УДК 19.66:519.668

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМ АРГУМЕНТОМ, ОПРЕДЕЛЁННЫМ В СИСТЕМЕ ЦЕНТР-РАДИУС

В. Ю. ДУБНИЦКИЙ, А. М. КОБЫЛИН, О. А. КОБЫЛИН

Предложены алгоритмы для вычисления значений элементарных функций, аргументы которых представлены интервальными числами, определёнными в системе центр-радиус. Алгоритмы реализованы в специализированном программном калькуляторе, позволяющем вычислять интервальные значения степенной, показательной, логарифмической функции, прямых и обратных тригонометрических функций, прямых и обратных гиперболических функций, гамма-функции, неполной гамма-функции, бета-функции и дигамма-функции.

Ключевые слова: элементарные функции, интервальные числа, определенные в системе центр-радиус, специализированный программный калькулятор, степенная функция, показательная функция, логарифмическая функция, прямые и обратные тригонометрические функции, прямые и обратные гиперболические функции, гамма-функция, неполная гамма-функции, бета-функция, дигамма-функция.

ВВЕДЕНИЕ

Задача вычисления значений элементарных функций исторически стала одной из первых задач, решённых на компьютерах [1]. С тех пор и до сегодняшнего дня она остается актуальной так, как методы её решение существенно зависят от непрерывно меняющейся архитектуры компьютеров. Подробно эти методы рассмотрены в работах [2–6]. Главная особенность этих работ, с точки зрения авторов данного сообщения, в том, что в них для вычисления значений элементарных и специальных функций использована традиционная эвклидова арифметика. Использование интервально заданных чисел в указанных работах не рассмотрено.

Понятие интервального числа и теоретические основы интервального анализа для решения прикладных задач рассмотрены в работах [7–10]. В работе [10] введено представление интервального числа в системе центр-радиус и определены правила действий с такими числами.

Следуя этой работе, рассмотрим множество действительных чисел R, на котором определим интервальное число A в виде замкнутого интервала:

$$\text{A}=\left(\underline{a},\overline{a}\right)=(a_1,a_2)\,,\ \underline{a}\le\overline{a}\,;\ a_1\le a_2\,, \tag{1}$$

и представим в виде:

$$A=\langle a,r_a\rangle\,, \tag{2}$$

где

$$a=\frac{a_1+a_2}{2}\,,\ r_a=\frac{a_2-a_1}{2}\,,\ a,r_a,\in R\,. \tag{3}$$

При применении системы центр-радиус действия сложения и вычитания с интервальными числами выполняют по следующим правилам:

$$A+B=\langle a+b,r_a+r_b\rangle\,; \tag{4}$$

$$A-B=\langle a-b,r_a+r_b\rangle. \tag{5}$$

В рамках данной работы примем, что границы интервалов, которые ограничивают рассматриваемые числа, образованы вычислительными ошибками, погрешностями измерений или неполным знанием области изменения некоторой физической величины. Поэтому в условии (2) должны быть выполнены неравенства:

$$a\ge r_a\ge 0\,,\ b\ge r_b\ge 0\,, \tag{6}$$

иначе будем считать, что задача, в рамках наших представлений об исследуемом объекте, физического смысла не имеет. В работе [10] предложены формулы для выполнения операции деления и умножения в системе центр-радиус в виде:

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab+r_ar_b,ar_b+br_a\rangle; \tag{7}$$

$$\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\left\langle\frac{ab+r_ar_b}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b+br_a}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \tag{8}$$

Для возведения в целочисленную степень в работе [10] приведены формулы:

$$A^n=\langle a,r_a\rangle^n=\langle G,R\rangle\,; \tag{9}$$

при условии, что $n\in Z$. Тогда:

$$G=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}r_a^{2k}a^{n-2k}\,;$$

$$R=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k+1}r_a^{2k+1}|a|^{n-(2k+1)}\,. \tag{10}$$

Для программирования процесса вычислений условие (9) представим, с учетом условия (10), в виде:

$$A=\langle a;r_a\rangle^n=\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle\underbrace{((a;r_a)...(a;r_a))}_{n-2}. \quad (11)$$

В работе [9] модуль интервального числа $A=\left(\underline{a},\overline{a}\right)$ определён так:

$$\mathrm{mod}(A)=\max\{(a-r_a),(a+r_a)\}. \quad (12)$$

Для определения значений элементарных функций с интервально заданным аргументом в работах [9, 10, 11] применено их разложение в ряд Тейлора. Такой подход, по нашему мнению, требует отсутствующего в настоящее время строгого обоснования понятий предельного перехода и сходимости для функциональных рядов, численные значения аргументов которых заданы в интервальном виде.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разработка и программная реализация методов вычисления значений элементарных и специальных функций на основе их многочленных и рациональных аппроксимаций, при условии, что численные значения аргументов есть интервальные числа, заданные в системе центр-радиус. В рамках данной работы к элементарным функциям отнесены степенная функция, логарифмическая функция, прямые и обратные тригонометрические функции, прямые и обратные гиперболические функции. К специальным функциям отнесены гамма-функция, неполная гамма-функция, бета-функция и дигамма-функция.

2. ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим процедуры вычисления элементарных функций при условии, что численные значения аргументов есть интервальные числа, заданные в системе центр-радиус.

Рассмотрим основные арифметические операции в том случае, когда один из операндов – постоянное число. В системе центр-радиус, используя условия (2, 3), постоянное число C представим в виде $C=\langle c,\ 0\rangle$. Примем, что $A=\langle a,r_a\rangle$ и $B=\langle b,0\rangle$. Тогда операции сложения и вычитания представим в виде:

$$A+B=\langle a+b,r_a\rangle; \quad (13)$$

$$A-B=\langle a-b,r_a\rangle. \quad (14)$$

Для умножения интервального числа, представленного в системе центр-радиус, на постоянную величину примем, что:

$$AB=\begin{cases}\langle a,0\rangle\langle b,r_b\rangle, A=const, B\neq consn;\\ \langle a,r_a\rangle\langle b,0\rangle, A\neq const, B=const.\end{cases} \quad (15)$$

При операции деления интервального числа на постоянное число получим, что:

$$\frac{A}{B}=\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,0\rangle}=\left\langle\frac{ab}{b^2},\frac{br_a}{b^2}\right\rangle=\left\langle\frac{a}{b},\frac{r_a}{b}\right\rangle; \quad (16)$$

или

$$\frac{A}{B}=\frac{\langle a,0\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\frac{\langle ab,ar_b\rangle}{b^2-r_b^2}=\left\langle\frac{ab}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \quad (17)$$

Следуя работе [3, С.78], и принимая во внимание ранее введенные обозначения, представим логарифмическую функцию в виде:

$$\ln\langle x,r_x\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{6}\langle a_i,0\rangle\left[\langle -1;0\rangle^{i-1}+\frac{\langle 1;0\rangle}{\langle x,r_x\rangle^i}\right]\frac{(\langle x,r_x\rangle-\langle 1;0\rangle)^i}{\langle i;0\rangle}. \quad (18)$$

Далее при описании вычислительных алгоритмов, во избежание недоразумений, связанных с использованием десятичных дробей, вместо символа $\langle a,r_a\rangle$ будем использовать символ $\langle a;r_a\rangle$.

Коэффициенты a_i, необходимые для вычисления величины $\ln\langle x,r_x\rangle$, приведены в табл.1.

Таблица 1

Значение коэффициентов для приближения функции $\ln(x)$

a_1	0,500000	a_4	0,030303
a_2	0,227273	a_5	0,007576
a_3	0,090909	a_6	0,0001082

Произвольную показательную функцию, используя работу [3, С. 49], представим в виде:

$$a^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^k}{k!}. \quad (19)$$

Тогда, с учетом условия (18), её интервальным расширением будет функция вида:

$$\langle a;r_a\rangle^{\langle x;r_x\rangle}=\sum_{k=0}^{6}\frac{(\langle x;r_x\rangle\ln\langle a;r_a\rangle)^k}{k!}. \quad (20)$$

Экспоненту с отрицательным показателем, точнее её рациональное приближение, следуя работе [3, С. 63], представим в виде

$$e^{-x}=\left[\sum_{k=0}^{6}a_k x^k\right]^{-4}, \text{ при } 0\leq x\leq 16. \quad (21)$$

Значения коэффициентов a_k, используемых для приближения величины e^{-x}, приведены в табл.2.

Таблица 2

Значение интерполяционных коэффициентов для приближения величины e^{-x}

a_0	1
a_1	0,2499986842
a_2	0,0312575832
a_3	0,00259137121
a_4	0,0001715620
a_5	0,0000054302
a_6	0,0000006906

Интервальное расширение функции (20) примет вид:

$$e^{-\langle x,r_x\rangle}=\left[\sum_{k=0}^{6}\langle a,r_a\rangle_k\langle x,r_x\rangle^k\right]^{-4},\ 0\le x\le 16. \quad (22)$$

Экспоненту с положительным показателем представим в виде:

$$e^{\langle x,r_x\rangle}=1\ /\ \left[\sum_{k=0}^{6}\langle a,r_a\rangle_k\langle x,r_x\rangle^k\right]^{-4}. \quad (23)$$

Это позволяет осуществлять действия с числами в диапазоне $[1{,}12\cdot 10^{-7};8{,}88\cdot 10^{6}]$.

При выбранных методах вычисления значений тригонометрических и гиперболических функций потребуется выполнение операций сравнения интервальных чисел, представленных в системе центр-радиус.

Будем считать, что интервальное число A_1 меньше интервального числа A_2 если:

$$(A_1=\langle a_1;r_{a1}\rangle)<(A_2=\langle a_2;r_{a2}\rangle)\Rightarrow a_1+r_{a1}<a_2-r_{a2}. \quad (24)$$

В работе [9] модулем интервального числа А=$(\underline{a},\overline{a})$ называют величину

$$\mathrm{mod}(A)=\max\{(a-r_a),(a+r_a)\}. \quad (25)$$

Условие, противоположное условию (25), назовем дополнительным модулем интервального числа $A=(\underline{a},\overline{a})$, обозначим его выражением $Co\,\mathrm{mod}(A)$ от латинского «complimenti module»:

$$Co\,\mathrm{mod}(A)=\min\{(a-r_a),(a+r_a)\}. \quad (26)$$

Пусть V некоторое интервальное число и K некоторое неинтервальное число. Тогда условие $|V|\le K$ можно представить в виде:

$$(|V|\le K)\Rightarrow\left(co\,\mathrm{mod}\langle k,r_k\ge\langle 1;0\rangle\rangle\right)\&\,\mathrm{mod}(k;r_k)\le 1. \quad (27)$$

Условие $|V|\ge K$ представим в виде:

$$(|V|\ge K)\Rightarrow\left(co\,\mathrm{mod}\langle k,r_k\ge\langle 1;0\rangle\rangle\right)\&\,\mathrm{mod}(k;r_k)\le 1. \quad (28)$$

Для вычисления значений тригонометрических функций с интервально заданным аргументом используем методику, описанную в работе [4, С. 232].

Пусть $X=\langle x;r_x\rangle$, тогда:

$$Z=\frac{X}{2}=\frac{\langle x;r_x\rangle}{\langle 2;0\rangle}=\left\langle\frac{x}{2};\frac{r_x}{2}\right\rangle. \quad (29)$$

Функцию tgZ представим в виде:

$$tgZ=Z+\frac{1}{3}Z^3+\frac{2}{15}Z^5+\frac{17}{315}Z^7+\frac{62}{2835}Z^9,$$

$$\mathrm{mod}(Z)<\frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

Используя условие (29) и основную тригонометрическую подстановку, получим выражения для вычисления основных тригонометрических функций, которые приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения основных тригонометрических функций, выраженных с использованием тангенса половинного угла

Функция	Подстановка	Ограничения
$\sin X$	$\frac{2tgZ}{1+tg^2Z}$	$\mathrm{mod}(Z)\ne\pi(1+2Z)$
$\cos X$	$\frac{1-tg^2Z}{1+tg^2Z}$	$\mathrm{mod}(Z)\ne\pi(1+2Z)$
tgX	$\frac{2tgZ}{1-tg^2Z}$	$\mathrm{mod}(Z)\ne\pi(1+2Z)$ $\mathrm{mod}(Z)\ne\pi\left(\frac{1}{2}+Z\right)$
$ctgX$	$\frac{1-tg^2Z}{2tgZ}$	$\mathrm{mod}(Z)\ne\pi(1+2Z)$ $\mathrm{mod}(Z)\ne\pi\left(\frac{1}{2}+Z\right)$

При использовании формул, приведенных в этой таблице, следует помнить, что их применять следует, только используя правила действия с интервальными числами, описанными ранее.

Для вычисления значений обратных тригонометрических функции используем выражения, приведенные в работе [9, С. 115, 119]. Тогда получим, что:

$$\arcsin\langle x;r_x\rangle=$$

$$=\ln\left(\langle 1;0\rangle+\langle x;r_x\rangle+\frac{\langle x;r_x\rangle^{\langle 2;0\rangle}}{2!}+\frac{\langle 5\rangle\langle x;r_x\rangle^{\langle 4;0\rangle}}{4!}\right); \quad (31)$$

$$ark\cos\langle x;r_x\rangle=\frac{\langle\pi;0\rangle}{\langle 2;0\rangle}-ark\sin\langle x;r_x\rangle; \quad (32)$$

$$arctg\langle x;r_x\rangle = \ln\left(\langle 1;0\rangle + \langle x;r_x\rangle + \frac{\langle x;r_x\rangle^{\langle 2;0\rangle}}{2!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\langle x;r_x\rangle^{\langle 3;0\rangle}}{3!} + \frac{\langle 7;0\rangle\langle x;r_x\rangle^{\langle 4;0\rangle}}{4!}\right); \quad (33)$$

$$arkctg\langle x;r_x\rangle = \frac{\langle \pi;0\rangle}{\langle 2;0\rangle} - arktg\langle x;r_x\rangle . \quad (34)$$

Для вычисления значений гиперболических функций с интервально заданным аргументом используем методику, описанную в работах [3, С. 133; 4, С. 264]. Примем, что:

$$d\langle x;r_x\rangle = \exp\left(\langle x;r_x\rangle - 1\right). \quad (35)$$

Тогда основные гиперболические функции представим в виде:

$$sh(\langle x;r_x\rangle) = \langle 0.5;0\rangle\left(d\langle x;r_x\rangle + \frac{d\langle x;r_x\rangle}{d\langle x;r_x\rangle + \langle 1;0\rangle}\right); \quad (36)$$

$$ch\left(\langle x;r_x\rangle\right) = \left(sh^2\langle x;r_x\rangle + 1\right)^{\langle 0.5;0\rangle}; \quad (37)$$

$$th\left(\langle x;r_x\rangle\right) = \frac{sh\langle x;r_x\rangle}{\left(sh^2\langle x;r_x\rangle + 1\right)^{\langle 0.5;0\rangle}}; \quad (38)$$

$$cth\left(\langle x;r_x\rangle\right) = \frac{\left(sh^2\langle x;r_x\rangle + 1\right)^{0,5}}{sh\langle x;r_x\rangle}. \quad (39)$$

Для вычисления значений обратных гиперболических функций используем методику, описанную в работе [12, С. 28].

Значения арксинуса гиперболического вычислим по формуле:

$$Arsh\left(\langle x;r_x\rangle\right) =$$

$$\ln\left(\langle x;r_x\rangle + \left(\langle x;r_x\rangle^2 + \langle 1;0)\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right). \quad (40)$$

С учетом двузначности ареакосинуса гиперболического для вычисления его значений используем формулы:

$$Arch\left(\langle x;r_x\rangle_1\right) = \ln\left(\langle x;r_x\rangle + \left(\langle x;r_x\rangle^2 - \langle 1;0)\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right)$$

$$co\,\mathrm{mod}(X = \langle x;r_x\rangle) \ge \langle 1;0\rangle; \quad (41)$$

$$Arch\left(\langle x;r_x\rangle_2\right) = -\ln\left(\langle x;r_x\rangle + \left(\langle x;r_x\rangle^2 - \langle 1;0)\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right)$$

$$co\,\mathrm{mod}(X = \langle x;r_x\rangle) \ge \langle 1;0\rangle. \quad (42)$$

Значения арктангенса гиперболического и арккотангенса гиперболического вычислим по формулам:

$$Arth\langle x;r_x\rangle = \langle 0,5;0\rangle \ln\frac{\langle 1;0\rangle + \langle x;r_x\rangle}{\langle 1;0\rangle - \langle x;r_x\rangle},$$

$$-1 < co\,\mathrm{mod}\left(X = \langle x;r_x\rangle\right),\ \mathrm{mod}\left(X = \langle x;r_x\rangle\right) < 1. \quad (43)$$

$$Arcth\langle x;r_x\rangle = \langle 0,5;0\rangle \ln\frac{\langle 1;0\rangle + \langle x;r_x\rangle}{\langle x,r_x\rangle - \langle 1;0_x\rangle},$$

$$co\,\mathrm{mod}\left(X = \langle x;r_x\rangle\right) \ge -1,\ \mathrm{mod}\left(X = \langle x;r_x\rangle\right) < 1. \quad (44)$$

Далее, используя условия (13)…(44), вычислим значения гамма-функции, неполной гамма-функции, бета-функции и дигамма-функции при условии задания аргументов в виде интервальных чисел, определённых в системе центр-радиус.

В работе [2] приведены методы вычисления названных специальных функций аппроксимациями, использующими элементарные функции.

Для гамма-функции:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx; \quad (45)$$

известно приближение вида:

$$\Gamma(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{-\alpha}\alpha^{\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{1}{288\alpha^2} - \frac{139}{51840\alpha^3} - \frac{571}{2488320\alpha^4}\right). \quad (46)$$

Для неполной гамма-функции:

$$\Gamma\left(\alpha,x\right) = \int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt; \quad (47)$$

известно приближение вида:

$$\Gamma\left(\alpha,x\right) \approx e^{-x}x^{\alpha-1}\left[1 + \frac{\alpha-1}{x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2}\right]. \quad (48)$$

Бета-функция может быть представлена в виде отношения гамма-функций:

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}\left(1-x\right)^{v-1}dx = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (49)$$

Для дигамма-функции:

$$\psi\left(\alpha\right) = \frac{d}{d\alpha}\ln\Gamma(\alpha); \quad (50)$$

известно приближение вида:

$$\psi\left(\alpha\right) \approx \ln\alpha - \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{12\alpha^2} + \frac{1}{120\alpha^4} - \frac{1}{252\alpha^6}. \quad (51)$$

Совмещение методов интервальных вычислений с методами вычисления значений специальных функций позволяют найти решение задачи, сформулированной в заголовке данного сообщения.

В работе [13] для вычисления значений гамма-функции предложено упрощённое, в сравнении с условием (46), выражение вида:

$$\Gamma(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\alpha}\alpha^{\alpha}\left(1+\frac{1}{12\alpha}+\frac{1}{288\alpha^2}\right). \quad (52)$$

В табл.4 приведены значения функций Γ(2)=1 и Γ(6)=120 вычисленные по условиям (46) и (52).

Таблица 4

Значения функций Γ(2) и Γ(6)

Точное значение гамма-функции	Приближенное значение, вычисленное по условию (46)	Приближенное значение, вычисленное по условию (52)
Γ(2) =1	1,0003	0,999
Γ(6) =120	120,001	119,999

Хотя условие (46) кажется более точным, однако при выполнении вычислений в интервальном виде предпочтительнее оказалось условие (52), дающее меньший радиус интервала так, как количество операций с интервальными числами в нём меньше, чем в условии (46). В интервальном виде сомножитель $\sqrt{2\pi/\alpha}$ представим в виде:

$$A_1 = \frac{\langle 2{,}5066;0\rangle}{\langle \alpha;r_\alpha\rangle^{1/2}}. \quad (53)$$

Для определения его интервального значения выполним действия в такой последовательности.

1) Вычислим, используя условие (18), величину:

$$\ln\langle \alpha,r_\alpha\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{6}\langle a_i,0\rangle\left[\langle -1;0\rangle^{i-1}+\frac{\langle 1;0\rangle}{\langle \alpha,r_\alpha\rangle^{i}}\right]\frac{\left(\langle \alpha,r_\alpha\rangle-\langle 1;0\rangle\right)^i}{\langle i;0\rangle} =$$

$$= \langle a_1;r_{a1}\rangle. \quad (54)$$

2) Вычислим, используя условие (20), величину:

$$\langle \alpha;r_\alpha\rangle^{1/2} = \langle \alpha;r_\alpha\rangle^{\langle 0,5\rangle} =$$

$$= \sum_{k=0}^{6}\frac{\left(\langle \alpha;r_\alpha\rangle\langle a_1;r_{a1}\rangle\right)^{=k}}{k!} = \langle a_2;r_{a2}\rangle. \quad (55)$$

3) Тогда численное значение условия (53), используя условие (17), получим в виде:

$$A_1 = \frac{\langle 2{,}5066;0\rangle}{\langle \alpha;r_\alpha\rangle^{1/2}} = \left\langle \frac{2{,}5066a_2}{a_2^2-r_a^2};\frac{2{,}5066r_{a2}}{a_2^2-r_a^2}\right\rangle. \quad (56)$$

4) Вычислим, используя условие (22), величину:

$$A_2 = e^{-\langle \alpha,r_\alpha\rangle} = \left[\sum_{k=0}^{6}\langle a,r_a\rangle_k\langle \alpha,r_\alpha\rangle^k\right]^{-4}. \quad (57)$$

5) Вычислим, используя условия (18) и (20), величину:

$$A_3 = \langle \alpha;r_\alpha\rangle^{\langle \alpha;r_\alpha\rangle} = \sum_{k=0}^{6}\frac{\left(\langle \alpha;r_\alpha\rangle\ln\langle \alpha_1;r_{\alpha 1}\rangle\right)^k}{k!}. \quad (58)$$

Интервальное значение сомножителя, стоящего в круглых скобках в условии (52) вычислим, используя условия (18) и (20), таким образом:

$$A_4 = \langle 1;0\rangle + \frac{\langle 0.0833;0\rangle}{\langle a;r_a\rangle} + \frac{\langle 0.00347;0\rangle}{\langle a;r_a\rangle^2} =$$

$$= \langle 1;0\rangle + \frac{\langle 0.0833;0\rangle}{\langle a;r_a\rangle} + \frac{\langle 0.00347;0\rangle}{\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle} =$$

$$= \langle 1;0\rangle + \left\langle \frac{0.0833a}{a^2-r_a^2};\frac{0.0833r_a}{a^2-r_a^2}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{0.00347a}{\left[\left(a^2+r_a^2\right)^2-4a^2r_a^2\right]} + \frac{0.00347r_a}{\left[\left(a^2+r_q^2\right)^2-4a^2r_a^2\right]}\right\rangle. \quad (59)$$

Следовательно, интервальное расширение гамма-функции, вычисленное в системе центр-радиус $\left[\Gamma(\alpha)\right]$, можно определить так:

$$\left[\Gamma(\alpha)\right] = \prod_{i=1}^{4}A_i = \left\langle g(\alpha);r_{g(\alpha)}\right\rangle. \quad (60)$$

Условие (60) получают последовательным выполнением действий по условию (7).

Рассмотрим более подробно процедуру вычисления интервальных значений неполной гамма-функции. Интервальное расширение выражения e^{-x} получено в условии (36) и равно A_5. Интервальное расширение выражения $x^{\alpha-1}$, используя условия (6), (18), (37), примет следующий вид:

$$A_5 = \langle x-1;r_x\rangle^{\langle \alpha-1;r_\alpha\rangle} =$$

$$= \sum_{k=0}^{6}\frac{\left(\langle \alpha-1;r_\alpha\rangle\ln\langle x-1;r_x\rangle\right)^k}{k!}. \quad (61)$$

Далее, используя условия (5), (7), (8) и (11) получим следующее:

$$A_6 = \left\langle\left[1+\frac{\alpha-1}{x}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2}\right]\right\rangle =$$

$$=\left[\langle 1;0\rangle+\frac{\langle \alpha-1;r_\alpha\rangle}{\langle x;r_x\rangle}+\frac{\langle \alpha-1;r_\alpha\rangle\langle \alpha-2;r_\alpha\rangle}{\langle x;r_x\rangle}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\langle 1;0\rangle+\left\langle \dfrac{(\alpha-1)x+r_\alpha r_x}{x^2-r_x^2};\dfrac{(\alpha-1)r_x+xr_\alpha}{x^2-r_x^2}\right\rangle+\\ +\dfrac{\left\langle(\alpha-1)^2-\alpha+1;r_\alpha(2\alpha-3)\right\rangle}{\left\langle x^2+r_x^2;2|x|r_x\right\rangle}\end{array}\right]. \quad (62)$$

Следовательно, интервальное расширение неполной гамма-функции, вычисленное в системе центр-радиус, $[\Gamma(\alpha,x)]$ можно определить так:

$$[\Gamma(\alpha,x)]=A_2A_5A_6. \quad (63)$$

Рассмотрим более подробно процедуру вычисления интервальных значений бета-функции. Из условия (28) следует, что основной элемент вычислительного процесса – вычисление функции $[\Gamma(\alpha)]$, реализуемое условиями (33,…39)

$$A_7=[\Gamma(u)]\cdot[\Gamma(v)]=\langle g(u);r_{g(u)}\rangle\langle g(v);r_{g(v)}\rangle=$$

$$=\langle g(u)g(v)+r_{g(u)}r_{g(v)};g(u)r_{g(v)}+g(v)r_{g(u)}\rangle. \quad (64)$$

Используя условие (5) получим, что:

$$\langle z;r_z=\rangle\langle u;r_u\rangle+\langle v;r_v\rangle=\langle u+v;r_u+r_v\rangle. \quad (65)$$

Следовательно:

$$[\mathrm{B}(u,v)]=\frac{A_7}{\langle g(z);r_{g(z)}\rangle}. \quad (66)$$

Интервальное расширение дигамма–функции, используя условия (11), (18), (30), представим в виде:

$$[\psi(\alpha)]=\sum_{i=1}^{6}\langle a_i,0\rangle\left[\langle -1;0\rangle^{i-1}+\frac{\langle 1;0\rangle}{\langle \alpha,r_\alpha\rangle^i}\right]\times$$

$$\times\frac{\left(\langle \alpha,r_\alpha\rangle-\langle 1;0\rangle\right)^i}{\langle i;0\rangle}-\frac{\langle 0{,}08333;0\rangle}{\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle}+$$

$$+\frac{0{,}00833}{\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle\underbrace{\left((a;r_a)\ldots(a;r_a)\right)}_{2}}-$$

$$-\frac{0{,}00397}{\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle\underbrace{\left((a;r_a)\ldots(a;r_a)\right)}_{4}}. \quad (67)$$

В табл.5 приведены результаты сравнения предложенных методов вычисления значений гамма-функции, неполной гамма-функции, бета-функции и дигамма-функции с их табличными значениями, приведенными в работах [2, 14].

Таблица 5

Табличные и интервальные значения гамма-функции, неполной гамма-функции, бета-функции и дигамма-функции

Вид функции	Табличное значения	Интервальные расширения	
		Система центр-радиус	Классическое представление
Γ(1,5)	0,8862	$\langle 0{,}88685; 9\cdot10^{-5}\rangle$	*[0,88676; 0,88694]*
Γ(2;3)	0,19914	$\langle 0{,}19915; 11\cdot10^{-3}\rangle$	*[0,19904; 0,19926]*
B(1,5; 1,2)	0,51488	$\langle 0{,}51488; 2988\cdot10^{-2}\rangle$	*[0,51476; 0,51500]*
Ψ(1;5)	*0,03648*	$\langle 0{,}36380; 155\cdot10^{-3}\rangle$	*[0,36365; 0,36396]*

Сопоставляя табличные значения функций и их интервальные расширения можно сделать вывод о том, что применение интервальных вычислений позволяет получать не только значения функций с достаточной для практического применения точностью, но и одновременно оценивать погрешность получаемых результатов вычислений. Последнее обстоятельство, по мнению авторов данного сообщения, делает их применение целесообразным в тех случаях, когда аргументы функций получают в результате экспериментальных наблюдений.

Для проведения вычислительных экспериментов разработана программная система на языке программирования C# в среде программирования Visual Studio. Главная форма предлагаемой программной системы показана на рис.1.

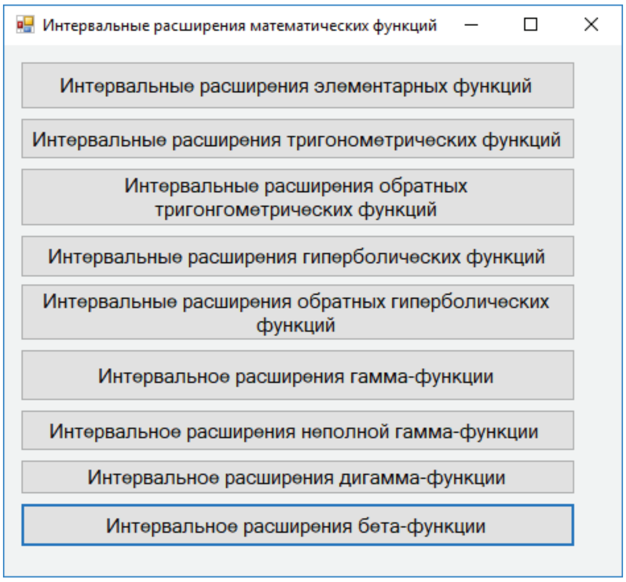

Рис.1. Главное окно программной системы для программного обеспечения

«Интервальные расширения математических функций».

Примеры расчетов по интервальным расширениям элементарных функций показаны на рис.2,…6.

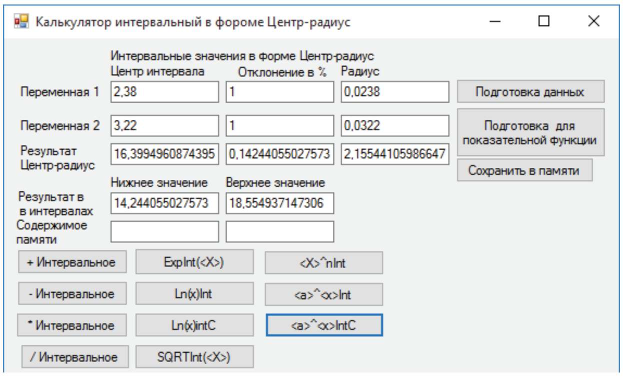

Рис.2. Пример расчета значений степенной функции

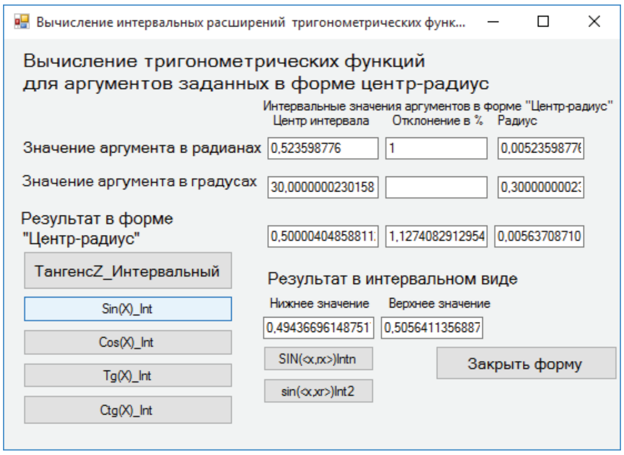

Рис.3. Пример расчета значений тригонометрической функции

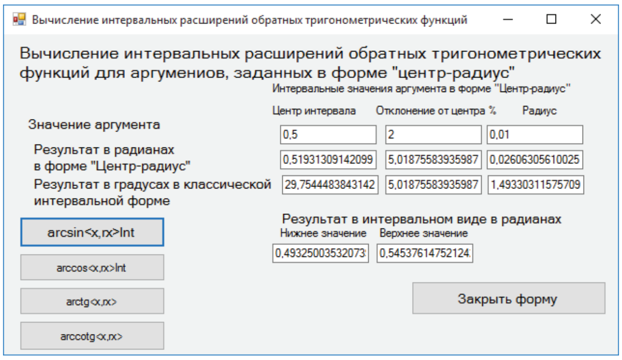

Рис.4. Пример расчета значений обратной тригонометрической функции

В программной системе предусмотрено ее дальнейшее расширение, для решения прикладных задач с использованием интервальных расширений математических функций.

Областью применения полученных результатов могут быть вычисления значений элементарных и специальных функций в тех случаях, когда аргументы функций получают в результате экспериментальных наблюдений.

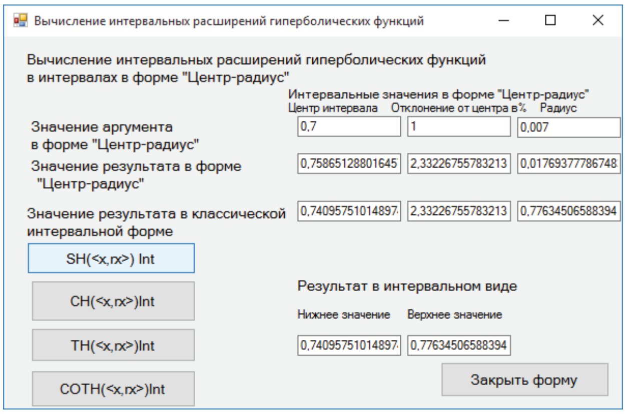

Рис.5. Пример расчета значений гиперболической функции

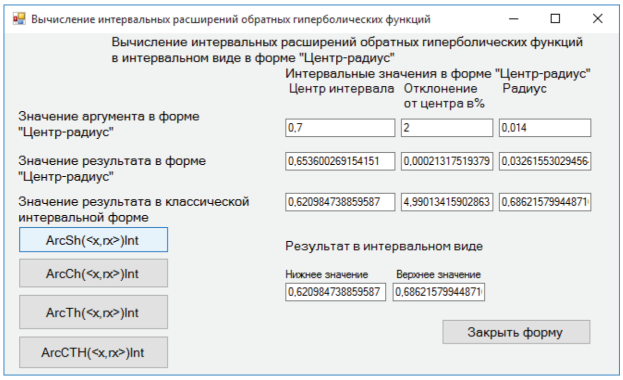

Рис.6. Пример расчета значений обратных гиперболической функции

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены алгоритмы для вычисления значений элементарных функций, аргументы которых представлены интервальными числами, определёнными в системе центр-радиус.

Алгоритмы реализованы в специализированном программном калькуляторе, позволяющем вычислять интервальные значения степенной, показательной, логарифмической функции, прямых и обратных тригонометрических функций, прямых и обратных гиперболических функций.

Для гамма-функции, неполной гамма-функции, бета-функции и дигамма-функции предложены алгоритмы вычисления их значений при условии определения их аргументов в виде интервальных чисел, заданных в системе центр-радиус.

Результаты численного эксперимента показали, что применение интервальных вычислений позволяет получать значения функций с достаточной для практического применения точностью и одновременно оценивать погрешность получаемых результатов вычислений.

Областью применения полученных результатов могут быть вычисления значений элементарных и специальных функций в тех случаях, когда аргументы функций получают в результате экспериментальных наблюдений.

Литература

[1] *Carlson B., Goldstein M.* Rational approximation of functions. / Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 1955.

[2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

[3] *Люстерник, Л.А.* Математический анализ: Вычисление элементарных функций / Л.А. Люстерник, О.А. Червоненкис, А.Р. Янпольский. – М., 1963. – 248 с.

[4] *Попов Б. А., Теслер Г.А.* Вычисление функций на ЭВМ. / Б.А. Попов, Г.А. Теслер. – К.: «Наукова думка», 1984. – 599с.

[5] *Кошаровский А.Н.* Разработка и исследование алгоритмов и процессоров вычисления значений элементарных функций: дис. канд. техн. наук: 05.13.05 / Кошаровский Андрей Николаевич. – Москва, Московский энергетический институт, 2000 г. – 179 с.

[6] *Сальников М.С.* Рекурсивный алгоритм вычисления логарифма. /С. Сальников // Информационные процессы. – 2012. – Т.12, № 3. – С. 248–252.

[7] *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

[8] *Алтунин А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях /А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд. ТГУ, 2000. – 352 с.

[9] *Шарый, С.П.* Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – М.:Изд-во «XYZ», 2012. – 606 с.

[10] *Жуковська, О.А.* Основи інтервального аналізу: навч. посібник / О.А. Жуковська. – К.: Освіта України, 2009. – 136 с.

[11] *Стоян Ю.Г.* Введення в інтервальну геометрію: навч. посіб. /Ю.Г. Стоян -Харків. ХІРЕ, 2006. – 98с.

[12] *Янпольский А.Р.* Гиперболические функции. / А.Р. Япольский.-М.: Физматгиз, 1960. – 195 с.

[13] *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для научных работников и инженеров. / А.И. Кобзарь. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

[14] Calculates the Incomplete gamma functions of the first and second kind γ(a, x) and Γ(a, x). / Режим доступа: http://keisan.casio.com/exec/ system/1180573447.

Поступила в редколлегию 31.10.2017

Дубницкий Валерий Юрьевич, канд. техн. наук, ст. научн. сотр, Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела. Область научных интересов – интервальные вычисления, моделирование финансовых процессов.

Кобылин Анатолий Михайлович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий, Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела. Область научных интересов – интервальные вычисления, моделирование финансовых процессов.

Кобылин Олег Анатольевич, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры Информатики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники. Область научных интересов – обработка изображений, распознавание образов, спектральный анализ изображений.

УДК 19.66:519.668

Обчислення значень елементарних та спеціальних функцій з інтервально заданим аргументом, визначеним в системі центр-радіус / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін, О.А. Кобилін // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2017. – Том 16, № 3, 4. – С. 147–154.

Запропоновано алгоритми для обчислення значень елементарних функцій, аргументи яких подано інтервальними числами, визначеними в системі центр-радіус.

Алгоритми реалізовано в спеціалізованому програмному калькуляторі, що дозволяє обчислювати інтервальні значення степеневої, показникової, логарифмічної функції, прямих і зворотних тригонометричних функцій, прямих і зворотних гіперболічних функцій, гамма-функції, неповної гамма-функції, бета-функції і дігамма-функції.

Ключові слова: елементарні функції, інтервальні числа, які визначено в системі центр-радіус, спеціалізований програмний калькулятор, степенева функція, показникова функція, логарифмічна функція, прямі і зворотні тригонометричні функції, прямі і зворотні гіперболічні функції, гамма-функція, неповна гамма-функції, бета-функція, дігамма-функція.

Табл.: 05. Іл.: 06. Бібліогр.: 14 найм.

UDC 19.66:519.668

Calculation of elementary and special functions values with interval stated argument determined in a center-radius system / V.Yu. Dubnitskiy, A.M. Kobylin, O.A. Kobylin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2017. – Vol. 16, № 3, 4. – P. 147–154.

Algorithms are proposed to calculate the values of elementary functions whose arguments are represented by interval numbers determined in a center-radius system. The arguments are realized in a specialized programmable calculator, which enables to calculate interval values of power, exponential and logarithmic functions, direct and inverse trigonometric functions, direct and inverse hyperbolic functions. For calculating gamma, incomplete gamma, beta and digamma functions algorithms of their values are proposed under the proviso that their arguments are defined in the form of interval numbers set in the center-radius system.

Keywords: elementary functions, interval numbers determined in a center-radius system, specialized programmable calculator, power function, exponential function, logarithmic function, direct and inverse trigonometric functions, direct and inverse hyperbolic functions, gamma function, incomplete gamma function, beta function, digamma function, interval calculations, center-radius system.

Tab. 05. Fig. 06. Ref.: 14 items.