

*А.В. ГРИЦУНОВ, д-р физ.-мат. наук, И.Н. БОНДАРЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
В.П. КАРНАУШЕНКО, М.И. ПЯТАЙКИНА, А.В. СОВА, канд. физ.-мат. наук*

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Введение

Наземные беспроводные телекоммуникационные системы основаны на твердотельных усилителях мощности, работающих в диапазоне частот от 800 МГц до 2,5 ГГц и более. Постоянно растущий спрос на увеличение объема и скорости передачи данных требует освоения все больших частот и уровней мощности передающих устройств. Несмотря на интенсивное внедрение твердотельных многоканальных усилителей мощности (МСРА) наблюдается определенное замедление роста пропускной способностью каналов связи. При частотах выше 1 ГГц твердотельные устройства обеспечивают средний уровень выходной мощности МСРА до 100 Вт, максимальный уровень мощности до нескольких сотен ватт и общий КПД усилителя не более 5 – 10 % [1].

В то же время вакуумные приборы О-типа (ЛБВ и широкополосные клистроны) могут легко обеспечить средний уровень выходной мощности в сотни ватт и пиковые уровни мощности в несколько киловатт в частотном диапазоне до 5 ГГц и выше. Кроме того, линейность вакуумных усилителей мощности значительно выше транзисторных благодаря работе лампы в режиме, далеком от насыщения, а также оптимизации конструкции СВЧ-прибора в целом. Существенно, что указанные преимущества обеспечиваются в рамках сопоставимых ценовых диапазонов полупроводниковых и вакуумных приборов.

Сказанное выше означает актуальность продолжения теоретических исследований механизмов продольного взаимодействия и разработки современных моделей СВЧ-приборов О-типа. Наиболее прогрессивными, по мнению авторов, являются нестационарные и спектральные [2] модели вычислительного эксперимента, позволяющие получить комплексную и адекватную картину процессов в усилителе при подаче на вход реального широкополосного сигнала с произвольной формой спектра. Такие алгоритмы разработаны в конце 1990-х – начале 2000-х годов для приборов со скрещенными полями [3]. Однако попытка адаптации их к приборам О-типа столкнулась с определенными затруднениями, к числу которых следует отнести различие в геометрии пространства взаимодействия, делающее невозможным применение традиционных, проверенных десятилетиями методов решения уравнения Пуассона для квазистатического потенциала объемного заряда электронного потока.

Цель статьи - разработка простого и эффективного алгоритма численного моделирования распределения потенциального электрического поля в пространстве взаимодействия СВЧ-приборов с продольным взаимодействием, пригодного для использования в нестационарных и спектральных моделях таких приборов.

Постановка задачи

Распределение электрического потенциала $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в области взаимодействия СВЧ-прибора находится как решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = - \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

с заданными граничными условиями (ГУ). Здесь ρ – функция распределения плотности объемного заряда в пространстве прибора; ε_0 – электрическая постоянная, $8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; (ξ_1, ξ_2, ξ_3) – пространственные координаты. В цилиндрической системе координат (z, r, φ) , оптимальной для большинства СВЧ-приборов, оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (2)$$

Одной из основных проблем моделей вычислительного эксперимента является необходимость многократного интегрирования уравнения (1) в области с заданными ГУ, заполненной электронным потоком, до тех пор, пока будет получено сходящееся или стационарное решение уравнений динамики электронного потока в приборе (уравнений движения). Поскольку интегрирование уравнений в частных производных конечно-разностными методами довольно времяемкий процесс, общая длительность анализа высокопереванских систем может быть существенно больше, чем слаботочных, где для электрического потенциала однократно решается уравнение Лапласа, т.е. взаимодействие электронов между собой не учитывается.

Данная проблема последовательно преодолевается с момента начала использования компьютеров для вычислительного эксперимента в электронике. Сравнительный анализ достижений в этой области приведен в [4]. Особое место среди них занимают методы, позволяющие при некоторой (как правило, несущественной) идеализации формы границ моделируемой области добиться существенной экономии оперативной памяти и времени счета. Рассмотрим их подробнее.

Методы быстрого решения эллиптических уравнений

Среди многочисленных известных на сегодняшний день методов численного интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных на сети дискретизации выделяется класс прямых алгоритмов, объединяемых под общим названием «быстрое решение эллиптических уравнений» [4]. Их особенностью является возможность получить точное решение системы из N_g уравнений не более чем за $N_g \log_2 N_g$ операций с использованием оперативной памяти объемом порядка N_g слов. Напомним, что «традиционные» методы (например, алгоритм сеточной релаксации [5]) требуют порядка N_g^2 операций, следовательно, практически бесполезны при числе узлов сети дискретизации более 1000. С учетом особенностей алгоритмов нестационарного и спектрального моделирования СВЧ-приборов (необходимости решения уравнения Пуассона на каждом временном шаге), методы быстрого решения эллиптических уравнений являются на сегодня безальтернативными в данной области применения.

Недостатком подобных алгоритмов является возможность их работы лишь на ограниченном множестве областей со специфическими ГУ, а именно, ограниченных комбинацией поверхностей, каждая из которых может быть описана лишь двумя из трех пространственных координат, например, (ξ_1, ξ_2) . В этом смысле они подобны методу разделения переменных (Фурье), что неудивительно, поскольку с теоретической точки зрения первые базируются непосредственно на втором. Области взаимодействия приборов О-типа с достаточной степенью точности могут быть отнесены к таким, которые допускают разделение переменных. Это круговой цилиндр с ГУ первого рода (Дирихле) для электростатического потенциала на внешней границе в радиальном направлении и, с некоторым приближением, ГУ второго рода (Неймана) на границах в аксиальном направлении.

Подробный обзор методов быстрого решения эллиптических уравнений приведен в [4]. Исторически первым из них и наиболее популярным за последующие десятилетия был метод FACR (Fourier Analysis and Cyclic Reduction), разработанный Хокни. Он является оптимальной комбинацией методов циклической редукции (CR) и преобразования Фурье (Method of Fourier Transform, MFT) вдоль различных координат. В числе прочих применений алгоритм FACR показывает традиционно хорошие результаты при моделировании разнообразных приборов со скрещенными полями как прямоугольной, так и цилиндрической геометрии [3]. Одной из причин этого является особенность типовой конструкции таких приборов. Замкну-

тость электронного потока создает предпосылки для использования быстрого преобразования Фурье (БПФ) по азимутальной координате с разложением потенциала по комплексным гармоникам. Наличие торцевых экранов позволяет выполнять БПФ с декомпозицией по существенным гармоникам в аксиальном направлении. Наконец, двусвязность области взаимодействия позволяет применить вдоль радиальной координаты метод CR, поскольку ГУ первого рода при этом задаются как на внутреннем, так и внешнем электродах.

К сожалению, при попытке распространить известные алгоритмы нестационарного и спектрального моделирования магнетронных приборов [3] на системы с продольным взаимодействием возникает проблема, вызванная односвязностью области взаимодействия приборов О-типа. Отсутствие металлического электрода на оси системы не позволяет задавать здесь ГУ Дирихле, поэтому применение по радиальной координате метода CR в его традиционном виде не представляется возможным. В статье [6] предложена модификация данного метода для односвязных областей, основанная на двукратном проходе алгоритма по радиальной координате с последующим «сшиванием» решений с учетом ГУ Неймана на оси цилиндрической системы. Помимо того, что такая модификация сложнее «классического» метода CR, существует опасность ее неустойчивости, возможной при использовании ГУ второго рода. Другой проблемой метода FACR является неопределенность ГУ в местах ввода электронного пучка в пространство взаимодействия и вывода из него. Впрочем, если во втором случае можно с достаточной степенью точности воспользоваться приближением «зеркальных» ГУ Неймана вдоль аксиальной координаты, то полноценное решение проблемы интегрирования гармоник потенциала в радиальном направлении для приборов О-типа, на наш взгляд, требует обращения к альтернативным методу CR алгоритмам.

В качестве такой альтернативы предлагается использовать разложение потенциала по собственным функциям цилиндрической системы (Eigenfunction Decomposition, ED) с вычислением амплитуд гармоник непосредственно из условия ортогональности первого рода [7]. Данный метод не относится к сеточным, являясь, скорее, интегральным. Для достижения оптимального быстрого действия алгоритма метод ED применяется лишь к радиальной координате, в то время как по двум остальным по-прежнему используется БПФ. Поэтому такую комбинацию вычислений целесообразно по аналогии назвать FAED (Fourier Analysis and Eigenfunction Decomposition). Перейдем к рассмотрению математических основ предлагаемого алгоритма.

Математический аппарат метода FAED

В части, касающейся дискретного преобразования Фурье, методы FACR и FAED идентичны. К левой и правой частям уравнения (1) применяется двумерное прямое БПФ [8] на цилиндрических поверхностях (z, φ) , в результате которого функция $\rho(z, r, \varphi)$ превращается в совокупность своих гармоник $P_{ik}(r)$ – функций единственной переменной (радиальной координаты). Аналогично, вместо потенциала $u(z, r, \varphi)$ в левых частях полученной системы уравнений присутствуют его гармоники $U_{ik}(r)$. Различия между алгоритмами FACR и FAED имеют место в методе расчета амплитуд гармоник потенциала $U_{ik}(r)$ исходя из амплитуд гармоник плотности объемного заряда $P_{ik}(r)$ и ГУ в радиальном направлении.

Интегрирование уравнения Пуассона методом разложения потенциала по собственным функциям оператора Лапласа заключается в том, что искомое решение внутри замкнутой области, ограниченной идеальными проводниками, записывается в виде ряда Фурье по гармоническим функциям (гармоникам потенциала):

$$U_{ik}(r) = \sum_{m=1}^M A_m U_{ikm}(r), \quad (3)$$

где A_m – амплитуда m -й гармоники; $U_{ikm}(r)$ – пространственная структура этой гармоники; M – количество учитываемых гармоник в ряде.

Радиальные структуры гармоник потенциала (собственные функции цилиндрической системы) являются решениями одномерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U_{ikm}(r) + k_m^2 U_{ikm}(r) = 0 \quad (4)$$

внутри объема моделируемой области V с однородными ГУ первого рода на ее границе. Вещественные числа k_m являются собственными волновыми числами системы, значения которых определяются внешним радиусом области взаимодействия. В нашем случае существенно, что эти числа образуют дискретное множество на числовой оси.

Из двух видов ортогональности собственных функций [7] здесь используется условие ортогональности первого рода:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V U_{ikm}(r) U_{ikm'}(r) dV = \begin{cases} 0, & \text{если } m' \neq m; \\ \tilde{W}_m, & \text{если } m' = m, \end{cases} \quad (5)$$

где \tilde{W}_m – некоторая величина с размерностью Дж·с², называемая единичной псевдоэнергией m -й моды [9]. Ее значение, как и у волнового числа, определяется радиусом системы, а также номером m .

Подставляя (3) в предварительно подвергнутое двумерному прямому БПФ уравнение Пуассона (1), с учетом (4) получаем

$$\sum_{m=1}^M A_m k_m^2 U_{ikm}(r) = \frac{P_{ik}(r)}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Умножая (6) на $U_{ikm}(r)$ и интегрируя по объему V (фактически – по радиусу, с учетом зависимости U_{ikm} лишь от радиальной координаты), с учетом (5) находим выражение для амплитуды m -й гармоники потенциала:

$$A_m = \frac{1}{2k_m^2 \tilde{W}_m} \int_V P_{ik}(r) U_{ikm}(r) dV. \quad (7)$$

Осталось найти выражения для k_m , U_{ikm} и \tilde{W}_m в цилиндрической системе. Подставляя (2) в (4) с учетом аксиальной и азимутальной однородности решения и дифференцируя, получаем одномерное уравнение Гельмгольца для m -й собственной функции:

$$\frac{\partial^2 U_m(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m(r)}{\partial r} + k_m^2 U_m(r) = 0, \quad (8)$$

решениями которого являются линейные комбинации функций Бесселя и Неймана нулевого порядка:

$$U_m(r) = C_1 J_0(k_m r) + C_2 N_0(k_m r).$$

Поскольку функция Неймана N_0 обращается в бесконечность при $r=0$, очевидно, что $C_2 \equiv 0$. C_1 может быть выбрано произвольно. Положим $C_1 = 1$. Тогда

$$U_{ikm}(r) = J_0(k_m r). \quad (9)$$

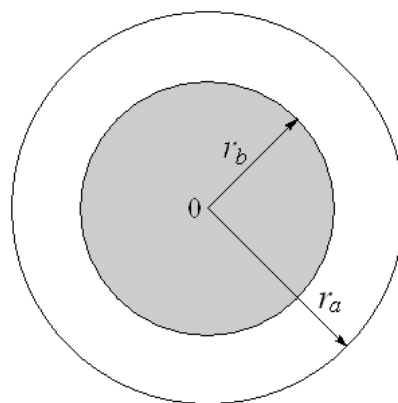


Рис. 1

Собственные волновые числа k_m найдем из ГУ первого рода $U_{ikm}(r_a) = 0$, где r_a – внешний радиус моделируемой системы (рис. 1). Имеем $J_0(k_m r_a) = 0$. Следовательно,

$$k_m = \kappa_m / r_a, \quad (10)$$

где κ_m – m -й корень функции Бесселя нулевого порядка:

m	κ_m	m	κ_m	m	κ_m
1	2,40482555769577	2	5,52007811028631	3	8,65372791291101
4	11,7915344390143	5	14,9309177084878	6	18,0710639679109
7	21,2116366298793	8	24,3524715307493	9	27,4934791320403
10	30,6346064684320	11	33,7758202135736	12	36,9170983536640
13	40,0584257646282	14	43,1997917131767	15	46,3411883716618

Наконец, значение \tilde{W}_m в одномерном случае определим как интеграл:

$$\tilde{W}_m = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{r_a} J_0(k_m r) J_0(k_m r) r dr = \frac{\varepsilon_0}{4} r_a^2 J_1^2(\kappa_m). \quad (11)$$

С учетом (9), (10) и (11) выражение для амплитуд гармоник (7) запишется в виде

$$A_m = \frac{1}{2k_m^2 \tilde{W}_m} \int_0^{r_a} P_{ik}(r) J_0\left(\frac{\kappa_m}{r_a} r\right) r dr. \quad (12)$$

Суммарные гармоники искомого потенциала на радиусе r вычисляются по формуле

$$U_{ik}(r) = \sum_{m=1}^M A_m J_0\left(\frac{\kappa_m}{r_a} r\right). \quad (13)$$

Алгоритм FAED заканчивается, аналогично алгоритму FACR, двумерным обратным БПФ на поверхностях (z, φ) , в результате которого гармоники $U_{ik}(r)$ превращаются в искомый потенциал $u(z, r, \varphi)$.

Численные результаты

Оценим количество M собственных функций, учитываемых в выражении (13), необходимое для достижения требуемой точности расчета потенциала объемного заряда в пространстве взаимодействия прибора О-типа.

Рассмотрим идеализированную систему в виде однородного в продольном z и азимутальном φ направлениях цилиндрического электронного пучка в цилиндрической металлической трубе радиусом r_a (рис. 1). Радиус пучка r_b , плотность объемного заряда ρ_0 предполагается однородной (не зависящей от координат). Пучок и труба расположены соосно. Такая система, с одной стороны, допускает аналитический расчет собственных частот и структур собственных функций, с другой – имеет аналитическое выражение для распределения потенциала. Это дает возможность оценить сходимость ряда (13) путем его сравнения с точным значением.

Найдем аналитическое решение уравнения Пуассона (1) для данной системы. Подставляя (2) в (1) с учетом аксиальной и азимутальной однородности потенциала, получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right] = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Интегрируя (14), находим:

$$U(r) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1 \quad \text{для } r \leq r_b;$$

$$U(r) = C_2 \ln r + C_3 \quad \text{для } r \geq r_b.$$

Константы C_1 , C_2 и C_3 определим из граничных условий $\partial U / \partial r(0) = 0$; $U(r_a) = 0$ и из условия равенства обоих значений потенциала на радиусе r_b . В результате получаем аналитическое выражение для потенциала в системе:

$$U(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left[(r_b^2 - r^2) + 2r_b^2 \ln \frac{r_a}{r_b} \right] \quad \text{для } r \leq r_b;$$

$$U(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r_b^2 \ln \frac{r_a}{r} \quad \text{для } r \geq r_b.$$

На рис. 2 показана сходимость ряда (13) (а) и полученного из него ряда для радиальной составляющей напряженности электрического поля (б) при малом числе членов: $M = 1$ (кривая 1); $M = 2$ (кривая 2) и $M = 3$ (кривая 3). Сплошными кривыми показаны точные значения, вычисленные по формуле (15). Видно, что радиальные зависимости для потенциала сходятся намного быстрее, чем аналогичные функции для напряженности поля. Поскольку, однако, в правых частях уравнений движения при траекторном анализе используется не потенциал, а напряженность электрического поля, для выбора оптимального значения M необходимо все же руководствоваться критерием сходимости для напряженности поля. Радиальная составляющая напряженности электрического поля вычисляется путем дифференцирования потенциала: $E_r(r) = -\partial U(r) / \partial r$.

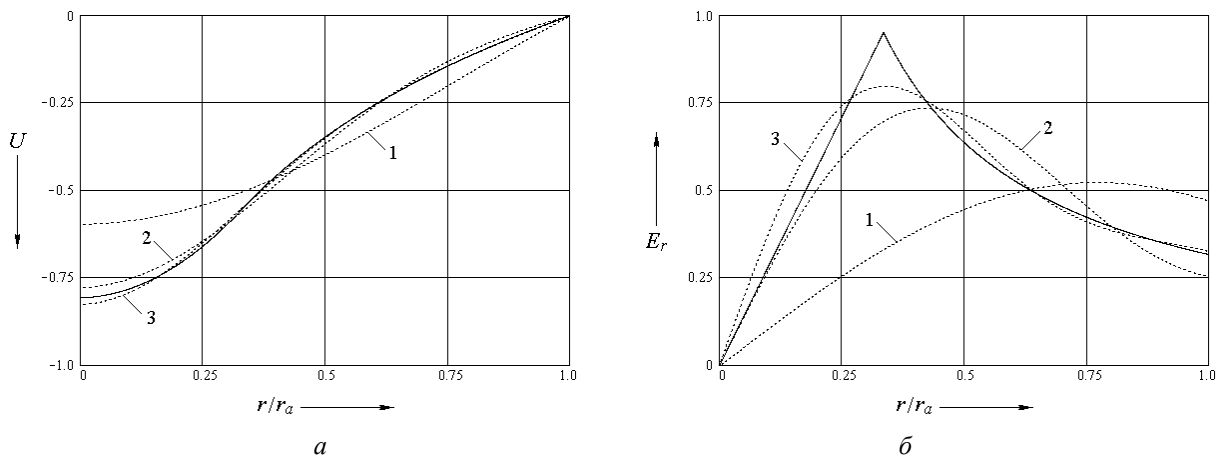


Рис. 2

Рис. 3, 4 иллюстрируют сходимость ряда (13) для напряженности электрического поля при соответственно малом и большом (по сравнению с радиусом металлической трубы) относительном радиусе пучка. В обоих случаях кривые (а) синтезированы при количестве членов ряда $M = 5$, кривые (б) – при $M = 10$. Из графиков следует, что при увеличении отношения r_b / r_a удовлетворительная сходимость достигается при меньшем числе членов ряда. Так, для малых ($r_b / r_a = 0,1$) значений данного отношения оптимальное число учитываемых чле-

нов ряда составляет около 15. При относительном радиусе пучка $r_b / r_a = 0,8$ это число может быть уменьшено до 10.

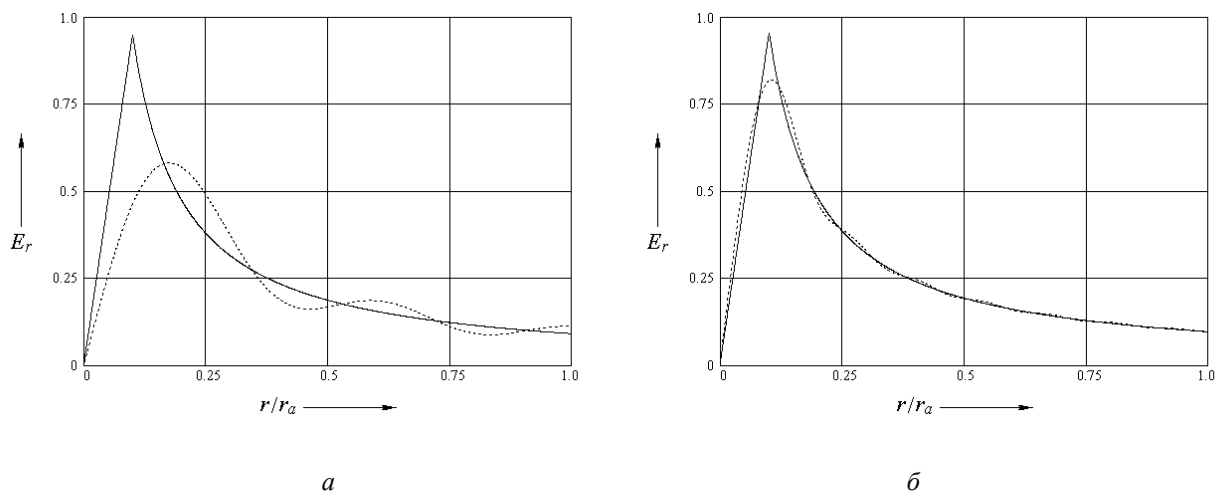


Рис. 3

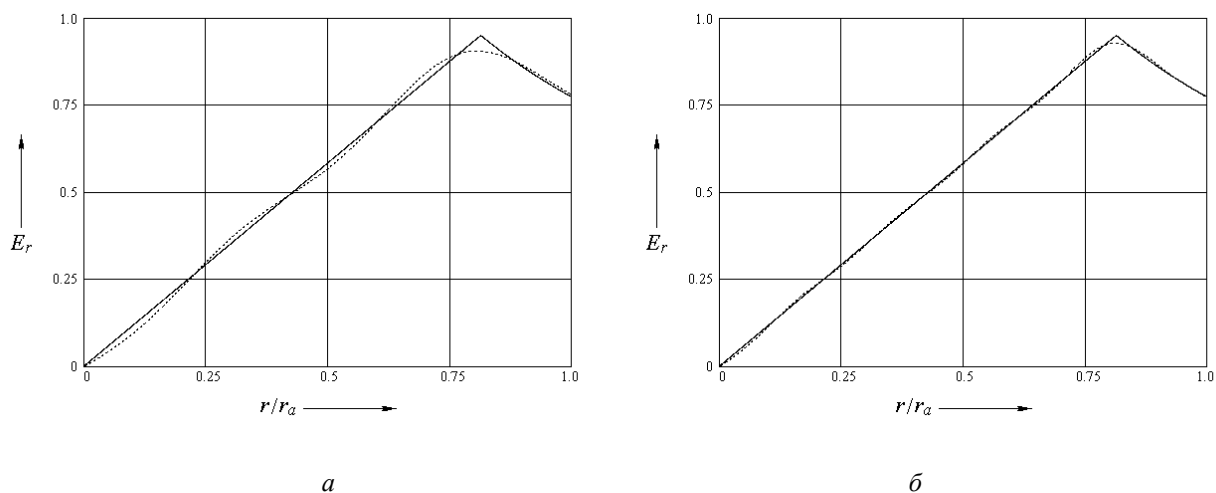


Рис. 4

Выводы

1. Продолжение теоретических исследований физических механизмов продольного взаимодействия и разработка спектральных моделей СВЧ-приборов О-типа являются на сегодня достаточно актуальными.

2. Практически все методы быстрого решения эллиптических уравнений основаны на разложении обеих частей этих уравнений в ряды Фурье по пространственным гармоникам. При этом теряется первоначальная связь между значениями искомой функции в соседних узлах сети дискретизации, что дает возможность вместо итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений применить прямые методы.

3. Предложенный алгоритм FAED отличается от известного метода FACR заменой циклической редукции по радиальной координате разложением искомой функции в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. Это позволяет задавать на оси системы ГУ второго рода, типичные для односвязных цилиндрических областей.

4. Первоочередным направлением дальнейших исследований следует считать разработку на основе предложенной методики быстрых алгоритмов численного решения уравнения Пуассона для электростатического потенциала в односвязной цилиндрической области при слабо нерегулярных (“tapered” [10]) в аксиальном направлении ГУ, поскольку такие системы

могут быть следующим этапом разработки ЛБВ и клистронов с оптимизированными параметрами и характеристиками.

Список литературы:

1. Goebel D.M. Development of linear traveling wave tubes for telecommunications applications / D.M. Goebel, R.R. Liou, W.L. Menninger, X. Zhai, E.A. Adler // IEEE Trans. Electron Devices. 2001. V. 48, No. 1. P. 74-81.
2. Грицунов А.В. О спектральном подходе к моделированию СВЧ-приборов // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 882-885.
3. Грицунов А.В. Возбуждение электромагнитных колебаний произвольного спектрального состава замкнутыми электронными потоками в системах со скрещенными полями : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 13.06.2006. Харьков : ИРЭ НАНУ им. А.Я. Усикова, 2006. 36 с.
4. Хокни Р. Численное моделирование методом частиц / Р. Хокни, Дж. Иствуд. Москва : Мир, 1987. 640 с.
5. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. Москва: Мир, 1982. 238 с.
6. Vaughan J.R.M. The space-charge potential in a cylindrical tunnel // IEEE Trans. Electron Devices. 1979. V. 26, No. 10. P. 1649-1654.
7. Грицунов А.В. Разложение нестационарных электромагнитных потенциалов по парциальным функциям электродинамической системы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. 2006. Т. 49, № 7. С. 10-20.
8. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.– Москва : Мир, 1990. 584 с.
9. Грицунов А.В. Методы расчета нестационарных негармонических полей в направляющих электродинамических системах // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 6. С. 645-661.
10. Freund H.P. Theory of helix traveling wave tubes with dielectric and vane loading / H.P. Freund, E.G. Zaidman, T.M. Antonsen, Jr. // Phys. Plasmas. 1996. V. 3, No. 8. P. 3145-3161.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 27.12.2018