

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ISSN 1563-0064

# РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ИНФОРМАТИКА

**Научно-технический журнал**

**№ 1(80), январь – март 2018**

**Основан в 1997 г.**

**Выходит 4 раза в год**

© Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники, 2018

Свидетельство о государственной регистрации КВ № 12097-968 ПР 14.12.2006

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**  
научно-технического журнала “Радиоэлектроника и информатика”

**Хаханов В.И.**, д-р техн. наук, проф.  
(главный редактор);  
**Бых А.И.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Винокурова Е.А.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Волощук Ю.И.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Горбенко И.Д.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Гордиенко Ю.Е.**, д-р физ.-мат. наук, проф.;  
**Ерохин А.Л.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Заяц В.М.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Кириченко Л.О.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Кривуля Г.Ф.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Литвинова Е.И.**, д-р техн. наук, проф.  
(зам.главного редактора);  
**Нерух А.Г.**, д-р физ.-мат. наук, проф.;  
**Руткас А.Г.**, д-р физ.-мат. наук, проф.;  
**Свирь И.Б.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Семенец В.В.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Слипченко Н.И.**, д-р физ.-мат. наук, проф.;  
**Тарасенко В.П.**, д-р техн. наук, проф.;  
**Чумаченко С.В.**, д-р техн. наук, проф.  
(ученый секретарь);  
**Яковенко В.М.**, д-р физ.-мат. наук, проф.;  
**Яковлев С.В.**, д-р физ.-мат. наук, проф.

International Editorial Board:  
**Zorian Yervant**, Dr., Prof. (USA);  
**Karavay Mikhail**, Dr., Prof. (RF);  
**Ubar Raimund**, Dr., Prof. (Estonia);  
**Shoukourian Samvel**, Dr., Prof. (Armenia);  
**Speranskiy Dmitrii**, Dr., Prof. (RF);  
**Renovell Michel**, Dr., Prof. (France);  
**Navabi Zainalabedin**, Dr., Prof. (Iran);  
**Ivanov Andre**, Dr., Prof. (Canada);  
**Kharchenko Vyacheslav**, Dr., Prof. (Ukraine);  
**Peng Zebo**, Dr., Prof. (Sweden);  
**Prinetto Paolo**, Dr., Prof. (Italy);  
**Yarmolik Vyacheslav**, Dr., Prof. (Byelorussia);  
**Kusmicz Wieslaw**, Dr., Prof. (Poland);  
**Gramatova Helena**, Dr., Prof. (Slovakia);  
**Demidenko Serge**, Dr., Prof. (New Zealand);  
**Grabinsky Wladec**, Dr., Prof. (Switzerland);  
**Barkalov Alexander**, Dr., Prof. (Poland);  
**Amit Chaudhry**, Dr., Prof. (India).

Журнал включен в международные наукометрические базы Index Copernicus, Google Scholar, Cyberleninka, OECSP, OAJI, Scholar Steer, SIS, CiteFactor, TIU Hannover, I2OR, National Library of Ukraine named after Vernadsky V.I. (NBUV).

Відповідно до рішення Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 12 грудня 2017 р., затвердженого 28 грудня 2017 р. наказом № 1714 “Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 12 грудня 2017 року” Міністерства освіти і науки України, журнал “Радиоэлектроника та информатика” поновлено в Переліку наукових фахових видань України у галузі технічних та фізико-математичних наук.



## СОДЕРЖАНИЕ

### **ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ**

<b>ГЛОБА Л. С., ГОРДЕЕВА Д. С., КУРДЕЧА В. В. ПОВЫШЕНИЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СЕТЯХ ЗА СЧЕТ МИКРОСОТ</b>	4
<b>ЛЕБЕДЕНКО Т.Н., СИМОНЕНКО А.В. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОЧЕРЕДЯМИ НА ИНТЕРФЕЙСЕ МАРШРУТИЗАТОРА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ</b>	13
<b>ПИШКО А.О., КУРДЕЧА В.В. МОДИФИЦИРОВАННАЯ АРХИТЕКТУРА WI-FI OFFLOAD</b>	19
<b>ГЛОБА Л. С., СКУЛИШ М.А., ТИМЧЕНКО І.О. КОНЦЕПЦІЇ ПОБУДОВИ СУЧАСНИХ МЕРЕЖ</b>	25

### **СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ**

<b>ПИЧУГИНА О.С. ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ</b>	30
<b>ПОДГОРНИЙ О.Р. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ</b>	40
<b>ВОРОНЕНКО М.Д., СИДОРОВ М.В. КОНСТРУКТИВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</b>	48

### **КОМПЬЮТЕРНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ**

<b>ХАХАНОВ В.И., ЕМЕЛЬЯНОВ И.В., ЛЮБАРСКИЙ М.М., ЧУМАЧЕНКО С.В., ЛИТВИНОВА Е.И., ЛАРЧЕНКО Л.В. ДЕДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ X-ФУНКЦИЙ</b>	55
---	----

### **КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ**

<b>СКРЫПНИК А.И., ФЕДОРЧЕНКО Д.В., ХАЖМУРАДОВ М.А. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОМЕТОЧНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ</b>	65
---	----

### **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

<b>БАРАННИК В.В., БАРАННИК Д.В., КРАСНОРУЦКИЙ А.А., ХАХАНОВА А.В. МЕТОД СНИЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ДОСТАТОЧНО ИНФОРМАТИВНЫХ СЕГМЕНТОВ АЭРОФОТОСНИМКА</b>	72
<b>ЮДІН О. К., КАТЕРИНЧУК І.С., СТРЕЛЬБИЦЬКИЙ М. А. МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ МОДЕРНІЗАЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ</b>	77
<b>РЕФЕРАТИ</b>	83
<b>ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ ДЛЯ АВТОРОВ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ЖУРНАЛА</b>	86

## ПОВЫШЕНИЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СЕТЯХ ЗА СЧЕТ МИКРОСОТ

ГЛОБА Л.С., ГОРДЕЕВА Д.С., КУРДЕЧА В.В.

Рассматривается сотовая гетерогенная сеть с применением микросот. Предлагается улучшение энергоэффективности за счет внедрения микросот в гетерогенную сеть и расположение ее на границе между двумя макросотами. Модифицируется зависимость энергоэффективности введением коэффициента используемой энергии между макро- и микросотами. Проводится математическое моделирование энергоэффективности с использованием предложенной зависимости. Результаты моделирования показывают, что применение микросот улучшает энергоэффективность больше чем на 29%.

**Ключевые слова:** гетерогенная сеть, макросоты, микросоты, энергоэффективность гетерогенной сети.

**Key words:** heterogeneous network, macrocells, microcells, energy efficiency of a heterogeneous network.

### Введение

В последние годы большое внимание уделяется проблеме сохранения энергии в индустрии связи. Более того, индустрия телекоммуникаций производит относительно высокие карбоновые выбросы (2% всемирных выбросов  $\text{CO}_2$  происходит от информационных и телекоммуникационных технологий [1]). Эти факторы ведут к растущей заинтересованности в уменьшении потребления энергии. Более того, высокое потребление электричества провайдерами телекоммуникаций и увеличение выбросов  $\text{CO}_2$  приводит к загрязнению окружающей среды.

Современные беспроводные технологии, особенно сотовые сети, через растущие запросы потребителей в основном нацелены на достижение высокой скорости передачи данных. Компании тратят большие средства на развитие новых технологий для удовлетворения спроса потребителей [2]. Наиболее эффективные технологии требуют большей мощности и являются энергоемкими. Потребление энергии является одной из главных современных проблем и нуждается в новых исследованиях в области энергоэффективности телекоммуникаций, которые нацелены на сокращение потребления энергии в системах с достижением высокой скорости передачи данных. Основными нововведениями на данный момент являются гетерогенные сети – Heterogeneous Network (HetNet), которые используют соты малой мощности потребления.

HetNet состоит из множества блоков eNB: (evolved NodeB - базовая станция стандарта LTE) макро eNB, микро eNB, пико eNB, фемто eNB, удаленные радиомодули и узлы реле [3].

Стратегия развертывания технологии HetNet рассматривает один или несколько сот слабой мощности в планировании макросот.

Например, планирование HetNet:

- макро eNB + микро eNB;
- макро eNB + пико eNB;
- макро eNB + фемто eNB;
- макро eNB + узлы реле;
- макро eNB + дистанционные радиомодули;
- макро eNB + микро eNB + пико eNB + фемто eNB (рис. 1) [3].



Рис. 1. Гетерогенная сеть (макро-, микро-, пико- и фемтосоты)

### 1. Способы улучшения энергоэффективности базовых станций

Существует несколько способов снижения энергопотребления базовой станции (БС). Среди них: системы динамического энергосбережения (Dynamic Energy Saving, Power Saving Mode), выносные радиоблоки и распределенные антенные системы (Distributed Antenna System – DAS), использование ретрансляторов, использование централизованной системы Self organizing network (SON) [4].

Системы динамического энергосбережения позволяют отключать или переводить в режим энергосбережения неиспользуемые модули базовых станций. Эта система может работать на разных уровнях: отключение радиоблока или отдельных модулей БС, отключение частот или отдельных услуг. Системы сотовой связи проектируются исходя из максимальной плотности абонентов, на основе которой определяется необходимая емкость базовых станций (число радиоблоков). Поэтому, если в зависимости от времени суток число активных абонентов подвергается силь-

ным изменениям, емкость БС в течение некоторых периодов времени не используется полностью. Системы динамического энергосбережения позволяют отключать радиоблоки, которые не используются, тем самым снижая суточное энергопотребление на 10-15% в зависимости от условий работы станции [5]. Дальнейшее развитие подхода динамического энергосбережения - отключение части БС (при наличии избыточного покрытия). В этом случае система энергосбережения работает уже на уровне участка сети сотовой связи. Вместе с тем эти системы имеют ряд недостатков, таких как: не предоставление существенного эффекта в случае территорий с малой плотностью абонентов, так как из-за необходимости сохранения покрытия передатчики не могут быть отключены; производители БС предлагают опции динамического энергосбережения как дополнительный функционал, который активируется с помощью программного обеспечения; применение данного подхода возможно только на территориях с чрезмерным покрытием, так как иначе часть местности выпадет из зоны действия сети.

Следующий способ снижения потребления энергии базовой станцией – использование выносных радиоблоков и распределенных антенных систем (DAS). Выносные радиоблоки устанавливаются на вышке непосредственно рядом с антеннами, другое оборудование размещается у основания вышки. При такой компоновке значительно уменьшается длина линий радиопередач (фидеров), что снижает их стоимость и уменьшает потери при передаче радиосигнала антенны. Поскольку радиоблоки вынесены за пределы контейнера базовой станции, снижается нагрузка на систему охлаждения. Большинство производителей БС в настоящее время предлагают решения на основе выносных модулей.

При использовании распределенной антенной системы вместо традиционных секторальных антенн применяются выносные узлы DAS, которые расположены так, чтобы обеспечить нужное покрытие. Распределенная антенная система может строиться на основе фидеров и пассивных разделителей сигнала или на основе активных повторителей сигнала (репитеров). Такие системы часто применяются для обеспечения связи в метрополитене, в крупных торговых центрах. Дальнейшее развитие этой системы заключается в замене узлов DAS выносными радиоблоками с антенной, что можно рассматривать как распре-

деленную БС. В результате применения этого подхода уменьшается расстояние до абонента, что позволяет снизить выходную мощность передатчика. При этом возникает значительный каскадный эффект: снижение выходной мощности передатчика на 1 Вт может дать до 28 Вт суммарной экономии энергии. В случае распределенной системы за счет ресурсов одной базовой станции можно покрыть большую территорию. Однако реальные значения экономии оценить трудно.

Среди недостатков выносных радиоблоков можно выделить следующие: радиоблок охлаждается не кондиционером в помещении или контейнере, а окружающим воздухом у антенны, поэтому их невозможно применять в регионах, где погодные условия этого не позволяют. Кроме того, такие системы требуют надежных средств молниезащиты.

Дальнейшее идеологическое развитие этого подхода связано с применением ретрансляторов. Ретранслятор принимает радиосигнал, усиливает его и переизлучает снова. При использовании традиционных ретрансляторов (репитеров) сигнал переизлучается на той же несущей частоте, что приводит к опасности самовозбуждения и сильно усложняет процедуру установки [6].

Ретранслятор существенно проще, чем оборудование базовой станции, он может устанавливаться на облегченной вышке, не требует линий оптоволоконной связи, имеет пониженное энергопотребление. Сеть с ретрансляцией может гибко подстраиваться к особенностям территории. Существует возможность широко варьировать число ретрансляторов на вышках, в зависимости от плотности абонентов (при этом число ретрансляторов, подключенных к одной базовой станции, все же остается ограниченной возможностью цифрового блока). Для обеспечения максимальной площади покрытия хорошо подходит стандартное сотовое размещение: вокруг базовой станции размещаются шесть вышек с ретрансляторами. Для обеспечения связи вдоль линейных объектов (автодороги, железные дороги) вышки следует размещать последовательно. Данный подход дает существенные преимущества на территориях с малой плотностью абонентов (все обслуживаемое оборудование концентрируется в основном на опорных базовых станциях, эффективно используется их емкость)

Ретрансляторы также могут выступать средством создания избыточного покрытия, позволяя эф-

эффективно применить технологию динамического отключения БС. Для соединения ретрансляторов с опорной базовой станцией предлагается использовать или проводные линии связи, или часть каналов диапазона GSM. Основная идея заключается в том, что в случае малой нагрузки часть базовых станций отключается, а связь на их территории обеспечивается за счет ретрансляторов и емкости БС, которые остались. В случае высокой нагрузки те же ретрансляторы используются для перераспределения ее между БС. Дополнительный эффект дает сокращение расстояния между антенной и абонентом. Математическое моделирование (на достаточно упрощенной модели) показывает возможность существенного (около 40%) снижения энергопотребления в подобной системе в моменты низкой загруженности сети (например, ночью).

Опасность самовозбуждения и сложная процедура установки при переизлучении на той же несущей частоте, а также ограничение числа ретрансляторов, подключенных к одной базовой станции, являются основными недостатками в их использовании.

В централизованной ОАМ (эксплуатация, администрирование и управление) системе eNB будет информировать, например, через каждые 5 минут о текущей ситуации с нагрузкой. Окончательное решение для отключения проводится системой ОАМ. Преимущество централизованной системы очевидно: ОАМ имеет полную картину состояния всех сот в сети. В гибридной архитектуре eNB могут самостоятельно выходить/входить в спящий режим. В случае, если QoS не достигает указанного уровня за счет активного макроуровня, могут быть активированы микросоты. Полное отключение микросот в периоды низкой нагрузки или ее отсутствия возможно, так как покрытие поддерживается макроуровнем. ОАМ определяет нагрузку на микросоты и принимает решение относительно их отключения. После этого микросота уже не может анализировать нагрузки в ее радиусе покрытия. Поэтому задача включения/выключения микросот становится важной. Для ее решения используют следующие подходы:

- согласно статистическим данным устанавливается время включения и отключения сот;
- все соты включены, режим отключения сот запрещен;
- при малой нагрузке соты переводят в спящий режим;

– микросоты включаются с определенной частотой.

В SON используют вместо отключения микросот динамическое регулирование применяемой мощности в зависимости от изменения нагрузки с помощью малых сот. Макросота выполняет диспетчеризацию сайта: определяет местонахождение абонентов и нагрузки, которую они создают. Полученные данные eNB передает в блок OAM (SON). После точного места нахождения абонента в сети определяется способ подключения абонента в сеть, это может осуществляться через макросоту, микросоту и точку доступа (AP) Wi-Fi. Приоритетным является подключение абонента к AP. Это происходит, если абонент находится в зоне покрытия AP, и на устройстве, с которого осуществляется запрос на подключение к Интернету, включен модуль Wi-Fi. Если абонент подключился через AP Wi-Fi, то перераспределяется нагрузка на AP Wi-Fi; если нет, то проверяется возможность подключения к микросоте. При условии, что абонент находится в зоне покрытия микросоты и имеется достаточная пропускная способность, абонент подключается к микроуровню. В противном случае абонент подключается к макросоте. Таким образом, внедрение гетерогенных решений совместно с алгоритмом динамического регулирования применяемой мощности микросот является эффективным.

К недостаткам такого подхода можно отнести отсутствие возможности динамического регулирования режимом работы сети в зависимости от нагрузки на нее, а также сложности при позиционировании абонента (не обеспечивается высокая точность позиционирования) [7].

Анализ подходов к повышению энергоэффективности гетерогенных сетей показал, что каждый из них имеет собственные недостатки, которые усложняют задачу обеспечения энергоэффективности сотовой гетерогенной сети. Таким образом, актуальной остается задача нахождения более эффективного подхода к обеспечению энергоэффективности сотовой гетерогенной сети.

## **2. Преимущества гетерогенных сетей**

Одним из эффективных методов снижения потребления энергии является применение гетерогенных сетей - HetNet. Они обеспечивают высокую скорость передачи данных, но нужно учитывать интерференцию кросс-узлов, которая возникает между макро и микро, пико или фемто

БС, т.е. между узлами, которые потребляют малое количество энергии. Интерференция снижает скорость передачи данных в канале передачи данных, а в канале управления влияет на устойчивость линии связи. Кроме того, HetNet предоставляет высокую пропускную способность в отличие от гомогенной сети, но необходимо определить наилучшую стратегию выбора сервера и подбирать технологические методы управления, чтобы осуществлять эффективное распределение нагрузки среди узлов.

Small cells – малые базовые станции – эффективны для снижения нагрузки на макро БС, если они, например, устанавливаются в местах, где находится очень много людей. Для определения места развертывания малых БС оператору необходимо проанализировать местонахождение абонентских терминалов, объем циркулирующего трафика, а также карту сетевого трафика. Для оценки эффективности потребления энергии с использованием микро БС оператору необходимо сравнить карту трафика до и после развертывания. Hotspot – это точки, где очень большая концентрация трафика, и при размещении Small Cells в этих точках будет достигаться наибольшая энергоэффективность. Кроме того, необходимо определить нахождение таких точек и периодически выполнять прогнозирование загрузки малых БС для оценки эффективности использования ими энергии.

Малые БС могут размещаться на стенах и других опорных сооружениях. Все элементы, включая блоки питания и защиты от перенапряжения, могут находиться в контейнере, который по весу не превышает 8 кг. В связи с этим установка и размещение БС не являются затратными.

Self-Organizing Network (SON) (самоорганизованная сеть) помогает уменьшить расходы на эксплуатацию, так как реализуют функции самооптимизации, самоконфигурации и самовосстановлению, т.е. предоставляют достаточно простое развертывание и обслуживание.

Важное преимущество HetNet – это возможность гибкого и постепенного наращивания емкости сети с учетом необходимости. Вполне логично, что необходимо лишь несколько микро БС в местах большого скопления людей. Они могут использовать те же частоты, что и макро БС, но их необходимо скоординировать. Для максимизации емкости нужно распределить несущие между всеми БС. При развернутых микро БС их ко-

ординация с макро БС увеличивает общую пропускную способность сот на 80 - 130%.

В данной работе рассматриваются HetNet, включающие соты меньшего размера. Очевидно, что они могут быть оптимизированы, чтобы потреблять меньше энергии, чем обычные сотовые сети, т.е. быть менее энергоемкими.

В HetNets Small cells потенциально более энергоэффективны, чем макросоты, которые отличаются высоким показателем потерь на трассе - Path-loss (PL). Кроме того, в процессе развертывания группы узлов eNB, относящихся к разным уровням, можно оптимизировать энергетические затраты в сети, так как на энергоэффективность влияет потребление мощности каждого отдельного элемента сети в зависимости от передаваемой мощности и нагрузки.

### 3. Модель гетерогенной сети с использованием микросот

Для оценки затрат энергии и эффективности ее использования исследована гетерогенная сеть, которая включает в себя макро- и микросоты. В данной работе предполагается, что исследуемая сеть состоит из сот с повторным использованием семи частот. Базовые станции, т.е. eNBs, расположены в центре соты. Пример такой сети показан на рис. 2.

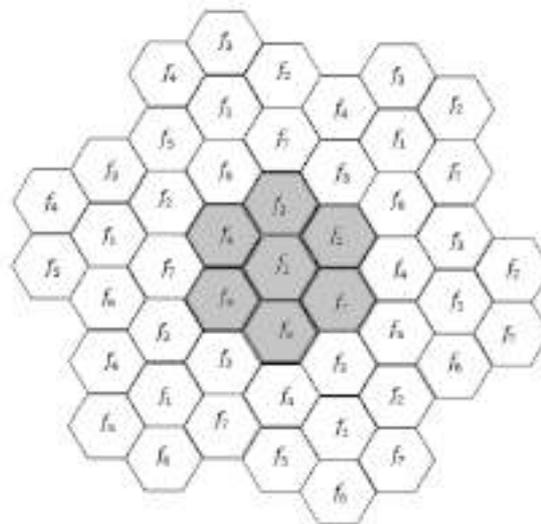


Рис. 2. Сотовая сеть с 49-ю ячейками. Схема сети уменьшена таким образом, чтобы включить только центральный кластер (закрашен серым цветом), который окружен ближайшими сотами других кластеров.

Как было сказано ранее, HetNet должны включать множественные узлы eNBs. Для этого одна микро eNB развернута в центре соты на границе между двумя сотами в центральном кластере. Схема расположения микросоты изображена на рис. 3.

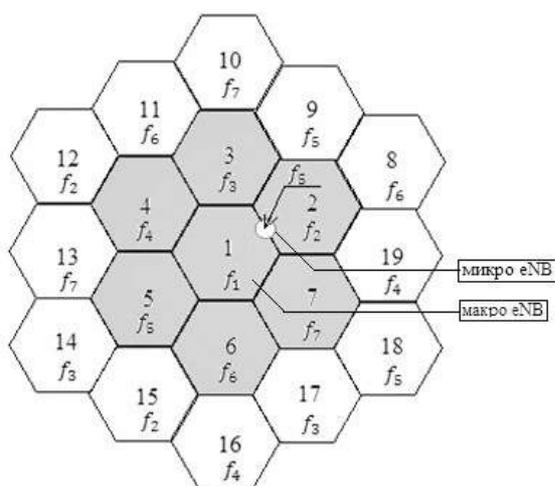


Рис. 3. Схема расположения микросоты в гетерогенной сети

На рис. 3 микросота изображена малым кругом и каждая макро eNB пронумерована. Принятый режим передачи Single-user Multiple Input – Multiple Output (SU-MIMO). Оборудование пользователя обслуживается в микросоте, т.е. оно находится в зоне покрытия микросоты. Микросота выбирается со значением частоты  $f_5$ , которая одинакова для eNB #5. eNB #5 находится далеко от микросоты и, следовательно, оказывает меньше препятствий. Более того, eNBs #9 и #18 будут также интерферировать с микросотой, поскольку они оперируют на той же частоте  $f_5$ .

Модифицированная модель гетерогенной сети с расположением одной микросоты (микро БС) на границе между двумя макросотами (макро БС1 и макро БС2), которая позволяет повысить энергоэффективность, изображена на рис. 4.

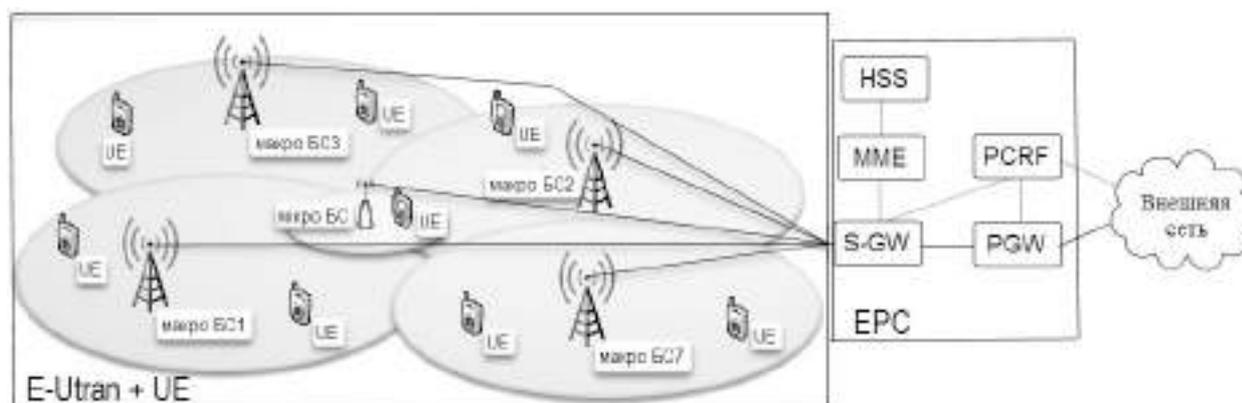


Рис. 4. Модифицированная модель гетерогенной сети

Для дальнейшего исследования выбирается сеть MIMO с координированной передачей и приемом – Coordinated Multipoint (CoMP). CoMP выполняет динамическую координацию или передачу и прием с несколькими географически разделенными узлами eNB. Оборудование пользователя с микросотами расположено на границе между ячейками #1 и #2.

Рассчитаем количество макросот, которые будут координировать с одной микросотой с CoMP Cooperating Set (CCS), т.е. определим размер Coordinated Multipoint Cooperating Set (CoMP CCS) (набор сотрудничества CoMP).

Обычно, части CCS не могут быть выбраны случайно, потому что это ячейки, которые обеспечивают лучшие показатели по потерям на трассах. В связи с этим выбраны те соты, которые ближе всего расположены к оборудованию пользователя, поскольку они вносят незначительное затухание сигнала по потерям на трассе, влияющее на оборудование пользователя. Важно отметить предположение, что части CCS не могут повлиять на другие факторы затухания сигнала (такие как затенение).

Примеры состава CCS для различных размеров CCS:

Набор CCS из двух (1 микро eNB + 1 макро eNB). Согласно предположению, что микросоты находятся в центре и на границе между сотами #1 и #2, эти ближайшие соты выбраны, поскольку они расположены на одинаковой дистанции. В этом случае выбор оборудования пользователя будет сделан внутри микросоты. Будет выбрана eNB, которая расположена ближе.

Набор CCS из трех (1 микро eNB + 2 макро eNBs). В основном, соты #1 и #2 выбраны как ближайшие к микросоте. Расположение оборудования пользователя внутри микросоты несущественно, так как ее радиус как минимум в 5 раз меньше, чем радиус макросоты.

Набор CCS из четырех (1 микро eNB + 3 макро eNBs). 2 из 3 CoMP сот будут # 1 и #2. Как показано на рис. 3, соты #3 или #7 выбраны в качестве третьей. Для выбора необходимой соты используется тот же метод, что и в CCS из двух.

Набор CCS из пяти (1 микро eNB + 4 макро eNBs). В этом случае видно, что CCS будет включать соты #1, #2, #3 и #7. Алгоритм для членов CCS такой же, как в предыдущем варианте. Главный критерий выбора - дистанция между выбранной сотой и оборудованием пользователя. Этот алгоритм применяется и для других микросот. При этом используют такие ограничения: оборудование пользователя должно обслуживаться только микросотой и она должна разворачиваться в центре на границе между двумя макросотами.

#### 4. Расчет энергоэффективности гетерогенной сети

Для оценки энергоэффективности введем понятие отношение потребления энергии – Energy Consumption Rating (ECR). Эта величина будет равняться отношению потребляемой мощности и пропускной способности сети. Модели потребления мощности для микро и макро БС описаны в [8]. Пропускная способность рассчитывается по алгоритму, который описан в [9, 10]. Таким образом, используется следующее уравнение:

$$ECR = \frac{P_{BS,micro} + P_{BS,macro} \cdot N_{macro} + k \cdot offset}{T}, \quad (1)$$

где  $P_{BS,micro}$  – энергопотребление микро БС;  $P_{BS,macro}$  – энергопотребление макро БС;  $N_{macro}$  – количество макро БС;  $k$  – коэффициент, учитывающий количество макросот;  $offset$  – используемая мощность между макро и микросотами.

Используемая ( $offset$ ) мощность изменяется в связи с тем, что не всегда макро БС работают (при режиме non-CoMP). По мере включения сот и взаимодействия между макро- и микросотами изменяющуюся мощность БС можно рассчитать по формуле:

$$offset = N_{sector} \cdot N_{PApSec} \cdot P_{Sp} \cdot (1 + C_c) \cdot (1 + C_{PSBB}),$$

где  $N_{sector}$  – число секторов БС;  $N_{PApSec}$  – число PAs на один сектор;  $P_{Sp}$  – обработка сигнала;  $C_c$  – потери на охлаждение;  $C_{PSBB}$  – потери на резервное питание и зарядку.

Составляющая в формуле (1), учитывающая смещение числа рассмотренных стационарных eNB, является общим смещением мощности, которое затем входит в общую потребляемую мощность для расчета ECR. В связи с тем, что возможно состояние сети, когда макро eNB не передает, но он включен, а следовательно, потребляет энергию, то макро eNB необходимо учитывать в расчете.

Очевидно, что в разных случаях будут разные значения коэффициента, учитывающего количество макросот. Таким образом, в случае non-CoMP, значение коэффициента  $k = 4$ , так как существуют четыре стационарные макро eNB. Здесь рассмотрены случаи non-CoMP по сравнению с CoMP разного размера CCS (до четырех макро eNB в CCS), поэтому учитываются только четыре узла eNB. В случае получения оценки с размером CCS 2,  $k = 3$ , так как один макро eNB сотрудничает с микро eNB, а три другие стационарные включены и потребляют энергию. Итак, далее для остальных трех случаев значение  $k$  будет равно два, один и ноль соответственно.

Расчет усиления потребления энергии Energy Consumption Gain (ECG) определяется:

$$ECG = \frac{ECR_{non-CoMP}}{ECR_{CoMP}}.$$

Для того чтобы определить, на сколько уменьшилось потребление энергии Energy Reducing Gain (ERG) в процентах, необходимо применить следующую формулу:

$$ERG = 1 - \frac{1}{ECG} \cdot 100\%.$$

Для оценки энергоэффективности Energy Efficiency (EE) необходимо взять обратную величину относительно потребления энергии.

Итак, искомая величина будет рассчитываться по формуле:

$$EE = \frac{1}{ECR}.$$

Энергоэффективность является обратной величиной по отношению к потребляемой энергии.

Таким образом, чем меньше энергии будет использовано, тем лучше показатель энергоэффективности.

### 5. Моделирование и анализ результатов

Для оценки показателей энергоэффективности гетерогенной сотовой сети моделирование количества используемой ею энергии выполнено с помощью программного обеспечения MatLab.

Моделируется гетерогенная сотовая система, которая иллюстрируется на рис. 3-4. Расстояние между макро eNB установлено до 2500 м и радиус соты составляет 1445 м. Радиус микросоты - 100 м. Пропускная способность канала 5 МГц. Как упоминалось ранее, один UE находится в пределах микросоты.

На основании параметров макро eNB и модели COST 231 - Хата для мегаполисов выбраны потери на трассе макросот (PL). Для микро eNB была выбрана модель Уолфиша- Икегами для NLOS.

Схема глобального кодирования выбрана для создания матриц предварительного кодирования для eNB CCS, в то время как простой Singular Value Decomposition (SVD) выбирается в случае для non-CoMP. Выбрана модель Релеевского равномерного канала, поскольку это общая модель для NLOS каналов. Предполагается, что eNB в CCS может полностью разделять Channel State Information (CSI) и данные абонента. Система LTE считает макросоты структурированными по секторам (как правило, макросоты разделены на сектора в трех секторах), следовательно, макросоты исследуемой сети обеспечивают требуемое покрытие. Разбивание на сектора вводит дополнительные сложности в сети, так как требуется более сложный план повторного использования частоты.

CoMP включает в себя четыре случая с различными размерами CCS, поэтому расчеты производятся для размеров CCS из двух, трех, четырех и пяти наборов макро- и микросот. Выбор CCS осуществляется как описано в п.4. График ECR как функция размера CCS показан на рис. 5.

Точка "0" на горизонтальной оси соответствует случаю non-CoMP, когда только одна микро eNB передает. Однако в non-CoMP случае учитывается потребление энергии макро eNB. Применяемая мощность макро БС равна так называемой силе смещения в случае, когда макро eNB не передает сигнал.

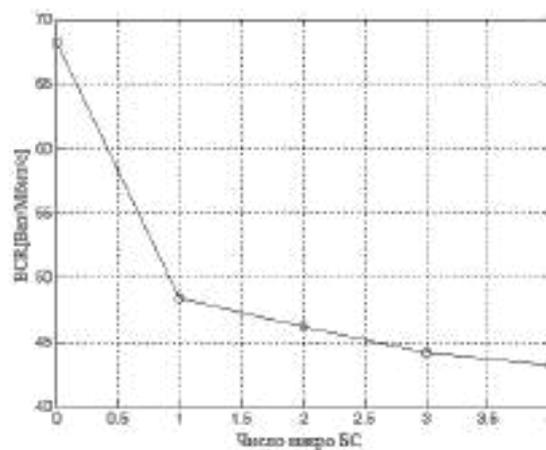


Рис. 5. Отношение использованной энергии (ECR) относительно размера CCS

Из графика, показанного на рис. 5, видно резкое падение линии при переходе от первой точки ко второй, что соответствует разнице между non-CoMP случаем и CoMP случаем с наименьшим размером CCS. Как видно, с увеличением числа ячеек в CCS наклон линии уменьшается. Это означает, что дальнейшее увеличение размера CCS не даст такой прирост производительности, как при только одном макро eNB, который был добавлен в микро eNB, чтобы сформировать CoMP. Это резкое падение между non-CoMP и CoMP в первом случае может быть вызвано применением CoMP. Иными словами, в случае non-CoMP производительность низкая с точки зрения пространственного разнесения частот, поскольку микро eNB оснащен только одной антенной. В случае, когда один макро eNB, который оснащен тремя антеннами, взаимодействует с микро eNB с одной антенной, пространственный порядок разнесения частот увеличивается. Кроме того, макро eNB находится на чрезвычайно длинных расстояниях (> 1 км) от микро eNB, и это также вносит свой вклад в улучшение условий, так как в этом случае антенны достаточно разнесены в пространстве. Когда больше макро eNB добавляются к CCS, производительность действительно намного улучшается по сравнению с non-CoMP, в то время как по сравнению с CoMP CCS размером 2 улучшение наблюдается не так явно.

Результаты моделирования

Параметр	non-CoMP	CoMP1	CoMP2	CoMP3	CoMP4
SINR [дБ]	19,998	19,647	19,7098	19,342	19,341
Пропускная способность [Мбит/с]	18,336	18,336	18,336	18,336	18,336
Мощность передачи макро eNB [мВт]	-	25,12	10	5,01	3,16
Мощность передачи микро eNB [мВт]	100	0,25	0,1	0,05	0,03
Потребление энергии макро eNB [Вт]	-	355,404	241,464	203,872	189,932
Потребление энергии микро eNB [Вт]	586,912	33,301	32,468	32,191	32,089
Смещение мощности в макро eNB [Вт]	166,1	166,1	166,1	166,1	166,1
Коэффициент смещения умножения	4	3	2	1	0
Общая мощность смещения [Вт]	664,4	498,3	332,2	166,1	0
Отношение потребления энергии (ECR) [Вт\Мбит\с]	68,244	48,375	46,226	44,17	43,184
Усиление потребления энергии (ECG)	-	1,42	1,476	1,545	1,58
Сокращение энергии (ERG (%))	-	29,114	32,264	35,276	36,721

В таблице цифры, которые находятся после термина "CoMP", отражают число макро eNBs в CCS. Исходя из этой таблицы, можно сделать вывод, что при внедрении CoMP отношение сигнал-шум значительно увеличивается и в результате адаптивного контроля мощность, которая передается микро eNB, падает с 100 до 0,25 мВт в CoMP1.

В дальнейшем снижение мощности передачи постепенно замедляется. Также значение мощности передачи макро eNB в CCS уменьшается. В целом, все параметры снизились одинаково. Как видно, потребляемая мощность микро eNB значительно снизилась при сравнении non-CoMP и CoMP случаев. Однако снижение не так явно наблюдается при CoMP с различными размерами CCS по рассмотренным причинам (см. рис. 5).

При рассмотрении ECR можно отметить, что для того, чтобы обеспечить высокоскоростную связь для абонента, HetNet без сети MIMO (в случае, когда микро eNB служит только для пользователей, и макро eNB #1, #2, #3 и #7 включены и ничего не передают) будет тратить 68 Вт мощности для достижения пропускной способности 1 Мбит.

С другой стороны, сеть MIMO, построенная с одной микро eNB и четырьмя макро eNB, будет тратить только 43 Вт для достижения той же пропускной способности. Так, сеть MIMO обеспечивает прирост 1,58 (ECG) с точки зрения энергоэффективности, и это экономит почти 37% мощности (ERG).

### Выводы

Применение сети MIMO в HetNets выгодно с точки зрения потребления энергии. Однако достигнутые успехи не зависят от линейного роста CCS. С другой стороны, повышение CCS приводит к возникновению других проблем, связанных с энергетической эффективностью. Дальнейшие возможные исследования могут быть проведены для определения оптимального количества числа eNB в CCS.

**Литература:** 1. Hasan Z. Green Cellular Networks: a Survey, Some Research Issues and Challenges / Z. Hasan, H. Boostanimehr, V. K. Bhargava// IEEE Communications Survey & Tutorials, vol. 13, no. 4, First Quarter 2014, P. 524-540. 2. Sheng Y.S. Energy Efficient Heterogeneous Cellular Networks / Y.S. Sheng, T. Quek, M. Kountouris, Hyundong S.// IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 31, 2014. P. 840-850. 3. Understanding the Environmental Impact of Communication Systems // ofcom.org 4. Емельянов А.К. Пути повышения энергоэффективности подсистемы базовых станций сетей сотовой связи // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. №4(17). 5. Lubritto C. Telecommunication power system: energy saving, renewable sources and environmental monitoring / C. Lubritto, A. Petraglia, C. Vetromile, F. Caterina/ Trends in Telecommunications Technologies. InTech, 2015. P.145–164. 6. Zhisheng Niu Dynamic base station energy saving with relays: research/master thesis / Niu Zhisheng, A. F. Bosch// upc - tsinghua university. 2015. 7. 3GPP TR 36.902 v1.2.0 Self-configuring and self-optimizing network use cases and solutions (Release 9), Mar. 2016. 8. Arnold O. Power Consumption Modeling of Different Base Station Types in Heterogeneous Cellular Networks / O. Arnold, G. Richter, O. Fettweis, O. Blume// in Future Network and Mobile Summit, Technische Universitat Dresden, 2016. P.1-8. 9. Institute of Communications and Radio-Frequency Engineering, LTE Link Level Simulator Documentation, v1.3r620, Vienna, Austria:

Vienna University of Technology, 2015. P. 14. **10.** Tech. Rep. TS Evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); physical layer procedures / Tech. Rep. TS // 3rd Generation Partnership Project (3GPP), March 2015, P.79.

**Transliterated bibliography:**

1. *Hasan Z. Green Cellular Networks: a Survey, Some Research Issues and Challenges / Z. Hasan, H. Boostanimehr, V. K. Bhargava// IEEE Communications Survey & Tutorials, vol. 13, no. 4, First Quarter 2014, P. 524-540.*
2. *Sheng Y.S. Energy Efficient Heterogeneous Cellular Networks / Y.S. Sheng, T. Quek, M. Kountouris, Hyundong S.// IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 31, 2014. - P. 840-850.*
3. Understanding the Environmental Impact of Communication Systems // ofcom.org
4. *Emel'janov A.K. Puti povysheniya jenergojeffektivnosti podsistemy bazovyh stancij setej sotovoj svyazi // Internet-zhurnal «Naukovedenie», 2014. №4(17).*
5. *Lubritto C. Telecommunication power system: energy saving, renewable sources and environmental monitoring / C. Lubritto, A. Petraglia, C. Vetromile, F. Caterina / Trends in Telecommunications Technologies. - InTech, 2015- P. 145–164.*
6. *Zhisheng Niu Dynamic base station energy saving with relays: research/master thesis / Niu Zhisheng, A. F. Bosch// upc - tsinghua university. - 2015.*
7. 3GPP TR 36.902 v1.2.0 Self-configuring and self-optimizing network use cases and solutions (Release 9), Mar. 2016.
8. *Arnold O. Power Consumption Modeling of Different Base Station Types in Heterogeneous Cellular Networks / O. Arnold, G. Richter, O. Fettweis, O. Blume// in Future Network and Mobile Summit, Technische Universitat Dresden, 2016, P.1-8.*
9. Institute of Communications and Radio-Frequency Engineering, LTE Link Level Simulator Documentation, v1.3r620, Vienna, Austria: Vienna University of Technology, 2015, P. 14.
10. Tech. Rep. TS Evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); physical layer procedures / Tech. Rep. TS // 3rd Generation Partnership Project (3GPP), March 2015, P.79.

Поступила в редколлегию 22.02.2018

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Безрук В.М.

**Глоба Лариса Сергеевна**, д-р техн. наук, проф., кафедры информационно-телекоммуникационных сетей Национального технического университета “Киевский политехнический институт им. И.Сикорского”. Научные интересы: интеллектуальные системы поддержки принятия решений, распределенные системы и технологии. Адрес: Украина, 01033, Киев, проул. Индустриальный, 2, моб. тел. +38(050)5261512.

**Гордеева Дарья Сергеевна**, студентка кафедры информационно-телекоммуникационных сетей Национального технического университета “Киевский политехнический институт им. И.Сикорского”. Адрес: Украина, 01033, Киев, проул. Индустриальный, 2, моб.тел. +38(093)3713281.

**Курдеча Василий Васильевич**, ассистент кафедры информационно-телекоммуникационных сетей Национального технического университета “Киевский политехнический институт им. И.Сикорского”. Научные интересы: Software Defined Radio, распределенные БД. Адрес: Украина, 01033, Киев, проул. Индустриальный, 2, моб. тел. +38(050)3848621.

**Globa Larisa Sergeevna**, professor, doctor of technical sciences, department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". Scientific interests: intellectual decision support systems, distributed systems and technologies. Address: Ukraine, 01033, Kyiv, pr. Industrialny, 2, mob. +38(050)5261512.

**Gordeeva Darya Sergeevna**, student. department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "I. Sikorsky Kiev Polytechnic Institute" Address: Ukraine, 01033, Kyiv, pr. Industrialny, 2, mob. +38(093)3713281.

**Kurdecha Vasily Vasilievich**, assistant, department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" Scientific interests: Software Defined Radio, distributed databases. Address: Ukraine, 01033, Kyiv, pr. Industrialny, 2, mob +38(050)3848621.

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОЧЕРЕДЯМИ НА ИНТЕРФЕЙСЕ МАРШРУТИЗАТОРА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

ЛЕБЕДЕНКО Т.Н., СИМОНЕНКО А.В.

Предлагается динамическая модель управления очередями. Новизна предложенной модели заключается в учете динамики изменения состояния интерфейса маршрутизатора телекоммуникационной сети (ТКС) при распределении сетевого ресурса. Динамические свойства модели описываются нелинейными дифференциальными уравнениями состояния сети, основанными на стационарной точечной аппроксимации нестационарного потока (The Pointwise Stationary Fluid Flow Approximation, PSFFA).

**Ключевые слова:** динамическая модель; очередь; потоки; распределение ресурсов; качество обслуживания.

**Key words:** dynamic model, queue; flow; resource allocation; quality of service.

### 1. Введение

Совершенствование средств обеспечения качества обслуживания QoS (Quality of Service, QoS) потоков пользователей является одним из актуальных направлений развития современных телекоммуникационных сетей. Важное место среди подобных средств занимают механизмы управления очередями (Queue Management), позволяющие эффективно управлять буферными и (или) канальными ресурсами ТКС и непосредственно влиять на количественные значения таких показателей качества обслуживания как средняя задержка, джиттер, вероятность потерянных пакетов без существенной модернизации уже существующей сети [1-5].

Анализ известных решений в области управления буферными и канальными ресурсами ТКС [6-12] показал, что результаты работы применяемых математических моделей были получены, как правило, для установившегося режима работы системы. Ввиду того, что состояние ТКС может изменяться во времени вследствие нестационарной активности пользователей или типов применяемых сервисов, а также перегрузок или полного отказа в обслуживании отдельных элементов системы, то важным и необходимым является учет фактора времени при оценке ее состояния и расчете значений показателей качества обслуживания.

Таким образом, актуальной представляется задача разработки и совершенствования динамических моделей и методов управления очередями, позволяющих обеспечить согласованное решение задач по управлению очередями с учетом динамики самого процесса управления и требований к качеству обслуживания.

### 2. Динамическая модель управления очередями на интерфейсе маршрутизатора ТКС

В основу предложенной модели были положены результаты, полученные в работах [5, 9, 11, 12]. В табл.1 приведен перечень основных обозначений, используемых для описания динамической модели управления очередями на интерфейсе маршрутизатора телекоммуникационной сети.

Таблица 1

$M$	Количество потоков, поступающих на вход интерфейса маршрутизатора ТКС
$N$	Количество очередей, организованных на интерфейсе маршрутизатора ТКС
$a_i(t)$	Средняя интенсивность $i$ -го потока в момент времени $t$
$a_j^\Sigma(t)$	Суммарная интенсивность потоков, направленных на обслуживание в $j$ -ю очередь в момент времени $t$
$b_j$	Пропускная способность интерфейса, выделенная для обслуживания пакетов из $j$ -й очереди
$b$	Общая пропускная способность интерфейса, на котором организуются очереди
$k_i^n$	Значение класса каждого $i$ -го потока
$k_j^o$	Значение класса каждой $j$ -й очереди
$\bar{n}_j(t)$	Значение средней длины $j$ -й очереди в момент времени $t$
$n_j^0$	Значение средней длины $j$ -й очереди в нулевой момент времени
$n_j^{\max}$	Максимальная длина $j$ -й очереди
$\beta$	Верхний динамический управляемый порог загрузки очередей по их длине

В рамках предложенной модели условимся, что количество поступающих на вход интерфейса потоков пакетов  $M$  превышает число поддерживаемых на нем очередей  $N$  и имеет место неравенство  $M > N$ .

Для удобства последующего изложения условимся, что значение класса каждого  $i$ -го потока  $k_i^n$ , как и значение класса каждой  $j$ -й очереди  $k_j^o$ , нормируется в пределах от единицы до десяти и является безразмерной величиной. Поток с наивысшим значением класса, равным десяти, т.е.  $k_i^n = 10$ , определим как приоритетный поток. Тогда чем меньше класс, тем значение  $k_i^n$  будет ближе к единице.

Пусть пакеты, поступившие в соответствии с содержанием актуальной таблицы маршрутизации на

интерфейс маршрутизатора ТКС, должны распределиться между  $N$  очередями при расчете множества переменных первого типа  $x_{i,j}(t)$  ( $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$ ), каждая из которых определяет долю  $i$ -го потока, направленного на обслуживание в  $j$ -ю очередь в момент времени  $t$ .

Для обеспечения приблизительно равного качества обслуживания пакетов одного и того же потока целесообразным является их обработка в рамках одной из очередей. Тогда множество переменных  $x_{i,j}(t)$  определим как булевы переменные:

$$x_{i,j}(t) \in \{0, 1\}, (i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}). \quad (1)$$

На переменные  $x_{i,j}(t)$  также будет накладываться условие сохранения потока на интерфейсе маршрутизатора ТКС, гарантирующее, что все пакеты  $i$ -го потока (без потерь) будут направлены в одну из  $j$ -х очередей, организованных на рассматриваемом интерфейсе в момент времени  $t$ :

$$\sum_{j=1}^N x_{i,j}(t) = 1, (i = \overline{1, M}). \quad (2)$$

В рамках решения задачи Resource Allocation, связанной с выделением пропускной способности интерфейса каждой  $j$ -й очереди, необходимо рассчитать множество переменных второго типа –  $b_j$ :

$$\sum_{j=1}^N b_j \leq b, 0 < b_j, (j = \overline{1, N}). \quad (3)$$

Выполнение условия (3) позволит корректно распределить пропускную способность (ПС) интерфейса между отдельными очередями.

Для обеспечения управляемости процессом предотвращения перегрузки определим суммарную интенсивность  $i$ -х потоков, направленных на обслуживание в  $j$ -ю очередь в момент времени  $t$ :

$$a_j^{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) x_{i,j}(t), (i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}). \quad (4)$$

Тогда условие обеспечения управляемости процессом предотвращения перегрузки примет вид:

$$a_j^{\Sigma}(t) < b_j, (j = \overline{1, N}). \quad (5)$$

Удовлетворение условия (5) гарантирует, что суммарная интенсивность потоков, направленных на обслуживание в  $j$ -ю очередь в момент времени  $t$ , не превысит пропускную способность интерфейса, выделенную данной очереди.

В целях предотвращения перегрузки очереди по ее длине (в пакетах) дополним условия (1)-(5) нелинейным ограничением вида:

$$\overline{n}_j(t) \leq n_j^{\max}, (j = \overline{1, N}), \quad (6)$$

где значения средней длины  $j$ -й очереди в момент времени  $t - \overline{n}_j(t)$  будут зависеть от характеристик потоков, формирующих данную очередь, от поддерживаемой дисциплины обслуживания, от выделенной данной очереди пропускной способности интерфейса и от момента времени  $t$  [9, 11, 12].

### 3. Особенности расчета средней длины очереди на интерфейсе маршрутизатора ТКС

Ввиду того, что оценка состояния интерфейса и последующее управление очередями являются процессами реального времени, то актуальным и необходимым видится использование в разрабатываемой модели математического аппарата, учитывающего динамику изменения его состояния во времени. Так, в научных исследованиях посвященных данной проблематике [5-12], предлагается применять аппарат теории массового обслуживания, где в зависимости от используемой дисциплины обслуживания становится возможным оценить влияние состояния интерфейса (пропускной способности, загруженности и максимальной длины очереди) на средний размер буфера и, следовательно, численные значения показателей QoS.

Анализ [5, 9, 11, 12] показал, что для стационарного режима работы интерфейса маршрутизатора ТКС, т.е. режима, при котором все переходные процессы, связанные с изменением его состояния, окончены, расчет средней длины очереди (6) может быть описан следующими аналитическими зависимостями:

$$M/M/1: \quad \overline{n}_j = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (7)$$

$$M/D/1: \quad \overline{n}_j = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}, \quad (8)$$

где  $\rho = \frac{a_j^{\Sigma}}{b_j}$  – коэффициент использования пропускной способности, выделенный для каждой  $j$ -очереди.

Применение данных зависимостей (7)-(8) и отсутствие учета фактора времени в ходе оценки состояния интерфейса может привести к неадекватному и нерациональному расчету значений показателей качества обслуживания. В этой связи актуальным является переход к математическому аппарату, позволяющему учесть динамический характер изменений, которые происходят на интерфейсах маршрутизаторов в масштабах реального времени диапазона секунд.

Стоит отметить, что для описания динамики изменения состояния интерфейса во времени исполь-

зуют различные типы математических аппроксимаций, из которых наиболее эффективной с точки зрения адекватности, наглядности и применимости, на наш взгляд, является стационарная точечная аппроксимация нестационарного потока (The Pointwise Stationary Fluid Flow Approximation, PSFFA) [9, 11, 12]. Согласно PSFFA значения средней длины очереди в момент времени  $t$  (6) будут описываться нелинейными дифференциальными уравнениями состояния сети:

$$M(t)/M(t)/1: \frac{d\bar{n}_j(t)}{dt} = a_j^\Sigma(t) - b_j \left( \frac{\bar{n}_j(t)}{\bar{n}_j(t)+1} \right), \quad (9)$$

$$M(t)/D(t)/1: \frac{d\bar{n}_j(t)}{dt} = a_j^\Sigma(t) - b_j \left[ \left( \bar{n}_j(t)+1 \right) - \sqrt{\bar{n}_j(t)^2 + 1} \right]. \quad (10)$$

Тогда при условии моделирования работы интерфейса, например, одноканальной системой массового обслуживания с нестационарным пуассоновским потоком и нестационарным экспоненциальным временем обслуживания ( $M(t)/M(t)/1$ ), выражение для оценки средней длины очереди  $\bar{n}_j(t)$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{n}_j(t) = & -(a_j^\Sigma(t) + b_j \cdot W(0, -\exp(-(a_j^\Sigma(t) + a_j^\Sigma(t) - \\ & - b_j)^2 \cdot (t - (b_j \cdot (\ln(\exp(-(a_j^\Sigma(t) + n_j^0) \cdot (a_j^\Sigma(t) - b_j)) / \\ & / b_j) \cdot (a_j^\Sigma(t) + n_j^0 \cdot (a_j^\Sigma(t) - b_j))) + a_j^\Sigma(t) / b_j)) / \\ & / (a_j^\Sigma(t) - b_j)^2) / b_j) / (b_j) / (a_j^\Sigma(t) - b_j), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $W$  – функция Ламберта;  $\exp$  – экспоненциальная функция.

Использование аппроксимации PSFFA позволяет отслеживать текущее значение средней длины очереди на интерфейсе маршрутизатора, а также прогнозировать ее значение на других временных интервалах.

В дополнение к условиям (1)-(6) в структуру предлагаемой динамической модели введем еще одно дополнительное нелинейное ограничение, позволяющее обеспечить сбалансированную загрузку создаваемых на интерфейсе маршрутизатора очередей и отвечающее концепции Traffic Engineering Queues [6-12]:

$$k_j^0 \bar{n}_j(t) \leq \beta n_j^{\max}, \quad (j = 1, N). \quad (12)$$

Физический смысл условия (12) заключается в том, чтобы создаваемые на интерфейсе маршрутизатора очереди загрузались сбалансированно. При этом чем выше значение класса очереди  $k_j^0$  тем меньшую длину  $\bar{n}_j(t)$  она должна иметь.

#### 4. Формулировка критерия оптимальности решения по управлению очередями

Согласно сформулированным условиям и ограничениям рассматриваемой динамической модели, расчет искомым переменных целесообразно осуществить в ходе решения следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{x, b, \beta} F.$$

Тогда целевую функцию  $F$  представим линейной формой вида:

$$F = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_{i,j}^x x_{i,j} + \sum_{j=1}^N h_j^b b_j + h^\beta \beta, \quad (13)$$

где  $h_{i,j}^x$  – условная стоимость (метрика) обслуживания пакетов  $i$ -го потока с помощью  $j$ -й очереди;  $h_j^b$  – условная стоимость (метрика) выделения единицы пропускной способности интерфейса пакетам из  $j$ -й очереди;  $h^\beta$  – условная стоимость реализации процесса балансировки длин очередей на интерфейсе маршрутизатора.

С точки зрения физического смысла сформулированной задачи (13), расчет обозначенных управляющих переменных  $x_{i,j}$ ,  $b_j$  и  $\beta$  должен приводить к минимизации суммарной стоимости использования сетевых ресурсов, где первое слагаемое отвечает за порядок использования буфера очереди (задача Congestion Management), второе – за пропускную способность интерфейса (задача Resource Allocation), а третье – за качество решения всех поставленных задач.

Ввиду того, что критерием направленности тех или иных потоков в соответствующие им очереди является максимальная соизмеримость классов потоков  $k_i^p$  и классов очередей  $k_j^o$ , то метрику  $h_{i,j}^x$ , отвечающую за распределение потоков по очередям в момент времени  $t$  и их агрегирование при выполнении условия  $M > N$ , будем рассчитывать по формуле:

$$h_{i,j}^x = w_x^b (k_i^p - k_j^o)^2, \quad (14)$$

где  $w_x^b$  – регулировочный параметр, влияющий на конечное численное значение целевой функции (13).

## 5. Исследования процессов управления очередями с использованием предложенной динамической модели

Продемонстрируем пример решения задачи управления очередями на интерфейсе маршрутизатора ТКС с применением динамической модели. В табл.2 приведены исходные данные и результаты расчета для двадцати пяти потоков ( $M = 25$ ), десяти очередей ( $N = 10$ ), пропускной способности интерфейса ( $b = 100$  л/с), регулировочного параметра ( $w_x^b = 100$ ) и временного интервала  $t = 2$  с.

В ходе моделирования количество потоков ( $M$ ) и количество очередей ( $N$ ) полагалось известным.

Классы очередей ( $k_j^o$ ) распределялись детерминировано в пределах от единицы до десяти. Классы потоков ( $k_i^n$ ) были определены по случайному за-

кону распределения и также варьировались в диапазоне от 1 до 10 включительно.

Исследования процессов управления очередями на интерфейсе маршрутизатора ТКС проводилось в рамках двух моделей. Так, модель М1 описывала динамический режим работы интерфейса, где значения средней длины очереди были получены посредством аппроксимации PSFFA для одноканальной системы массового обслуживания с нестационарным пуассоновским потоком и нестационарным экспоненциальным временем обслуживания  $M(t)/M(t)/1$  (11). Модель М2 определяла стационарный режим работы интерфейса, в котором значения средней длины очереди были описаны одноканальной системой массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания  $M/M/1$  (7).

Таблица 2

Характеристики потоков			Параметры очередей							
M	$k_i^n$	$a_i(t)$	N	$k_j^o$	$n_j^0$	$a_j^\Sigma(t)$	M1		M2	
							$b_j^d$	$\overline{n_j(t)^d} / n_j^{dmax}$	$b_j^c$	$\overline{n_j(t)^c} / n_j^{cmax}$
5	1,1900	3,0290	1	1	0	11,4128	11,4128	5,8301/100	11,4128	5,6014/100
18	1,3862	3,3971								
19	1,4929	4,9867								
4	1,6261	3,9427	2	2	0	9,8889	9,8889	5,3683 /90	10,2681	4,9414/90
10	2,2381	5,8700								
24	2,4352	0,0762								
22	2,5428	3,6405								
12	2,5510	4,8461	3	3	0	20,4499	20,4499	8,0994/80	21,9268	6,5580/80
20	2,5751	5,9777								
1	2,7603	2,2399								
8	3,4039	3,7457								
-	-	-								
6	4,9836	2,2506	4	4	0	7,4198	7,4199	4,5389/60	8,6106	3,4591/60
13	5,0596	4,8239								
17	5,4722	0,3453								
9	5,8527	3,5182								
3	6,5510	1,6069	5	5	0	5,3000	6,8727	2,4289/40	7,0863	2,3021/40
2	6,7970	1,2582								
14	6,9908	2,4349								
11	7,5127	1,8294								
23	8,1428	3,0041								
21	8,4072	0,8314	6	6	0	3,5182	3,5182	2,8823/50	4,3313	2,2345/50
15	8,9090	3,6341								
25	9,2926	2,1576								
16	9,5929	0,4855								
7	9,5974	5,3173	7	7	0	5,6649	9,0667	1,5940/30	8,5743	1,8144/30
15	8,9090	3,6341								
25	9,2926	2,1576								
16	9,5929	0,4855								
7	9,5974	5,3173								
15	8,9090	3,6341	8	8	0	5,7917	11,9163	0,9446/20	10,8112	1,1592/20
25	9,2926	2,1576								
16	9,5929	0,4855								
7	9,5974	5,3173								
15	8,9090	3,6341	9	9	0	5,8028	19,4546	0,4251/10	16,9786	0,5248/10
25	9,2926	2,1576								
16	9,5929	0,4855								
7	9,5974	5,3173								
7	9,5974	5,3173								

Согласно результатам моделирования, в рамках приведенного в табл.2 примера, удалось сократить число используемых очередей на 10%. Четвертая очередь не была задействована ввиду отсутствия

потоков с соизмеримыми для них классами. Таким образом, применение данной модели дало возможность использования лишь минимально необходимого числа очередей, тем самым позволяя сокра-

тить возможные задержки, вносимые планировщиком пакетов.

Также определили, что значение верхнего динамического управляемого порога загруженности очередей для модели M2 со стационарным режимом работы интерфейса ( $\beta = 0,5192$ ) на 22% превышает значение  $\beta$  относительно модели M1 с динамическим режимом работы интерфейса ( $\beta = 0,4251$ ). По своему физическому смыслу параметр  $\beta$  соответствует максимальному коэффициенту загруженности очередей, от значений которого зависят такие показатели QoS, как средняя задержка пакетов и их потеря [1-5].

В рамках данного примера аналогичного значения параметра  $\beta$  для модели M2 удалось добиться лишь при увеличении пропускной способности интерфейса до 110 1/с.

## 6. Выводы

Рассмотрена динамическая модель управления очередями, базирующаяся на распределении сетевого ресурса. На основании множества классификационных признаков и требований к уровню QoS была произведена агрегация потоков, позволяющая сократить число используемых очередей и вносимых планировщиком пакетов задержек, связанных с процессом формирования очередей, их анализом.

Расчетные решения, полученные в ходе использования предложенной модели, позволили обеспечить согласованное решение таких задач:

- распределение потоков пакетов между сформированными на интерфейсе маршрутизатора ТКС очередями;
- агрегирование потоков пакетов в соответствующие им очереди на основании соизмеримости их классов;
- распределение пропускной способности интерфейса между отдельными очередями (Resource Allocation).

Новизна модели заключалась в учете динамики изменения состояния интерфейса маршрутизатора ТКС при распределении сетевого ресурса. Динамические свойства модели описаны нелинейными дифференциальными уравнениями состояния сети, основанными на стационарной точечной аппроксимации нестационарного потока PSFFA.

Произведенный анализ показал, что использование предельных оценок (7)-(8) при расчете средней длины очереди (6) возможен лишь по окончании всех переходных процессов, происходящих на интерфейсе маршрутизатора ТКС. В противном случае необходимым является использование более

точной дифференциальной модели (9)-(10). Так, применение модели PSFFA позволило улучшить точность расчета средней длины очереди в зависимости от состояния интерфейса и выбранной дисциплины обслуживания и, в свою очередь, повлиять на численные показатели QoS.

Основываясь на результатах, полученных в ходе применения представленной динамической модели, удалось добиться экономии сетевого ресурса в диапазоне от 3,16 до 33% относительно стационарного режима работы интерфейса маршрутизатора ТКС. Предложенная модель может быть использована при решении задач анализа основных показателей качества обслуживания, а также при разработке перспективных моделей управления трафиком в современных мультисервисных сетях.

**Литература:** 1. *Barreiros, M.* QoS-Enabled Networks: Tools and Foundations / M. Barreiros, P. Lundqvist. Wiley: Wiley Series on Communications Networking & Distributed Systems, 2nd Edition, 2016. 254p. 2. *Szigeti, T.* End-to-End QoS Network Design: Quality of Service for Rich-Media & Cloud Networks / T. Szigeti, C. Hattingh, R. Barton, and K. Briley. 2nd Edition, Cisco Press, 2013. 1040 p. 3. *Stallings, W.* Foundations of modern networking: SDN, NFV, QoE, IoT, and Cloud. Addison-Wesley Professional, 2015. 544p. 4. *Varma, S.* Internet congestion control. Morgan Kaufmann, 2015. 263p. 5. *Wang, P.* Dynamics of Delay Differential Equations in Communications Networks: In the Framework of Active Queue Management. LAP Lambert Academic Publishing, 2009. 104p. 6. *John, J.* Priority Queuing Technique Promoting Deadline Sensitive Data Transfers in Router based Heterogeneous Networks / J. John, R. Balan // International Journal of Applied Engineering Research 12(15), 2017. P. 4899-4903. 7. *Lemeshko, O.* Researching and designing of the Dynamic adaptive queue balancing method on telecommunication network routers / O. Lemeshko, M. Semenyaka, O. Simonenko // Proceedings of XIIth CADSM'2013, 2013. P. 204-207. 8. *Lemeshko, O.* Results of the Dynamic Flow-Based Queue Balancing Model Research / O. Lemeshko, Ali S. Ali, M. Semenyaka // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET), 11th International Conference on. IEEE, 2012. P. 318-319. 9. *Yeremenko, O.* Investigation of queue utilization on network routers by the use of dynamic models / O. Yeremenko, T. Lebedenko, T. Vavenko and M. Semenyaka // In Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T), Second International Scientific-Practical Conference on IEEE, 2015. P. 46-49. 10. *Lemeshko, O.* Dynamics analysis of multipath QoS-routing tensor model with support of different flows classes / O. Lemeshko, O. Yeremenko // Smart Systems and Technologies (SST), on. IEEE, 2016. P. 225-230. 11. *Lebedenko, T.* A queue management model on the network routers using optimal flows aggregation / T. Lebedenko, A. Simonenko, Fouad Abdul Razzaq Arif // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET), 13th Interna-

tional Conference on. IEEE, 2016. P. 605-608. 12. *Lebedenko, T.* Research of influence flow characteristics to network routers queues utilization / T. Lebedenko, M. Ievdokymenko, Ali Salem Ali // Advanced Information and Communication Technologies: proceedings of 2015 1st International Conference (AICT'2015), 2015. P. 111-112.

**Транслитерированный список литературы:**

1. *Barreiros, M.* QoS-Enabled Networks: Tools and Foundations / M. Barreiros, P. Lundqvist. Wiley: Wiley Series on Communications Networking & Distributed Systems, 2nd Edition, 2016. 254p.

2. *Szigeti, T.* End-to-End QoS Network Design: Quality of Service for Rich-Media & Cloud Networks / T. Szigeti, C. Hattingh, R. Barton, and K. Briley. 2nd Edition, Cisco Press, 2013. 1040 p.

3. *Stallings, W.* Foundations of modern networking: SDN, NFV, QoE, IoT, and Cloud. Addison-Wesley Professional, 2015. 544p.

4. *Varma, S.* Internet congestion control. Morgan Kaufmann, 2015. 263p.

5. *Wang, P.* Dynamics of Delay Differential Equations in Communications Networks: In the Framework of Active Queue Management. LAP Lambert Academic Publishing, 2009. 104p.

6. *John, J.* Priority Queuing Technique Promoting Deadline Sensitive Data Transfers in Router based Heterogeneous Networks / J. John, R. Balan // International Journal of Applied Engineering Research 12(15), 2017. P. 4899-4903.

7. *Lemeshko, O.* Researching and designing of the Dynamic adaptive queue balancing method on telecommunication network routers / O. Lemeshko, M. Semenyaka, O. Simonenko // Proceedings of XIIth CADSM'2013, 2013. P. 204-207.

8. *Lemeshko, O.* Results of the Dynamic Flow-Based Queue Balancing Model Research / O. Lemeshko, Ali S. Ali, M. Semenyaka // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET), 11th International Conference on. IEEE, 2012. P. 318-319.

9. *Yeremenko, O.* Investigation of queue utilization on network routers by the use of dynamic models / O. Yeremenko, T. Lebedenko, T. Vavenko and M. Semenyaka // In Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T), Second International Scientific-Practical Conference on IEEE, 2015. P. 46-49.

10. *Lemeshko, O.* Dynamics analysis of multipath QoS-routing tensor model with support of different flows classes / O. Lemeshko, O. Yeremenko // Smart Systems and Technologies (SST), on. IEEE, 2016. P. 225-230.

11. *Lebedenko, T.* A queue management model on the network routers using optimal flows aggregation / T. Lebedenko, A. Simonenko, Fouad Abdul Razzaq Arif // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET), 13th International Conference on. IEEE, 2016. P. 605-608.

12. *Lebedenko, T.* Research of influence flow characteristics to network routers queues utilization / T. Lebedenko, M. Ievdokymenko, Ali Salem Ali // Advanced Information and Communication Technologies: proceedings of 2015 1st International Conference (AICT'2015), 2015. P. 111-112.

Поступила в редколлегию 12.02.2018

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Баранник В.В.

**Лебеденко Татьяна Николаевна**, аспирантка кафедры инфокоммуникационной инженерии ХНУРЭ. Научные интересы: управление трафиком, качество обслуживания, отказоустойчивая маршрутизация. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. +380577021320, e-mail: [tetiana.lebedenko@gmail.com](mailto:tetiana.lebedenko@gmail.com).

**Симоненко Александр Викторович**, научный сотрудник научного центра, Харьковский национальный университет воздушных сил им. Ивана Кожедуба. Научные интересы: NGN, управление трафиком, качество обслуживания. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Сумская, 77/79 тел. +380577002165, e-mail: [28186@ukr.net](mailto:28186@ukr.net).

**Tetiana Lebedenko**, postgraduate student of the Department of Infocommunication Systems, Kharkiv National University of Radio Electronics. Research interests: Traffic Management, Quality of Service, Fault-Tolerant Routing. Address: Ukraine, 61166, Kharkiv, Nauka Ave., 14, Phone/fax: +380577021320, e-mail: [tetiana.lebedenko@gmail.com](mailto:tetiana.lebedenko@gmail.com).

**Oleksandr Simonenko**, researcher of the Scientific Center, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University. Research interests: NGN, Traffic Management, Quality of Service. Address: Ukraine, 61023, Kharkiv, Sumska St., 77/79, Phone/fax: +380577002165, e-mail: [28186@ukr.net](mailto:28186@ukr.net).

## МОДИФИЦИРОВАННАЯ АРХИТЕКТУРА WI-FI OFFLOAD

ПИШКО А.О., КУРДЕЧА В.В.

Описывается технология нового поколения Wi-Fi Offload, с помощью которой возможна реализация выгрузки трафика сотовой сети в сеть Wi-Fi, что позволит разгрузить сотовую сеть от потока трафика данных. Предлагается модифицировать существующую архитектуру за счет внедрения дополнительного модуля, который анализирует чувствительность трафика данных, что повысит эффективность разгрузки сети LTE с помощью перенаправления нечувствительного к задержке трафика в сеть Wi-Fi.

Ключевые слова: сеть, Wi-Fi Offload, разгрузка, архитектура, LTE, Proxy Mobile IPv6, SDN.

Key words: network, Wi-Fi Offload, offloading, architecture, LTE, Proxy Mobile IPv6, SDN.

### 1. Введение

С появлением смартфонов, планшетов и других интеллектуальных устройств в мобильных сетях стал преобладать трафик передачи данных. Спрос пользователей на данный вид услуг быстро растет, достигая огромных объемов. Это привело к изменению концепции в планировании сетей мобильной связи. В настоящее время она направлена на разработку эффективных и экономичных способов для удовлетворения растущего спроса со стороны пользователей [1]. Кроме того, существующие технические решения, используемые в сотовой архитектуре, достигли своих физических пределов, что сдерживает ее дальнейшее техническое развитие [2].

В последнее время все большее внимание привлекает внедрение гетерогенной сети для повышения пропускной способности системы. Гетерогенная сеть - это новое многоуровневое решение для сотовых сетей, где традиционные макро- и микросоты окружены множеством маломощных и недорогих устройств с неоднородными характеристиками и ограничениями: пикосоты, фемтосот и реле. Эта многоуровневая структура увеличивает пропускную способность благодаря малому расстоянию между сетью доступа и конечным пользователем и тем самым предоставляет оптимальное решение использования спектра радиочастот. В данной работе внимание сосредоточено на выгрузке трафика с мобильных сетей при помощи технологии Wi-Fi, более известной как Wi-Fi Offload.

В Wi-Fi Offload поддержание пользовательских сеансов и выгрузка выборочных потоков обеспечивает лучший пользовательский опыт в допол-

нение к балансировке нагрузки в сетях. Основная проблема, возникающая при поддержании пользовательских сеансов в сетях, заключается в том, что подключение к другой сети меняет IP-адрес пользователя, что приводит к потере IP-сеанса. Мобильность IP-сеанса предполагает, что локальный идентификатор и идентификационные свойства IP должны быть отделены, что достигается с помощью IP-мобильности. Таким образом, для обеспечения бесшовной выгрузки данных необходимо, чтобы сеть эффективно поддерживала мобильность IP, что достаточно сложно реализовать в рамках стандартной архитектуры Wi-Fi Offload [3].

Для лучшей балансировки нагрузки необходима возможность перемещения заданных выборочных потоков пользователя (в зависимости от типа трафика и его чувствительности к задержкам) для обеспечения мобильности потоков. Мобильность потоков позволяет пользователю выбирать наиболее подходящую сеть для текущего применения. Например, рассмотрим поведение пользователя в момент сильной нагрузки LTE сети, который просматривает видео онлайн и загружает файлы одновременно. Перемещение видеотрафика в сеть Wi-Fi нецелесообразно, так как это приводит к увеличению задержки и, таким образом к уменьшению QoS. В свою очередь, процесс загрузки файлов можно переместить в сети Wi-Fi, так как такой вид трафика является толерантным к задержке передачи данных. Таким образом, если пользователь запускает нечувствительные к задержке процессы, они могут быть выгружены в сети Wi-Fi для лучшей балансировки нагрузки в сети. Мобильность потока играет важную роль для достижения лучшего распределения нагрузки в сети, а также повышает удобство использования мобильного сервиса в целом, однако в стандартной архитектуре Wi-Fi Offload мобильность потока не поддерживается [4].

В данной статье предлагается новая архитектура под названием «Бесшовная мобильность межсетевых обмена» (БММО), которая позволяет устранить недостатки существующих архитектур, используя концепции Proxy Mobile IPv6 (PMIPv6) и Software Defined Networking (SDN). Ее отличительной особенностью является использование дополнительного компонента поддержки мобильности потока.

Протокол PMIPv6 – это стандартизированный сетевой протокол для управления локальной мобильностью, где локальная мобильность IP

обрабатывается без участия мобильного узла. PMIPv6 главным образом определяет два компонента для обеспечения сетевого управления локальной мобильностью, а именно: Local Mobility Anchor (LMA) и Mobile Access Gateway (MAG). MAG выполняет мобильную сигнализацию от имени мобильных узлов. LMA отслеживает пользователей и выдает им один и тот же IP-адрес, когда они перемещаются по разным сетям. LMA и MAG общаются через туннель, который устанавливается между ними.

Протокол PMIPv6 решает проблему мобильности сеанса пользователя, но не обеспечивает гибкость при перемещении отдельных потоков пользователя [5].

Архитектура SDN основана на разделении плоскости передачи данных и плоскости управления. В ней представлены два компонента: контроллер и коммутаторы. Контроллер и коммутатор взаимодействуют с использованием протокола OpenFlow. Когда коммутатор получает пакет, который никогда не видел раньше, он передает его контроллеру. Контроллер принимает решение о маршрутизации и инструктирует коммутатор о том, как перенаправлять подобные пакеты, добавляя записи в таблицу потоков коммутатора [6].

## 2. Модификация архитектуры Wi-Fi Offload

На основании анализа рассмотренных концепций предложена модифицированная архитектура Wi-Fi Offload с бесшовной мобильностью межсетевых потоков, которая включает новый блок - контроллер потока. За счет контроллера потока реализуется функция мобильности. Пакетный шлюз (PGW) в сети LTE и шлюз беспроводного доступа (WAG) в Wi-Fi сети работают как переключатели, которые осуществляют мобильную сигнализацию от имени оборудования пользователя.

Каждый поток рассматривается как поток IP-пакетов с определенными параметрами (исходный IP-адрес, IP-адрес назначения, выходной порт, порт назначения, транспортный протокол, который используется). Для того чтобы обеспечить бесшовный переход при перемещении мобильного узла с LTE сети в сеть Wi-Fi, шлюз беспроводного доступа (WAG) и пакетный шлюз (PGW) выполняют инструкции, которые предоставляет блок контроллер потока.

На Рис. представлена модифицированная архитектура объединенных сетей LTE и Wi-Fi с функцией бесшовного мобильного потока. В левой части рис. 1 изображены компоненты LTE, а в правой – компоненты сети Wi-Fi.

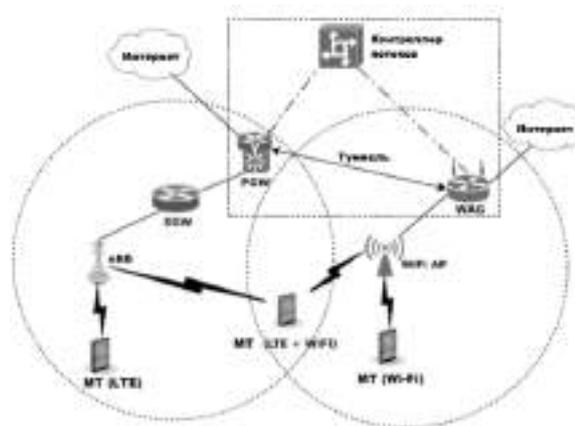


Рис. 1. Модифицированная архитектура Wi-Fi Offload в LTE

Основными компонентами модифицированной архитектуры являются:

- контроллер потока;
- мобильный агент;
- мобильный терминал.

PGW и WAG выступают в качестве мобильных агентов. Агент соединяет мобильный терминал сетью Интернет, а также обменивается данными с контроллером потока. На основании полученных инструкций от контроллера принимается решение использовать сеть LTE для передачи данных или разгружать данные с помощью туннеля между PGW и WAG для того, чтобы достичь мобильный терминал через Wi-Fi сеть.

Рассмотрим более подробно компоненты архитектуры:

- Контроллер потока отвечает за доставку потоков данных к мобильным агентам. Контроллер является новым компонентом в архитектуре с межсетевым потоком и способствует организации мобильности потока. Он контролирует подвижность потока и располагает данными обо всех подключённых мобильных агентах и о том, которые из них являются активными. На основании информации полученной от мобильного агента, контроллер устанавливает правила функционирования потока и передает инструкцию мобильному агенту. Когда мобильный терминал перемещается из одной сети в другую, контроллер поручает создание туннеля, через который подключения передаются на мобильный терминал без каких-либо нарушений.
- Мобильный агент является маршрутизатором, который обеспечивает Интернет-услуги для мобильного терминала и отвечает за обнаружение движения терминала сетями LTE и Wi-Fi. Всякий раз, когда терминал приходит в другую сеть, агент присваивает новый IP-адрес терминалу и

информирует контроллер о новом IP-адресе. Агент получает информацию о потоке от контроллера и пересылает пакеты данных на основе полученной информации.

- Мобильный терминал посылает запросы для доступа к сервисам. Предложенная архитектура поддерживает мобильность потока, следовательно, мобильный терминал имеет возможность получать пакеты, предназначенные для нескольких IP-адресов.

Для связи между контроллером и мобильным агентом используются сообщения, соответствующие протоколу OpenFlow (Рис. ).

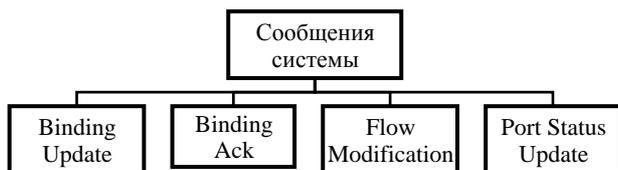


Рис. 2. Виды сообщений, используемые для связи контроллера и мобильного агента

- *Сообщение Binding Update.* Отвечает за процедуру обновления соединения. Мобильный агент отправляет сообщение контроллеру, когда принимает запрос на соединение от абонентского оборудования. Получив сообщение обновления соединения, контроллер посылает сообщение Binding Ack.
- *Сообщение Binding Ack.* При получении сообщения Binding Update контроллер потоков посылает подтверждающее сообщение Binding Ack мобильному терминалу для подтверждения приема сообщения Binding Update. Если контроллер уже имеет такую запись в кэше, он передает информацию об IP-адресе мобильного терминала старому и новому агенту.
- *Сообщение Flow Modification.* Сообщение модификации потока направляется от контроллера к мобильному агенту, чтобы сообщить ему обо всех решениях, связанных с мобильностью потока. При получении сообщения модификации потока мобильный агент обновляет таблицу потоков.
- *Сообщение Port Status Update.* Обновления статуса порта отправляется с мобильного агента контроллеру, чтобы проинформировать его о любых изменениях в статусе порта абонентского оборудования. Получив сообщение обновления статуса порта, контроллер обновляет статус порта в соответствии с полученным сообщением.

На рис. 3 представлена диаграмма последовательности обмена сообщениями между сетями LTE и Wi-Fi. Шаги подробно описаны ниже [6].

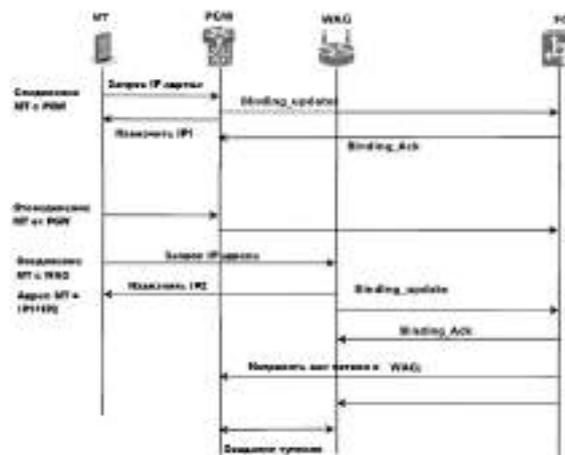


Рис. 3. Функционирование архитектуры с мобильным потоком в LTE и Wi-Fi сетях

- 1) Мобильный терминал подключается к сети LTE. PGW получает запрос на соединение, назначает IP абоненту и посылает сообщение Binding Update к контроллеру. Контроллер отвечает, отправляя подтверждающее сообщение Binding Ack.
- 2) Через некоторое время мобильный терминал отсоединяется от LTE сети. Пакетный шлюз, для обнаружения движения абонента, передает Port Status Update к контроллеру. Контроллер меняет запись в таблице маршрутизации как неактивный.
- 3) Когда абонентское оборудование попадает в зону действия сети Wi-Fi, шлюз беспроводного доступа получает запрос на соединение от мобильного терминала. Шлюз назначает новый IP абоненту и посылает обновление привязки контроллеру. Оба IP-адреса настроены на логический интерфейс.
- 4) Поскольку в контроллере уже есть запись о соответствующем абонентском оборудовании, он делает новый запрос шлюзу и посылает Binding Ack. Контроллер посылает сообщение модификации потока к пакетному шлюзу и шлюзу беспроводного доступа на основе собственного решения.
- 5) В случае полной передачи обслуживания контроллер поручает пакетному шлюзу переместить все существующие потоки соответствующих абонентов через туннель. Он также поручает шлюзу беспроводного доступа декапсулировать пакеты, принятые по туннелю от пакетного шлюза, и направить их абонентскому оборудованию на соответствующий порт. Новое соединение с

аппаратом устанавливается на новой сети (т.е. Wi-Fi в данном случае), тем самым уменьшая затраты на туннелирование.

Предложенная архитектура позволяет значительно улучшить качество передачи данных при внедрении дополнительного блока, который позволит оптимизировать передачу лицензированными полосами частот путем разумной выгрузки трафика данных в Wi-Fi сеть.

### 3. Анализ эффективности модифицированной архитектуры

Для расчета объема данных, которые могут быть получены пользователями при построении модифицированной архитектуры, за основу взят математический метод, представленный в работе [7].

При моделировании предполагается, что среднее количество пользователей сети LTE равно 1000, далее количество пользователей будет обозначаться как  $P$ . Средняя скорость передачи данных, которая может быть достигнута мобильным терминалом, будет зависеть от количества пользователей в Modulation and Coding Scheme (MCS). Стандарт 802.11n определяет понятие "Индекс модуляции и схемы кодирования". MCS - это просто целое число, присваивается варианту модуляции. Каждый вариант определяет тип модуляции радиочастоты, скорость кодирования, защитный интервал и скорость передачи данных. Сочетание всех этих факторов определяет реальную физическую скорость передачи данных.

Если есть  $A$  схемы MCS,  $i_n$  - количество пользователей в данной схеме с максимальной скоростью передачи данных  $DR_{MCS\_n}$ , средняя мощность сети LTE для каждого пользователя, при условии справедливого распределения, рассчитывается как:

$$C_{AVE\_P} = \frac{1}{\sum_{n=1}^A \frac{i_n}{DR_{MCS\_n}}}$$

Допускается, что все пользователи получают одинаковое значение ширины полосы пропускания. Начальная пропускная способность системы LTE к выгрузке  $C_{LTE}$  рассчитывается, используя формулу:

$$C_{LTE} = C_{AVE\_P} \times P$$

Поскольку трафик разгружается в сеть Wi-Fi, увеличивается скорость передачи данных в сети LTE и перераспределяется между оставшимися

пользователями сети LTE. Средний объем данных, который получают LTE пользователи, вычисляется с помощью уравнений (1) и (2), как разница между начальным количеством пользователей и количеством пользователей, которые перешли в сеть Wi-Fi:

$$C_{AVE\_ (P-OF)} = (P - OF),$$

где  $OF$  - количество пользователей, которые были переведены в сети Wi-Fi.

Увеличение пропускной способности сети LTE, после введения дополнительных точек доступа Wi-Fi, рассчитывается как:

$$C_{LTE} = C'_{AVE\_ (P-OF)} \times (P - OF)$$

Прирост пропускной способности сети LTE, полученный за счет разгрузки:

$$C_{offloaded} = C'_{LTE} - C_{LTE}$$

Средний прирост пропускной способности каждого пользователя сети LTE для каждой отдельной точки доступа оценивается с помощью формулы:

$$C_{AVE\_PERWIFI} = \frac{1}{\sum_n^B \frac{i_n}{DR_{MCS\_n}}}$$

$C_{AVE\_PERWIFI}$  - средний объем данных при использовании сети Wi-Fi,  $B$  - это максимальное число MCS для 802.11

Средний прирост пропускной способности каждого пользователя сети LTE в расчете на всю сеть Wi-Fi рассчитывается как:

$$C_{AVE\_allWIFI} = \left( \frac{\sum_{n=1}^{n=m} C_{AVE\_PERWIFI} \times OF_n}{m} \right) / Q$$

$OF_n$  - количество разгруженных пользователей для каждой Wi-Fi точки;

$m$  - общее количество точек доступа Wi-Fi, которые используются;

$Q$  - общее количество пользователей, выгруженных с сети LTE всеми точками доступа Wi-Fi.

На Рис. показан процент пользователей, выгруженных в сеть Wi-Fi, а также прирост объема данных, который может быть получен в сети LTE в расчете на каждого пользователя. Данный прирост был получен в результате разгрузки части пользователей в сети Wi-Fi.

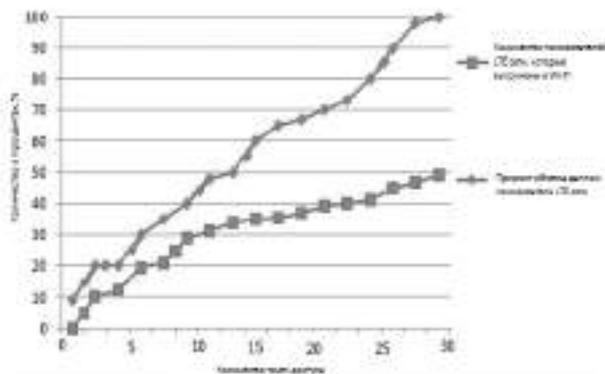


Рис. 4. Прирост объема данных пользователей сети LTE при использовании Wi-Fi Offload с модифицированной архитектурой

Проанализировав полученный график, можно сделать вывод, что модифицированная архитектура способствует эффективной разгрузке сети LTE за счет перенаправления трафика в сеть Wi-Fi.

Главным недостатком рассмотренных архитектур было то, что при попадании мобильного терминала в зону действия Wi-Fi начиналась выгрузка всего трафика пользователя без учета того факта, что не весь трафик является толерантным к задержке. Отличием предложенной архитектуры является то, что дополнительной блоком контроллер потока решает, какой именно поток данных не требует срочной выгрузки, т.е. является нечувствительным к задержке, и направляет его к беспроводной сети Wi-Fi. Трафик, который не предусматривает задержку при загрузке, остается в сети LTE.

Повышение качества услуг достигается за счет того, что «тяжелый» трафик загружается с помощью Wi-Fi, не перегружая при этом мобильную сеть. Сеть LTE, в свою очередь, сможет обслуживать большее количество клиентов, а также увеличивать скорость передачи данных для клиентов, которые были перенаправлены к сети Wi-Fi. Объем данных, который получает отдельный пользователь сети Wi-Fi по отношению к времени, в значительной степени зависит от общего количества пользователей, которые перенаправляются в сети Wi-Fi. Чем больше пользователей, тем ниже средняя мощность для каждого из них в этом узле.

#### 4. Выводы

Главным недостатком рассмотренных ранее архитектур является то, что при выгрузке не учитывалась чувствительность трафика к задержкам. Предложена модифицированная архитектура Wi-Fi Offload за счет внедрения дополнительного модуля, который анализирует чувствительность мобильного трафика, что позволяет повысить эффективность разгрузки сети LTE с помощью перенаправления нечувствительного к задержке трафика в сеть Wi-Fi.

Преимуществом предложенной архитектуры является бесшовный межсетевой переход, который не требует дополнительных действий со стороны пользователя услуг мобильного оператора.

Дальнейшие исследования будут направлены на усовершенствование алгоритма анализа чувствительности потока данных.

#### Литература:

1. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast 2013-2018 [Online]. Available at: [http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/white\\_paper\\_c11-520862.html](http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/white_paper_c11-520862.html).
2. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016–2021 White Paper// Cisco materials [Online]. Available at: <https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.html>.
3. *Dimatteo S.* Cellular traffic Offloading Through Wi-Fi Networks / S. Dimatteo, P. Hui, B. Han, and V. O. K. Li // IEEE 8th International Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems (MASS). 2011. P. 192- 201.
4. *Andersson K.* Optimized Access Network Selection in a Combined WLAN/LTE Environment / K. Andersson, and C. Åhlund // Wireless Personal Communications. 2011. vol. 61, No. 4. P. 739–75.
5. PMIPv6: A Network-Based Localized Mobility Management Solution - The Internet Protocol Journal, Volume 13, No.3 [Online]. Available at: <https://www.cisco.com/c/en/us/about/press/internet-protocol-journal/back-issues/table-contents-49/133-pmipv6.html>.
6. *Nadeau T.* SDN: Software Defined Networks An Authoritative Review of Network Programmability Technologies / T. Nadeau, K. Gray // O'Reilly Media. 2013. P. 384.
7. *Thiagarajah S.* User data rate enhancement using heterogeneous LTE-802.11n offloading in urban area / S. Thiagarajah, Alvin Ting, David Chieng // IEEE Symposium on Wireless Technology & Applications. 2013. P. 11 – 16.

### Transliterated bibliography:

1. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast 2013-2018 [Online]. Available at: [http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/white\\_paper\\_c11-520862.html](http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/white_paper_c11-520862.html).
2. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016–2021 White Paper// Cisco materials [Online]. Available at: <https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.html>.
3. *Dimatteo S.* Cellular traffic Offloading Through Wi-Fi Networks / S. Dimatteo, P. Hui, B. Han, and V. O. K. Li // IEEE 8th International Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems (MASS). 2011. P. 192- 201.
4. *Andersson K.* Optimized Access Network Selection in a Combined WLAN/LTE Environment / K. Andersson, and C. Åhlund // Wireless Personal Communications. 2011. vol. 61, No. 4. P. 739–75.
5. PMIPv6: A Network-Based Localized Mobility Management Solution - The Internet Protocol Journal, Volume 13, No.3 [Online]. Available at: <https://www.cisco.com/c/en/us/about/press/internet-protocol-journal/back-issues/table-contents-49/133-pmipv6.html>.
6. *Nadeau T.* SDN: Software Defined Networks An Authoritative Review of Network Programmability Technologies / T. Nadeau, K. Gray // O'Reilly Media. 2013. P. 384.
7. *Thiagarajah S.* User data rate enhancement using heterogeneous LTE-802.11n offloading in urban area / S. Thiagarajah, Alvin Ting, David Chieng // IEEE Symposium on Wireless Technology & Applications. 2013. P. 11 – 16.

Поступила в редколлегию 14.03.2018

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Безрук В.М.

**Пишко Анастасия Олеговна**, студентка Национального технического университета «Киевский политехнический институт им. И.Сикорского». Научные интересы: мобильные сети. Адрес: Украина, 010336, Киев, пер. Индустриальный, 2, тел. 0500702674.

**Курдеча Василий Васильевич**, ассистент кафедры информационно-телекоммуникационных систем Национального технического университета «Киевский политехнический институт им. И.Сикорского». Научные интересы: Software Defined Radio, распределенные БД. Адрес: Украина, 01033, Киев, пер. Индустриальный, 2, моб. тел. +38(050)3848621.

**Pyshko Anastasiia Olegivna**, student at National technical university of Ukraine "Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute". Scientific interests: mobile networks. Address: Ukraine, Kyiv, pr. Industrialnyy, 2, mob. +38(050)0702674.

**Kurdecha Vasily Vasilievich**, assistant, department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine " I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" Scientific interests: Software Defined Radio, distributed databases. Address: Ukraine, 01033, Kyiv, pr. Industrualny, 2, mob +38(050)3848621.

## КОНЦЕПЦІЇ ПОБУДОВИ СУЧАСНИХ МЕРЕЖ

ГЛОБА Л.С., СКУЛИШ М.А., ТИМЧЕНКО І.О.

Описуються технології SDN, SDR, NFV, Big Data, IoT та їх реалізація за допомогою хмарних сервісів, що є невід'ємною частиною мереж 5G. Детально розглядається концепція SDN. Визначаються недоліки хмарних мереж радіодоступу та можливі шляхи їх подолання. Пропонується сегментація мережі C-RAN з резервуванням елемента управління та поділ керуючого віртуального контролера на дві площини.

**Ключові слова:** гетерогенна мережа, макросоти, мікросоти, енергоефективність гетерогенної мережі.

**Key words:** heterogeneous network, macrocells, microcells, energy efficiency of a heterogeneous network.

### Вступ

На сьогоднішній день можна виділити такі основні технології, що формують сучасні мережі: концепція програмно-визначених мереж – Software-Defined Networks (SDN), технологія програмованого радіо – Software-Defined Radio (SDR), віртуалізація мережевих функцій – Network Functions Virtualization (NFV), великі дані – Big Data, Інтернет речей – the Internet of Things (IoT) та так звані хмарні сервіси.

Системи нового покоління мобільного зв'язку 5G будуть базуватися на концепції, орієнтованій на користувача замість орієнтації на оператора, як в 3G або на сервіс-центри, як в 4G. Це означає, що декілька вхідних потоків з різних технологій будуть об'єднані на мобільних етапах [1]. І тут дуже вагому роль грають програмно-керовані мережі.

Технологія SDN забезпечує більш ефективний розподіл радіоресурсів завдяки централізації, безперервній мобільності через різноманітні технології за допомогою спільної контрольної площини. Також мобільні мережі нового стандарту не обходяться без великих центрів обробки даних. Концепція SDN дозволяє скоротити витрати на супровід мережі за рахунок тієї ж централізації управління на програмному контролері, підвищуючи частку використовуваних ресурсів мережі завдяки динамічному управлінню [2].

Віртуалізація – це перетворення функцій на програмне забезпечення. SDN та NFV дозволяють спростити конфігурацію мереж, масштабувати мережі і сервіси за запитом користувача, автоматизувати управління мережею, збільшити потужність фізичної інфраструктури шляхом накладки віртуальної, знизити CAPEX і OPEX, а в

перспективі – швидко реконфігурувати бізнес під поточні завдання [3].

Big Data мають дуже великі об'єми, а їх структура є досить складною, через це їх неможливо легко обробляти (зафіксувати, аналізувати, візуалізувати, зберігати або ділитися) за допомогою традиційних систем керування даними. Останнім часом експерти галузі почали складати схеми перспектив використання великих технологій передачі даних з SDN. У сукупності з правильними додатками SDN може надати користувачам прості, масштабовані, повноцінні мережеві рамки, які ефективно містять і обробляють великі дані [4].

Завдяки IoT будь-який пристрій, що має доступ до мережі Інтернет, здатен віддалено збирати та обмінюватися інформацією в режимі реального часу, а також надавати інтелектуальні послуги за наявності адекватної мережевої інфраструктури. Значну корисність для застосування IoT має технологія програмно-визначених мереж [5]. SDN забезпечує гнучкість та програмність у мережі IoT, не заважаючи основній архітектурі існуючих реалізацій.

В епоху нового покоління зв'язку 5G бездротова мережа повинна задовольняти потреби користувачів у надвисоких швидкостях передачі даних. Має сенс інтеграція технологій NFV з SDR та SDN, яка є необхідною для інтелектуальних гетерогенних мереж (HetNets) [6]. Великі міжнародні організації по стандартизації електронного зв'язку, включаючи WINNF, ONF, ETSI, ITU-T, IEEE, також ведуть активну діяльність по створенню технічної основи та публікації докладних специфікацій для цих трьох технологій, що свідчить про їх значущість та перспективність.

У майбутньому кожна з усіх вище згаданих технологій і концепцій буде невід'ємним компонентом будь-якої мережі (рис. 1).



Рис. 1. Узагальнена архітектура мережі нового покоління

### 1. Програмно-керовані мережі

Мережа, яка визначається програмним забезпеченням, так звана Software-defined network (SDN), позиціонується як нова інтелектуальна архітектура для існуючих мереж. Вона зменшує

апаратні обмеження, за рахунок розподілу транспортного рівня та рівня управління, на якому керування відбувається завдяки логічному програмному компоненту – контролеру (рис. 2).



Рис. 2. Архітектура SDN

Контролер виконує моніторинг мережевих пакетів, визначає політику або вирішує помилки згідно з результатами моніторингу. Взаємодію між площиною керування та мережевими пристроями забезпечує стандарт OpenFlow.

Ця схема дозволяє розподіляти ресурси за запитом, надавати послуги самообслуговування, забезпечувати повністю віртуалізовані мережі та захищати хмарні сервіси. Таким чином, статична мережа перетворюється на справді гнучку платформу для надання послуг, яка може швидко реагувати на зміни в мережі, такі як: динамічний зріст вимог та потреб кінцевих користувачів та ринку. Крім того, самим пристроям більше не потрібно розуміти і обробляти тисячі протокольних стандартів, вони лише повинні бути спроможними розуміти вказівки з контролерів SDN [7].

Кінцевою метою SDN є створення мережі, що реалізована та функціонує повністю автоматично. Адміністратори можуть більш легко керувати мережею через плату контролера, диктуючи необхідну політику маршрутизаторам і комутаторам, тоді як вони повністю контролюють роботу мережі. Ідеї програмованої мережевої інфраструктури у поєднанні з іншими провідними технологіями виводять на новий рівень побудову сучасних мереж.

Програмно-керовані мережі забезпечують побудову інфраструктурних «хмарних сервісів». Ефективне автоматичне управління необхідне, коли за запитом споживачів послуг виникає потреба автоматично і якнайшвидше створювати віртуальні вузли і виділяти віртуальні мережні ресурси для них.

В контексті хмарних рішень виділяють три основні моделі надання послуг: Infrastructure-as-a-Service (IaaS), Platform-as-a-Service (PaaS),

Software-as-a-Service (SaaS). На рис. 3 зображено розподіл рівнів відповідальності між користувачем та провайдером послуг для кожної з вказаних вище моделей. Надання таких послуг є вигідним для провайдера цих послуг, адже використовується принцип Revenue Sharing: є клієнт – є прибуток, немає клієнта – немає витрат.

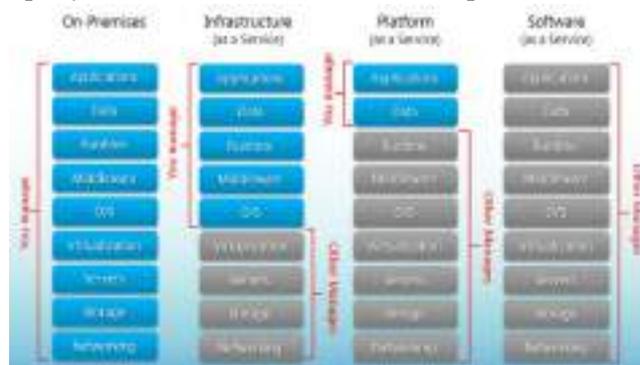


Рис. 3. Моделі обслуговування SDN

До головних переваг SDN можна віднести:

1. Централізоване управління мультивендорним середовищем.
2. Спрощення обслуговування і модернізації мереж.
3. Скорочення часу на оновлення програмних кодів комутаторів/маршрутизаторів і впровадження нових сервісів.

Мережі, керовані програмним забезпеченням, представляють неабияку цінність для бізнесу, а саме: спрощують конфігурацію та експлуатацію мережі, користувач отримує вендорнезалежний контроль над всією мережею з єдиного місця, скорочуються терміни впровадження нових додатків і сервісів.

Перший комерційний стартап-проект із побудови програмно-конфігурованої мережі реалізувала компанія Nicira [8]. Її клієнтами стали NTT docomo, AT&T, eBay, Rackspace. Пізніше американська компанія VMware купила Nicira за рекордні для галузі \$ 1,26 млрд.

В 2011 році було створено Open Networking Foundation – некомерційну організацію, основним завданням якої була популяризація нового підходу до управління комп'ютерними мережами – SDN. Ініціаторами виступили 6 компаній – власники найбільших у світі мереж – Deutsche Telekom, Facebook, Google, Microsoft, Verizon, і Yahoo. Дуже швидко до консорціуму приєдналися всі основні виробники мережевих рішень, включаючи Cisco, Brocade, NEC, HP [9].

Перша велика мережа SDN була реалізована в 2012 році компанією Google на базі комутаторів власної розробки. Керування перенаправленнями

потоків трафіка між ЦОДами здійснювалось в режимі реального часу з урахуванням економічної вигоди в конкретний поточний момент. Технологію SDN також використовують фірми Pertino, Telecom Italia і ряд інших компаній.

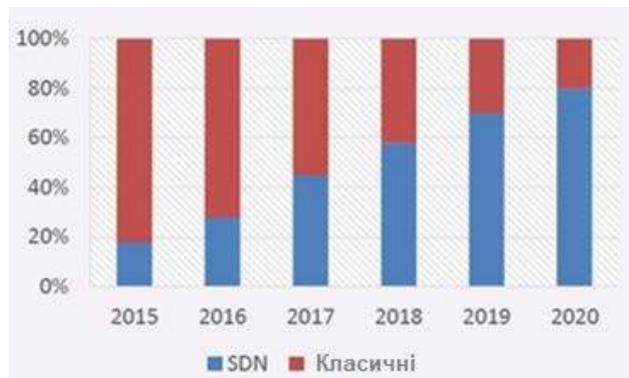


Рис. 4. Динаміка росту співвідношення SDN/класичні мережі

На зорі зародження самої технології їй пророчили масове впровадження до 2016 року, та хоча цього не сталося, прогнози щодо розвитку залишилися такими ж перспективними, але тепер кажуть про 2020-2022 роки. Обсяг ринку зазначених мереж у 2012 році становив близько \$200 млн, тоді ж говорили й про його зростання до \$2,1 млрд не пізніше як до 2017 року, а вже у 2015 році мали місце інші прогнози: за даними Infonetics Research, у 2018 році обсяг SDN має становити \$11 млрд, а в 2019 позначка сягне \$13 млрд в порівнянні з \$781 млн в 2014 році. На рис. 4 відображено частку SDN серед класичних мереж.

Деякі фахівці також притримувалися думки, що протокол OpenFlow відживе своє, проте протокол не помер і поки є найбільш готовим до використання в реальних мережах і є навіть список вендорів, у яких можна купити обладнання з підтримкою OpenFlow версії 1.3.4. Але плюсом до нього з'явилися ще кілька: Protocol Oblivious Forwarding (POF) від Huawei та P4 (Programming Protocol-independent Packet Processors) від Open Networking Research Center (Стенфорд) [10].

По суті OpenFlow – це поки єдина реалізація SDN, яка обіцяє чесну незалежність від виробника. Всі великі вендори пропонують свої рішення SDN і в тій чи іншій мірі розширили можливість керування пристроями в мережі, але рішення різних вендорів між собою поки що практично не сумісні. Всі великі оператори зв'язку придивляються до технології, підбирають команди, які зможуть працювати з новими технологіями, пла-

нують перебудову бізнес-процесів. Можливо в найближчі 2-3 роки можна буде вже говорити про початок стадії впровадження.

## 2. Технологія хмарної мережі радіодоступу

За принципом SDN розвиваються також мережі радіодоступу. Концепція хмарної радіомережі (C-RAN) передбачає відокремлення радіопідсистеми (Remote Radio Heads, RRHs) і антени від модулів управління базової станції (Baseband Units, BBUs), які розташовуються в так званому base station hotel (BSH) і з'єднуються через оптоволоконний кабель з блоками RRHs [11]. Таким чином, оператори можуть будувати хмарні мережі радіодоступу за принципом NFV, розміщуючи в хмарі основний функціонал базової станції, що відповідає за цифрову обробку сигналу, синхронізацію, управління, збір статистики. Загальна схема віртуалізованої мережі радіодоступу представлена на рис. 5.

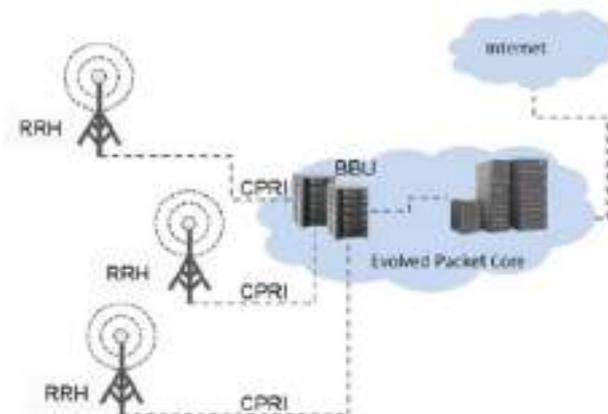


Рис. 5. Архітектура Cloud RAN

Проте існує ряд недоліків таких систем. Перший важливий недолік пов'язаний з централізацією, тобто вразливість центральної базової станції BBU до хакерських атак та фізичних несправностей. Це означає, що для забезпечення безперебійної роботи є необхідним резервування центрального блоку керування додатковим обладнанням, при цьому «резервний комплект» буде простоювати весь час, поки не відбудеться збій.

Для вирішення цієї проблеми пропонується поділити мережу на кілька сегментів, кожний з яких буде мати свій елемент управління, а RRHs будуть пов'язані з двома BSH, які у разі аварійного стану основної віртуальної базової станції здатні замінити одна одну. Така схема також дає змогу уникнути роботи резервного обладнання «вхолосту».

Наступним недоліком є помилка в програмуванні центрального елемента управління, адже це може призвести до серйозних проблем на всій ме-

режі. Некоректно розподілені мережеві ресурси впливають на продуктивність роботи BBU, що у свою чергу впливає на правильність обробки сигналів тощо. Зарадити в такій ситуації може лише перевірене програмне забезпечення та його тестування перед застосуванням на реальній робочій мережі.

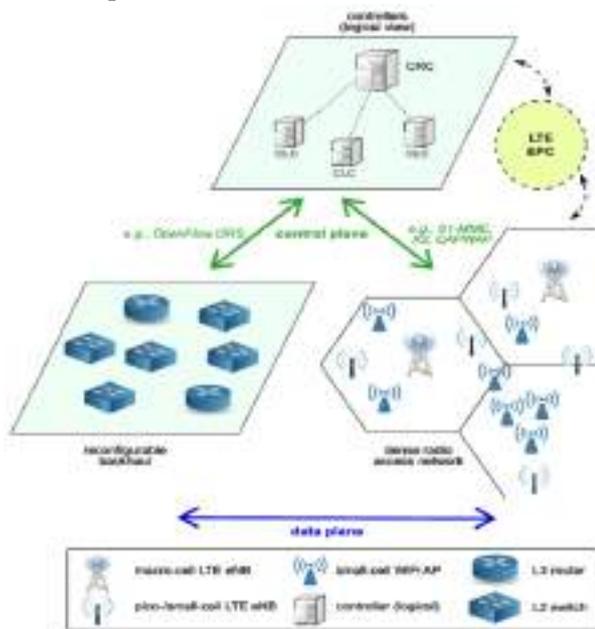


Рис.6. Архітектура мережевого управління

Пропонується інший варіант подолання цього недоліку – архітектура мережі міститиме дві контрольні площини, подібно до мережі LTE, що застосовує архітектуру CROWD (рис. 6) [12]. Контролер буде мати головний елемент управління (ГЕУ) та декілька локальних елементів управління (ЛЕУ), що резервуватимуть один одного, причому обидва є логічними елементами, розвернутими у хмарі, проте на різних фізичних серверах. Головною задачею ЛЕУ є короткострокова локальна оптимізація, а ГЕУ виконує глобальну оптимізацію на основі довгострокового моніторингу та статистики і координує роботу підпорядкованих ЛЕУ.

Така архітектура на основі Cloud RAN дозволяє вільно запускати безліч додатків управління, які можуть точно налаштувати роботу мережі з різними критеріями оптимізації, наприклад, пропускнуною спроможністю, енергоефективністю.

Існують також нетехнологічні проблеми, такі як висококоштовна кардинальна перебудова існуючих мереж, перекваліфікація кадрів, обмежена кількість мережевого обладнання, що націлене на конкретне використання OpenFlow та необхідного ПЗ. З часом ці недоліки можуть зійти нані-

вець, проте зараз масштабне розгортання подібної мережі доступне лише великим компаніям. Особливістю SDN є відділення функцій передачі трафіка від функцій управління, включаючи контроль як самого трафіка, так і пристроїв, що здійснюють його передачу. Згідно з цією концепцією, вся логіка управління виноситься в контролери, які здатні відслідковувати роботу всієї мережі. Роз'єднання мережевого контролю і ліній передачі даних забезпечує спрощене мережеве управління та полегшує введення нових послуг або змін у мережу.

## Висновки

У сукупності з іншими концепціями, такими як NFV, SDR, Big Data, IoT, Cloud computing, програмно-керовані мережі є основою для побудови сучасних мереж, здатних задовольнити потреби звичайних і бізнес-користувачів. Прогнози щодо масового впровадження SDN залишаються оптимістичним, тільки пролонгованими у часі.

Проаналізовано тенденції розвитку систем керування мережами зв'язку. Досліджено недоліки Cloud RAN-мереж: зупинка роботи мережі при виході з ладу центрального елемента управління, можливість помилки у ПЗ, затримка при отриманні інформації контролером про вихід з ладу або завантаженість каналу. Визначені методи боротьби з наведеними вище недоліками, запропоновані поділ мережі на сегменти і резервування BSH, а також застосування двох площин управління: головну і локальну.

## Література:

1. Zolanvari M. SDN for 5G / Maede Zolanvari // Rotation October 2015. <https://www.cse.wustl.edu/~jain/cse570-15/ftp/sdnfor5g.pdf>
2. Лунтовський А.О. Застосування технологій SDN для програмної реалізації провайдерського ядра систем мобільного зв'язку 5G майбутнього покоління / А. О. Лунтовський, А. І. Семенко // Зв'язок, 2014. № 3. С. 13-19.
3. Sarigiannidis P. Hybrid 5G optical-wireless SDN-based networks, challenges and open issues / Panagiotis Sarigiannidis, Thomas Lagkas, Stamatia Bibi // IET Networks – Volume: 6, Issue: 6, p. 141-148 – DOI: 10.1049/iet-net.2017.0069. 2017.
4. Mohammed A. Alqarni Benefits of SDN for Big data applications / Mohammed A. Alqarni // 14th International Conference on Smart Cities: Improving Quality of Life Using ICT & IoT (HONET-ICT), IEEE – Electronic ISSN: 1949-4106 – DOI: 10.1109/HONET.2017.8102206. 2017.
5. Bera S. Software-Defined Networking for Internet of Things: A Survey / Samareh Bera, Sudip Misra, Athanasios V. Vasilakos // IEEE Internet of Things Journal, Volume: 4, Issue: 6, Dec. 2017.
6. Sun S. Integrating Network Function Virtualization with SDR and SDN for 4G/5G Networks / Songlin Sun, Michel Kadoch, Liang Gong, Bo Rong // IEEE Network 29(3): p.54-59 - DOI:10.1109/MNET.2015.7113226. 2015.

7. *Hakiri A.* Leveraging SDN for The 5G Networks: Trends, Prospects and Challenges / Akram Hakiri, Pascal Berthou // arXiv:1506.02876. 2015.

8. *Mendiola A.* A Survey on the Contributions of Software-Defined Networking to Traffic Engineering / Alaitz Mendiola, Jasone Astorga, Eduardo Jacob // DOI: 10.1109/COMST.2016.2633579 - IEEE Communications Surveys & Tutorials -Volume: 19, Issue: 2. P. 918-953. 2017.

9. About ONF Mission / Official website of the Open Networking Foundation. <https://www.opennetworking.org/mission/>

10. *Shengru Li.* Protocol Oblivious Forwarding (POF): Software-Defined Networking with Enhanced Programmability / Shengru Li, Daoyun Hu, Wenjian Fang // DOI: 10.1109/MNET.2017.1600030NM - IEEE Network - Volume: 31, Issue: 2, March/April 2017. P. 58-66.

11. *Скулиш М. А.* Метод контролю якості обробки інформаційних потоків у мережі 5G / М. А. Скулиш, А. А. Заставенко // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Радіоелектроніка та телекомунікації, 2016, № 849, с. 265-273.

12. *Mancuso V.* A prototyping methodology for SDN-controlled LTE using SDR / Vincenzo Mancuso, Christian Vitale, Rohit Gupta, Karamvir Rathi, Arianna Morelli - January 2017 - [https://www.researchgate.net/publication/312661126\\_A\\_prototyping\\_methodology\\_for\\_SDN-controlled\\_LTE\\_using\\_SDR](https://www.researchgate.net/publication/312661126_A_prototyping_methodology_for_SDN-controlled_LTE_using_SDR)

**Transliterated bibliography:**

1. *Zolanvari M.* SDN for 5G / Maede Zolanvari // Rotation. 2015. <https://www.cse.wustl.edu/~jain/cse570-15/ftp/sdnfor5g.pdf>

2. *Luntovskiy A.O.* Zastosuvannya tehnologii SDN dlya programnoi realizatsii provayderskogo yadra system mobilnogo zvyazku 5G maybutnogo pokolinnya / A. O. Luntovskiy, A. I. Semenko // Zvyazok, 2014, № 3, С. 13-19.

3. *Sarigiannidis P.* Hybrid 5G optical-wireless SDN-based networks, challenges and open issues / Panagiotis Sarigiannidis, Thomas Lagkas, Stamatia Bibi // IET Networks – Volume: 6, Issue: 6, p. 141-148 – DOI: 10.1049/iet-net.2017.0069. 2017.

4. *Mohammed A. Alqarni* Benefits of SDN for Big data applications / Mohammed A. Alqarni // 14th International Conference on Smart Cities: Improving Quality of Life Using ICT & IoT (HONET-ICT), IEEE – Electronic ISSN: 1949-4106 – DOI: 10.1109/HONET.2017.8102206. 2017.

5. *Bera S.* Software-Defined Networking for Internet of Things: A Survey / Samaresh Bera, Sudip Misra, Athanasios V. Vasilakos // IEEE Internet of Things Journal, Volume: 4, Issue: 6, Dec. 2017.

6. *Sun S.* Integrating Network Function Virtualization with SDR and SDN for 4G/5G Networks / Songlin Sun, Michel Kadoch, Liang Gong, Bo Rong // IEEE Network 29(3): p.54-59 - DOI:10.1109/MNET.2015.7113226. 2015.

7. *Hakiri A.* Leveraging SDN for The 5G Networks: Trends, Prospects and Challenges / Akram Hakiri, Pascal Berthou // arXiv:1506.02876 . 2015.

8. *Mendiola A.* A Survey on the Contributions of Software-Defined Networking to Traffic Engineering / Alaitz Mendiola, Jasone Astorga, Eduardo Jacob // DOI: 10.1109/COMST.2016.2633579 - IEEE Communications Surveys & Tutorials -Volume: 19, Issue: 2. P. 918-953 Second-quarter 2017.

9. About ONF Mission / Official website of the Open Networking Foundation. <https://www.opennetworking.org/mission/>

10. *Shengru Li.* Protocol Oblivious Forwarding (POF): Software-Defined Networking with Enhanced Programmability / Shengru Li, Daoyun Hu, Wenjian Fang //

DOI: 10.1109/MNET.2017.1600030NM - IEEE Network - Volume: 31, Issue: 2, March/April 2017. P. 58-66.

11. *Skulish M. A.* Metod kontrolyu yakosti obrobky Informatsiynih potokiv u merezhi 5G / M. A. Skulish, A. A. Zastavenko // Visnyk Natsionalnogo universytetu "Lvivska politehnika". Radioelektronika ta telekomunikatsii, 2016, № 849. С. 265-273.

12. *Mancuso V.* A prototyping methodology for SDN-controlled LTE using SDR / Vincenzo Mancuso, Christian Vitale, Rohit Gupta, Karamvir Rathi, Arianna Morelli - January 2017 - [https://www.researchgate.net/publication/312661126\\_A\\_prototyping\\_methodology\\_for\\_SDN-controlled\\_LTE\\_using\\_SDR](https://www.researchgate.net/publication/312661126_A_prototyping_methodology_for_SDN-controlled_LTE_using_SDR).

Поступила в редколлегію 15.01.2018

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Безрук В.М.

**Глоба Лариса Сергіївна**, д-р техн. наук, проф., кафедри інформаційно-телекомунікаційних мереж Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Наукові інтереси: інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень, розподілені системи і технології. Адреса: Україна, 01033, Київ, пров. Індустріальний, 2, моб. тел. +38(050)5261512.

**Скулиш Марія Анатоліївна**, канд. техн. наук, доцент кафедри інформаційно-телекомунікаційних мереж Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Наукові інтереси: безпека в телекомунікаційних системах, системи тарифікації в телекомунікаційних компаніях, застосування відомих математичних методів в телекомунікаціях, дослідження параметрів якості обслуговування в мобільних мережах 5-го покоління. Адреса: Україна, 03058, Київ, пр. Індустріальний, 2, тел. +38-050-607-42-29.

**Тимченко Ірина Олегівна**, студентка кафедри інформаційно-телекомунікаційних мереж Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут ім.І.Сікорського». Адреса: Україна, 01033, Київ, провул. Індустріальний, 2, моб. тел. +38(096)1267107.

**Globa Larisa Sergeevna**, professor, doctor of technical sciences, department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky". Scientific interests: intellectual decision support systems, distributed systems and technologies. Address: Ukraine, 01033, Kyiv, pr. Industrialny, 2, mob. +38(050)5261512.

**Skulish Maria Anatolievna**, PhD, associate professor, Department of Information and Telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky". Scientific interests: security in telecommunication systems, charging systems in telecommunication companies, application of known mathematical methods in telecommunications, research of service quality parameters in mobile networks of the 5th generation. Address: 2, Industrial Avenue, Kyiv, 03058, Ukraine, tel. + 38-050-607-42-29.

**Timchenko Iryna Olehivna**, student, department of information and telecommunication networks, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky". Address: Ukraine, 01033, Kyiv. Industrial, 2, mob. tel. +38 (096) 1267107.

# СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.85

## ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

ПИЧУГИНА О.С.

Решается проблема построения математической модели задач комбинаторной оптимизации в терминах непрерывных переменных для общих множеств евклидовых конфигураций перестановок и размещений векторов и их отдельных подклассов. Инструментом математического моделирования выбирается метод непрерывных функциональных представлений образов евклидовых комбинаторных множеств, представляющих собой множества комбинаторных конфигураций, в арифметическое евклидово пространство.

**Ключевые слова:** комбинаторная оптимизация, дискретная оптимизация, евклидово комбинаторное множество, евклидова комбинаторная конфигурация, непрерывное функциональное представление.

**Key words:** combinatorial optimization, discrete optimization, Euclidean combinatorial set, Euclidean combinatorial configuration, continuous functional representation.

### Введение

Задачи комбинаторной оптимизации охватывают широкий класс проблем теоретической и практической областей [1-7]. Среди них выделяются задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [8, 9], в которых объекты комбинаторной природы отображаются в арифметическое евклидово пространство. Областью их допустимых решений является конечное множество, которое, не ограничивая общности, можно считать множеством вершин своей выпуклой оболочки. Это обуславливает возможность применения теории выпуклых продолжений к их решению [10-12]. Сравнительно новое направление в теории евклидовой комбинаторной оптимизации связано с построением непрерывных функциональных представлений дискретных множеств [13-21], позволяющих предложить новые непрерывные формулировки и релаксации дискретных задач. Перспективное направление в теории непрерывных функциональных представлений связано с понятием множества евклидовых комбинаторных конфигураций [22, 23]. Данная статья развивает именно это направление и посвящена построению непрерывных функциональных представлений множеств евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и размещений.

### 1. Евклидовы комбинаторные конфигурации

К. Берж [24] ввел определение конфигурации как отображение некоторого множества  $A$  в конечное абстрактное множество  $B$  заданной структуры:

$$\chi: A \rightarrow B \quad (1)$$

при выполнении некоторого набора ограничений  $\Omega$ . Здесь  $A$  – исходное множество элементов произвольной природы, а

$$B = \{b_1, \dots, b_k\} - \quad (2)$$

абстрактное результирующее множество.

Хоть формально Берж не накладывает ограничений на мощность множества  $A$ , но фактически ограничивается рассмотрением конечных исходных множеств, т.е. конфигурациями вида (1), где

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad (3)$$

$B$  имеет вид (2). Произвольную конфигурацию можно представить в виде:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_{j_1} & \dots & b_{j_n} \end{pmatrix} = b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_n}, \quad (4)$$

при этом структурирование результирующего множества будем понимать так, что конкретной конфигурацией как результатом отображения (1) является не образ множества  $A$ , а упорядоченная последовательность, т.е. кортеж, элементов этого образа, для которой мы будем использовать запись

$$\pi = [b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}].$$

При этом, учитывая существование биекции между множеством  $A$  и множеством  $J_n = \{1, \dots, n\}$  номеров его элементов (далее нумерующего множества), от отображения (1) можно перейти к следующему отображению

$$\psi: J_n \rightarrow B, \quad (5)$$

оставляя результат отображения неизменным:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ b_{j_1} & \dots & b_{j_n} \end{pmatrix} = [b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}]. \quad (6)$$

При этом элементы нумерующего множества понимаются как позиции элементов результирующего множества в конфигурации.

В этом контексте конфигурации, называемые, как правило, комбинаторными, исследуются в работах [25-28]. При этом под структурированием множества  $B$  подразумевается его строгое упорядочивание:

$$b_j \prec b_{j+1}, j \in J_{k-1}. \quad (7)$$

Заметим, что после перехода от отображения (1) к (5) произвольную конфигурацию можно представить триадой

$$(\psi, B, \Omega). \quad (8)$$

В работах [26,29,30] было отмечено, что условие (7) может быть снято без потери сущности понятия комбинаторной конфигурации и осуществлено его обобщение на случай счетности множества  $V$ . При этом для триады (8) было предложено применять понятие «комбинаторный объект». Возвращаясь к исходному понятию (1) конфигурации в смысле Бержа, можно сказать, что если выполнено условие (2),  $\pi$  вида (4) или (6) представляет комбинаторную конфигурацию, если же  $V = \{b_1, \dots, b_k, \dots\}$ , то это комбинаторный объект.

## 2. Постановка задачи

Сформулируем задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке [26,29,30].

Пусть  $\Pi$  – конечно/локально-конечное пространство, элементами которого являются комбинаторные конфигурации/объекты вида (8) и на котором задан функционал  $\xi: \Pi \rightarrow R^1$ . Требуется найти:

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi \subseteq \Pi} \xi(\pi), \quad (9)$$

где  $\Pi' \subseteq \Pi$  – множество допустимых решений. Заметим, что в первом случае (9) представляет собой оптимизационную задачу на комбинаторных конфигурациях, во втором – на комбинаторных объектах.

Если  $\Pi$  – это множество всевозможных комбинаторных конфигураций/объектов вида (5) при заданных ограничениях  $\Omega$  на вид отображения  $\psi$ , то множество  $\Pi'$  допустимых комбинаторных конфигураций/объектов выделяется из множества  $\Pi$  всех таких конфигураций/объектов с помощью некоторой системы ограничений

$$\Omega': q_i(\pi) \leq 0, i \in J_p, \quad (10)$$

которая предполагается известной. Таким образом, задача (9) может быть представлена в виде: найти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi} \xi(\pi) \quad (11)$$

при ограничениях (10) и  $\pi \in \Pi$ .

Ограничимся классом задач вида (9) на комбинаторных конфигурациях и в которых множество (2) представляет собой совокупность векторов одинаковой размерности:

$$b_j \in R^m, j \in J_k. \quad (12)$$

В таком случае конфигурация  $\pi$  представляет собой упорядоченную последовательность векторов:

$$\pi = \left[ \left( \begin{array}{c} b_{1,j_1} \\ \dots \\ b_{m,j_1} \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} b_{1,j_n} \\ \dots \\ b_{m,j_n} \end{array} \right) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, среди задач вида (9) мы выделили класс задач комбинаторной оптимизации, в которых  $V$  представляет собой множество числовых векторов. Например, это возможно в случае, если каждый объект характеризуется конечным числом числовых характеристик, участвующих в задаче оптимизации, а сами эти характеристики принимают не более чем счетное число значений. Заметим также, что всегда можно предполагать, что число характеристик объектов одинаковое, а недостающие значения характеристик можно дополнить нулями.

## 3. Изложение основного материала

### 3.1. Эквивалентные формулировки задачи (11)

Тот факт, что результирующее множество состоит из векторов вида (12), позволяет построить две эквивалентные формулировки исходной задачи. Приведем их.

Перейдя от рассмотрения упорядоченных последовательностей векторов (13) к матрицам, составленным из них, задача (9) может быть эквивалентно переформулирована следующим образом:

$$X^* = \arg \min_{X \in D' \subseteq D} F(X), \quad (14)$$

где  $X$  – матрица порядка  $m \times n$ , составленная из координат векторов конфигураций вида (13):

$$X = \left( b_{i,j_l} \right)_{i \in J_m, l \in J_n}, \quad (15)$$

$D, D'$  - образы множеств комбинаторных конфигураций  $\Pi, \Pi'$  в множестве матриц порядка  $m \times n$ . Еще одну эквивалентную формулировку задачи (9) построим, поставив каждой конфигурации  $\pi$  во взаимно-однозначное соответствие вектор

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N, N = m \cdot n, \quad (16)$$

например, по одному из правил:

$$x_{(i-1)n+s} = b_{ij_s}, i \in J_m, s \in J_k, \quad (17)$$

$$x_{i+(s-1)m} = b_{ij_s}, i \in J_m, s \in J_k, \quad (18)$$

т.е. осуществим отображение  $\varphi$  такое, что

$$x = \varphi(\pi), \pi = \varphi^{-1}(x). \quad (19)$$

Далее число  $N$  будем называть размерностью евклидовой комбинаторной конфигурации. Она определяет размерность пространства, в которой решается задача евклидовой комбинаторной оптимизации.

Итак, вектор (16) представляет собой образ комбинаторной конфигурации в евклидовом пространстве  $R^N$  при отображении  $\varphi$ , называемый евклидовой комбинаторной конфигурацией или е-конфигурацией [22]. Учитывая (8), она представима в виде четверки:

$$(\varphi, \psi, B, \Omega). \quad (20)$$

Совокупность всех евклидовых комбинаторных конфигураций вида (19) представляет собой образ  $E$  комбинаторного множества  $\Pi$  в евклидовом пространстве  $R^N$ , для которого, учитывая (19), справедливо:

$$E = \varphi(\Pi), \Pi = \varphi^{-1}(E). \quad (21)$$

Множества, для которых существует такое отображение  $\varphi$ , названы евклидовыми комбинаторными множествами или  $e$ -множествами [31]. Их выделяют из числа других комбинаторных множеств, поскольку возможность рассмотрения вместо них множеств точек арифметического евклидова пространства открывает широкие перспективы исследования алгебро-топологических и топологометрических свойств этих образов в евклидовом пространстве и дальнейшего перенесения этих специфических свойств на исходные евклидовые комбинаторные множества. Группа методов оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах с помощью их отображения в евклидово пространство объединена в общий класс методов евклидовой комбинаторной оптимизации, а сами задачи на образах евклидовых комбинаторных множествах были названы задачами евклидовой комбинаторной оптимизации [8, 9].

Вернемся к рассмотрению задачи (9). Поскольку  $\Pi$  – евклидово комбинаторное множество, а  $E$  – его образ в  $R^N$ , задача (9) эквивалентна следующей задаче евклидовой комбинаторной оптимизации [22, 23]:

$$x^* = \arg \min_{x \in E' \subseteq E} f(x), \quad (22)$$

где  $E' = \varphi(\Pi')$  – образ множества  $\Pi'$  в  $R^N$ .

Заметим, что из всего класса задач евклидовой комбинаторной оптимизации мы выделили подкласс, в котором отображаемое множество – это множество комбинаторных конфигураций. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций, получаемые в результате их погружения в евклидово пространство и называемые также  $C$ -множествами [22], выделяются в отдельный класс, так как они являются образами не просто евклидовых комбинаторных множеств, а множеств комбинаторных конфигураций, которые, как мы видели по построению, есть евклидовыми комбинаторными. Соответственно их свойства отражают тот факт, что они получены в результате серии отображений конечного множества в арифметическое евклидово пространство. А это, в свою очередь, определяет специфику задач евклидовой комбинаторной оп-

тимизации на  $C$ -множествах и подходов к их решению, о чем будет сказано ниже.

### 3.2. Функциональные представления $C$ -множеств

Заметим, что координаты векторов (12) могут повторяться, поэтому совокупность

$$B' = \{b_{ij}\}_{i \in J_m, j \in J_k} \quad (23)$$

образует, вообще говоря, мультимножество. Из него мы выделим основу  $S(B')$  и первичную спецификацию  $[C]$ , т.е. множество различных элементов  $B'$  и вектор их кратностей:

$$C = \{e_i\}_{i \in J_K} = S(B'), e_i < e_{i+1}, i \in J_{K-1}, \quad (24)$$

$$[C] = (N_i)_{i \in J_K}, N_1 + \dots + N_K = N.$$

Теперь евклидову комбинаторную конфигурацию (16) можно представить многозначным отображением множества  $A$  в множество  $C$ :

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \xi(a_1) & \dots & \xi(a_n) \end{pmatrix} = [\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)] = \left[ \{b_{ij_1}\}_{i \in J_m}, \dots, \{b_{ij_n}\}_{i \in J_m} \right],$$

где  $\xi(a_s)$  – многозначное отображение элемента  $a_s$  в мультимножество  $\{b_{ij_s}\}_{i \in J_m}$ ,  $s \in J_n$ . При этом

результат, например, отображения (17) понимается как вектор  $x$  такой, что первые  $m$  его координат совпадают с координатами вектора  $b_{j_1}$ , следующие  $m$  – с координатами вектора  $b_{j_2}$  и т.д., а результатом отображения (18) будет вектор  $x$ , у которого первые  $n$  координат соответствуют первым координатам векторов  $b_{j_1}, \dots, b_{j_n}$ , следующие  $n$  – вторым координатам этих векторов.

Перейдем к рассмотрению задачи (22). Ее отличительной особенностью от задачи (9) является то, что она сформулирована как задача дискретного программирования, соответственно к ее решению может быть применен весь аппарат дискретной оптимизации [1-9]. Так, в различных схемах ветвления, широко применяемых в этой области, можно использовать такую особенность  $C$ -множества  $E$ , что координаты любой евклидовой комбинаторной конфигурации  $x \in E$  принимают значения исключительно из множества  $C$  вида (24), которое называется образующим множеством для  $C$ :

$$x_i \in C, i \in J_N. \quad (25)$$

Соответственно евклидовы комбинаторные конфигурации будут элементами ограниченной дискрет-

ной решетки  $C^N - \forall x \in E, x \in C^N$ , а следовательно, и все множество  $E$  будет подмножеством этой решетки:

$$E \subseteq C^N \subset R^N.$$

Еще один мощный инструмент, применяемый при решении дискретных задач, это нелинейное программирование [32,33]. В этом направлении можно условно выделить две группы методов, первая из которых связана с построением непрерывных формулировок дискретных задач, вторая – с различными непрерывными релаксациями [33-35]. Это очень перспективное направление комбинаторной оптимизации, поскольку многие задачи этого класса могут быть сформулированы на вершинно-расположенных множествах [10], соответственно, как целевая функция, так и функциональные ограничения могут считаться выпуклыми [36], следовательно, позволяют рассматривать выпуклые релаксации исходной задачи. Обе указанные группы методов связаны с поиском аналитических формулировок условия  $x \in E$  принадлежности допустимого решения дискретному множеству.

Заметим, что для осуществления трансформации задачи (9) в задачу евклидовой комбинаторной оптимизации (22) необходимо построить функцию  $f: E \rightarrow R^1$  такую, что  $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$  для всех  $x \in E$ . Иначе говоря, представить цель оптимизации в терминах координат вектора  $x$ , что само по себе является непростой задачей. То же самое относится и к формализации ограничений  $\Omega'$  в терминах евклидовых комбинаторных конфигураций. Например, в хорошо известной задаче коммивояжера для отображения множества городов  $A$ , через которые строится цикл, в арифметическое евклидово пространство достаточно взять в качестве множества  $B$  нумерующее множество и  $m=1$ . В таком случае как конфигурация (13), так и евклидовая комбинаторная конфигурация (16) будет указывать последовательность обхода городов, т.е. задавать такой цикл. Однако при выборе такого отображения  $\psi$  не удастся сформулировать целевую функцию  $f(x)$ . Если же, вместо  $J_n$ , в качестве  $B$  выбрать базис единичных  $n$ -мерных векторов, то (14) будет представлять собой известную постановку Данцига задачи коммивояжера в виде задачи булевой оптимизации, от которой легко перейти к задаче (22) на векторах  $R^{n^2}$ , иными словами осуществить переход к постановке задачи коммивояжера как задачи евклидовой комбинаторной оптимизации. В терминах евклидовых комбинаторных конфигураций это означает, что

$m=n$ , соответственно задача (22) решается на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций размерности  $n^2$ . Заметим также, что, поскольку  $m=n$ , то в данном случае (14) представляет собой задачу оптимизации на множестве комбинаторных объектов второго порядка [29]. Но, вообще говоря, задача оптимизации на комбинаторных объектах второго порядка является частным случаем задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях. При этом данное обобщение касается возможности рассмотрения матриц разных порядков.

Основной момент, который следует прояснить при переходе от задачи (9) к задаче (22), – это формулировка целевой функции и ограничений, задающих множество допустимых решений, в терминах координат евклидовых комбинаторных конфигураций. Следует выделить три группы ограничений, первые две из которых задают множество  $\Pi$ , а последняя выделяет из него подмножество  $\Pi'$ :

- **Группа 1** – ограничения  $\Omega$ , изначально формулируемые для комбинаторных конфигураций/объектов (6) в терминах отображения  $\psi$ .

- **Группа 2** – ограничения, которые накладываются на координаты вектора  $x$  при переходе от упорядоченной последовательности векторов (13) к точке  $x$ . Так, при выборе отображения в форме (18) они предусматривают, чтобы для произвольного  $s \in J_n$  подвектор  $x^s = (x_{i+(s-1)m})_{i \in J_m}$  в точности совпадал с некоторым вектором из множества (12), а в целом, чтобы количество таких совпадений не превышало кратностей, предусмотренных отображением  $\psi$ .

- **Группа 3** – это дополнительные ограничения  $\Omega'$ , которые также по условию формулируются в терминах комбинаторных конфигураций (6).

С каждой из этих групп ограничений свяжем **задачи (1)-(3)** соответственно. Решение задачи (3) запишем, исходя из (10) и с учётом (19):

$$h_i(x) = q_i(\varphi^{-1}(x)) \leq 0, i \in J_p$$

и будем далее предполагать, что имеем дело с задачей (22) в форме:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in E', \quad (26)$$

где множество  $E'$  задается системой ограничений:

$$x \in E, \quad (27)$$

$$h_i(x) \leq 0, i \in J_p, \quad (28)$$

а функции  $f(x), h_i(x), i \in J_p$  определены на  $E$ .

Нашей целью является решение задач (1), (2), т.е. формализация дискретных ограничений (27).

Напомним, что ограничения (27) называют прямыми, а ограничения (28) – функциональными. Таким образом, нашей задачей является построение прямых ограничений задачи оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций, исходя из вида элементов четверки (20) – вида отображений  $\varphi, \psi$ , ограничений  $\Omega$  и результирующего множества  $V$ .

Итак, перейдем непосредственно к формализации прямых ограничений, предназначенных вырезать из решетки  $C^N$  в точности множество евклидовых комбинаторных конфигураций  $E$ . Заметим, что решение задачи (1) напрямую зависит от типа евклидового комбинаторного множества  $\Pi$  и не зависит от природы множества  $V$ .

Так, если  $\Omega = \emptyset$ , т.е. рассматриваются всевозможные отображения  $J_n$  в  $V$ , то  $\Pi$  – е-множество размещений с неограниченными повторениями из мультимножества  $V^n$  (далее **Случай 1**), обозначаемое  $\overline{P}_k^n(V^k)$ . Если  $k = n$  и

$$\Omega = \{\text{отображение } \psi \text{ - биективное}\},$$

то  $\Pi$  будет е-множеством перестановок без повторений из множества  $V$  (далее **Случай 2**), которое обозначается  $P_n(V)$ . Наконец, если  $k > n$  и

$$\Omega = \{\text{отображение } \psi \text{ - инъективное}\},$$

$\Pi$  представляет собой е-множество  $k$ -размещений без повторений из  $V$  (далее **Случай 3**), которое обозначается  $P_k^n(V)$ , и т.п. Конкретный тип элементов  $V$  можно указать в названии е-множества. Так, если  $V$  – числовое множество (то же самое  $V$  – множество 1-векторов), то, к примеру, в Случае 1 мы будем иметь числовое е-множество размещений с неограниченными повторениями; если  $V$  имеет вид (12) и при этом  $m > 1$ , то в Случае 2  $\Pi$  является е-множеством перестановок векторов без повторений из  $V$  и т. д. Далее рассмотрим **Случай 4**, обобщающий Случай 2, при котором  $k \leq n$ , а ограничения  $\Omega$  сформулированы следующим образом:

$$\Omega = \{\forall \pi, \pi' \in \Pi: \{\pi\} = \{\pi'\}\}, \quad (29)$$

где  $\pi \in \Pi$   $\{\pi\} = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_n}\}$ . Такое множество будем называть общим е-множеством перестановок векторов и использовать для него обозначение  $P_{nk}(G)$ . Оно индуцируется мультимножеством из векторов:

$$G = \{b_1^{n_1}, \dots, b_k^{n_k}\}: |G| = n, \quad (30)$$

при этом  $\forall \pi \in \Pi \{\pi\} = G$ . Наконец, рассмотрим

обобщение Случаев 1, 3 (далее **Случай 5**), для которого ограничения  $\Omega$  имеют вид:

$$\Omega = \{\text{индуцирующее } \Pi \text{ множество } G: |G| > n\}, \quad (31)$$

а именно

$$G = \{b_1^{n_1}, \dots, b_k^{n_k}\}: |G| = \eta > n, \quad (32)$$

$$1 \leq \eta_i \leq \eta - k + 1, i \in J_k.$$

Условие (31) можно также сформулировать в виде:

$$\Omega = \{\forall \pi \in \Pi \{\pi\} \subset G; \exists \pi, \pi' \in \Pi: \{\pi\} \neq \{\pi'\}\}. \quad (33)$$

Образованное множество будем называть общим е-множеством размещений векторов, обозначив его  $P_{\eta k}^n(G)$ .

Образы общих е-множеств перестановок и размещений будут общие множества евклидовых конфигураций перестановок  $E_{\eta k}(G) = \varphi(P_{\eta k}(G))$  и

размещений  $E_{\eta k}^n(G) = \varphi(P_{\eta k}^n(G))$ , называемые

также общими  $C$ -множествами перестановок и размещений соответственно. Поскольку как было показано, остальные приведенные е-множества являются частными случаями этих двух, непрерывные функциональные представления построим для  $E_{nk}(G)$ ,  $E_{\eta k}^n(G)$ . Также предложим подходы к построению непрерывных представлений отдельных классов этих множеств.

Перейдем непосредственно к процессу построения.

1) Пусть для начала  $m = 1$ . Этот случай касается числового множества комбинаторных конфигураций, при котором  $N = n$ ,  $K = k$ , ограничения группы 2 отсутствуют, а отображение  $\varphi$  сводится к простому рассмотрению комбинаторной конфигурации как точки арифметического евклидова пространства с координатами из результирующего множества:

$$\forall \pi \in \Pi b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{R},$$

$$\pi = [b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}] \xrightarrow{\varphi} x = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}) \in \mathbb{R}^n.$$

В этом случае задачу (2) решать нет необходимости. Поэтому для достижения поставленной цели достаточно привести варианты решения задачи (1) для Случаев 1-5:

- Случай 1. Поскольку в этой ситуации  $E = C^n$ , аналитически множество  $E$  можно задать так:

$$\prod_{j=1}^k (x_i - e_j) = 0, i \in J_n. \quad (34)$$

- Случай 2. Тут для выделения множества  $\Pi$  из решетки  $C^n$  нужно вырезать векторы с различны-

ми координатами, что, с учетом  $k = n$ , можно представить в виде:

$$\prod_{j=1}^n (x_i - e_j) = 0, \quad i \in J_n, \quad (35)$$

$$|x_i - x_j| \geq \Delta, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (36)$$

где  $\Delta = \min_{i \in J_{n-1}} (e_{i+1} - e_i)$ .

Еще два способа задать  $\Pi$  приведены в [14]:

$$\sum_{i=1}^n x_i^j = \sum_{i=1}^n e_i^j, \quad j \in J_n; \quad (37)$$

$$\sum_{|\omega|=j} \prod_{i \in \omega} x_i = \sum_{|\omega|=j} \prod_{i \in \omega} e_i, \quad j \in J_n. \quad (38)$$

• Случай 3. Тут можно использовать обобщение функционального представления (35), (36) на случай  $k > n$  вида (34):

$$|x_i - x_j| \geq \Delta, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

где  $\Delta = \min_{i \in J_{k-1}} (e_{i+1} - e_i)$ .

• Случай 4 – мультимножества (23),(30) совпадают, соответственно, мультимножество  $\mathbf{G}$  имеет вид:

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}' = \left\{ e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k} \right\} = \left\{ g_i \right\}_{i \in J_n} : n_1 + \dots + n_k = n; \quad (39)$$

$$e_i < e_{i+1}, \quad i \in J_{k-1}; \quad g_i \leq g_{i+1}, \quad i \in J_{n-1}.$$

и является индуцирующим как для множества конфигураций  $\Pi$ , так и для множества  $e$ -конфигураций  $E$ . Для задания  $E$  справедливы обобщения формул (37), (38) [14] вида:

$$\sum_{i=1}^n x_i^j = \sum_{i=1}^k n_i e_i^j, \quad j \in J_n; \quad (40)$$

$$\sum_{|\omega|=j} \prod_{i \in \omega} x_i = \sum_{|\omega|=j} \prod_{i \in \omega} g_i, \quad j \in J_n.$$

• Случай 5 – здесь будет справедливо строгое включение мультимножества (23) в индуцирующее мультимножество (32) для любой конфигурации  $\pi \in \Pi$ :

$$\mathbf{B}' = \left\{ e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k} \right\} \subset \mathbf{G} = \left\{ e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k} \right\} = \left\{ g_i \right\}_{i \in J_n} :$$

$$e_i < e_{i+1}, \quad i \in J_{k-1}; \quad g_i \leq g_{i+1}, \quad i \in J_{n-1}.$$

Здесь  $(n_1, \dots, n_k)$  – вектор кратностей элементов  $S(\mathbf{G})$  в конфигурации  $\pi \in \Pi$ , а соответственно и кратностей координат  $e$ -конфигурации  $x = \varphi(\pi)$ . Заметим, что каждая такая конфигурация принадлежит общему  $e$ -множеству конфигураций перестановок  $\Pi(\mathbf{B}') \subset \Pi$ , индуцированному мультимножеством  $\mathbf{B}'$  вида (23). Соответственно, для  $E(\mathbf{B}') = \varphi(\Pi(\mathbf{B}')) \subset E = \varphi(\Pi)$  справедливо пред-

ставление (40). Объединяя такие представления по всем  $\mathbf{B}' \subset \mathbf{G}$ :  $|\mathbf{B}'| = n$ , получаем представление всего общего  $C$ -множества размещений вида (40),

$$n_i \in J_{\eta_i}^0 = J_{\eta_i} \cup \{0\}; \quad \sum_{i=1}^k n_i = n. \quad (41)$$

Задав ограниченную решетку  $C' = \otimes_{i=1}^k J_{\eta_i}^0$  аналитически с использованием, например, формулы (34),

получим искомое непрерывное функциональное представление общего  $C$ -множества размещений вида (40):

$$\prod_{j=0}^{\eta_i} (n_i - j) = 0, \quad i \in J_k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n. \quad (42)$$

Поскольку в нем участвуют дополнительные переменные  $n_1, \dots, n_k$ , это представление сформировано в расширенном пространстве и, согласно терминологии [22], является расширенным функциональным представлением множества  $E$ .

2) Пусть теперь  $m > 1$ , т.е.  $C$ -множество  $E$  представляет образ  $e$ -множества  $\Pi$ , компонентами которого являются упорядоченные последовательности векторов. Представим способы аналитического задания  $C$ -множеств перестановок и размещений векторов. Для того чтобы сопоставить множеству  $\Pi$  множество евклидовых комбинаторных конфигураций  $E$ , зададим биективное отображение  $\gamma$  между элементами результирующего множества  $B$  и множеством  $E$  действительных чисел:

$$E = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\},$$

такое, что:

$$\varepsilon_j = \gamma(b_j), \quad b_j = \gamma^{-1}(\varepsilon_j), \quad j \in J_k.$$

При этом можно всегда считать, что элементы множества  $B$  занумерованы таким образом, что элементы  $E$  упорядочены по возрастанию –  $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}$ ,  $i \in J_{k-1}$ .

Для того чтобы задать  $\gamma$ , достаточно найти функцию  $m$  переменных, принимающих различные значения при подстановке координат  $k$  векторов (12). Значительно труднее построить обратную функцию  $\gamma^{-1}$ , которая по одному числу восстановила бы весь вектор, если при этом задача записана в терминах координат евклидовых комбинаторных конфигураций и векторов (12). Для решения этой проблемы мы предлагаем построить не одну, а  $k$  функций, которые бы позволили по значениям  $\varepsilon_i$ ,  $i \in J_k$  восстанавливать все  $m$  координат векторов (12). А именно, построим функции

$$v_i: b_{ij}=v_i(\varepsilon_j), j \in J_k, i \in J_m \quad (43)$$

в виде интерполяционных полиномов степени  $k-1$ , т.е.

$$v_i(\varepsilon)=P_{k-1}^i(\varepsilon), i \in J_m.$$

Теперь запишем искомое непрерывное функциональное представление  $C$ -множества перестановок векторов на основе представления (40). Система:

$$\sum_{i=1}^n y_i^s = \sum_{i=1}^k n_i \varepsilon_i^s, s \in J_n \quad (44)$$

будет задавать общее  $C$ -множество перестановок, индуцированное мультимножеством

$$G = \left\{ \varepsilon_1^{n_1}, \dots, \varepsilon_k^{n_k} \right\}.$$

Тогда, объединяя (43), (44), получаем, что система уравнений (43), (44)

$$x_{ij}=v_i(y_j), j \in J_k, i \in J_m \quad (45)$$

задает искомое непрерывное функциональное представление множества  $E_{nk}(G)$ . Поскольку в нем участвуют дополнительные переменные  $y_j, j \in J_k$ , это представление является расширенным функциональным представлением множества евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок векторов.

Объединяя теперь целевую функцию  $f(x) \rightarrow \min$  с ограничениями (28), (43)-(45), получаем искомую модель в форме задачи дискретной оптимизации. Следует отметить, что рассмотренное  $C$ -множество перестановок векторов является подмножеством общего  $C$ -множества перестановок, индуцированного мультимножеством (23). Последнее множество является вершинно-расположенным согласно [8], соответственно и первое множество вершинно-расположено как его подмножество. А это позволяет говорить о существовании выпуклых продолжений целевой функции и функций ограничений  $h_i(x), i \in J_p$  и возможности перехода к их рассмотрению при решении исходной задачи.

Такой же подход может быть применен к формализации задач на  $C$ -множестве размещений векторов  $E_{nk}^n(G)$ . А именно, добавив к системе ограничений (43)-(45) условие (41), мы объединим все подмножества  $E_{nk}^n(G)$ , являющиеся общими  $C$ -множествами  $n$ -перестановок  $m$ -мерных векторов. Перейдя от (41) к форме (42), получим, что искомое непрерывное функциональное представление множества (42) задается системой уравнений (42)-(45).

### 3.3. Анализ полученных результатов

Сделаем несколько замечаний по поводу представленных результатов.

1. Приложением предложенных аналитических представлений множеств евклидовой комбинаторной оптимизации могут быть различные задачи оптимального проектирования и геометрического дизайна [37-40]. В частности, они демонстрируют возможности применения метода искусственного расширения пространства [37] на задачи размещения новых классов.

2. Деление ограничений задачи (22) на прямые и функциональные достаточно условно после того, как задача поиска функционального представления множества  $E$  решена, поскольку теперь все ограничения имеют явный вид. Считая их все функциональными, мы приходим просто к непрерывной задаче на условный экстремум, перенося их все в прямые – задачу оптимизации на множестве  $E'$  евклидовых комбинаторных конфигураций/объектов без дополнительных ограничений. В первом случае в разработке методов нас будут интересовать, в первую очередь, поведение функций на  $E$ , во втором – свойства самого множества  $E$ . Выбирая же что-то промежуточное – комбинацию прямых и функциональных ограничений – можно сочетать эти два аспекта евклидовой комбинаторной оптимизации.

3. Мы описали связь оптимизационных задач на комбинаторных конфигурациях с задачами евклидовой комбинаторной оптимизации на множествах евклидовых комбинаторных конфигурациях для случая, когда результирующее множество состоит из векторов одной размерности. Здесь следует отметить, что для произвольных тензоров – таблиц, матриц, многомерных таблиц и матриц этот подход также применим после их перевода, подобно (17), (18), в векторы.

#### Выводы

Метод функциональных представлений применен для построения аналитических представлений общих множеств евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и размещений, а также их специальных классов. Их отличительной особенностью является комбинирование свойств этих дискретных множеств в арифметическом евклидовом пространстве и свойств отображений, с помощью которых они формируются. Результаты могут быть применены в различных практических областях, связанных с оптимальным планированием и геометрическим проектированием.

- Литература:** 1. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с. 2. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1984. 512 с. 3. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. К.: *Наук. думка*, 2003. 261с. 4. *Баранов В. И., Стечкин Б. С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М.: *Физматлит*, 2004. 240 с. 5. *Korte V., Vygen J.* Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg, New York: Springer, 2012. 660 p. 6. *Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L.* Handbook of combinatorial optimization. N.Y.: Springer, 2013. 3409 p. 7. *Гуляницький Л.Ф., Мулеца О.Ю.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навчальний посібник. К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. 142 с. 8. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: *Наук. думка*, 1986. 268 с. 9. *Стоян Ю. Г., Смець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. 188 с. 10. *Яковлев С. В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1994. Т. 34, № 7. С. 1112-1119. 11. *Yakovlev S. V.* Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // in Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday. N. Y.: Springer, 2017, P. 501–517. 12. *Яковлев С. В.* Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации // Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки, 2017. № 8. С. 20–26. 13. *Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Кибернетика и системный анализ. 2018. № 1. С. 111-124. 14. *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2016. Vol. 79, No. 4. С. 27-38. 15. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis, 2016. Vol. 52, No. 6. P. 921-930. 16. *Pichugina O., Yakovlev S.* Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn., 2016. Vol. 4, No.2 . P. 129-152. 17. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689-700. 18. *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика, 2016. № 1. С. 143–154. 19. *Pichugina O., Yakovlev S. O.* Continuous representation techniques in combinatorial optimization // IOSR Journal of Mathematics, 2017. Vol. 13, No. 2, Ver.V. P. 12-25. 20. *Pichugina O., Yakovlev S.* Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON) , 2017. P. 1167-1174. 21. *Пичугина О. С.* Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Сист. докл. та інф. техн., 2017. № 4. С. 74–96. 22. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография, 2017. Х.: Константа, 2017. 404 с. 23. *Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Пит. прикл. матем. і матем. модел., 2017. Вип. 17. С. 278–263. 24. *Berge C.* Principes de combinatoire, 1968. Paris: Dunod. 146 p. 25. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики, 1975. М.: Наука. 319 с. 26. *Гуляницький Л.Ф., Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 6. С. 70–79. 27. *Стоян Ю. Г., Гребенник И. В.* Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений // Доклады НАН Украины, 2008. №10. С. 28 – 31. 28. *Донець Г.П., Колечкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, 2011. Полтава: ПУЕТ. 328 с. 29. *Гуляницький Л.Ф.* До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. 2008. № 7. С. 45–49. 30. *Сергиенко И.В., Гуляницький Л.Ф., Сиренко С.И.* Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 5. С. 71-83. 31. *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств: Препринт 85 АН УССР. Х.: Институт проблем машиностр, 1980. 22 с. 32. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1995. 378 p. 33. *Pardalos P.M. (Eds).* Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 581 p. 34. *Hillier F. S., Appa G., Pitsoulis L., Williams H. P., Pardalos P. M., Prokopyev O. A., Busygin S.* Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems // in Handbook on Modelling for Discrete Optimization. New York : Springer, 2006. P. 1-39. 35. *Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., and Wang Y.* The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey // Journal of Combinatorial Optimization. 2014. No 1. P. 58-81. 36. *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно-расположенных множествах // Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки, 2017. Т. 1, № 15. С. 152–158. 37. *Yakovlev S. V.* The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects // Cybern. Syst. Anal., 2017. Vol. 53, No. 5. P. 725–731. 38. *Яковлев С. В.* О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов // Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки. 2017. № 9. С. 26–32. 39. *Пичугина О.С., Колечкіна Л.М.* Двокрітеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129 – 144. 40. *Pichugina O.* Placement problems in chip design: Modeling and optimization // In 2017 4th International Scientific-Practical

Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). 2017. P. 465–473.

### Transliterated bibliography:

1. *Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravcov M. K.* Mnogogranniki, grafy, optimizacija. M.: Nauka, 1981. 344 s.
2. *Papadimitriou H., Stajglic K.* Kombinatornaja optimizacija. Algoritmy i slozhnost'. M.: Mir, 1984. 512 s.
3. *Sergienko I.V., Shilo V.P.* Zadachi diskretnoj optimizacii: problemy, metody reshenija, issledovanija. K.: Nauk. dumka, 2003. 261s.
4. *Baranov V. I., Stechkin B. S.* Jekstremal'nye kombinatornye zadachi i ih prilozhenija. M.: Fizmatlit, 2004. 240 s.
5. *Korte B., Vygen J.* Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg, New York: Springer, 2012. 660 p.
6. *Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L.* Handbook of combinatorial optimization. N.Y.: Springer, 2013. 3409 p.
7. *Guljanyc'kyj L.F., Mulesa O.Ju.* Prykladni metody kombinatornoi' optymizacii'. K: Vydavnycho-poligrafichnyj centr "Kyj'vs'kyj universytet", 2016. 142 s.
8. *Stojan Ju.G., Jakovlev S.V.* Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovanija. K. : Nauk. dumka, 1986. 268 s.
9. *Stojan Ju. G., Jemec' O. O.* Teorija i metody evklidovoi' kombinatornoi' optymizacii'. K.: In-t systemn. doslidzh. osvity, 1993. 188 s.
10. *Jakovlev S. V.* Teorija vypuklyh prodolzhenij funkcij na vershinah vypuklyh mnogogrannikov // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoi fiziki, 1994. T. 34, № 7. S. 1112-1119.
11. *Jakovlev S. V.* Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // in Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday. N. Y.: Springer, 2017, P. 501–517.
12. *Jakovlev S.V.* Teorija vypuklyh prodolzhenij v zadachah kombinatornoj optimizacii // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tehn. nauki, 2017. № 8. S. 20–26.
13. *Jakovlev S.V., Pichugina O.S.* Svojstva zadach kombinatornoj optimizacii na polijedral'no-sfericheskikh mnozhestvah // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2018. № 1. S. 111-124.
14. *Pichugina O.S., Jakovlev S.V.* Funkcional'no-analiticheskie predstavlenija obshhego perestanovochno-go mnozhestva // Vostochno-Evropskij zhurnal peredvyh tehnologij, 2016. Vol. 79, No. 4. S. 27-38.
15. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis, 2016. Vol. 52, No. 6. P. 921-930.
16. *Pichugina O., Yakovlev S.* Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn., 2016. Vol. 4, No.2 . P. 129-152.
17. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689-700.
18. *Pichugina O. S., Jakovlev S. V.* Vypuklye prodolzhenija dlja klassa kvadraticnyh zadach na perestanovochnyh matricah // Komp'juternaja matematika, 2016. № 1. S. 143–154.
19. *Pichugina O., Yakovlev S. O.* Continuous representation techniques in combinatorial optimization // IOSR Journal of Mathematics, 2017. Vol. 13, No. 2, Ver. V. P. 12-25.
20. *Pichugina O., Yakovlev S.* Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017. P. 1167-1174.
21. *Pichugina O. S.* Optimizacija na obshhem mnozhestve perestanovok so znakom // Sist. dosl. ta inf. tehn., 2017. № 4. S. 74–96.
22. *Stojan Ju. G., Jakovlev S. V., Pichugina O. S.* Evklidovy kombinatornye konfiguracii: monografija, 2017. H.: Konstanta, 2017. 404 s.
23. *Jakovlev S. V., Pichugina O. S.* Zadachi optimizacii na evklidovyh kombinatornyh konfiguracijah i ih svojstva // Pit. prikl. matem. i matem. model., 2017. Vip. 17. S. 278–263.
24. *Berge C.* Principes de combinatoire, 1968. Paris: Dunod. 146 p.
25. *Sachkov V.N.* Kombinatornye metody diskretnoj matematiki, 1975. M.: Nauka. 319 s.
26. *Guljanickij L.F., Sergienko I.V.* Metajevristicheskij metod deformirovannogo mnogogrannika v kombinatornoj optimizacii // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2007. № 6. S. 70–79.
27. *Stojan Ju. G., Grebennik I. V.* Opisanie klassov kombinatornyh konfiguracij na osnove otobrazhenij // Doklady NAN Ukrainy, 2008. №10. S. 28 – 31.
28. *Донець Г.П., Колечкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, 2011. Полтава: ПУЕТ. 328 с.
29. *Гуляницький Л.Ф.* До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень, 2008. № 7. С. 45–49.
30. *Sergienko I.V., Guljanickij L.F., Sirenko S.I.* Klassifikacija prikladnyh metodov kombinatornoj optimizacii // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2009. № 5. S. 71-83.
31. *Stojan Ju.G.* Nekotorye svojstva special'nyh kombinatornyh mnozhestv: Preprint 85 AN USSR. H.: Institut problem mashinostr, 1980. 22 s.
32. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1995. 378 p.
33. *Pardalos P.M. (Eds).* Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 581 p.
34. *Hillier F. S., Appa G., Pitsoulis L., Williams H. P., Pardalos P. M., Prokopyev O. A., Busygin S.* Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems // in Handbook on Modelling for Discrete Optimization. New York : Springer, 2006. P. 1-39.
35. *Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., and Wang Y.* The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey // Journal of Combinatorial Optimization. 2014. No 1. P. 58-81.
36. *Pichugina O. S., Jakovlev S. V.* Metody global'noj optimizacii na perestanovochnom mnogogrannike v kombina-

tornyh zadachah na vershinno raspolozhennyh mnozhestvah // *Mat. ta komp. model. Ser. fiz.-mat. nauki*, 2017. T. 1, № 15. С. 152–158.

37. *Yakovlev S. V.* The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects // *Cybern. Syst. Anal.*, 2017. Vol. 53, No. 5. P. 725–731.

38. *Jakovlev S. V.* О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов // *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tehn. nauki*, 2017. № 9. С. 26–32.

39. *Pichugina O.S., Koljehkina L.M.* Dvokryterial'na kombinatorna model' optymizacii' telekomunikacijnyh mrezh // *Matematychni mashyny i systemy*, 2017. № 4. С. 129 – 144.

40. *Pichugina O.* Placement problems in chip design: Modeling and optimization // *Proc. Of the 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST)*. 2017. P. 465–473.

Поступила в редколлегию 18.01.2018

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Яковлев С.В.

**Пичугина Оксана Сергеевна**, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: полиэдральная комбинаторика, евклидова комбинаторная, нелинейная, параметрическая оптимизация, теория графов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. (099)9598965.

**Pichugina Oksana Sergeevna**, PhD, post doc., Department of Applied Mathematics, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: polyhedral combinatorics, Euclidean combinatorial, nonlinear, parametric optimization, graph theory. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Science, 14, tel. (099) 9598965.

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ  
ТЕЧІЙ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ  
R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ  
ПОДГОРНИЙ О.Р.**

Розглядаються постановки основних крайових задач для функції течії фільтраційного потоку. Для тестової крайової задачі теорії стаціонарної фільтрації у ізотропному ґрунті будується (відповідно до методу R-функцій) структура розв'язку крайової задачі та обґрунтовується застосування методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти структурної формули.

**Ключові слова:** закон Дарсі; фільтрація рідини у пористому середовищі; метод R-функцій; метод Рітца.

**Key words:** Darcy's law; fluid flow through porous media; boundary problem; R-function's method; Ritz method.

**Вступ.** Фільтрацією називається повільний рух (просочування) рідин, нафти та газу, газованої рідини у пористому середовищі під дією якихось факторів [16]. Явище фільтрації зустрічається у науці, промисловості, сільському господарстві тощо. Це процеси осушення і зрошення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд, просочування води крізь земляні дамби, задачі прийняття рішень і управління у надзвичайних ситуаціях, пов'язаних з паводками, та багато іншого.

При математичному моделюванні фільтраційних течій приходять до крайових задач для рівнянь у частинних похідних. Точні розв'язки таких задач можна у деяких випадках отримати, використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної [11]. Більш універсальними є чисельні методи – метод сіток, метод скінченних елементів, метод мажорантних областей, метод суматорних подань, метод фіктивних областей тощо [4, 5, 6, 9, 12, 13]. Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки. До недоліків точних методів слід віднести обмежену кількість областей, до яких вони застосовні, а основним недоліком існуючих наближених методів є те, що при їх реалізації у геометрично складних областях межа області апроксимується, наприклад, вписаною ламаною, тобто втрачається точність у врахуванні геометричної інформації у чисельному алгоритмі.

Найбільш точно і повно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, яка міститься у постановці задачі математичної фізики, дозволяє структурний метод R-функцій [18]. Для численного розв'язання задач фільтрації метод R-функцій було застосовано у [2,3,19], але в них

було розглянуто лише задачі фільтрації під гідротехнічними спорудами.

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій є актуальною науковою задачею.

**1. Мета та задачі дослідження.** Метою роботи є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних фільтраційних течій на основі математичної моделі у термінах «функція течії». Для досягнення цієї мети необхідно:

- провести аналіз постановок можливих крайових задач для функції течії;
- для тестової задачі теорії фільтрації побудувати на основі методу R-функцій структуру розв'язку;
- обґрунтувати застосування варіаційних методів до апроксимації невизначених компонент побудованої структурної формули.

**2. Математичні моделі теорії плоскої фільтрації.** Побудова математичних моделей фільтраційних течій заснована на використанні закону, встановленого емпірично французьким інженером А. Дарсі (1803-1858) у 1852-1855 рр. [16]. Математичне формулювання закону Дарсі для ізотропного середовища має вигляд:

$$\mathbf{v} = \kappa \mathbf{J} = -\kappa \frac{dH}{ds}, \quad (1)$$

де  $\mathbf{J} = -\frac{dH}{ds}$  – градієнт п'єзометричного напору

$$H = \frac{p}{\rho g} + z \quad (\rho g = \gamma)$$

за шляхом  $s$ ;  $p$  – тиск;  $\rho$  – щільність рідини;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $z$  – геометрична висота над деякою площиною порівняння;  $\gamma$  – питома вага рідини;  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації.

Закон Дарсі (1) означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні її швидкості.

Коефіцієнт фільтрації  $\kappa$  залежить від властивостей як пористого середовища, так і рідини:

$$\kappa = \frac{k \rho g}{\mu},$$

де  $k$  – проникність пористого середовища;  $\rho$  – щільність рідини;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини.

Типові значення  $\kappa$  при фільтрації води у піску мають порядок  $10^{-5} \div 10^{-2}$  м/с, у ґрунті –  $10^{-6} \div 10^{-4}$  м/с, у глині –  $10^{-7} \div 10^{-6}$  м/с.

При фільтрації у анізотропних пористих середовищах лінійна залежність швидкості фільтрації

та градієнта тиску зберігається, але ці вектори у загальному випадку вже не будуть колінеарні. Коефіцієнт фільтрації наразі буде симетричним додатно-означеним тензором.

Критерієм застосовності закону Дарсі є малість числа Рейнольдса.

Якщо межа області фільтрації складається лише з проникних та непроникних ділянок, то фільтрацію називають напірною. Якщо ж до складу межі входять сухий чи змочений ґрунт, а також поверхні (проріжки) просочування, з яких рідина потрапляє безпосередньо в атмосферу, то фільтрацію називають безнапірною.

Основні рівняння гідромеханічної теорії фільтрації були отримані в роботах Н.Є. Жуковського [8] та М.М. Павловського [15].

Система рівнянь руху рідини у пористому середовищі має вигляд:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\kappa} v_x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\kappa} v_y = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{\kappa} v_z = 0, \quad (4)$$

$$n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \quad (5)$$

$$f(\rho, H, T) = 0. \quad (6)$$

Рівняння (5) називається рівнянням нерозривності ( $n$  – пористість ґрунту), а (6) – рівнянням стану, що характеризує стан рідини відношенням між густиною  $\rho$ , ізотермічним напором  $H$  та абсолютною температурою  $T$ .

Система (2) – (6) є замкнутою системою рівнянь, які описують нестационарну фільтрацію важкої стисливої рідини у недеформованому ґрунті, якщо справедливий закон Дарсі.

Інтегруючи систему рівнянь (2) – (6) в області фільтрації (при крайових та початкових умовах), отримуємо проєкції швидкості фільтрації, п'езометричний напір та густину рідини, яка фільтрується.

Для нестисливих однорідних рідин рівняння стану має вигляд  $\rho = \text{const}$ . Тоді рівняння нерозривності перетворюється на рівність:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Для стаціонарної фільтрації з (2) – (4) отримаємо

$$v_x = -\kappa \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -\kappa \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -\kappa \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (8)$$

Підстановкою (8) у (7) отримаємо, що напір  $H$

задовольняє в області фільтрації однорідному еліптичному рівнянню

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0, \quad (9)$$

яке для однорідно-ізотропного ґрунту ( $\kappa = \text{const}$ ) переходить у рівняння Лапласа

$$\Delta H \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (10)$$

Ввівши потенціальну функцію  $\phi$  як

$$\phi = -\kappa H, \quad (11)$$

з (9) та (10) отримаємо, що при  $\kappa = \text{const}$  функція  $\phi$  є гармонічною в області фільтрації:

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (12)$$

Лінії рівня  $\phi = \text{const}$  функції  $\phi$  називаються еквіпотенціальними поверхнями (поверхнями рівного потенціалу), а враховуючи (11), вони є поверхнями рівного напору. Зрозуміло, що вектор швидкості фільтрації у будь-якій точці області фільтрації спрямований за нормаллю до поверхні рівного напору, який проходить через цю точку.

У випадку плоскої стаціонарної фільтрації в однорідному ізотропному недеформованому ґрунті (фільтрація відбувається у площині, яка є паралельною до координатної площини  $xOy$ ) система (2) – (6) матиме вигляд:

$$v_x = -\kappa \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -\kappa \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

а рівняння (12) –

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Плоскі фільтраційні течії зручно аналізувати за допомогою функції течії  $\psi$ , яка вводиться співвідношеннями:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Завдяки такому означенню функції течії  $\psi$  рівняння нерозривності (третє з рівнянь (13)) обертається в тотожність, а з (8) матимемо, що

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (16)$$

Оскільки  $\phi = -\kappa H$ , то за умови  $\kappa = \text{const}$  функції  $\phi$  та  $\psi$  пов'язані умовами Коші-Рімана:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (17)$$

Диференціюючи перше з рівностей (16) за  $y$  і віднімаючи з нього друге з рівностей (16), яке

продиференційоване за  $x$ , отримаємо, що функція течії задовольняє в області фільтрації рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (18)$$

Лінії рівня  $\psi = \text{const}$  функції течії  $\psi$  називають лініями течії. Вони мають властивість: вектор швидкості фільтрації в будь-якій точці області фільтрації спрямований за дотичною до лінії течії, що проходить через цю точку.

Рівняння для напору (9), (10), потенціалу (12), (14), функції течії (17), (18) необхідно доповнити крайовими умовами [4, 5, 6].

На ділянках межі області фільтрації, які є непроникними поверхнями, нормальна складова швидкості повинна дорівнювати нулю (умова непротікання):

$$\mathbf{v}_n = 0. \quad (19)$$

Прикладами таких ділянок є поверхні бетонних основ гідроспоруд або межі піску та глини.

Із закону Дарсі та рівнянь (11), (17), (19) випливає, що на цих ділянках межі виконуються умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \psi = \text{const},$$

тобто вони є лініями течії.

Деякі ділянки межі області фільтрації можуть межувати з областями вільної рідини. Прикладом такого випадку є межа між пористим середовищем та водоймою, через яку рідина просочується з водойми в ґрунт та навпаки – коли ґрунтові води можуть потрапляти у водойму. У цьому випадку на ділянках межі дотична складова швидкості повинна дорівнювати нулю:

$$\mathbf{v}_s = 0. \quad (20)$$

Із закону Дарсі та рівнянь (11), (17), (19) випливає, що

$$\varphi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

тобто вони є еквіпотенціальними лініями.

Припустимо, що область фільтрації частково межує з атмосферою. Такі межі називаються проміжками височування, оскільки на таких ділянках рідина може витікати з пористого середовища і, наприклад, стікати уздовж межі або випаровуватися. Прикладами таких меж служать стінки земляних гребель, через які фільтрується вода, або стінки колодязів, викопаних у водонасиченому ґрунті.

На проміжку височування мають місце умови неперервності тиску (якщо знехтувати капілярними ефектами, то тиск рідини в пористому се-

редовищі на межі збігається з атмосферним) та додатності проекції швидкості фільтрації на зовнішню нормаль:

$$\mathbf{v}_n > 0,$$

тобто рідина може тільки витікати з пористого середовища. Саме ж значення швидкості фільтрації на межі області розв'язання задачі є невідомим.

Частина межі області фільтрації може бути лінією розділу між сухим і вологим ґрунтом. Така ділянка називається вільною поверхнею (лінією) або поверхнею депресії. Відзначимо, що до розв'язання задачі її форма невідома. На ділянці вільної поверхні мають місце зазвичай загальна умова збереження маси і умова неперервності тиску. Крім того, ця крива є лінією течії.

Тепер припустимо, що ґрунтова вода проходить крізь два ґрунти з різними коефіцієнтами фільтрації  $\kappa_1$  і  $\kappa_2$ . Нехай ґрунти межують по деякій лінії  $L$ . На цій лінії повинні бути виконані умови неперервності тиску:

$$p_1 = p_2 \text{ в будь-якій точці } L$$

та нерозривності течії:

$$\mathbf{v}_{1n} = \mathbf{v}_{2n} \text{ в будь-якій точці } L.$$

Тоді із закону Дарсі і рівнянь (11), (17) випливає, що на  $L$  виконуються умови

$$\frac{\varphi_1}{\kappa_1} = \frac{\varphi_2}{\kappa_2}, \quad \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s},$$

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}}.$$

**3. Конструктивний апарат теорії  $R$ -функцій та його застосування в математичному моделюванні фізико-механічних полів.** Розглянемо основні відомості з теорії  $R$ -функцій та загальну схему застосування методів цієї теорії у математичному моделюванні фізико-механічних полів [10, 18].

Вперше  $R$ -функції з'явилися у 1963 р. в роботі акад. НАН України В.Л. Рвачова [17]. Серед функцій неперервного аргументу ним було виділено клас функцій, які мають властивості, схожі з властивостями функцій дискретного аргументу, а саме – з функціями алгебри логіки.

Можна дати таке означення [10, 18].

*Означення.* Функція  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , називається  $R$ -функцією (функцією В.Л. Рвачова), що відповідає розбиттю множини  $\mathbf{X} = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$  на три градації:

$$S_3^{-1}(0) = \mathbf{X}(0) = (-\infty, 0), \quad S_3^{-1}(1) = \mathbf{X}(1) = \{0\},$$

$$S_3^{-1}(2) = \mathbf{X}(2) = (0, +\infty),$$

якщо існує така функція тризначної логіки  $Y = F(X_1, \dots, X_n)$ , що

$$S_3[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_3(x_1), \dots, S_3(x_n)], \quad (21)$$

$$\text{де } S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0, \\ 2, & t > 0. \end{cases}$$

Множина всіх таких  $R$ -функцій позначається так:  $\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}[\mathfrak{X} = (-\infty, +\infty); S_3]$ .

Функція тризначної логіки  $F$ , що задовольняє (21), називається супровідною для  $R$ -функції  $f$ .

Множина  $\mathfrak{R}_3$  має непустий перетин з множиною елементарних функцій, тому над  $R$ -функціями можна виконувати, зокрема, операції диференціювання та інтегрування.

На теперішній час відома велика кількість систем  $R$ -функцій [18]. Зокрема, система  $\mathfrak{R}_\alpha$  має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv -x; \\ x_1 \wedge_\alpha x_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right); \\ x_1 \vee_\alpha x_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Тут  $\alpha(x_1, x_2)$  – довільна функція, яка задовольняє умови

$$\begin{aligned} -1 < \alpha(x_1, x_2) \leq 1, \\ \alpha(x_1, x_2) &\equiv \alpha(x_2, x_1) \equiv \alpha(-x_1, x_2) \equiv \alpha(x_1, -x_2) \\ &\text{для всіх } x_1, x_2 \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Для  $R$ -функцій (22) супровідними є функції тризначної логіки заперечення, диз'юнкція та кон'юнкція відповідно.

Розглянемо розв'язання методом  $R$ -функцій оберненої задачі аналітичної геометрії. Ця задача полягає у наступному: нехай у  $\mathbf{R}^n$  задано геометричний об'єкт  $\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  і необхідно побудувати таку функцію  $\omega(\mathbf{x})$ , яка додатна всередині  $\Omega$  і дорівнює нулю на  $\partial\Omega$ . Тоді рівняння  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  у неявній формі визначатиме геометричне місце точок, що є межею геометричного об'єкта  $\Omega$ .

Нехай геометричний об'єкт  $\Omega$  побудовано з опірних множин  $\Sigma_i = (\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , за допомогою операцій  $\wedge, \vee$  алгебри логіки над ними:

$$\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m). \quad (23)$$

Вважаємо, що  $\sigma_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , – прості неперервні

(елементарні) функції, тобто  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$  є межею множин  $\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0$  і  $\sigma_i(\mathbf{x}) > 0$ .

Якщо тепер у (23) провести формальну заміну  $\Omega$  на  $\omega(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma_i$  на  $\sigma_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а символів  $\wedge, \vee$  алгебри логіки на символи відповідних  $R$ -операцій, то отримаємо аналітичний вираз, який в елементарних функціях визначає рівняння межі  $\partial\Omega$  [9]:

$$\omega(\mathbf{x}) = 0.$$

При цьому для внутрішніх точок  $\Omega$  виконується нерівність  $\omega(\mathbf{x}) > 0$ .

На функцію  $\omega(\mathbf{x})$  також можна накладати додаткові умови: наприклад, умову нормалізованості, яка полягає у задоволенні вимог

$$\omega(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \quad \omega(\mathbf{x}) > 0 \text{ всередині } \Omega;$$

$$\left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \quad (24)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль.

При розв'язанні диференціальних задач математичної фізики метод  $R$ -функцій дозволяє побудувати так звану структуру розв'язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, який точно задовольняє всім крайовим умовам задачі та залежить від деяких невизначених компонент. Вибір цих невизначених компонент роблять так, щоб у деякому сенсі задовольнити диференціальне рівняння задачі. Для цього використовуються різні чисельні методи математичної фізики, зокрема, метод Рітца, метод найменших квадратів, метод Гальоркіна тощо.

Перевагою цього підходу порівняно, наприклад, з різницевиими методами і методом скінчених елементів є те, що геометрія розрахункової області враховується точно, тобто, зокрема, не відбувається заміни криволінійних ділянок.

Схему застосування методу  $R$ -функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів можна розбити на такі етапи:

- 1) точний аналітичний опис геометрії розрахункової області, тобто побудова функції  $\omega(\mathbf{x})$  з властивостями (24);
- 2) продовження крайових умов всередину області, тобто до визначення функцій та операторів, заданих на межі, у внутрішніх точках області;
- 3) побудова загальної структури розв'язку, тобто такої формули, яка залежить від деяких невизначених функцій (компонент) та за будь-якого їх вибору точно задовольняє всім крайовим умовам задачі;
- 4) побудова наближеного розв'язку, тобто апрокс-

симация невизначених компонент структури деяким чисельним методом.

Для продовження крайових умов всередину області використовуються два основних підходи [18].

Нехай функція  $\varphi_0$  в точках  $\partial\Omega$  задана у вигляді

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_0^{(1)}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \text{К} & \text{К} \\ \varphi_0^{(r)}(s), & s \in \partial\Omega_r, \end{cases}$$

де ділянки межі  $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_r$  попарно різні, не мають спільних внутрішніх точок і  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_r$ .

Нехай далі  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , такі, що  $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_0^{(i)}$ , а  $\omega_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , такі, що  $\omega_i(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega_i$  і  $\omega_i(\mathbf{x}) > 0$  в  $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega_i$ . Тоді функція

$$\varphi = \frac{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \dots + \frac{\varphi_r}{\omega_r}}{\frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_r}} = \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i \prod_{j=1, j \neq i}^r \omega_j}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1, j \neq i}^r \omega_j} \quad (25)$$

має властивість  $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ .

Формулу (25) називають формулою «склейки» і позначають  $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$ , де ЕС – оператор склеювання межових значень.

Другий підхід пов'язаний з продовженням диференціальних операторів, які задані на  $\partial\Omega$ , в середину області  $\Omega$ . Нехай  $\omega = 0$  – нормалізоване рівняння межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$ . Тоді оператор  $D_1$ , який діє за правилом

$$D_1 u \equiv (\nabla \omega, \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

в регулярних точках  $\partial\Omega$  задовольняє рівність

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль.

При цьому вираз  $D_1 u$  має сенс всюди в  $\Omega \cup \partial\Omega$ .

За допомогою оператора  $D_1$  будують жмутки функцій, нормальна похідна яких, або лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області приймає задані значення.

Деякими класичними прикладами структур розв'язку є:

– структура розв'язку, яка точно враховує крайову умову Діріхле  $u|_{\partial\Omega} = \varphi_0(s)$ ,  $s \in \partial\Omega$ :

$$u = \varphi + \omega\Phi; \quad (26)$$

– структура розв'язку, яка точно враховує крайову

умову Неймана  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \varphi_0(s)$ ,  $s \in \partial\Omega$ :

$$u = -\omega\varphi + \Phi - \omega D_1 \Phi. \quad (27)$$

У формулах (26), (27)  $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$ ,  $\omega(\mathbf{x})$  задовольняє умови (24),  $\Phi$  – невизначена компонента.

Загальний метод побудови структурних формул розглянуто у [10, 18]. Основні застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку різних фізико-механічних полів містяться у [7, 10, 14, 18, 20 та ін.].

**4. Побудова структури розв'язку тестової задачі теорії фільтрації.** Розглянемо таку крайову задачу теорії стаціонарної фільтрації:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (28)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_3} = Q, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_4} = 0. \quad (30)$$

Розрахункова область  $\Omega$  (область фільтрації) наведена на рисунку.

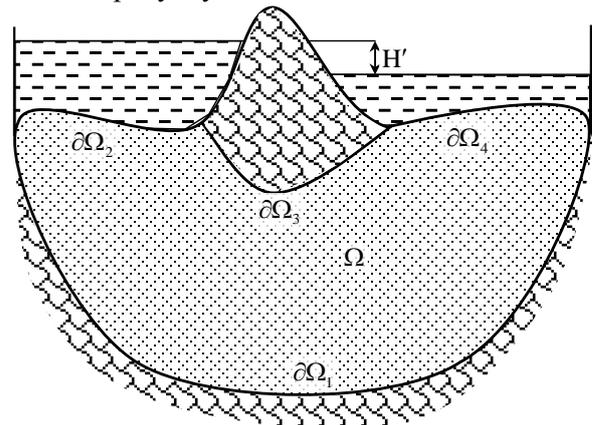


Рис. 1

Межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається з чотирьох ділянок:  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$ . На ділянках  $\partial\Omega_2, \partial\Omega_4$  ґрунт межує з областями вільної рідини (наприклад, це дно водойми), а ділянки  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_3$  відповідають непроникним поверхням (гранітна основа або бетонна гідротехнічна споруда). Задачу (28) – (30) можна розглядати як тестову при апробації чисельних методів. Тут  $\psi$  – функція течії,  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації,  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до відповідних ділянок межі,  $Q$  – повна витрата рідини,  $H'$  – діючий напір.

Стала величина  $Q$  є невідомою і визначається інтегральним співвідношенням

$$\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds = -H'. \quad (31)$$

Помітимо, що якщо  $u$  – розв’язок задачі

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (32)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_3} = 1, \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_4} = 0, \quad (34)$$

то функція  $\psi = Qu$ , де відповідно до (31)

$$Q = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \right)^{-1},$$

є розв’язком задачі (28) – (30).

Відповідно до структурного методу R-функцій побудуємо структуру розв’язку крайової задачі (32) – (34). Нехай відомі функції  $\omega(x, y)$ ,  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , такі що:

$$\omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \quad \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = -1,$$

$$\omega_i(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega_i; \quad \omega_i(x, y) > 0 \text{ у } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i);$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_i} = -1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Якщо межа  $\partial\Omega$  складається зі скінченної кількості кусково-гладких кривих, кожна з яких може бути описана елементарною функцією, то функції зі вказаними властивостями можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу, користуючись конструктивним апаратом теорії R-функцій [18], причому вони також будуть функціями елементарними із заданими диференціальними властивостями.

За допомогою формули «склейки» (25) будемо функцію

$$f(x, y) = \frac{\omega_3(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_3(x, y)},$$

яка має властивість

$$f|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad f|_{\partial\Omega_3} = 1.$$

Тоді крайові умови (33) можна записати у вигляді

$$(u - f)|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (35)$$

А за допомогою диференціального оператора

$$D_1^{(2-4)} u = (\nabla \omega_{2-4}, \nabla u) = \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

де  $\omega_{2-4}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_4(x, y)$ , крайові умови (34) запишуться так:

$$D_1^{(2-4)} u \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0. \quad (36)$$

З (35) випливає, що функція  $u$  належить жмутку функцій вигляду

$$u = f + \omega_{1-3} \Phi,$$

де  $\omega_{1-3}(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_3(x, y)$ ,  $\Phi = \Phi(x, y)$  – невизначена компонента.

З умови (36) витікає, що

$$D_1^{(2-4)} u = \omega_{2-4} \Psi. \quad (37)$$

Подано невизначену компоненту  $\Phi$  у вигляді

$$\Phi = \Phi_1 + \omega_{2-4} \Phi_2$$

і підберемо  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  такими, щоб виконувалась умова (37). Матимемо:

$$\begin{aligned} D_1^{(2-4)} u &= D_1^{(2-4)} (f + \omega_{1-3} \Phi) = \\ &= D_1^{(2-4)} (f + \omega_{1-3} \Phi_1 + \omega_{1-3} \omega_{2-4} \Phi_2) = \\ &= D_1^{(2-4)} f + D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + \\ &+ \omega_{2-4} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_2) + \omega_{1-3} \Phi_2 D_1^{(2-4)} \omega_{2-4} = \\ &= D_1^{(2-4)} f + D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + \\ &+ \omega_{2-4} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_2) + \omega_{1-3} \Phi_2 (1 + \omega_{2-4} \chi). \end{aligned}$$

Тоді рівність (37) набуде вигляду

$$\begin{aligned} D_1^{(2-4)} f + D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + \\ + \omega_{2-4} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_2) + \omega_{1-3} \Phi_2 (1 + \omega_{2-4} \chi) = \omega_{2-4} \Psi. \end{aligned}$$

Додавши до обох частин останньої рівності доданок  $\omega_{2-4} \Phi_2$ , отримаємо

$$D_1^{(2-4)} f + D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + (\omega_{1-3} + \omega_{2-4}) \Phi_2 = \omega_{2-4} \Psi_0,$$

де  $\Psi_0 = \Psi + \omega_{2-4} \Phi_2 - D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_2) - \omega_{1-3} \Phi_2 \chi$ .

Звідси

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \\ = \frac{1}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} [-D_1^{(2-4)} f - D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + \omega_{2-4} \Psi_0] \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} u &= f + \omega_{1-3} \Phi_1 + \omega_{1-3} \omega_{2-4} \Phi_2 = \\ &= f + \omega_{1-3} \Phi_1 + \\ &+ \frac{\omega_{1-3} \omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} [-D_1^{(2-4)} f - D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi_1) + \omega_{2-4} \Psi_0]. \end{aligned}$$

Покладемо  $\Psi_0 = 0$ . Тоді структуру розв’язку задачі (32) – (34) отримаємо у вигляді (перепозначимо  $\Phi_1$  на  $\Phi$ )

$$\begin{aligned} u &= f - \frac{\omega_{1-3} \omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f + \\ &+ \omega_{1-3} \Phi - \frac{\omega_{1-3} \omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi). \quad (38) \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Структура розв’язку крайової задачі (32) – (34), яка точно задовольняє крайові умови (33), (34), має вигляд (38).

**5. Метод знаходження чисельного розв’язку тестової задачі теорії фільтрації.** Формула (38) при будь-якому виборі невизначеної компоненти

$\Phi$  точно задовольняє крайові умови (33), (34). Для знаходження наближеного розв'язку (32) – (34) апроксимуємо  $\Phi$  з використанням методу Рітца.

У задачі (32) – (34) зробимо заміну

$$u = g + v,$$

де  $g = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f$ ,  $v$  – нова невідома

функція. Тоді для  $v$  отримаємо задачу з однорідними крайовими умовами:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F \text{ у } \Omega, \quad (39)$$

$$v|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0, \quad (40)$$

де  $F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ .

Введемо у розгляд оператор  $A$  крайової задачі (39), (40), який діє за правилом

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

на області визначення  $D_A$ , що складається з тих функцій простору  $L_2(\Omega)$ , які належать множині  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  та задовольняють крайові умови (40).

Можна показати, що цей оператор буде додатно-означеним, а отже, задача (39), (40) еквівалентна задачі знаходження у відповідному енергетичному просторі  $H_A$  мінімуму функціонала енергії

$$J[v] = [v, v] - 2(F, v),$$

де

$$[v, v] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$(F, v) = \int_{\Omega} F \cdot v \, dx dy.$$

Наближений розв'язок цієї екстремальної задачі відповідно до методу Рітца шукатимемо у вигляді

$$v_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Елементи координатної послідовності  $\{\varphi_k\}$  відповідно до структури (38) обираємо у вигляді

$$\varphi_k = \omega_{1-3} \tau_k - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \tau_k),$$

де  $\{\tau_k\}$  – будь-яка повна у  $L_2(\Omega)$  система функцій (поліноми, сплайни тощо).

Тоді для визначення сталих  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] c_k = (F, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(F, \varphi_j) = \int_{\Omega} F \cdot \varphi_j \, dx dy, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.$$

Із загальних теорем збіжності методу Рітца та викладеного вище впливає така теорема.

**Теорема 2.** Нехай  $F \in L_2(\Omega)$ . Тоді послідовність

$$\psi_n = Q_n u_n,$$

де

$$Q_n = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial n} \, ds \right)^{-1}, \quad u_n = f + v_n,$$

збігається у  $L_2(\Omega)$  до узагальненого розв'язку задачі (28) – (30).

**6. Висновки.** Розглянуто основні математичні моделі фільтраційних течій, зокрема, постановка найпростішої задачі фільтрації, яка може слугувати тестовим прикладом для перевірки роботи чисельних методів. Для цієї крайової задачі отримано структуру розв'язку та обґрунтовано застосування методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти.

Отже, отримано подальший розвиток застосування структурного методу R-функцій у математичному моделюванні фізико-механічних полів, а також вдосконалено метод математичного моделювання фільтраційних течій у частині урахування у чисельному методі додаткового інтегрального співвідношення для знаходження повних витрат рідини.

Отримані результати можуть бути поширені на інші крайові задачі теорії фільтрації, а також можуть застосовуватись у розв'язанні прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фільтраційних течій. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

**Література:** 1. Блишун А.П., Сидоров М.В. Метод численного анализа стационарного фильтрационного течения под гидротехническим сооружением в кусочно-однородному грунте // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 5-12. 2. Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R-функций // Радиоэлектроника и информатика. 2010. № 2. С. 40-46. 3. Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Вісник Запорізького національного університету.

Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 1. С. 50-56.

4. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. К.: Наук. думка, 2007. 292 с. 5. *Вабищевич П.Н.* Метод фіктивних областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с. 6. *Венгерський П.* Про задачу сумісного руху поверхневих і ґрунтових потоків на території водозбору // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. Вип. 22, 2014. С. 41-53. 7. *Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стаднікова А.В.* Численний аналіз задачі перемішування вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 2. С. 11-21. 8. *Жуковский Н.Е.* Теоретическое исследование о движении почвенных вод (1889). Полное собр. соч., т. 7. М.: 1937. С. 9-33. 9. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 264 с. 10. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. 416 с. 11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с. 12. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецький Г.Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1974. 202 с. 13. *Ляшко Н.И., Великоиваненко Н.М.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1973. 264 с. 14. *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков. ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с. 15. *Павловский Н.Н.* Теория движения ґрунтовых вод под гидротехническими сооружениями и её основные приложения. Петроград, Изд-во Научн.-мелиорац. ин-та, 1922. 752 с. 16. *Полубарінова-Кочина П.Я.* Теория движения ґрунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с. 17. *Рвачев В.Л.* Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. Докл. АН СССР. 1963. 153, № 4. С. 765-768. 18. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 19. *Сидоров М.В., Стороженко А.В.* Математическое компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 4. С. 58-61. 20. *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method. J. Eng. Math. 2015. Vol. 91. P. 59-79. DOI 10.1007/s10665-014-9746-x.

#### Transliterated bibliography:

1. *Blishun A.P., Sidorov M.V.* Metod chislennogo analiza stacionarnogo fil'tracionnogo techenija pod gidrotehničeskim sooruzheniem v kusochno-odnorodnomu grunte. Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 2. P. 5-12.

2. *Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G.* Matematicheskoe modelirovanie i chislennyj analiz fil'tracionnyh techenij pod gidrotehničeskimi sooruzhenijami s pomoshh'ju. Radiojelektronika i informatika. 2010. № 2. P. 40-46.

3. *Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G.* Primenenie metoda R-funkcij k chislennomu analizu fil'tracionnyh techenij pod gidrotehničeskimi sooruzhenijami. Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 1. P. 50-56.

4. *Bomba A.Ja., Bulavac'kij V.M., Skopec'kij V.V.* Nelinijni matematichni modeli procesiv geogidrodin-

namiki. K.: Nauk. dumka, 2007. 292 p.

5. *Vabishhevich P.N.* Metod fiktivnyh oblastej v matematicheskoy fizike. M.: Izd-vo MGU, 1991. 156 p.

6. *Vengers'kij P.* Pro zadachu sumisnogo ruhu poverhnevih i gruntovih potokiv na teritorii vodozboru. Visnik L'viv. un-tu. Ser. prikl. matem. ta inf. Vip. 22, 2014. P. 41-53

7. *Gibkina N.V., Rogovoj N.S., Sidorov M.V., Stadnikova A.V.* Chislennyj analiz zadachi peremeshivaniya vjazkoj zhidkosti, vyzvannogo sistemoj tochechnyh vihrej // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2013. № 2. P. 11-21.

8. *Zhukovskij N.E.* Teoreticheskoe issledovanie o dvizhenii pochvennyh vod (1889). Polnoe sobr. soch., t. 7. M.: 1937. P. 9-33.

9. *Konnor Dzh., Brebbia K.* Metod konechnyh jelementov v mehanike zhidkosti. L.: Sudostroenie, 1979. 264 p.

10. *Kravchenko V.F., Rvachev V.L.* Algebra logiki, atomarnye funkcii i veyvlety v fizicheskikh prilozhenijah. M.: Fizmatlit, 2006. 416 p.

11. *Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.* Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1973. 736 p.

12. *Ljashko I.I., Velikoivanenko I.M., Lavrik V.I., Mistic'kij G.E.* Metod mazhorantnyh oblastej v teorii fil'tracii. K.: Nauk. dumka, 1974. 202 p.

13. *Ljashko N.I., Velikoivanenko N.M.* Chislennanaliticheskoe reshenie kraevykh zadach teorii fil'tracii. K.: Nauk. dumka, 1973. 264 p.

14. *Maksimenko-Shejko K.V.* R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob'ektov i fizicheskikh polej. Kharkiv, IPMash NAN Ukraïni, 2009. 306 p.

15. *Pavlovskij N.N.* Teorija dvizhenija gruntovyh vod pod gidrotehničeskimi sooruzhenijami i ejo osnovne prilozhenija. Petrograd, Izd-vo Nauchn.-meliorac. in-ta, 1922. 752 p.

16. *Polubarinova-Kochina P.Ja.* Teorija dvizhenija gruntovyh vod. M.: Nauka, 1977. 664 p.

17. *Rvachev V.L.* Ob analiticheskom opisani nekotoryh geometricheskikh ob'ektov. Dokl. AN SSSR. 1963. 153, № 4. P. 765-768.

18. *Rvachev V.L.* Teorija R-funkcij i nekotorye ejo prilozhenija. K.: Nauk. dumka, 1982. 552 p.

19. *Sidorov M.V., Storozenko A.V.* Matematicheskoe kompjuternoe modelirovanie nekotoryh fil'tracionnyh techenij. Radiojelektronika i informatika. 2004. № 4. P. 58-61.

20. *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method. J. Eng. Math. 2015. Vol. 91. P. 59-79. DOI 10.1007/s10665-014-9746-x.

Надійшла до редколегії 23.02.2018

**Рецензент:** д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М. **Подгорний Олексій Русланович**, аспірант кафедри прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, метод R-функцій. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: oleksii.podhornyi@nure.ua.

**Podhornyj Oleksii Ruslanovich**, postgraduate student of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, R-function's theory and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: oleksii.podhornyi@nure.ua.

## КОНСТРУКТИВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ВОРОНЕНКО М.Д., СИДОРОВ М.В.

Розглядаються нелінійні крайові задачі різних типів для звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою функції Гріна розглядувані крайові задачі зводяться до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке досліджується методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. При цьому будується послідовність двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

**Ключові слова:** додатний розв'язок; нелінійне звичайне диференціальне рівняння; крайова задача; функція Гріна; гетеротонний оператор; двобічні наближення.

**Key words:** positive solution; semilinear ordinary differential equation; boundary problem; Green's function; heterotone operator; two-sided approach.

**Вступ.** Математичне моделювання високо-температурних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння [9] викликає необхідність розв'язання крайових задач для нелінійного звичайного диференціального рівняння вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (0, L). \quad (1)$$

Зазвичай у прикладних задачах виконуються умови  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, L]$  і ставиться задача знаходження додатного на  $(0, L)$  розв'язку рівняння (1). Точні розв'язки крайових задач для рівняння (1) відомі лише у поодиноких випадках. Крім того, до певних складностей приводить вирішення питання про існування та єдиність розв'язку. У зв'язку з цим актуальною науковою проблемою є розробка методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, тобто таких, які не тільки дозволяють з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонують алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним методам, які дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Розробці двобічних ітераційних методів присвячені роботи [1-7], але в них в основному розглядалися двовимірні крайові задачі, одновимірні інтегральні рівняння або одновимірні крайові задачі з першими крайовими умовами.

**1. Постановка задачі.** Метою роботи є розробка нових методів конструктивного дослідження нелінійного звичайного диференціального рівняння

$$-u'' = f(x, u), \quad x \in (0, L), \quad (2)$$

якщо в точках  $x = 0$  та  $x = L$  задані перші, другі або треті крайові умови.

Вважатимемо, що  $f(x, u)$  додатна та неперервна за сукупністю змінних  $x$ ,  $u$ , якщо  $x \in (0, L)$ ,  $u > 0$ .

За цих умов ставиться задача знаходження додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

Усього є можливими дев'ять постановок крайових умов:

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (3)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(L) = 0, \quad (4)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (5)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(L) + k_2 u(L) = 0, \quad (6)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(L) + k_2 u(L) = 0, \quad (7)$$

$$u'(0) - k_1 u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (8)$$

$$u'(0) - k_1 u(0) = 0, \quad u'(L) = 0, \quad (9)$$

$$u'(0) - k_1 u(0) = 0, \quad u'(L) + k_2 u(L) = 0, \quad (10)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(L) = 0, \quad (11)$$

де  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ .

Відмітимо, що крайові умови (7), (9) є частинним випадком крайових умов (10), якщо  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  відповідно, а крайові умови (11) – частинний випадок крайових умов (10), якщо одночасно  $k_1 = 0$  і  $k_2 = 0$ .

Для аналізу кожної з поставлених крайових задач застосуємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [4, 6].

**2. Деякі відомості з теорії нелінійних операторів у просторах з конусом.** Наведемо деякі факти з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, які будуть використовуватися далі [4, 6].

Нехай  $E$  – дійсний банахів простір,  $\theta$  – нульовий елемент простору  $E$ . Замкнена опукла множина  $K \subset E$  називається конусом, якщо з того, що  $u \in K$ ,  $u \neq \theta$ , випливає  $\alpha u \in K$  при  $\alpha \geq 0$  та  $-u \notin K$ .

Будь-який конус  $K \subset E$  дозволяє ввести у просторі  $E$  напівупорядкованість за правилом:  $v \leq w$ , якщо  $w - v \in K$ . Елементи  $u \geq \theta$  (тобто  $u \in K$ ) називаються додатними. Множина елементів  $\langle v, w \rangle$  напівупорядкованого простору, яка складається з тих  $u \in E$ , для яких  $v \leq u \leq w$ , називається конусним відрізком.

Важливий клас конусів для застосувань теорії напівупорядкованих просторів у обчислювальній математиці складають нормальні конуси. Конус  $K$  називається нормальним, якщо існує таке чи-

сло  $N(K) > 0$ , що з  $\theta \leq v \leq w$  впливає  $\|v\| \leq N(K)\|w\|$ . У цьому випадку кажуть, що норма напівмонотонна. Якщо  $N(K) = 1$ , то конус називають гострим і кажуть, що норма монотонна. Розглянемо означення деяких класів операторів у просторах з конусом.

Оператор  $T: E \rightarrow E$  називається додатним, якщо він залишає інваріантним конус  $K$ , тобто  $T(u) \in K$  для будь-якого  $u \in K$ .

Оператор  $T: E \rightarrow E$  називається гетеротонним, якщо він дозволяє діагональне подання  $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$ , де супровідний оператор  $\hat{T}: E \times E \rightarrow E$  монотонно зростає за першим аргументом і спадає за другим, тобто

а) якщо  $v_1 \leq v_2$ , то  $\hat{T}(v_1, w) \leq \hat{T}(v_2, w)$  для всіх  $w \in E$ ;

б) якщо  $w_1 \leq w_2$ , то  $\hat{T}(v, w_1) \geq \hat{T}(v, w_2)$  для всіх  $v \in E$ .

Конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора  $T$ , якщо

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0.$$

Зафіксуємо деякий ненульовий елемент  $u_0 \in K$  і позначимо через  $K(u_0)$  множину тих елементів  $u \in K$ , для яких можна вказати такі  $\alpha, \beta > 0$ , що  $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$ .

Додатний гетеротонний оператор  $T$  називається псевдоувігнутих, якщо  $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$  для будь-яких  $v, w \in K$ ,  $v \neq \theta$ ,  $w \neq \theta$ , і для будь-яких  $v, w \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0; 1)$ :

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w),$$

причому знак рівності тут неможливий.

Псевдоувігнутий оператор  $T$  називається  $u_0$ -псевдоувігнутих, якщо для будь-яких  $v, w \in K(u_0)$  і  $\tau \in (0; 1)$  можна знайти таке  $\eta(v, w, \tau) > 0$ , що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau[1 + \eta(v, w, \tau)]\hat{T}(v, w).$$

Має місце таке твердження [6]: якщо конус  $K$  є нормальним, оператор  $\hat{T}$  цілком неперервним, для  $T$  існує сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$ , а система  $\hat{T}(v, w) = v$ ,  $\hat{T}(v, w) = w$  на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  не має розв'язків таких, що  $v \neq w$ , то ітераційний процес, який формується за правилом

$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n)$ ,  $w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , починаючи з точки  $(v_0, w_0)$ , двобічно збігається до єдиної на  $(v_0, w_0)$  нерухомої точки  $u^*$  оператора  $T$ :

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

Відомо [6], що система  $\hat{T}(v, w) = v$ ,  $\hat{T}(v, w) = w$  на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  не має розв'язків таких, що  $v \neq w$ , якщо  $T - u_0$ -псевдоувігнутий оператор.

**3. Побудова двобічних наближень.** Нехай  $C[0, L]$  – банахів простір неперервних на  $[0, L]$  функцій з нормою  $\|u\| = \max_{x \in [0, L]} |u(x)|$ . Виділимо у

$C[0, L]$  конус  $K_+ = \{u \in C[0, L] : u(x) \geq 0, x \in [0, L]\}$  невід'ємних функцій. Значимо, що конус  $K_+$  у  $C[0, L]$  є нормальним (і навіть гострим) [4, 6].

За допомогою конуса  $K_+$  у просторі  $C[0, L]$  введемо напівупорядкованість за правилом: для  $u, v \in C[0, L]$   $u \leq v$ , якщо  $v - u \in K_+$ , тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in [0, L].$$

Нагадаємо [8], що функцією Гріна оператора

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u \text{ називається функція}$$

$G(x, s)$  така, що

1)  $G(x, s)$  задовольняє однорідне рівняння

$$Lu = 0$$

всюди, крім точки  $x = s$  ( $s$  – довільна, але фіксована точка з  $(0, L)$ );

2)  $G(x, s)$  задовольняє крайові умови задачі;

3)  $G(x, s)$  неперервна за  $x$  при будь-якому фіксованому  $s$ ;

4) має місце співвідношення

$$G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Можна довести, що

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s < x \leq L, \end{cases}$$

де  $u_1(x)$  – нетривіальний розв'язок однорідного рівняння  $Lu = 0$ , що задовольняє крайову умову при  $x = 0$ ;  $u_2(x)$  – нетривіальний розв'язок однорідного рівняння  $Lu = 0$ , що задовольняє крайову умову при  $x = L$ ;  $|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u'_1(s) & u'_2(s) \end{vmatrix}$  – визначник Вронського функцій  $u_1, u_2$ .

Функція Гріна існує за умови, що  $\lambda = 0$  не є вла-

сним значенням оператора  $L$  [8].

Нехай  $G(x,s)$  – функція Гріна оператора  $-\frac{d^2u}{dx^2}$

для одних з крайових умов (3) – (10) (функція

Гріна оператора  $-\frac{d^2u}{dx^2}$  для другої крайової задачі

– умови (11) – не існує). Аналітичний вигляд фу-

нкції Гріна оператора  $-\frac{d^2u}{dx^2}$  для різного типу

крайових умов наведено у табл. 1. Тоді крайова

задача для рівняння (2) з одними з крайових умов (3) – (10) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$u(x) = \int_0^L G(x,s)f(s,u(s))ds. \quad (12)$$

Розв'язком (узагальненим) крайової задачі для рівняння (2) з одними з крайових умов (3) – (10) називатимемо функцію  $u^* \in C[0, L]$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (12).

Таблиця 1

№	Крайові умови при		Вигляд функції Гріна $G(x, s)$	Функція $u_0(x) = \int_0^L G(x, s)ds$
	$x = 0$	$x = L$		
1	$u(0) = 0$	$u(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{x(L-s)}{L}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s(L-x)}{L}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{x(L-x)}{2}$
2	$u(0) = 0$	$u'(L) = 0$	$\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s, \\ s, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{x(2L-x)}{2}$
3	$u'(0) = 0$	$u(L) = 0$	$\begin{cases} L-s, & 0 \leq x \leq s, \\ L-x, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{(L+x)(L-x)}{2}$
4	$u(0) = 0$	$u'(L) + k_2 u(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{x[1+k_2(L-s)]}{1+k_2L}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s[1+k_2(L-x)]}{1+k_2L}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{x[L(2+k_2L) - (1+k_2L)x]}{2(1+k_2L)}$
5	$u'(0) = 0$	$u'(L) + k_2 u(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{1+k_2(L-s)}{k_2}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1+k_2(L-x)}{k_2}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{2L+k_2(L-x)(L+x)}{2k_2}$
6	$u'(0) - k_1 u(0) = 0$	$u(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{(k_1 x + 1)(L-s)}{1+k_1 L}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{(k_1 s + 1)(L-x)}{1+k_1 L}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{(L-x)[L + (1+k_1 L)x]}{2(1+k_1 L)}$
7	$u'(0) - k_1 u(0) = 0$	$u'(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{k_1 x + 1}{k_1}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{k_1 s + 1}{k_1}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{2L + k_1 x(2L-x)}{2k_1}$
8	$u'(0) - k_1 u(0) = 0$	$u'(L) + k_2 u(L) = 0$	$\begin{cases} \frac{(k_1 x + 1)[1+k_2(L-s)]}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 L}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{(k_1 s + 1)[1+k_2(L-x)]}{k_1 + k_2 + k_1 k_2 L}, & s < x \leq L. \end{cases}$	$\frac{L(2+k_2L) + k_1 L(2+k_2L)x}{2(k_1 + k_2 + k_1 k_2 L)} - \frac{x^2}{2}$
9	$u'(0) = 0$	$u'(L) = 0$	не існує	—

З рівнянням (12) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, який діє у  $C[0, L]$  за правилом

$$(Tu)(x) = \int_0^L G(x, s) f(s, u(s)) ds. \quad (13)$$

З табл. 1 бачимо, що для всіх крайових умов (3) –

(10) функція Гріна оператора  $-\frac{d^2u}{dx^2}$  є невід'ємною:  $G(x, s) \geq 0$ ,  $x, s \in [0, L]$ , та неперервною у квадраті  $0 \leq x, s \leq L$ . Оскільки  $f(x, u)$  додатна, якщо  $x \in (0, L)$ ,  $u > 0$ , то оператор  $T$  є додатним, тобто залишає інваріантним конус  $K_+$ :  $T(K_+) \subset K_+$ .

Припустимо, що функція  $f(x, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, u) = \hat{f}(x, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $x, v, w$  функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in (0, L)$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (13) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds. \quad (14)$$

Очевидно, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Якщо функція  $f(x, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $x \in (0, L)$ , можна обрати  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , а для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(x, u)$  можна покласти  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$ .

У конусі  $K_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  умовами

$$\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0, \quad \hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0,$$

тобто

$$\int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, v^0(s), w^0(s)) ds \geq v^0(x) \quad \text{для всіх } x \in [0, L],$$

$$\int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, w^0(s), v^0(s)) ds \leq w^0(x) \quad \text{для всіх } x \in [0, L].$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), \\ k = 0, 1, 2, \dots; \quad v^{(0)} = v^0, \quad w^{(0)} = w^0,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds, \quad (15)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds, \quad (16)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w^0(x). \quad (17)$$

З огляду на сильну інваріантність конусного відрізка  $\langle v^0, w^0 \rangle$  та гетеротонність оператора  $T$ , для якого оператор  $\hat{T}$  є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v^{(k)}(x)\}$  не спадає за конусом  $K_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x)\}$  не зростає за конусом  $K_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $K_+$  і цілком неперервності оператора  $\hat{T}$  випливає існування границь  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq \\ \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Функції  $v^*$  і  $w^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v^* = \hat{T}(v^*, w^*), \quad w^* = \hat{T}(w^*, v^*),$$

тобто системи

$$v^*(x) = \int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, v^*(s), w^*(s)) ds,$$

$$w^*(x) = \int_0^L G(x, s) \hat{f}(s, w^*(s), v^*(s)) ds.$$

Якщо ж отримали, що  $v^* = w^* = u^*$ , то  $u^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язок відповідної крайової задачі.

Умовою, яка забезпечить єдиність додатного розв'язку крайової задачі, є  $u_0$ -псевдоувігнутість оператора  $T$  вигляду (13) [6].

Найбільш дослідженим є випадок першої крайової задачі (2), (3). Зокрема, доведено [6], що відповідний оператор  $T$  є  $u_0$ -псевдоувігнутим з

$$u_0(x) = \int_0^L G(x, s) ds$$

за умови: для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x, v, w), \quad x \in (0, L). \quad (18)$$

Як бачимо, функція  $u_0(x)$  задовольняє відповідні функції  $G(x, s)$  крайові умови і є розв'язком рівняння  $-u'' = 1$ . Отже, у випадку крайових умов (4) – (10) умова (18) теж забезпечить виконання властивості  $u_0$ -псевдоувігнутості оператора  $T$  ви-

гляду (13) з  $u_0(x) = \int_0^L G(x,s)ds$ . Крім того, можна

запропонувати шукати кінці сильно інваріантно-го для оператора  $\hat{T}$  вигляду (14) конусного відрі-зка у вигляді

$$v^0(x) = \alpha u_0(x), \quad w^0(x) = \beta u_0(x).$$

Тоді для визначення  $\alpha$  і  $\beta$  ( $0 \leq \alpha < \beta$ ) маємо сис-тему нерівностей: для всіх  $x \in [0, L]$

$$\int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s)) ds \geq \alpha u_0(x), \quad (19)$$

$$\int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s)) ds \leq \beta u_0(x). \quad (20)$$

Отже, справджується така теорема.

**Теорема.** Нехай система нерівностей (19), (20) має розв'язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 \leq \alpha < \beta$ , і вико-нується умова (18). Тоді ітераційний процес (15) – (17) збігається до єдиного неперервного дода-тного розв'язку  $u^* \in \langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$  відповідної кра-йової задачі для рівняння (2), причому мають мі-сце нерівності

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

За наближений розв'язок крайової задачі на  $k$ -й ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}.$$

Зауважимо, що перевагою побудованих двобіч-них ітераційних процесів є те, що на кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну оцінку похибки для на-ближеного розв'язку:

$$\|u^* - u^{(k)}\|_{C[0, L]} \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, L]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [0, L]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$ .

**4. Результати обчислювального експерименту.** Обчислювальний експеримент для рівняння (2)

було проведено для  $f(u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$  при  $L = 1$  і

крайових умовах (3), (4), (6), (10).

Відповідний інтегральний оператор

$$(Tu)(x) = \int_0^L G(x,s) \left( \sqrt{u(s)} + \frac{1}{\sqrt{u(s)}} \right) ds,$$

очевидно, є гетеротонним з супровідним опера-тором вигляду

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_0^L G(x,s) \left( \sqrt{v(s)} + \frac{1}{\sqrt{w(s)}} \right) ds.$$

Безпосередньою перевіркою встановлено вико-нання умови (18): для будь-яких додатних чисел  $v, w$  при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$\sqrt{\tau v} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau} w}} > \tau \left( \sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right),$$

або

$$(\sqrt{\tau} - \tau) \left( \sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right) > 0.$$

У випадку крайових умов (3) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями  $\alpha = 2,55$ ,  $\beta = 2,85$ . Збіж-ність з точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$  отримано на четвертій ітерації. На рис. 1 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх наближень  $v^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , а в табл. 2 наведено значення на-ближеного розв'язку  $u^{(4)}(x)$  в точках  $x_i = 0,25i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

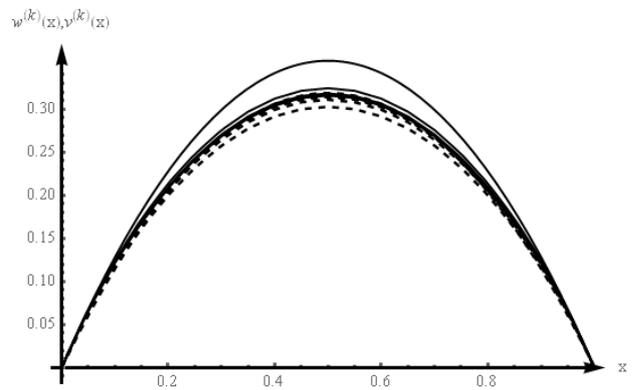


Рис. 1

Таблиця 2

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(4)}$	0	0,2416	0,3156	0,2416	0

Для крайових умов (4) отримано, що кінці силь-но інваріантного конусного відрізка можна ви-значити значеннями  $\alpha = 1,75$ ,  $\beta = 2,60$ . Збіжність з точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$  отримано на п'ятій ітерації. На рис. 2 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх наближень  $v^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , а в табл. 3 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(5)}(x)$  в точках  $x_i = 0,25i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

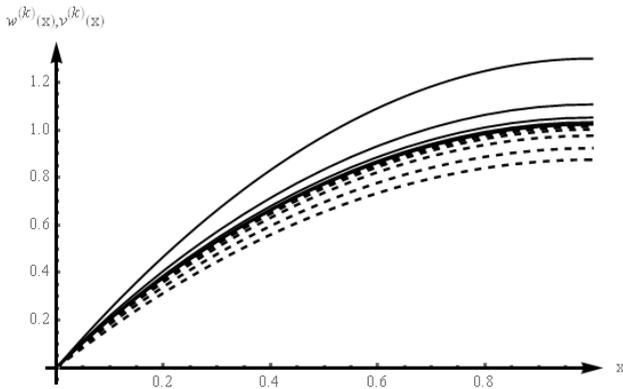


Рис. 2

Таблиця 3

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	0	0,4561	0,7701	0,9576	1,0200

У випадку крайових умов (6) (при  $k_2 = 1$ ) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями  $\alpha = 1,60$ ,  $\beta = 2,75$ . Збіжність з точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$  отримано на п'ятій ітерації. На рис. 3 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх наближень  $v^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , а в табл. 4 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(5)}(x)$  в точках  $x_i = 0,25i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

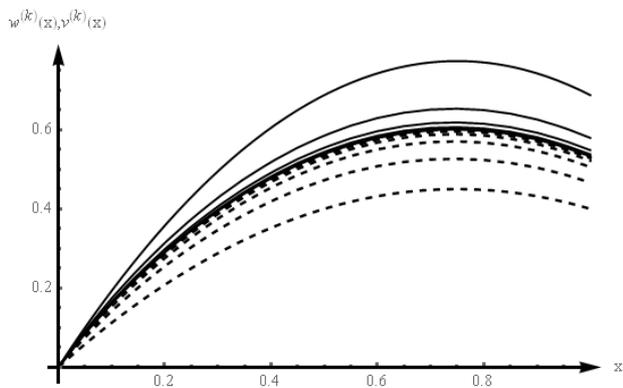


Рис. 3

Таблиця 4

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	0	0,3447	0,5380	0,5995	0,5316

Для крайових умов (10) (при  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями  $\alpha = 1,85$ ,  $\beta = 2,20$ . Збіжність з точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$  отримано на п'ятій ітерації. На рис. 4 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх наближень  $v^{(k)}(x)$ ,

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , а в табл. 5 наведено значення наближеного розв'язку  $u^{(5)}(x)$  в точках  $x_i = 0,25i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

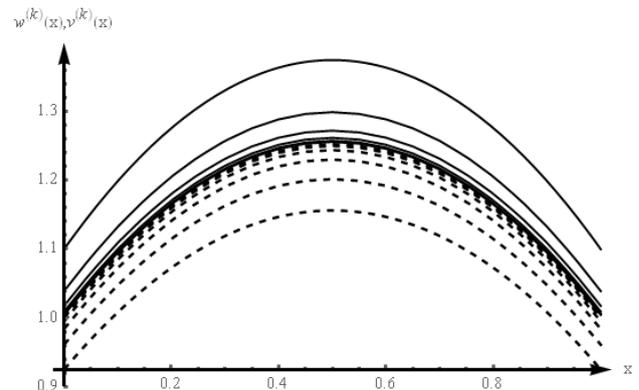


Рис. 4

Таблиця 5

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	1,0033	1,1916	1,2544	1,1916	1,0033

**5. Висновки.** Вперше проведено дослідження можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійного звичайного диференціального рівняння  $-u'' = f(x, u)$  для різних типів крайових умов. Отримано умови існування додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Одержані результати можуть бути використані у математичному моделюванні нелінійних процесів у науці та техніці. Також їх можна розповсюдити на звичайні диференціальні рівняння з більш загальною лівою частиною і використати при побудові на основі методу Рунге напівдискретних методів чисельного аналізу квазілінійного рівняння теплопровідності. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

**Література:** 1. Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50 – 57. 2. Колосова С.В., Луханін В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Ланге-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107 – 120. 3. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28 – 31. 4. Красносельский М.А. Положительные решения

операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с. **5.** Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. К.: Наук. думка, 1980. 268 с. **6.** Опојцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. **7.** Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157 – 167. **8.** Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 254 с. **9.** Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Интеллект, 2008. 408 с. **10.** Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двусторонні наближені методи. Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. 515 с.

#### Transliterated bibliography:

**1.** Kolosov A.I., Kolosova S.V., Sidorov M.V. Konstruktivnoe issledovanie kraevykh zadach dlya nelineynykh differencial'nykh uravnenij // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 2. Pp. 50 – 57.  
**2.** Kolosova S.V., Luhanin V.S., Sidorov M.V. O postroenii dvustoronnih priblizhenij k polozhitel'nomu resheniju uravnenija Lane-Emdena // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2015. № 3. Pp. 107 – 120.  
**3.** Kolosova S.V., Sidorov M.V. Primenenie iteracionnykh metodov k resheniju jellipticheskikh kraevykh zadach s jekspontencional'noj nelinejnost'ju // Radioelektronika i informatika. 2013. № 3 (62). Pp. 28 – 31.  
**4.** Krasnosel'skij M.A. Polozhitel'nye reshenija operatornykh uravnenij. М.: GIFML, 1962. 394 p.  
**5.** Kurpel' N.S., Shuvar B.A. Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenie. К.: Nauk. dumka, 1980. 268 p.  
**6.** Opojcev V.I., Hurodze T.A. Nelinejnye operatory v prostranstvakh s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 p.  
**7.** Sidorov M.V. Metod dvobichnih nablizhen' rozv'jazannja zadachi Dirihle dlja nelinijnogo rivnjannja teploprovodnosti // Matematichne ta komp'juterne modeljuvannja. Serija: Fiziko-matematichni nauki. 2017. Vip. 16. Pp. 157 – 167.

**8.** Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Differencial'nye uravnenija. М.: FIZMATLIT, 2005. 254 p.

**9.** Frank-Kameneckij D.A. Osnovy makrokinetiki. Diffuzija i teploperedacha v himicheskoj kinetike. М.: Intellect, 2008. 408 p.

**10.** Shuvar B.A., Kopach M.I., Mentins'kij S.M., Obshta A.F. Dvustoronni nablizheni metodi. Ivano-Frankovsk: VDV CIT, 2007. 515 p.

Надійшла до редколегії 02.03.2018

**Рецензент:** д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

**Вороненко Микита Дмитрович**, студент гр. ПМ-14-1 фак-ту інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: mykyta.voronenko@nure.ua.

**Сидоров Максим Вікторович**, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія R-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

**Вороненко Mykyta Dmytrovych**, student of group PM-14-1 Faculty of Information and Analytical Technologies and Management, Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: mykyta.voronenko@nure.ua.

**Sidorov Maxim Victorovich**, Ph.D. in Physics and Maths, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function's theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

---

---

# КОМПЬЮТЕРНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

---

УДК 658:512.011:681.326:519.713

## ДЕДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ X-ФУНКЦИЙ

*ХАХАНОВ В.И., ЕМЕЛЬЯНОВ И.В.,  
ЛЮБАРСКИЙ М.М., ЧУМАЧЕНКО С.В.,  
ЛИТВИНОВА Е.И., ЛАРЧЕНКО Л.В.*

---

Предлагается структурная модель взаимодействия X-функций и производных компонентов, ориентированных на синтез и анализ цифровых систем в целях уменьшения времени проектирования и тестирования вычислительных устройств. Вводится понятие простых X-функций от конечного числа переменных, которые характеризуются отсутствием минимизации и наличием свойств тестопригодности для решения задач синтеза тестов, моделирования и диагностирования. Формулируются метрические свойства X-функций от конечного числа переменных для оценки качества проверяющих тестов путем дедуктивного моделирования проверяемых константных неисправностей на кубитных структурах данных. Предлагается аналитическое выражение для синтеза кубитных покрытий X-функций от конечного числа переменных в целях последующего синтеза и анализа тестов проверки и диагностирования неисправностей. Синтезируются дедуктивные формулы транспортирования входных списков неисправностей на внешние выходы для X-функций от конечного числа переменных, для построения секвенсора моделирования дефектов, инвариантного к входным тестовым наборам. Предлагается кубитный и квантовый методы безусловного диагностирования дефектов, использующие параллельные логические операции для повышения быстродействия online поиска дефектов.

**Ключевые слова:** проектирование, тестирование, кубитное моделирование, кубитное диагностирование, X-функция, кубитные структуры данных, кубитное покрытие.

**Key words:** design, test, qubit simulation, qubit diagnosis, X-function, qubit data structure, qubit coverage.

### 1. Введение

Дедуктивный анализ цифровых систем и компонентов является самым эффективным аппаратом для синтеза тестов и оценки их качества, а также для диагностирования неисправностей в режиме реального времени. Сущность дедуктивного моделирования заключается в использовании синтези-

рованных цифровых подходов, которые являются дополнением к исходной функциональности, предназначенных для транспортирования к внешним выходам негативных реакций, возникающих в схеме неисправностей. Как правило, сложность дедуктивных подходов, реализуемых программно или аппаратно, в несколько раз выше, чем полезная функциональность. Поэтому эффективность применения дедуктивного анализа следует рассматривать с позиции уменьшения интегрального времени проектирования цифровой системы и выхода изделия на рынок электронных технологий.

Цель исследования – уменьшение времени проектирования цифровой системы на кристалле за счет синтеза дедуктивных функций логических компонентов и схем, включая X-функции, представленных кубитными формами описания поведения цифровых устройств.

Задачи: 1) Разработать структурную модель взаимодействия X-функций и производных компонентов, ориентированных на синтез и анализ цифровых систем. 2) Определить простые X-функции от конечного числа переменных, для синтеза тестов, моделирования и диагностирования цифровых устройств. 3) Сформулировать метрические свойства X-функций от конечного числа переменных для оценки качества проверяющих тестов на кубитных структурах данных. 4) Создать аналитическое выражение для синтеза кубитных покрытий X-функций от конечного числа переменных в целях анализа тестов проверки и диагностирования неисправностей. 5) Синтезировать дедуктивные формулы транспортирования входных списков неисправностей для X-функций от конечного числа переменных. 6) Разработать кубитный и квантовый методы безусловного диагностирования дефектов на основе использования параллельных логических операций.

### 2. Дедуктивные функции параллельного моделирования неисправностей

Дедуктивный анализ используется для определения качества теста относительно введенного класса неисправностей, как правило, одиночных константных. Существует развитая теория дедуктивного анализа [4], ориентированная на параллельную обработку списков неисправностей. Базовые понятия теории моделирования неисправностей представлены аппаратом транспортирования спис-

ков дефектов через примитивные функциональные логические элементы [13-19]. Далее определены дедуктивные функции параллельного моделирования неисправностей на исчерпывающем тесте для функциональных элементов and, or, not. Получение дедуктивного преобразователя для функции and:

$$\begin{aligned} L[T = (00,01,10,11), F = (X_1 \wedge X_2)] = \\ = L\{(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \wedge [(X_1 \oplus T_{t1} \wedge X_2 \oplus T_{t2}) \oplus T_{t3}]\} = \\ = (\bar{x}_1\bar{x}_2)\{[(X_1 \oplus 0) \wedge (X_2 \oplus 0)] \oplus 0\} \vee (\bar{x}_1x_2)\{[(X_1 \oplus 0) \wedge (X_2 \oplus 1)] \oplus 0\} \vee \\ \vee (x_1\bar{x}_2)\{[(X_1 \oplus 1) \wedge (X_2 \oplus 0)] \oplus 0\} \vee (x_1x_2)\{[(X_1 \oplus 1) \wedge (X_2 \oplus 1)] \oplus 1\} = \\ = (\bar{x}_1\bar{x}_2)(X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{x}_1x_2)(X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (x_1\bar{x}_2)(\bar{X}_1 \wedge X_2) \vee (x_1x_2)(X_1 \vee X_2) \end{aligned}$$

Аналогично выполняются вычисления для функции or:

$$\begin{aligned} L[T = (00,01,10,11), F = (X_1 \vee X_2)] = \\ = L\{(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \wedge [(X_1 \oplus T_{t1} \vee X_2 \oplus T_{t2}) \oplus T_{t3}]\} = \\ = (\bar{x}_1\bar{x}_2)\{[(X_1 \oplus 0) \vee (X_2 \oplus 0)] \oplus 0\} \vee (\bar{x}_1x_2)\{[(X_1 \oplus 0) \vee (X_2 \oplus 1)] \oplus 1\} \vee \\ \vee (x_1\bar{x}_2)\{[(X_1 \oplus 1) \vee (X_2 \oplus 0)] \oplus 1\} \vee (x_1x_2)\{[(X_1 \oplus 1) \vee (X_2 \oplus 1)] \oplus 1\} = \\ = (\bar{x}_1\bar{x}_2)(X_1 \vee X_2) \vee (\bar{x}_1x_2)(\bar{X}_1 \wedge X_2) \vee (x_1\bar{x}_2)(X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (x_1x_2)(X_1 \wedge X_2) \end{aligned}$$

Здесь  $T_t = (T_{t1}, T_{t2}, T_{t3})$ ,  $(t = \bar{1}, 4)$  – тест-вектор, имеющий 3 координаты, где последняя из них определяет состояние выхода двухвходового элемента and (or); L – выходной список неисправностей; X – список неисправностей на конкретном входе примитива;  $x = \{0,1\}$  – логическое значение на входе примитива. В следующем преобразовании  $T_t = (T_{t1}, T_{t2})$ ,  $(t = \bar{1}, \bar{2})$  – тест-вектор, имеющий 2 координаты, где вторая – состояние выхода инвертора:

$$\begin{aligned} L[T = (0,1), F = \bar{X}_1] = L\{(\bar{x}_1 \vee x_1)[\overline{(X_1 \oplus T_{t1})} \oplus T_{t2}]\} = \\ = \bar{x}_1[(X_1 \oplus 0) \oplus 1] \vee x_1[(X_1 \oplus 1) \oplus 0] = \bar{x}_1\bar{X}_1 \vee x_1\bar{X}_1 = \bar{x}_1X_1 \vee x_1X_1. \end{aligned}$$

Последнее выражение иллюстрирует инвариантность инверсии ко входному набору для транспортирования дефектов. Она трансформируется в повторитель. Поэтому данная функция не фигурирует на выходах дедуктивных элементов. Совместная аппаратная реализация дедуктивных функций для оставшихся двухвходовых элементов and, or на исчерпывающем тесте представлена универсальной схемой (рис. 1) дедуктивно-параллельного анализа неисправностей.

В симуляторе представлены булевы (x1, x2) и регистровые (X1, X2) для кодирования неисправностей входы, переменная V выбора типа исправной функции (and, or), выходная регистровая переменная Y. Состояния двоичных входов x1, x2 и переменная выбора элемента определяют одну из че-

тырех дедуктивных функций для получения вектора Y проверяемых неисправностей.

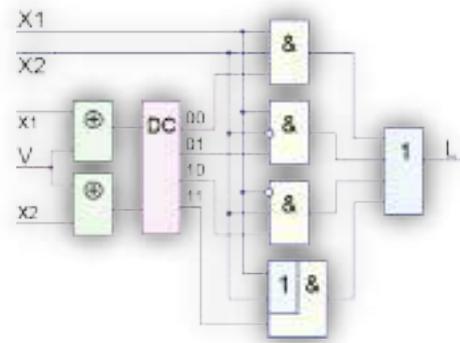


Рис. 1. Симулятор неисправностей примитивов  
Логическая функция хог обладает уникальным свойством транспортирования входных списков неисправностей. Далее рассматривается синтез дедуктивной модели данной функции на входных тестовых последовательностях:

$$\begin{aligned} L[T = (00,01,10,11), F = X_1 \oplus X_2 = X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2] = \\ = L\{(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \wedge \\ \wedge [(X_1 \oplus T_{t1})(\bar{X}_2 \oplus T_{t2}) \vee (\bar{X}_1 \oplus T_{t1})(X_2 \oplus T_{t2})] \oplus T_{t3}\} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(T_0 = 00) = (\bar{x}_1\bar{x}_2) \wedge [(X_1 \oplus 0)(\bar{X}_2 \oplus 0) \vee (\bar{X}_1 \oplus 0)(X_2 \oplus 0)] \oplus 0\} = \\ = (\bar{x}_1\bar{x}_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(T_1 = 01) = (\bar{x}_1x_2) \wedge [(X_1 \oplus 0)(\bar{X}_2 \oplus 1) \vee (\bar{X}_1 \oplus 0)(X_2 \oplus 1)] \oplus 1\} = \\ = (\bar{x}_1x_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1X_2)] \oplus 1\} = \\ = (\bar{x}_1x_2) \wedge [(\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \wedge (X_1 \vee X_2)] = (\bar{x}_1x_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(T_2 = 10) = (x_1\bar{x}_2) \wedge [(X_1 \oplus 1)(\bar{X}_2 \oplus 0) \vee (\bar{X}_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 0)] \oplus 1\} = \\ = (x_1\bar{x}_2) \wedge [[(\bar{X}_1\bar{X}_2) \vee (X_1X_2)] \oplus 1] = \\ = (x_1\bar{x}_2) \wedge [(X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)] = (x_1\bar{x}_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(T_3 = 11) = (x_1x_2) \wedge [(X_1 \oplus 1)(\bar{X}_2 \oplus 1) \vee (\bar{X}_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 1)] \oplus 0\} = \\ = (x_1x_2) \wedge [[(\bar{X}_1X_2) \vee (X_1\bar{X}_2)] \oplus 0] = (x_1x_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2)]. \end{aligned}$$

В результате синтеза оказалось, что все дедуктивные формулы на четырех входных тестовых наборах имеют одинаковый вид, что означает инвариантность хог-функции к входным тестовым наборам – любое входное слово имеет одну единственную дедуктивную формулу

$$\begin{aligned} L(\text{хог}) = (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2) = \\ = (xx) \wedge [(X_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2)]. \end{aligned}$$

Это означает, что списки входных неисправностей всегда будут объединяться на выходе хог-элемента за исключением случая, когда данные списки будут идентичными. В этом случае на выходе логического элемента хог не будет проверяться ни одна неисправность.

Существуют и другие функции, обладающие единственной универсальной дедуктивной формулой для всех входных тестовых воздействий. Ниже предлагается синтез дедуктивной формулы для операции эквивалентности:

$$L[T = (00, 01, 10, 11), F = X_1 \equiv X_2 = X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2] = \\ = L\{(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2) \wedge \\ \wedge [(X_1 \oplus T_{11})(X_2 \oplus T_{12}) \vee (\bar{X}_1 \oplus T_{11})(\bar{X}_2 \oplus T_{12})] \oplus T_{13}\};$$

$$L(T_0 = 00) (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \oplus 0)(X_2 \oplus 0) \vee (\bar{X}_1 \oplus 0)(\bar{X}_2 \oplus 0)] \oplus 1\} = \\ = (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 X_2)] \oplus 1 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2)];$$

$$L(T_1 = 01) (\bar{x}_1 x_2) \wedge [(X_1 \oplus 0)(X_2 \oplus 1) \vee (\bar{X}_1 \oplus 0)(\bar{X}_2 \oplus 1)] \oplus 0\} = \\ = (\bar{x}_1 x_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 X_2)] \oplus 0 = (\bar{x}_1 x_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2)];$$

$$L(T_2 = 10) (x_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 0) \vee (\bar{X}_1 \oplus 1)(\bar{X}_2 \oplus 0)] \oplus 0\} = \\ = (x_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 X_2)] \oplus 0 = (x_1 \bar{x}_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2)];$$

$$L(T_3 = 11) (x_1 x_2) \wedge [(X_1 \oplus 1)(X_2 \oplus 1) \vee (\bar{X}_1 \oplus 1)(\bar{X}_2 \oplus 1)] \oplus 1\} = \\ = (x_1 x_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 X_2)] \oplus 1 = (x_1 x_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2)].$$

Таким образом, функция эквивалентности (not-xor) также обладает уникальными способностями по транспортированию входных списков неисправностей на выход логической функции, которые не зависят от входного воздействия:

$$L(\text{not} - \text{xor}) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2) \\ = (xx) \wedge [(X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2)].$$

В результате получилось, что дедуктивные формулы для двух различных логических функций xor и not-xor идентичны друг другу. Однако более существенным является факт, что любое тестовое воздействие для цифрового устройства, состоящего из упомянутых логических элементов, проверяет 50 процентов одиночных константных неисправностей, инверсных по отношению к исправному состоянию входных линий. Чтобы проверить все неисправности входных линий, необходимо подать на схему только два тестовых взаимно-инверсных набора.

Формула для определения производных входных булевых переменных использует хог-операцию между ячейками соседних частей кубита:

$$Q^R(X_k) = \{Q_i^L, Q_i^R\} = Q_i^L \bigoplus_{i=1, 2^{k-1}}^{k=1, n} Q_i^R.$$

Структура вычислителя-секвенсора кубитной производной представлена на рис. 2, где результаты выполнения хог-операции заносятся в обе части кубита.

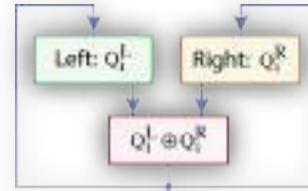


Рис. 2. Секвенсор кубитной производной

В общем случае можно сформулировать критерий существования дедуктивных функций, инвариантных по отношению к входным воздействиям: “Если кубитные производные по всем переменным равны единичному вектору, то дедуктивная формула инвариантна к входным тестовым наборам”. Для четырех логических функций от одной переменной существуют только два таких примитива, которые имеют одинаковые единичные векторы производных, получаемые путем выполнения хог-операции на встречном сдвиге частей кубита:

$$Y = X; Q = 01, Q' = 11;$$

$$Y = \bar{X}; Q = 10, Q' = 11.$$

Для шестнадцати логических функций от двух переменных существуют также два примитива, которые имеют одинаковые единичные векторы производных, получаемые путем выполнения хог-операции на встречном сдвиге частей кубита:

$$Y = X_1 \oplus X_2; Q = 0110; Q' = 1111;$$

$$Y = X_1 \oplus X_2; Q = 1001; Q' = 1111.$$

Для 256 логических функций от трех переменных существуют также два примитива, которые имеют одинаковые единичные векторы производных, получаемые путем выполнения хог-операции на встречном сдвиге частей кубита:

$$Y = X_1 \oplus X_2; Q = 01101001; Q' = 11111111;$$

$$Y = X_1 \oplus X_2; Q = 10010110; Q' = 11111111.$$

Здесь два кубита X-функций от любого конечного числа переменных представляют собой инверсии состояний соответствующих разрядов. Каждый из них может быть разделен на две равные по числу разрядов части, где левая является инверсией правой части:

$$\begin{aligned}
Q(n=1) &= 01 \\
&\quad (10); \\
Q(n=2) &= 0110 \\
&\quad (1001); \\
Q(n=3) &= 01101001 \\
&\quad (10010110); \\
Q(n=4) &= 0110100110010110 \\
&\quad (1001011001101001); \\
Q(n=5) &= 0110100110010110 1001011001101001 \\
&\quad (1001011001101001 0110100110010110).
\end{aligned}$$

**Утверждение 1.** Множество  $|f(X)| = 2^{2^n}$  логических функций от конечного числа переменных  $n$  имеет только две функции, для которых кубитные производные определены как единичные векторы.

**Утверждение 2.** Количество логических функций от  $n$  переменных, где выполняется условие

$$\bigvee_{i=1}^n \left[ \frac{df}{dX_i} = 1 \right],$$

всегда равно двум. Это означает, что не нужно никаких условий по другим входам для активизации выхода при изменении входной переменной  $X_i$ .

**Определение.** X-функция есть логическая простая функция от конечного числа переменных ( $n=1,2,3, \dots$ ), которую невозможно минимизировать.

**Утверждение 3.** Шахматное представление нулевых и единичных состояний в карте Карно задает X-функцию. Следующие два примера логических функций, изображенных в форме карты Карно, иллюстрируют две взаимно инверсных булевых X-функции от четырех переменных:

$X_1 X_2 \setminus X_2 X_3$	00 01 11 10	$X_1 X_2 \setminus X_2 X_3$	00 01 11 10
00	0 1 0 1	00	1 0 1 0
01	1 0 1 0	01	0 1 0 1
11	0 1 0 1	11	1 0 1 0
10	1 0 1 0	10	0 1 0 1

$$Y(0110100110010110) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_4 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3 X_4 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_3 \bar{X}_4 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 X_4;$$

$$Y(1001011001101001) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_4 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 X_4 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3 \bar{X}_4 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 X_4 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_4.$$

Аналогично, с помощью карт Карно, можно представить логические X-функции от трех переменных, которые имеют 8 состояний выходов:

$X_1 \setminus X_2 X_3$	00 01 11 10	$X_1 \setminus X_2 X_3$	00 01 11 10
0	0 1 0 1	0	1 0 1 0
1	1 0 1 0	1	0 1 0 1

Данным функциям можно поставить в соответствие их аналитические формы, которые облада-

ют полезным свойством – каждый терм СДНФ (Совершенная Дизъюнктивная Нормальная Форма) отличается от остальных по двум переменным:

$$Y(01101001) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_1 X_2 X_3;$$

$$Y(10010110) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3.$$

Это означает, что любая одиночная константная неисправность может быть идентифицирована и исправлена на проверяющем входном наборе. Структурная реализация упомянутых выше булевых логических функций СДНФ представлена на рис. 3.

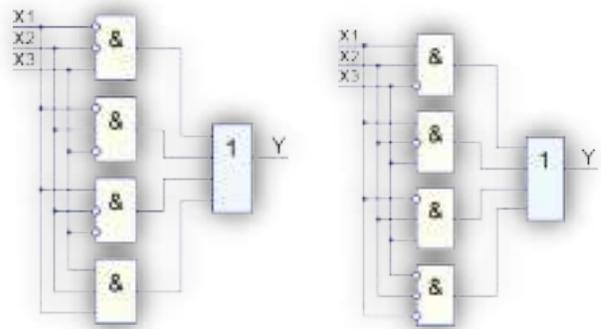


Рис. 3. Структурная реализация булевых X-функций

Моделирование исправного поведения всех входных наборов (таблица T) для первой X-схемы, анализ неисправностей (таблица D), минимизация тестовых последовательностей (таблица M) и кубитная форма минимального теста – таблица T(Q), представлены ниже:

T	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	1
5	1	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	1	1

D	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	. . .	. . .	0	
2	1	0	1	. . .	. . .	. . .	0	
3	1	0	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	. . .	. . .	. . .	0	
5	0	1	0	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	. . .	. . .	. . .	0	0

M	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	. . .	. . .	. . .	0	
2	1	0	1	. . .	. . .	. . .	0	
4	0	1	1	. . .	. . .	. . .	0	
7	0	0	0	. . .	. . .	. . .	0	0
C	x	x	x	x	x	x	x	x

T(Q)
1
1
1
0
1
0
0
1

Здесь каждый входной набор проверяет одиночные константные неисправности внешних входов и выходов, что зафиксировано в таблице D. Минимальный тест, покрывающий все одиночные кон-

стантные неисправности, представлен в таблице М. В последней строке представлен результат покрытия неисправностей в виде вектора С, координаты которого заданы символами  $x=0\cup 1$ . Столбец  $T(Q) = 11101001$  своими единичными значениями создает минимальную кубитную форму теста (двоичные адреса единичных координат), который необходимо подать на внешние входы, чтобы проверить все одиночные константные неисправности внешних и внутренних линий цифровой логической схемы.

Моделирование исправного поведения всех входных наборов (таблица Т) для второй Х-схемы, анализ неисправностей (таблица D), минимизация тестовых последовательностей (таблица М) и кубитная форма минимального теста (таблица Т(Q)), представлены ниже:

T	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	0	1
4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	1	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0

D	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	.	.	.	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1	1	1
3	1	0	0	.	0	.	0	.
4	0	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	.	0	.	.	0
6	0	0	1	0	.	.	.	0
7	0	0	0	1	1	1	1	1

M	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	.	.	.	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1
3	1	0	0	.	0	.	0	.
5	0	1	0	.	0	.	.	0
6	0	0	1	0	.	.	.	0
C	x	x	x	x	x	x	x	x

T(Q)
1
1
0
1
0
1
1
0

Здесь каждый входной набор проверяет одиночные константные неисправности внешних входов и выходов, что зафиксировано в таблице D. Минимальный тест, покрывающий все одиночные константные неисправности, представлен в таблице М. В последней строке представлен результат покрытия неисправностей в виде вектора С, координаты которого заданы символами  $x=0\cup 1$ . Столбец  $T(Q) = 110101101$  своими единичными значениями создает минимальную кубитную форму теста (двоичные адреса единичных координат), который необходимо подать на внешние входы, чтобы проверить все одиночные константные неисправности внешних и внутренних линий цифровой логической схемы.

Для двух логических Х-функций от двух переменных (рис. 4)

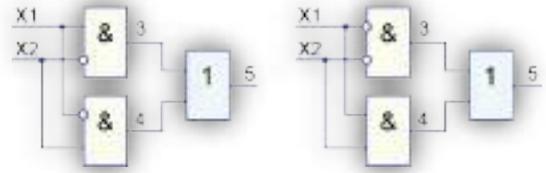


Рис. 4. Х-функции от двух переменных

ниже представлено моделирование исправного поведения всех входных наборов (таблица Т), анализ неисправностей (таблица D) и кубитная форма четырех вариантов минимальных тестов (таблица Т(Q)), рассмотрены функциональные элементы (xor, not-xor – nxr):

T(xor)	1	2	3	4	5	D	1	2	3	4	5	T(Q)	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	.	0	0	1	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1	2	0	1	0	.	0	2	1	1	0	1
3	1	1	0	0	0	3	0	0	1	1	1	3	1	1	1	0

T(nxr)	1	2	3	4	5	D	1	2	3	4	5	T(Q)	1	2	3	4
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	.	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
2	1	0	0	0	0	2	0	1	1	1	0	2	1	1	0	1
3	1	1	0	1	1	3	0	0	.	0	1	3	1	1	1	0

Для обеих функций здесь получены минимальные тесты, состоящие из трех входных наборов. Это связано с тем, что противоположные входные векторы имеют одинаковые состояния выходной переменной.

Для двух логических Х-функций от одной переменной (рис. 5)



Рис. 5. Х-функции от одной переменной

ниже представлено моделирование исправного поведения всех входных наборов (таблица Т), анализ неисправностей (таблица D) и кубитная форма минимальных тестов (таблица Т(Q)), рассмотрены функциональные элементы (повторитель – rep, инвертор – not):

T(rep)	X	Y	D	X	Y	T(Q)
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

T(not)	X	Y	D	X	Y	T(Q)
0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1

Практически полезными для синтеза и анализа цифровых схем могут быть следующие 10 свойств

X-функций, интегрированные в модель отношений, представленную на рис. 6.

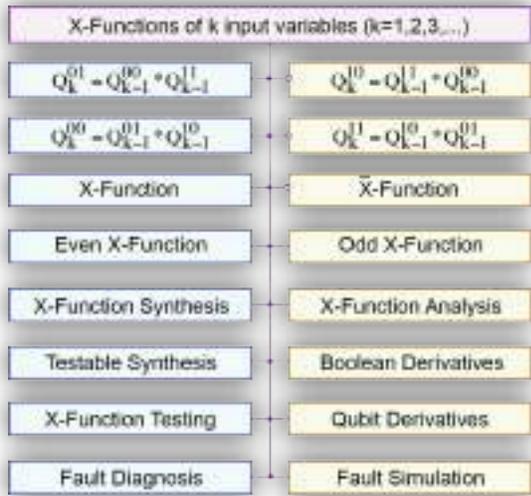


Рис. 6. Структурная модель взаимодействия X-функций

- 1) Кубитное покрытие X-функции имеет равное количество нулевых и единичных координат.
- 2) Количество X-функций от n булевых переменных всегда равно двум:

$$Q^{2^x}(n) = Q^x(n) \vee \bar{Q}^x(n).$$

Состояния координат кубитных покрытий обеих X-функций от n переменных являются взаимно инверсными.

- 3) X-функции от одной логической булевой переменной представлены повторителем и инвертором:  $Y = X; Y = \bar{X}$ .

- 4) X-функции от двух булевых переменных представлены известными логическими примитивами xor, not-xor:  $Y = X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2; Y = X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2$ .

- 5) Кубитная производная по любой переменной X-функции равна единичному вектору. Булева производная по любой переменной X-функции равна единице.

- 6) Для активизации входной переменной X-функции в целях изменения выхода не требуется никаких условий по состоянию других переменных.

- 7) Пара входных наборов, имеющая инверсные сигналы по всем координатам, всегда изменяет состояние выхода X-функции от нечетного числа переменных. Изменение состояния входа X-функции всегда приводит к изменению состояния выхода.

- 8) Синтез двух X-функций от n переменных реализуется путем конкатенации (\*) кубитных векторов X-функций от n-1 переменной:

$$Q^{2^x}(n) = Q^x(n-1) * \bar{Q}^x(n-1) \vee \bar{Q}^x(n-1) * Q^x(n-1).$$

Другая интерпретация X-функций связана с их идентификацией по первому и последнему биту кубитного покрытия: 01, 10, 00, 11. Тогда синтез кубитных векторов X-функций от k переменных можно реализовать путем применения операции конкатенации к двум Q-покрытиям X-функций от k-1 переменных:

$$\begin{aligned} Q_k^{01} &= Q_{k-1}^{00} * Q_{k-1}^{11}; \\ Q_k^{10} &= Q_{k-1}^{11} * Q_{k-1}^{00}; \\ Q_k^{00} &= Q_{k-1}^{01} * Q_{k-1}^{10}; \\ Q_k^{11} &= Q_{k-1}^{10} * Q_{k-1}^{01}. \end{aligned}$$

Естественно, что между двумя кубитными покрытиями X-функций от k переменных существует взаимно-однозначное отношение инверсии:

$$\begin{aligned} Q_k^{01} &= \bar{Q}_k^{10}; \\ Q_k^{10} &= \bar{Q}_k^{01}; \\ Q_k^{00} &= \bar{Q}_k^{11}; \\ Q_k^{11} &= \bar{Q}_k^{00}. \end{aligned}$$

Это означает, если известна одна X-функция от k переменных, то легко можно получить вторую функцию, как двоичное дополнение к первой.

- 9) Любой входной набор для X-функции проверяет 50% неисправностей по внешним входам, которые являются инверсными по отношению к состояниям исправного поведения упомянутых линий. Два взаимно-инверсных тестовых набора проверяют все одиночные константные неисправности входных переменных в X-функции от нечетного числа переменных.

- 10) Дедуктивная формула X-функции транспортирует на выход симметрическую разность входных списков неисправностей. Это означает объединение входных списков проверяемых дефектов за исключением случая, когда списки неисправностей на всех входах идентичны.

Таким образом, логические X-функции, обладающие уникальными свойствами тестирования, могут быть использованы для синтеза тестопригодных и самовосстанавливаемых логических цифровых устройств, а также для транспортирования дефектов от внешних входов до выходов булевой структуры.

### 3. Квантовый метод безусловного поиска дефектов

Для второй X-схемы выполним диагностический эксперимент по построенной таблице неисправностей в целях определения константных дефектов, если реакция устройства на тест зафиксирована в виде: R= (11001100):

Q <sub>ij</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	R
0	1	1	1	.	.	.	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1	1	1	0
3	1	0	0	.	.	0	.	0	0
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	.	0	.	.	0	1
6	0	0	1	0	.	.	.	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	1	0
UF(1)	x	1	x	1	x	1	x	x	1
UF(0)	x	0	x	x	1	x	1	x	0
∩F(1)	.	1	.	.	.	.	.	.	1s
UF(1) \ UF(0)	.	1	.	.	0	.	0	.	m
∩F(1) \ UF(0)	.	1	.	.	.	.	.	.	s

Здесь реализован квантовый метод поиска константных дефектов, основная идея или сущность которого определяется следующими выражениями для диагностирования кратных (m) и одиночных (s) неисправностей соответственно:

$$F = \left( \bigcup_{\forall R_i=1} Q_{ij} \right) \setminus \left( \bigcup_{\forall R_i=0} Q_{ij} \right) = \left( \bigvee_{\exists R_i=1} Q_{ij} \right) \wedge \overline{\left( \bigvee_{\exists R_i=0} Q_{ij} \right)}$$

$$F = \left( \bigcap_{\forall R_i=1} Q_{ij} \right) \setminus \left( \bigcup_{\forall R_i=0} Q_{ij} \right) = \left( \bigwedge_{\exists R_i=1} Q_{ij} \right) \wedge \overline{\left( \bigvee_{\exists R_i=0} Q_{ij} \right)}$$

Диагностирование по второму варианту дает один единственный дефект в схеме, равный константе 1 на втором входе:

$$F^s = \cap F(1) \setminus UF(0) = \boxed{.1. . . . .} = \{2^1\}.$$

В предположении существования кратных дефектов выполнение диагностической процедуры по первому уравнению дает результат:

$$F^m = UF(1) \setminus UF(0) = \boxed{.1. . . 0. . 0.} = \{2^1, 5^0, 7^0\}.$$

Второй вариант диагностического эксперимента зафиксировал следующий вектор экспериментальной проверки по внешнему выходу R=(011001001). Вычислительные процедуры, выполненные в соответствии с двумя приведенными выше уравнениями, дали следующие результаты:

Q <sub>ij</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	R
0	1	1	1	.	.	.	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0	0	.	.	0	.	0	0
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	.	0	.	.	0	0
6	0	0	1	0	.	.	.	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1
UF(1)	x	x	x	1	1	1	1	1	1
UF(0)	x	x	x	0	0	0	0	0	0
∩F(1)	.	.	.	1	1	1	1	1	1s
UF(1) \ UF(0)	.	.	.	1	1	1	1	1	m
∩F(1) \ UF(0)	.	.	.	1	1	1	1	1	s

Это означает, что итоговый результат, полученный по применению обоих уравнений, получился одинаковым:

$$F^m = UF(1) \setminus UF(0) = \boxed{. . . 1 1 1 1 1 1 1} = \{4^1, 5^1, 6^1, 7^1, 8^1\}.$$

$$F^s = \cap F(1) \setminus UF(0) = \boxed{. . . 1 1 1 1 1 1 1} = \{4^1, 5^1, 6^1, 7^1, 8^1\}.$$

Данный факт означает, что полученные неисправности являются эквивалентными и неразличимыми на полном проверяющем исчерпывающем тесте, содержащем 6 наборов. Дальнейшее уменьшение множества дефектов связано с применением условного алгоритма поиска неисправностей в схеме цифрового устройства на основе использования технологий зондового диагностирования.

### 4. Кубитный метод диагностирования дефектов

Рассмотрим кубитный метод поиска дефектов путем применения теоретико-множественной разности двух векторов, соответствующих единичному и нулевому значению состояний выходов, как реакций наблюдаемых выходов на входной тест проверки неисправностей:

$$F = \left( \bigcup_{\forall R_i=1} Q_{ij} \right) \setminus \left( \bigcup_{\forall R_i=0} Q_{ij} \right) = \left( \bigvee_{\exists R_i=1} Q_{ij} \right) \wedge \overline{\left( \bigvee_{\exists R_i=0} Q_{ij} \right)}$$

Структуры данных представлены таблицей неисправностей на декартовом произведении тестовых наборов и множестве линий объекта диагностирования, где каждая ячейка представляет собой два бита: первый из них идентифицирует проверяемую константную неисправность нуля (10), а второй – константную неисправность единицы (01):

$$Q = \{F, T, L\},$$

$$Q = Q_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n};$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_n),$$

$$F_j = \{10 \equiv 0; 01 \equiv 1; 11 = \{0, 1\}; 00 = \emptyset\};$$

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_m);$$

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_n).$$

Суперпозиция неисправностей (две единицы на одной линии-ячейке) дает возможность существенно минимизировать структуры данных для хранения информации в целях последующего поиска дефектов при выполнении диагностического эксперимента в режиме online.

Для проверки метода поиска дефектов далее предлагается логическая схема, представленная на рис. 7, которая имеет 6 элементов and-not, 11 линий, 5 входов и два выхода.

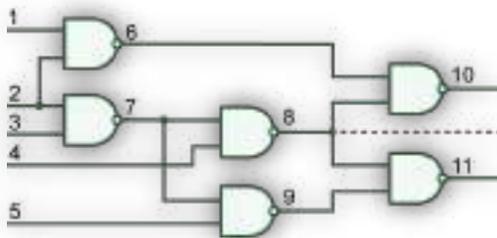


Рис. 7. ISCAS-схема для верификации

Следующая таблица иллюстрирует выполнение диагностического эксперимента в целях объединения множества дефектов, которые формируют некорректные состояния выходов на тестовых наборах {T1-R10; T5-R11; T6-R10, R11; T8-R11}:

Q = Q <sub>ij</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	R <sub>10</sub>	R <sub>11</sub>
T <sub>1</sub>	01	10	01	00	10	00	10	10	00	10	01	1	0
T <sub>2</sub>	10	00	10	00	01	10	00	00	10	01	10	0	0
T <sub>3</sub>	00	01	01	00	00	01	10	01	01	10	10	0	0
T <sub>4</sub>	10	00	01	00	10	00	01	00	10	01	01	0	0
T <sub>5</sub>	00	10	00	01	00	01	00	10	00	10	10	0	1
T <sub>6</sub>	01	10	00	00	10	00	00	01	10	01	10	1	1
T <sub>7</sub>	01	00	00	10	00	00	01	00	10	01	01	0	0
T <sub>8</sub>	00	10	10	01	01	10	00	00	00	01	10	0	1
Q <sub>1</sub>	01	11	11	01	11	11	10	11	10	11	11	1	1
Q <sub>0</sub>	11	01	11	10	11	11	11	01	11	11	11	0	0
F	00	10	00	01	00	00	00	10	00	00	00	1/0	1/0

Здесь дизъюнкция строк T<sub>1</sub>, T<sub>5</sub>, T<sub>6</sub>, T<sub>8</sub> формирует вектор Q<sub>1</sub>, который собирает все возможные дефекты, проверяемые на тестовых наборах. Вектор Q<sub>0</sub> с помощью строк T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>7</sub> объединяет все невозможные, непроверяемые на тестовых наборах дефекты. Вычитание всех невозможных из всех возможных дефектов дает искомый результат в виде трех неисправностей, закодированных как F<sub>2</sub>=10; F<sub>4</sub>=01; F<sub>8</sub>=10. Таким образом, параллельное выполнение двух регистровых og-операций на основе результатов проведенного диагностического эксперимента позволило определить три возмож-

ных неисправности, каждая из которых может иметь место в логической схеме:

$$F = \{2^0, 4^1, 8^0\}.$$

Более жестким является ограничительное условие существования в логической схеме одиночного константного дефекта, использование которого приводит к вычислению дефектов на основе следующего выражения:

$$F = \left( \bigcap_{\forall R_i=1} Q_{ij} \right) \setminus \left( \bigcup_{\forall R_i=0} Q_{ij} \right) = \left( \bigwedge_{\exists R_i=1} Q_{ij} \right) \wedge \left( \bigvee_{\exists R_i=0} \overline{Q_{ij}} \right).$$

Применение данной формулы существенно уточняет результат диагностирования и приводит его к

виду:  $F = \{2^0\}$  за счет противоречивости кодов дефектов по and-операции в столбцах 4 и 8. Условие наличия в логической схеме одиночной константной неисправности ставит во главу угла следующее утверждение.

**Утверждение:** Если в столбце таблицы неисправностей существует координата 00 или 01, которая создает на наблюдаемых выходах некорректность R=1, связанную с неисправностью 10 на остальных координатах столбца, то такой одиночный дефект (10) в логической схеме невозможен.

Доказательство. Пусть на n тестовых наборах зафиксировано несовпадение на внешних выходах эталонных и реальных значений сигналов. При этом n-1 координата в рассматриваемом столбце имеет значение 10 (01) и лишь одна n-координата имеет значение 01 (10). Если предположить, что в логической схеме имеется дефект 10, то на n-координате также должен присутствовать дефект 10, который создает некорректное состояние выходов. Но по условиям моделирования такой дефект там отсутствует. Следовательно, невозможно считать, что в схеме присутствует дефект 10. Это подтверждается также формальным результатом – пустым пересечением всех координат столбца, связанных с некорректными состояниями выходов схемы:

$$F = \left( \bigwedge_{\exists R_i=1} Q_{ij} \right) = \begin{cases} 10 \wedge 10 \wedge \dots \wedge 10 \wedge 01 = 00; \\ 10 \wedge 10 \wedge \dots \wedge 10 \wedge 00 = 00. \end{cases}$$

Все сказанное относится и к состоянию n-координаты, которое идентифицируется сигналом пустого множества 00, взаимодействие с которым также делает невозможным присутствие в логической схеме одиночной константной 0-неисправности (10).

## 5. Выводы

- 1) Разработана структурная модель взаимодействия X-функций и производных продуктов, ориентированных на синтез и анализ цифровых систем в целях получения тестопригодных решений, связанных с уменьшением времени проектирования и тестирования вычислительных устройств.
- 2) Впервые введено понятие простых X-функций от конечного числа переменных, которые характеризуются отсутствием минимизации и наличием свойств тестопригодности, что дает возможность синтезировать цифровые устройства, технологичные для решения задач тестирования, моделирования и диагностирования.
- 3) Сформулированы метрические свойства X-функций от конечного числа переменных, которые дают возможность использовать их в практике разработки тестопригодных цифровых устройств, генерирования проверяющих тестов и оценки их качества путем дедуктивного моделирования проверяемых константных неисправностей на кубитных структурах данных.
- 4) Предложено аналитическое выражение для синтеза кубитных покрытий X-функций от конечного числа переменных, что дает возможность создавать тестопригодные логические схемы, не требующие экспоненциальных затрат на синтез и анализ тестов проверки и диагностирования неисправностей.
- 5) Получены дедуктивные формулы транспортирования входных списков неисправностей на внешние выходы для X-функций от конечного числа переменных, которые характеризуются единичными векторами производных по всем переменным, что дает возможность построить секвенсор моделирования дефектов, инвариантный к входным тестовым наборам.
- 6) На основе таблицы неисправностей, полученной путем дедуктивного моделирования, предложены кубитный и квантовый методы безусловного диагностирования дефектов, которые используют параллельные логические операции, существенно повышающие быстродействие поиска дефектов в реальном масштабе времени.

**Литература:** 1. Abramovici M., Breuer M.A., Friedman A.D. Digital System Testing and Testable Design. Comp. Sc. Press, 1998. 652 p. 2. Fujiwara H. Fault Simulation. Logic Testing and Design for Testability. 1. MIT Press, 1985. P. 84-108. 3. Карибский В.В., Пархоменко П.П.,

Согомонян Е.С., Халчев В.Ф. Основы технической диагностики. Кн. 1. М.: «Энергия», 1976. 346 с. 4. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики. Оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратные средства / Под ред. П.П. Пархоменко. М.: Энергия, 1981. 320 с. 5. Малышенко Ю.В. и др. Автоматизация диагностирования электронных устройств / Под ред. В.П. Чипулиса. М.: Энергоатомиздат, 1986. 6. Хаканов В. И., Литвинова Е. И., Хаханова И. В., Гузь О. А. Проектирование и тестирование цифровых систем на кристаллах. Харьков: ХНУРЭ, 2009. 484 с. 7. Lee S. M., Lee S. E. Static fault analysis for resilient System-on-Chip design // 2015 International SoC Design Conference (ISOCC). Gyungju. 2015. P. 5-6. 8. Yildiz A., Gürsoy C. C., Gören S. Fault emulation on heterogeneous architectures // 2017 International Conference on Computer Science and Engineering (UBMK). Antalya. Turkey. 2017. P. 905-910. 9. Hosokawa T., Takano H., Yamazaki H., Yamazaki K. A Diagnostic Fault Simulation Method for a Single Universal Logical Fault Model // 2017 IEEE 22nd Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing (PRDC). Christchurch. 2017. P. 217-218. 10. Dhiliban C., Govindaraju S. Fault simulation and analysis of VLSI circuit using n-detect test sets // 2016 Online Int. Conference on Green Engineering and Technologies (IC-GET). Coimbatore. 2016. P. 1-5. 11. Jinling D., Aiqiang X. A fault simulation method based on mutated truth table of logic gates // 2016 International Conference on Integrated Circuits and Microsystems (ICICM). Chengdu. 2016. P. 28-32. 12. Hadjitheophanous S., Neophytou S. N., Michael M. K. Scalable parallel fault simulation for shared-memory multiprocessor systems // 2016 IEEE 34th VLSI Test Symposium (VTS). Las Vegas, NV. 2016. P. 1-6.

### Транслитерированный список литературы:

1. Abramovici M., Breuer M.A., Friedman A.D. Digital System Testing and Testable Design. Comp. Sc. Press, 1998. 652 p.
2. Fujiwara H. Fault Simulation. Logic Testing and Design for Testability. 1. MIT Press, 1985. P. 84-108.
3. Karibskij V.V., Parhomenko P.P., Sogomonjan E.S., Halchev V.F. Osnovy tehnikeskoj diagnostiki. Kn. 1. M.: «Jenergija», 1976. 346s.
4. Parhomenko P.P., Sogomonjan E.S. Osnovy tehnikeskoj diagnostiki. Optimizacija algoritmov diagnostirovanija, apparaturnye sredstva / Pod red. P.P. Parhomenko. M.: Jenergija, 1981. 320 c.
5. Malysenko Ju.V. i dr. Avtomatizacija diagnostirovanija jelektronnyh ustrojstv / Pod red. V.P. Chipulisa. M.: Jenergoatomizdat, 1986.
6. Hahanov V. I., Litvinova E. I., Hahanova I. V., Guz' O. A. Proektirovanie i testirovanie cifrovyyh sistem na kristallah. Har'kov: HNURJe, 2009. 484 s.
7. Lee S. M., Lee S. E. Static fault analysis for resilient System-on-Chip design // 2015 International SoC Design Conference (ISOCC). Gyungju. 2015. P. 5-6.
8. Yildiz A., Gürsoy C. C., Gören S. Fault emulation on heterogeneous architectures // 2017 International Confer-

ence on Computer Science and Engineering (UBMK). Antalya, Turkey. 2017. P. 905-910.

9. *Hosokawa T., Takano H., Yamazaki H., Yamazaki K.* A Diagnostic Fault Simulation Method for a Single Universal Logical Fault Model // 2017 IEEE 22nd Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing (PRDC). Christchurch. 2017. P. 217-218.

10. *Dhiliban C., Govindaraju S.* Fault simulation and analysis of VLSI circuit using n-detect test sets // 2016 Online Int. Conference on Green Engineering and Technologies (IC-GET). Coimbatore. 2016. P. 1-5.

11. *Jinling D., Aiqiang X.* A fault simulation method based on mutated truth table of logic gates // 2016 International Conference on Integrated Circuits and Microsystems (ICICM). Chengdu. 2016. P. 28-32.

12. *Hadjitheophanous S., Neophytou S. N., Michael M. K.* Scalable parallel fault simulation for shared-memory multi-processor systems // 2016 IEEE 34th VLSI Test Symposium (VTS). Las Vegas, NV. 2016. P. 1-6.

Поступила в редколлегию 11.02.2018

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Меликян В.

**Хаханов Владимир Иванович**, д-р техн. наук, проф., главный научный сотрудник кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование и тестирование цифровых систем. Хобби: футбол, горные лыжи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, e-mail: hahanov@icloud.com.

**Емельянов Игорь Валериевич**, научный сотрудник кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование и тестирование цифровых систем. Хобби: путешествия. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, e-mail: iyemelyanov@itdelight.com.

**Любарский Михаил Михайлович**, соискатель кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование и тестирование цифровых систем. Хобби: путешествия. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14.

**Чумаченко Светлана Викторовна**, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование вычислительных процессов, теория рядов, методы дискретной оптимизации, инновационные формы обучения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. +380577021326, e-mail: svetlana.chumachenko@nure.ua

**Литвинова Евгения Ивановна**, д-р техн. наук, проф. кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование и тестирование цифровых систем. Хобби: музыка. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. +380577021326, e-mail: litvinova\_eugenia@icloud.com.

**Ларченко Лина Викторовна**, канд. техн. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: моделирование специализированных архитектур. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. +380577021326, e-mail: lina.larchenko@nure.ua

**Hahanov Vladimir Ivanovich**, Dr., Prof., Chief Scientific Officer, Design Automation Department, NURE. Scientific interests: design and testing of digital systems. Hobby: football, downhill skiing. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Science, 14, e-mail: hahanov@icloud.com.

**Iemelianov Igor Valerievich**, Research Associate, Design Automation Department, NURE. Scientific interests: design and testing of digital systems. Hobbies: traveling. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14, e-mail: iyemelyanov@itdelight.com.

**Lyubarsky Mikhail Mikhailovich**, PhD student, Design Automation Department, NURE. Scientific interests: project-bathing and testing digital systems. Scientific interests: design and testing of digital systems. Hobbies: traveling. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14.

**Chumachenko Svetlana Victorovna**, Dr., Prof., Head of Design Automation Department, NURE. Scientific interests: mathematical modeling of computational processes, theory of series, methods of discrete optimization, educational innovations. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14, phone +3805770-21-326, e-mail: svetlana.chumachenko@nure.ua

**Litvinova Evgenia Ivanovna**, Dr., Prof., Design Automation Department, NURE. Scientific interests: design and testing of digital systems. Hobbies: music. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauki Ave, 14, e-mail: litvinova\_eugenia@icloud.com.

**Larchenko Lina**, Cand. tech. Sci., Associate Professor of Design Automation Department, NURE. Scientific interests: modeling of specialized architectures. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Nauka Ave., 14, phone +380577021326, e-mail: lina.larchenko@nure.ua

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОМЕТОЧНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ

СКРЫПНИК А.И., ФЕДОРЧЕНКО Д.В.,

ХАЖМУРАДОВ М.А.

Описывается определение изотопного состава радиоактивных источников, состоящих из одного до пяти нуклидов ( $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$ ), по спектрам их гамма-излучения. Для получения спектров используется программа, разработанная на базе библиотек Geant4. Задача идентификации нуклидов рассматривается как задача многометочной классификации. Поставленная задача преобразовывается в набор задач однометочной классификации, для решения которых используются такие методы классификации, как метод k ближайших соседей, наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов и деревья решений.

**Ключевые слова:** идентификация нуклидов, многометочная классификация, метод k ближайших соседей, наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов и деревья решений.

**Key words:** nuclide identification, multi-label classification, k-nearest neighbors method, naive Bayes classifier, support vector machines and decision trees.

### 1. Введение

Для идентификации радионуклидов по гамма-спектрам, как правило, используются различные алгоритмы, основанные на поиске пиков, оценке их местоположения и параметров [1, 2]. Однако часто возникает необходимость детектирования слабого сигнала либо использования спектрометров с низким энергетическим разрешением. В таких ситуациях не всегда работают стандартные алгоритмы. Все больший интерес проявляют к себе различные алгоритмы машинного обучения (нейронные сети, например) [3, 4]. Они дают возможность идентифицировать радионуклиды по гамма-спектру, анализируя весь спектр.

В случае исследования радиоактивного источника, состоящего из одного изотопа, его идентификация в терминах машинного обучения является задачей однометочной классификации (может быть бинарной или многоклассовой). Идея многоклассовой классификации заключается в том, что существует много классов, однако каждый объект может принадлежать лишь одному классу [5]. На практике редко встречаются такие ситуации. При мониторинге территорий, которые загрязнены естественными и техногенными радионуклидами, контроле над несанкционированным перемещением радиоактивных веществ и

решении многих других задач, связанных с необходимостью мгновенной идентификации радиоактивных источников, в источниках содержится более одного изотопа. Описанная проблема идентификации нуклидов относится к многометочной классификации. В задачах данного типа объект может относиться сразу к нескольким классам [5]. Основное различие между данными видами классификации состоит в результате на выходе классификатора. В первом случае классификатор возвращает одно значение, а во втором – вектор значений [6].

Существует два основных подхода к решению задачи многометочной классификации: использование методов, которые преобразуют задачу в набор более простых задач однометочной классификации, и методов, которые специально адаптированы для решения задач классификации этого типа [7]. В данной работе используется первый подход.

Например, если необходимо определить изотопный состав радиоактивного источника, состоящего из цезия и йода, то поставленную задачу с помощью одного из методов преобразования можно разделить на две части. Сначала необходимо построить классификатор, который определит наличие цезия в составе источника. Далее построить классификатор для определения наличия йода в радиоактивном источнике. При этом можно использовать любой классификатор, способный решить задачу бинарной классификации: наивный байесовский классификатор, дерево решений, метод k ближайших соседей, нейронную сеть, метод опорных векторов и т.д.

В работе [8] было исследовано применение искусственных нейронных сетей для идентификации радионуклидов по гамма-спектрам. Была создана многослойная сеть прямого распространения, которая обучалась с помощью алгоритма обратного распространения ошибки.

Данная работа посвящена определению изотопного состава радиоактивных источников по спектрам их излучения с помощью метода k ближайших соседей, наивного байесовского классификатора, метода опорных векторов и деревьев решений.

### 2. Методы преобразования задачи многометочной классификации в набор задач однометочной классификации

Преобразование задачи многометочной классификации к набору задач однометочной классификации осуществлялось тремя различными методами: бинарной релевантности (binary relevance) [9], булеана меток (label powerset) [9] и цепочек классификаторов (classifier chains) [10]. Самым простым и наиболее популярным является метод бинарной релевантности. С его помо-

щью на основе первоначального набора данных (в нашем случае это спектры излучения радиоактивных источников) создается  $k$  наборов данных, где  $k$  – количество классов (в данной задаче  $k$  – количество изотопов, которые могут входить в состав радиоактивного источника). Каждый набор данных содержит все объекты (спектры), содержащиеся в первоначальном наборе. Однако каждый из них используется для обучения двоичного классификатора в целях предсказания существования лишь одного из радионуклидов, а не всего изотопного состава.

Рассмотрим применение данного метода для задачи классификации радиоактивного источника, в состав которого могут входить пять изотопов:  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$ . В табл. 1 представлен пример небольшого набора данных задачи многометочной классификации;  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – спектры гамма-излучения,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$  обозначают классы; 0 и 1 – метки классов, которые указывают на отсутствие либо наличие изотопа соответственно. Табл. 2 демонстрирует соответствующее преобразование набора данных.

Таблица 1. Набор данных задачи многометочной классификации

X	Co	Cs	I	Ba	Am
$x_1$	1	0	0	1	0
$x_2$	0	1	1	1	1
$x_3$	0	1	0	1	0
$x_4$	1	0	1	0	1

Таблица 2. Преобразование набора данных из табл. 1 методом бинарной релевантности

X	Co	X	Cs	X	I	X	Ba	X	Am
$x_1$	1	$x_1$	0	$x_1$	0	$x_1$	1	$x_1$	0
$x_2$	0	$x_2$	1	$x_2$	1	$x_2$	1	$x_2$	1
$x_3$	0	$x_3$	1	$x_3$	0	$x_3$	1	$x_3$	0
$x_4$	1	$x_4$	0	$x_4$	1	$x_4$	0	$x_4$	1

Метод булеана меток заключается в создании  $2^k$  новых классов, где  $k$  – количество классов. Этот подход достаточно эффективен, однако эффективность может падать с ростом количества классов, что в нашем случае ограничивает возможное количество нуклидов. Преобразование набора данных для этого метода приведено в табл. 3.

Таблица 3. Преобразование набора данных из табл. 1 методом булеана меток

X	$2^k$ классов
$x_1$	1 0 0 1 0
$x_2$	0 1 1 1 1
$x_3$	0 1 0 1 0
$x_4$	1 0 1 0 1

Метод цепочек классификаторов похож на метод бинарной релевантности, однако он включает предыдущие предсказания в признаки объектов (табл. 4).

### 3. Методы классификации

Задача многометочной классификации, преобразованная в задачу или набор задач однометочной классификации, может быть решена с помощью стандартных алгоритмов однометочной классификации.

**3.1. Метод  $k$  ближайших соседей.** Алгоритм  $k$  ближайших соседей является одним из наиболее простых алгоритмов машинного обучения. Основной принцип его работы заключается в запоминании данных, которые входят в обучающий набор. Для прогнозирования принадлежности новой точки данных к какому-либо классу необходимо определить  $k$  точек обучающего набора, которые находятся ближе всего. Таким образом, важным шагом является выбор числа ближайших соседей  $k$ .

Достоинство алгоритма  $k$  ближайших соседей заключается в том, что он не требует большого количества настроек. Одним из основных недостатков является высокая вероятность переобучения при работе с разреженными наборами данных.

**3.2. Наивный байесовский классификатор.** Данный метод классификации основан на применении теоремы Байеса с предположением о том, что признаки, описывающие объекты задачи, являются статистически независимыми. Алгоритм дает хороший результат в задачах, в которых признаки являются действительно независимыми. Существует три разновидности наивного байесовского классификатора: Гауссов, многомерный и мультиномиальный. В большинстве случаев два последних используются в задачах классификации текста.

**3.3. Метод опорных векторов.** Основная идея метода заключается в нахождении разделяющей поверхности, которая отделяет классы друг от друга. Разделяющая поверхность может быть как линейной, так и нелинейной. Для того чтобы установить вид разделяющей поверхности, необходимо выбрать тип ядра, которое может быть линейным, полиномиальным либо радиальным. Для определения эффективной модели нужно подобрать оптимальные значения параметров  $C$  и  $\text{Gamma}$ . Первый управляет размытием отступов, а второй – размером ядра.

Преимущество данного метода заключается в возможности приспособить его к различным типам данных. Однако чтобы получить эффективную модель, необходимо тщательно подобрать параметр размытия.

Таблица 4. Преобразование набора данных из табл. 1 методом цепочек классификаторов

X	Co	X	Co	Cs	X	Co	Cs	I	X	Co	Cs	I	Ba	X	Co	Cs	I	Ba	Am
x <sub>1</sub>	1	x <sub>1</sub>	1	0	x <sub>1</sub>	1	0	0	x <sub>1</sub>	1	0	0	1	x <sub>1</sub>	1	0	0	1	0
x <sub>2</sub>	0	x <sub>2</sub>	0	1	x <sub>2</sub>	0	1	1	x <sub>2</sub>	0	1	1	1	x <sub>2</sub>	0	1	1	1	1
x <sub>3</sub>	0	x <sub>3</sub>	0	1	x <sub>3</sub>	0	1	0	x <sub>3</sub>	0	1	0	1	x <sub>3</sub>	0	1	0	1	0
x <sub>4</sub>	1	x <sub>4</sub>	1	0	x <sub>4</sub>	1	0	1	x <sub>4</sub>	1	0	1	0	x <sub>4</sub>	1	0	1	0	1

**3.4. Деревья решений.** Основной принцип работы метода, основанного на дереве решений, состоит в разбиении данных на подмножества с помощью принятия решений. Модель можно представить в виде дерева, которое состоит из корня, узлов и листьев. Корнем называется верхний узел, который содержит весь набор данных, подлежащих классификации. В узлах происходит деление на ветви. Листьями называются конечные узлы. Модели, основанные на деревьях решений легко поддаются переобучению. Данный процесс происходит, когда дерево становится слишком глубоким и каждая точка обучающего набора данных верно классифицируется. Такое дерево имеет плохую обобщающую способность. Переобучение можно предотвратить с помощью обрезки дерева.

#### 4. Метрика качества модели

Метрики качества модели в задачах многометочной классификации немного отличаются от метрик в стандартных задачах классификации. В данном случае новый объект может быть не только верно либо неверно классифицирован, он может быть частично верно классифицирован [11]. Таким образом, в некоторых случаях может быть правильно определена лишь часть нуклидов, содержащихся в источнике.

Одной из самых распространенных метрик качества является правильность, которая представляет долю верно классифицированных объектов от общего числа объектов [12, 13]. В задачах многометочной классификации объект считается классифицированным верно, если все метки, предсказанные для данного объекта, полностью совпадают с истинными метками. Для обозначения такой метрики в англоязычной литературе используется термин 'subset accuracy' либо '0/1 subset accuracy' [11]. Правильность в данной задаче представляет собой долю верно классифицированных радиоактивных источников от общего количества радиоактивных источников. Радиоактивный источник является правильно классифицированным, если в нем правильно определен весь изотопный состав.

Для оценки качества модели многометочной классификации используется метрика Хэмминга [12, 13]. Она показывает, сколько меток классов из общего количества спрогнозированы неверно. В данной метрике учитываются ошибки и 1-го и 2-го рода, так как спрогнозированные метки могут оказаться как ложно положительными, так и ложно отрицательными.

Оценить качество модели в задачах однометочной классификации также можно, определив точность и полноту. Данные метрики используются также в задачах многометочной классификации [12, 13]. Точность показывает, сколько из предсказанных положительных меток классов являются истинно положительными:

$$\text{точность} = \frac{tp}{tp + fp}$$

В уравнении  $tp$  – количество истинно положительных меток классов;  $fp$  – количество ложноположительных меток классов.

Полнота показывает, сколько из истинных положительных меток предсказано как положительные:

$$\text{полнота} = \frac{tp}{tp + fn}$$

где  $fn$  – количество ложно отрицательных меток классов.

В задачах многометочной классификации точность и полноту можно рассчитывать независимо для каждой метки. Существует несколько способов для объединения результатов. Первый способ - можно рассчитать точность и полноту сразу для всего набора данных. Второй способ заключается в расчете данных метрик для каждого класса в отдельности и последующем их усреднении по всем классам. Третий способ состоит в расчете точности и полноты для каждого объекта, в данном случае радиоактивного источника, и усреднении результатов по всем объектам.

#### 5. Модель

Для определения изотопного состава радиоактивных источников в качестве набора данных было взято 500 спектров гамма-излучения источников. В состав каждого из источников вхо-

дили от одного до пяти нуклидов, а именно:  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$ . Данный выбор изотопов связан с использованием достаточно тонкого детектора CdZnTe (табл. 5) для получения гамма-спектров в компьютерных экспериментах. Преимущество подобных детекторов заключается в их дешевизне и возможности работать при комнатной температуре.

Таблица 5. Характеристики детектора

Материал детектора	CdZnTe
Размеры	6×6×3 мм
Произведение подвижности на время жизни электронов	$3 \times 10^{-3} \text{ см}^2/\text{В}$
Произведение подвижности на время жизни дырок	$3 \times 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}$

Функции отклика детектора CdZnTe на излучение  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$  (рис. 1) были рассчитаны с помощью программы, разработанной на основе пакета библиотек для моделирования прохождения элементарных частиц через вещество Geant4 [14, 15]. Данная программа была разработана и верифицирована ранее [16]. Полученные спектры были нормированы на единицу.

Функции отклика для индивидуальных изотопов были использованы для получения 500 функций отклика CdZnTe детектора для смешанных радиоактивных источников.

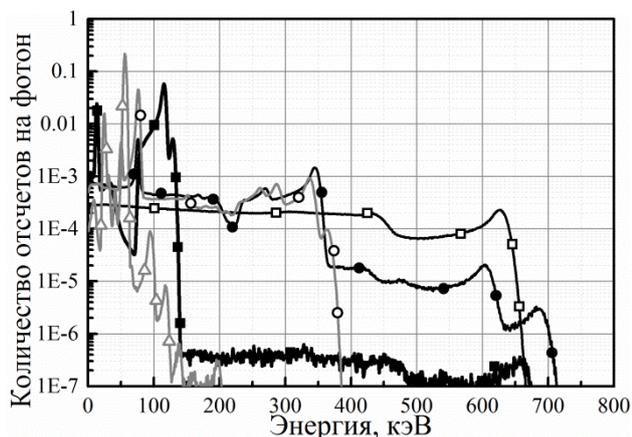


Рис. 1. Гамма-спектры ( $^{57}\text{Co}$  – черные квадраты,  $^{137}\text{Cs}$  – белые квадраты,  $^{131}\text{I}$  – черные кружки,  $^{133}\text{Ba}$  – белые кружки,  $^{241}\text{Am}$  – белые треугольники)

Набор данных из 500 гамма-спектров был разбит на обучающий и проверочный наборы размерами 350 и 150 спектров соответственно. Гамма-спектры в наборах представляют собой объекты. Все гамма-спектры были разделены на 40 каналов, значения в которых являются признаками

объектов. Все нуклиды, которые предположительно могут содержаться в радиоактивных источниках, представляют собой классы.  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$  являются метками соответствующих классов.

Для определения изотопного состава радиоактивных источников были использованы различные методы классификации: метод k ближайших соседей, наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов и деревья решений. Перед применением каждого из алгоритмов задача многометочной классификации была преобразована в набор задач однокметочной классификации с помощью методов бинарной релевантности, булеана меток и цепочек классификаторов. Все алгоритмы были реализованы на языке программирования Python с помощью библиотек scikit-learn [17] and scikit-multilearn [18].

## 6. Результаты

Для оптимизации работы алгоритмов необходимо выбрать эффективные параметры моделей. Поиск оптимальных значений параметров является одним из ключевых моментов в построении модели. Для определения оптимальных значений параметров необходимо сначала разделить исходный набор данных на обучающий, проверочный и тестовый. Обучающий набор используется для построения и обучения модели. С помощью проверочного набора определяют оптимальные значения параметров модели. Тестовый набор применяется для оценки качества модели. Однако, так как данный метод слишком чувствителен к правильности разбиения данных, в работе для поиска эффективных параметров была использована перекрестная проверка, а именно самая распространенная k-блочная перекрестная проверка. Работа данной методики заключается в обучении модели k раз на (k-1) подвыборках. Каждый раз проверка модели осуществляется на оставшейся подвыборке. Таким образом, исходный набор данных был разделен только на обучающий и тестовый. Тестовый набор как обычно был использован только для оценки качества конечной модели. К обучающему набору была применена 5-блочная перекрестная проверка, с помощью которой определены оптимальные значения параметров модели (табл. 6). Для моделей, основанных на методе k ближайших соседей, были определены оптимальные значения количества ближайших соседей. В моделях, построенных на основе опорных векторов, были выбраны наиболее эффективные ядра и параметры C и Gamma.

Необходимо заметить, что в случае использования линейного ядра изменяется только параметр  $C$ . Для моделей, основанных на деревьях решений, были определены оптимальные значения следующих параметров: максимального количества признаков, по которым ищется разбиение, и максимальной глубины дерева.

Для сравнения качества алгоритмов классификации были применены такие метрики качества как правильность, метрика Хэмминга, точность и полнота. Правильность существенно зависит от соотношения классов и не представляет ценности в задачах с неравными классами. Так как в наборе данных каждый нуклид представлен при-

мерно в одинаковом процентном соотношении, правильность рассматривается как одна из основных метрик в данной задаче классификации. Как было указано выше, важной метрикой качества алгоритма в задачах многометочной классификации является метрика Хэмминга. Она указывает на то, как часто метка класса была спрогнозирована неправильно, т.е. как часто было спрогнозировано неправильно наличие или отсутствие  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{241}\text{Am}$  в радиоактивных источниках. Точность и полнота также часто используются для сравнения качества алгоритмов классификации данного типа.

Таблица 6. Оптимальные значения параметров моделей

Алгоритм классификации	Параметры модели	Метод преобразования задачи	Оптимальные значения параметров
Метод к ближайших соседей	Количество ближайших соседей	Бинарная релевантность	3
		Булеан меток	3
		Цепочки классификаторов	3
Метод опорных векторов	Ядро; $C$ ; $\text{Gamma}$	Бинарная релевантность	Линейное; 100; 0.001
		Булеан меток	Полиномиальное; 0.001; 100
		Цепочки классификаторов	Линейное; 100; 0.001
Дерево решений	Максимальное количество признаков; максимальная глубина дерева	Бинарная релевантность	39; 3
		Булеан меток	33; 5
		Цепочки классификаторов	38; 2

На рис. 2-5 представлены метрики качества разных классификационных моделей. Заглавными буквами обозначены использованные методы классификации: А – метод к ближайших соседей, Б – наивный байесовский классификатор, В – метод опорных векторов, Г – дерево решений. Штриховка означает, что задача многометочной классификации была преобразована в набор задач однокметочной классификации с помощью метода бинарной релевантности. Серым и черным цветом показано, что преобразование задачи было проведено с помощью методов булеана меток и цепочек классификаторов соответственно.

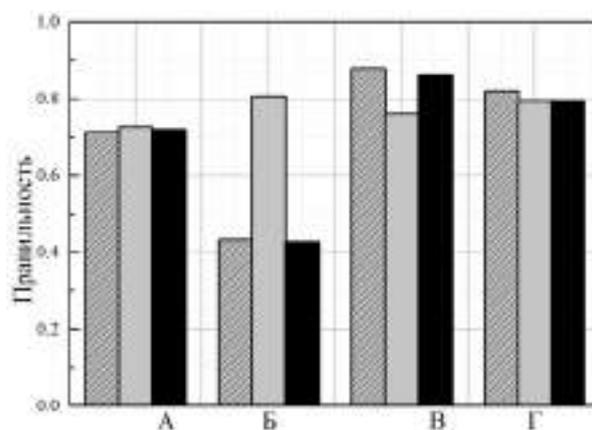


Рис. 2. Сравнение правильности алгоритмов

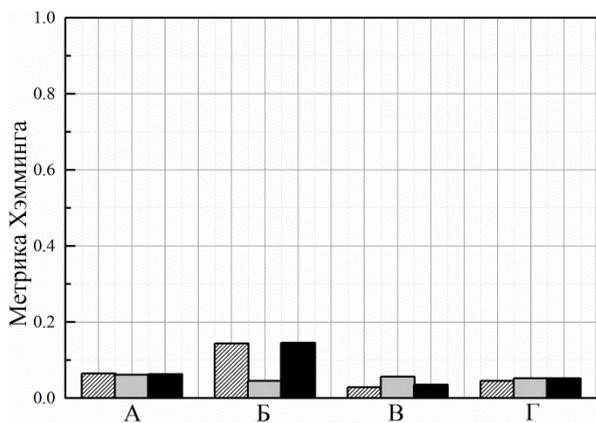


Рис. 3. Сравнение метрики Хэмминга для алгоритмов

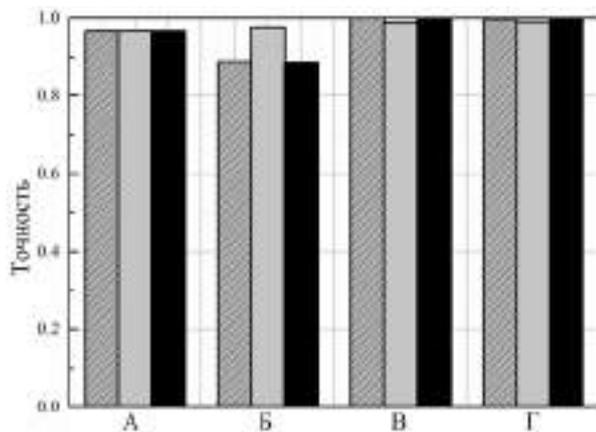


Рис. 4. Сравнение точности алгоритмов

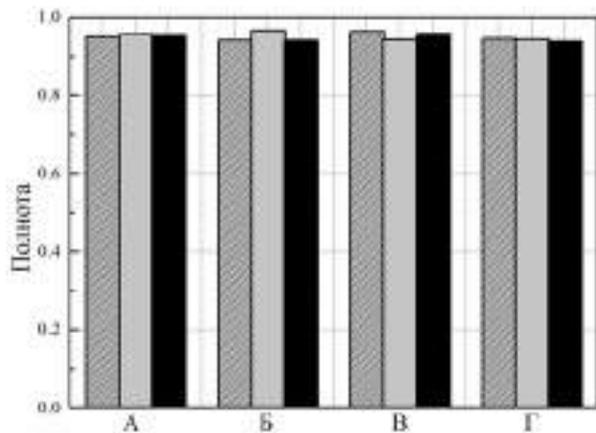


Рис. 5. Сравнение полноты алгоритмов

Как видно из рис. 2 наилучшие правильности, которые составляют 0.88 и 0.86, имеют модели, основанные на методе опорных векторов. В данном случае задача многометочной классификации была преобразована с помощью методов бинарной релевантности и цепочек классификаторов. Правильность данной модели с преобразованием задачи методом булеана меток составляет 0.76. Достаточно хорошую правильность, приблизительно 0.8, имеют модели, основанные на деревьях решений, и модель на основе наивного байесовского классификатора, для которой

задача была преобразована методом булеана меток. Все описанные модели имеют достаточно хорошую точность (см.рис. 4) и полноту (см.рис. 5), а также удовлетворительные значения метрики Хэмминга (см.рис. 3). Относительно метрики Хэмминга: чем она выше, тем модель считается хуже.

Модели, основанные на методе k ближайших соседей, обладают удовлетворительной точностью (см.рис. 4), полнотой (см.рис. 5) и удовлетворительными значениями метрики Хэмминга (см.рис. 3), однако их правильность лишь немного выше 0.7 (см.рис. 2).

Самую низкую правильность имеют модели наивного байесовского классификатора с преобразованиями многометочной задачи методами бинарной релевантности и цепочек классификаторов (см.рис. 2). Также они обладают максимальными значениями метрики Хэмминга среди всех моделей (см.рис. 3). Таким образом, несмотря на хорошую точность (см.рис. 4) и полноту (см.рис. 5), данные модели наивного байесовского классификатора не подходят для решения задачи определения изотопного состава.

## 7. Выводы

Решена задача многометочной классификации, а именно определен изотопный состав радиоактивных источников по спектрам гамма-излучения. Спектры были рассчитаны с помощью программы, разработанной на базе пакета библиотек Geant4.

Задача многометочной классификации была преобразована в набор задач однометочной классификации с помощью методов бинарной релевантности, булеана меток и цепочек классификаторов.

Для решения задач классификации были использованы такие методы, как метод k ближайших соседей, наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов и деревья решений. Для оценки качества классификационных моделей были рассчитаны правильность, метрика Хэмминга, точность и полнота.

Наиболее подходящими для решения поставленной в работе задаче были определены методы опорных векторов и деревья решений. Хорошо зарекомендовал себя наивный байесовский классификатор, примененный к задачам, преобразованным с помощью булеана меток. Представленные результаты позволяют говорить о возможности использования данных методов для идентификации нуклидов по гамма-спектрам.

## Литература:

1. *Routti J.T. and Prussin S.G.* Photopeak Method for the Computer Analysis of Gamma-Ray Spectra from Semiconductor Detectors // Nuclear Instruments and Methods. 1969. Vol. 72, Iss. 2. P. 125-142.
2. *Brutscher J., Arlt R., Czock K.H.* Isotope Identification Software for Gamma Spectra Taken with CdZnTe Detectors // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2001. Vol. 458. P. 189-195.
3. *Yoshida E., Shizuma K., Endo S., Oka T.* Application of Neural Networks for the Analysis of Gamma-Ray Spectra Measured with a Ge Spectrometer // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2002. Vol. 484. P. 557-563.
4. *Chen L. and Wei Y.-X.* Nuclide Identification Algorithm Based on K-L Transform and Neural Networks // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2009. Vol. 598. P. 450-453.
5. *Alazaidah R. and Ahmad F.K.* Trending Challenges in Multi Label Classification // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2016. Vol. 7, No. 10. P. 127-131.
6. *Herrera F., Charte F., Rivera A.J., del Jesus M.J.* Multilabel Classification. Problem Analysis, Metrics and Techniques. Springer International Publishing Switzerland, 2016, 194 p.
7. *Tsoumakas G. and Katakis I.* Multi-Label Classification: An Overview // International Journal of Data Warehousing and Mining. 2007. Vol. 3, No. 3. P. 1-13.
8. *Skrypnyk A.I.* Artificial Neural Networks in Gamma-Spectrum Based Radionuclide Identification // Telecommunications and Radio Engineering. 2016. Vol. 75, Iss. 12. P. 1121-1128.
9. *Sorower M.S.* A Literature Survey on Algorithms for Multi-Label Learning // Technical Report. Oregon State University, Corvallis, OR, USA. 2010.
10. *Read J., Pfahringer B., Holmes G., Frank E.* Classifier Chains for Multi-Label Classification // Machine Learning. 2011. Vol. 85. P. 333-359.
11. *Gibaja E. and Ventura S.* A Tutorial on Multilabel Learning // ACM Computing Surveys. 2015. Vol. 47, No. 3. Article 52, P. 1-38.
12. *Tsoumakas G., Katakis I., Vlahavas I.* Data Mining and Knowledge Discovery Handbook. Springer, Chapter Mining Multi-label Data, 2010. P. 667-685.
13. *Zhang M.-L. and Zhou Z.-H.* A Review on Multi-Label Learning Algorithms // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2014. Vol. 26, Iss. 8. P. 1819-1837.
14. *Agostinelli S. et al.* Geant4—a Simulation Toolkit // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2003. Vol. 506, Iss. 3. P. 250-303.
15. *Allison J. et al.* Geant4 Developments and Applications // IEEE Transactions on Nuclear Science 2006. Vol. 53, Iss. 1. P. 270-278.
16. *Skrypnyk A.I. and Khazhmuradov M. A.* Monte-Carlo Simulation of Response of Semiconductor Detectors for Radionuclide Identification Devices // Problems of Atomic Science and Technology. 2015. No. 3(97). Series: Nuclear Physics Investigations (64). P. 89-94.
17. *Pedregosa F. et al.* Scikit-learn: Machine Learning in Python // Journal of Machine Learning Research. 2011. Vol. 12. P. 2825-2830.
18. *Szymanski P. and Kajdanowicz T.* Scikit-multilearn: A Scikit-Based Python Environment for Performing Multi-Label Classification // ArXiv e-prints. 2017.

Поступила в редколлегию 12.03.2018

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Семенец В.В.

**Скрышник Анна Ивановна**, мл. научный сотрудник Института физики высоких энергий и ядерной физики (ИФВЭЯФ) Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» (ННЦ ХФТИ), аспирантка ННЦ ХФТИ. Научные интересы: взаимодействие гамма-излучения с веществом, математическое моделирование, машинное обучение. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел.: +38(057)335-65-94, e-mail: [belkas@kipt.kharkov.ua](mailto:belkas@kipt.kharkov.ua).

**Федорченко Дмитрий Владимирович**, канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. научный сотрудник Института физики высоких энергий и ядерной физики (ИФВЭЯФ) Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: методы Монте-Карло, математическое моделирование. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел.: +38 (057) 335-65-94, e-mail: [fdima@kipt.kharkov.ua](mailto:fdima@kipt.kharkov.ua).

**Хажмуратов Манап Ахмадович**, д-р техн. наук, профессор, вр.и.о. директора Института физики высоких энергий и ядерной физики (ИФВЭЯФ) Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: методы Монте-Карло, математическое моделирование, автоматизированные системы управления. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел.: +38(057)335-68-46, e-mail: [kha-zhm@kipt.kharkov.ua](mailto:kha-zhm@kipt.kharkov.ua).

**Skrypnyk Anna Ivanovna**, researcher at the Institute of High-Energy Physics and Nuclear Physics (IFIEAF) of the National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute" (NSC KhPTI), PhD student of the National Academy of Sciences of the KPI. Scientific interests: interaction of gamma radiation with matter, mathematical modeling, machine learning. Address: Ukraine, 61108, Kharkov, st. Akademicheskaya, 1, tel: +38 (057) 335-65-94, e-mail: [belkas@kipt.kharkov.ua](mailto:belkas@kipt.kharkov.ua).

**Fedorchenko Dmitry Vladimirovich**, PhD, associate professor, senior researcher at the Institute of High-Energy Physics and Nuclear Physics (IRVIEF) of the National Science Center "Kharkiv Physico-Technical Institute" (NSC KhPTI). Scientific interests: Monte Carlo methods, mathematical modeling. Address: Ukraine, 61108, Kharkov, st. Akademicheskaya, 1, tel: +38 (057) 335-65-94, e-mail: [fdima@kipt.kharkov.ua](mailto:fdima@kipt.kharkov.ua).

**Khazmuradov Manap Akhmadovich**, Dr.Sc., professor, acting director of Institute of High-Energy Physics and Nuclear Physics (IFIEAF) of the National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute" (NSC KhPTI). Scientific interests: Monte Carlo methods, mathematical modeling, automated control systems. Address: Ukraine, 61108, Kharkov, st. Akademicheskaya, 1, tel.: +38 (057) 335-68-46, e-mail: [kha-zhm@kipt.kharkov.ua](mailto:kha-zhm@kipt.kharkov.ua).

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.39

## МЕТОД СНИЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ДОСТАТОЧНО ИНФОРМАТИВНЫХ СЕГМЕНТОВ АЭРОФОТОСНИМКА

БАРАННИК В.В., БАРАННИК Д.В.,

КРАСНОРУЦКИЙ А.А., ХАХАНОВА А.В.

Обсуждается вариант решения проблемы оперативности доставки аэрофотоснимка, без потери его достоверности, с борта летательного аппарата. Приводится классификация участков аэрофотоснимка в зависимости выполнения задачи по его дешифрированию. Раскрывается вариант реализации технологии дешифровочного кодирования аэрофотоснимка. Рассматривается сравнительная характеристика вероятности правильного дешифрирования цифрового и аналогового аэрофотоснимков. Указываются причины рисков срыва задач по дешифрированию объектов аэрофотосъемки. Предлагается перспективное направление снижения информационной избыточности аэрофотоснимков с сохранением ключевой информации к его дешифрированию.

**Ключевые слова:** аэрофотоснимок, избыточность, массив сегмента, дешифровочное кодирование, кодограмма.

**Key words:** aerial imagery, terrain, structural and combinatorial redundancy array segment codegram.

### Введение

Анализ внедрения дистанционного видеосервиса в систему предупреждения и локализации кризисных ситуаций показал, что беспилотные авиационные комплексы с функцией аэромониторинга практически в полной мере могут обеспечить органы управления видеoinформацией о протекающих событиях.

В то же время стремительная динамика развития событий в процессе протекания кризисных ситуаций требует повышать не только оперативность, но и достоверность доставки видеoinформации [1,2].

Анализ технологий бортовой обработки видеoinформации свидетельствует о существующем дисбалансе между оперативностью доставки такой информации и ее достоверностью [3,4]. Здесь возникает научно-прикладная проблема, суть которой: уменьшение информационной интенсивности видеопотока, поступающего с борта летательного аппарата, без потери его оперативности и достоверности.

### 1. Постановка задачи

Исследование рабочего цикла по дешифрированию аэрофотоснимков показывает, что дешифровщик сталкивается с проблематикой потери ключевой информации к его дешифрированию, особенно при выполнении задачи по идентификации объектов интереса, что снижает вероятности правильного дешифрирования (рис.1) [5-8].

Это ведет к срыву выполнения задачи дешифрирования по распознаванию и идентификации объектов интереса в условиях повышения оперативности. Причина здесь кроется в классическом подходе устранения присутствующей на аэрофотоснимке статистической и структурной избыточностей, что составляет основу применяемых технологий семейства JPEG. В работах [8,9] эту проблему предлагается решить при помощи технологии дешифровочного кодирования. Поскольку не все участки участвуют в дешифрировании, то предложенная технология позволяет разделить весь аэрофотоснимок, в зависимости от задач дешифрирования, на не информативные, достаточно информативные и сильно информативные сегменты [10].

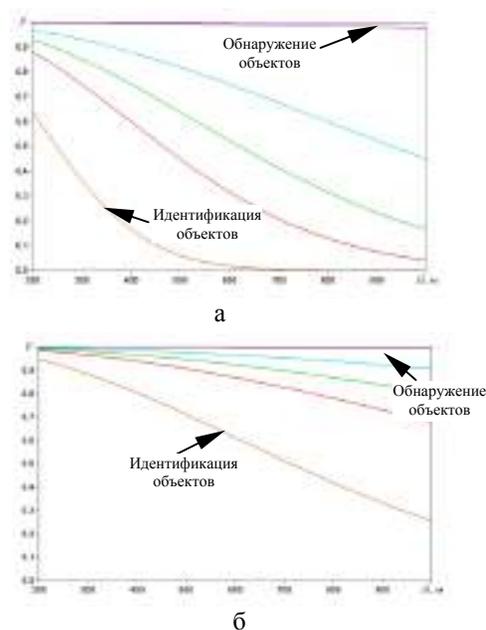


Рис. 1. Зависимость вероятности  $P$  правильного дешифрирования объектов интереса от высоты  $H$  аэрофотосъемки: а – цифровой сканер 6-PAS-1; б – аналоговый аэрофотоаппарат M164

Такой подход стимулирует разработку новых эффективных алгоритмов снижения информационной избыточности сегментов изображения без разрушения его семантической составляющей (ключевой информации к дешифрированию).

Целью данного исследования является разработка метода снижения информационной интенсивности достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка.

## 2. Суть метода снижения информационной интенсивности достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка

Для реализации эффективного синтаксического описания элементов сегментов, которые классифицируются как достаточно информативные, предлагается применить для трансформанты  $Y_{тр}$  сегмента метод двухградационного неравномерного позиционного кодирования с динамическим базисом оснований [11, 12].

Структурная схема последовательности обработки трансформант  $Y_{тр}$  достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка представлена на рис. 2.

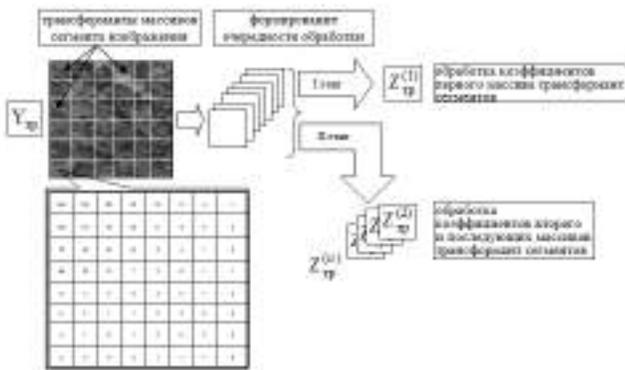


Рис. 2. Структурная схема последовательности обработки трансформированных достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка

Сегменты аэрофотоснимка состоят из массивов размерностью  $8 \times 8$  элементов (для примера). Соответственно и трансформанты  $Z_{тр}^{(v)}$  этих массивов (после дискретно-косинусного преобразования) имеют такую же размерность. Начальный этап заключается в выстраивании очередности этих трансформант для их дальнейшей обработки. Очередность обработки такой последовательности производится в направлении слева – направо и вниз.

После этого выполняется формирование кодограммы путем обработки элементов трансформант этих массивов в два этапа.

**Этап 1.** Формирование кодограммы первого массива  $Z_{тр}^{(1)}$  трансформант сегмента. Для осуществления этого этапа применяется метод одноградационного неравномерного позиционного кодирования согласно схеме (рис. 3).

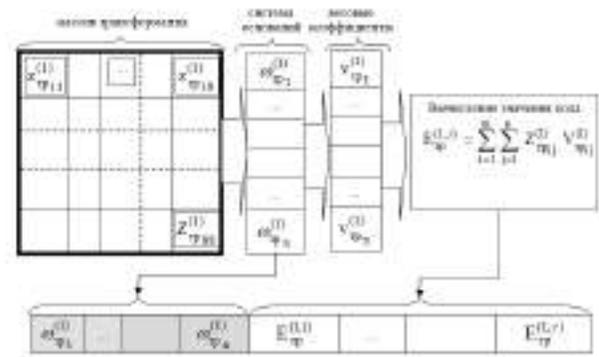


Рис. 3. Структурная схема формирования кодограммы первого массива трансформанты сегмента изображения

Обработка элементов трансформант первого массива  $Z_{тр}^{(1)}$  сегмента ( $v = 1$ ) предусматривает:

- 1) Формирование элементов системы оснований  $\Omega_{тр}^{(1)} = \{\omega_{тр_{ij}}^{(1)}\}$  путем вычисления значений динамических диапазонов в строках  $w_{тр_i}^{(1)}$  и столбцах  $\chi_{тр_j}^{(1)}$  массива  $Z_{тр}^{(1)}$  согласно выражениям:

$$w_{тр_i}^{(1)} = \max_{1 \leq j \leq n} \{z_{тр_{ij}}^{(1)}\} + 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где  $z_{тр_{ij}}^{(1)}$  - элементы первого массива  $Z_{тр}^{(1)}$  трансформанты сегмента  $Y_{тр}^{(1)}$ ;

$$\chi_{тр_j}^{(1)} = \max_{1 \leq i \leq m} \{z_{тр_{ij}}^{(1)}\} + 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\omega_{ij}^{(1)} = \min(w_i^{(1)}, \chi_j^{(1)}), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

- 2) Вычисление значений весовых коэффициентов  $V_{тр_{ij}}^{(1, \gamma)}$  элемента  $z_{тр_{ij}}^{(1)}$  массива трансформанты как произведение оснований всех младших элементов:

$$V_{тр_{ij}}^{(1)} = \prod_{\zeta=i+1}^m \omega_{\zeta j}^{(1)} \prod_{\xi=i+1}^m \prod_{u=1}^n \omega_{\zeta u}^{(1)}. \quad (4)$$

- 3) Формирование кодограммы первого массива трансформанты сегмента ( $\tau=1$ ):

$$E_{тр}^{(1, \gamma)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z_{тр_{ij}}^{(1)} V_{тр_{ij}}^{(1)}, \quad (5)$$

где  $\gamma$  - индекс неравномерного позиционного числа;  $E_{тр}^{(\tau, \gamma)}$  - код  $\gamma$ -го неравномерного позиционного числа построенного для  $\tau$ -го массива элементов трансформанты сегмента;  $z_{тр_{ij}}^{(1, \gamma)}$  - значение  $\gamma$ -го неравномерного позиционного числа для первого массива трансформанты сегмента;  $V_{тр_{ij}}^{(1, \gamma)}$  -

весовой коэффициент элемента  $z_{\text{тр}ij}^{(1,\gamma)}$  массива трансформанты сегмента.

Этап 2. Формирование кодограммы второго  $Z_{\text{тр}}^{(2)}$  и последующих массивов  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  ( $\tau = 2 \dots \nu$ ) трансформант сегмента. Для осуществления рассматриваемого этапа применяется метод двухградационного неравномерного позиционного кодирования с динамическим базисом оснований согласно схеме (рис. 4). Отличительная особенность второго этапа:

- 1) Формируется динамическая система оснований, т.е. формирующаяся система оснований  $r_{\text{тр}}^{(\tau)}$  учитывает систему оснований  $r_{\text{тр}}^{(\tau-1)}$  предыдущего массива трансформант.
- 2) Вычисление кодов проводится с учетом формирования неравномерного позиционного числа, которое учитывает коэффициент системы оснований предыдущего массива трансформант.

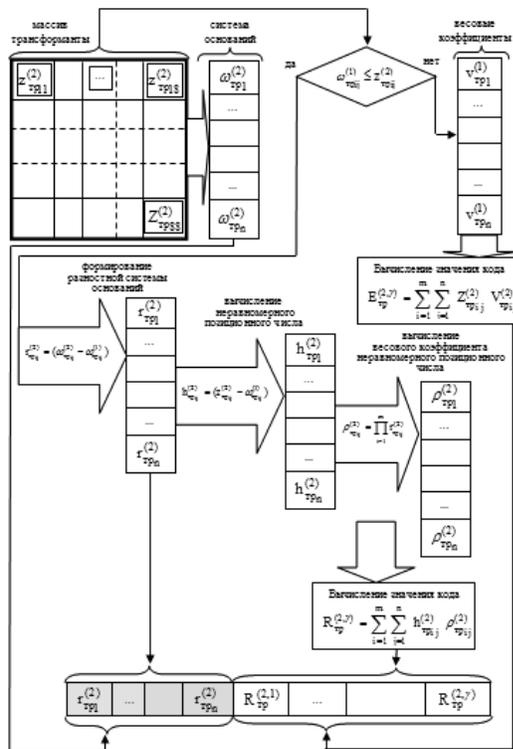


Рис. 4. Структурная схема формирования кодограммы второго и последующих массивов трансформанты сегмента изображения

Обработка элементов трансформант второго и последующих массивов трансформант  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  сегмента ( $\tau > 1$ ) предусматривает:

1) Формирование элементов системы оснований  $\Omega_{\text{тр}}^{(\tau)} = \{\omega_{\text{тр}ij}^{(\tau)}\}$  путем вычисления значений динамических диапазонов в строках  $w_{\text{тр}i}^{(\tau)}$  и столбцах  $\chi_{\text{тр}j}^{(\tau)}$  текущего массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  согласно выражениям:

$$w_{\text{тр}i}^{(\tau)} = \max_{1 \leq j \leq n} \{z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}\} + 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где  $z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}$  - элементы массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  трансформанты сегмента  $Y_{\text{тр}}^{(g)}$ ;

$$\chi_{\text{тр}j}^{(\tau)} = \max_{1 \leq i \leq m} \{z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}\} + 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\omega_{\text{тр}ij}^{(\tau)} = \min(w_i^{(\tau)}, \chi_j^{(\tau)}), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

2) Сравнительный анализ коэффициентов  $z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}$  массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  с элементами системы оснований  $\omega_{\text{тр}ij}^{(\tau-1)}$  предыдущего массива трансформанты  $Z_{\text{тр}}^{(\tau-1)}$  на их принадлежность к одному или другому классу неравновесных позиционных чисел.

Для каждого класса вычисление кода проводится по разным правилам. Для определения класса проверяется система неравенств:

$$\text{— если } z_{\text{тр}ij}^{(\tau)} < \omega_{\text{тр}ij}^{(\tau-1)}, \text{ то } z_{\text{тр}ij}^{(\tau)} \in Z_{\text{тр}}^{(\tau\gamma)}; \quad (9)$$

$$\text{— если } z_{\text{тр}ij}^{(\tau)} \geq \omega_{\text{тр}ij}^{(\tau-1)}, \text{ то } z_{\text{тр}ij}^{(\tau)} \in H_{\text{тр}}^{(\tau\gamma)}, \quad (10)$$

где  $Z_{\text{тр}}^{(\tau\gamma)}$ ,  $H_{\text{тр}}^{(\tau\gamma)}$  -  $\gamma$ -е неравновесное позиционное число  $\tau$ -го массива, построенное соответственно для абсолютной и дифференциальной (двухградационной) систем оснований.

3) Если выполняется неравенство (9), т.е. коэффициент  $z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}$  массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  меньше элемента  $\omega_{\text{тр}ij}^{(\tau-1)}$  системы оснований предыдущего массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau-1)}$ , то после вычисления весовых коэффициентов  $v_{\text{тр}ij}^{(\tau)}$  для текущего коэффициента массива, вычисляется код  $E_{\text{тр}}^{(\tau,\gamma)}$ :

$$E_{\text{тр}}^{(2,\gamma)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{\text{тр}ij}^{(2)} v_{\text{тр}ij}^{(2)}. \quad (11)$$

4) Если выполняется неравенство (10), т.е. коэффициент  $z_{\text{тр}ij}^{(\tau)}$  массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau)}$  больше элемента  $\omega_{\text{тр}ij}^{(\tau-1)}$  системы оснований предыдущего массива  $Z_{\text{тр}}^{(\tau-1)}$ , то:

- формируются элементы  $r_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  разностной системы оснований:

$$r_{\text{tpij}}^{(\tau)} = (\omega_{\text{tpij}}^{(\tau)} - \omega_{\text{tpij}}^{(\tau-1)}); \quad (12)$$

- формируются элементы  $h_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  неравномерного позиционного числа (происходит перевод коэффициента  $z_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  в дифференциальное позиционное число  $h_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  с учетом элементов системы оснований предыдущего массива  $\omega_{\text{tpij}}^{(\tau-1)}$ ):

$$h_{\text{tpij}}^{(\tau)} = (z_{\text{tpij}}^{(\tau)} - \omega_{\text{tpij}}^{(\tau-1)}); \quad (13)$$

- формируются элементы  $\rho_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  весового коэффициента неравномерного позиционного числа текущего массива:

$$R_{\text{tp}}^{(2,\gamma)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{\text{tpij}}^{(2)} \rho_{\text{tpij}}^{(2)}; \quad (14)$$

- вычисляется код  $R_{\text{tp}}^{(\tau,\gamma)}$ :

$$R_{\text{tp}}^{(\tau,\gamma)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{\text{tpij}}^{(\tau)} \rho_{\text{tpij}}^{(\tau)}. \quad (15)$$

5) Формируется дополнительная двоичная  $U_{\text{tpm,n}}^{(\tau)} = \{u_{\text{tpij}}^{(\tau)}\}$  служебная матрица, предназначенная для учета перевода коэффициента  $z_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  в дифференциальное позиционное число (рис. 5).

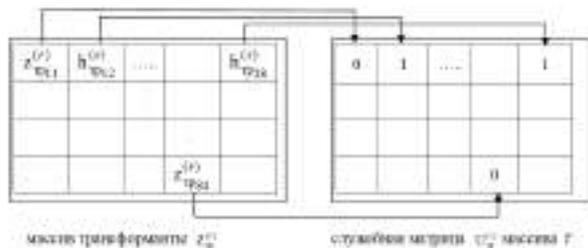


Рис. 5. Структурная схема формирования служебной матрицы  $U_{\text{tp}}^{(\tau)}$

Формирование элементов  $u_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  служебной матрицы  $U_{\text{tpm,n}}^{(\tau)}$  происходит следующим образом.

Если в процессе выполнения алгоритма формирования кодограммы коэффициент  $z_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  массива трансформанты  $Z_{\text{tp}}^{(\tau)}$  преобразовывается в дифференциальное позиционное число  $h_{\text{tpij}}^{(\tau)}$ , то элементу

$u_{\text{tpij}}^{(\tau)}$  служебной матрицы  $U_{\text{tpm,n}}^{(\tau)}$  присваивается

значение 1, в противном случае - присваивается значение 0:

$$u_{\text{tpij}}^{(\tau)} = \begin{cases} 1, & \rightarrow z_{\text{tpij}}^{(\tau)} \in h_{\text{tpij}}^{(\tau)}; \\ 0, & \rightarrow z_{\text{tpij}}^{(\tau)} \notin h_{\text{tpij}}^{(\tau)}. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, разработан метод снижения информационной интенсивности достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка на основе двухградационного неравномерного позиционного кодирования с динамическим обновлением базиса.

### Выводы

1. Доказано, что эффективным направлением снижения информационной избыточности аэрофотоснимков, поступающих с борта летательного аппарата с сохранением ключевой информации к его дешифрированию, есть технология выделения значимых областей из всего аэрофотоснимка.

2. Построен метод снижения информационной интенсивности достаточно информативных сегментов аэрофотоснимка на основе двухградационного неравномерного позиционного кодирования с динамическим обновлением базиса.

3. Разработанный метод обеспечивает:

- дополнительное повышение степени устранения информационной интенсивности достаточно информативных сегментов без внесения погрешности в исходное изображение;

- учитывает ограничение на вычислительную сложность алгоритма.

Это позволяет передавать неискаженную ключевую информацию к дешифрированию всего аэрофотоснимка, что влияет на повышение вероятности правильного дешифрирования и существенно сокращает временные затраты на выполнение этапов дешифрирования.

**Литература:** 1. *Алімпієв А.М.* Теоретичні основи створення технологій протидії прихованим інформаційним атакам в сучасній гібридній війні / А.М. Алімпієв, В.В. Бараннік, Т.В. Белікова, С.О. Сідченко // Системи обробки інформації. Харків: ХНУПС, 2017. Вип. 4(150). С. 113-121. 2. *Сэломон Д.* Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон. М.: Техносфера, 2004. 368 с. 3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений / У. Прэтт. М.: Мир, 1985. 736 с. 4. *Кашкин В.* Цифровая обработка аэрокосмических изображений / В. Кашкин, А. Сухин. Красноярск: Электронный ресурс, 2008. 121 с. 5. *Гонсанс Р.* Цифровая обработка изображений. / Гонсанс Р., Вудс Р. М.: Техносфера, 2005. 1072 с. 6. *Лабутина И.* Дешифрование аэрокосмических снимков / И. Лабутина. М.: Аспект-Пресс, 2004. 184 с. 7. *Красильников Н.* Цифровая обработка изображений / Н. Красильников. – М.: Вузовская книга, 2011. 320 с. 8. *Barannik, V., Podlesny, S., Krasnorutskyi, A., Musienko, A. and Himenko, V.* (2016),

The ensuring the integrity of information streams under the cyberattacks action, *2016 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs)*, Yerevan, pp. 1-5, doi: 10.1109/EWDTs.2016.7807752. **9.** Barannik, V., Ryabukha, Yu. and Podlesnyi, S. (2017) Structural slotting with uniform redistribution for enhancing trustworthiness of information streams, *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, No 76(7). P. 607, doi: /10.1615/TelecomRadEng.v76.i7.40. **10.** Wang, S., Zhang, X., Liu, X., Zhang, J., Ma, S. and Gao, W. (2017) Utility-Driven Adaptive Preprocessing for Screen Content Video Compression, *IEEE Transactions on Multimedia*, vol. 19, no. 3. P. 660-667. **11.** Barannik, V., Podlesny S., Yalivets K. and Bekirov A. The analysis of the use of technologies of error resilient coding at influence of an error in the codeword, (2016) *13th International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)*, Lviv, 2016. P. 52-54, doi: 10.1109/TCSET.2016.7451965. **12.** Barannik, V., Krasnorutskiy, A., Ryabukha, Y. and Okladnoy, D. (2016) Model intelligent processing of aerial photographs with a dedicated key features interpretation, *Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)*, Lviv, pp. 736, doi: 10.1109/TCSET.2016.7452167.

#### Transliterated bibliography.

- Alimpiev, A., Barannik, V., Belikova, T., and Sidchenko, S. (2017), "Teoretychni osnovy stvorennia tekhnolohii protydyi prykhovanym informatsiinym atakam v suchasni hibrydni viini" [Theoretical foundations of the creation of technologies for counteracting latent information attacks in the modern hybrid war], *Information processing systems*, No. 4(150). P. 113-121.
- Selomon, D. (2004), "Szhatie dannyh, izobrazhenij i zvuka" [Compression of data, images and sound], Tehnosfera, Moscow. 368 p.
- Prjett, U. (1985), "Cifrovaja obrabotka izobrazhenij" [Digital processing of images], Mir, Moscow. 736 p.
- Kashkin, V. and Suhin, A. (2008) "Cifrovaya obrabotka aerokosmicheskikh izobrazhenii" [Digital processing of aerospace images], Elektroniiy resurs, Krasnoyarsk. 121 p.
- Gonzalez, R. and Woods, R. (2005), "Tsyfrovaya obrabotka yzobrazheny" [Digital image processing], Technosphere, Moscow. 1072 p.
- Labutina, I. (2004), "Deshifrovanie ajerokosmicheskikh snimkov" [Decoding aerospace images], Aspekt-Press, Moscow. 184 p
- Krasil'nikov, N. (2011), "Cifrovaja obrabotka izobrazhenij" [Digital processing of images], Vuzovskaja kniga, Moscow. 320 p.
- .Barannik, V., Podlesny, S., Krasnorutskiy, A., Musienko, A. and Himenko, V. (2016), The ensuring the integrity of information streams under the cyberattacks action, *2016 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs)*, Yerevan. P. 1-5, doi: /10.1615/TelecomRadEng.v76.i7.40.
- Barannik, V., Ryabukha, Yu. and Podlesnyi, S. (2017), Structural slotting with uniform redistribution for enhancing

trustworthiness of information streams, *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*, No 76(7). P. 607, doi: /10.1615/TelecomRadEng.v76.i7.40.

**10.** Wang, S., Zhang, X., Liu, X., Zhang, J., Ma, S. and Gao, W. (2017), Utility-Driven Adaptive Preprocessing for Screen Content Video Compression, *IEEE Transactions on Multimedia*, Vol 19, No 3. P. 660-667

**11.** Barannik, V., Podlesny, S., Yalivets, K. and Bekirov, A. The analysis of the use of technologies of error resilient coding at influence of an error in the codeword, (2016) *13th International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)*, Lviv, 2016. P. 52-54, doi: 10.1109/TCSET.2016.7451965

**12.** Barannik, V., Krasnorutskiy, A., Ryabukha, Y. and Okladnoy, D. (2016), Model intelligent processing of aerial photographs with a dedicated key features interpretation, *Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)*, Lviv. P. 736, doi: 10.1109/TCSET.2016.7452167

Поступила в редколлегия 10.01.2018

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., Безрук В.М.

**Баранник Владимир Викторович**, д-р техн. наук, профессор, начальник кафедры боевого применения и эксплуатации АСУ Харьковского национального университета Воздушных Сил им. И. Кожедуба, vvbar.off@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2848-4524. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Сумская, 77/79.

**Баранник Дмитрий Викторович**, студент ХНУРЭ, d.v.barannik@gmail.com, orcid.org/0000-0002-7074-9864. Адрес: Украина, 61166, Харьков, проспект Науки 35.

**Краснорутский Андрей Александрович**, канд. техн. наук, старший научный сотрудник, докторант Харьковского национального университета Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Krasnorutsky.a@ukr.net, orcid.org/0000-0001-9098-360X. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Сумская, 77/79.

**Хаханова Анна Владимировна**, канд. техн. наук, доцент, докторант ХНУРЭ, E-mail: Ann.hahanova@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1318-7973. Адрес: Украина 61166, Харьков, проспект Науки 35.

**Barannik Vladimir**, Doctor of Technical Science Professor Kharkiv University of Air Force E-mail: vvbar.off@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2848-4524.

**Barannik Dmitry**, student, Kharkov National University of Radioelectronics. E-mail: d.v.barannik@gmail.com, orcid.org/0000-0002-7074-9864.

**Krasnorutsky Andrii**, Candidate of Technical Science Senior Research Kharkiv University of Air Force/ E-mail: Krasnorutsky.a@ukr.net, orcid.org/0000-0001-9098-360X.

**Hahanova Anna**, Candidate of Technical Science, docent, Kharkov National University of Radioelectronics E-mail: Ann.Hahanova@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1318-7973.

## МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ МОДЕРНІЗАЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

ЮДІН О. К., КАТЕРИНЧУК І. С.,  
СТРЕЛЬБИЦЬКИЙ М. А.

Аналізується структура інформаційних потоків в інтегрованій інформаційній системі прикордонного відомства та формується їх узагальнена структура. Основою методу раціоналізації процесу модернізації елементів інформаційної системи довільної структури за обраною стратегією модернізації є розроблена модель інформаційних потоків інформаційної системи на стадії модернізації. Наводиться структурна модель методу визначення послідовності модернізації елементів інформаційної системи. Результатом її роботи визначається послідовність, при дотриманні якої ймовірність порушення надійності інформації протягом всього періоду модернізації буде відповідати обраній стратегії.

**Ключові слова:** інформаційна система, послідовність модернізації, метод.

**Keywords:** information system, consistency of modernization, method.

### 1. Актуальність дослідження

Виконання основних функцій Державної прикордонної служби України [1] з питань здійснення в установленому порядку прикордонного контролю і пропуску через державний кордон України осіб, транспортних засобів, вантажів, а також виявлення і припинення випадків незаконного їх переміщення, ведення інформаційно-аналітичної діяльності, координація діяльності військових формувань та відповідних правоохоронних органів, пов'язаної із захистом державного кордону України, а також діяльності державних органів, що здійснюють різні види контролю при перетинанні державного кордону України, пов'язане із зберіганням, обробкою та передаванням інформаційних повідомлень службового характеру між суб'єктами інтегрованого управління кордонами.

В результаті розвитку і розширення сфери застосування обчислювальної техніки більша частина діяльності органів охорони державного кордону підлягає автоматизації. Наведене вище є об'єктивним підґрунтям модернізації інтегрованої інформаційної системи (ІС) прикордонного відомства.

### 2. Аналіз досліджень та публікацій

Значний внесок у розвиток інформаційних технологій створення гарантоздатних автоматизованих систем управління критичного

застосування та дослідження моделей і методів забезпечення функціональної безпеки та надійності інформації внесли відомі вчені Бараннік В.В., Богуш В.М., Герасименко В.А., Грицюк Ю.І., Грушо А.А., Дудикевич В.Б., Катеринчук І.С., Корнієнко Б.Я., Конахович Г.Ф., Ліпаєв В.В., Литвиненко О.Є., Мачалін І.О., Потій О.В., Скляр В.В., Харченко В.С., Юдін О.К. та інші.

Аналіз існуючих підходів до забезпечення функціональної безпеки інформаційних систем показав достатньо глибоке опрацювання досліджень окремо за кожною інформаційною системою. Однак залишаються невивченими особливості процесу модернізації зазначених систем.

Процес обміну інформації в ІС має сталий характер. Разом із тим, при модернізації складових інтегрованої системи інформаційні потоки мають змішану структуру як нової, так і старої версії програмно-апаратного забезпечення. Варто зазначити, що модернізація апаратного забезпечення пов'язана із типом системного програмного забезпечення та, в свою чергу, із спеціальним програмним забезпеченням (СПЗ). При модернізації апаратного забезпечення, яке сумісне за фізичними принципами та протоколами взаємодії із попередньою версією, характеристики інформаційних потоків не змінюються. Це пов'язано із тим, що джерелом інформаційних потоків є спеціальне програмне забезпечення ІС. Аналіз структури інформаційних потоків в ІС показав теоретичну можливість визначення такої послідовності модернізації елементів інформаційних систем, при якій загальна ймовірність порушення надійності інформації протягом терміну модернізації буде мінімальною. Наведене вище визначило необхідність розробки теоретичних підходів до визначення раціональних послідовностей модернізації елементів ІС.

*Метою дослідження* є розробка методу визначення раціональної послідовності модернізації елементів інформаційної системи.

### 3. Виклад основного матеріалу

На стадії модернізації програмного забезпечення здійснюється зміна структури та (або) кількості даних, що надходить до інших елементів ІС. Таким чином, під час заміни СПЗ можливий

негативний вплив такого дестабілізуючого фактору, як невідповідність версій інформаційних потоків.

Аналіз інформаційних потоків ІС прикордонного відомства [2, 3] дозволив сформулювати їх узагальнену структуру (рис.1).

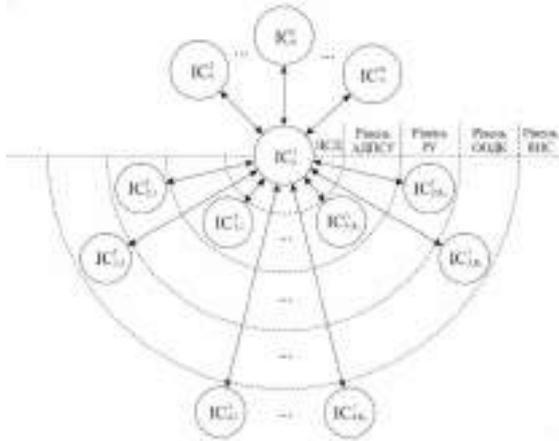


Рис. 1. Узагальнена структура інформаційних потоків в ІС

На рис. 1 представлена взаємодія першої ІС з рештою  $N$  ІС прикордонного відомства. Порядок ІС та призначення порядкових номерів є довільним та може застосовуватись до кожної із систем залежно від потреби. На кожному рівні автоматизації знаходиться  $K_i$  автоматизованих робочих місць, де  $i$  – індекс рівня автоматизації ( $1$  – рівень АДПСУ,  $4$  – рівень підрозділу).

Аналіз узагальненої структури інформаційних потоків в ІС дозволяє в кожному конкретному випадку, щодо певної ІС, представити інші інформаційні системи (підсистеми) як агреговані автоматизовані місця системи, що розглядається. Це дає можливість абстрагуватись від конкретної реалізації інших ІС та спростити аналітичний опис моделі.

Разом із тим, наявність різних рівнів автоматизації не змінює топологічну структуру інформаційних потоків, що дозволяє розглядати всі АРМ як рівноправні, тобто такі, які не впливають один на одного безпосередньо, але з власними значеннями величин інформаційних потоків. Обмін даними між АРМ здійснюється через складову ІС, яка розгорнута в центральному сховищі даних.

Таким чином, до моделі інформаційних потоків ІС на стадії модернізації входять дві групи елементів: центральний елемент ( $E_0$ ) та периферійні елементи ( $E_i, i = \overline{1, K}$ ), що представлені автоматизованими робочими місцями, взаємодіючими ІС та підсистемами. Елементи з'єднані один з одним за топологією "зірка" (рис.2). Між елементами моделі (центральним та периферійними елементами) здійснюється інформаційний потік величиною

$\lambda_{i,j}$ , де  $i, j = \overline{0, K}$ . Ймовірність порушення властивостей інформації при невідповідності версій спеціального програмного забезпечення визначається через  $P_{i,j}$ , де  $i, j = \overline{0, K}$ .

В моделі передбачається взаємодія елемента ІС із центральним вузлом та інформаційний обмін між елементами системи через центральний вузол. Наведена модель відповідає структурі інформаційних потоків ІС прикордонного відомства та процесу взаємодії автоматизованих робочих місць через підсистему, яка розгорнута в центральному сховищі даних.

Враховуючи, що всі ІС прикордонного відомства побудовані за клієнт-серверною технологією, розмірність величини інформаційного потоку  $\lambda_{i,j}$  між елементами моделі приймемо як кількість запитів за одиницю часу.

Ймовірність порушення властивостей інформації на окремому елементі ІС при здійсненні однієї операції запит-відповідь від іншого елемента системи залежить від ймовірностей модернізації взаємодіючих елементів  $P_i^m(t)$ ,  $P_j^m(t)$  та ймовірності порушення властивостей інформації при невідповідності версій спеціального програмного забезпечення  $P_{i,j}$ .

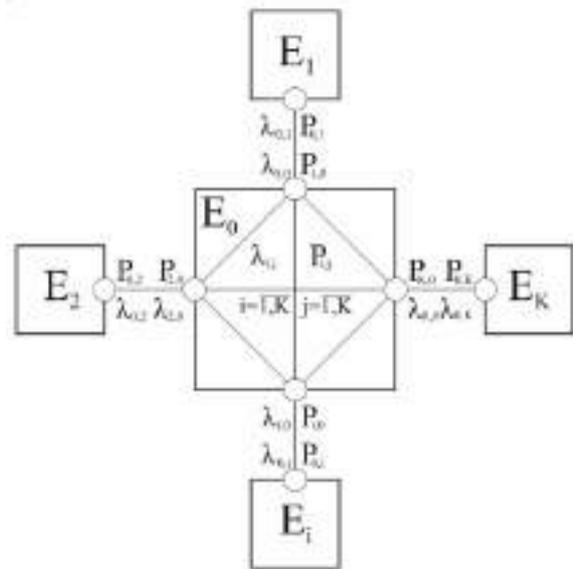


Рис. 2. Модель інформаційних потоків ІС на стадії модернізації

Таким чином, ймовірність порушення властивостей інформації при отриманні даних з іншого елемента становить:

$$P_{i,j}^*(t) = P_i^m(t) \cdot (1 - P_j^m(t)) \cdot P_{i,j} \quad (1)$$

В функціональній залежності (1) прийнято припущення, що порушення властивостей інформації здійснюється тільки за наявності інформаційного потоку від нової версії СПЗ до старої.

В іншому випадку порушення надійності інформації не здійснюється з причини узгодженості нової версії СПЗ. За потреби зміни форматів даних чи інших причин невідповідності різних версій СПЗ модернізацію можна здійснити за допомогою проміжної версії з дотриманням припущення в (1).

Для визначення ймовірності порушення надійності даних протягом всього терміну модернізації необхідно з'ясувати кількість запитів  $i$ -го елемента до  $j$ -го та отримання відповідей (блоків даних) за час  $t$  модернізації ІС, що в свою чергу становить:

$$k_{i,j}(t) = \lambda_{i,j} t. \quad (2)$$

Таким чином, порушення надійності хоча б одного блоку інформації протягом терміну  $t$  при взаємодії з  $j$ -м елементом становить:

$$P_{i,j}^E(t) = 1 - (1 - P_{i,j}^*(t))^{k_{i,j}(t)}. \quad (3)$$

Визначимо ймовірність порушення властивостей інформації протягом терміну  $t$  при модернізації ІС на її окремому елементі  $P_i^E(t)$  при взаємодії із рештою складових:

$$P_i^E(t) = 1 - \prod_{j=0}^K [1 - P_{j,i}^E(t)]. \quad (4)$$

Ймовірність модернізації елемента ІС змінюється за експоненціальним законом, функція розподілу якого має вигляд:

$$P_i^m(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, \quad (5)$$

де  $\mu_i$  – параметр швидкості здійснення модернізації  $i$ -го елемента ІС.

Враховуючи (4), визначимо ймовірність порушення надійності інформації ІС в цілому:

$$P^{IC}(t) = 1 - \prod_{i=0}^K [1 - P_i^E(t)] \quad (6)$$

Динаміка зміни ймовірності порушення надійності даних на одному елементі ІС показала тенденцію до її зниження при збільшенні швидкості оновлення елемента на який поступають дані відносно іншого елемента. Таким чином, організаційними заходами щодо порядку модернізації можливо знизити порушення властивостей інформації в ІС.

Для врахування поетапного процесу модернізації модифікуємо (5):

$$P_i^m(t, t_i^b) = \begin{cases} 0, & t < t_i^b \\ 1 - e^{-\mu_i(t - t_i^b)}, & t \geq t_i^b \end{cases}, \quad (7)$$

де  $\mu_i$  – параметр швидкості здійснення модернізації  $i$ -го елемента ІС;  $t_i^b$  – час початку проведення модернізації.

Враховуючи (7), функціональна залежність (1) прийме вигляд:

$$P_{i,j}^*(t) = (1 - P_i^m(t, t_i^b)) \cdot P_j^m(t, t_j^b) \cdot P_{i,j}. \quad (8)$$

Зазначений принцип модернізації зменшує ймовірність порушення властивостей інформації, викликаних невідповідностями версій СПЗ (рис. 3).

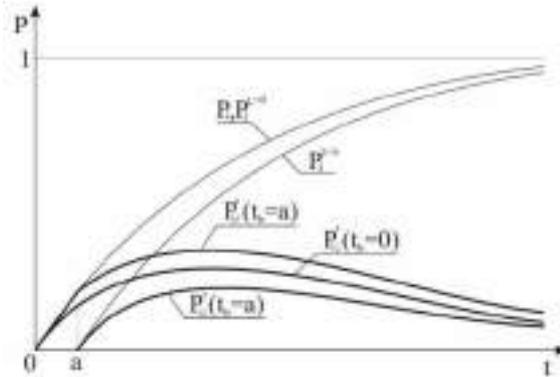


Рис. 3. Зміна ймовірності порушення надійності даних залежно від послідовності модернізації елементів. Разом із тим, зміна послідовності модернізації призводить до збільшення ймовірності порушення надійності даних. Таким чином, основним принципом послідовності модернізації елементів ІС, який знижує ймовірність порушення надійності даних, є модернізація за величиною вихідного потоку та ймовірності порушення даних при невідповідності версій СПЗ. При однаковій ймовірності порушення даних з причини невідповідності версій СПЗ двох елементів модернізується першим той, в кого вхідний потік менший.

Для прийняття рішення на основі інформації, яка обробляється в системах реального часу, ключовим аспектом є своєчасність і достовірність виконання запиту користувача. На стадії модернізації ІС можливе виникнення порушення властивостей інформації, викликане невідповідністю версій СПЗ.

Таким чином, метою методу є раціоналізація процесу модернізації елементів ІС довільної структури за обраною стратегією модернізації.

Вихідними даними методу визначення послідовності модернізації елементів ІС є:

$E = \{E_i\}$  – множина елементів ІС, де  $i = \overline{0, K}$ ;

$\Lambda = [\lambda_{i,j}]$  – матриця величин інформаційних потоків між елементами ІС;

$P^v = \{P_{i,j}\}$  – матриця ймовірностей порушення властивостей інформації в процесі здійснення обміну між двома елементами ІС при невідповідності версій спеціального програмного забезпечення.

Загалом, визначення раціональної послідовності можливе шляхом повного перебору варіантів перестановок множини елементів ІС, кількість

яких становить  $N = |E|$ . Зазначимо, що окремі ІС прикордонного відомства містять тисячі елементів, тому вирішення цієї проблеми таким підходом при існуючих обчислювальних потужностях є неможливим [4]. Раціональну послідовність будемо визначати за допомогою загального алгоритмічного підходу – методу гілок та меж [5].

Першим етапом методу є визначення часу початку проведення модернізації  $i$ -го елемента. Разом із тим, структура та особливості інформаційних потоків окремих ІС можуть передбачати ізоляцію окремих елементів один від одного з причини відсутності впливу дестабілізуючих факторів модернізації, тобто обмін між елементами здійснюється, але ймовірність порушення даних, викликаних стадією модернізації, відсутня. Цей факт дозволить здійснювати модернізацію таких елементів в будь-який момент протягом терміну модернізації.

З метою зменшення часу модернізації такі елементи об'єднаємо в групи із загальним часом початку проведення модернізації. Таким чином, послідовність модернізації задається параметром  $t_k^b$  часу початку проведення модернізації елементів  $k$ -ї групи. Даний параметр визначається через величину ймовірності того, що елемент буде модернізовано за даний час, та параметр швидкості модернізації. Час початку модернізації початкового елемента (групи)  $t_0^b = 0$ . Час початку модернізації для елементів будь-якої групи становитиме максимальний час з елементів попередньої групи модернізації. Визначимо час, при якому елемент ІС  $e_i$  буде модернізовано з ймовірністю  $P^b$ :

$$t_i^b = -\frac{\ln(1 - P^b)}{\mu_i} \quad (9)$$

Таким чином, час початку модернізації для будь-якої групи становитиме:

$$t_k^b = t_{k-1}^b + \max(t_i^b)_{t_i^b \in M_{k-1}, k > 0} \quad (10)$$

Другим етапом методу є побудова матриці величин ймовірностей порушення надійності інформації між елементами ІС  $\Xi = [\xi_{i,j}]$  при заданому інформаційному потоці  $\lambda_{i,j}$  за одиницю часу, де  $j = \overline{0, K}$ .

Елемент  $\xi_{i,j}$  розраховується так:

$$\xi_{i,j} = 1 - (1 - P_{i,j})^{\lambda_{i,j}} \quad (11)$$

Фізичним сенсом функціональної залежності (11) є значення ймовірності порушення властивостей інформації при здійсненні

інформаційного обміну між обома елементами ІС із заданою інтенсивністю за одиницю часу.

Третім етапом методу є побудова матриці суміжностей навантаженого графа функцією  $A = [a_{i,j}]$  де елемент  $a_{i,j}$  формується так:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \xi_{i,j} > 0 \\ 0, \xi_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Четвертим етапом методу є формування списку послідовності модернізації вузлів ІС, які не здійснюють дестабілізуючого впливу на інші елементи. Принцип побудови даного списку полягає у почерговому видаленні вузлів графа представленого матрицею  $A = [a_{i,j}]$ , у яких напівступінь виходу:

$$\text{dev}^+(e_i) = 0, \quad (13)$$

де  $e_i$  – вершина графа.

Умова (13) означає відсутність дуг, що виходять із вузла, тобто на елементі ІС буде здійснено більше порушення даних, ніж на іншому пов'язаному елементі. При наявності в графі декількох вузлів, для яких виконується умова (13), обирається вузол, сумарне значення ймовірностей якого максимальне, а саме:

$$e_i = \arg \max_j \left( \sum_{\forall j} a_{j,i} \xi_{j,i} \right) \quad (14)$$

При цьому зазначені вузли об'єднуються в групу  $M_0 = \{e_i^0\}$ , де 0 – індекс ітерації (групи). Це дозволить в подальшому раціоналізувати процедуру модернізації за критерієм мінімізації часу шляхом паралельного оновлення СПЗ в усіх органах та підрозділах охорони кордону елементів, які належать одній групі.

П'ятим етапом методу є формування уточненої матриці величин ймовірностей порушення надійності інформації між елементами ІС, в яких видалені вузли, що об'єднані в групу  $M_0 = \{e_i^0\}$ , а саме  $E' = E \setminus M_0$ . Зазначена операція дозволить зменшити обсяг розрахунків які будуть проводитись в наступних етапах.

В загальному випадку наявність вершин в графі, в яких виконується умова (13), не є обов'язковою. Це можливо при наявності циклів у графі, тобто взаємного впливу різних версій СПЗ один на одного. Для пошуку оптимальної за визначеним критерієм послідовності модернізації на шостому етапі використовується підхід гілок та меж, де поточне значення ймовірності порушення даних в ІС обраної послідовності модернізації являє собою нижню межу для відхилення від розгляду решти "гілок дерева" перестановки. Загальна структурна

модель методу визначення послідовності модернізації елементів ІС зображена на рис. 4.

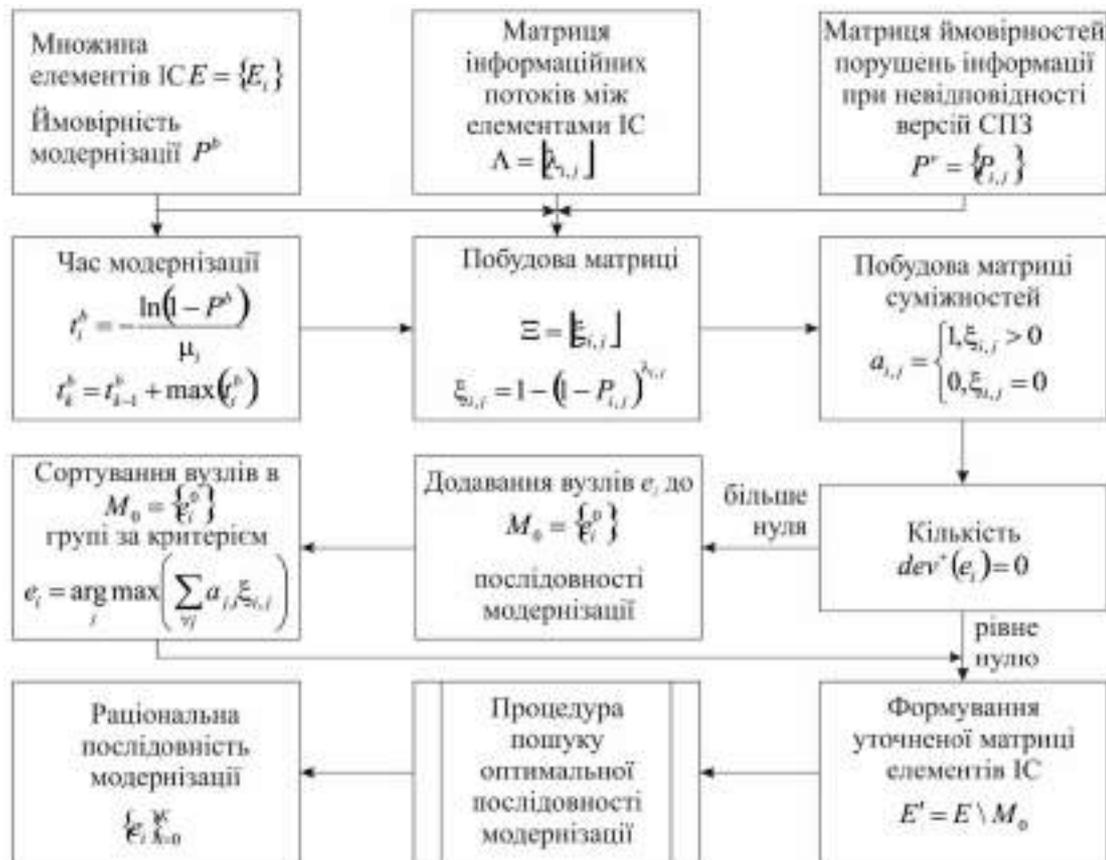


Рис. 4. Структурна модель методу визначення послідовності модернізації елементів ІС

Результатом роботи методу визначена послідовність  $\{e_i\}_{i=0}^K$ , при дотриманні якої ймовірність порушення надійності інформації протягом всього періоду модернізації буде відповідати обраній стратегії.

**Висновок.** Розроблений метод визначення раціональної послідовності модернізації елементів інформаційної системи обумовлюється обраним показником ефективності та ґрунтується на визначених замовником особливостях функціонування інформаційної системи та самого процесу оновлення спеціального програмного забезпечення. Застосування даного методу дозволить здійснювати модернізацію складових інформаційних систем в умовах дотримання встановленого нормативного рівня надійності інформаційного ресурсу прикордонного відомства. В подальшому зазначений метод може бути застосований в розробці технології забезпечення функціональної безпеки інтегрованої інформаційної системи Держприкордонслужби на стадії модернізації.

**Література:** 1. Закон України Про Державну прикордонну службу України // Відомості Верховної Ради України (ВВР). 2003. N 27. Ст.208.

2. Юдін О.К., Стрельбицький М.А. Зміст та ієрархія реєстру інформаційних ресурсів Держприкордонслужби України //Проблеми інформатизації та управління, №4(56)/2016. С. 85-91. 3. Юдін О.К., Стрельбицький М.А. Ієрархічний класифікатор автоматизованих систем прикордонного відомства. Радиоелектроника и информатика. № 1(76). 2017. 4. Ромм Я. Е., Назарьянц Е. Г. Полиномиальная сложность параллельной формы метода ветвей и границ решения задачи коммивояжера // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. №4 (165). 5. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

**Транслітерований список літератури:**

1. Zakon Ukrainy Pro Derzhavnu prykordonnu sluzhbu Ukrainy // Vidomosti Verkhovnoi Rady Ukrainy (VVR). 2003. N 27. st.208.  
2. Yudin O.K., Strelbitskiy M.A. Zmist ta iierarkhiia reiestru informatsiinykh resursiv Derzhprykordonsluzhby Ukrainy Problemy informatyzatsii na upravlinnia, №4(56)/2016. S. 85-91.  
3. Yudin O.K., Strelbitskiy M.A. Iierarkhichni klasyfikator avtomatyzovanykh system prykordonnoho vidomstva, Kharkovskiy Natsyonalnyi unyversytet radyoelektronyky, ISSN 1563-0064 Radyoelektronyka y ynformatyka // Nauchno-tekhnicheskyy zhurnal № 1(76), yanvar – mai 2017.  
4. Romm Ya. E., Nazariants E. H. Polynomyalnaia slozhnost parallelnoi formy metoda vetvei y hranysy resheniya zadachy kommyvoiazhera // Yzvestyia YuFU. Tekhnicheskyye nauky. 2015. №4 (165).

5. Syhal Y. Kh., Yvanova A. P. Vvedeniye v prykladnoe dyskretnoe prohrammyrovanye. M.: FYZMATLYT, 2002.

Надійшла до редколегії 11.03.2018

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Бараннік В.В.

**Юдін Олександр Костянтинович**, д-р техн. наук, професор, член-кореспондент Академії Зв'язку України, лауреат Державної премії України у галузі науки і техніки, директор інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного авіаційного університету. Адреса: Україна, 03058, Київ, проспект Космонавта Комарова, 1. E-mail: ksz@ukr.net

**Катеринчук Іван Степанович**, д-р техн. наук, лауреат Державної премії України у галузі науки і техніки, професор кафедри радіотехніки та телекомунікацій Національної академії Державної прикордонної служби України ім. Б. Хмельницького. Адреса: вул. Шевченка, 46, Хмельницький, 29000, Україна.

**Стрельбіцький Михайло Анатолійович**, канд. техн. наук, доцент, докторант Національної академії Державної прикордонної служби України ім. Б. Хмельницького. Адреса: вул. Шевченка, 46, Хмельницький, 29000, Україна. E-mail: m.strelb@ukr.net

**Yudin Alexander Konstantinovich**, D. of Engineering, professor. Corresponding member of Academy of Connection of Ukraine. Laureate of the State bonus of Ukraine in area of SciTech. Director of institute of computer information technologies the National Aviation University. Address: Kosmonavta Komarova Street, 1, Kyiv, 03058, Ukraine,

**Katerynychuk Ivan Stepanovich**, D. of Engineering, professor. Laureate of the State bonus of Ukraine in area of SciTech. Professor of the Department of Radio Engineering and Telecommunications of the National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine. Address: st. Shevchenko, 46, Khmelnytsky, 29000, Ukraine.

**Strelbtskiy Mykhailo Anatoliyovych**, PhD in Eng., doctoral of National Academy of State Border Service of Ukraine named after B. Khmelnytskyi. Address: st. Shevchenko, 46, Khmelnytsky, 29000, Ukraine.

---

## РЕФЕРАТИ

УДК 621.396

**Підвищення енергоефективності в гетерогенних мережах за рахунок мікростільників** / Д.С. Гордеева, В.В. Курдеча, Л.С. Глоба // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С.4-12.

Розглянута стільникова гетерогенна мережа із застосуванням мікростільників. Запропоновано поліпшення енергоефективності за рахунок впровадження мікростільників в гетерогенну мережу і розташування її на кордоні між двома макростільниками. Модифікована залежність енергоефективності введеним коефіцієнта використаної енергії між макро і мікростільниками. Проведено математичне моделювання енергоефективності з використанням запропонованої залежності. Результати моделювання показали, що застосування мікростільників покращує енергоефективність більше ніж на 29%.

Табл. 1. Іл. 5. Бібліогр.: 10 назв.

---

УДК 621.391

**Динамічна модель управління чергами на інтерфейсі маршрутизатора телекомунікаційної мережі** / Т. М. Лебеденко, О. В. Симоненко // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 13-18.

Отримала розвиток динамічна модель управління чергами. Новизна запропонованої моделі полягає в урахуванні динаміки зміни стану інтерфейсу маршрутизатора телекомунікаційної мережі при розподілі мережевого ресурсу. Динамічні властивості моделі описані нелінійними диференціальними рівняннями стану мережі, що засновані на стаціонарній поточковій апроксимації нестационарного потоку.

Табл. 2.. Бібліогр.: 12 назв.

---

УДК 621.396

**Модифікована архітектура Wi-Fi Offload** / А.О. Пишко, В.В. Курдеча // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 19-24.

Описано технологію нового покоління Wi-Fi Offload, з допомогою якої можлива реалізація вивантаження трафіка мережі в мережу Wi-Fi, що дозволить розвантажити стільникову мережу від потоку трафіка даних. Запропоновано модифікувати існуючу архітектуру за рахунок впровадження додаткового модуля, який аналізує чутливість трафіка даних, що підвищить ефективність розвантаження мережі LTE за допомогою перенаправлення нечутливого до затримки трафіка в мережу Wi-Fi.

Іл. 4. Бібліогр.: 7 назв.

---

УДК 621.396

**Концепції побудови сучасних мереж** / Л.С. Глоба, М.А. Скулиш, І.О. Тимченко // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 25-29.

Представлено огляд технологій SDN, SDR, NFV, Big Data, IoT та їх реалізація за допомогою хмарних сервісів, що є невід'ємною частиною мереж 5G. Детально розглянуто концепцію SDN. Визначено недоліки хмарних мереж радіодоступу та можливі шляхи їх подолання. Запропоновано сегментацію мережі C-RAN з резервуванням елемента управління та поділ керуючого віртуального контролера на дві площини.

Іл. 6. Бібліогр.: 12 назв.

---

## ABSTRACTS

UDC 621.396

**Increasing Energy Efficiency in the Heterogenic Networks via Microsots** / D.S. Gordeeva, V.V. Kurdech, L.S. Globe // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 4-12.

A cellular heterogeneous network using microcells is considered. It is proposed to improve energy efficiency by introducing microcells into a heterogeneous network and placing it on the boundary between two macrocells. The dependence of energy efficiency has been modified by introducing the coefficient of energy used between macro and micro-cells. Mathematical modeling of energy efficiency with the use of the proposed dependence is carried out. The simulation results showed that the use of micro-cells improves energy efficiency by more than 29%.

Tab. 1. Fig. 5. Ref.: 10 items.

---

UDC 621.391

**Dynamic model of queues management on the router interface of the telecommunication network** / T. Lebedenko, O. Simonenko // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 13-18.

A dynamic management model based on the allocation of resources in a telecommunication network is proposed in the article. The novelty of the model lies in considering the dynamic nature of the change in the state of the interface described by the nonlinear differential equations of the network state on the basis of the Pointwise Stationary Fluid Flow Approximation.

Tab. 2. Ref.: 12 items.

---

UDC 621.396

**Modified architecture of Wi-Fi Offload** / A.O. Pyshko, V.V. Kurdecha // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 19-24.

In this paper described new generation technology Wi-Fi Offload with the help of which it is possible to unload cellular network traffic into the Wi-Fi network that will relieve the cellular network from the data traffic flow. It is proposed to modify the existing architecture by implementing an additional module that analyzes the sensitivity of data traffic, which will increase the efficiency of LTE network unloading by redirecting the delay-insensitive traffic to the Wi-Fi network.

Fig. 4. Ref.: 7 items.

---

UDC 621.396

**Concepts for the construction of modern networks** / L.S. Globa, M.A. Skulish, I.A. Timchenko // *Radioelektronika i informatika*. 2018. No. 1. S. 25-29.

The review of SDN, SDR, NFV, Big Data, IoT technologies and their implementation through cloud-based high-speed, which is an integral part of 5G networks, is presented. SDN concept is discussed in detail. The defects of radio access networks in the cloud and possible ways of overcoming them are determined. The segmentation of the C-RAN network with redundancy of the control and the separation of the controlling virtual controller in two planes is proposed.

Fig. 6. Ref.: 12 items.

---

УДК 519.85

**Функціонально-аналітичні представлення множин евклідових комбінаторних конфігурацій в задачах оптимізації** / О.С. Пичугіна // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 30-39.

Проблема побудови математичної моделі задач комбінаторної оптимізації в термінах неперервних змінних вирішена для загальних множин евклідових конфігурацій перестановок і розміщень векторів та їх окремих підкласів. Інструментом математичного моделювання обрано метод неперервних функціональних представлень образів евклідових комбінаторних множин, що є множинами комбінаторних конфігурацій, у арифметичний евклідів простір.

Бібліогр.: 40 назв.

---

УДК 519.63 : 532.5

**Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R-функція для їх чисельного аналізу** / О.Р. Подгорний // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 40-47.

Розглянута задача математичного моделювання фільтраційних течій та наводиться постановка тестової задачі теорії стаціонарної фільтрації. Для неї на основі методу R-функцій побудована структура розв'язку, яка задовольняє всім крайовим умовам задачі, та обґрунтовано застосування методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти.

Л. 1. Бібліогр.: 20 назв.

---

УДК 517.927.4 : 517.988

**Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь** / М.Д. Вороненко, М.В. Сидоров // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 48-54.

Розглянуто різні крайові задачі для нелінійного рівняння  $-u'' = f(x, u)$ . Для них за допомогою функції Гріна (якщо вона існує) зроблено перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна. Отримано умови існування невід'ємного розв'язку та двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Наведено результати обчислювального експерименту.

Табл. 5. Л. 4. Бібліогр.: 10 назв.

---

УДК 658:512.011:681.326:519.713

**Дедуктивний аналіз і діагностування логічних X-функцій** / В.І. Хаханов, І.В. Смельянов, М.М. Любарський, С.В. Чумаченко, Є.І. Литвинова, Л.В. Ларченко // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 55-63.

Запропонована структурна модель взаємодії X-функцій і похідних компонентів, орієнтованих на синтез і аналіз цифрових систем з метою зменшення часу проектування і тестування обчислювальних пристроїв. Введено поняття простих X-функцій від кінцевого числа змінних, які характеризуються відсутністю мінімізації та наявністю властивостей тестопригодності для вирішення завдань синтезу тестів, моделювання і діагностування. Сформульовано метричні властивості X-функцій від кінцевого числа змінних для оцінки якості перевіряючих тестів шляхом дедуктивного моделювання константних несправностей на кубітних структурах даних. Запропоновано аналітичний вираз для синтезу кубітних покриттів X-функцій від кінцевого числа змінних з метою подальшого синтезу і

---

UDC 519.85

**The penalty method for solving optimization problems over polyhedral-spherical combinatorial sets** / O.S. Pichugina// *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 30-39.

A mathematical modelling problem of combinatorial optimization problems in terms of continuous variables is solved for the general sets of the Euclidean vectors' permutation and partial permutation configurations as well as special subclasses of the sets. The continuous functional representations method is used as a modelling tool for images in the Euclidean space of the Euclidean combinatorial sets being sets of combinatorial configurations.

Ref.:40 items.

---

UDC 519.63 : 532.5

**Mathematical modeling of flow in porous media and application of R-function's method for their numerical analysis** / O.R. Podhornyj // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 40-47.

The article represents problem of mathematical modeling of flows in porous media and the formulation of test problem of stationary theory of flows in porous media. Based on the R-function's method, a solution structure, that satisfies all the boundary conditions, is developed. Also, the application of the Ritz method for approximation of the indeterminate component is justified.

Fig. 1. Ref.: 20 items.

---

UDC 517.927.4 : 517.988

**Constructive investigation of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations** / M.D. Voronenko, M.V. Sidorov // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 48-54.

Various boundary value problems for the non-linear equation  $-u'' = f(x, u)$  are considered. For them, using the Green function (if it exists), a transition is made to the equivalent integral Hammerstein equation. We obtained the conditions for the existence of a non-negative solution and the two-sided convergence of successive approximations to it. The results of a computational experiment are presented.

Tab. 5. Fig. 4. Ref.: 10 items.

---

UDC 658:512.011:681.326:519.713

**Deductive Analysis and Diagnostics of Logical X-Functions** / V.I. Hahanov, I.V. Iemelyanov, M.M. Lyubarsky, S.V. Chumachenko, E.I. Litvinova, L.V. Larchenko // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 55-63.

A structural model for the interaction of X-functions and derived components, oriented to the synthesis and analysis of digital systems, is proposed to reduce the design and testing time of computing devices. The notion of simple X-functions of a finite number of variables that are characterized by the absence of minimization and the presence of testability properties for solving the problems of test synthesis, modeling and diagnostics is introduced. Metric properties of X-functions from a finite number of variables are formulated to evaluate the quality of verification tests by deductive modeling of the testable constant faults on qubit structures. An analytical expression is proposed for synthesizing qubit coverings of X-functions from a finite number of variables to subsequent synthesis and analysis of tests for testing and diagnosing faults. The

аналізу тестів перевірки та діагностування несправностей. Запропоновано кубітний і квантовий методи безумовного діагностування дефектів, що використовують паралельні логічні операції для підвищення швидкодії online пошуку дефектів.

Лл. 7. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 004.89

**Вирішення задачі багатомітної класифікації для ідентифікації радіонуклідів** / А.І. Скрипник, Д.В. Федорченко, М.А. Хажмурадов // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 65–71.

Розглянуто задачу визначення ізотопного складу радіоактивних джерел за спектрами їх гамма-випромінювання як задачу багатомітної класифікації. Вихідна задача була перетворена в набір задач одномітної класифікації методами бінарної релевантності, булеана міток і ланцюжків класифікаторів, які далі було вирішено за допомогою таких алгоритмів: k найближчих сусідів, наївного байєсівського класифікатора, методу опорних векторів і дерев прийняття рішень. Табл. 6. Лл. 5. Бібліогр.: 18 назв.

УДК 621.396

**Метод зниження інформаційної інтенсивності достатньо інформативних сегментів аерофотознімка** / В.В. Баранник, Д.В. Баранник, А.О. Красноручий, Г.В. Хаханова // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 72–76.

Запропоновано перспективний напрямок зниження інформаційної надлишковості аерофотознімків зі збереженням ключової інформації до його дешифрування. Надано опис роботи розробленого методу зниження інформаційної надлишковості достатньо інформативних сегментів аерофотознімка. Обґрунтовано, що запропонована концепція має напрямок максимального збереження ключової інформації до дешифрування всього аерофотознімка. Наведена структурна схема послідовності обробки достатньо інформативних сегментів аерофотознімка. Наданий алгоритм формування кодограми сегментів аерофотознімка. Лл. 5. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 004.056

**Метод визначення раціональної послідовності модернізації елементів інформаційної системи** / О.К. Юдін, І.С. Катеринчук, М.А. Стрельбіцький // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1. С. 77–82. Проведено аналіз структури інформаційних потоків в інтегрованій інформаційній системі прикордонного відомства та сформована їх узагальнена структура. Основою методу раціоналізації процесу модернізації елементів інформаційної системи довільної структури за обраною стратегією модернізації є розроблена модель інформаційних потоків інформаційної системи на стадії модернізації. Наведена структурна модель методу визначення послідовності модернізації елементів інформаційної системи, результатом роботи якої визначена послідовність, при дотриманні якої ймовірність порушення надійності інформації протягом всього періоду модернізації буде відповідати обраній стратегії.

Лл. 4. Бібліогр.: 5 назв.

qubit and quantum methods of unconditional defect diagnosis are proposed, using parallel logical operations to improve the speed of online defect search.

Fig. 7. Ref.: 12 items.

UDC 004.89

**Solving the multi-label classification problem for identification of radionuclides** / A.I. Skrypyk, D.V. Fedorchenko, M.A. Khazhmuradov // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 65–71.

The problem of determining the isotopic composition of radioactive sources using gamma-ray spectra was considered as a multi-label classification problem. The original problem was transformed into a set of the single-label classification problems by the methods of binary relevance, the label powerset and classifier chains, which were solved by the following algorithms: k-nearest neighbors, naive Bayes classifier, support vector machines and decision trees. Tab. 6. Fig. 5. Ref.: 18 items.

UDC 621.396

**Method of the clustering of fragments of aerial photographs in spectral frequency space** / V. Barannik, D. Barannik, A. Krasnorutsky, A. Hahanova // *Radioelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 72–76.

The direction of reducing the information redundancy of aerial photographs with preservation of key information to its interpretation is proposed. The substantiation of a method of exact allocation of highly informative segments from the whole aerial photograph, which carry the maximum information objects in the interests of interpretation is given. A technological concept of an effective syntactic description of the elements of sufficiently informative segments of an aerial photo is taken into account, which takes into account the characteristics of the transformant components of the discrete cosine transform. Moreover, such a concept is aimed at maximum preservation of key information to decipher the whole aerial photo. The scheme for evaluating the significance of transformants of an aerial photograph informative segments is considered. Fig. 5. Ref.: 12 items.

UDC 004.056

**Method of determining the rational sequence of modernization of elements of the information system** / A.K. Yudin, I.S. Katerynychuk, M.A. Strelbtskiy // *Radi-oelektronika i informatika*. 2018. N 1. P. 77–82.

The article analyzes the structure of information flows in the integrated information system of the border department and generates their generalized structure. The basis of the method of streamlining the process of updating elements of the information system of an arbitrary structure according to the chosen strategy of modernization is the developed model of information flows of the information system at the stage of modernization. The structural model of the method for determining the sequence of modernization of elements of an information system is presented, the result of which will determine the sequence in which the probability of breaking the reliability of information throughout the period of modernization will correspond to the chosen strategy. Fig. 4. Ref.: 5 items.

## ПРАВИЛА

оформления рукописей для авторов научно-технического журнала

"Радиоэлектроника и информатика"

**Тематика:** радиотехника; электроника; телекоммуникации; компьютерные науки; компьютерная инженерия и техническая диагностика; системы и процессы управления; информационные технологии в науке, образовании, культуре, медицине, экономике, экологии, социологии.

**Формат страницы** — А4 (210x297 мм), все поля — 20 мм. Количество колонок — 2, интервал между ними — 5 мм. Редактор Page Maker 6.0 или Word, гарнитура Times ET, (Times New Roman Cyr), кегль — 10 пунктов, межстрочное расстояние — 110%, табуляция — 5 мм. Объем рукописи — от 2 до 7 с. (языки: русский, украинский, английский).

Согласно решению редакционной коллегии, основанному на Постановлении ВАК Украины от 15.01.2003 №7-05/1 (Бюллетень ВАК Украины, №1, 2003, с.2), текст рукописи должен быть структурирован и содержать все *основные части, характерные для научной статьи*: **введение** (отражает *актуальность*, формулирование *цели и задач* исследования); **сущность** (изложение основного материала исследования с описанием идеи, метода, и обоснованием полученных научных результатов); **выводы** (отражают результаты исследования, их *научную новизну* и *практическую значимость*, сравнение с лучшими аналогами, перспективы).

**Оформление рукописи:** УДК, заголовок, фамилия и инициалы, аннотация, текст, литература, реферат (на украинском и английском языках), сведения об авторах.

### ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ

УДК 519.713

### НАЗВАНИЕ РУКОПИСИ

*ФАМИЛИЯ И.О.*

(Название желаемого раздела тематики)

**Аннотация** (на языке статьи, абзац 5-10 строк, кегль 9) помещается в начале статьи и содержит информацию о результатах описанных исследований.

**Ключевые слова (Key words)** приводятся (на языке статьи и на английском языке).

Основной текст следует разделять на **подразделы с заголовками**, выделенными полужирным шрифтом, пронумерованными арабскими цифрами, как показано в следующей строке.

#### 1. Название раздела

**Рисунки и таблицы** (черно-белые, контрастные) помещаются в текст после первой ссылки в виде *переносимых объектов* и отдельно нумеруются, при наличии более одного рисунка (таблицы), арабскими цифрами. Рисунок содержит подрисуночную центрированную подпись под иллюстрацией (вне рисунка), как показано на рис. 1.

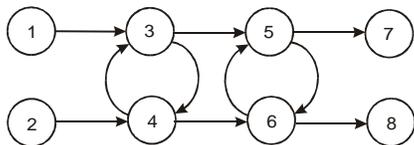


Рис. 1. Граф с контурами

Табличный заголовок располагается справа над таблицей (вне таблицы), что иллюстрируется табл.1. Редакторы: CorelDraw, Table Editor, Microsoft Excel.

Таблица 1

Шаг i	1	2	3	4	5	6
Ф1(1,3)	1	2	2	4	6	1

**Формулы** нумеруются при наличии ссылок на них в рукописи. Формулы, символы, переменные, встречающиеся в тексте, должны быть набраны как объекты Microsoft Equation. Рекомендуемая высота формульных кеглей: переменная — 10 пунктов, индекс — 8, над- и подиндекс — 8, основной (индексный) математический символ — 12(10):

$$F_{i+j} = \sum_{i=1}^{b^k} F_j^i - \prod_{j=1}^{1+h^2} P_{R_{j+i}} + F^{j-1} + X^{\sum n^k} \quad (1)$$

Формат переменных (желательно не курсивом — без наклона) в тексте и формулах должен быть идентичным. В тексте над- и подиндексы составляют 70 % от высоты кегля, которые рекомендуется опускать (поднимать) на 17 (33) % относительно основной строки.

**Литература** (включает опубликованные источники, на которые имеются ссылки в тексте, заключенные в квадратные скобки) печатается без отступа, кегль 9 пунктов.

**Транслитерированный список литературы**, в соответствии с требованиями наукометрических баз, является полным аналогом списка литературы и выполняется на основе транслитерации языка оригинала латиницей.

При этом число и порядок источников в списке литературы должны оставаться неизменными. Ссылки на англоязычные источники не транслитерируются. Транслитерация украинского языка латиницей выполняется на основе Постановления Кабинета Министров Украины № 55 от 27 января 2010

(<http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/55-2010-%D0%BF>), русского — на основе ГОСТ 7.79-2000 (ISO 9-95) (<http://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=130715>).

Рекомендуется использовать автоматические средства транслитерации (<http://translit.net>).

Образец окончания текста рукописи (литература, сведения об авторах, реферат) представлен ниже.

**Литература:** 1. *Фамилия И.О.* Название книги. Город: Издательство, 1900. 000 с. 2. *Название сборника / Под ред. И.О. Фамилия.* Город: Издательство, 1900. 000 с. 3. *Фамилия И.О.* Название статьи // Название журнала. Название серии. 1997. Т. 00, № 00. С. 00-00.

#### Транслитерированный список литературы.

Поступила в редколлегия 00.00.00

**Рецензент:** должность, ученая степень, фамилия, И.О.

**Фамилия, имя, отчество,** ученая степень, звание, должность и место работы. Научные интересы. Увлечения и хобби. Адрес, контактные телефоны.

#### Сведения об авторах на английском языке.

Рефераты на украинском, русском и английском языках.

УДК 000.000.00

**Назва статті** / Ініціали. Прізвище. // Радіоелектроніка та інформатика. 2000. № 00. С. 00–00.

Текст реферату.

Табл. 00. Іл. 00. Бібліогр.: 00 назв.

УДК 000.000.00

**Название статьи** / Инициалы. Фамилия. // Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 00. С. 00–00.

Текст реферата.

UDC 000.000.00

**Title of paper** / Initials. Surname // Radioelektronika i informatika. 2000. N 00. P. 000-000.

Text.

Tab. 00. Fig. 00. Ref.: 00 items.

### Представление материалов

Рукопись, рефераты, сведения об авторах – в одном файле, *поименованном фамилией автора*. Твердая копия материалов – для граждан Украины — в одном экземпляре: рукопись, подписанная авторами, рефераты, внешняя рецензия, подписанная доктором наук, заявление на имя главного редактора со сведениями об авторах.

Материалы, не соответствующие требованиям, редколлегией не рассматриваются.

Адрес редакции: Украина, 61166, Харьков, просп. Науки, 14, ХНУРЭ, комната 321, тел. 70-21-326.

E-mail: [hahanov@icloud.com](mailto:hahanov@icloud.com)

Рекомендовано Науково-технічною радою Харківського національного університету радіоелектроніки (протокол № 9 від 16.03.2018)

Підписано до друку 27.03.2018. Формат 60×84<sup>1/8</sup>.

Умов. друк. арк. 10,3. Зам. № б/н . Тираж 300 прим. Ціна договірна.

Віддруковано у СПД ФО Степанов В.В.

61168, Харків, вул. Акад. Павлова, 311.