УДК 537.862; 537.86;621.373

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ

К. А. ЛУКИН

Предложен и обоснован новый подход к решению задач возбуждения открытых резонаторов (ОР) внутренними источниками. На основе спектральной теории двухмерного ОР с идеально проводящими цилиндрическими зеркалами выписано выражение для полной функции Грина ОР, с помощью которой получены уравнения, описывающие комплексные амплитуды резонансных мод и, вместе с тем, позволяющие оценить нерезонансное излучение источника из ОР. Установлена общая структура и характер зависимости нерезонансной части функции Грина в окрестности отдельного резонанса от частоты возбуждения и добротности этого колебания. Аналогичный подход к решению задач возбуждения развит и для квазиоптических ОР, описываемых интегральными уравнениями Фредгольма. Показан формальный переход к формулам известной теории возбуждения ОР. Получены и изучены уравнения баланса мощностей для ОР с внутренним источником. Получены уравнения для медленно меняющихся амплитуд резонансных мод, пригодные для описания одномодовых и многомодовых автоколебаний в генераторах с ОР. Приведены примеры решения конкретных задач с помощью предложенного подхода.

Ключевые слова: открытый резонатор (ОР), резонансные моды ОР, нерезонансное излучение источника из ОР.

ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность построения теории возбуждения открытых резонаторов (ОР) произвольными источниками состоит в том, что в отличие от объемных резонаторов, для них не существует нормальных мод, образующих полную систему собственных функций дискретного спектра, и, следовательно, представлений возбуждаемого поля в виде с суперпозиции этих мод с коэффициентами, вычисляемыми через токи источников. С физической точки зрения это обусловлено тем, что помимо дифракционных потерь энергии резонансных мод в ОР всегда существует нерезонансное излучение источника, не связанное с возбуждением этих мод. В данной работе на примере двухмерного ОР с идеально проводящими цилиндрическими зеркалами сформулирован новый подход к решению задачи возбуждения ОР, который позволяет преодолеть указанную трудность. По-сути, он представляет собой обобщение строгой теории возбуждения двухмерных ОР [1, 2] на случай распределенных источников. Используя результаты строгой спектральной теории ОР [2, 3], в полном решении, выражаемом через функцию Грина рассматриваемого ОР, выделены резонансные слагаемые, отвечающие его резонансным модам, и показан формальный переход к формулам известной теории возбуждения ОР [4], если пренебречь мощностью нерезонансного излучения. Кроме того, удалось выяснить общую структуру и характер зависимости нерезонансной части функции Грина в окрестности отдельного резонанса от частоты возбуждения и добротности этого колебания. Аналогичный подход к решению рассматриваемой задачи развит и для квазиоптических ОР, описываемых интегральными уравнениями типа уравнений Фредгольма [5]. Кроме того, получены нестационарные уравнения для медленно меняющихся полей, а также получены и рассмотрены уравнения баланса мощностей для ОР с внутренним источником. Приведены примеры решения конкретных задач с помощью предложенного подхода.

Возбуждение электромагнитных колебаний внешними источниками с учетом обратного влияния поля описывается системой уравнений, состоящей из линейных уравнений Максвелла и нелинейных уравнений движения носителей зарядов, образующих токи источника. При возбуждении колебаний электронными потоками, уравнения движения представляют собой второй закон Ньютона, где в качестве силы выступает сумма сил Кулона и Лоренца. В настоящее время известны два общих подхода к решению задач такого класса. Первый из них заключается в том, что плотность тока и заряда выражают в явном виде (если это возможно) через характеристики поля или ограничиваются учетом первых нелинейных слагаемых в их зависимости от амплитуды поля. В результате получают нелинейные, или квазилинейные, дифференциальные уравнения в частных производных относительно компонент поля. Необходимость решения таких уравнений возникает в тех случаях, когда нелинейная среда заполняет все пространство, в котором анализируются излучаемые поля, например, в плазме или при распространении интенсивных пучков света в кристаллах и т.п. Если рассматриваемая задача сводится к определенному классу нелинейных уравнений (нелинейное уравнения Шредингера, уравнение Кортевега де Фриза, Sin-Гордон и т.п., нелинейную задачу удается решить в рамках строгого метода обратной задачи рассеяния [6].

Если излучаемые поля покидают объем, занимаемый источником, то в решении нелинейных задач возбуждения оказывается предпочтительным второй подход, опирающихся на физическую природу явлений возбуждения полей заряженными частицами. Он состоит в поэтапном решении уравнений Максвелла и уравнений движения: вначале решаются линейные уравнения Максвелла при заданных токах, затем нелинейные уравнения движения носителей зарядов в заданных полях и т.д.

Поясним сказанное на простом примере. Рассмотрим излучение движущегося электрона с учетом обратного влияния поля (за счет его отражения от какого-либо объекта) на его движение. Здесь возможны две постановки задачи. В первой мы считаем, что электрон давно излучает, а поле давно существует и действует на него. Во втором случае полагаем, что вначале излучаемого поля нет, оно появляется лишь после того, как электрон начал двигаться. В первом случае мы, по сути, предполагаем, что существует установившийся процесс излучения и взаимодействия, а во втором – что имеет место начало и установление процесса излучения при взаимодействии электрона с полем. Во втором случае будем иметь дело с поэтапным решением постановленной задачи. Вначале на некотором конечном отрезке времени определяем движение электрона по заданным начальным характеристикам поля, затем вычисляем поля при найденном законе движения, вновь находим уточненный закон движения и т.д. Если условия задачи допускают наличие установившегося движения, то такая процедура будет сходиться. По-сути, это численное моделирование реального процесса. Если исходные уравнения верны и задача в целом корректна по Адамару, то, выбрав правильный шаг итерации, мы получим правильный результат.

В рамках поэтапного подхода малая плотность токов источника позволяет построение самосогласованной теории возбуждения колебаний в резонансных системах разделить на три относительно самостоятельных этапа:

а) развитие спектральной теории рассматриваемых резонаторов;

б) построение конструктивного решения задачи возбуждения в них электромагнитного поля заданными токами и установление его связи с решением спектральной задачи;

в) определение зависимости (в общем случае нелинейной) тока источника от электродинамических характеристик возбуждаемых полей.

Для закрытых резонансных систем – объемных резонаторов – теория возбуждения имеет наглядную физическую и элегантную математическую форму благодаря замечательным свойствам самосопряженных операторов, порождаемых данной краевой задачей (например, [7, 8, 9]). Отметим, что работа [9] выполнена в рамках теории нестационарных операторных уравнений с использованием ортогонального разбиения Вейля для Гильбертовых функциональных пространств, что позволило закрыть все вопросы математического обоснования, обобщить полученные ранее результаты на случай изменения параметров среды, заполняющей резонатор, во времени и пространстве.

При построении теории возбуждения открытых резонансных систем, возникают существенные математические трудности, обусловленные, во-первых, отсутствием последовательной спектральной теории открытых резонаторов (ОР) и, во-вторых, недостаточной изученностью свойств несамосопряженных операторов, порождаемых краевыми задачами для ОР, в частности, отсутствием теории о спектральном разложении таких операторов.

В монографии [4] теория возбуждения ОР внешними источниками строится по аналогии со случаем объемных резонаторов с учетом специфики внешних задач электродинамики, заключающейся в предположении наличия наряду с дискретным еще и непрерывного спектра собственных частот. Искомое поле представляется в виде разложения по собственным функциям непрерывного спектра, вводимым как решения соответствующей спектральной задачи. Благодаря ортогональности этих функций удается получить уравнения, связывающие коэффициенты разложения с функцией источника. Если эти коэффициенты имеют полюса в нижней полуплоскости спектрального параметра k, то из выражения для полного поля выделяется дискретный набор слагаемых, которые описывают режимы резонансного возбуждения колебаний в ОР. Даже если оставить в стороне вопросы математического обоснования, то, тем не менее, теория [4] обладает присущим ей недостатком, который не позволяет решать задачи возбуждения колебаний в ОР с учетом нерезонансного излучения источника. Это связано с тем, что нерезонансное излучение вычисляется через функции непрерывного спектра, которые, однако, введены чисто формально (это отмечено и в [4] на с. 358) и для реальных ОР их построить не удается, а, следовательно, не удается рассчитать в нерезонансное излучение из ОР[1]. Поэтому, при анализе вынужденных колебаний и конкретных ОР обычно ограничиваются анализом лишь резонансной части возбуждаемого поля. Для этого используют собственные функции, найденные в результате решения спектральной задачи, по постановке принципиально отличающейся от той, которая использовалась для построения собственных функций непрерывного

[1] Строго говоря, эти функции можно построить численно. Однако, теория [4] при этом теряет свою наглядность и становится неэффективной, т.к. в этом случае проще искать полное решение без разложения по собственным функциям непрерывного спектра.

спектра. (Отличие заключается в формулировке условия поведения собственных полей на бесконечности). Используемые на практике собственные функции описывают поле лишь внутри резонансного объема, который ограничен зеркалами и каустическими поверхностями. Все это приводит к тому, что, при решении конкретных задач, возбуждение полей в ОР анализируется точно так же, как и в закрытых резонаторах. Отличие состоит лишь в учете дополнительных дифракционных потерь и пространственной структуры поля резонатора. (Этим приближением мы тоже будем пользоваться).

Другой подход в построении теории возбуждения ОР заданными токами, позволяющий учитывать потери источника на нерезонансное излучение, основывается на применении хорошо развитых строгих [10, 11] и приближенных [5, 14] методов теории дифракции.

Вначале рассмотрены двухмерные ОР, образованные дугами тонких круговых цилиндров, которые могут располагаться на любом расстоянии друг от друга и иметь произвольные волновые размеры. В этом случае удается поставить и решить спектральную задачу математически корректно [1, 2] и с помощью функции Грина [10, 11] построить решение задачи возбуждения ОР, а также установить их взаимосвязь.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем математическую постановку задачи возбуждения двумерного ОР заданным источником, ориентируясь на последующее решение самосогласованного варианта задачи в рамках поэтапного подхода [15, 16].

В случае периодических колебаний тока источника с постоянной амплитудой и частотой, его плотность можно представить в виде соответствующего ряда Фурье. Из-за резонансного характера возбуждения колебаний в ОР достаточно ограничиться учетом только одного (резонансного) члена этого ряда и перейти к Фурье-гармоникам тока и поля. Для краткости изложения будем параллельно рассматривать возбуждение колебаний электрическими и магнитными источниками. При этом описание электромагнитного поля удобно проводить с помощью электрического $\vec{\Pi}^e$ и магнитного $\vec{\Pi}^m$ векторов Герца, которые подчиняются уравнениям:

$$\Delta\vec{\Pi}_\omega^{e(m)} + k^2\vec{\Pi}_\omega^{e(m)} = -i\frac{4\pi}{\omega}\vec{j}_\omega^{e(m)}, \qquad (1)$$

вытекающим из уравнений Максвелла. Здесь $\vec{j}_\omega^{e(m)}$ – Фурье-образ плотности электрического или магнитного тока источника; $k = \omega/c$, c – скорость света.

Следуя работе [2] двухмерный ОР, образованный двумя бесконечно тонкими цилиндрическими экранами S_1 и S_2 (рис.1), возбуждается электрическим или

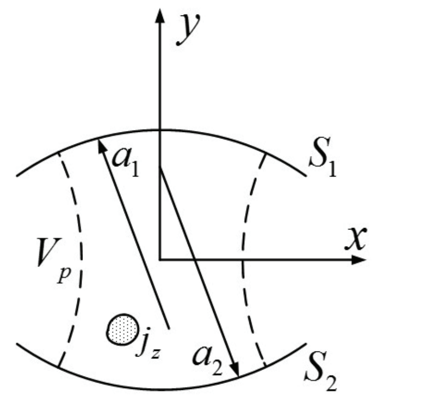


Рис. 1. Открытый резонатор, образованный двумя цилиндрическими зеркалами

магнитным током с единственной ненулевой Z – компонентой $j_{z(x,y)}^{e(m)}$. В этом случае в ОР будет возбуждаться Е- или Н-колебание с отличными от нуля продольными компонентами электрического или магнитного поля, соответственно.

При этом $H_z = k^2\prod_z^m$ и $E_z = k^2\prod_z^e$. Это позволяет ограничиться рассмотрением скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U(x,y) + k^2 U(x,y) = -j_\omega(x,y)\,. \qquad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$U \overset{d}{=} \Pi_z^e;\; j_\omega = i\frac{4\pi}{\omega}j_z^e \text{ – для Е-колебаний,} \qquad (3)$$

$$U \overset{d}{=} \Pi_z^m;\; j_\omega = i\frac{4\pi}{\omega}j_z^m \text{ – для Н-колебаний.} \qquad (4)$$

Искомая функция $U(x,y)$ должна удовлетворять краевым условиям на зеркалах S_1 и S_2:

$$U|_{s_1\cup s_2} = 0 \text{ – для Е-колебаний,} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}|_{s_1\cup s_2} = 0 \text{ – для Н-колебаний.} \qquad (6)$$

($\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности зеркал); условию конечности энергии поля в ограниченном объеме Ω, (условию типа Мейкснера):

$$\int_\Omega (k^2|U|^2 + |\nabla U|^2)d\Omega < \infty\,, \qquad (7)$$

условию уходящего излучения [17,1,2]:

$$U(x,y) = \sum_n a_n H_n^{(1)}(kr)\exp(in\varphi)\,, \qquad (8)$$

для достаточно больших $|kr|$:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}\,;\ \cos\varphi = \frac{x}{r}\,;\ \sin\varphi = \frac{y}{r}\,;$$

$H_n^{(1)}(\ldots)$ – функция Ханкеля первого рода n-го порядка.

Условие (8) получило название условия уходящего излучения (или условие Рейнхарта), поскольку оно означает, что при решении спектральной задачи поле собственных колебаний на бесконечности должно иметь вид суперпозиции расходящихся цилиндрических волн, уносящих энергию поля. Нетрудно видеть, что при $|kr| \to \infty$, $E \sim e^{ikr}/r^{1/2}$ и, следовательно, при действительных значениях k условие (8) эквивалентно условию излучения Зоммерфельда.

При произвольной функции источника искомое решение удобно представить с помощью функции Грина поставленной задачи:

$$E(x,y) = \iint G(x,y,x_0,y_0)\, j_\omega(x_0,y_0)\, dx_0 dy_0\,. \tag{9}$$

Целью дальнейшего рассмотрения является построение функции Грина $G(x,y,x_0,y_0)$, которая давала бы решения задачи (5)–(8), а также описание постановки и решения спектральной задачи для рассматриваемых ОР [1, 2].

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА, РЕЗОНАНСНЫЕ ПОЛЯ И НЕРЕЗОНАНСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Поместим исследуемый ОР в среду с поглощением $(\operatorname{Im}\varepsilon > 0,\ \operatorname{Im}\mu > 0)$ и введем обозначение $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε и μ диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно. Тогда функция Грина является решением уравнения

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\,, \tag{10}$$

которая удовлетворяет условиям типа (6)–(8) и условию на бесконечности $G(x,y,x_0,y_0) \to 0$. Функция Грина ищется в виде $G = G_0 + G_1$, где $G_0 = -\frac{i}{4}H_0^{(1)} \times \times(k\,|r - r_0|)$, а G_1 – удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и неоднородному краевому условию на зеркалах $G_1 = -G_0$. Определение G_1 с помощью метода задачи Римана-Гильберта [10] сводится к решению системы линейных операторных уравнений второго рода, имеющих вид [11,12]:

$$\begin{Vmatrix} z^1 \\ z^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A^{11}(k) & A^{12}(k) \\ A^{21}(k) & A^{22}(k) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} z^1 \\ z^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b^1 \\ b^2 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$z^j = (z_n^j)_{n=-\infty}^{+\infty}$ – неизвестные коэффициенты разложения функции G_1 в ряд Фурье по угловой координате φ_j локальной системы координат, связанной с зеркалом S_j; $b^j = (b_n^j(x_0,y_0))_{n=-\infty}^{+\infty}$ – аналогичные коэффициенты разложения функции точечного источника, зависящие от его координат x_0, y_0. Через $A^{ij}(k)$ обозначены матричные оператор-функции, аналитически зависящие от частоты источника и действующие в гильбертовом пространстве бесконечных числовых последовательностей:

$$l_2 = \left\{(z_n)_{n=-\infty}^{+\infty} : \sum_n |z_n|^2 < \infty\right\};$$

$A^{ij}(k): l_2 \to l_2$. Явный вид $A^{ij}(k)$ приведен в [160]. При $\operatorname{Im} k > 0$ для любых $b^j \in l_2$ решение системы уравнений (11) существует и единственно [11]. Необходимое нам решение для действительных частот $(\operatorname{Im} k = 0)$ понимается как предел: $G_1(k)$ при $\operatorname{Im} k \to O + o$.

Для наглядного представления функции Грина воспользуемся тем, что матричный оператор в (11) является ядерным: $\sum_n A_n^{ij}(k) < \infty$ [18]. Ядерные матричные операторы обладают многими свойствами конечномерных операторов. В частности, они допускают введение бесконечных определителей аналогичных определителям конечномерных матричных операторов и, следовательно, решение уравнений вида (11) по правилу Крамера:

$$z_n^i(x_0,y_0) = D_n(k,b^1,b^2)/D(k)\,,$$

где $D_n(k,b^1,b^2)$ – определитель, получаемый из определителя $D(k)$ оператора (11) при замене элементов n-го столбца соответствующим столбцом свободных членов b^1, b^2. Тогда:

$$G(k,x,y,x_0,y_0) = G_0(\ldots) + \\ + \sum_{j=1}^{2}\sum_n \frac{D_n(k,b^1,b^2)}{D(k)} G_n^j(k,x,y) \tag{12}$$

где

$$G_n^j(k,x,y) = e^{in\varphi_j}\begin{cases} J_n(ka_j)H_n^{(1)}(kr_j), r_j > a_j; \\ H_n^{(1)}(ka_j)J_n(kr_j), r_j \le a_j. \end{cases}$$

Из (9) и (12) видно, что построенная функция Грина дает требуемое поведение поля на бесконечности, удовлетворяющее условию (8). При аналитическом продолжении функции Грина на нижнюю полуплоскость ее полюса будут определяться нулями определителя (детерминанта) $D(k)$.

Задача о спектре собственных колебаний, рассматриваемого ОР, состоит в определении значений спектрального параметра k ($k = \omega_0/c$; ω_0 – собственная частота ОР), при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям (6)–(8). Условие (8) является естественным обобщением условия Зоммерфельда на случай комплексных частот, т.к. в ОР собственные частоты являются комплексными. Оно не требует интегрируемости собственных функций во всем пространстве, а лишь определяет их асимптотику на достаточно больших расстояниях. При этом решение поставленной задачи ищется не в классе квадратично интегрируемых функций, а в классе функций, локально принадлежащих пространству Соболева (см. (7)). Зависимость решения $E_0(k,x,y)$ от комплексного спектрального параметра k рассматривается на основном листе поверхности Римана логарифмической функции $Ln(k)$.

Используя метод задачи Римана-Гильберта, можно показать [1,2], что сформулированная спектральная задача эквивалентна задаче о характеристических числах канонической Фредгольмовой оператор-функции, которая аналитически зависит от k и имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} I - A^{11}(k) & -A^{12}(k) \\ -A^{21}(k) & I - A^{22}(k) \end{matrix} \right\| : l_2 \times l_2 \to l_2 \times l_2, \quad (13)$$

где I – тождественный оператор.

Оператор-функции $A^{ij}(k): l_2 \to l_2$ совпадают с соответствующими оператор-функциями в (11).

Из спектральной теории ядерных оператор-функций в гильбертовых пространствах [18] следует, что множество характеристических чисел оператор-функции (13), а значит и спектр резонансных частот ОР, $\sigma(\Delta)$, является дискретным, конечно-кратным и лежит в области с $\mathrm{Im}k < 0$. Единственной точкой сгущения для множества $\sigma(\Delta)$ является бесконечно удаленная точка $|k| \to \infty$. Кроме того, спектр собственных частот совпадает с нулями определителя $D(k)$ матричной оператор-функции (13). Каждому собственному значению $k_s \in \sigma(\Delta)$ соответствует собственная функция $g_s \in \sigma(\Delta)$, описывающая поле не только внутри резонансного объема, но и во всем пространстве. Собственные функции в данном случае строятся численно, причем их нормировка может осуществляться так же, как и в [4].

Отметим, что эти результаты получены впервые в [1, 2, 3] для случая строгого решения краевой задачи. Если же оператор краевой задачи заменяется приближенным, то в общем случае задачу следует решать заново. Вместе с тем, полученные результаты хорошо согласуются с известными приближенными решениями спектральной задачи: известная работа Фокса и Ли [14] и квазисобственные моды в [4]. Более того, спектр двухмерного ОР, рассчитанный по алгоритмам строгой спектральной теории ОР, неплохо аппроксимируется приближенными решениями [4], хотя последние и не описывают всех особенностей спектра ОР, например, междутиповую связь мод ОР [1, 3].

Построенная функция Грина позволяет рассчитывать полное поле, возбуждаемое источником. Наличие в системе даже относительно слабых резонансов позволяет в полном поле выделить резонансные поля, интенсивность которых тем выше, чем ближе частота источника к реальной части собственной частоты и чем больше добротность резонанса. Математически такое разбиение становится возможным благодаря мероморфности построенной функции Грина на Римановой поверхности функции $Ln(k)$. Покажем, что представление функции Грина в виде суммы резонансных слагаемых, каждое из которых отвечает собственной частоте ОР, и интегрального члена, который вместе с функцией Грина свободного пространства описывает нерезонансное излучение, можно получить с помощью теоремы Коши о вычетах. Из выражения (12) видно, что при аналитическом продолжении функции Грина в нижнюю полуплоскость эта функция имеет особенности типа полюса в точках k_s, совпадающих с нулями детерминанта $D(k,k_s)$, т.е. со спектром резонансных частот ОР.

Используя теорему Коши о вычетах и мероморфность построенной функции Грина, её можно представить в виде суммы резонансной и нерезонансной частей, причём первая из них полностью определяется решением спектральной задачи и выражается через собственные функции $g_s(k_s,x,y)$, отвечающие полюсам k_s. Действительно, проведём на основном листе поверхности Римана контур c, который охватывает интересующую часть спектра резонансных частот и точку k, соответствующую частоте источника, а также контуры C_s, охватывающие каждую точку k_s и k отдельно (см. рис. 2). Тогда из (12) и теоремы Коши следует, что:

$$G_1(k,x,y,x_0,y_0) = \sum_{s=1}^{N} [2\pi i(k-k_s)]^{-1} \times$$

$$\times \oint_{C_s} G_1(\xi,\ldots)d\xi + (2\pi i)^{-1} \oint \frac{G_1(\xi,\ldots)}{\xi - k} d\xi .$$

Введём обозначение

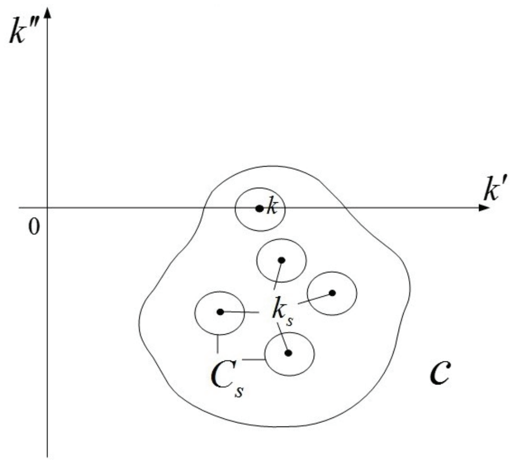
$$F_s(k_s,x,y,x_0,y_0) = (2\pi i)^{-1} \oint G_1(\xi,x,y,x_0,y_0)\,d\xi$$

и покажем, что F_s выражается через произведение собственных функций $g_s(k_s,x,y)$ и $g_s(k_s,x_0,y_0)$ ОР, соответствующих полюсу k_s и являющихся решением исходной спектральной задачи, сведенной к (13).

Функция F_s, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta F_s + k_s^2 F_s = 0 \,, \qquad (14)$$

как по координатам наблюдения (x, y), так и по координатам источника (x_0, y_0).



k_s- полюса; $k = \omega / c$, ω- частота источника

Рис. 2. Комплексная плоскость спектрального параметра k

Далее, поскольку функция G_0 не имеет особенностей в нижней полуплоскости, то из (12) и теоремы Коши следует, что F_s удовлетворяет однородному краевому условию на зеркалах, а на бесконечности имеет вид (8) при замене $k \to k_s$. Условие типа (7) для F_s также выполняется. Отсюда следует, что функция F_s представляет собой комбинацию собственных функций g_s. Так как k_s – простой полюс, то, как видно из (14)

$$F_s(k_s, x, y, x_0, y_0) \sim g_s(k_s, x, y) g_s(k_s, x_0, y_0) \,.$$

Таким образом, функция Грина для двухмерных ОР может быть представлена в виде:

$$G(k, k_s, x_0, y_0) = G_0(k, x, y, x_0, y_o) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \frac{g_s(k_s, x, y,) g_s(k_s, x_0, y_0)}{k - k_s} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_s} \frac{G_1(\xi, k_s, x, y, x_0, y_0)}{\xi - k} d\xi \,, \qquad (14)$$

где N – число полюсов, охватываемых контуром C_s.

Из (9) и (14) видно, что поле, возбуждаемое произвольным источником, можно представить в виде:

$$E(k, x, y) = \sum_{s=1}^{N} \frac{A_s g_s(k_s, x, y)}{k - k_s} + \widehat{E}(k, x, y), \qquad (15)$$

где

$$A_s = \iint j\omega(x_0, y_0) g_s(k_s, x_0, y_0) dx_0 dy_0 \;;$$

$$\widehat{E} = \frac{1}{2\pi i} \iint \oint_{C_s} j \frac{(x_0, y_0) G_1(\xi, x, y, x_0, y_0) d\xi dx_0 dy_0}{\xi - k} +$$

$$+ \iint j(x_0, y_0) G_0(k, x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0 \,. \qquad (16)$$

Для собственных частот с малой мнимой частью $|\mathrm{Im}\, k_s| \ll |\mathrm{Re}\, k_s|$ при $k \approx \mathrm{Re}\, k_s$ одно из первых слагаемых увеличивается, в то время как остальные остаются ограниченными. В силу дискретности спектра собственных частот контур C_s можно всегда провести так, чтобы N =1. Если при этом нерезонансным излучением можно пренебречь, то пространственная структура возбуждаемого поля не зависит от частоты источника и описывается собственной функцией ОР. Нерезонансные поля возникают за счет излучения источника в свободное пространство и однократного (нерезонансного) рассеяния излучения на зеркалах. Возникающие при этом нерезонансные потери энергии источника *не охватываются понятием дифракционных потерь*, характеризуемых величиной $\mathrm{Im}\, k_s$, и в энергетическом балансе их нужно учитывать отдельно (что отмечалось еще в [4] и [15, 16, 19]).

Интеграл в выражении (14) для функции Грина или в (16) для возбуждаемого поля можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности изолированного резонанса. Преобразуем этот интеграл к виду:

$$\widehat{G}_1(k) = \oint \frac{G_1(\xi) d\xi}{(\xi - R_s)(1 - \dfrac{k - k_s}{\xi - k_s})} \,.$$

Тогда воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\left| \dfrac{k - k_s}{\xi - k_s} \right| < 1$, получим:

$$\widehat{G_1}(k) = \sum_n (k - k_s)^n \oint_{C_s} \frac{G_1(\xi) d\xi}{(\xi - k_s)^{n+1}} \,, \qquad (17)$$

Пусть функция $G_1(\xi)$ имеет простой полюс при $\xi = k_s$. Тогда в этой точке подынтегральная функция в (17) имеет полюс порядка $n+2$.В этом случае:

$$\oint_{C_S} \frac{G_1(\xi) d\xi}{(\xi - k_s)^{n+1}} = \frac{2\pi}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} \tilde{G}_1(\xi)}{d\xi^{n+1}} \Big|_{\xi = k_s} \,, \qquad (18)$$

где $\tilde{G}_1(\xi) \doteq i(\xi - k_s) G_1(\xi)$ – регуляризованная в окрестности $\xi = k_s$ функция Грина.

Таким образом, нерезонансная часть $\widehat{G}(k)$ функции Грина (14) представлена в виде:

$$\widehat{G}(k) \overset{d}{=} G_0(k) + G_1(k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k |r - r'|) +$$

$$+2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}\tilde{G}_1(\xi)}{d\xi^{n+1}}|_{\xi=k_s} (k-k_s)^n . \quad (19)$$

При точном резонансе $k = k'_s$ имеем:

$$\widehat{G}(k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r-r'|) +$$

$$+2\pi \frac{d\tilde{G}_1(\xi)}{d\xi}|_{\xi=k_s} + O(Q_s^{-1}) . \quad (20)$$

Из (19) и (20) видно, что высокая добротность резонанса еще не гарантирует малую величину мощности нерезонансного излучения. Для ее уменьшения необходимо минимизировать первые слагаемые в (20). Из всего ряда (18) наибольший вклад в нерезонансную часть функции Грина вносит слагаемое с $n = 0$, т.е. первая производная функции $\tilde{G}_1$ по спектральному параметру в точке, соответствующей полюсу $\xi = k_s$. Эта функция не зависит от частоты возбуждения и является такой же "собственной" характеристикой ОР, как и его резонансная функция.

В заключение отметим, что выражение (13) для возбуждаемого в ОР поля формально и по физической сути совпадает с представлением поля в [4]. Однако оно имеет то преимущество, что поддается оценкам и численному расчету с помощью функции Грина, построенной в виде (12). Соответствующие алгоритмы весьма эффективны и с успехом используются для анализа полей в ОР [11, 19].

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПОЛЕЙ

Представление функции Грина и возбуждаемых полей в виде суммы резонансных и нерезонансных слагаемых (14) и (16) позволяет получить уравнение для поля, возбуждаемого ВЧ током с медленно меняющейся амплитудой, в окрестности изолированного резонанса. Введем величину рассеянного поля по формуле:

$$E^{sc}(x,y) = E(x,y) - \iint G_0(k,x,y,x',y') j(k,x',y') dx'dy' .$$

Тогда, используя (14) с учетом (20), поле E^{sc} в окрестности s-го резонанса можно записать в виде:

$$E^{sc}(k,x,y) \approx \frac{C_s(k) g_s(k_s,x,y)}{k-k_s} +$$

$$+2\pi \iint \frac{d\tilde{G}_1(\xi,x,y,x',y')}{d\xi}|_{\xi=k_s} j(k,x',y') dx'dy' , \quad (21)$$

где

$$C_s(k) \doteq \iint g_s(k_s,x',y') j(k,x',y') dx'dy' .$$

Это выражение описывает резонансную и нерезонансную части рассеянного поля стационарных колебаний, возбуждаемых источником во всем пространстве (внутри и вне резонансного объема) при любом соотношении длины волны и размеров ОР. Причем в (21) нерезонансная часть поля записана с точностью до членов порядка Q_s^{-1}. Она выражается через производную от аналитического продолжения регуляризованной функции Грина $\tilde{G}_1$ по частотному параметру, взятую в точке точного резонанса. Эта величина не зависит от частоты колебаний и определяется только геометрией резонатора и типом возбуждаемой моды.

Если амплитуда ВЧ тока медленно изменяется во времени, то источник излучает спектр частот, локализованный вблизи несущей частоты ω. При условии, что ширина размытия спектра $\Delta\omega_{max}$ заметно меньше расстояния между соседними резонансами, из (21) с помощью известной методики, использующей обратное преобразование Фурье по частотной добавке [52], нетрудно получить уравнение для медленно меняющихся рассеянных полей:

$$\frac{dE^{sc}(t,x,y)}{dt} + i(k-k_s)E^{sc}(t,x,y) =$$

$$\widehat{C_s}(t) g_s(k_s x,y) +$$

$$+i2\pi(k-k_s) \iint \frac{d\tilde{G}_1(\xi)}{d\xi}|_{\xi=k_s} \hat{j}(t,x',y') dx'dy' +$$

$$+2\pi \iint \frac{dG(\xi)}{d\xi}|_{\xi=k_s} \frac{d\hat{j}(t,x',y')}{dt} dx'dy' , \quad (22)$$

где $\widehat{C}_s(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда резонансной части поля; $\hat{j}(t,x',y')$ – медленно меняющаяся первая гармоника плотности тока источника, которая приближенно выражается через полную плотность тока по формуле:

$$\hat{j}(t,x',y') \approx \frac{2}{T} \int j_z(t',x',y') e^{i\omega t'} dt' .$$

Если колебания в ОР возбуждаются источником, характеристики которого подвергаются обратному воздействию электромагнитного поля, то его плотность тока будет зависеть от амплитуды и частоты рассеянного поля. По этой причине анализ возбуждения колебаний в ОР требует совместного решения уравнений (22) и уравнения движения носителей заряда источника. В общем случае зависимость плотности тока источника от поля нелинейна, что, в частности, означает наличие в спектре излучения помимо основной частоты ее высших гармоник. Однако, как уже отмечалось, резонансный характер возбуждения позволяет ограничиться учетом только одной первой гармоники тока, причем ее амплитуда нелинейным образом зависит от рассеянного поля и может медленно меняться во времени.

Если используются движущиеся источники (например, электронные потоки), то зависимость плотности тока от поля будет нелокальной, и в этом случае уравнение (22), строго говоря, непригодно для описания переходных процессов. Однако в рамках поэтапного подхода (описанного выше) это уравнение все же позволяет приближенно рассчитывать медленную эволюцию поля ОР, характерную для процессов возбуждения колебаний вблизи высокодобротного резонанса. В этом случае отыскание самосогласованного решения задачи возбуждения (с учетом обратного влияния поля на источник) сводится к численному моделированию процесса установления колебаний в ОР с активным элементом. При этом задача разбивается на два качественно различающихся этапа: на одном из них по заданному (или найденному) распределению поля рассчитывается плотность тока источника (см.п.3.3), а на другом – по найденной плотности тока рассчитывается возбуждаемое поле и его приращение во времени.

Для набора сосредоточенных источников функцию Грина и возбуждаемое поле можно усреднить по сечению этих источников. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно усредненных амплитуд поля:

$$\frac{dE_p^{sc}}{dt} - i(\omega - \omega_s)E_p^{sc} \approx$$

$$\approx -\sum_{m=1}^{M} G_{mp} j_{\omega p}(E_m),\; p = \overline{1,M}\,, \qquad (23)$$

где G_{mp} – усредненная по источнику функция Грина.

4. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ ДЛЯ ОР С ИСТОЧНИКОМ

Точные уравнения баланса для ОР – прямое следствие теоремы с комплексной мощности. Для того чтобы записать ее в виде, удобном для анализа резонансных систем, введем в рассмотрение сумму $W = W_E + W_H$ и разность $\Delta W = W_E - W_H$ энергий электрического $W_E = (8\pi)^{-1}\int_V |\vec{E}|^2\, dv$ и магнитного $W_H = (8\pi)^{-1}\int_V \left|\vec{H}\right|^2 dv$ полей в резонансном объеме V.

Под резонансным объемом будем понимать объем, ограниченный некоторой поверхностью, охватывающей ОР и источник. В качестве резонансного объема следует выбирать объем, ограниченный зеркалами и каустическими поверхностями.

Ограничимся анализом монохроматических полей с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$. Собственные колебания в ОР характеризуются комплексными собственными частотами $\omega_s = \omega_s' - i\omega_s''(\omega_s', \omega_s'' > 0)$. Учитывая это обстоятельство при выводе теоремы о комплексной мощности из уравнений Максвелла, получаем уравнения баланса для свободных колебаний в следующем виде:

$$\omega_s' = \frac{1}{2}\frac{\sum''(\omega_s)}{\Delta W(\omega_s)}; \quad \omega_s'' = \frac{1}{2}\frac{\sum'(\omega_s)}{W(\omega_s)}, \qquad (24)$$

где $\sum = \sum' + i\sum'' = \frac{c}{4\pi}\int_S \left[\vec{E}, \vec{H}\right] d\vec{s}$ – комплексный поток энергии (мощность излучения) через поверхность S, ограничивающую резонансный объем V; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – электрическое и магнитное поля; c – скорость света.

Поскольку при фиксированной геометрии открытого резонатора $\omega_s = const$, то из (24) следует, что отношение реальной (мнимой) части мощности излучения из объема V к сумме (разности) энергий электрического и магнитного полей собственных колебаний не зависит от выбора поверхности S. Напомним, что ω_s' определяет частоту колебаний поля, а ω_s'' – декремент затухания собственных колебаний во времени за счет излучения поля на бесконечность. Из (24) видно, что скорость изменения мгновенной фазы собственных колебаний (частота ω_s'') определяется отношением их реактивных характеристик ($\sum''$ и ΔW), а скорость затухания амплитуды этих колебаний – отношением их активных характеристик ($\sum'$ и W).

Вводя в рассмотрение добротность собственного колебания по известной формуле $Q(\omega_s) = \omega_s' / 2\omega_s''$, из второй формулы (24) получаем:

$$Q(\omega_s) = \frac{\omega_s' W(\omega_s)}{\sum'(\omega_s)}. \qquad (25)$$

Выражение (25) хорошо согласуется с классическим определением добротности колебательного контура или объемного резонатора, т. к. (25) представляет собой отношение усредненной за период колебаний электромагнитной энергии объема V к энергии потерь, которая в данном случае определяется усредненной мощностью излучения из этого объема.

Рассмотрим теперь уравнения баланса для случая вынужденных колебаний, возбуждаемых в ОР источником, который расположен внутри резонансного объема. Из теоремы о комплексной мощности следуют уравнения баланса активных[2*)]:

$$\sum'(\omega) = P_a(\omega) \qquad (26)$$

и реактивных:

$$2\omega\Delta W(\omega) + \sum''(\omega) = P_r(\omega) \qquad (27)$$

[2] В дальнейшем величины, рассчитываемые для вынужденных колебаний, будем снабжать аргументом ω.

мощностей. Здесь введены следующие обозначения: комплексная мощность взаимодействия источника с полем ОР; V_e – объем, занимаемый источником с плотностью тока $\vec{j}$. Величина, ΔW, умноженная на частоту, характеризует реактивную мощность возбуждаемого колебания.

Введем по аналогии с (25) добротность вынужденных колебаний:

$$Q(\omega) = \frac{\omega W(\omega)}{\sum'(\omega)}. \tag{29}$$

Используя выражения (25) и (29), путем тождественных преобразований из (26) и (27) получим:

$$2\omega_S'' W(\omega) = \sigma(\omega, \omega_s) P_a(\omega), \tag{30}$$

$$2(\omega - \omega_s' \delta(\omega, \omega_s)) \Delta W(\omega) = P_r(\omega), \tag{31}$$

где

$$\sigma(\omega, \omega_s) = \frac{\omega_s' Q(\omega)}{\omega Q(\omega_s)}, \quad \delta(\omega, \omega_s) = -\frac{1}{2} \frac{\sum''(\omega)}{\omega_s' \Delta W(\omega)}. \tag{32}$$

При идеальной проводимости металлических поверхностей левую часть равенства (30) можно трактовать как дифракционные потери энергии поля, заключенного в резонансном объеме на частоте возбуждения. Тогда величину, стоящую в правой части выражения (30) естественно рассматривать как ту часть мощности источника, которая необходима для компенсации дифракционных потерь резонансного колебания. Остальная мощность излучается непосредственно в свободное пространство или нерезонансным образом рассеивается на зеркалах. Таким образом, суммарную мощность излучения источника из ОР можно условно разделить на две качественно различающиеся части. Одна из них связана с многократными переотражениями поля от зеркал ОР, ассоциируется с дифракционными потерями и имеет резонансный характер. Вторая часть обусловлена однократным рассеянием на зеркалах и прямым излучением источника в свободное пространство и образует нерезонансное излучение. При свипировании частоты источника в приемном устройстве, расположенном вне резонансного объема, регистрируемый сигнал будет иметь вид узкого пика (ширина которого характеризует добротность вынужденных колебаний) на пологом пьедестале, который обусловлен нерезонансным излучением [4].

Введенная выше добротность вынужденных колебаний, а значит, и величина $\sigma(\omega, \omega_s)$ зависят не только от геометрии ОР и частоты источника, но и от его пространственной структуры, места расположения и взаимодействия с полем ОР. Поэтому величина $\sigma(\omega, \omega_s)$ или $Q(\omega)$ могут использоваться в качестве критерия эффективности преобразования энергии источника в энергию резонансных колебаний. Другой вывод, вытекающий из этих результатов, состоит в том, что при энергетическом анализе колебаний, возбуждаемых в ОР с источником, который расположен внутри резонансного объема, ОР и источник следует рассматривать как единую систему.

В случае высокодобротных колебаний, характеризуемых условиями $\omega \approx \omega_s'$ и $Q(\omega_s) \gg 1$, источник слабо влияет на структуру поля в ОР. Если при этом мощность излучения из резонансного объема обусловлена только дифракционными потерями, то $Q(\omega) \approx Q(\omega_s)$ (т.е. $\sigma \approx 1$) и $\sum''(\omega) \approx 0$. Кроме того, в этом случае $\omega^2 W_H \approx \omega_s^2 W_E$. С учетом этих соотношений уравнения (30) и (31) сводятся к известным уравнениям баланса активных и реактивных мощностей для закрытых резонаторов, которые имеют вид:

$$2\omega_s'' W(\omega) = P_a(\omega) \text{ и } 2(\omega - \omega_s') W(\omega) = P_r(\omega). \tag{33}$$

Уравнения (33) применяются и при описании высокодобротных колебаний в ОР.

Необходимо отметить, что поскольку для вынужденных колебаний поток энергии $\sum'$ не зависит от выбора поверхности, ограничивающей объем V (см. (26)), то, увеличивая этот объем, величину (29) можно сделать сколь угодно большой. Однако следует иметь ввиду, что выражение в левой части формулы (30) имеет смысл мощности дифракционных потерь только в том случае, если в качестве объема V_p выбран именно резонансный объем. Поэтому сравнение добротностей вынужденных и свободных колебаний следует проводить только для резонансного объема. Были проведены расчеты[3] энергетических характеристик поля, возбуждаемого в простейшем открытом резонаторе – цилиндре с продольной щелью сосредоточенным источником с эквивалентным магнитным током, имеющим заданную z-тую компоненту плотности.

На рис. 3 приведены зависимости добротности вынужденных колебаний в точном резонансе – $Q_{вын.рез.}(ка = 8,56)$ и при отстройке от него – $Q_{вын.нер.}$, а также зависимость добротности, характеризующей нерезонансное излучение – $Q_{нер.изл.} = \dfrac{Q_0 Q_{вын.рез.}}{Q_0 - Q_{вын.рез.}}$ как функция положения источника на оси симметрии системы.

Для сравнения показаны уровни «добротности» нити в свободном пространстве (для резонансного объема) и собственной добротность Q_0. Видно, что добротность вынужденных колебаний уменьшается при приближении к щели и не превышает величину

[3] Расчеты проведены совместно с В.Н.Вавиловым по программам А. Е. Поединчука и В. В. Веремея.

Q_0. Это означает, что коэффициент σ остается меньше единицы и в данном случае не превышает величину 0,13.

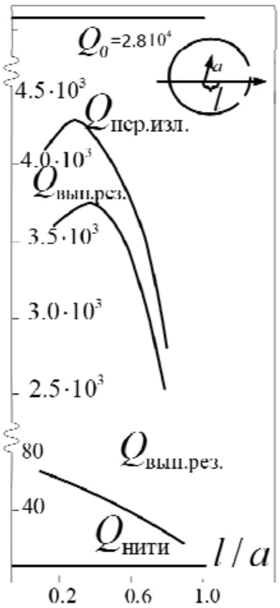


Рис. 3. Изменение добротности вынужденных колебаний в ОР в виде цилиндра с продольной щелью с перемещением источника вдоль его оси симметрии

Таким образом, в рассматриваемой системе только 13% энергии источника расходуется на компенсацию дифракционных потерь энергии поля резонансной моды, а 87% ее высвечивается в виде нерезонансного излучения. Энергия, запасаемая в резонансном объеме при нарушении условий резонанса, намного меньше, чем в случае резонансного возбуждения колебаний.

5. РЕЗОНАНСНЫЕ И НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В КВАЗИОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

Сформулированный в предыдущих разделах подход к построению теории возбуждения ОР произвольными источниками опирается на строгие методы теории дифракции. Аналогичный подход может быть развит и в рамках приближенных методов теории дифракции, которые позволяют рассчитывать поля в ОР с зеркалами сложного профиля, в частности в ОР ГДИ, содержащем дифракционную решетку. На самом деле все необходимые общие соотношения задач возбуждения квазиоптических ОР в приближении Кирхгофа с соответствующим математическим обоснованием получены сравнительно давно [5] и хорошо известны. В данном разделе мы покажем, что и для квазиоптических резонаторов справедливы представления типа (15) и применима вся схема расчета полей в ОР, возбуждаемых нелинейными токами, в рамках поэтапного подхода решения задач возбуждения. Получены уравнения самосогласованной теории устройств дифракционной электроники с нефиксированной структурой поля и приведен пример расчета поля в ОР с дифракционной решеткой.

Рассмотрим квазиоптический резонатор с идеально проводящими зеркалами и размерами, обеспечивающими выполнение условий $kR \gg 1$ и $\lambda \ll a$, где R – наименьшее расстояние между зеркалами; a – апертура зеркал. В этом приближении интегральное уравнение относительно H_z – компоненты поля на одном из зеркал имеет вид [5]:

$$H_z(M_1) = (\frac{ik}{2\pi})^2 \int \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} \int \frac{e^{ikR_{21}}}{R_{21}} H_z(M_1^*) dS_1 dS_2 -$$

$$-\frac{ik}{2\pi} \int \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} F_2(M_2) dS_2 + F_1(M_1), \qquad (34)$$

где $R_{12} = |M_1 M_2|$ и $R_{21} = |M_2 M_1|$ – расстояние между точками интегрирования по поверхности первого (второго) и второго (первого) зеркал:

$$F_i(M_i) = \int_{V_0}^{d} \frac{e^{ikR_i}}{R_i} f(N) dv, \qquad (35)$$

$f(N) = i(\frac{4\pi}{kc}) j(N)$ – функция источника; $R_i = |M_i N|$ – расстояние от поверхности ***i***-го зеркала до источника.

Интегрирование в (34) ведется по поверхности зеркал, а в (35) – по объему V_0, занимаемому источником.

Интегральное уравнение (34) получено в приближении Кирхгофа, которое не учитывает затекание токов на теневую сторону зеркал. Однако при решении задачи полное поле не разделяется на резонансную и не резонансную части, поэтому расчет поля, возбуждаемого в ОР источником с помощью этого уравнения, выполняется с учетом нерезонансного излучения. Уравнение (34) можно решать итерационным методом также, как это делали Фокс и Ли [14]. Если плотность тока источника нелинейным образом зависит от возбуждаемого поля, то уравнение (34) становится нелинейным уравнением типа уравнения Гаммерштейна. В этом случае также удобно использовать итерационную процедуру решения, что соответствует описанному выше поэтапному подходу в решении задачи возбуждения резонаторов произвольными источниками. Вначале задается распределение поля (или эквивалентных поверхностных токов) на одном из зеркал и начальное значение тока источника (например, найденное в приближении заданного поля или в линейном приближении). Затем согласно (34) находим распределение поля, которое возникает на поверхности этого же зеркала после одного отражения от второго зеркала, определяем распределение тока источника, вновь находим поле и т.д.

Таким образом, уравнение (34) в принципе позволяет решать задачи нерелятивистской дифракционной электроники в приборах с нефиксированной структурой поля с учетом нерезонансного излучения.

Далее будут описаны способ выделения резонансных слагаемых и методика расчета мощности нерезонансного излучения источника из квазиоптических ОР.

Из теории Фредгольма известно, что решение уравнения (34) представимо через резольвентное ядро $\Gamma(M_1, M_1^*, \lambda(k))$

$$H_z(M_1) = F(M_1) +$$
$$+\lambda(k)\int \Gamma(M_1 M_1^*, \lambda(k)) F(M_1^*) dS_1 , \qquad (36)$$

где

$$F(M_1) \overset{d}{=} -\frac{ik}{2\pi}\int F_2(M_2)\frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} dS_2 + F_1(M_1) ;$$

$$\Gamma(M_1, M_1^*, \lambda(k)) = \lambda(k)\frac{D(M_1, M_1^*, \lambda(k))}{D(\lambda)} , \qquad (37)$$

$D(\lambda)$ и $\tilde{D}(M_1, M_1^*\lambda)$ – определитель Фредгольма, и минор определителя Фредгольма [20].

Нули определителя Фредгольма лежат в нижней полуплоскости комплексного параметра $\lambda(k)$ (или k) и совпадают с собственными значениями однородного уравнения Фредгольма. Таким образом, как и в случае строгих методов теории дифракции, решение задачи возбуждения представляется в виде мероморфной функции (36) спектрального параметра, полюса которой совпадают со спектром собственных частот ОР. Это означает, что, применив теорему Коши о вычетах к функции $H_z(\xi)/(k-\xi)$, мы получим выражения для возбуждаемого поля в виде суммы резонансных слагаемых и нерезонансного члена аналогичное выражению (15):

$$H_z^{sc}(M_1) \doteq H_z(M_1) - F(M_1) =$$
$$= \sum_{s=1}^{M}\frac{C_s(k)H_s(k_s)}{k-k_s} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_s}\frac{\varphi(\xi, M_1)}{\xi - k}d\xi, , \qquad (38)$$

где

$$\varphi(\xi) \doteq \lambda(\xi)\int_{S_1}\Gamma_1(\xi, M_1, M_1^*)F_1(M_1)dS ;$$

$\frac{1}{2\pi i}\oint \varphi(\xi)d\xi \doteq C_s(k)H_s(k_s)$ – вычет функции $\varphi(\xi)$ в s-м полюсе резольвенты.

Представление решения уравнения (34) в виде (38) указывает на структуру возбуждаемого поля и позволяет сформулировать алгоритм расчета мощности нерезонансного излучения. С помощью итерационной процедуры решаем уравнение (34) и находим полное поле, возбуждаемое в ОР, что позволяет вычислить полные потери на излучение в системе: „ОР + источник". Затем для того же резонатора определяется мощность дифракционных потерь при решении задачи по формулам теории [4], что соответствует сохранению в (38) только одного резонансного слагаемого. В результате сравнения находим мощность нерезонансного излучения. Отметим, что в данном случае можно использовать выражения для собственных функций, полученное методом параболического уравнения, т.к. в интегральном уравнении (34), по сути, используется функция Грина параболического уравнения [4].

6. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ С ОТКРЫТЫМ РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

Рассмотрим автогенератор с ОР в виде цилиндра с продольной щелью, в котором колебания возбуждаются сосредоточенным ($d \ll \lambda$) активным элементом с вектором плотности тока, лежащим в плоскости рисунка. В этом случае в ОР будут возбуждаться колебания с единственной отличной от нуля H_z компонентой магнитного поля, причем E_r и E_φ – компоненты выражаются через H_z линейно. Такие колебания возбуждаются источником магнитного тока с j_z^m компонентой плотности, что позволяет ввести в рассмотрение эквивалентный магнитный ток с нелинейной зависимостью его плотности от магнитного поля H_z. При этом H_z подчиняется уравнению (23), где нужно сделать формальную замену $E_z \to H_z$ и $j_z \to j_z^m$. Поскольку $d \ll \lambda$, то в (23) можно оставить лишь одно уравнение (M =1), которое в нормированных переменных принимает вид:

$$\frac{d\widehat{H}}{d\tau} - i(\delta\omega_s + i\gamma_s)\widehat{H} = \widehat{G}(\overline{x}, \overline{y})(\delta\omega_s + i\gamma_s)I_0\,\widehat{j}(\widehat{H}), \qquad (42)$$

где $\widehat{H} \overset{d}{=} \frac{\overline{H}c^2}{e\omega_s'^2}$ – нормированная усредненная по сечению источника амплитуда магнитного поля;

$$\delta\omega_s = (\omega - \omega_s')/\omega_s'; \quad \gamma_s = \omega_s''/\omega_s' ;$$

$I_0 = \frac{3}{8}\frac{S_0 j_0}{c^2}(\frac{e\omega_s'^2}{c^2})^2$ – нормированный постоянный ток активного элемента; $\widehat{j}(\widehat{H})$ – нормированная гармоника плотности тока; $\widehat{G}(\overline{x}, \overline{y})$ – усредненная по площади источника функция Грина.

Как видно, в данном случае задача об автоколебаниях в системе с ОР свелась к анализу уравнения, типичного для автогенераторов с одной степенью свободы. Найденные решения уравнения (42) позволяют рассчитывать пространственную структуру поля по формуле (9), если известна (или найдена) функциональная зависимость $\widehat{j}(\widehat{H})$.

Ограничиваясь анализом генерации вблизи порога самовозбуждения, аппроксимируем зависимость амплитуды первой гармоники плотности тока от амплитуды рассеянного поля полиномом третьей степени:

$$\widehat{j}(|\widehat{H}|) = \alpha|\widehat{H}| - |\widehat{H}|^3, \qquad (43)$$

где $\alpha > 0$ – параметр задачи.

Подставляя (43) в (42) и линеаризуя полученное уравнение относительно $|\widehat{H}|$, получим выражение для инкремента нарастания амплитуды поля в ОР:

$$\delta = -\gamma_s(1 + \alpha I_0 J_m \widehat{G}(\overline{x}, \overline{y})). \qquad (44)$$

Приравнивая инкремент нулю, находим стартовые значения параметра неравновесности, пропорционального току источника, как функцию его координат:

$$(\alpha I_0)_{st} = -\frac{1}{J_m \widehat{G}(\overline{x}, \overline{y})}. \qquad (45)$$

Отметим, что дифракционные потери учитываются в функции:

$$J_m \widehat{G}(\overline{x}, \overline{y}).$$

Зависимость стартового значения параметра неравновесности от положения источника на оси x при $ka = 8,56$ показана на рис. 4.

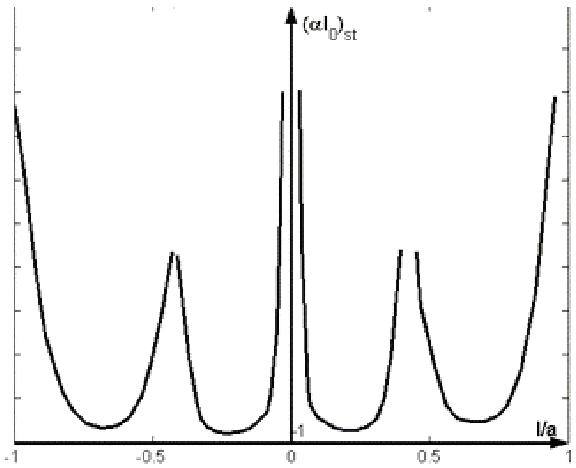


Рис.4. Зоны неустойчивости автогенератора с колебательной системой в виде цилиндра с продольной щелью при перемещении активного элемента вдоль ее оси симметрии

Видно, что автоколебания могут возбуждаться на четырех интервалах изменения координаты источника. Отсюда видна и пространственная структура поля резонансной моды, отвечающей собственной частоте $ka = 8,56$.

Стационарные решения уравнения (42) $(\frac{d\widehat{H}}{d\tau} = 0)$ находятся в явном виде. Они определяют амплитуду поля стационарных автоколебаний в области, занимаемой источником. Амплитуда стационарных автоколебаний в зависимости от положения активного элемента при $I_{раб} / I_{st} = 4$ показана на рис.5. Провалы поля в точках минимумов стартового тока означают, что выбранное значение рабочего тока обеспечивает проявление эффектов нелинейного насыщения. В данном случае пространственная структура поля внутри и вне резонатора совпадает со структурой поля, возбуждаемого магнитной нитью тока (см., напр., [11]). При наличии двух и более активных элементов или распределенного источника структура поля рассчитывается с помощью функции Грина по формуле (9).

Таким образом, предложенное в работе обобщение строгой и приближенной теории возбуждения двумерных ОР на случай произвольных источников позволяет решать задачи об автоколебаниях в ОР с учетом нерезонансного излучения и влияния источника на пространственную структуру поля.

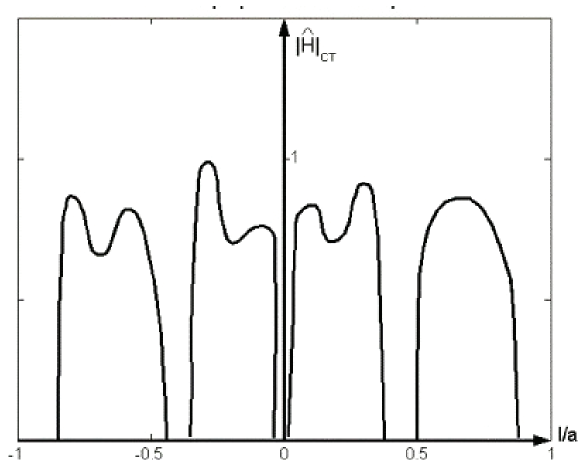


Рис.5. Зоны генерации автогенератора с колебательной системой в виде цилиндра с продольной щелью при перемещении активного элемента вдоль ее оси симметрии

Однако алгоритмы, полученные как на основе строгих, так и приближенных методов теории дифракции достаточно трудоемки и их следует применять лишь в тех случаях, когда влиянием источников на пространственную структуру возбуждаемого поля или нерезонансным излучением пренебречь нельзя. Анализ функции Грина показал, что даже при высокой добротности колебаний мощность нерезонансного излучения может быть достаточно большой (см. (20)). На самом деле малость этой величины обеспечивается минимизацией нерезонансных слагаемых функции Грина для данного ОР. В первом приближении это делается следующим образом. Определяется диаграмма направленности активного зеркала, и принимаются меры для уменьшения уровня его боковых лепестков и сужения ширины основного лепестка. Затем апертура верхнего зеркала ОР выбирается такой, чтобы она обеспечивала максимальный перехват излучаемой энергии. Как показывает опыт разработки ГДИ [19] такой прием позволяет резко снизить мощность нерезонансного излучения $P_{нер.изл.}$

Имея ввиду эту возможность уменьшения мощности нерезонансного излучения в ГДИ, а также тот факт, что мощность резонансной моды ОР существенно превышает величину $P_{нер.изл.}$, дальнейший теоретический анализ автоколебательных процессов в ГДИ с оптимизированной по минимуму $P_{нер.изл.}$ электродинамикой проведен без учета нерезонансного излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов спектральной теории двухмерных ОР с цилиндрическими зеркалами показано, что резонансная (сингулярная) часть функции Грина рассматриваемых ОР выражается через их собственные функции и собственные частоты, а ее нерезонансная часть представляет собой сумму функции Грина свободного пространства и разложения регулярной части функции Грина в ряд по степеням расстройки частоты источника от резонанса. При точном резонансе n- тое слагаемое этого ряда обратно пропорционально добротности собственного колебания в степени n, причем нулевой член представляет собой производную по частоте от аналитического продолжения регуляризованной функции Грина в точке резонанса, не зависит от частоты источника и является такой же "внутренней" характеристикой ОР, как и его собственная функция. Показано, что аналогичное представление справедливо и для полей, возбуждаемых в квазиоптических резонаторах, которые описываются интегральными уравнениями Фредгольмового типа. С помощью аппарата функции Грина, краевых задач и спектральной теории двумерных ОР, получены уравнения, описывающие стационарные и медленно меняющиеся поля, возбуждаемые в ОР внутренними распределенными источниками в окрестности изолированного резонанса с учетом нерезонансного излучения. Предложена форма записи уравнений баланса активных и реактивных мощностей в системе "ОР + Источник", удобная при анализе нерезонансного излучения. Предложен способ вычисления коэффициента преобразования энергии излучения заданного источника в энергию резонансной моды ОР, заключающийся в вычислении отношения добротности вынужденных колебаний к собственной добротности ОР. Сформулированы уравнения и апробированы соответствующие алгоритмы для расчета полей в ОР с дифракционной решеткой при наличии сторонних источников, пригодные для описания автоколебательных режимов в устройствах дифракционной электроники с нефиксированной структурой поля и учетом нерезонансного излучения. На примере модельных задач продемонстрировано применение полученных уравнений для расчета поля в ОР с дифракционной решеткой и анализа автоколебаний в генераторе с колебательной системой в виде простейшего двухмерного ОР – цилиндра с продольной щелью.

Литература

[1] *Шестопалов В.П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. – Киев: Наукова думка. – 1987. – 288 с.

[2] *Поединчук А.Е.* К спектральной теории открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями//Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. –№1. С. 66–70.

[3] *Кошпаренок В.Н., Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* Спектральная теория открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями//Журн. вычислител. математики и мат. физики. – 1985. – Т.25, №4. – С. 562–577.

[4] *Вайнштейн Л.А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 475 с.

[5] *Булдырев В.С., Фрадкин Э.Е.* Интегральные уравнения открытых резонаторов//Оптика и спектроскопия. – 1964. –Т.24, № 4. С. 583–596.

[6] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. – 324 с.

[7] *Лопухин В.М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. – М.: Гостехиздат, 1953. – 324 с.

[8] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Сов. радио, 1973. – 400 с.

[9] *Третьяков О.А.* Метод модового базиса//Радиотехника и электрон. – 1986. – Т.31, № 6. – С. 1071–1082.

[10] *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во ХГУ. 1971. – 400 с.

[11] *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. – Киев: Наук. думка, 1983. – 252 с.

[12] *Кошпаренок В.Н., Мележик П.Н., Шестопалов В.П.* Свободные колебания в цилиндре с продольными щелями. – Харьков, 1979. – 45 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; № 120.

[13] *Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* Теория возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами//Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 3. – С. 625–629

[14] *Fox A.G., Li T.* Resonant modes in a maser interferometer// Bell. Syst. Journal. – 1961. – 10, №2. – P. 453–488.

[15] *Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* К теории возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами. – Харьков, 1984. – 29 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; №262).

[16] *Лукин К.А., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* Теория возбуждения открытых резонаторов нелинейными токами//Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 3. – С.625–629.

[17] *Вайнберг Б.Р.* О собственных функциях оператора, отвечающих полюсам аналитического продолжения резольвенты//Мат. сб. – 1972, – Т. 87, № 2. – С. 293–308.

[18] *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руже //

Математический сборник.–1971. – Т. 84, № 4. – С. 607–629.
[19] *Шестопалов В.П.* Дифракционная электроника. – Харьков: "Вища школа", 1976. – 231 с.
[20] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. – М., Наука. – 1975. – 304 с.

Поступила в редколлегию 12.03.2018

Лукин Константин Александрович: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом нелинейной динамики электронных систем Института Радиофизика и электроника имени О. Я. Усикова НАН Украины. Почетный профессор кафедры Микроволновых технологий Харбинского политехнического института (КНР). Председатель Проблемной группы RTO/NATO по "Шумовым Радарам". Область научных интересов: динамический хаос в электронных и радиофизических системах; аналоговая и цифровая генерация и обработка случайных и хаотических сигналов; токовая неустойчивость в полупроводниковых структурах и генерация терагерцовых колебаний; шумовая радиолокация; наземные шумовые радары с синтезированием апертуры; методы микроволнового мониторинга и обнаружения предкатастрофических состояний природных и инженерных объектов (оползни, мосты, телевизионные башни, плотины, большие здания, ангары и др.); шумовая радарная томография; методы и системы передачи информации между автомобилями.

УДК 537.862; 537.86;621.373

Лукін К. О. **Збудження електромагнітних коливань у відкритих резонаторах внутрішніми джерелами** / К. О. Лукін // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 14–27.

Сформульовано та обґрунтовано новий підхід до вирішення проблем збудження відкритих резонаторів (ВР) внутрішніми джерелами. На основі спектральної теорії двовимірного ВР з ідеально провідними циліндричними дзеркалами виведено вираз для повної функції Гріна ВР, за допомогою якого отримані рівняння, що описують комплексні амплітуди резонансних мод і дозволяють отримати оцінки нерезонансного випромінювання джерела з ВР. Встановлено загальну структуру та характер залежності нерезонансної частини функції Гріна біля однієї резонансної моди від частоти збудження та Q-фактора цієї моди. Подібний підхід до вирішення задач збудження також розроблений для квазіоптичного ВР, який описується інтегральними рівняннями Фредгольма. Показано формальний перехід до рівнянь відомої теорії збудження ВР. Отримані та вивчені рівняння балансу потужностей для ВР з внутрішнім джерелом. Отримані рівняння для повільно варіюючих амплітуд резонансних мод, придатних для опису одномодових і багатомодових автоколивань у генераторах на основі ВР. Наведено приклади розв'язання деяких задач збудження коливань у ВР за допомогою запропонованого підходу.

Ключові слова: відкритий резонатор (ВР), резонансні моди ВР, нерезонансне випромінювання джерела з ВР.

Іл. 05. Бібліогр.: 20 найм.

UDK 537.862; 537.86;621.373

Lukin K. A. **Excitation of electromagnetic oscillations in open resonators by internal sources** / K. A. Lukin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17. № 1, 2. – P. 14–27.

A new approach to solving the problems of excitation of open resonators (OR) by internal sources is formulated and justified. On the basis of the spectral theory of a two-dimensional OR with ideally conducting cylindrical mirrors, an expression is derived for the total Green's function of the OR, with the help of which equations are obtained describing the complex amplitudes of the resonant modes and enabling estimation of the non-resonant radiation of a source from the OR. The general structure and character of the dependence of the non-resonant part of the Green's function in the vicinity of a single resonant mode on the excitation frequency and Q-factor of this mode are established. A similar approach to the solution of excitation problems is also developed for quasioptical ORs described by integral Fredholm equations. A formal transition to the equations of the well-known theory of OR excitation is shown. Power balance equations for an OR with an internal source are obtained and studied. Equations are obtained for slowly varying amplitudes of the resonant modes suitable for describing single-mode and multimode self-oscillations in OR-based generators. Examples of the OR excitation problems solving with the help of the proposed approach are presented.

Keywords: open resonator (OR), resonance modes of OR, nonresonant radiation of a source from the OR.

Fig. 05. Ref.: 20 items.