УДК 517.3

Розвиток базового рівня дисципліни «Аналітична геометрія»

Володимир Колодяжний,
доктор фізико-математичних наук, профессор,

Андрій Левтеров,
кандидат технічних наук, професор,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет,

Ольга Лісіна,
кандидат фізико-математичних наук,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Одним з важливих етапів математичної підготовки студента технічного університету є оволодіння методами аналітичної геометрії. Предмет аналітичної геометрії міститься в дослідженні геометричних форм за допомогою алгебраїчного аналізу. Завдяки аналізу вирішується питання про розмір геометричних форм, а аналітична геометрія дозволяє отримати суттєву характеристику, яка пов'язана з їх положенням. Числа, що визначають положення геометричної форми, називаються її координатами. Засоби, за допомогою яких визначається положення геометричної форми, називаються методом координат. За первинний елемент геометричної форми вибирають точку, а решту геометричних форм розглядають як геометричне місце точок. Визначення положення точки у просторі за допомогою чисел було положено в основу методу координат. Ідеї методу координат знайшли застосування у всіх галузях математики і на основі розвитку диференціального та інтегрального числення стали потужною зброєю в математичних дослідженнях.

Вивчення аналітичної геометрії базується на дослідженні плоских геометричних форм засобами алгебри, що основані на використанні координат. Метод координат розроблений французьким філософом та математиком Рене Декартом (рис.1), складає основи аналітичної геометрії. В область вивчення геометрії Декарт включив «геометричні» лінії, в подальшому їх назвали алгебраїчними, які можна описати рухом шарнірних механізмів.

Рис. 1. Рене Декарт (Descartes René — 1596–1650 рр.) — винахідник методу координат, засновник основ аналітичної геометрії

Основні геометричні форми, з якими знайомляться на початку вивчення аналітичної геометрії, пов'язані з плоскими фігурами (прямі лінії, лінії елементарної теорії конічних перерізів (кола, еліпса, гіперболи, параболи) та скінченої множини канонічних кривих). Дослідження плоских геометричних форм здійснюється засобами алгебри, що основані на використанні координат. Потім переходять до вивчення засобами метода координат просторових геометричних форм (прямої у просторі, площини, канонічні циліндричні та конічні поверхні, еліпсоїд, параболоїд, гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди, конуси та циліндри другого порядку та скінчену множину канонічних поверхонь). В аналітичній геометрії будь-яку криву або поверхню розглядають як геометричне місце точок. У такому визначені кривої або поверхні міститься властивість, яка загальна для всіх їх точок. Якщо позначити через x, y, z координати довільної точки, наприклад відповідної поверхні, відносно деякої системи координат, можна виразити шляхом побудови рівняння між x, y, z властивість, яка є загальною для всіх точок поверхні і тільки для них. Таким чином відбувається побудова так званого рівняння поверхні. Вивчення геометричних властивостей поверхні зводиться до вивчення аналітичних властивостей відповідного їй рівняння. З іншої точки зору, будь-яке рівняння між змінними x, y, z, взагалі кажучи, визначає поверхню як геометричне місце точок, координати яких x, y, z задовольняють цьому рівнянню.

Таким чином маємо постановку двох основних задач аналітичної геометрії [1].

1. Задане рівняння, що зв'язує координати x, y, z. Дослідити геометричну форму кривої (поверхні), що визначається цим рівнянням.

2. Задана крива (поверхня) як геометричне місце точок. Скласти рівняння цієї кривої (поверхні).

Вирішення цих задач на загальних підставах було здійснено харківським математиком та механіком, академіком Національної академії наук Володимиром Логвиновичем Рвачовим (рис. 2). Їм була запропонована теорія R-функцій, яка дозволяє вирішити так звану обернену задачу аналітичної геометрії, яка складається в побудові рівняння геометричного об'єкту на основі його креслення. Відмітимо, що дана теорія дозволила вирішити проблему побудови базисних функцій для областей практично довільної форми і запропонувати метод розв'язання крайових задач математичної фізики. Це дозволило розв'язувати важливі практичні задачі математичного моделювання при дослідженні інженерних проблем, задачі геометричного проектування, розпізнавання образів, розкрою матеріалів тощо.

Основи теорії R-функцій в теперішній час викладаються в багатьох університетах світу. Цілком природно розширити курс аналітичної геометрії за рахунок включення математичних засобів теорії R-функцій і розглядати вирішення прямої та оберненої задачі аналітичної геометрії з загальною точки зору.

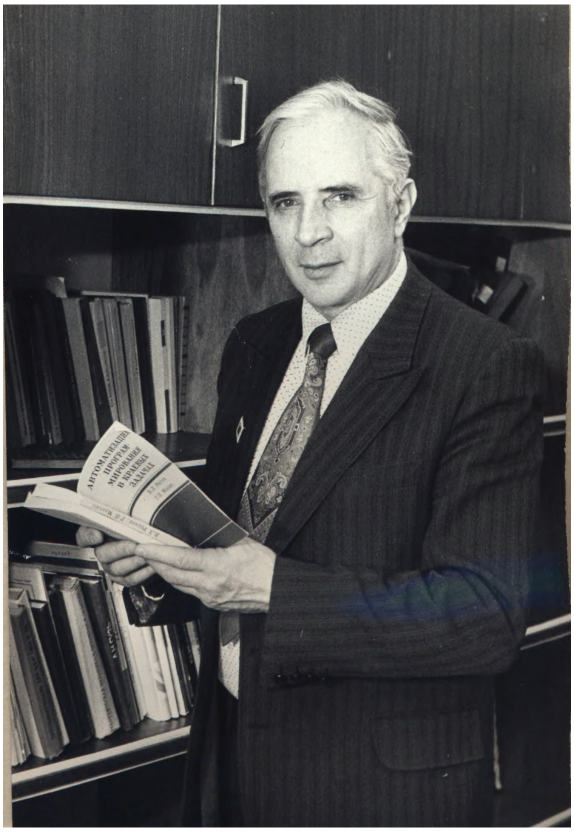


Рис. 2. Володимир Логвинович Рвачов (1926 — 2006 рр.) — український вчений в галузі математики, механіки і кібернетики, творець теорії R-функцій

Геометричні об'єкти, які зустрічаються в інженерній практиці, мають різну геометричну форму — креслення, деталі конструкцій, тіла тощо. В основному курсі аналітичної геометрії знайомляться з об'єктами простої форми — пряма, коло, куля, еліпс, циліндр і т.д. Одночасно маємо справу з складними об'єктами, з якими оперуємо на практиці і наглядний вигляд яких безсумнівний (мова йде про реальні об'єкти, для яких існує наочне зображення). Не розглядаємо складні геометричні об'єкти, як, наприклад, канторова множина точок відрізку [0, 1] та інші, що зустрічаються в теоретичних розділах математики. Будемо розглядати задачу розробки методів, які дозволяють для будь-якого реального об'єкту написати рівняння $f=0$ або нерівність $f \geq 0$, де f — відповідно число раз неперервно-диференційовна функція. Написати рівняння означає, що функція може бути представлена у вигляді формули, яка має вигляд єдиного аналітичного виразу. Зміст цього вислову в наступному [3].

Нехай маємо систему функцій H і деяку функціональну множину $\mathfrak{M}_o$. Систему будемо називати повною по відношенню до множини $\mathfrak{M}_o$, якщо $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}(H)$, тобто всі функції, які належать до множини $\mathfrak{M}_o$, є H-реалізованими. Якщо для позначення функцій, які формують повну систему H, побудувати відповідну систему символів, то будь-яку функцію з множини $\mathfrak{M}_o$, для якої система H є повною, можна представити у вигляді формули, що має вигляд єдиного аналітичного вигляду, що записаний за допомогою введених символів. Треба також з'ясувати вплив на розв'язок задачі про аналітичний опис геометричних об'єктів понять неперервності та диференційованості функції f.

Визначення 1. Множину всіх точок n-вимірного евклідового простору, в якому функція $y = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, приймає значення, які дорівнюють нулю, називається кресленням, що описується рівнянням $f(x) = 0$. Рівняння $f(x) = 0$ називається неперервним (неперервно-диференційованим, аналітичним, H-реалізованим і т.д.), якщо функція $f(x)$ є неперервною (неперервно-диференційованою, аналітичною, H-реалізованою і т.д.).

Визначення 2. Множина всіх точок n-вимірного евклідового простору, в якому функція $f(x)$ приймає невід'ємні значення, називається областю, що описується нерівністю $f(x) \geq 0$.

Поряд з завданням геометричних об'єктів за допомогою рівняння $f(x) = 0$ та нерівності $f(x) \geq 0$ можна розглядати об'єкти, що визначаються нерівностями $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$ або умовами вигляду $f(x) \neq 0$ і т.д.

Для розвинення питання треба скористатися деякими поняттями дискретної математики. Нагадаємо зміст поняття двозначного предикату, яке будемо використовувати в подальшому. Нехай маємо деяку умову A. Будемо вважати, що якщо ця умова поміщена в дужки, двійковою змінною, яка дорівнює одиниці, у випадку, коли умова A виконується, і нулю — коли не виконується. Двійкову величину (A) будемо називати двійковим предикатом. Множину тих значень змінних з області його визначення, на яких величина $(A) = 1$, називаємо області істинності предикату, а множину значень, для яких $(A) = 0$ — областю хибності. Рівняння $[f(x) \geq 0] = 1$ називаємо предикатним рівнянням області $f(x) \geq 0$, а рівняння $[f(x) = 0] = 1$ — предикатним рівнянням креслення $f(x) = 0$.

Складні геометричні об'єкти можна розглядати як системи, що сформовані з більш простих об'єктів, які складаються в свою чергу з найпростіших, для яких питання про їх аналітичний опис вирішене, тобто маємо рівняння $f(x) = 0$ (або нерівність $f(x) \geq 0$). Система таких найпростіших геометричних об'єктів, що бере участь в формуванні складного об'єкту (складного креслення), називається системою опорних геометричних об'єктів (областей).

Тепер розглянемо процедуру, як з систем опорних областей і за допомогою яких засобів можна вирішити питання про аналітичне описування будь-якого складного об'єкту. Нехай $\{\Sigma\}$ розглядається як деяка опорна система геометричних об'єктів $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$ в n-вимірному евклідовому просторі. Будемо користуватися позначенням $\Sigma \equiv \{x \mid x \in \Sigma\}$, тобто літерою Σ позначаємо об'єкт Σ, який розглядаємо як точкову множину у n-вимірному евклідовому просторі. Предикат P приймає значення одиниці у точках об'єкту Σ та значення нуль — в точках доповнення $\bar{\Sigma}$. Будемо позначати предикат через $P = P(x)$, так як предикат є функцією точки x, що належить n-вимірному евклідовому простору. Нехай $F = F(X_1, X_2, ..., X_n)$ є довільною булевою функцією, $X_1, X_2, ..., X_n$ — булеві змінні. Кожен з опорних об'єктів Σ_i, $i = 1, 2, ..., n$, може бути описаний відповідним предикатом $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$, які приймають значення нуль або одиниця. Замінимо аргументи булевої функції відповідними предикатами: $P(x) = F[P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)]$. Враховуючи те, що функція може приймати лише значення нуль або одиниця, її можна розглядати як предикат, що визначає вихідний геометричний об'єкт: $P(x) = 1$. Булеву функцію, згідно з властивостями операцій булевої алгебри [6], можна представити у вигляді суперпозиції операцій кон'юнкції $X \wedge Y$, диз'юнкції $X \vee Y$ та заперечення $\bar{X}$, де X, Y — булеві змінні. Нагадаємо, що операціям кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення в алгебрі множин відповідають операції перетинання $X \cap Y$, з'єднання $X \cup Y$ та доповнення $\bar{X}$, де через X, Y позначені відповідні множини. Таким чином, геометричний об'єкт Σ можна розглядати як результат застосування до опорних об'єктів $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$ відповідного набору операцій алгебри множин $X \cap Y$, $X \cup Y$, $\bar{X}$.

Визначення 3. Геометричний об'єкт, який визначатиметься предикатом $P(x) = F[P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)]$, називають складним геометричним об'єктом, який породжується опорною системою $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$.

Тепер виникає задача переходу від булевих операцій при описі геометричного об'єкту до алгебраїчних операцій, тобто від опису на основі дискретної математики до неперервної. Такий перехід здійснюється з використанням поняття R-відображення, яке приводить до поняття R-функції. Розглянемо спрощену схему побудови R-функцій. Аналіз функцій дійсного аргументу дозволяє встановити, що знак деяких таких функцій цілком визначається завданням знаків аргументів і не залежить від абсолютних величин цих аргументів. Таким чином, додатність і від'ємність можна розглядати як деякі якості, що може характеризувати дійсну змінну величину. У частині функцій якісна сторона може передаватися як би за спадком — від аргументів до функції. Завдання якості аргументів цілком визначає якість функції. Функції, які передають якості аргументів за спилком, були названі R-функціями.

Завдання R-функції приводить до встановлення правила, яке кожному відповідному набору якостей ставить у відповідність деяку якість R-функції. Це дозволило встановити наявність «спільності» між R-функціями та функціями логіки і привнести в класичний неперервний аналіз методи, що були розвинуті виключно в дискретній математиці. Було встановлено, що кожній R-функції відповідає єдина булева функція.

Формально побудова R-функції, що відповідає заданій булевій функції, може здійснюватися за наступним правилом: булева функція представляється у вигляді суперпозиції базисних мулевих функцій, а потім в цій суперпозиції здійснюється заміна літер, що позначають булеві змінні, відповідними літерами, які позначатимуть неперервні змінні; символи мулевих операцій замінюються на символи відповідних R-функції (R-операцій).

Наведемо приклад достатньо повної системи R-функцій, якій відповідає повна система булевих функцій:

$$X \wedge Y \;\Rightarrow\; x \wedge_{\alpha} y \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}\right);$$

$$X \vee Y \;\Rightarrow\; x \vee_{\alpha} y \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}\right);$$

$$\bar{X} \;\Rightarrow\; \bar{x} \equiv -x,$$

де $\alpha \equiv \alpha(x, y)$ — довільна функція, яка задовольняє умовам $-1 < \alpha(x, y) \le 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(\bar{x}, y) \equiv \alpha(x, \bar{y})$; X, Y — булеві змінні, x, y — дійсні змінні.

На основі приведених міркувань відбувається побудова необхідної системи функцій, яка дозволяє будувати описування геометричних об'єктів:

$H = \{x + y;\; xy;\; x \wedge_{\alpha} y;\; x \vee_{\alpha} y;\; a, \forall a \in (-\infty, +\infty)\}$.

Розглянемо процедуру побудови рівняння прямокутника (див. рис. 3). Даний прямокутник формується в результаті перетину двох смуг (вертикальної та горизонтальної), які розглядаємо в якості опорних областей (нерівності, що описують ці смуги є відомими: $a^2 - x^2 \ge 0$ і $b^2 - y^2 \ge 0$).

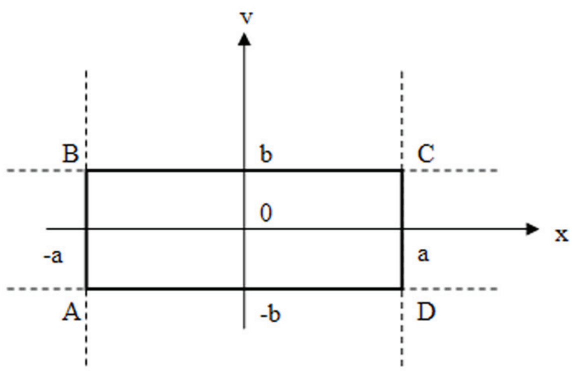


Рис. 3. Креслення прямокутника $ABCD$, який сформований вертикальною ($a^2 - x^2 \ge 0$) та горизонтальною ($b^2 - y^2 \ge 0$) смугами

Даний прямокутник може бути описаний наступним предикатом:

$$P \equiv [(a^2 - x^2 \ge 0) \wedge (b^2 - y^2 \ge 0)].$$

Після заміни булевої операції на відповідну R-операцію (вважаємо, що $\alpha = 0$) отримуємо нерівність, яка описує область $ABCD$ даного прямокутника:

$$(a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) \ge 0.$$

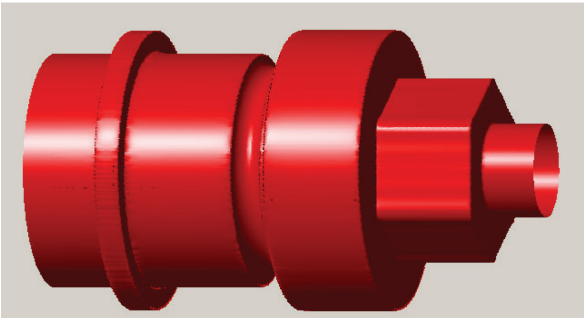
Рівняння, яке описує границю прямокутника, отримує вигляд

$$(a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = 0.$$

Тепер достатньо замінити R-операцію на виписане вище представлення. Таким чином, рівняння границі прямокутника отримує вигляд

$$f(x, y) \equiv a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0.$$

Була розглянута процедура опису тривіальної області, якою є прямокутник. Але засоби теорії R-функцій дозволяють отримувати опис реальних областей, які зустрічаються в інженерній практиці. На рис. 4 представлена машинобудівна деталь та її опис, виконаний на основі побудови відповідної R-функції. Існують спеціальні комп'ютерні програми, які дозволяють автоматизувати процес побудови R-функцій. Розроблені програмні продукти, які дозволяють реалізувати швидку візуалізацію тривимірних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій. Вище викладене вказує на можливість розширення базового курсу аналітичної геометрії на основі використання математичних засобів теорії R-функцій. Це дозволить поглибити зміст дисципліни і вивчати алгоритми, які описують геометричні об'єкти довільної складної форми.



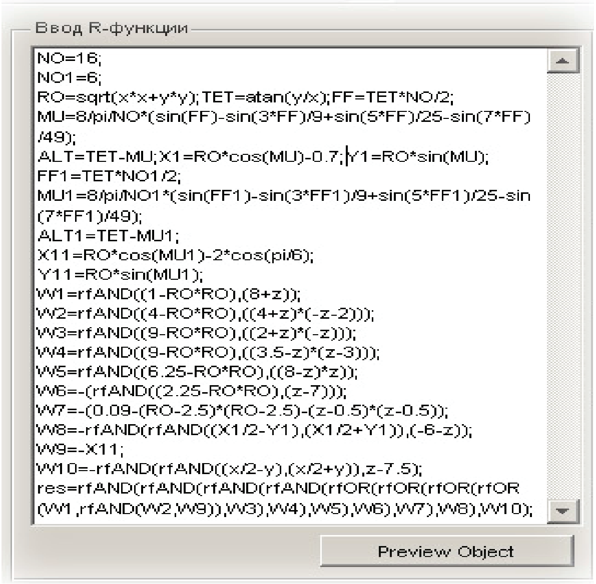


Рис. 4. Приклад машинобудівної деталі і її опис, що виконаний за допомогою засобів теорії R-функцій в інтерфейсі програми візуалізації тривимірних геометричних об'єктів

В статті викладено спрощений підхід описування геометричних об'єктів на основі застосування математичних засобів теорії R-функцій. Цей метод формувався в дослідження В.Л. Рвачова та його учнів у другій половині минулого століття, результати яких підсумовані в роботах [2–6]. Відмітимо також монографію К.В. Максименко-Шейко [7], яка присвячена питанням геометричного моделювання геометричних об'єктів. В його роботі запропоновано нові підходи до побудови рівнянь границь геометричних об'єктів в дво- та тривимірному просторах.

Теорія R-функцій продовжує розвиватися і дозволяє отримувати суттєві результати при вирішенні задач оптимального розміщення геометричних об'єктів, математичному програмуванні, розпізнаванню образів, конструктивній теорії функцій, математичному моделюванні [8], в числових методах розв'язування крайових задач математичної фізики [9] і т.д. Все це вказує на необхідність вивчення математичних засобів теорії R-функцій при формуванні математичної підготовки студентів інженерних спеціальностей.

Література

1. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. — Москва : Наука, 1964. — 272 с.
2. *Рвачев В.Л.* Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, № 4.
3. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. — К. : Техніка, 1967. — 212 с.
4. *Рвачев В.Л.* Элементы дискретного анализа и теории R-функций. — Харьков : Изд-во Харьк. политехн. ин-та, 1972.
5. *Рвачев В.Л.* Методы алгебры логики в математической физике. — К. : Наук. думка, 1974. — 250 с.
6. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К. : Наук. думка,1982. — 552 с.
7. *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. — Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2009. — 305 с.
8. *Колодяжный В.М., Лисин Д.А., Лисняк А.А., Чопоров С.В.* Построение дискретных моделей геометрических объектов. — Харьков : ХНАДУ, 2013. — 265 с.
9. *Колодяжный В.М.* Структурно-вариационный метод решения краевых задач математической физики. — Харьков : ХАИ, 1981. — 92 с.

30.11.2017