

В.В. РАПИН, д-р техн. наук

ПОГРЕШНОСТЬ МЕТОДОВ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ УКРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СИНХРОНИЗИРОВАННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Введение

Развитие современных систем и устройств радиотехники, связи, радиолокации, навигации и информационно-измерительных комплексов невозможно без широкого использования автоколебательных систем, которые находят многочисленное и разнообразное применение, часто определяя предельные возможности по наиболее важным параметрам. Это обусловлено их способностью выполнять различные функции, такие как усиление и демодуляция амплитудно-модулированных, фазо-модулированных и частотно-модулированных сигналов, умножение и деление частоты, фильтрацию сигналов и различного рода преобразования, например малых изменений частоты в фазовый сдвиг [1 – 9]. Введение фазовой обратной связи в синхронизированных автогенераторах позволило реализовать потенциальные возможности таких устройств, что привело не только к улучшению известных характеристик, например к сокращению длительности переходных процессов, но и появлению совершенно новых свойств в системах синхронизированных автогенераторов [10 – 12]. Появление дифференциальных автогенераторов еще больше расширило сферу применения автоколебательных устройств [13, 14]. Однако их исследование представляет довольно сложную задачу с математической точки зрения. Появление в последнее время таких методов как метод квазималого параметра и комбинированного метода малого параметра позволило существенно продвинуться в этом направлении [15]. Однако еще недостаточно изучены особенности этих методов. Таким образом, целью статьи является исследование погрешностей этих методов и особенности их применения.

Модель синхронизированного автогенератора

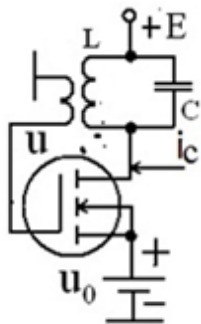


Рис. 1. Схема автогенератора

Рассмотрим, для определенности, синхронизированный на основном тоне одноконтурный LC автогенератор, представленный на рис. 1, для исследования которого использовались указанные методы. Модель автогенератора получена при традиционных упрощающих предположениях: добротность контура автогенератора Q велика, смещение u_0 фиксированное, транзистор является безынерционным элементом с большим входным сопротивлением. Его нелинейная характеристика аппроксимируется полиномом четвертой степени $i = a_0 + a_1 u_y + a_2 u_y^2 + a_3 u_y^3 + a_4 u_y^4$, где u_y управляющее напряжение $u_y = u + u_0$. В этом случае $u = A \cos(\omega_c t + \varphi)$ напряжение на затворе транзистора, сигналом синхронизации является ток $i_c = I_c \cos(\omega_c t + \varphi_c)$. Используя законы Кирхгофа, дифференциальное уравнение автогенератора можно представить в виде

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - 2\beta u - 3\gamma u^2 - 4\delta' u^3) \frac{du}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} u = R\delta K \frac{di_c}{d\tau}, \quad (1)$$

где $\tau = \omega_c t$, $\varepsilon = \delta\alpha$ – малый параметр, $\alpha = KR\alpha_0 - 1$, $\alpha_0' = -\alpha_0 + 1/(KR)$, $\beta = \beta_0/\alpha_0'$, $\gamma = \gamma_0/\alpha_0'$, $\delta' = \delta_0/\alpha_0'$, $\alpha_0' = -\alpha_0 + 1/(KR)$, $\alpha_0 = a_1 + 2a_2 u_0 + 3a_3 u_0^2 + 4a_4 u_0^3$, $\beta_0 = a_2 + 3a_3 u_0 + 6a_4 u_0^2$, $\gamma_0 = a_3 + 4a_4 u_0$, $\delta_0 = a_4$, $\delta = 1/Q$, ω_0 – резонансная частота контура, R – резонансное сопротивление контура, $K = M/L$ – коэффициент положительной обратной связи, L и M – индуктивность контура и взаимная индуктивность.

Пусть $|d\varphi_c/d\tau| \ll 1$, $\omega_c \approx \omega_0$ и $I_c = const$. Выражение $u = A \cos(\omega_c t + \varphi)$ это решение уравнения (1), где A и φ медленно меняющиеся функции времени. Тогда моделью автогенератора являются укороченные уравнения, полученные из уравнения (1) методом усреднения:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{3}{4} \gamma A^3 - A \right) &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{KRI_c}{\alpha} \cos(\theta^0), \\ \frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{KRI_c}{\alpha A} \sin(\theta^0) &= -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}. \end{aligned}$$

Далее эти уравнения будут использоваться в более удобной безразмерной форме

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} (y^3 - y) &= \frac{\varepsilon B}{2\alpha} \cos(\theta^0), \\ \frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2\alpha} \sin(\theta^0) &= -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $y = A/A_0$ – безразмерная амплитуда, A и $A_0 = \sqrt{4/(3\gamma)}$ это амплитуды сигналов автогенератора, работающего в режиме синхронизации и авономном режиме соответственно, $\theta^0 = \varphi - \varphi_c$, $B_{1(y)} = B/\alpha > 0$, $B_{2(y)} = B/(\alpha y) > 0$, $B = I_c/I_0$, $I_0 = A_0/(KR)$, $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega_c - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$.

Для решения уравнений (2) и используются указанные методы, которые основаны на методе малого параметра, но имеют свою специфику, поскольку малый параметр в уравнениях (2) отсутствует.

Метод квазималого параметра

Данный метод представляет собой традиционный метод малого параметра, когда последний вводится в уравнения искусственно.

Преобразуем уравнения с целью выделения членов, создающих трудности при решении. Переходим к переменной составляющей безразмерной амплитуды колебаний путем использования подстановки $y = y_0(1 - \Delta)$, где y_0 значение безразмерной амплитуды колебаний при нулевой частотной расстройке, а Δ является переменной составляющей этой амплитуды. Тригонометрические функции разлагаем в ряд Тейлора. Перепишем систему (2), группируя малые нелинейные члены, создающие трудности при решении, умножаем их на некоторое число μ , и делим на число ν , в итоге полагая, что $\mu = \nu = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} (3y_0^2 - 1)\Delta &= \frac{\varepsilon}{2} (\theta^0)^2 + \mu \left\{ \xi \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(\theta^0)^{2(i-1)}}{(2(i-1))!} + \frac{\varepsilon}{2} y_0^2 \Delta^2 (3 - \Delta) \right\} / \nu, \\ \frac{d\theta^0}{d\tau} + \xi \theta^0 &= -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau} - \mu \xi \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(\theta^0)^{2i-1}}{(2i-1)!} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \right) \left[\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(\theta^0)^{2i-1}}{(2i-1)!} \right] \right\} / \nu. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде рядов

$$\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \Delta_i \quad \text{и} \quad \theta^0 = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \theta_i^0$$

Поскольку данное решение является приближенным, а информационным параметром является сдвиг фазы, то для оценки погрешности использовалась невязка по этому параметру. Изменение невязки в полосе синхронизации в зависимости от числа учтенных членов ряда показано на рис. 2, где δ_0 – невязка решения в первом приближении, δ_1 – невязка, учитывающая поправки первого порядка, δ_2 – невязка, учитывающая поправки первого и второго порядка, и δ_3 – невязка, учитывающая поправки всех трех порядков.

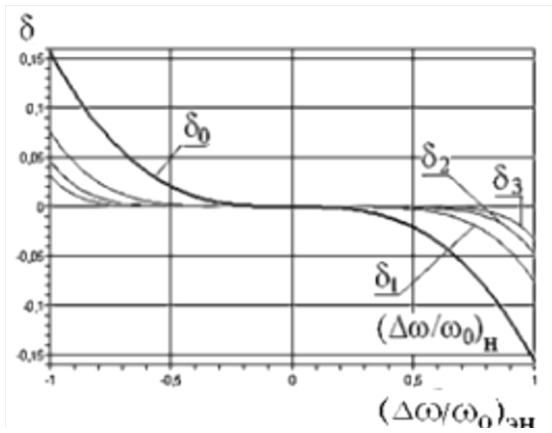


Рис. 2. Изменение невязки в методе квазималого параметра

Комбинированный метод малого параметра

Решение уравнений (2) комбинированным методом малого параметра (КМПП) основано на использовании особенности функционирования автогенератора в режиме синхронизации, заключающийся в том, что для автогенератора, синхронизированного на основном тоне, амплитуду колебаний можно считать установившейся при любом мгновенном значении сдвига фазы, т.е. в уравнениях (2) производной $dy/d\tau$ можно пренебречь, и они принимают вид

$$y^3 - y = \frac{B}{\alpha} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2y\alpha} \sin(\theta^0) = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}.$$

Представляем безразмерную амплитуду колебаний также в виде $y = y_0(1 - \Delta)$ и проделываем те же преобразования, что и ранее. Однако малый параметр Δ_s определяется исходя

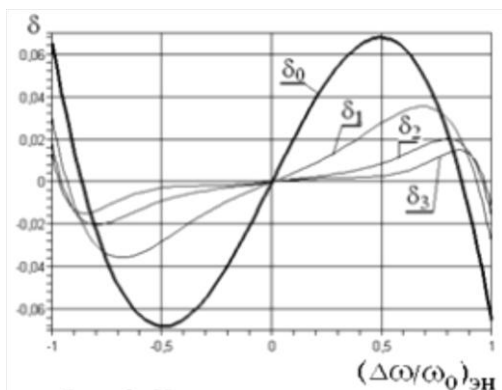


Рис. 3. Изменение невязки в методе КМПП

$(\Delta\omega/\omega_0)_{нн}$ представляет частотную расстройку. В методе квазималого параметра уравнения первого приближения это линейные дифференциальные уравнения полученные путем линеаризации исходных нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности нулевой частотной расстройки. Эти уравнения и вносят основной вклад в сумму ряда, представляющего решение. Для сдвига фазы и стационарного режима это выражение

$$\theta_0 = -\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{нн} \quad (3)$$

где $\xi = \varepsilon B / (2\alpha y_0) = \varepsilon(y_0^2 - 1) / 2$

из процедуры аппроксимации фазовой характеристики синхронизированного автогенератора выражением, представляющим первое приближение. Изменение невязки в полосе синхронизации в зависимости от числа учтенных членов ряда, представляющего решение, показано на рис 3.

В комбинированном методе малого параметра уравнения первого приближения получены методом аппроксимации исходных нелинейных дифференциальных уравнений. Для сдвига фазы и стационарного режима это

$$\theta_0 = -\frac{1}{\xi(1 - \Delta_s)} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{нн} \quad (4)$$

Легко видеть, что в данном случае малое значение невязки получается уже при использовании решения в первом приближении.

Сравнение методов решения укороченных уравнений

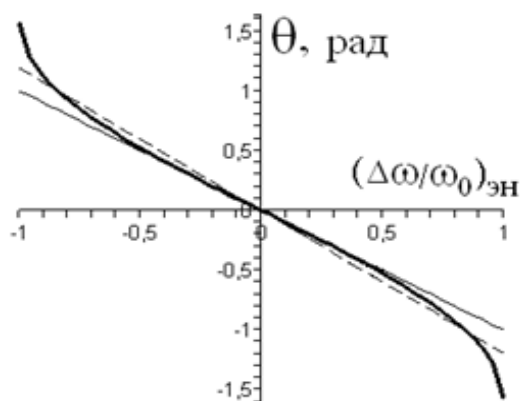


Рис. 4. Фазовая характеристика и первые приближения методов

Сравнение кривых, представленных на рис. 2, 3 говорит о том, что процесс последовательного приближения в обоих случаях является сходящимся, однако комбинированный метод малого параметра позволяет существенно, в 2,5 раза, снизить максимальную величину невязки.

На рис. 4 представлены фазовая характеристика автогенератора и первые приближения рассматриваемых методов. Фазовая характеристика описывается выражением

$$\theta^0 = \arcsin[-(\Delta\omega/\omega_0)_{\text{эн}}/\xi].$$

В методе квазималого параметра решение в первом приближении фактически является линейризацией фазовой характеристики, которая хорошо описывает процессы в достаточно узком диапазоне расстроек в центре полосы синхронизации, поскольку практически совпадает с ней. В центре полосы синхронизации, когда расстройка равна нулю, значение приведенного выражения также равняется нулю, т.е. совпадает со значением фазовой характеристики в этой точке. Очевидно, что погрешность здесь также равна нулю. Погрешность этого метода является непрерывной функцией расстройки $(\Delta\omega/\omega_0)_{\text{эн}}$.

Первым приближением в комбинированном методе малого параметра является соотношение (4), которое представляет собой аппроксимацию фазовой характеристики синхронизированного автогенератора и воспроизводит ее с большей точностью во всей полосе расстроек, что существенно уменьшает невязку и позволяет обойтись без поправок при исследовании процесса синхронизации практически во всей полосе синхронизации. Однако особенностью этого метода является поведение погрешности в области малых расстроек. При нулевой расстройке значение этой функции также равно нулю, как и значение фазовой характеристики, что означает нулевое значение погрешности. Рассмотрим теперь значение погрешности при приближении расстройки к нулю справа. Запишем выражение для правостороннего предела:

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{\substack{\Delta\omega \\ \omega_0} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\xi(1-\Delta_s)} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}} - \arcsin\left(-\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}}\right) \right] / \left[\arcsin\left(-\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}}\right) \right] = \\ &= \lim_{\substack{\Delta\omega \\ \omega_0} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\xi(1-\Delta_s)} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}} \right] / \left[-\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{эн}} \right] = \frac{\Delta_s}{1-\Delta_s} \end{aligned}$$

Для левостороннего предела получаем аналогичное выражение. Очевидно, что в данном случае предел этой функции при стремлении независимой переменной к нулю существует, но не равен значению этой функции в этой точке. Из этого факта следует, что функция, представляющая погрешность, не является непрерывной. При нулевой расстройке она имеет разрыв. Разрыв такого вида, т.е. с существующим общим пределом, относится к категории устранимых разрывов.

Выводы

Проведен сравнительный анализ двух аналитических методов исследования синхронизированных автогенераторов. Показано, что оба метода могут быть использованы, но метод квазималого параметра требует, как минимум, одну поправку к решению, полученному как первое приближение.

Комбинированный метод малого параметра позволяет обойтись только решением в первом приближении. Однако в данном методе функция, представляющая погрешность, не является непрерывной. Она имеет устранимый разрыв, который можно избежать ее доопределением.

Список литературы:

1. Khokhlov R.V. A Method of Analysis in the Theory of Sinusoidal Self-Oscillations // IRE Trans. Circuit Theory. 1960. Vol. 7, № 4. P. 398-413.
2. Ruthroff C.L. Injection-Locked Oscillator FM Receiver Analysis // The B.S.T.J. 1968. № 7. P. 1653 - 1661.
3. Toyosaku Isobe, Power Amplification for FM and PM Signals with Synchronized IMPATT Oscillators // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1970. Vol. 18, № 11. P. 906 – 911.
4. Daikoku K., Mizushima Y., Properties of Injection Locking in the non-linear oscillator // Intern. Journ. of Electronics. 1974. Vol. 31, № 3. P. 279-292.
5. Biswas B.N., Ray S.K. Discrimination of a Second-Order Injection Synchronized Oscillator Against Interfering Tones // IEEE Trans. Circuits Syst. 1974. Vol. 21, № 3. P. 402- 405.
6. Elwakil A.S., Ozoguz A.S.. On the Generation of Higher Order Chaotic Oscillators via Passive Coupling of Two Identical or Nonidentical Sinusoidal Oscillators // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2006. Vol. 53, № 7. P. 1521 – 1532.
7. Plessas F.C., Papalambrou A., Kalivas G. A 5-GHz Subharmonic Injection-Locked Oscillator and Self-Oscillating Mixer // IEEE Trans. Circuits Syst. II. 2008. Vol. 55, № 7. P. 633- 637.
8. Zhao L., Xiang L., Liu J., Zhou J. Sampled-data group synchronization of coupled harmonic oscillators subject to controller failure // Proc. CCC 34th Chinese. 2015. P. 2309-2314.
9. Rapin V, Munalo A. Self-oscillator tracking filter with nonlinear feedback // Telecommunications and Radio Engineering. 2019. 78 (2). P.161
10. Rapin V. Synchronized oscillators with the phase-negative feedback // IEEE Trans. on circuits and systems Fundamental theory and applications. 2002. Vol. 49, №. 8. P 1242 – 1245
11. Rapin V. On the phase feedback in the synchronized oscillators // Proc. of 2nd IEEE International Conference on Circuits and Systems for Communications, ICCSC, 2004. June 30, Moscow, Russia.
12. Rapin V. New principle of the phase-locked loop operation // Proc. of 5th IEEE International conference on circuits and systems for communications, 2010. Belgrade, Serbia, November 23-25, P. 145-149
13. Antonio Buonomo, Alessandro Lo Schiavo. Analytical Approach to the Study of Injection-Locked Frequency Dividers // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2013. Vol. 60, No. 1. P. 51- 62.
14. Ahmad Mirzaei, Mohammad E. Heidari, Rahim Bagheri. Saeed Chehraz, Asad A. Abidi. The Quadrature LC Oscillator: A Complete Portrait Based on Injection Locking // IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2007. Vol. 42, No. 9. P. 1916-1932.
15. Rapin V.V. Solution of Reduced Equations of Injection-Locked Oscillator // Radioelectronics and Communications Systems 2019. №6. P 271–285.

Поступила в редколлегию 11.03.2021

Сведения об авторе:

Рапин Владимир Васильевич – д-р техн. наук, доцент, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, профессор кафедры информационно-сетевой инженерии (ИСИ), факультет инфокоммуникаций, Украина; e-mail: vrabin@ukr.net; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9773-7695>