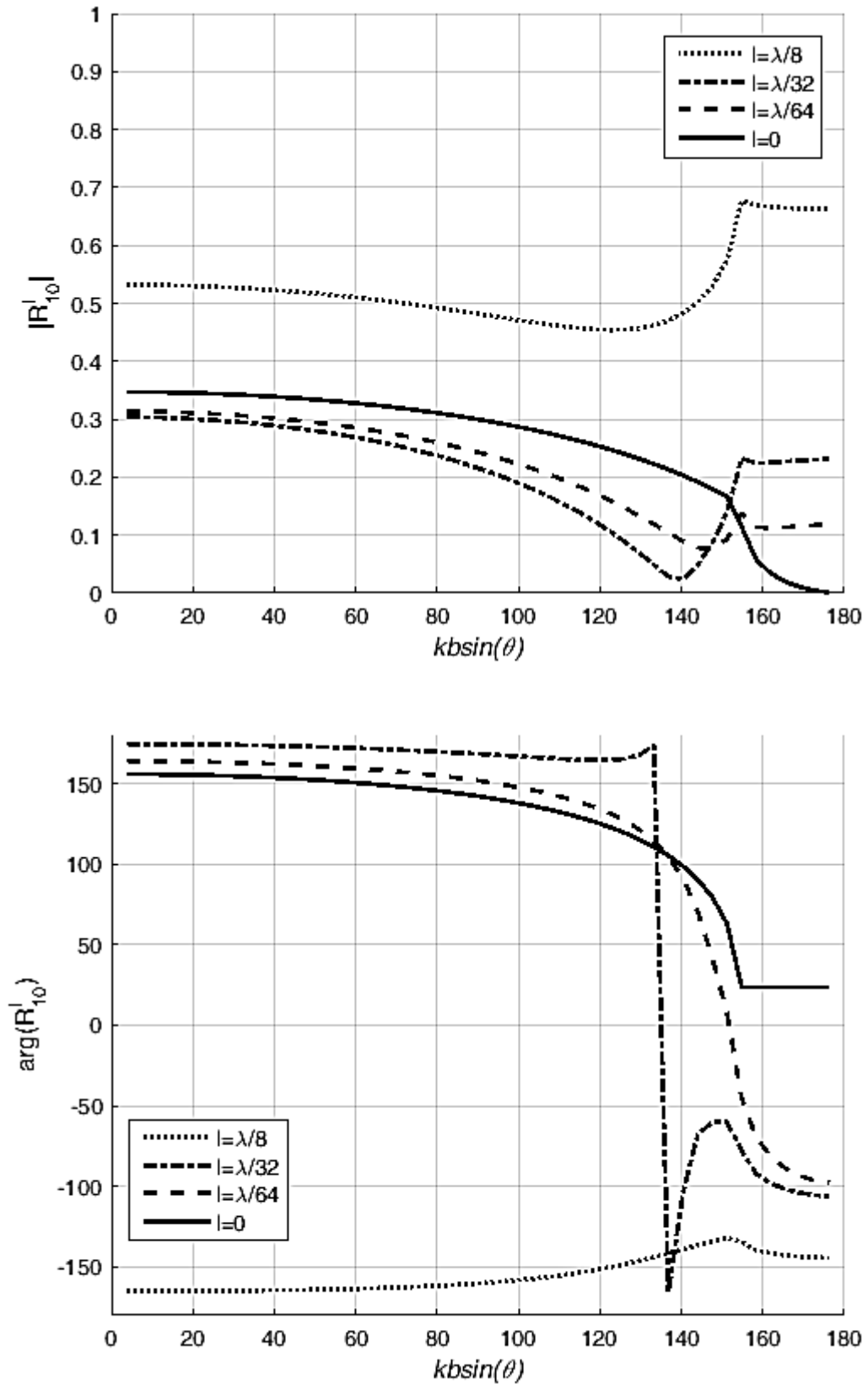


Рисунок 2.5 — Залежність коефіцієнта відбиття від кута сканування для решітки з паралельних пластин з одношаровим діелектричним покриттям ($b/\lambda=0,5714$, $a=b$, $\varepsilon=3,0625$).

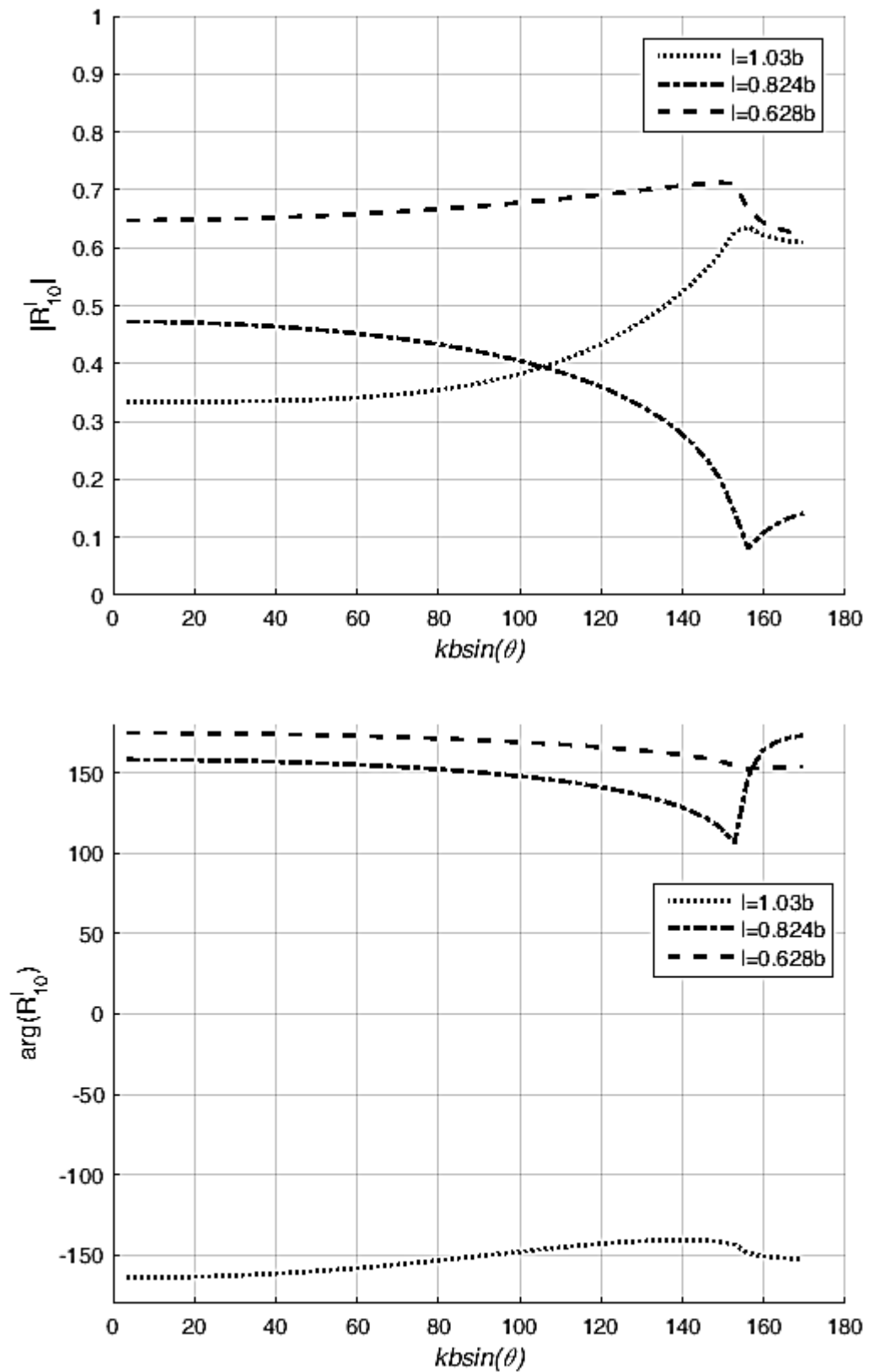


Рисунок 2.6 — Залежність коефіцієнта відбиття від кута сканування в H -площині для решітки з хвилеводів з діелектричними вставками ($b/\lambda=0,5714$, $a=0,937b$, $\varepsilon=2$).

Висновки до розділу 2

1. Запропоновано алгоритм оптимальної ітерації, що дозволяє поліпшити збіжність методу Шварца для випадків, коли метод простої ітерації не дозволяє отримати збіжного розв'язання.

2. На основі запропонованого алгоритму розглянуто задачу дифракції електромагнітної хвилі на ФАР з пласкопаралельних хвилеводів. Досліджено чисельну збіжність методу оптимальної ітерації і проведено порівняння отриманих результатів з відомими, що підтверджує коректність побудованого алгоритму та достовірність отриманих результатів.

3. Розглянуто задачі дифракції електромагнітних хвиль на нескінченних ФАР з пласкопаралельних хвилеводів із суцільним діелектричним заповненням хвилеводів, а також діелектричними вставками і покриттям хвилеводів решітки. На прикладі розглянутих задач була запропонована методика побудови функції Гріна часткових областей при наявності такого типу неоднорідностей.

4. На основі розглянутих задач, представлено підхід до розрахунку коефіцієнта відбиття у хвилеводі решітки при знайденому розподілі поля в апертурі одиничної комірки, в якій присутній діелектрична вставка. Показано особливості побудови системи інтегральних представлень полів підобластей, що виникають при наявності діелектричного покриття в області випромінювання.

5. Представлено чисельні результати розрахунку амплітуди і фази коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в одиничній комірці нескінченної ФАР, отримані за допомогою алгоритму оптимальної ітерації методу Шварца для випадків наявності суцільного діелектричного заповнення і пласкошаруватого покриття хвилеводів решітки. Отримані результати підтверджують коректність і ефективність розробленого алгоритму оптимальної ітерації, методики побудови функції Гріна та функції падаючої хвилі для такого типу неоднорідностей

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ШВАРЦА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ

У попередньому розділі була розвинена методика застосування альтернуючого методу Шварца на прикладах розв'язання задач дифракції електромагнітної хвилі на нескінченних лінійних хвилеводних ФАР. Вихідні задачі були зведені до задач дифракції електромагнітної хвилі на стику пласкопаралельного і просторового хвилеводів.

В даному розділі розглядається задача дифракції електромагнітної хвилі на стику двох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу. Складність задачі полягає в тому, що хвиля H_{10} , поширюючись з хвилеводу з меншим розміром поперечного перерізу в хвилевід з більшим розміром, зазнає дифракцію у двох площинах. Це призводить до виникнення хвиль вищих типів в обох хвилеводах. На точність кінцевого результату розрахунків сильно впливає врахування типів хвиль, що не поширюються.

Розв'язок такої задачі розглядався різними методами. У роботах [34] та [35] на основі методу скінченних елементів розв'язано задачі дифракції для співвісного з'єднання прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу, а також для східчастих переходів у E - та H -площинах.

Метод зшивання використано в роботі [51]. При врахуванні впливу вищих типів хвиль в багатоступеневих структурах вводилося наближення, яке передбачало, що типи хвиль, які не поширюються, загасають досить швидко і не впливають на підсумкові коефіцієнти відбиття і проходження.

У роботах [64] та [65] задача дифракції на стику хвилеводів розглядалася за допомогою методу інтегрального рівняння для напруженості електричного поля. Ядром цього рівняння була функція Гріна вільного простору. В якості невідомих величин, що підлягають визначенню, виступали поверхневі електричні струми на стінках хвилеводів, а також коефіцієнти проходження та відбивання.

У даному розділі для вказаної задачі розглянуто електродинамічний алгоритм, заснований на інтегральній теоремі векторної теорії дифракції з використанням апарату тензорних функцій Гріна. Отримана система інтегральних рівнянь для виділених областей, що перетинаються, була розв'язана методом послідовних наближень. Розгляд задачі і побудова електродинамічного алгоритму виконувалися в повній постановці без введення будь-яких додаткових наближень, за винятком обмеження кінцевої величиною числа врахованих типів хвиль в хвилеводах.

3.1 Постановка задачі

Покажемо застосування ітераційного методу Шварца для розв'язування векторної задачі дифракції електромагнітної хвилі на стику двох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу (рис 3.1).

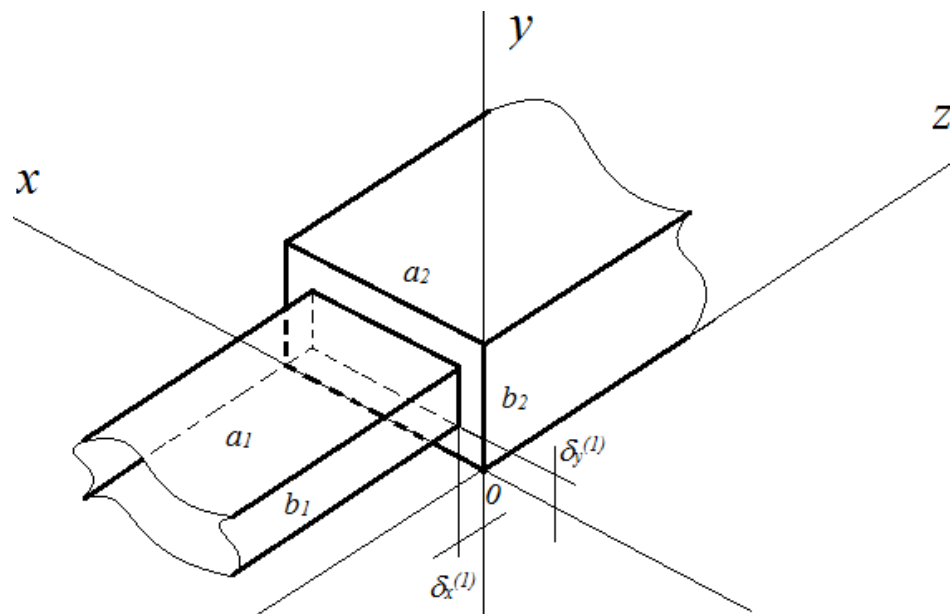


Рисунок 3.1 — Співвісний стик прямокутних хвилеводів

Всю область визначення поля розбиваємо на дві області, що перетинаються. Область 1: прямокутний хвилевод з перетином $a_1 \times b_1$, продовжений в нескінченність, $\delta_x^{(1)}$, $\delta_y^{(1)}$ — зміщення хвилеводу по осях Ox і

Oy , для співвісного з'єднання $\delta_x^{(1)}=(a_2-a_1)/2$, $\delta_y^{(1)}=(b_2-b_1)/2$. Область 2: напівнескінченний прямокутний хвилевод перетином $a_2 \times b_2$. В області 1 при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля H_{10} . Стінки хвилеводів вважаються ідеально провідними, а входи хвилеводів - повністю узгодженими. Розв'язок задачі знаходимо відносно вектора напруженості електричного поля області 1.

Скористаємося інтегральною теоремою векторної теорії дифракції відносно вектора напруженості електричного поля (1.10):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\iiint_V j\omega\mu\vec{J}_{cm}(\vec{r}') \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') dV - \\ - \iint_S \left[(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}')) \cdot \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') + (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')) \cdot \nabla \times \vec{G}_e(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS$$

Тут \vec{n} — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S , залежність від часу — $\exp(j\omega t)$. Задамо граничні умови для тензорів функцій Гріна. Для ідеально провідної поверхні стінок хвилеводів, що розглядаються в даній задачі, функція Гріна повинна задовольняти тим же граничним умовам, що і шуканий з її допомогою вектор напруженості електричного поля, а саме, граничним умовам першого роду (1.17):

$$\vec{n} \times \vec{G}_{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S;$$

Для часткової області 1 загальна поверхня інтегрування S представлена поверхнею металевих стінок прямокутного хвилеводу, який продовжено в нескінченність, площиною $z \rightarrow -\infty$, на якій задано розподіл поля падаючої хвилі H_{10} , і площиною $z \rightarrow \infty$, поле на якій задовольняє принципу граничного поглинання. Для другої часткової області поверхня інтегрування S представлена поверхнею металевих стінок напівнескінченного хвилеводу, площиною апертури S_A , що утворена стиком хвилеводів при $z=0$, і площиною $z \rightarrow \infty$, поле на якій також задовольняє принципу граничного поглинання.

Врахуємо наведені граничні умови для функцій Гріна, задані граничні значення функції джерела поля, а також те, що в даній області відсутні сторонні струми, а шукане поле носить вихровий характер. Складемо

наступну систему інтегральних представлень для повних полів виділених часткових областей:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_{ex} + \int_{S_1} \vec{n}_1 \times \vec{E}_2(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1; \\ \vec{E}_2(\vec{r}) = \int_{S_2} \vec{n}_2 \times \vec{E}_1(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_2^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут \vec{n}_i , $i=1,2$ — внутрішня нормаль до відповідної поверхні інтегрування, \vec{E}_{ex} — вектор напруженості електричного поля збуджуючої хвилі H_{10} , вид якої визначається згідно (1.22) з урахуванням неоднорідних граничних умов, \vec{r} и \vec{r}' — радіус-вектори точок спостереження і точок джерел поля відповідно, \vec{G}_i^e , $i=1,2$ — функції Гріна електричного типу відповідної області. Поверхня S_1 представлена уявними стінками хвилеводу розмірами $a_1 \times b_1$, продовженими від $z=0$ в нескінченність, а S_2 — апертура з розмірами $a_1 \times b_1$, яка утворена стиком хвилеводів при $z=0$.

Поверхня інтегрування S_1 може бути представлена сумою площин стінок хвилеводу перетином $a_1 \times b_1$. Отже, інтеграл в представленні для вектора \vec{E}_1 можна перетворити в суму з чотирьох інтегралів по кожній з цих стінок. Після виконання такого перетворення і конкретизації нормалей для кожної поверхні інтегрування система інтегральних представлень (3.1) для ітерації k -порядку прийме вигляд:

$$\begin{cases} \vec{E}_1^{(k)}(\vec{r}) = \vec{E}_{ex} + \int_{S_{11}} \vec{y}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 + \\ \quad + \int_{S_{12}} \vec{x}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 - \\ \quad - \int_{S_{13}} \vec{y}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 - \\ \quad - \int_{S_{14}} \vec{x}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1; \\ \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}) = \int_{S_2} \vec{z}_0 \times \vec{E}_1^{(k-1)}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_2^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Тут $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ — одиничні орти правої прямокутної системи координат.

В (3.2) межі інтегрування приймають наступні значення:

$$\text{для } S_{11}: x' \in [\delta_x^{(1)}; a_1 + \delta_x^{(1)}], \quad y' = \delta_y^{(1)}, \quad z' \in [0; +\infty);$$

$$\text{для } S_{12}: x' = \delta_x^{(1)}, \quad y' \in [\delta_y^{(1)}; b_1 + \delta_y^{(1)}], \quad z' \in [0; +\infty);$$

$$\text{для } S_{13}: x' \in [\delta_x^{(1)}; a_1 + \delta_x^{(1)}], \quad y' = \delta_y^{(1)} + b_1, \quad z' \in [0; +\infty);$$

$$\text{для } S_{14}: x' = \delta_x^{(1)} + a_1, \quad y' \in [\delta_y^{(1)}; b_1 + \delta_y^{(1)}], \quad z' \in [0; +\infty);$$

$$\text{для } S_2: x' \in [\delta_x^{(1)}; a_1 + \delta_x^{(1)}], \quad y' \in [\delta_y^{(1)}; b_1 + \delta_y^{(1)}], \quad z' = 0.$$

Для отримання розв'язання системи (3.2) визначимо функції Гріна кожної області.

3.2 Побудова функцій Гріна нескінченного і напівнескінченного прямокутних хвилеводів

Функція Гріна визначається дев'ятьма скалярними величинами G_{ij} , що утворюють тензор другого рангу. Як показано в [89], для задач з обмеженим спектром власних значень тензорну функцію Гріна можна представити у вигляді розкладання по власних векторних функціях, які є розв'язанням однорідного векторного рівняння Гельмгольца $\Delta \vec{F}_n + k_n^2 \vec{F}_n = 0$. Однак, для прямокутного хвилеводу така методика є надмірно громіздкою. Покажемо, що для розв'язування даної задачі достатньо знайти функцію Гріна потенційного типу, яка визначається тільки трьома діагональними компонентами тензора.

Функції Гріна електричного і потенційного типів пов'язані з функцією Гріна магнітного типу наступними співвідношеннями [87, 88]:

$$\begin{aligned} \vec{G}_{(1,2)}^e &= \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \cdot G_{(1,2)}^A, \\ \vec{G}_{(1,2)}^m &= \nabla \times \vec{G}_{(2,1)}^e, \\ \vec{G}_{(1,2)}^m &= \nabla \times \vec{G}_{(2,1)}^A. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нижній індекс в (3.3) показує рід граничних умов, яким задовольняє відповідний тензор Гріна. Як видно з цих співвідношень, в (3.2) можна застосувати функцію Гріна магнітного типу \vec{G}^m . У свою чергу, для побудови цієї функції можна використовувати тензор Гріна потенційного типу \vec{G}^A з граничними умовами першого роду, що представляє собою, як показано в [88, 89], діагональний тензор виду:

$$\vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz}^A \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

який задовольняє тензорному рівнянню Гельмгольца:

$$\Delta \vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Для визначення компонент тензора (3.4) скористаємося «витокоподібним» представленням функцій Гріна [93, 102–103]:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{x\mu\nu}(x, y) \varphi_{x\mu\nu}(x', y') f_{\mu\nu}(z, z'); \\ G_{yy} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{y\mu\nu}(x, y) \varphi_{y\mu\nu}(x', y') f_{\mu\nu}(z, z'); \\ G_{zz} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{z\mu\nu}(x, y) \varphi_{z\mu\nu}(x', y') g_{\mu\nu}(z, z'); \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поперечні власні функції для граничних умов першого роду областей $i=1,2$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{x\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \cos \left[\frac{\mu\pi}{a_i} (x - \delta_x^{(i)}) \right] \sin \left[\frac{\nu\pi}{b_i} (y - \delta_y^{(i)}) \right] \\ \varphi_{y\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \sin \left[\frac{\mu\pi}{a_i} (x - \delta_x^{(i)}) \right] \cos \left[\frac{\nu\pi}{b_i} (y - \delta_y^{(i)}) \right] \\ \varphi_{z\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \sin \left[\frac{\mu\pi}{a_i} (x - \delta_x^{(i)}) \right] \sin \left[\frac{\nu\pi}{b_i} (y - \delta_y^{(i)}) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тут $\varepsilon_{\mu}, \varepsilon_{\nu}$ — символи Неймана; μ, ν — індекси типів хвиль: для області 1 $\mu=t, \nu=n$, для області 2 $\mu=M, \nu=N$.

Функція від координат z та z' для області 1 має вигляд:

$$f_{mn}(z, z') = g_{mn}(z, z') = \frac{1}{2j\gamma_{mn}} \exp(-j\gamma_{mn}|z - z'|) \quad (3.7)$$

Для області 2:

$$\begin{aligned} f_{MN}(z, z') &= \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \begin{cases} \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{sh}\Gamma_{MN}z'; & z > z' \\ \exp(-j\Gamma_{MN}z') \operatorname{sh}\Gamma_{MN}z; & z < z' \end{cases} \\ g_{MN}(z, z') &= \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \begin{cases} \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}\Gamma_{MN}z'; & z > z' \\ \exp(-j\Gamma_{MN}z') \operatorname{ch}\Gamma_{MN}z; & z < z' \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тут γ_{mn}, Γ_{MN} — поздовжнє хвильове число області 1 і 2 відповідно.

Слід звернути увагу, що на цьому етапі побудови функції Гріна необхідно врахувати взаємне розташування точок джерел і точок спостереження виходячи з конкретної постановки задачі. Так, для області 1 поздовжні координати точок спостереження приймають значення $z \leq 0$, а точок джерел $z \geq 0$. Тоді поздовжня функція Гріна прийме вид:

$$f_{mn}(z, z') = g_{mn}(z, z') = \frac{1}{2j\gamma_{mn}} \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)) \quad (3.9)$$

В області 2 точки джерел розташовані в апертурі при $z' = 0$, а координати точок спостереження $z \geq 0$. Тоді:

$$\begin{aligned} f_{MN}(z, z') &= \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{sh}\Gamma_{MN}z'; \\ g_{MN}(z, z') &= \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}\Gamma_{MN}z'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Застосувавши операцію ротора до тензора, запишемо функції Гріна магнітного типу для областей 1 і 2 в наступному вигляді:

$$\vec{G}^m(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla' \times \vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 & G_{12}^m & G_{13}^m \\ G_{21}^m & 0 & G_{23}^m \\ G_{31}^m & G_{32}^m & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Компоненти тензорів визначаються як:

$$\begin{aligned} G_{12}^m &= -\frac{\partial}{\partial z'} G_{yy}^A(\vec{r}, \vec{r}'); & G_{13}^m &= \frac{\partial}{\partial y'} G_{zz}^A(\vec{r}, \vec{r}'); & G_{21}^m &= \frac{\partial}{\partial z'} G_{xx}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \\ G_{23}^m &= -\frac{\partial}{\partial x'} G_{zz}^A(\vec{r}, \vec{r}'); & G_{31}^m &= -\frac{\partial}{\partial y'} G_{xx}^A(\vec{r}, \vec{r}'); & G_{32}^m &= \frac{\partial}{\partial x'} G_{yy}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для області 1 ці компоненти приймають вид:

$$\begin{aligned}
G_{I12}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi_{y,mn}^I(x, y) \varphi_{y,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)); \\
G_{I13}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2j\gamma_{mn}b_1} \varphi_{z,mn}^I(x, y) \varphi_{y,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)); \\
G_{I21}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{2} \varphi_{x,mn}^I(x, y) \varphi_{x,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)); \\
G_{I23}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)m\pi}{2j\gamma_{mn}a_1} \varphi_{z,mn}^I(x, y) \varphi_{x,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)); \\
G_{I31}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)n\pi}{2j\gamma_{mn}b_1} \varphi_{x,mn}^I(x, y) \psi_{z,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z)); \\
G_{I32}^m &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{2j\gamma_{mn}a_1} \varphi_{y,mn}^I(x, y) \psi_{z,mn}^I(x', y') \exp(-j\gamma_{mn}(z' - z));
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Для області 2 компоненти тензора Гріна приймають вид:

$$\begin{aligned}
G_{II12}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} (-1) \varphi_{y,MN}^{II}(x, y) \varphi_{y,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}(j\Gamma_{MN}z'); \\
G_{II13}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N\pi}{j\Gamma_{MN}b_2} \varphi_{z,MN}^{II}(x, y) \varphi_{y,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}(j\Gamma_{MN}z'); \\
G_{II21}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \varphi_{x,MN}^{II}(x, y) \varphi_{x,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}(j\Gamma_{MN}z'); \\
G_{II23}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)M\pi}{j\Gamma_{MN}a_2} \varphi_{z,MN}^{II}(x, y) \varphi_{x,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{ch}(j\Gamma_{MN}z'); \\
G_{II31}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)N\pi}{j\Gamma_{MN}b_2} \varphi_{x,MN}^{II}(x, y) \psi_{z,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{sh}(j\Gamma_{MN}z'); \\
G_{II32}^m &= \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{M\pi}{j\Gamma_{MN}a_2} \varphi_{y,MN}^{II}(x, y) \psi_{z,MN}^{II}(x', y') \exp(-j\Gamma_{MN}z) \operatorname{sh}(j\Gamma_{MN}z').
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Тут:

$$\psi_{z\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu}\varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \cos\left[\frac{\mu\pi}{a_i}\left(x + \frac{a_i}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\nu\pi}{b_i}\left(y + \frac{b_i}{2}\right)\right]. \tag{3.16}$$

Отримані вирази для компонент тензорів Гріна використовуємо при розв'язанні системи (3.2).

3.3 Розв'язування системи інтегральних рівнянь методом послідовних наближень

Перетворимо систему (3.2) таким чином, щоб отримати систему інтегральних представлень відносно окремих компонент векторів напруженості електричного поля кожної області. Для цього, підставимо в (3.2) шукані векторні функції у вигляді окремих компонент векторів в прямокутній системі координат:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{<k>}(\vec{r}) &= E_{1x}^{<k>}(\vec{r})\vec{x}_0 + E_{1y}^{<k>}(\vec{r})\vec{y}_0 + E_{1z}^{<k>}(\vec{r})\vec{z}_0; \\ \vec{E}_2^{<k>}(\vec{r}) &= E_{2x}^{<k>}(\vec{r})\vec{x}_0 + E_{2y}^{<k>}(\vec{r})\vec{y}_0 + E_{2z}^{<k>}(\vec{r})\vec{z}_0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Виконаємо операції векторного добутку векторів нормалей і шуканих полів. В результаті отримаємо вектор, що складається з двох компонент. Потім виконаємо операції скалярного добутку тензора Гріна на отриманий вектор зліва [104]. Результатом цієї операції буде векторна величина.

Поле падаючої хвилі являє собою хвилю H_{10} , напруженість електричного поля якої описується виразом:

$$\vec{E}_{ex}(x, y, z) = \varphi_{y,10}^I(x, y) \exp(-j\gamma_{10}z) \cdot \vec{y}_0. \quad (3.18)$$

Запишемо систему інтегральних представлень для окремих компонент шуканих векторів, попередньо позначивши радіус-вектори точок джерел для першої і другої областей відповідно r' та r'' , а радіус-вектори точок спостереження як r та r' :

$$E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') = \int_{S_2} E_{1x}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{21}^2(\vec{r}', \vec{r}'') dS_2; \quad (3.19)$$

$$E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') = - \int_{S_2} E_{1y}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{12}^2(\vec{r}', \vec{r}'') dS_2; \quad (3.20)$$

$$E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') = \int_{S_2} \left[E_{1x}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{23}^2(\vec{r}', \vec{r}'') - E_{1y}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{13}^2(\vec{r}', \vec{r}'') \right] dS_2; \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
E_{1x}^{<k>}(\vec{r}) = & - \int_{S11} E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{11} + \\
& + \int_{S12} \left[E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{21}^1(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS_{12} + \\
& + \int_{S13} E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{13} - \\
& - \int_{S14} \left[E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{21}^1(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS_{14};
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
E_{1y}^{<k>}(\vec{r}) = & E_{cm} + \int_{S11} \left[E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{12}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS_{11} + \\
& + \int_{S12} E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{12} - \\
& - \int_{S13} \left[E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{12}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS_{13} - \\
& - \int_{S14} E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{14};
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
E_{1z}^{<k>}(\vec{r}) = & \int_{S11} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{13}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{11} - \int_{S12} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{23}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{12} - \\
& - \int_{S13} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{13}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{13} + \int_{S14} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{23}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{14}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Підстановка виразів для компонент вектора області 2 (3.19) – (3.21) у вирази для компонент шуканого вектора області 1 (3.22) – (3.24) приводить до того, що шукане поле області 1 визначається тільки двома компонентами E_{1x} та E_{1y} .

Після виконання перетворень отримаємо остаточні вирази для x і y компонент вектора електричного поля області 1 в ітерації k -порядку:

$$\begin{aligned}
E_{1y}^{(k)}(x, y, z) = & E_{cm} + \sum_{m,n} \sum_{o,p} \sum_{M,N} \varphi_{y,mn}^l(x, y) \exp(j\gamma_{mn}z) \frac{nS_{m,n} \cdot nS_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left[\iint_{S_2} E_{1x}^{(k-1)}(x'', y'', 0) \cdot \varphi_{x,MN}^l(x'', y'') dx'' dy'' \cdot \left\{ \frac{-m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} + \right. \\
& \left. + \iint_{S_2} E_{1y}^{(k-1)}(x'', y'', 0) \cdot \varphi_{y,MN}^l(x'', y'') dx'' dy'' \cdot \left\{ \frac{m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
E_{1x}^{(k)}(x, y, z) &= \sum_{m,n} \sum_{o,p} \sum_{M,N} \varphi_{x,mn}^I(x, y) \exp(j\gamma_{mn}z) \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left[\iint_{S_2} E_{1x}^{(k-1)}(x'', y'', 0) \cdot \varphi_{x,MN}^{II}(x'', y'') dx'' dy'' \cdot \left\{ \frac{n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{N,n} \cdot CR_{M,m} \right\} + \right. \\
& \left. + \iint_{S_2} E_{1y}^{(k-1)}(x'', y'', 0) \cdot \varphi_{y,MN}^{II}(x'', y'') dx'' dy'' \cdot \left\{ \frac{-n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{M,m} \cdot CR_{N,n} \right\} \right] \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Тут:

$$ns_{\mu,\nu} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu}{a_i b_i}}; \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{m \neq 0} = 2. \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
AI_{M,m} &= \frac{1}{\frac{M\pi}{a_2} - \frac{m\pi}{a_1}} \sin\left(\frac{M\pi}{2a_2} a_1 - \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{M\pi}{2a_2} (a_1 + 2\delta_x^{(1)} - 2\delta_x^{(2)}) - \frac{m\pi}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{\frac{M\pi}{a_2} + \frac{m\pi}{a_1}} \sin\left(\frac{M\pi}{2a_2} a_1 + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{M\pi}{2a_2} (a_1 + 2\delta_x^{(1)} - 2\delta_x^{(2)}) + \frac{m\pi}{2}\right); \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$AR_{N,n} = \sin\left(\frac{N\pi}{b_2} (\delta_x^{(1)} - \delta_x^{(2)})\right) - \sin\left(\frac{N\pi}{b_2} (b_1 + \delta_x^{(1)} - \delta_x^{(2)})\right) \cos(n\pi); \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
BI_{M,m} &= \frac{1}{\frac{M\pi}{a_2} - \frac{m\pi}{a_1}} \sin\left(\frac{M\pi}{2a_2} a_1 - \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{M\pi}{2a_2} (a_1 + 2\delta_x^{(1)} - 2\delta_x^{(2)}) - \frac{m\pi}{2}\right) - \\
& - \frac{1}{\frac{M\pi}{a_2} + \frac{m\pi}{a_1}} \sin\left(\frac{M\pi}{2a_2} a_1 + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{M\pi}{2a_2} (a_1 + 2\delta_x^{(1)} - 2\delta_x^{(2)}) + \frac{m\pi}{2}\right); \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CYI_{N,n} &= \frac{1}{\frac{N\pi}{b_2} - \frac{n\pi}{b_1}} \sin\left(\frac{N\pi}{2b_2} b_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{N\pi}{2b_2} (b_1 + 2\delta_y^{(1)} - 2\delta_y^{(2)}) - \frac{n\pi}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{\frac{N\pi}{b_2} + \frac{n\pi}{b_1}} \sin\left(\frac{N\pi}{2b_2} b_1 + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{N\pi}{2b_2} (b_1 + 2\delta_y^{(1)} - 2\delta_y^{(2)}) + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$CR_{M,m} = \sin\left(\frac{M\pi}{a_2} (\delta_y^{(1)} - \delta_y^{(2)})\right) - \sin\left(\frac{M\pi}{a_2} (a_1 + \delta_y^{(1)} - \delta_y^{(2)})\right) \cos(m\pi); \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
CXI_{N,n} = & \frac{1}{\frac{N\pi}{b_2} - \frac{n\pi}{b_1}} \sin\left(\frac{N\pi}{2b_2}b_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{N\pi}{2b_2}(b_1 + 2\delta_y^{(1)} - 2\delta_y^{(2)}) - \frac{n\pi}{2}\right) - \\
& - \frac{1}{\frac{N\pi}{b_2} + \frac{n\pi}{b_1}} \sin\left(\frac{N\pi}{2b_2}b_1 + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{N\pi}{2b_2}(b_1 + 2\delta_y^{(1)} - 2\delta_y^{(2)}) + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Для визначення величини коефіцієнта відбиття падаючої хвилі поле в області 1 представимо у вигляді суперпозиції падаючої і відбитих хвиль:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(x, y, z) = & \varphi_{y,10}^I(x, y) \exp(-j\gamma_{10}z) \cdot \vec{y}_0 + \\
& + \sum_{m,n} \left(R_{x,mn} \varphi_{x,mn}^I(x, y) \cdot \vec{x}_0 + R_{y,mn} \varphi_{y,mn}^I(x, y) \cdot \vec{y}_0 + R_{z,mn} \varphi_{z,mn}^I(x, y) \cdot \vec{z}_0 \right) \exp(j\gamma_{mn}z). \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Знайдемо вираз для коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в першому наближенні. В якості нульового наближення виберемо напруженість електричного поля падаючої хвилі, яка має тільки одну E_y -компоненту вектора. Підставимо в праві частини (3.25), (3.26) вираз (3.18), а в ліві (3.34) і зафіксуємо точку спостереження в першій області $z=0$, а також обмежимо кількість врахованих типів хвиль кінцевими величинами. Попередньо введемо такі позначення:

$$SY_{op,MN} = \iint_{S_2} \varphi_{y,op}^I(x'', y'') \cdot \varphi_{y,MN}^I(x'', y'') dx'' dy'' \quad (3.35)$$

$$SX_{op,MN} = \iint_{S_2} \varphi_{x,op}^I(x'', y'') \cdot \varphi_{x,MN}^I(x'', y'') dx'' dy'' \quad (3.36)$$

Скористаємося властивістю ортонормованості власних функцій для отримання виразу для коефіцієнта $R_{y,mn}^{(1)}$ в першому приближенні:

$$\begin{aligned}
R_{y,mn}^{(1)} = & \sum_{M,N} \frac{nS_{m,n} \cdot nS_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left[SY_{10,MN} \cdot \left\{ \frac{n\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} \right]. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Для знаходження виразу для коефіцієнта $R_{y,mn}^{(2)}$ у другому наближенні необхідно знайти вираз $R_{x,mn}^{(1)}$ в першому наближенні:

$$R_{x,mn}^{(1)} = \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \left[SY_{10,MN} \cdot \left\{ \frac{-n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{M,m} \cdot CR_{N,n} \right\} \right]. \quad (3.38)$$

Вирази для другого наближення коефіцієнтів $R_{y,mn}^{(2)}$ та $R_{x,mn}^{(2)}$ мають вид:

$$R_{y,mn}^{(2)}(x, y, z) = R_{y,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \left[R_{x,op}^{(1)} SX_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{-m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} + R_{y,op}^{(1)} SY_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} \right]; \quad (3.39)$$

$$R_{x,mn}^{(2)}(x, y, z) = R_{x,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \left[R_{x,op}^{(1)} SX_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{N,n} \cdot CR_{M,m} \right\} + R_{y,op}^{(1)} SY_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{-n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{M,m} \cdot CR_{N,n} \right\} \right] \quad (3.40)$$

Вирази для коефіцієнтів відбиття в ітерації k -порядку:

$$R_{y,mn}^{(k)}(x, y, z) = R_{y,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \left[R_{x,op}^{(k-1)} SX_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{-m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} + R_{y,op}^{(k-1)} SY_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\} \right]; \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
R_{x,mn}^{(k)}(x, y, z) = & R_{x,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left[R_{x,op}^{(k-1)} SX_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{N,n} \cdot CR_{M,m} \right\} + \right. \\
& \left. + R_{y,op}^{(k-1)} SY_{op,MN} \cdot \left\{ \frac{-n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{M,m} \cdot CR_{N,n} \right\} \right]
\end{aligned} \quad (3.42)$$

Представимо вирази (3.41) і (3.42) у вигляді матричного рівняння відносно невідомих коефіцієнтів $R_{y,mn}^{(k)}$ і $R_{x,mn}^{(k)}$ та розв'яжемо його методом ітерацій. Для цього перепишемо (3.41) і (3.42) в наступному вигляді:

$$R_{y,mn}^{(k)}(x, y, z) = R_{y,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} R_{x,op}^{(k-1)} \cdot \alpha_{mn,op}^{yx} + \sum_{o,p} R_{y,op}^{(k-1)} \cdot \alpha_{mn,op}^{yy}; \quad (3.43)$$

$$R_{x,mn}^{(k)}(x, y, z) = R_{x,mn}^{(1)} + \sum_{o,p} R_{x,op}^{(k-1)} \cdot \alpha_{mn,op}^{xx} + \sum_{o,p} R_{y,op}^{(k-1)} \cdot \alpha_{mn,op}^{xy}. \quad (3.44)$$

Тут:

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn,op}^{yx} = & \sum_{M,N} SX_{op,MN} \cdot \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left\{ \frac{-m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\};
\end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn,op}^{yy} = & \sum_{M,N} SY_{op,MN} \cdot \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} * \\
& * \left\{ \frac{m\pi}{a_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} BI_{M,m} \cdot AR_{N,n} \right\};
\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn,op}^{xx} = & \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} SX_{op,MN} * \\
& * \left\{ \frac{n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} AI_{M,m} \cdot AR_{N,n} - \frac{M\pi}{a_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{N,n} \cdot CR_{M,m} \right\};
\end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn,op}^{xy} = & \sum_{M,N} \frac{ns_{m,n} \cdot ns_{M,N}}{2(j\Gamma_{MN} + j\gamma_{mn})} SY_{op,MN} * \\
& * \left\{ \frac{-n\pi}{b_1 j\gamma_{mn}} CYI_{N,n} \cdot CR_{M,m} - \frac{N\pi}{b_2 j\Gamma_{MN}} CXI_{M,m} \cdot CR_{N,n} \right\}.
\end{aligned} \quad (3.48)$$

На основі виразів (3.43) - (3.48) перейдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $R_{y,mn}^{(k)}$ та $R_{x,mn}^{(k)}$ в матричному вигляді:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{R}^{(1)} + \alpha \mathbf{R}^{(k-1)}. \quad (3.49)$$

Тут \mathbf{R} – матриця-стовпець невідомих коефіцієнтів, при цьому одна пара індексів типів хвиль mn відповідає одній комірці матриці-стовпця:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} R_{x,10}^{(k)} \\ R_{x,11}^{(k)} \\ \vdots \\ R_{x,1n}^{(k)} \\ R_{x,20}^{(k)} \\ \vdots \\ R_{x,mn}^{(k)} \\ R_{y,10}^{(k)} \\ \vdots \\ R_{y,mn}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Перше наближення матриці \mathbf{R} розраховується за допомогою виразів (3.37) і (3.38). Аналогічним способом складемо матрицю α , компоненти якої визначаються через (3.45) - (3.48):

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{10,10}^{xx} & \alpha_{10,11}^{xx} & \cdots & \alpha_{10,1p}^{xx} & \alpha_{10,20}^{xx} & \cdots & \alpha_{10,op}^{xx} & \alpha_{10,10}^{xy} & \cdots & \alpha_{10,op}^{xy} \\ \alpha_{11,10}^{xx} & \alpha_{11,11}^{xx} & \cdots & \alpha_{11,1p}^{xx} & \alpha_{11,20}^{xx} & \cdots & \alpha_{11,op}^{xx} & \alpha_{11,10}^{xy} & \cdots & \alpha_{11,op}^{xy} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m,10}^{xx} & \alpha_{1m,11}^{xx} & \cdots & \alpha_{1m,1p}^{xx} & \alpha_{1m,20}^{xx} & \cdots & \alpha_{1m,op}^{xx} & \alpha_{1m,10}^{xy} & \cdots & \alpha_{1m,op}^{xy} \\ \alpha_{20,10}^{xx} & \alpha_{20,11}^{xx} & \cdots & \alpha_{20,1p}^{xx} & \alpha_{20,20}^{xx} & \cdots & \alpha_{20,op}^{xx} & \alpha_{20,10}^{xy} & \cdots & \alpha_{20,op}^{xy} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{mn,10}^{xx} & \alpha_{mn,11}^{xx} & \cdots & \alpha_{mn,1p}^{xx} & \alpha_{mn,20}^{xx} & \cdots & \alpha_{mn,op}^{xx} & \alpha_{mn,10}^{xy} & \cdots & \alpha_{mn,op}^{xy} \\ \alpha_{10,10}^{yx} & \alpha_{10,11}^{yx} & \cdots & \alpha_{10,1p}^{yx} & \alpha_{10,20}^{yx} & \cdots & \alpha_{10,op}^{yx} & \alpha_{10,10}^{yy} & \cdots & \alpha_{10,op}^{yy} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{mn,10}^{yx} & \alpha_{mn,11}^{yx} & \cdots & \alpha_{mn,1p}^{yx} & \alpha_{mn,20}^{yx} & \cdots & \alpha_{mn,op}^{yx} & \alpha_{mn,10}^{yy} & \cdots & \alpha_{mn,op}^{yy} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Розв'язавши отримане рівняння можна знайти сімейство коефіцієнтів розкладання $R_{y,mi}^{(k)}$ та $R_{x,mi}^{(k)}$. Величина коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в наближенні k -порядку визначається значенням елемента $R_{y,10}^{(k)}$ матриці \mathbf{R} .

3.4 Чисельні результати

В роботі розглядалися співвісне і неспіввісне з'єднання хвилеводів WR62 (область 1: $a_1 = 15.8$ мм, $b_1 = 7.9$ мм) і WR90 (область 2: $a_2 = 22.86$ мм, $b_2 = 10.16$ мм). У таблиці 3.1 наведено результати дослідження збіжності алгоритму для співвісного з'єднання хвилеводів і значення нормованої частоти $a_1/\lambda = 0.59$ при різній кількості врахованих типів хвиль в першій і другій областях. Оскільки швидкість і точність обчислень значною мірою залежить від числа врахованих типів хвиль, також досліджувався вплив відношення цього числа хвиль в першій і другій області на точність отриманих результатів. В роботі [105] показано, що для зменшення часу рахунку і отримання розв'язання з достатньою точністю доцільно вибирати співвідношення між максимальним числом врахованих типів хвиль відповідно до наступного критерію:

$$\frac{M}{m} = \frac{a_2}{a_1}; \quad \frac{N}{n} = \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{n}{m} = \frac{b_1}{a_1}; \quad (3.52)$$

Для дослідження чисельної збіжності розглядалися наступні випадки співвідношення між максимальними значеннями індексів типів хвиль: $M=m \cdot a_2/a_1$, $M=2m+1$, $M=3m$. При цьому $n = m-1$ $N = M-1$. Ітераційний процес зупинявся в разі, коли приріст величини коефіцієнта відбиття в наступній ітерації становило менше 10^{-5} .

В ході чисельного експерименту було встановлено, що відносний час розрахунку величини коефіцієнта відбиття для одного значення частоти збільшується в два рази при переході від співвідношення $M=m \cdot a_2/a_1$ до співвідношення $M=2m+1$, а при переході до співвідношення $M= 3m$ час

рахунку додатково збільшується ще в два рази. Використання в алгоритмі чисельного розрахунку операцій матричного множення дозволяє скоротити відносний час рахунку до 10 разів у порівнянні з використанням вкладених операцій підсумовування. Таким чином, для векторних задач перевага у використанні матричних операцій збільшується.

Таблиця 3.1— Чисельна збіжність алгоритму

m	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=m \cdot a_2/a_1$)	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=2m+1$)	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=3m$)
1	0.1380	0.1380	0.1380
3	0.1106	0.1052	0.1074
5	0.1071	0.1077	0.1060
7	0.1075	0.1061	0.1061
9	0.1061	0.1062	0.1058
11	0.1062	0.1060	0.1057
13	0.1062	0.1058	0.1057
15	0.1060	0.1058	0.1057

Як видно з табл. 3.1 збільшення величини відношення M/m при певному числі m слабко впливає на точність отриманих результатів. Таким чином, для подальших розрахунків буде використано співвідношення $M=m \cdot a_2/a_1$.

Таблиця 3.2 — Чисельна збіжність по ітераціях

i	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=m \cdot a_2/a_1$)	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=2m+1$)	$ \mathbf{R}_{10} $ ($M=3m$)
1	0.10629	0.10644	0.10603
2	0.10932	0.10929	0.10868
3	0.10617	0.10624	0.10583
4	0.10607	0.10615	0.10577
5	0.10614	0.10621	0.10582
6	0.10614	0.10622	0.10582
7	0.10614	0.10621	0.10582
8	0.10614	0.10621	0.10582
9	0.10614	0.10621	0.10582
10	0.10614	0.10621	0.10582

У табл. 3.2 наведена чисельна збіжність отриманого розв'язання по кожній ітерації для різного співвідношення числа врахованих типів хвиль першої і другої області, при цьому число m приймалося таким, що дорівнює 9.

На рис. 3.2 показана залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} від співвідношення a_1/λ . Суцільною лінією показані результати, отримані за допомогою представленого алгоритму. Число врахованих типів хвиль становило $m=9$, $n=8$ в першій області і $M=15$, $N=14$ в другій області, а число ітерацій становило не більше 7. Символами «*» на графіку показані результати, отримані в роботі [51].

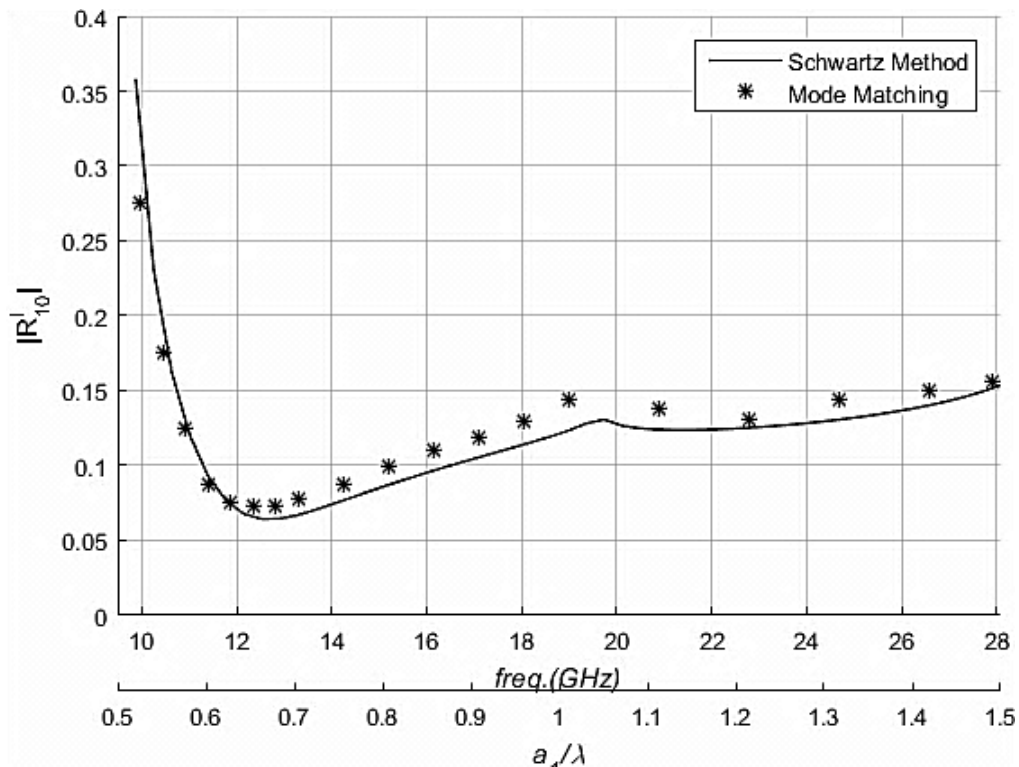


Рисунок. 3.2 - Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття

На рис. 3.3 показана геометрія неспіввісного з'єднання двох хвилеводів. Для цього з'єднання $\delta_x^{(1)} = \delta_y^{(1)} = 0$. Залежність коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} від частоти для такого з'єднання показана на рис. 3.4. При розрахунку коефіцієнта відбиття для такого з'єднання необхідно враховувати всі типи хвиль m , $M = (0), 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ і n , $N = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$. Частоти локальних

максимумів на графіку частотної характеристики відповідають критичним частотам для кожного хвильоводу. Так, перший максимум на частоті 13,11 ГГц відповідає критичній частоті хвилі H_{20} , другий максимум на частоті 16,14 ГГц – хвилі H_{11} , а частота 19,68 ГГц – H_{30} другого хвильоводу.

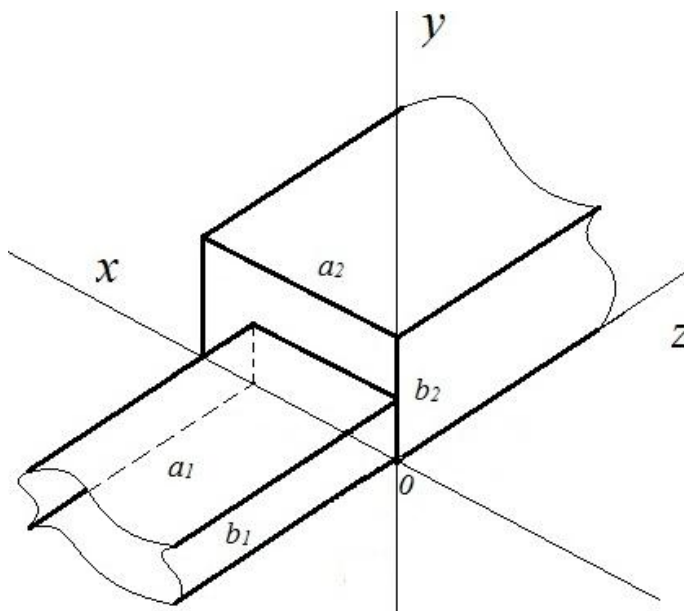


Рисунок 3.3 — Неспіввісне з'єднання двох хвильоводів

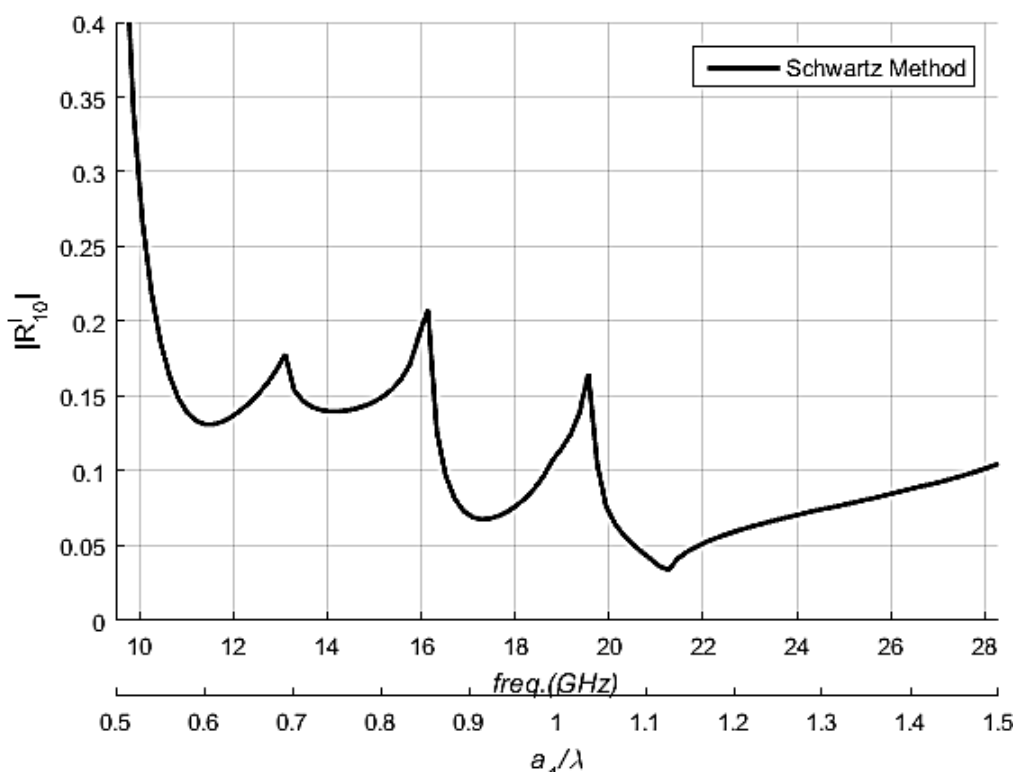


Рисунок 3.4 — Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття для неспіввісного з'єднання хвильоводів

Висновки до розділу 3

1. Розроблено методику побудови системи інтегральних рівнянь шуканих полів для методу Шварца на основі виділення часткових областей, що перетинаються, для векторної тривимірної задачі на прикладі розв'язування задачі дифракції електромагнітної хвилі на співвісному з'єднанні прямокутних хвилеводів.

2. Запропоновано підхід до побудови тензорних функцій Гріна розглянутої задачі на основі використання функцій потенційного типу. У запропонованому підході врахування взаємного розташування точок джерел і точок спостереження для функцій Гріна необхідно виконувати перед операцією диференціювання.

3. Запропоновано алгоритм зведення вихідної системи інтегральних рівнянь до матричних рівнянь, які розв'язуються методом послідовних наближень. Розглянуто особливості побудови матриць підсумкового рівняння. Представлення ітераційної процедури методу Шварца у вигляді матричного рівняння дозволяє скоротити відносний час рахунку до 10 разів у порівнянні з використанням вкладених циклів підсумовування. Так, у середньому, відносний час рахунку однієї точки на графіку частотної характеристики модуля коефіцієнта відбиття при однаковому числі врахованих типів хвиль складає для алгоритму з використанням вкладених циклів підсумовування 8,5 секунд і 0,8 секунд для алгоритму, що використовує матричний добуток.

4. Вперше методом Шварца розв'язана тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на співвісному стику двох прямокутних хвилеводів з різним розміром поперечного перерізу. Задача розглядалася в повній постановці, і при побудові електродинамічного алгоритму не вводилося будь-яких наближень, за винятком обмеження кінцевою величиною числа врахованих типів хвиль в хвилеводах. Досліджено чисельну збіжність отриманого розв'язання в залежності від числа врахованих типів хвиль і встановлено оптимальне їх співвідношення у виділених часткових областях.

РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА НЕОДНОРІДНОСТЯХ, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ ПО ВИЩИХ ТИПАХ ХВИЛЬ

У попередньому розділі була розвинена методика застосування альтернучого методу Шварца для тривимірних задач дифракції на прикладі задачі про стик двох прямокутних хвилеводів. В цьому випадку початкова система інтегральних представлень відносно полів кожної часткової області зводилася до одного підсумкового інтегрального рівняння, яке розв'язувалося методом послідовних наближень.

В даному розділі розглядаються скалярна і векторна задачі дифракції електромагнітної хвилі на каскадних східчастих неоднорідностях, які взаємодіють між собою за вищими типам хвиль. Розв'язання задач здійснюється за допомогою альтернуючого методу Шварца і методу часткових областей, що перетинаються. Особливість застосування цих методів до задач такого класу, як буде показано нижче, полягає в тому, що вихідна система інтегральних представлень полів не може бути зведена до одного підсумкового рівняння відносно поля в одній частковій області.

4.1 Дифракція електромагнітної хвилі на ФАР з пласкопаралельних хвилеводів зі східчастими узгоджуючими вирізами

Оскільки поле в області випромінювання для нескінченної ФАР відповідає умові квазіперіодичності, розглядати будемо тільки одиничну комірку, яка розташована на початку системи координат. Геометрію одиничної комірки ФАР з пласкопаралельних хвилеводів, апертури яких мають східчасті узгоджуючі вирізи, зображено на рис. 4.1.

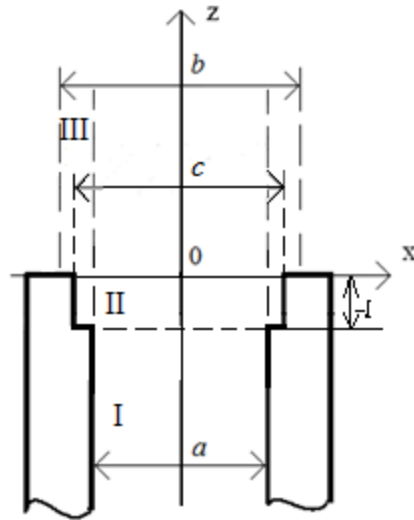


Рисунок 4.1 — Одинична комірка ФАР

Розіб'ємо всю область визначення поля на три області, які перетинаються. Область I з розмірами $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-\infty \leq z \leq \infty$, яка представляє собою плоскопаралельний хвилевод, що продовжено в нескінченність. Область II з розмірами $c \geq a$, $-c/2 \leq x \leq c/2$, $-l \leq z \leq \infty$, яка представляє собою напівнескінченний плоскопаралельний хвилевод. Область III: $-b/2 \leq x \leq b/2$, $0 \leq z \leq \infty$. У площині $z \rightarrow -\infty$ області I збуджується падаюча хвиля H_{10} плоскопаралельного хвилеводу. Складемо систему інтегральних представлень для електричного поля кожної часткової області:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_I(x, z) = E_{inc}(x, z) + \int_{-l}^0 E_{II}(x', z') \frac{\partial G_I(x, z; x', z')}{\partial \bar{n}'} dz' + \\ \quad + \int_0^{\infty} E_{III}(x', z') \frac{\partial G_I(x, z; x', z')}{\partial \bar{n}'} dz'; \\ E_{II}(x, z) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_I(x', z') \frac{\partial G_{II}(x, z; x', z')}{\partial \bar{n}'} dx' + \\ \quad + \int_0^{\infty} E_{III}(x', z') \frac{\partial G_{II}(x, z; x', z')}{\partial \bar{n}'} dz'; \\ E_{III}(x, z) = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} E_{II}(x', z') \frac{\partial G_{III}(x, z; x', z')}{\partial \bar{n}'} dx'. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Тут x, z — координати точок спостереження, а x', z' — координати точок джерел, G_I, G_{II}, G_{III} функції Гріна областей I, II и III, \vec{n}' позначає вектор нормалі до поверхні, що обмежує часткову область, символ штриху позначає, що диференціювання виконується за координатами точок джерел. Функції Гріна представляються у «витокоподібній» формі. Для областей I і II вони приймають вид:

$$G_{I,II}(x, z; x', z') = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^{I,II}(x) \phi_i^{I,II}(x') f_i^{I,II}(z, z'). \quad (4.2)$$

Тут $\phi_{\mu}^{I,II}(x)$ — нормовані ортогональні власні функції відповідного хвилеводу, що мають вид (1.36). Індекс i позначає номер хвилеводної моди, для області I: $i=q$, для області II: $i=p$. Поздовжні складові функцій Гріна для областей I і II мають вид:

$$f_q^I(z, z') = \frac{1}{2j\gamma_q^I} \exp(-j\gamma_q^I |z - z'|). \quad (4.3)$$

$$f_p^{II}(z, z') = \frac{1}{j\gamma_p^{II}} \begin{cases} \exp(-j\gamma_p^{II}(z' - l)) \operatorname{sh}(j\gamma_p^{II}(z - l)), & z' < z \\ \exp(-j\gamma_p^{II}(z - l)) \operatorname{sh}(j\gamma_p^{II}(z' - l)), & z > z' \end{cases} \quad (4.4)$$

Тут: $\gamma_{\mu}^{I,II} = -j\sqrt{\left(\frac{\mu\pi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$ поздовжній коефіцієнт поширення, α —

ширина хвилеводу, для області I: $\alpha=a$, для області II: $\alpha=c$.

Функція Гріна області III описується виразом (1.37). Падаюча хвиля представлена виразом (1.39):

$$E_{inc}(x, z) = \phi_1^I(x) \exp(-j\gamma_1^I z).$$

Як видно з системи (4.1), поле в одній області (крім області III) визначається полем двох інших областей. Це призводить до того, що система (4.1) не може бути зведена до інтегрального рівняння відносно однієї невідомої функції. Очевидно, одне рівняння системи (4.1) може бути виражено через два інших. Однак ця дія пов'язана зі значним числом

аналітичних перетворень і, в кінцевому підсумку, не позбавляє від необхідності розв'язання системи інтегральних рівнянь.

Для розв'язку системи (4.1) запропонуємо наступний підхід. Представимо невідомі функції кожної області у вигляді розкладання в ряд по ортогональних власних функціях з невідомими амплітудними коефіцієнтами, які мають фізичний зміст коефіцієнтів відбиття і проходження відповідної моди хвилеводу. Таким чином, вирази для невідомих функції приймуть наступний вигляд:

$$E_I(x, z) = \phi_1^I(x) \exp(-j\gamma_1^I(z-l)) + \sum_{q=1}^{\infty} R_q^I \phi_q^I(x) \exp(j\gamma_q^I(z-l)); \quad (4.5)$$

$$E_{II}(x, z) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p^{II} \phi_p^{II}(x) \exp(-j\gamma_p^{II}(z-l)) + \sum_{p=1}^{\infty} R_p^{II} \phi_p^{II}(x) \exp(j\gamma_p^{II}z); \quad (4.6)$$

$$E_{III}(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m^{III} \psi_m(x) \exp(-j\Gamma_m z). \quad (4.7)$$

Підставимо ці представлення в ліві і праві частини рівнянь системи (4.1), зафіксуємо координати точок джерел і точок спостереження, а також обмежимо кінцевим числом максимальну кількість членів рядів (4.5) – (4.7). При цьому поле в області II необхідно знаходити для двох положень точок спостереження з координатами $z=l$ і $z=0$. Користуючись властивістю ортогональності функцій, зведемо систему (4.1) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} R_q^I = & \sum_{\xi=1}^{q_{\max}} T_{\xi}^{II} \cdot [C_{q\xi}] [B_{q\xi}] \frac{\exp(j\gamma_q^I l)}{2j\gamma_q^I} + \\ & + \sum_{\xi=1}^{q_{\max}} R_{\xi}^{II} \cdot [C_{q\xi}] [E_{q\xi}] \frac{\exp(j\gamma_q^I l)}{2j\gamma_q^I} + \\ & + \sum_{\mu=-m_{\max}}^{m_{\max}} T_{\mu}^{III} \cdot [D_{q\mu}] [F_{q\mu}] \frac{\exp(j\gamma_q^I l)}{2j\gamma_q^I}; \quad z=l. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$T_p^{II} + R_p^{II} \exp(j\gamma_p^{II} l) = [A_{p1}] + \sum_{v=1}^Q R_v^I [A_{pv}]; \quad z=l. \quad (4.9)$$

$$T_p^H \exp(j\gamma_p^H l) + R_p^H = [A_{pv}] \exp(j\gamma_p^H l) + \sum_{v=1}^Q R_v^I [A_{pv}] \exp(j\gamma_p^H l) + \sum_{\mu=-M}^M T_\mu^H \cdot [H_{p\mu}] [I_{p\mu}] \frac{\text{sh}(j\gamma_p^H (-l))}{j\gamma_p^H}; \quad z=0. \quad (4.10)$$

$$T_m^H = \sum_{\xi=1}^Q T_\xi^H \cdot [J_{m\xi}] \frac{\exp(j\gamma_\xi^H l)}{2j\gamma_q^I} + \sum_{\xi=1}^Q R_\xi^H \cdot [J_{m\xi}]; \quad z=0. \quad (4.11)$$

Тут:

$$[A_{pv}] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_v^I(x') \varphi_p^H(x') dx';$$

$$[B_{q\xi}] = \exp(j\gamma_\xi^H l) \int_l^0 \exp(-j\gamma_\xi^H z') \exp(-j\gamma_q^I z') dz';$$

$$[C_{q\xi}] = \frac{\partial \varphi_q^I\left(-\frac{a}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \varphi_\xi^H\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{\partial \varphi_q^I\left(\frac{a}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \varphi_\xi^H\left(\frac{a}{2}\right);$$

$$[D_{q\xi}] = \frac{\partial \varphi_q^I\left(-\frac{a}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \psi_\mu\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{\partial \varphi_q^I\left(\frac{a}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \psi_\mu\left(\frac{a}{2}\right);$$

$$[E_{q\xi}] = \int_l^0 \exp(j\gamma_\xi^H z') \exp(-j\gamma_q^I z') dz';$$

$$[F_{q\mu}] = \int_0^\infty \exp(-j\Gamma_\mu z') \exp(-j\gamma_q^I z') dz';$$

$$[H_{p\mu}] = \int_0^\infty \exp(-j\Gamma_\mu z') \exp(-j\gamma_p^H [z' - l]) dz';$$

$$[I_{p\mu}] = \frac{\partial \varphi_p^H\left(-\frac{c}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \psi_\mu\left(-\frac{c}{2}\right) - \frac{\partial \varphi_p^H\left(\frac{c}{2}\right)}{\partial x'} \cdot \psi_\mu\left(\frac{c}{2}\right);$$

$$[J_{m\xi}] = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \varphi_\xi^H(x') \psi_\mu^*(x') dx';$$

Отримана система рівнянь розв'язується методом оптимальної ітерації.

Для цього отримана система приводиться до виду (2.11):

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + (1 - \beta)\mathbf{R}^{(i-1)} + \beta \cdot \boldsymbol{\alpha}\mathbf{R}^{(i-1)}. \quad (4.12)$$

Матриця $\boldsymbol{\alpha}$ складається таким чином, що один рядок відповідає одному рівнянню з сімейств (4.8) — (4.11). По рядках нумерація виконується за індексами q, p і m . По стовпцях нумерація виконується за індексами v, ξ і μ , а кожен елемент містить множники, які стоять перед відповідними невідомими коефіцієнтами $R_{q,(v)}^I, T_{p,(\xi)}^{II}, R_{p,(\xi)}^{II}, T_{m,(\mu)}^{III}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & T_{1,1}^{II} & \cdots & T_{1,p_{\max}}^{II} & R_{1,1}^{II} & \cdots & R_{1,p_{\max}}^{II} & T_{1,-m_{\max}}^{III} & \cdots & T_{1,m_{\max}}^{III} \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & T_{q_{\max},1}^{II} & \cdots & T_{q_{\max},p_{\max}}^{II} & R_{q_{\max},1}^{II} & \cdots & R_{q_{\max},p_{\max}}^{II} & T_{q_{\max},-m_{\max}}^{III} & \cdots & T_{q_{\max},m_{\max}}^{III} \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc|ccc|ccc} R_{1,1}^I & \cdots & R_{1,q_{\max}}^I & 0 & \cdots & 0 & -e^{(j\gamma_1^{II}l)} & \cdots & -e^{(j\gamma_1^{II}l)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p_{\max},1}^I & \cdots & R_{p_{\max},q_{\max}}^I & 0 & \cdots & 0 & -e^{(j\gamma_{p_{\max}}^{II}l)} & \cdots & -e^{(j\gamma_{p_{\max}}^{II}l)} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc|ccc|ccc} R_{1,1}^I & \cdots & R_{1,q_{\max}}^I & -e^{(j\gamma_1^{II}l)} & \cdots & -e^{(j\gamma_1^{II}l)} & 0 & \cdots & 0 & T_{1,-m_{\max}}^{III} & \cdots & T_{1,m_{\max}}^{III} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p_{\max},1}^I & \cdots & R_{p_{\max},q_{\max}}^I & -e^{(j\gamma_{p_{\max}}^{II}l)} & \cdots & -e^{(j\gamma_{p_{\max}}^{II}l)} & 0 & \cdots & 0 & T_{p_{\max},-m_{\max}}^{III} & \cdots & T_{p_{\max},m_{\max}}^{III} \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & T_{-m_{\max},1}^{II} & \cdots & T_{-m_{\max},p_{\max}}^{II} & R_{-m_{\max},1}^{II} & \cdots & R_{-m_{\max},p_{\max}}^{II} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & T_{m_{\max},1}^{II} & \cdots & T_{m_{\max},p_{\max}}^{II} & R_{m_{\max},1}^{II} & \cdots & R_{m_{\max},p_{\max}}^{II} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{pmatrix}.$$

Матриця-стовпець невідомих коефіцієнтів \mathbf{R} складається з чотирьох підматриць-стовпців, які складаються з шуканих коефіцієнтів відповідного рівняння (4.8) — (4.11). Перше наближення матриці невідомих коефіцієнтів $\mathbf{R}^{<1>}$ визначається сімейством коефіцієнтів вільних членів відповідних рівнянь (4.8) - (4.11). Таким чином, матриця $\mathbf{R}^{<k>}$ в ітерації k -порядку і її перше наближення приймають вид:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} R_1^I \\ \vdots \\ R_{q_{\max}}^I \\ \hline T_1^{II} \\ \vdots \\ T_{p_{\max}}^{II} \\ R_1^{II} \\ \vdots \\ R_{p_{\max}}^{II} \\ \hline T_{-m_{\max}}^{II} \\ \vdots \\ T_{m_{\max}}^{II} \end{pmatrix}; \mathbf{R}^{(1)} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{p_{\max},1} \\ \hline A_{1,1} \exp(j\gamma_1^{II}) \\ \vdots \\ A_{p_{\max},1} \exp(j\gamma_{p_{\max}}^{II}) \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт відбиття хвилі H_{10} в першому хвилеводі визначається значенням коефіцієнта R_1^I .

4.2 Чисельні результати

Відповідно до представленого алгоритму були проведені чисельні розрахунки коефіцієнта відбиття в хвилеводі одиначної комірки нескінченної ФАР. На рис. 4.2 показана залежність модуля, а на рис. 4.3— фази коефіцієнта відбиття падаючої хвилі від керуючого зсуву фаз $\sin(\theta)$ для ФАР з розмірами $b/\lambda = 0.5714$, $a/b = 0.937$ при різних величинах c/b і l/λ . Символами "*" на кривих графіків показано значення, що отримано за допомогою МЧОП. Результати були отримані для трьох розмірів узгоджувальних вирізів. Розмір $c/b = 0.937$ являє собою граничний випадок, коли величина c дорівнює величині a . Збіг результатів для граничного випадку, які отримано за допомогою представленого алгоритму, з результатами, що отримано раніше в розділі 1 для аналогічної решітки без узгоджувального вирізу, показує правильність складеного алгоритму. Слід також зазначити, що коректне розв'язання даної задачі вдається отримати тільки з використанням алгоритму оптимальної ітерації.

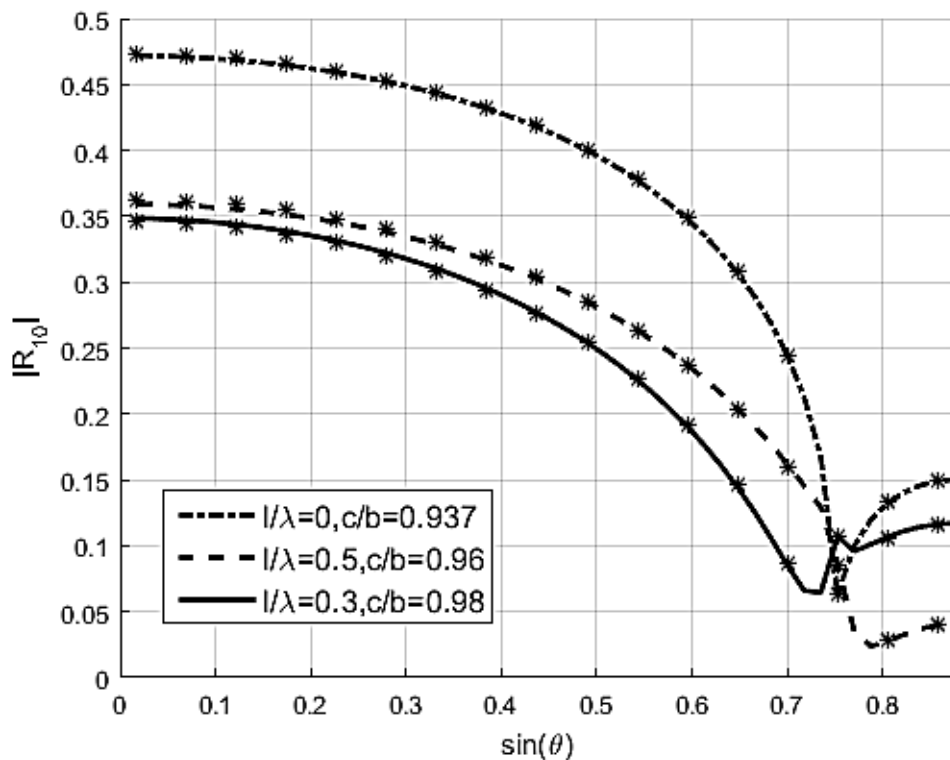


Рисунок 4.2 – Залежність модулю коефіцієнту відбиття від керуючого зсуву фаз для $b/\lambda=0.5714$, $a/b=0.937$

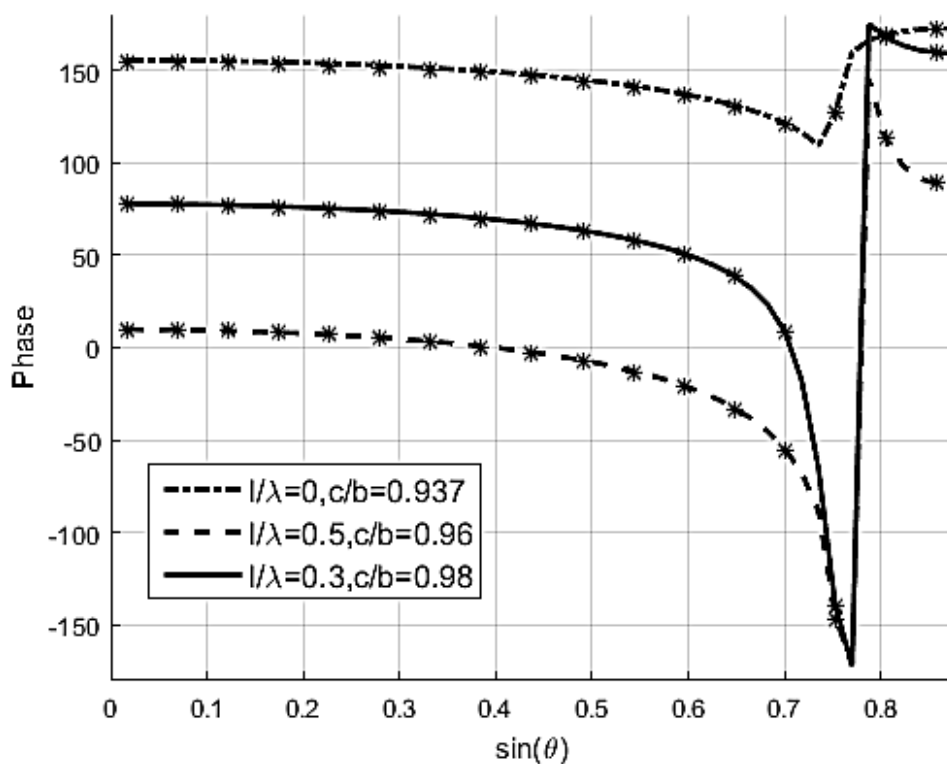


Рисунок 4.3 - Залежність фази коефіцієнту відбиття від керуючого зсуву фаз для $b/\lambda=0.5714$, $a/b=0.937$

У табл. 4.1 показано чисельну збіжність алгоритму в залежності від числа врахованих типів хвиль M області III для решітки з розмірами $b / \lambda = b/\lambda=0.5714$, $a/b=0.937$ $c/b=0.96$ and $l/\lambda=0.5$. Число типів хвиль в областях I і II однакові і визначаються як $Q=2 \cdot M+1$.

Таблиця 4.1 - Чисельна збіжність представленого алгоритму за кількістю врахованих типів хвиль

$\sin(\theta)$	M=2	M=4	M=8	M=16	M=32
0.0525	0.3582	0.3584	0.3586	0.3581	0.3580
0.175	0.3508	0.3510	0.3512	0.3507	0.3507
0.35	0.3245	0.3243	0.3247	0.3244	0.3242
0.525	0.2710	0.2703	0.2710	0.2709	0.2705
0.7	0.1619	0.1610	0.1618	0.1617	0.1609
0.875	0.0405	0.0416	0.0407	0.0406	0.0413

Дослідження впливу розмірів узгоджувального вирізу на величину коефіцієнта відбиття дозволило знайти оптимальні розміри узгоджувальної неоднорідності, яка дозволяє отримати найбільш рівномірну залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування. На рис. 4.4 наведено графік залежності модуля, а на рис. 4.5 — фази коефіцієнта відбиття від величини $\sin(\theta)$ для решітки з розмірами $b/\lambda = 0,6724$, $a/b = 0,88$, $l/\lambda = 0,3$ при різних величинах c/b . Величина $c/b = 0,88$ відповідає випадку відсутності узгоджувального вирізу.

Таким чином, отримані результати показують, що запропонований алгоритм може бути застосований до задач дифракції, в яких вся область визначення розділяється на три або більше областей, що перетинаються, і які взаємодіють по вищих типах хвиль. Отримане розв'язання представляє собою сімейство коефіцієнтів відбиття і передачі кожної часткової області, а не тільки однієї.

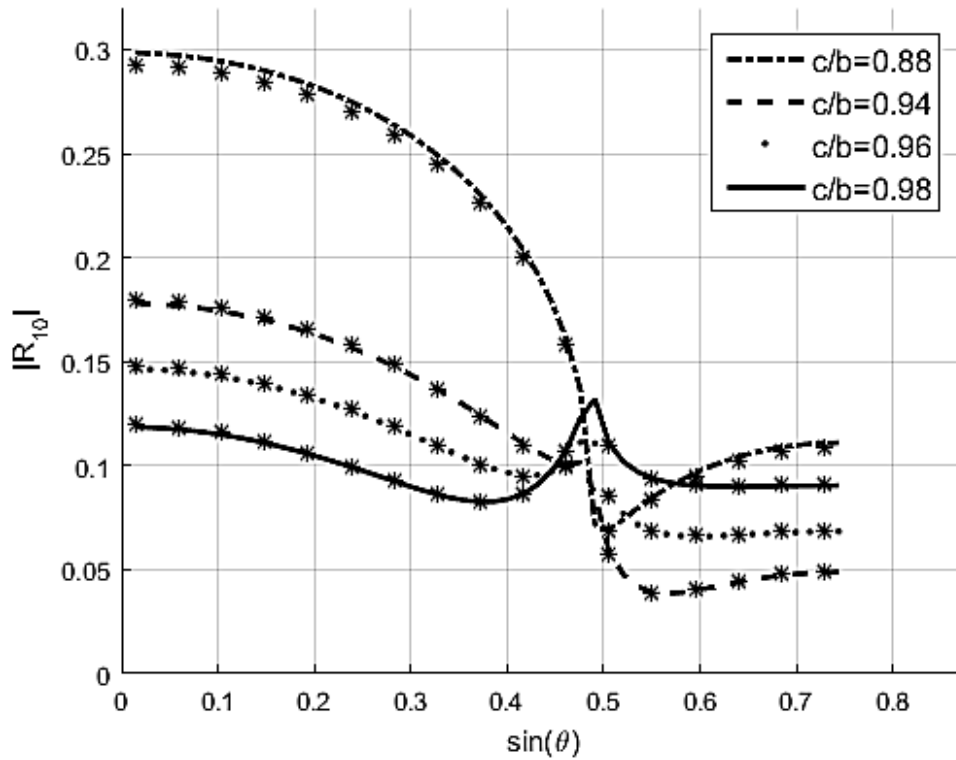


Рисунок 4.4 — Залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування для решітки з розмірами $b/\lambda=0.6724$, $a/b=0.88$, $l/\lambda=0.3$.

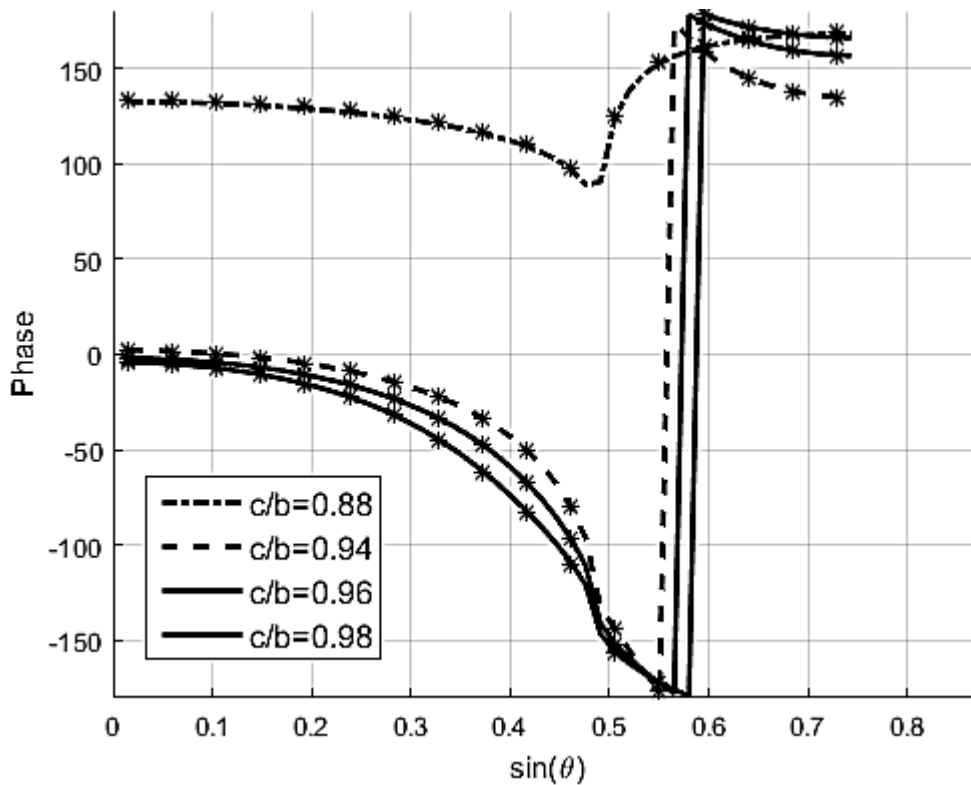


Рисунок 4.5 — Залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування для решітки з розмірами $b/\lambda=0.6724$, $a/b=0.88$, $l/\lambda=0.3$.

До основної особливості запропонованого алгоритму слід віднести те, що в кожному інтегральному представленні поля часткової області функція Гріна множиться тільки на власну функцію тієї часткової області, в якій знаходяться точки джерел конкретного інтегрального представлення. Це дозволяє при складанні алгоритму значно скоротити обсяг аналітичних перетворень, які передують чисельному розрахунку, що є особливо ефективним для векторних тривимірних задач, одна з яких розглядається далі.

4.3 Дифракція електромагнітної хвилі на каскадному з'єднанні прямокутних хвилеводів

Електродинамічний алгоритм, розроблений в розділі 3 для задачі, в якій виділялося дві часткові області, може бути розвинений для застосування до задач більш загального класу. Проведемо електродинамічний аналіз співвісного з'єднання трьох прямокутних хвилеводів з різним розміром поперечного перерізу (рис. 4.6).

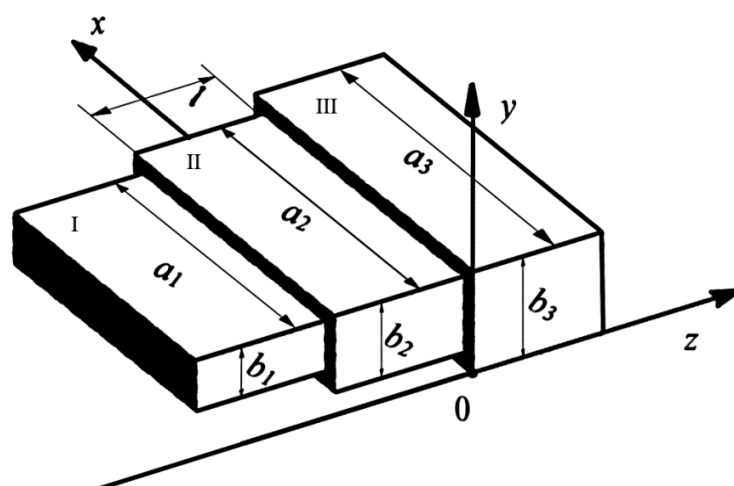


Рисунок 4.6 — Співвісне з'єднання трьох прямокутних хвилеводів

У поперечній площині при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля одиничної амплітуди H_{10} прямокутного хвилеводу. Розв'язок знаходимо методом часткових областей, що перетинаються, відносно вектора напруженості електричного поля, скориставшись інтегральною теоремою векторної теорії дифракції (1.10). Гранична поверхня представлена металевими стінками хвилеводів, тому шуканий вектор електричного поля і функція Гріна повинні задовольняти на ній граничним умовам (1.17), а саме:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0, \quad \vec{r} \in S; \\ \vec{n} \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') &= 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S..\end{aligned}$$

На тих частинах граничної поверхні, які продовжені в нескінченність, враховуємо умову граничного поглинання.

У всій складній області визначення поля виділимо три часткові області, що перетинаються. Область I: нескінченний прямокутний хвилевод ($\delta_x^I \leq x \leq \delta_x^I + a_1$, $\delta_y^I \leq y \leq \delta_y^I + b_1$, $-\infty \leq z \leq \infty$). Область II: напівнескінченний прямокутний хвилевод ($\delta_x^{II} \leq x \leq \delta_x^{II} + a_2$, $\delta_y^{II} \leq y \leq \delta_y^{II} + b_2$, $l \leq z \leq \infty$). Область III: напівнескінченний прямокутний хвилевід ($0 \leq x \leq a_3$, $0 \leq y \leq b_3$, $0 \leq z \leq \infty$). Тут коефіцієнт δ позначає зсув по осях Ox або Oy початкових координат стінок відповідних хвилеводів. З огляду на умови на граничних поверхнях областей, складемо систему інтегральних представлень полів для кожної часткової області:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_I(\vec{r}) &= \vec{E}_{inc}(x, y, z) + \int_{S_{w11}} \vec{n}_{11} \times \vec{E}_{II}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^{Ie}(\vec{r}, \vec{r}') dS_{w11} + \\ &+ \int_{S_{w12}} \vec{n}_{12} \times \vec{E}_{III}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^{Ie}(\vec{r}, \vec{r}') dS_{w12}; \\ \vec{E}_{II}(\vec{r}) &= \int_{S_{A1}} \vec{n}_{A1} \times \vec{E}_I(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^{IIe}(\vec{r}, \vec{r}') dS_{A1} + \\ &+ \int_{S_{w2}} \vec{n}_2 \times \vec{E}_{III}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^{IIe}(\vec{r}, \vec{r}') dS_{w2}; \\ \vec{E}_{III}(\vec{r}) &= \int_{S_{A2}} \vec{n}_{A2} \times \vec{E}_{II}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^{IIIe}(\vec{r}, \vec{r}') dS_{A2}. \end{aligned} \right. \quad (4.13)$$

Тут $\vec{E}_{inc}(x, y, z)$ — падаюча хвиля H_{10} прямокутного хвилеводу одиничної амплітуди. S_{w11} и S_{w12} — граничні поверхні, представлені стінками хвилеводу області I, продовженими від $z = -l$ до $z=0$ и от $z=0$ до нескінченності відповідно. S_{A1} и S_{A2} — граничні поверхні, представлені апертурами, утвореними розкривами хвилеводів області I і II відповідно. S_{w2} — поверхня, що представлена стінками хвилеводу області II, продовженими в нескінченність. Вектори $\vec{n}_{11}, \vec{n}_{12}, \vec{n}_{A1}, \vec{n}_2, \vec{n}_{A2}$ — одиничні вектори нормалей до відповідних поверхонь.

Скориставшись взаємозв'язком між функціями Гріна різних типів (3.3), для даної задачі застосуємо функцію Гріна потенційного типу, що має вигляд діагонального тензора (3.4), компоненти якого представляються у витокоподібній формі (3.5):

$$\begin{aligned} G_{xx}^{AK} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{x\mu\nu}^K(x, y) \varphi_{x\mu\nu}^K(x', y') f_{\mu\nu}^K(z, z'); \\ G_{yy}^{AK} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{y\mu\nu}^K(x, y) \varphi_{y\mu\nu}^K(x', y') f_{\mu\nu}^K(z, z'); \\ G_{zz}^{AK} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \varphi_{z\mu\nu}^K(x, y) \varphi_{z\mu\nu}^K(x', y') g_{\mu\nu}^K(z, z'). \end{aligned}$$

Тут K — номер часткової області, μ, ν — індекси типів хвиль кожної часткової області. Для області I: $\mu=m, \nu=n$; для області II: $\mu=M, \nu=N$; для області III: $\mu=O, \nu=P$. Поперечні власні функції хвилеводів з урахуванням величини зсуву δ візьмуть вид (3.6):

$$\begin{aligned} \varphi_{x\mu\nu}^K(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_K b_K}} \cos \left[\frac{\mu\pi}{a_K} (x - \delta_x^K) \right] \sin \left[\frac{\nu\pi}{b_K} (y - \delta_y^K) \right]; \\ \varphi_{y\mu\nu}^K(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_K b_K}} \sin \left[\frac{\mu\pi}{a_K} (x - \delta_x^K) \right] \cos \left[\frac{\nu\pi}{b_K} (y - \delta_y^K) \right]; \\ \varphi_{z\mu\nu}^K(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu}}{a_K b_K}} \sin \left[\frac{\mu\pi}{a_K} (x - \delta_x^K) \right] \sin \left[\frac{\nu\pi}{b_K} (y - \delta_y^K) \right]. \end{aligned}$$

Поздовжні компоненти функцій Гріна хвилеводів приймають вид:

$$f_{mn}^I(z, z') = g_{mn}^I(z, z') = \frac{1}{2j\gamma_{mn}^I} \exp(-j\gamma_{mn}^I |z - z'|). \quad (4.14)$$

$$f_{MN}^{II}(z, z') = \frac{1}{j\gamma_{MN}^{II}} \begin{cases} \exp(-j\gamma_{MN}^{II} [z - l]) \sinh(-j\gamma_{MN}^{II} [z' - l]), & z > z'; \\ \exp(-j\gamma_{MN}^{II} [z' - l]) \sinh(-j\gamma_{MN}^{II} [z - l]), & z' > z. \end{cases} \quad (4.15)$$

$$g_{MN}^{II}(z, z') = \frac{1}{j\gamma_{MN}^{II}} \begin{cases} \exp(-j\gamma_{MN}^{II} [z - l]) \cosh(-j\gamma_{MN}^{II} [z' - l]), & z > z'; \\ \exp(-j\gamma_{MN}^{II} [z' - l]) \cosh(-j\gamma_{MN}^{II} [z - l]), & z' > z. \end{cases} \quad (4.16)$$

$$f_{OP}^{III}(z, z') = \frac{1}{j\gamma_{OP}^{III}} \begin{cases} \exp(-j\gamma_{OP}^{III} z) \sinh(-j\gamma_{OP}^{III} z'), & z > z'; \\ \exp(-j\gamma_{OP}^{III} z') \sinh(-j\gamma_{OP}^{III} z), & z' > z. \end{cases} \quad (4.17)$$

$$g_{OP}^{III}(z, z') = \frac{1}{j\gamma_{OP}^{III}} \begin{cases} \exp(-j\gamma_{OP}^{III} z) \cosh(-j\gamma_{OP}^{III} z'), & z > z'; \\ \exp(-j\gamma_{OP}^{III} z') \cosh(-j\gamma_{OP}^{III} z), & z' > z. \end{cases} \quad (4.18)$$

Тут l — координата поперечної металеві стінки напівнескінченного хвилеводу області II, $\gamma_{\mu\nu}^K$ — поздовжній коефіцієнт поширення. Застосування операції ротора до тензора Гріна потенційного типу дає в результаті тензор виду (3.12):

$$\nabla' \times \vec{G}^{AK}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z'} G_{yy}^A & \frac{\partial}{\partial y'} G_{zz}^A \\ \frac{\partial}{\partial z'} G_{xx}^A & 0 & -\frac{\partial}{\partial x'} G_{zz}^A \\ -\frac{\partial}{\partial y'} G_{xx}^A & \frac{\partial}{\partial x'} G_{yy}^A & 0 \end{bmatrix}.$$

Слід зазначити, що на цьому етапі складання функції Гріна необхідно враховувати взаємне розташування точок джерел і точок спостереження для функції потенційного типу. Так, у виразі відносно вектора поля області II при інтегруванні по площі апертури S_{A1} координати z точок спостереження приймають значення $z > z'$ і операція диференціювання в (4.15) — (4.16) застосовується до функції гіперболічного синуса і косинуса. А при

інтегруванні по поверхні S_{w2} координати точок джерел $z' > z$. У цьому випадку операція диференціювання застосовується до експоненційної функції. Для двох інших областей точки джерел і точки спостереження не змінюють свого взаємного розташування.

Таким чином, компоненти тензора Гріна для області I мають вигляд (3.14), а для області III — (3.15) з індексами O, P . Для області II компоненти тензора Гріна при $z > z'$ мають вигляд:

$$G_{II12}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} (-1) \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]);$$

$$G_{II13}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N\pi}{j\Gamma_{MN} b_2} \varphi_{z,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]);$$

$$G_{II21}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]);$$

$$G_{II23}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)M\pi}{j\Gamma_{MN} a_2} \varphi_{z,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]);$$

$$G_{II31}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)N\pi}{j\Gamma_{MN} b_2} \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x, y) \psi_{z,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]);$$

$$G_{II32}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{M\pi}{j\Gamma_{MN} a_2} \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x, y) \psi_{z,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]).$$

А при $z' > z$:

$$G_{II12}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]);$$

$$G_{II13}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N\pi}{j\Gamma_{MN} b_2} \varphi_{z,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]);$$

$$G_{II21}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} (-1) \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]);$$

$$G_{II23}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)M\pi}{j\Gamma_{MN} a_2} \varphi_{z,MN}^{\prime\prime}(x, y) \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{ch}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]);$$

$$G_{II31}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)N\pi}{j\Gamma_{MN} b_2} \varphi_{x,MN}^{\prime\prime}(x, y) \psi_{z,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]);$$

$$G_{II32}^m = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{M\pi}{j\Gamma_{MN} a_2} \varphi_{y,MN}^{\prime\prime}(x, y) \psi_{z,MN}^{\prime\prime}(x', y') \exp(-j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z'-l]) \operatorname{sh}(j\gamma_{MN}^{\prime\prime}[z-l]).$$

Підставимо вирази для функцій Гріна в систему інтегральних представлень (4.13) і зафіксуємо положення точок джерел і точок спостереження. Отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих векторів напруженості електричного поля кожної часткової області. Як і в попередній задачі, отримана система не може бути приведена до одного підсумкового інтегрального рівняння відносно однієї векторної функції. Представимо поле в кожній частковій області у вигляді розкладання в ряд по повній системі ортогональних власних функцій з невідомими коефіцієнтами розкладання. Таким чином, поле в кожній області відшукується у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{E}_I(x, y, z) = & \vec{E}_{inc}(x, y, z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[Rx_{mn}^I \cdot \varphi_{x,mn}^I(x, y) \cdot \vec{x}_0 + \right. \\ & \left. + Ry_{mn}^I \cdot \varphi_{y,mn}^I(x, y) \cdot \vec{y}_0 + Rz_{mn}^I \cdot \varphi_{z,mn}^I(x, y) \cdot \vec{z}_0 \right] \cdot \exp(j\gamma_{mn}^I [z - l]); \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{II}(x, y, z) = & \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \left[Rx_{MN}^{II} \cdot \varphi_{x,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{x}_0 + Ry_{MN}^{II} \cdot \varphi_{y,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{y}_0 + \right. \\ & \left. + Rz_{MN}^{II} \cdot \varphi_{z,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{z}_0 \right] \cdot \exp(j\gamma_{MN}^{II} z) + \\ & + \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \left[Tx_{MN}^{II} \cdot \varphi_{x,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{x}_0 + Ty_{MN}^{II} \cdot \varphi_{y,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{y}_0 + \right. \\ & \left. + Tz_{MN}^{II} \cdot \varphi_{z,MN}^{II}(x, y) \cdot \vec{z}_0 \right] \cdot \exp(-j\gamma_{MN}^{II} [z - l]); \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{III}(x, y, z) = & \sum_{O=0}^{\infty} \sum_{P=0}^{\infty} \left[Tx_{OP}^{III} \cdot \varphi_{x,OP}^{III}(x, y) \cdot \vec{x}_0 + Ty_{OP}^{III} \cdot \varphi_{y,OP}^{III}(x, y) \cdot \vec{y}_0 + \right. \\ & \left. + Tz_{OP}^{III} \cdot \varphi_{z,OP}^{III}(x, y) \cdot \vec{z}_0 \right] \cdot \exp(-j\gamma_{OP}^{III} z). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Підставивши вирази (4.19) — (4.21) в систему інтегральних рівнянь і виконавши інтегрування, отримаємо систему рівнянь, що зв'язує між собою коефіцієнти відбиття і передачі електромагнітних хвиль в кожній частковій області. Обмежуючи число врахованих типів хвиль кінцевим значенням і користуючись властивістю ортогональності власних функцій, початкову задачу зведемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладання. При цьому поле в області II знаходиться в точках

спостереження $z = 0$ та $z = l$. Система рівнянь представляється в матричному вигляді:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}.$$

Де \mathbf{B} — матриця-стовпець вільних членів отриманої системи рівнянь, \mathbf{A} — головна матриця системи, особливості побудови якої для векторної задачі розглянуто в розділі 3, \mathbf{R} - матриця-стовпець невідомих коефіцієнтів. Розв'язок отриманої системи рівнянь виконувався методом зворотної матриці.

4.4 Чисельні результати

На основі розглянутого алгоритму була розв'язана задача для співвісного каскадного з'єднання трьох прямокутних хвилеводів типу WR62 (область I: $a_1 = 15.8$ мм, $b_1 = 7.9$ мм), WR75 (область II: $a_2 = 19.05$ мм, $b_2 = 9.525$ мм) та WR90 (область III: $a_3 = 22.86$ мм, $b_3 = 10.16$ мм). Для перевірки коректності представленого методу були розглянуті два окремих випадки. У першому випадку поперечні розміри області II приймалися рівними поперечним розмірам області I. На рис. 4.7 показано залежності модуля коефіцієнтів розкладання $R_{y_{10}}^I, R_{y_{10}}^{II}, T_{y_{10}}^{II}, T_{y_{10}}^{III}$ від частоти і співвідношення a_1/λ , де λ — довжина падаючої хвилі у вільному просторі, при цьому: $a_2 = a_1, b_2 = b_1 = 0,5a_1$. Також, для порівняння, приведено результати розрахунку коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} на стику двох прямокутних хвилеводів, отриманих в роботі [51]. Як видно з графіка на рис. 4.7, значення модулів коефіцієнтів відбиття в першій $R_{y_{10}}^I$ і другий $R_{y_{10}}^{II}$ областях рівні один одному і відповідають випадку стику двох хвилеводів, а коефіцієнт розкладання $T_{y_{10}}^{II}$ дорівнює одиниці по всьому діапазоні частот. Таким чином, отримані значення коефіцієнтів розкладання підтверджують, що на стику областей I і II відсутнє відбиття, так як поперечні розміри цих областей однакові.

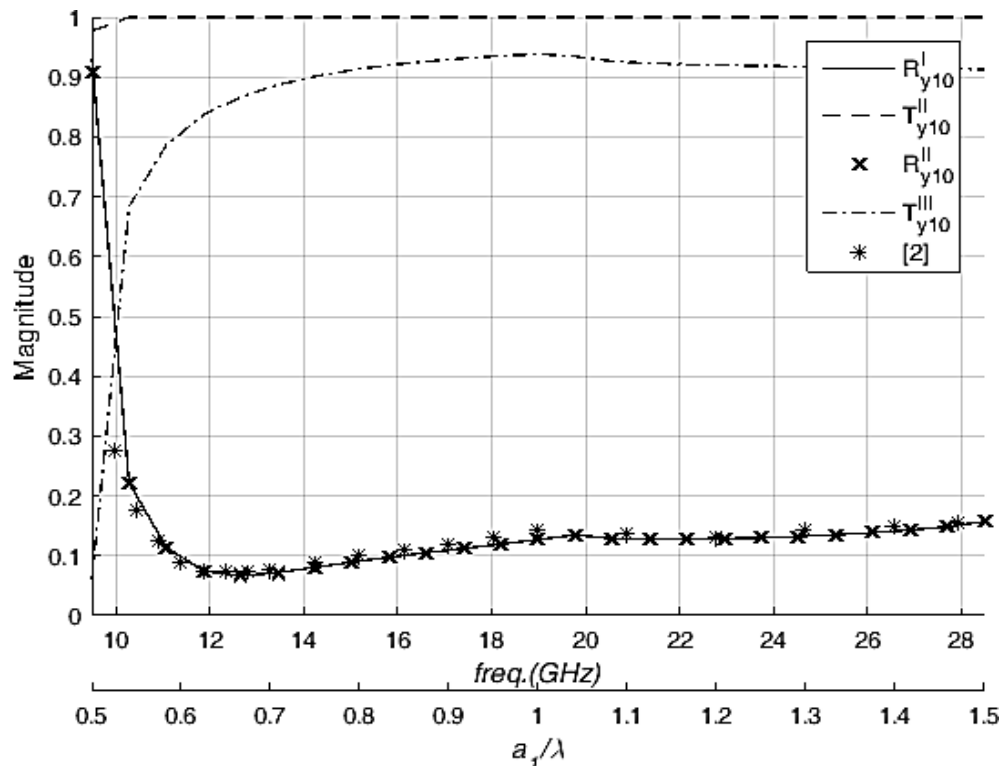


Рисунок 4.7 — Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття для випадку $a_2=a_1$, $b_2=b_1=0,5a_1$, $a_3=1,4469a_1$, $b_3=0,4444a_1$.

У другому випадку поперечні розміри області II приймалися рівними розмірам області III, а співвідношення між розмірами першої і третьої областей залишалися попередніми. На рис. 4.8 показані залежності модулів коефіцієнтів розкладання R_{y10}^I , R_{y10}^{II} , T_{y10}^{II} , T_{y10}^{III} від частоти і співвідношення a_1/λ . В цьому випадку коефіцієнти проходження області II та III T_{y10}^{II} , T_{y10}^{III} рівні між собою, а відбиття в області II відсутнє ($R_{y10}^{II}=0$). При цьому залежність модуля коефіцієнта відбиття в області I R_{y10}^I відповідає випадку стику двох хвильоводів. Зміна поздовжніх розмірів області II (величина l) не впливає на величини модулів коефіцієнтів розкладання. Таким чином, результати, отримані для окремих випадків, підтверджують коректність запропонованого алгоритму.

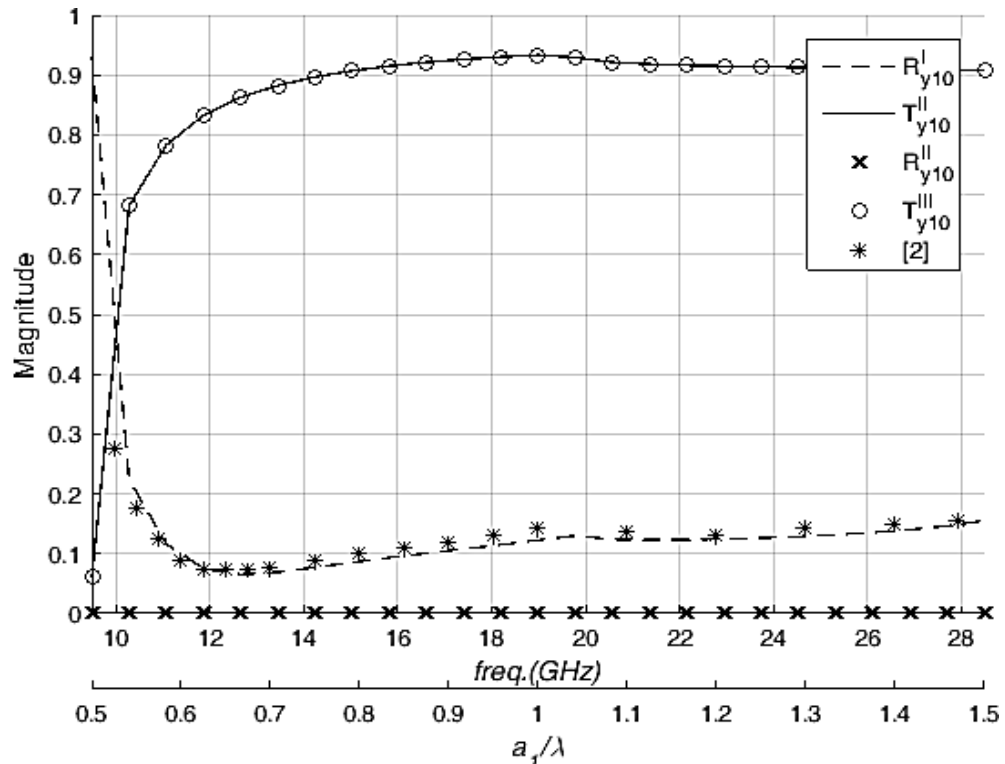


Рисунок 4.8 — Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття для випадку $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

В ході чисельного експерименту проведено дослідження впливу числа врахованих типів хвиль на кінцевий результат. Встановлено, що найкраща збіжність забезпечується у випадку, коли індекси типів хвиль для кожної області визначаються наступними співвідношеннями: $O=3 \cdot m$, $P=O-1$, $M=2 \cdot m+1$, $N=M-1$, $n=m-1$. У табл. 4.2 показано результати дослідження збіжності розв'язку для різного числа врахованих типів хвиль в області I при $l=0,4475a_1$.

Таблиця 4.2 – Чисельна збіжність розв'язку

m	Модуль Ry_{10}^I при a_1/λ			
	0,6	0,8	1,0	1,2
1	0,0418	0,0081	0,0246	0,0568
3	0,0241	0,0169	0,0759	0,1146
5	0,0283	0,0267	0,0766	0,1122
7	0,0287	0,0266	0,0755	0,1110
9	0,0287	0,0265	0,0754	0,1112

Число врахованих типів хвиль вважалося достатнім в тому випадку, якщо збільшення числа m не впливало на значення модуля коефіцієнта відбиття у третьому знаку після коми. Також в ході чисельного експерименту було проведено дослідження впливу довжини проміжного хвилеводу l на характер частотної залежності модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в першому хвилеводі.

На рис. 4.9 показана залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в області I від частоти і співвідношення a_1/λ . Довжина проміжного хвилеводу l приймала значення рівні $0,2747a_1$, $0,3103a_1$, $0,3459a_1$, $0,38035a_1$, $0,4475a_1$ які відповідають чверті довжини хвилі в хвилеводі області II для значень нормованих частот $a_1/\lambda = 1,0$; $0,7$; $0,6$; $0,55$ та $0,5$ відповідно.

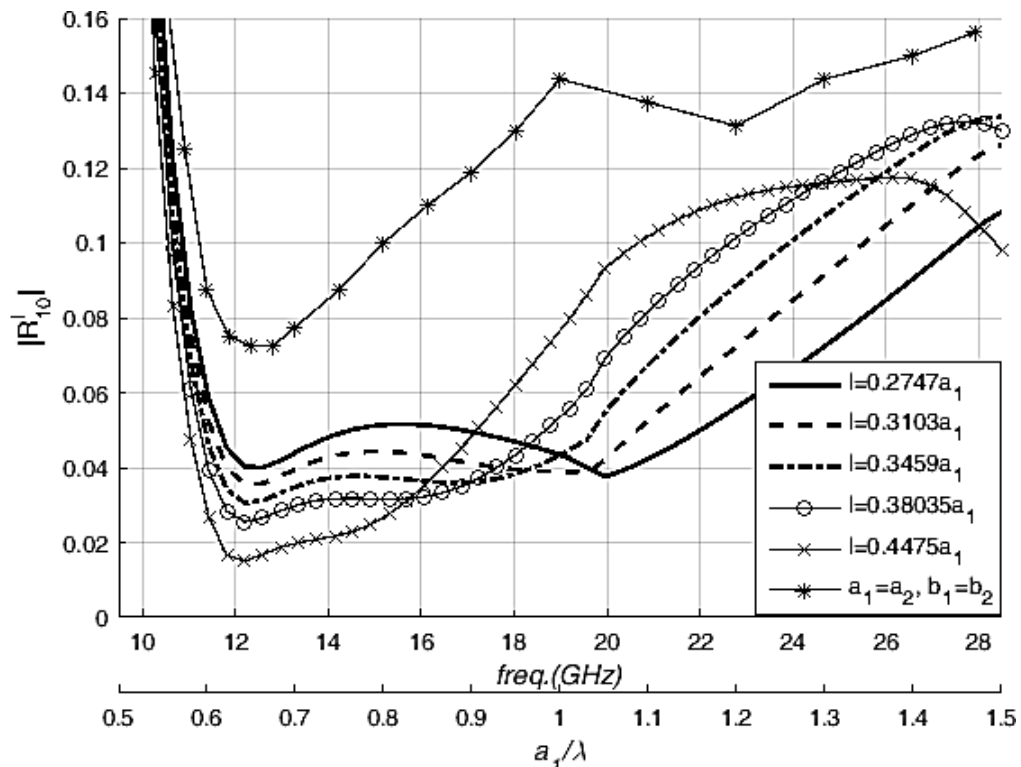


Рисунок 4.9 — Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття для випадку $l = \lambda_B/4$.

Для порівняння наведено частотну залежність модуля коефіцієнта відбиття для випадку стику двох хвилеводів. Як видно з графіка, зміна довжини проміжного хвилеводу значно впливає на характер частотної залежності модуля коефіцієнта відбиття. При збільшенні довжини

проміжного хвилеводу звужується ширина області, де модуль коефіцієнта відбиття зберігає приблизно постійне значення. У той же час, в цій області зменшується нерівномірність його частотної залежності.

На рис. 4.10 показана частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} для випадків, коли довжина проміжного хвилеводу l приймає значення дорівнюють $0,5494a_1$, $0,6206a_1$, $0,6918a_1$, $0,7607a_1$ та $0,8950a_1$, що відповідає половині довжини хвилі області II для значень нормованих частот, аналогічних попередньому випадку. Як видно з графіків, збільшення довжини проміжного хвилеводу призводить до того, що модуль коефіцієнта відбиття значно змінюється в межах розглянутого частотного діапазону. Частотна характеристика набуває явно виражений провал в межах діапазону частот 11–13 ГГц. Як впливає з результатів чисельного експерименту, вибір довжини проміжного хвилеводу $l=0,5494a_1$ дозволяє отримати значення модуля коефіцієнта відбиття не більше 0,01 в діапазоні частот від 11,5 до 13 ГГц з мінімумом на частоті 12,6 ГГц.

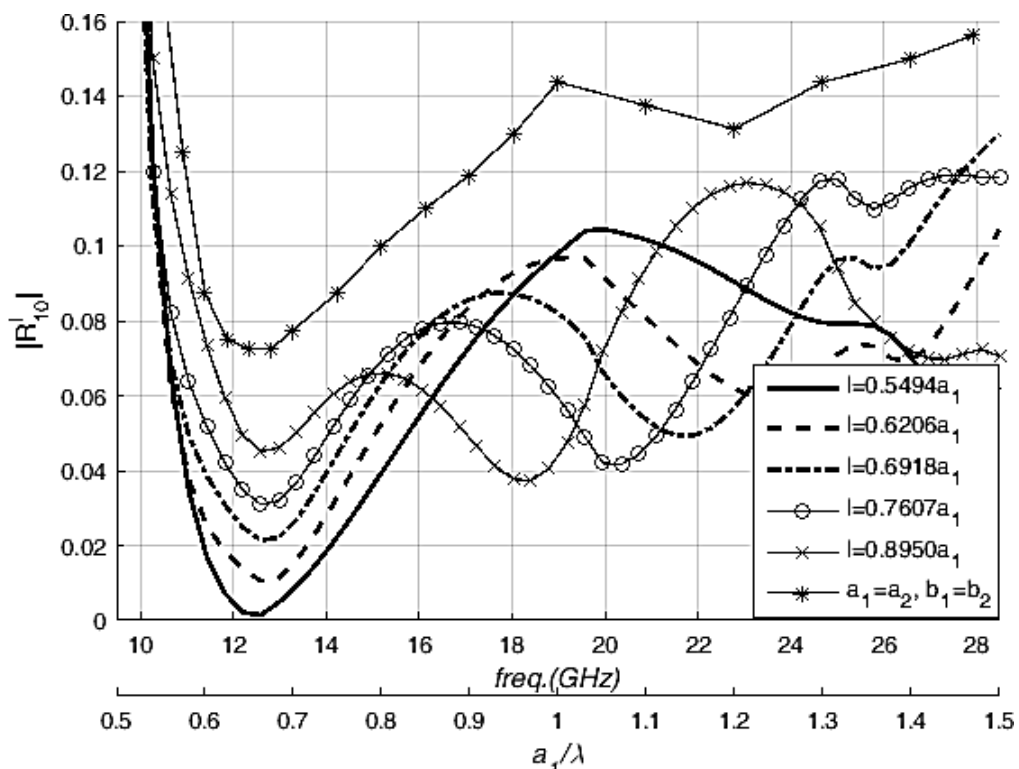


Рисунок 4.10 — Частотна залежність модуля коефіцієнта відбиття для випадку $l=\lambda_B/2$.

Подальше збільшення довжини проміжного хвилеводу приводить до виникнення кількох провалів на частотній характеристиці з одночасним зменшенням їх глибини.

Для перевірки достовірності отриманих результатів було проведено математичне моделювання даної структури в програмному пакеті HFSS. На рис. 4.11 і 4.12 показані частотні характеристики модуля коефіцієнта відбиття для аналогічного з'єднання, отримані за допомогою цього програмного пакета. На частотах вище 20 ГГц можна спостерігати резонансні явища, пов'язані з кінцевими розмірами досліджуваної структури в HFSS. Як видно, наведені частотні характеристики підтверджують достовірність результатів, отриманих за допомогою запропонованого алгоритму.

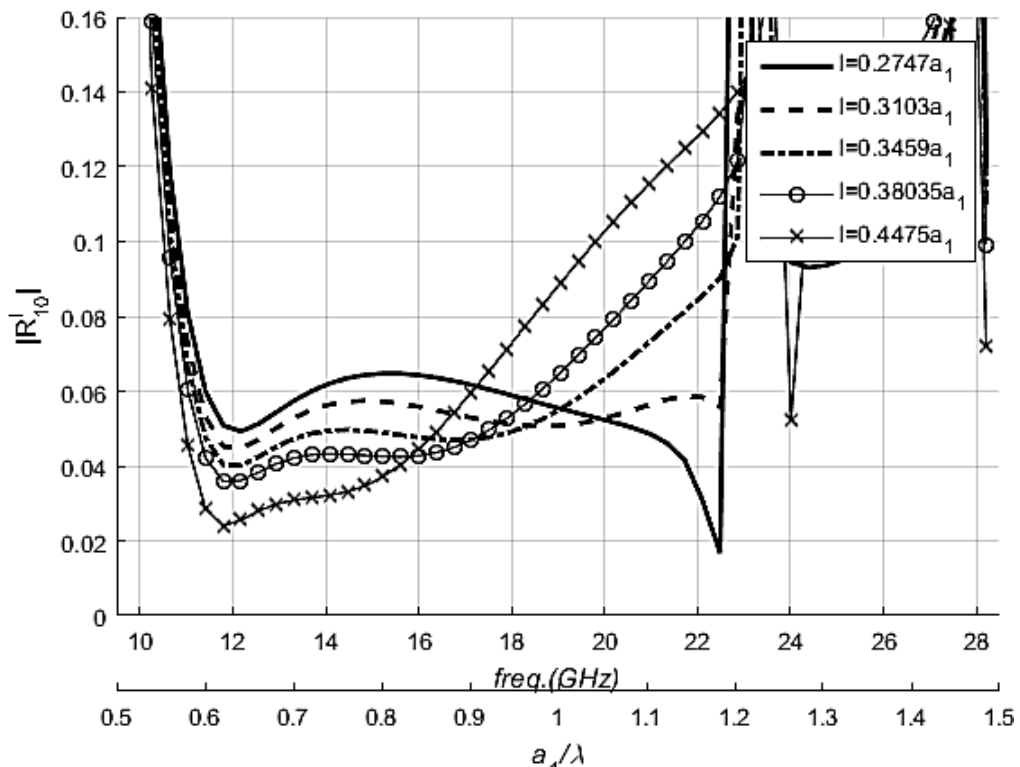


Рисунок 4.11 — Результати, отримані у HFSS для $l=\lambda_B/4$.

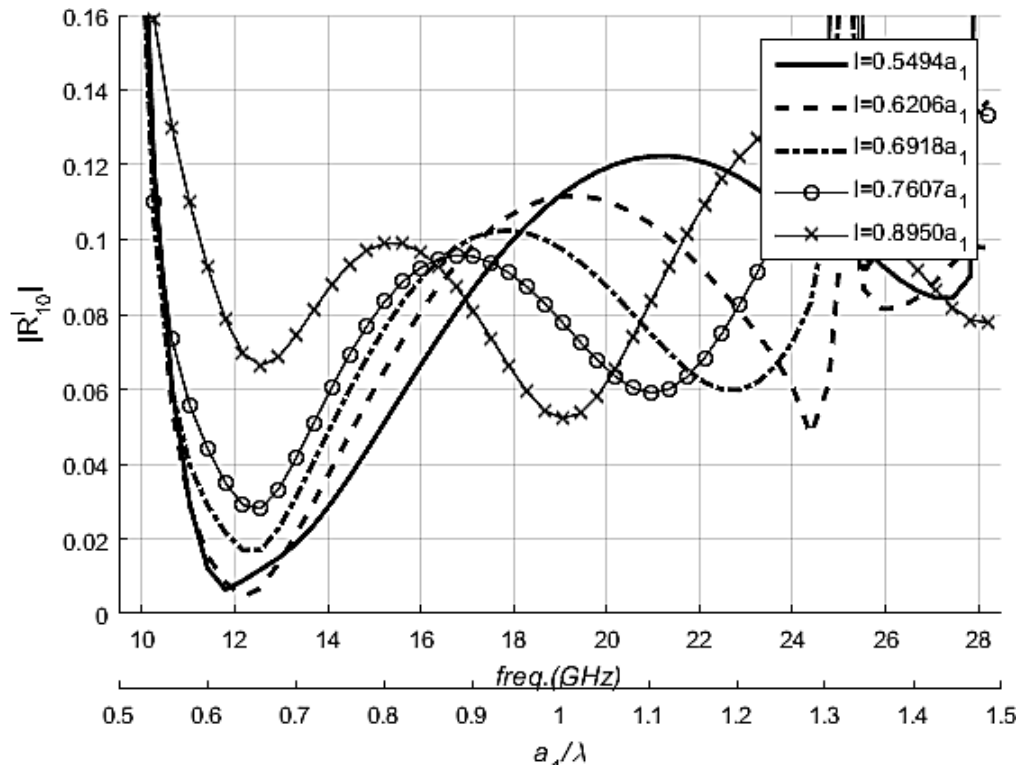


Рисунок 4.12 — Результати, отримані у HFSS для $l=\lambda_B/2$.

Таким чином, представлений електродинамічний алгоритм дозволяє здійснити електродинамічний аналіз хвильоводних НВЧ пристроїв з неоднорідностями, геометрія яких дозволяє виконати розбиття всієї області визначення поля на три і більше часткові області, що перетинаються. При цьому, розв'язання отримується у вигляді розкладання в ряд по власних функціях кожної часткової області.

Висновки до розділу 4

1. У розділі запропоновано узагальнений підхід в межах методу часткових областей, що перетинаються, і методу Шварца для розв'язання задач дифракції електромагнітної хвилі на неоднорідностях, що взаємодіють по вищих типах хвиль, який підвищує універсальність методів, розглянутих у дисертаційній роботі. У таких задачах початкова система інтегральних представлень полів часткових областей не може бути зведена до одного підсумкового інтегрального рівняння. У запропонованому узагальненому підході поле в кожній частковій області представляються у вигляді

розкладання в ряд по ортогональній системі власних функцій відповідної часткової області з невідомими коефіцієнтами розкладання. Система інтегральних представлень полів часткових областей зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладання. Узагальнений підхід дозволяє значно скоротити обсяг аналітичних перетворень необхідних для отримання чисельного розв'язання, особливо для векторних задач. Це пов'язано з тим, що в запропонованому алгоритмі, при отриманні чисельного розв'язання, в кожному інтегральному представленні необхідно помножити компоненти тензора Гріна на одну власну функцію шуканого поля і невідомий амплітудний коефіцієнт, який стоїть перед нею. Завдяки цьому, інтегрування виконується тільки по одній поверхні точок джерел. Таким чином, у порівнянні з оригінальною постановкою МЧОП і методу Шварца, скорочується кількість операцій інтегрування, а одержувані при цьому підінтегральні вирази є однотипними. Розв'язок задачі за допомогою запропонованого підходу дозволяє знайти коефіцієнти відбиття і проходження хвиль для кожної часткової області, а не тільки для однієї. При цьому запропонований алгоритм дозволяє легко змінювати область розташування джерела поля, в той час як в оригінальній постановці МЧОП і методу Шварца необхідно повністю перебудувати алгоритм.

2. На основі узагальненого підходу з використанням методу оптимальної ітерації і методу часткових областей, що перетинаються, розв'язано задачу дифракції електромагнітної хвилі на нескінченній ФАР з пласкопаралельних хвилеводів зі ступінчастими узгоджувальними вирізами у стінках хвилеводів. Коректність запропонованого підходу підтверджується порівнянням отриманих результатів для граничних випадків нескінченно малих розмірів узгоджувальної неоднорідності з вже відомими результатами, отриманими іншими методами. Запропоновано оптимальні розміри узгоджувальної неоднорідності, яка дозволяє отримати найбільш рівномірну залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування.

3. Вперше методом часткових областей, що перетинаються, з використанням запропонованого узагальненого підходу розв'язана тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на каскадному з'єднанні трьох прямокутних хвилеводів з різним розміром поперечного перерізу. Досліджено чисельну збіжність отриманого розв'язку в залежності від числа врахованих типів хвиль. Коректність отриманого розв'язку підтверджується розглядом граничних випадків рівності поперечних розмірів проміжного хвилеводу поперечним розмірами першого або третього хвилеводу. Досліджено вплив поздовжніх розмірів узгоджувальної області на частотну залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в першому хвилеводі. Показано, що підбір довжини узгоджувального хвилеводу дозволяє знизити величину коефіцієнта відбиття і отримати як широкосмугове, так і вузькосмугове узгодження. Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з результатами, отриманими за допомогою пакета програм HFSS.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну задачу розвитку методів аналізу процесу дифракції електромагнітної хвилі у хвилеводних лініях передачі. В основі запропонованих підходів лежать ітераційний метод Шварца, а також метод інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, з використанням апарату тензорних функцій Гріна.

Основні результати роботи і висновки:

1. В межах ітераційного методу Шварца розроблено підхід, який полягає у перетворенні добутку рядів власних функцій у ядрі інтегрального рівняння на операцію добутку матриць. Запропонований підхід дозволив представити загальний вираз для визначення коефіцієнта відбиття падаючої хвилі у вигляді матричного рівняння, яке далі розв'язується методом послідовних наближень. Застосування розробленого підходу в межах методу інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, приводить до аналогічного матричного рівняння, яке розв'язується проєкційними методами. На прикладі задачі дифракції електромагнітної хвилі на ФАР з пласкопаралельних хвилеводів, що сканує у H -площині, показано, що такий підхід дозволяє спростити процедуру побудови числового алгоритму, а також скоротити відносний час розрахунку величини коефіцієнта відбиття, при чому з ростом числа врахованих типів хвиль перевага запропонованого алгоритму в швидкодії збільшується.

2. Запропоновано підхід на основі ітераційного методу Шварца, який дозволив розширити область застосування методу Шварца та отримати збіжний розв'язок у випадках, коли метод послідовних наближень стає розбіжним. Розроблений підхід полягає у введенні в початкове інтегральне рівняння ітераційного параметру β . Показано, що для досягнення збіжного ітераційного процесу необхідно обирати значення параметру β таким, що дорівнює оберненій величині норми ядра інтегрального рівняння.

3. На основі запропонованих підходів розроблено чисельний алгоритм оптимальної ітерації, за допомогою якого розв'язано задачі дифракції електромагнітних хвиль на нескінченних ФАР з плоскопаралельних хвилеводів при наявності плоскошаруватих діелектричних неоднорідностей. На прикладі розглянутих задач було запропоновано методику побудови функцій Гріна часткових областей для такого типу неоднорідностей і функцій, пов'язаних з джерелом поля. Наведено чисельні результати розрахунку амплітуди і фази коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в одиничній комірці нескінченної ФАР, які отримані за допомогою алгоритму оптимальної ітерації методу Шварца.

4. Вперше методом Шварца, з використанням розроблених підходів, розв'язана векторна задача дифракції електромагнітної хвилі на з'єднанні двох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу. Досліджено чисельну збіжність отриманого розв'язання в залежності від числа врахованих типів хвиль. Встановлено оптимальне співвідношення числа врахованих типів хвиль в часткових областях, при якому досягається прийнятна точність з мінімальним часом рахунку.

5. Запропоновано узагальнений підхід на основі методу інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, і методу Шварца для аналізу процесу дифракції електромагнітної хвилі на неоднорідностях, що взаємодіють по вищих типах хвиль. Розроблений узагальнений підхід дозволяє значно скоротити обсяг аналітичних перетворень, необхідних для отримання чисельного розв'язання, за рахунок безпосереднього зведення системи інтегральних представлень полів часткових областей до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів відбиття та проходження поля у кожній частковій області. Підхід дозволяє ефективно аналізувати електродинамічні структури, в яких є можливість виділити основну область поширення радіохвиль та області, що представляють собою малі відхилення від регулярності.

6. На основі розробленого узагальненого підходу розв'язано задачу дифракції електромагнітної хвилі на нескінченій ФАР з пласкопаралельних хвилеводів зі східчастими узгоджувальними вирізами в стінках хвилеводів. Проведено чисельне дослідження впливу геометричних розмірів вирізу на коефіцієнт відбиття падаючої хвилі у хвилеводі комірки ФАР. Були визначені оптимальні розміри узгоджувальної неоднорідності, що дозволяє отримати найбільш рівномірну залежність модуля коефіцієнта відбиття від кута сканування.

7. Вперше з використанням запропонованого узагальненого підходу в методі інтегральних рівнянь часткових областей, що перетинаються, розв'язано тривимірну векторну задачу дифракції електромагнітної хвилі на співвісному каскадному з'єднанні трьох прямокутних хвилеводів з різними розмірами поперечного перерізу. Досліджено чисельну збіжність отриманого розв'язання в залежності від числа врахованих типів хвиль, а також вплив геометричних розмірів узгоджувальної області на частотну залежність модуля коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в першому хвилеводі. Показано, що підбір довжини узгоджувального хвилеводу дозволяє знизити величину модуля коефіцієнта відбиття і отримати як широкосмугове, так і вузькосмугове узгодження. Достовірність отриманого розв'язання підтверджується порівнянням з результатами, отриманими в умовах граничних переходів до з'єднання двох хвилеводів, а також з результатами, отриманими за допомогою пакета програм HFSS.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. M. A. Gnatyuk, V. M. Morozov and A. M. Sjanov, “A Schwarz algorithm for three-dimensional diffraction problems” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, Volume 74, Issue 1, pp. 1-8, 2015. (Scopus).
2. Morozov V. M., Gnatyuk M. A. Phased antenna array analysis with Schwartz alternating method. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка»*. Дніпропетровськ, 2015. Том 23. Вип. 22. С. 132 – 141.
3. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “The Schwarz method application to the calculation of waveguide phased arrays in the presence of dielectric insertions and coating” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)* Volume 77, Issue 1, pp. 1-11, 2018. (Scopus).
4. Gnatyuk M. A., Morozov V. M. An integral equation technique for the analysis of phased array antenna with matching step discontinuities. *Journal of Physics And Electronics*. Dnipro, Vol. 26(2). 2018 p. 101–106.
5. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Марченко С. В. Дифракция электромагнитной волны на каскадном соединении прямоугольных волноводов. *Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника*. Харьков, Украина, 2019. Вып.196. С. 130-137.
6. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Стык прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. *Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернівці, 24–26 жовтня 2013 р.)*. Чернівці, 2013. С. 101.
7. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Решение дифракционной задачи методом Шварца: метод простой и оптимальной итерации. *Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи: Матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Київ, 10 – 16 березня 2014)*. Київ, 2014. С. 123–125.

8. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет методом Шварца антенной решетки из волноводов с диэлектрическим заполнением. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті*: Матеріали 19-го міжнародного молодіжного форуму. (м. Харків, 20 – 22 квітня 2015). Харків, 2015. С. 7–8.
9. Гнатюк М. А., Марченко С. В., Морозов В. М., Сьянов А. М. Применение метода интегрального уравнения к решению дифракционных задач. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології*: зб. доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених. (м. Красноармійськ, 16-17 листопада 2015). Красноармійськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2015. С. 53–55.
10. M. A. Gnatyuk, and V. M. Morozov, “On the Schwarz alternating method for solving electromagnetic problems,” In Proc. XXth IEEE International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), Sep. 21-24, 2015, pp. 132-135. (Scopus).
11. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Анализ фазированных антенных решеток с плоскостойким диэлектрическим заполнением. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології*: зб. тез доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених (м. Покровськ, 29-30 листопада 2016 р.). Покровськ, 2016. С. 34–36.
12. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет альтернирующим методом Шварца антенной решетки при наличии диэлектрических вставок и покрытия. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті*: Матеріали 21-го міжнародного молодіжного форуму. (м. Харків, 25 – 27 квітня 2017), Харків, 2017, с. 5-6.
13. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Электродинамический алгоритм расчета фазированной антенной решетки на основе альтернирующего метода Шварца. *Проблеми навігації і управління рухом*: Тези доповідей всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів (м. Київ, 22–24 листопада 2017 р.). Київ, 2017. С. 48.
14. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Решение задач дифракции методом интегральных уравнений частичных пересекающихся областей. *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті*: Зб. матеріалів 22-го

- міжнародного молодіжного форуму. форуму. Т.3. (м. Харків, 17-19 квітня 2018). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 5–6.
15. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “An Integral-Equation Analysis of Waveguide Step Discontinuities,” In Proc. 17th IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET), Jul. 3-6, 2018, pp. 209 – 212. (Scopus).
 16. Шаров Г. А. Волноводные устройства сантиметровых и миллиметровых волн. Москва: Горячая линия-Телеком, 2016. 639 с.
 17. Ляпин В П, Мануйлов М Б, Синявский Г П, Черникова Т Ю. Электродинамический анализ волноводно-диэлектрических фильтров. *Изв вузов Радиофизика*. 1986. Т. 29. № 7. С.809–815.
 18. Ляпин В. П., Мануйлов М. Б., Синявский Г. П. Двухканальные волноводнодиэлектрические фильтры. *Радиотехника и электроника*. 1990. Т.35. № 6. С. 1196–1200.
 19. Кириленко А. А., Рудь Л. А., Сенкевич С. Л., Ткаченко В. И. Электродинамический синтез и анализ широкополосных волноводных фильтров на резонансных диафрагмах. *Известия вузов, сер. Радиоэлектроника*. 1997. Т. 40, № 11–12. С. 54 – 62.
 20. M. M. M. Ali, S. I. Shams, A. Sebak, and A. A. Kishk. “Rectangular Waveguide Cross-Guide Couplers: Accurate Model for Full-Band Operation,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, Vol. 28, no. 7, July, pp. 561 – 563, 2018.
 21. G. Liu, Y. Wang, Y. Pu, and Y. Luo. “Design and Microwave Measurement of a Novel Compact TE_{0n}/TE_{1n} –Mode Converter,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 64, no. 12, Dec., pp. 4108 – 4116, 2016.
 22. Горобец Н. Н., Ляховский А. Ф., Розыскнов С. Ю. Увеличение развязки между каналами в волноводных поляризаационных разделителях. *Вестник Харьковского государственного университета. Радиофизика и электроника*. 1992. № 371. С. 36–41.

23. Блинова Н. К., Горобец Н. Н., Селютин А. В. Продольно-поперечные поляризационные селекторы на волноводе квадратного поперечного сечения. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Радіофізика та електроніка"*. 2013. № 1067. Випуск 22. С. 17–22.
24. Горобец Н. Н., Овсянникова Е. Е., Шишкова А. В. Расстояние дальней зоны волноводных излучателей. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*. 2008. № 834. С. 68–76.
25. Горобец Н. Н. , Шишкова А. В. Характеристики электромагнитного излучения из открытого конца круглого волновода в ближней и промежуточной зонах. *Радиотехника и электроника*. 2002. Т. 47, №5. С.579-582
26. Булгакова А. А., Горобец Н. Н., Катрич В. А., Лященко В. А. Коэффициент направленного действия антенных решеток. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2016. Т. 21, № 4. С. 285–297.
27. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: "Советское радио", 1966. 431 с.
28. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. А. И. Плиса, под ред. Г.В. Воскресенского. М.: Мир, 1974. 327 с.
29. J.W. Bandler, R.M. Biernacki, S.H. Chen, L.W. атв Hendrick D. Omeragic "Electromagnetic Optimization of 3-D Structures," *IEEE transactionson microwave theory and techniques*, Vol. 45, № 5. pp.770 – 779, 1997.
30. M.J. McDougall and J.P. Webb "Infinite elements for the analysis of opendielectric waveguides," *IEEE transactionson microwave theory and techniques*, Vol. 37, № 11. pp.1724 – 1731, 1989.
31. J.F. Lee, D.K. Sun and Z.J. Cendes "Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements," *IEEE transactionson microwave theory and techniques*, Vol. 39, № 8. pp. 1262 – 1271, 1991.

32. M. Hano “Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides,” *IEEE transactionson microwave theory and techniques*, Vol. 32, № 10. pp.1275 – 1279, 1984.
33. B.M. Rahman and J.B. Davies “Finite-element analysis of optical and microwave waveguide problems,” *IEEE transactionson microwave theory and techniques*, Vol. 33, № 1. pp. 20 – 28, 1984.
34. K. Ise, K. Inoue and M. Koshiha, “Three-dimensional finite-element method with edge elements for electromagnetic waveguide discontinuities”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 8, Aug., pp. 1289-1295, 1991.
35. M. D. Deshpande, C. J. Reddy and M. C. Bailey, “Analysis of waveguide junction discontinuities and gaps using finite element method”, *Electromagnetics*, vol. 18, pp. 81-97, 1998.
36. F. Moglie, T. Rozzi and P. Marcozzi, "Wideband matching of waveguide discontinuities by FDTD methods," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, no. 11, pp. 2093-2098, Nov. 1994, doi: 10.1109/22.330124.
37. Jin-fa-Lee, R. Palandech and R. Mittra, "Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, no. 2, pp. 346-352, Feb. 1992, doi: 10.1109/22.120108.
38. Захарія Й. А. Методи прикладної електродинаміки: Навч. посібник. Львів: «Бескид Біт», 2003. 352 с.
39. Приколотин С. А., Кириленко А. А. Метод частичних областей с учетом особенностей во внутренних задачах с произвольными кусочно-координатными границами. Часть 1. Спектры собственных волн ортогонных волноводов. *Радиофизика и электроника*. ИРЭ НАН Украины, 2010. Том. 15, №1, С. 17-29.
40. M. Guglielmi, and C. Newport, “Rigorous, multimode equivalent network representation of inductive discontinuities,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 38, Iss. 11, Nov., pp. 1651 – 1659, 1990.

41. M. Guglielmi, and A. A. Melcon, "Rigorous, multimode equivalent network representation of capacitive discontinuities" *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 41, Iss. 6, Jun/Jul, pp. 1195 – 1206, 1993.
42. M. Guglielmi, and G. Gheri, "Rigorous multimode network representation of capacitive steps," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, no. 4, Apr., pp. 622-628, 1994.
43. M. Guglielmi, and G. Gheri, "Rigorous multimode network/numerical representation of inductive step," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, Feb., pp. 319-328, 1994.
44. A. Alvarez Melcon, and M. Guglielmi, "Multimode Network Representation of Two Dimensional Steps in Rectangular Waveguides," In Proc. 24th European Microwave Conference 5-9 Sept., 1994.
45. D. Kinowski, and M. Guglielmi, "Multimode equivalent network representation for the scattering from multistrip gratings," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 43, Iss. 6, Jun., pp. 597 – 603, 1995.
46. B. Gimeno, and M. Guglielmi, "Multimode equivalent network representation for H- and E-plane uniform bends in rectangular waveguide" *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, Iss. 10, Oct., pp. 1679 – 1687, 1996.
47. B. Gimeno, and M. Guglielmi, "Multimode equivalent network representation for the Y-junction of rectangular waveguides," *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*, Vol. 144, Iss. 3, Jun., pp. 161 – 166, 1997.
48. D. Sánchez-Escuderos, M. Baquero-Escudero, P. Soto, V. E. Boria, and M. Gugli "On Multimode Equivalent Network Representation of Finite Arrays of Open-Ended Waveguides," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 65, Iss. 8, Aug., pp. 4334 – 4339, 2017.
49. T. E. Rozzi, "A new approach to the network modelling of capacitive irises and steps in waveguide," *International Journal of Circuit Theory And Applications*, vol. 3, iss.4, Dec., pp. 339-354, 1975.

50. T. Rozzi, and M. Mongiardo, "E-Plane Steps in Rectangular Waveguide," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, Iss. 8, Aug., pp. 1279 – 1288, 1991.
51. H. Patzelt, and F. Arndt, "Double-plane step in rectangular waveguides and their application for transformers irises and filters", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-30, no. 5, May, pp. 771–776, 1982.
52. G. V. Eleftheriades, A. S. Omar, L. P. B. Katehi, and G. M. Rebeiz, "Some important properties of waveguide junction generalized scattering matrices in the context of the mode matching technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, Oct., pp. 1896-1903, 1994.
53. K. L. Chan and S. R. Judah, "Mode-matching analysis of a waveguide junction formed by a circular and a larger elliptic waveguide," *IEE Proc.– Microw. Antennas and Propag.*, vol. 145, Feb., pp. 123-127, 1998.
54. S. L. Lin, L. W. Li, T. S. Yeo, and M. S. Leong, "Novel unified mode matching analysis of concentric waveguide junctions," *IEE Proc.– Microw. Antennas and Propag.*, vol. 148, Dec., pp. 369-374, 2001.
55. J. Zheng, and M. Yu, "Rigorous Mode-Matching Method of Circular to Off-Center Rectangular Side-Coupled Waveguide Junctions for Filter Applications," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 55, Iss. 11, Nov., pp. 2365 – 2373, 2007.
56. J. Zheng, and M. Yu, "Rigorous Mode Matching Method for Circular to Off-Centre-Rectangular Side-Coupled Waveguide Junctions," In Proc. IEEE/MTT-S International Microwave Symposium, 2007, pp. 1923–1926.
57. O.P. Franza, and W. C. Chew, "Recursive mode matching method for multiple waveguide junction modeling," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, Iss. 1, Jan., pp. 87 – 92, 1996.
58. P. Matras, R. Bunger, and F. Arndt, "Mode-matching analysis of the step discontinuity in elliptical waveguides," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 6, Iss. 3, Mar. pp. 143 – 145, 1996.

59. L. Christie, and P. Mondal, "Mode Matching Method for the Analysis of Cascaded Discontinuities in a Rectangular Waveguide," *Procedia Computer Science*, no. 93, Sep., pp. 251–258, 2016.
60. H. Deguchi, H. Urata, M. Tsuji, and H. Shigesawa "Multiple-step rectangular horn with two orthogonal sectoral tapers for elliptical beam," In Proc. The European Conference on Wireless Technology, 2005, DOI: 10.1109/EUMC.2005.1610330.
61. T. Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and MillimeterWave Passive Structures*. New York: Wiley-Interscience, 1989.
62. S. Amari, J. Bornemann and R. Vahldieck, "Application of a coupled-integral-equations technique to ridged waveguides," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 12, pp. 2256-2264, Dec. 1996, doi: 10.1109/22.556454.
63. Веселов Г. И., Платонов Н. И., Слесарев Е. С. Об учете особенностей электромагнитных полей в методе частичных областей. *Радиотехника*. 1980. Том. 35, №5, С. 27-34.
64. M. Tanaka, and K. Tanaka, "Computer Simulation of 3-Dimensional Waveguide by Electric Field Integral Equation," In Proc. First International Conference on Communications and Electronics, 2006, pp. 441–445.
65. M. Tanaka, and K. Tanaka, "Numerical Computation of New Electric Field Integral Equation for 3-Dimensional Waveguide," In Proc. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 2008, pp. 1-4.
66. F. D. Quesada Pereira, P. Vera Castejón, A. Alvarez Melcon, B. Gimeno Martínez and V. E. Boria Esbert, "An efficient integral equation technique for the analysis of arbitrarily shaped capacitive waveguide circuits", *Radio Science*, vol. 46, no. RS2017, Apr., pp. 1-11, 2011.
67. N. Amitay, V. Galindo and C. Wu, *Theory and analysis of phased array antennas*. New York: Wiley-Interscience, 1972.

68. M. F. Iskander, and M. A. K. Hamid, "Iterative Solution of the Waveguide-Horn Junction" In Proc. S-MTT International Microwave Symposium Digest, 1974, pp. 84 – 86.
69. M.F. Iskander, and M.A.K. Hamid, "Iterative Solutions of Waveguide Discontinuity Problems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 25, Iss. 9, Sep., pp. 763 – 768, 1977.
70. F. Collino, S. Ghameni, and P. Joly, "Domain decomposition method for harmonic wave propagation: a general presentation," *J. Comput. meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 184, Iss. 2 – 4, Apr., pp. 171-211, 2000.
71. M. J. Gander, and H. Zhang, "Optimized Schwarz methods with overlap for the Helmholtz equation", In Proc. Domain Decomposition Methods in Sci. and Eng. XXI, pp. 207 – 215, 2014.
72. F. B. Belgacem, M. Fourni'e, N. Gmati, and F. Jelassi, "On the Schwarz algorithms for elliptic exterior boundary value problems," *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis – Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, Vol. 39, no. 4, pp. 693-714, 2005.
73. P. L. Lions, "On the Schwarz alternating method. I," In Proc. First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, 1988, pp. 1-42.
74. V. Baronian, A. S. B. B. Dhia, S. Fliss, and A. Tonnoir, "Iterative methods for scattering problems in isotropic or anisotropic elastic waveguides," *Wave Motion*, Vol. 64, July, pp.12 – 33, 2016.
75. Прохода И. Г. Об интегральных уравнениях векторной теории дифракции и их приближенном решении методом Шварца. *Электродинамика и физика СВЧ*. Днепропетровск: ДГУ, 1980. С. 34 – 42.
76. Прохода И.Г., Морозов В.М. Применение метода Шварца к решению нерегулярных волноводных задач. *Изв. вузов. Радиоэлектроника*. 1981. т.24. №2. С. 73 – 78.

77. Прохода И. Г., Чумаченко В. П. Метод частичных пересекающихся областей для исследования волноводно-резонаторных систем сложной формы. *Изв. вузов СССР. Радиофизика*. 1973. т. 16. № 10. С. 1578–1582.
78. V. M. Onufrienko, I. G. Prokhoda and V. P. Chumachenko, “Numerical solution of the problem of a waveguide transformer with a connecting cavity having a complex shape,” *Radiophysics and Quantum Electronics*, Vol. 18, Iss. 4, 426–428, 1975.
79. V. M. Onufrienko and I. G. Prokhoda, “Design of multimode multiple-arm waveguide junctions,” *Radiophysics and Quantum Electronics*, Vol. 19, Iss. 7, 774–775, 1976.
80. Прохода И. Г., Морозов В. М. Основные уравнения метода частичных пересекающихся областей для расчета открытых периодических структур. *Электродинамика и физика СВЧ*. Днепропетровск: ДГУ, 1976, С. 27 – 29.
81. Прохода И. Г., Морозов В. М. Применение метода частичных пересекающихся областей для расчета волноводных ФАР с апертурными неоднородностями. *Электродинамика и физика СВЧ*. Днепропетровск: ДГУ, 1980. С. 106 – 112.
82. Прохода И.Г., Морозов В.М., Федорченко С.Г. Электродинамический расчет плоской волноводной ФАР методом частичных пересекающихся областей. *Электродинамика и физика СВЧ*. Днепропетровск: ДГУ, 1983, С. 56-63.
83. Прохода И.Г., Исаев Л.Н. О двойных ступенчатых неоднородностях в Е-плоскости в прямоугольном волноводе. *Электродинамика и физика СВЧ*. Днепропетровск: ДГУ. 1970. С. 50 – 56.
84. D. G. Swanson, J. Wolfgang, and R. Hoefler, *Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation*. London: Artech House Boston, 2003.
85. M. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics. Second edition*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2001.

86. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Математические задачи теории дифракции: Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. 196 с.
87. С. Т. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*. Second Edition, New York: IEEE Press, 2003.
88. Прохода И.Г., Дмитрюк С. Г., Морозов В.М. Тензорные функции Грина и их приложения в электродинамике СВЧ. Днепропетровск: ДГУ, 1985. 64 с.
89. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 2. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. 898 с.
90. L. V. Kantorovich and V. I. Krylov, *Approximate methods of higher analysis*, New York: Wiley-Interscience, 1964.
91. H. A. Schwarz "Über einige Abbildungsaufgaben", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Vol. 70, pp. 105–120, 1869.
92. Воскресенский Д. И., Гостюхин В. Л., Максимов В. М., Пономарев Л. И. Устройства СВЧ и антенны: Учебное пособие. 2-е издание, дополненное и переработанное. Москва: Радиотехника, 2006. 376 с.
93. R. E. Collin, *Field theory of guided waves (Second Edition)*. New York: NJ and A JOHN WILEY & SONS INC., 1991.
94. Математика. Её содержание, методы и значение / редкол.: А. Д. Александров и др. Москва: изд. Академии наук СССР, 1956. Т. 3. 336 с.
95. Douglas Quinney. "So what's new in Mathematica 5.0?". *MSOR Connections. The Higher Education Academy*. vol.3, no.4, pp.57–59, 2003.
96. С. Moler, "MATLAB Incorporates LAPACK". *mathworks.com*, 2000. [Online] Available: <https://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/matlab-incorporates-lapack.html> Accessed [Dec. 06, 2019].
97. Stéfan van der Walt; S. Chris Colbert and Gaël Varoquaux, "The NumPy array: a structure for efficient numerical computation". *Computing in Science and Engineering*. Vol. 13, Iss. 2, pp. 22–30. 2011. doi:10.1109/MCSE.2011.37.

98. Ronald F. Boisvert, "Mathematical software: past, present, and future". *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 54, no. 4–5, pp. 227–241, 2000. doi:10.1016/S0378-4754(00)00185-3.
99. Lawson, C. L.; Hanson, R. J.; Kincaid, D.; Krogh, F. T.. "Basic Linear Algebra Subprograms for FORTRAN usage". *ACM Trans. Math. Softw.* 5 (3), (1979): 308–323. doi:10.1145/355841.355847
100. J. J. Dongarra, J. Du Croz, I. S. Duff, and S. Hammarling, "A set of Level 3 Basic Linear Algebra Subprograms", *ACM Trans. Math. Softw.*, 16, pp. 1–17, 1990.
101. J. J. Dongarra, J. Du Croz, I. S. Duff, and S. Hammarling, "Algorithm 679: A set of Level 3 Basic Linear Algebra Subprograms", *ACM Trans. Math. Softw.*, 16, pp. 18–28, 1990.
102. C. T. Tai, and P. Rozenfeld, "Different Representations of Dyadic Green's Functions for a Rectangular Cavity," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 24, Iss. 9, Sep., pp. 597 – 601, 1976.
103. Y. Rahmat-Samii, "On the Question of Computation of the Dyadic Green's Function at the Source Region in Waveguides and Cavities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 23, Iss. 9, Sep., pp. 762 – 765, 1975.
104. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа: 9-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1965. 427 с.
105. Y. C. Shih, and K. G. Gray, "Convergence of Numerical Solutions of Step-Type Waveguide Discontinuity Problems by Modal Analysis," In Proc. IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest 1983, pp. 233-235.

ДОДАТОК А

Список власних публікацій здобувача

1. M. A. Gnatyuk, V. M. Morozov and A. M. Sjanov, “A Schwarz algorithm for three-dimensional diffraction problems” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, Volume 74, Issue 1, pp. 1-8, 2015. (Scopus).
2. Morozov V. M., Gnatyuk M. A. Phased antenna array analysis with Schwarz alternating method. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка»*. Дніпропетровськ, 2015. Том 23. Вип. 22. С. 132 – 141.
3. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “The Schwarz method application to the calculation of waveguide phased arrays in the presence of dielectric insertions and coating” *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)* Volume 77, Issue 1, pp. 1-11, 2018. (Scopus).
4. Gnatyuk M. A., Morozov V. M. An integral equation technique for the analysis of phased array antenna with matching step discontinuities. *Journal of Physics And Electronics*. Dnipro, Vol. 26(2). 2018 p. 101–106.
5. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Марченко С. В. Дифракция электромагнитной волны на каскадном соединении прямоугольных волноводов. *Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника*. Харьков, Украина, 2019. Вып.196. С. 130-137.
6. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Стык прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. *Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернівці, 24–26 жовтня 2013 р.)*. Чернівці, 2013. С. 101.
7. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Решение дифракционной задачи методом Шварца: метод простой и оптимальной итерации. *Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи: Матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Київ, 10 – 16 березня 2014)*. Київ, 2014. С. 123–125.

8. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет методом Шварца антенной решетки из волноводов с диэлектрическим заполнением. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті*: Матеріали 19-го міжнародного молодіжного форуму. (м. Харків, 20 – 22 квітня 2015). Харків, 2015. С. 7–8.
9. Гнатюк М. А., Марченко С. В., Морозов В. М., Сьянов А. М. Применение метода интегрального уравнения к решению дифракционных задач. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології*: зб. доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених. (м. Красноармійськ, 16-17 листопада 2015). Красноармійськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2015. С. 53–55.
10. M. A. Gnatyuk, and V. M. Morozov, “On the Schwarz alternating method for solving electromagnetic problems,” In Proc. XXth IEEE International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), Sep. 21-24, 2015, pp. 132-135. (Scopus).
11. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Сьянов А. М. Анализ фазированных антенных решеток с плоскостойким диэлектрическим заполнением. *«ТАК»: телекомунікації, автоматика, комп'ютерно-інтегровані технології*: зб. тез доповідей міжрегіон. наук.-практ. конф. молодих вчених (м. Покровськ, 29-30 листопада 2016 р.). Покровськ, 2016. С. 34–36.
12. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Расчет альтернирующим методом Шварца антенной решетки при наличии диэлектрических вставок и покрытия. *Радіоелектроніка та молодь в XXI столітті*: Матеріали 21-го міжнародного молодіжного форуму. (м. Харків, 25 – 27 квітня 2017), Харків, 2017, с. 5-6.
13. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Электродинамический алгоритм расчета фазированной антенной решетки на основе альтернирующего метода Шварца. *Проблеми навігації і управління рухом*: Тези доповідей всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів (м. Київ, 22–24 листопада 2017 р.). Київ, 2017. С. 48.
14. Гнатюк М. А., Морозов В. М. Решение задач дифракции методом интегральных уравнений частичных пересекающихся областей. *Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті*: Зб. матеріалів 22-го

міжнародного молодіжного форуму. форуму. Т.3. (м. Харків, 17-19 квітня 2018). Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 5–6.

15. M. A. Gnatyuk and V. M. Morozov, “An Integral-Equation Analysis of Waveguide Step Discontinuities,” In Proc. 17th IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET), Jul. 3-6, 2018, pp. 209 – 212. (Scopus).