УДК 537.86 DOI:10.30837/rt.2020.4.203.19

А.И. КОЗАРЬ, д-р физ.-мат. наук

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИСКРЕТНЫМ ОКТАЭДРОМ ИЗ РЕЗОНАНСНЫХ СФЕР

Введение

Здесь рассматривается случай, эквивалентный рентгеновской оптике кристаллов, когда $a/\lambda' << 1$ и может быть $a/\lambda_g \sim 1; d,h,l/\lambda' \sim 1$, где a – радиус сфер; λ', λ_g – длины рассеиваемой волны вне и внутри сфер; d,h,l – постоянные решетки. Решение задачи получено на основе интегральных уравнений электродинамики Фредгольма 2-го рода, с нелокальными граничными условиями [1 – 3].

Найденные в работе выражения для метакристалла в форме октаэдра можно использовать для изучения рассеянных кристаллом полей в зонах Френеля и Фраунгофера, а также для изучения его внутреннего поля.

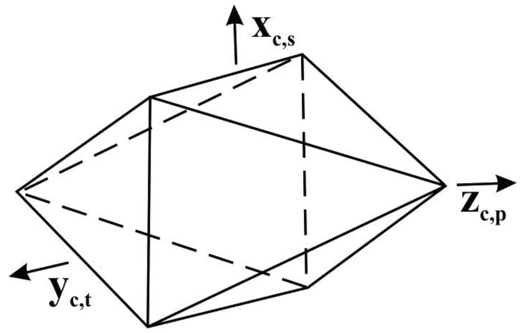

Рис. 1. Геометрия задачи

Основная часть

Рассмотрим сложную пространственную решетку метакристалла, состоящую из C ромбических подрешеток $c(c \in C)$. Эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид (рис. 1):

$$\begin{gathered} x_{c,s} = [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1} x_{c,s=0} \\ s = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm(|p_{\max}| - |p|), \\ y_{c,t} = [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1} y_{c,t=0} \\ t = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm(|p_{\max}| - |p|), \\ z_{c,p} = [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1} z_{c,p=0} \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm |p_{\max}|, \end{gathered} \tag{1}$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l,$ а $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области элементарной ячейки решетки

$$\begin{gathered} 0 \le x_{c,s=0} \le d, \\ 0 \le y_{c,t=0} \le h, \\ 0 \le z_{c,p=0} \le l. \end{gathered} \tag{2}$$

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. Каждому узлу подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел – $c(p,s,t)$, выделенный узел решетки будем обозначать – $c'(p',s',t')$. Задавая максимальные значения для чисел (p,s,t) в (1), можно рассматривать ограниченные дискретные решетки.

Ячейку решетки формируют из узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки.

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)} = \sqrt{\left(x_{c',s'} - x_{c,s}\right)^2 + \left(y_{c',t'} - y_{c,t}\right)^2 + \left(z_{c',p'} - z_{c,p}\right)^2}. \tag{3}$$

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon_{c(p,s,t)}, \mu_{c(p,s,t)}$, радиусами $a_{c(p,s,t)}$, объемами $V_{c(p,s,t)}$, которые дальше будем обозначать – ε_c, μ_c, a_c, V_c. Сферы решетки находятся в среде с комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_0, μ_0.

Для решения подобных задач удобно использовать интегральные уравнения электродинамики с нелокальными граничными условиями [1, 2], и решать задачу будем в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором – поле, рассеянное пространственной решеткой сфер.

Рассеянное решеткой поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^э$ и магнитный $\vec{\Pi}^м$ потенциалы Герца:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{расс} &= \left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\vec{\Pi}^э - ik\mu_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^м\right], \\ \vec{H}_{расс} &= \left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\vec{\Pi}^м + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^э\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Потенциалы Герца рассеянного поля отдельными сферами представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^э_{c(p,s,t)}\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_c}\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^0_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right) f_c\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right)dV, \\ \vec{\Pi}^м_{c(p,s,t)}\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_c}\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^0_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right) f_c\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right)dV, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\vec{E}^0_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right), \vec{H}^0_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)$ – внутренние поля рассеивателя, V_c – объем рассеивателя; функция $f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right)$ является решением уравнения

$$\Delta f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right) = -4\pi\delta\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид

$$f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right) = \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}. \tag{6}$$

Можно показать, что для точек вне сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина (6) имеет вид

$$W_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V_c}\frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}dV = \frac{4\pi}{k_1^3}\left(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c\right)\frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \tag{7}$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, k = 2\pi/\lambda_0$, r – определяет расстояние от центра до точек вне сферы.

Поля представим в виде

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \vec{E}\left(\vec{r}\right)e^{i\omega t}, \vec{H}\left(\vec{r},t\right) = \vec{H}\left(\vec{r}\right)e^{i\omega t}.$$

Будем считать, что вне сфер $a_c/\lambda \ll 1$, но внутри сферы возможен резонансный случай $a_c/\lambda_g \sim 1$, где $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – длина волны вне сферы, а $\lambda_g = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$ – длина волны в сфере.

Внутреннее поле $c'(p',s',t')$ сферы найдем из системы квазистационарных неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [2]. Входящее в эту систему неоднородное уравнение для внутреннего электрического поля произвольной сферы $c'(p',s',t')$ имеет вид

$$\vec{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)=\left(\left\{\frac{\left(\varepsilon_{сэф}+2\varepsilon_0\right)+\theta_{1c}^2\varepsilon_{сэф}+\theta_{1c}^2\left(\varepsilon_{сэф}+2\varepsilon_0\right)}{3\varepsilon_0}\right\}\times\right.$$
$$\times\vec{E}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)-\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\times\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{c'эф}}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)-\right.$$
$$c'(p,s,t)\neq c'(p',s',t')$$
$$\left.\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{c'эф}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c'(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{c'(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right)-$$
$$-\sum_{\substack{c=1\\(c\neq c')}}^{C}\left(\sum_p\sum_s\sum_t\left\{\left(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\times W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{E}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)-ik\mu_0\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r})\vec{H}^0_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\}\right),\qquad(8)$$

где $\vec{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\vec{E}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}^0_{c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ – поле падающей волны и внутреннее поле $c'(p',s',t')$ сферы, а $\vec{E}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t),\vec{H}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)$ – внутренние поля остальных сфер.

Величины $W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r}'),W^{м}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')$, $\varepsilon_{сэф}$, $\mu_{сэф}$ имеют вид (3, 7, 8)

$$W^{м}_{c(p,s,t)}=W^{э}_{c(p,s,t)}(\vec{r}')=\frac{4\pi}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\times\frac{e^{-ik_1r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}},$$
$$\varepsilon_{сэф}=\varepsilon_cF\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right),\qquad(9)$$
$$\mu_{сэф}=\mu_cF\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right),$$

где

$$F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)=\frac{2\left(\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}-ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)}{\left(k^2a_c^2\varepsilon_c\mu_c-1\right)\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}+ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}}.$$

Уравнение для внутреннего магнитного поля сферы $c'(p',s',t')$ имеет вид аналогичный уравнению (8), если в нем произвести замену электрических величин на магнитные.

Уравнения (8) представляют алгебраическую систему $2N=2\sum_{c=1}^{C}N_c$ векторных неоднородных уравнений, где *N*– общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки *c*. Решение этой системы уравнений для сферы $c'(p',s',t')$ имеет вид:

$$\vec{E}^{0}_{c'(p',s',t')}\left(\vec{r}',t\right)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[\hat{g}_{u}^{эи'}\vec{E}_{0c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)+\hat{\beta}_{u}^{эи'}\vec{H}_{0c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)\right]\right),$$
$$\vec{H}^{0}_{c'(p',s',t')}\left(\vec{r}',t\right)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{C}\left(\sum_{u}\left[\hat{\beta}_{u}^{ми'}\vec{H}_{0c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)+\hat{g}_{u}^{ми'}\vec{E}_{0c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)\right]\right),\qquad(10)$$

$\Delta^{эм}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).

Потенциалы Герца (4), рассеянного сферами решетки поля можно представить, учитывая (9) и (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки (5)

$$\vec{\Pi}^{э}\left(\vec{r},t\right)=\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\times\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)\frac{e^{-ik_1r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}}\right],$$
$$\vec{\Pi}^{м}\left(\vec{r},t\right)=\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\times\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)\vec{H}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}',t\right)\frac{e^{-ik_1r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}}\right].\qquad(11)$$

$$\text{Здесь } r_{c(p,s,t)}=\sqrt{\left(x-x_{c,s}\right)^2+\left(y-y_{c,t}\right)^2+\left(z-z_{c,p}\right)^2},\qquad(12)$$

где координаты (x,y,z) – точка наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, координаты $\left(x_{c,s},y_{c,t},z_{c,p}\right)$ – точка нахождения центра рассеивающей сферы (1). Тогда, учитывая (10), (11), из (4) найдем искомое рассеянное сферами решетки поле

$$\vec{E}_{расс}=\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{E}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}'\right)-ik\mu_0\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)\times\hat{P}_c\vec{H}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}'\right)\right\}e^{i\left(wt-k_1r_{c(p,s,t)}\right)}\right],\qquad(13)$$
$$\vec{H}_{расс}=\sum_{c=1}^{C}\left[\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\frac{1}{k_1^3}\left(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{H}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}'\right)+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{E}^{0}_{c(p,s,t)}\left(\vec{r}'\right)\right\}e^{i\left(wt-k_1r_{c(p,s,t)}\right)}\right],$$

где $\hat{L}_c$ и $\hat{P}_c$ – функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c=\begin{bmatrix}\Psi_{xxc}&\Psi_{xyc}&\Psi_{xzc}\\\Psi_{yxc}&\Psi_{yyc}&\Psi_{yzc}\\\Psi_{zxc}&\Psi_{zyc}&\Psi_{zzc}\end{bmatrix};\ \hat{P}_c=\begin{bmatrix}0&\Psi_{zc}&\Psi^0_{yc}\\\Psi^0_{zc}&0&\Psi_{xc}\\\Psi_{yc}&\Psi^0_{xc}&0\end{bmatrix}.\qquad(14)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (14), имеют вид (1),(12)

$$\Psi_{xxc}=\frac{1}{r_{c(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{3\left(x-x_{c,s}\right)^2-r^2_{c(p,s,t)}}{r^5_{c(p,s,t)}}-\frac{k_1^2\left(x-x_{c,s}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{3\left(x-x_{c,s}\right)^2-r^2_{c(p,s,t)}}{r^4_{c(p,s,t)}},$$
$$\Psi_{yyc}=\frac{1}{r_{c(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{3\left(y-y_{c,t}\right)^2-r^2_{c(p,s,t)}}{r^5_{c(p,s,t)}}-\frac{k_1^2\left(y-y_{c,t}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}}+ik_1\frac{3\left(y-y_{c,t}\right)^2-r^2_{c(p,s,t)}}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{zzc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3\left(z - z_{c,p}\right)^2 - r^2_{c(p,s,t)}}{r^5_{c(p,s,t)}} - \frac{k_1^2 \left(z - z_{c,p}\right)^2}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3\left(z - z_{c,p}\right)^2 - r^2_{c(p,s,t)}}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3\left(x - x_{c,s}\right)\left(y - y_{c,t}\right)}{r^5_{c(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{\left(x - x_{c,s}\right)\left(y - y_{c,t}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3\left(x - x_{c,s}\right)\left(y - y_{c,t}\right)}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3\left(x - x_{c,s}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^5_{c(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{\left(x - x_{c,s}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3\left(x - x_{c,s}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{zyc} = \frac{3\left(y - y_{c,t}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^5_{c(p,s,t)}} - k_1^2 \frac{\left(y - y_{c,t}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{3\left(y - y_{c,t}\right)\left(z - z_{c,p}\right)}{r^4_{c(p,s,t)}},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{\left(x - x_{c,s}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{\left(x - x_{c,s}\right)}{r^2_{c(p,s,t)}}, \ \Psi^0_{xc} = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc} = \frac{\left(y - y_{c,t}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{\left(y - y_{c,t}\right)}{r^2_{c(p,s,t)}}, \quad \Psi^0_{yc} = -\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{\left(z - z_{c,p}\right)}{r^3_{c(p,s,t)}} + ik_1 \frac{\left(z - z_{c,p}\right)}{r^2_{c(p,s,t)}}, \quad \Psi^0_{zc} = -\Psi_{zc},$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (13):

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{E}_0\left(\vec{r}, t\right) + \vec{E}_{расс}\left(\vec{r}, t\right),$$

где $\vec{E}_0\left(\vec{r}, t\right)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Заключение

Полученные соотношения могут найти применение при изучении рассеяния волн различного рода выпуклыми многогранниками, при создании на их основе новых видов ограниченных метакристаллов, в том числе и нанокристаллов с резонансными свойствами, и при изучении их поведения в различных внешних средах [4], а также при разработке методов моделирования электромагнитных явлений, которые могут происходить в реальных кристаллах в резонансных областях в оптическом и рентгеновском диапазонах длин волн [5].

Список литературы:

1. Khyzhnyak NA. The Green function of Maxwell's equations for inhomogeneous media // J. Technical Physics. 1958. Vol. 28, No. 7. P. 1952-1610 (in russian).

2. Kozar AI. Resonant metacrystals of small magnetodielectric spheres: monograph. Kharkiv : KNURE, 2014. 352 p. (in russian).

3. Kozar AI. Electromagnetic Wave Scattering with Special Spatial Lattices of Magnetodielectric Spheres // J. Telecommunication and Radio Engineering. New York, N.Y. (USA) : Begell House Inc. 2004. Vol. 61, No. 9. P. 734-749.

4. Kozar AI. Resonant Degenerate Crystal Made of Spheres Located Magnetodielectric Medium, International Journal of Electromagnetics and Applications, Vol. 3, No. 2, 2013, pp. 15-19. doi: 10.5923/j.idea.20130302.02.

5. Kozar AI. Electromagnetic lattice "invisibility" of the resonance cubic crystal made jfmagnetodielectric spheres // J. Telecommunication and Radio Engineering. New York, N.Y. (USA) : Begell House Inc. 2018. Vol. 77, issue 2. P. 155-159.

Поступила в редколлегию 02.11.2020

Сведения об авторах:

Козарь Анатолий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры физики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина; e-mail: d_ph@nure.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9968-8674