

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Артюха Антона Володимировича

«Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій

нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини»,

що представлена на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

### 1. Актуальність теми

Виключно важливу роль у розвитку науки і техніки відіграє вивчення законів руху рідини. Теоретичні та прикладні дослідження в цій області стимулюються потребами авіа- і кораблебудування, геофізики, біології, теплоенергетики, хімічної промисловості тощо.

У багатьох практичних випадках рідину можна вважати в'язким нестисливим ньютонівським середовищем і моделювати відповідні процеси за допомогою системи рівнянь Нав'є-Стокса. Дослідження цієї системи пов'язано з багатьма складнощами, які виникають через нелінійність системи і наявність малого параметра при старшій похідній. Також на практиці задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса часто доводиться розв'язувати в областях складної геометрії.

Зазвичай для чисельного розв'язання задач гідродинаміки використовують методи і алгоритми, у основі побудови яких лежать метод скінченних різниць (МКР) і класичний метод скінченних елементів (КМСЕ). При використанні МКР і КМСЕ, незважаючи на простоту їх алгоритмізації, виникають складнощі з точним урахуванням геометрії області течії: при переході до нової області треба наново генерувати сітку, а також замінювати криволінійні ділянки межі на вписані ламані.

Також для подальшого використання наближеного розв'язку бажано було отримувати його у аналітичному вигляді, що можна досягти завдяки використанню класу проєкційних методів. При цьому точно врахувати геометричну і аналітичну інформацію, що входить до постановки задачі, дозволяє використання конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій.

Отже, актуальною є задача розробки нових методів математичного моделювання нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини на основі методу  $R$ -функцій.





Дисертаційна робота виконана у Харківському національному університеті радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми “Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витокми” (ДР № 0111U002624, 2011 – 2013 рр.), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

## 2. Вірогідність і наукова новизна отриманих результатів

Автором дисертаційної роботи отримано ряд важливих результатів, наукова новизна яких полягає в наступному:

– на основі використання структурного методу  $R$ -функцій і проекційного методу Гальоркіна вперше розроблено метод розв’язання лінійної нестационарної задачі Стокса в однозв’язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею;

– на основі використання структурного методу  $R$ -функцій і проекційного методу Гальоркіна вперше розроблено метод розв’язання задачі розрахунку нестационарної течії в’язкої теплопровідної рідини (лінеарізована задача) в однозв’язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею;

– отримав подальший розвиток ітераційний метод розв’язання нелінійного диференціального рівняння для функції течії в однозв’язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів  $R$ -функцій, Гальоркіна та методу послідовних наближень у частині застосування до нестационарних задач; отримано умови та оцінки швидкості збіжності наближених розв’язків в нормі простору  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$  до єдиного узагальненого розв’язку відповідної задачі;

– отримав подальший розвиток ітераційний метод розв’язання системи нелінійних диференціальних рівнянь для функції течії та температури в однозв’язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів  $R$ -функцій, Гальоркіна та методу послідовних наближень у частині застосування до нестационарних задач; у нормі простору  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$  отримані умови та оцінки швидкості збіжності наближених розв’язків до єдиного узагальненого розв’язку відповідної задачі.

При цьому алгоритми запропонованих методів не змінюються при зміні геометрії області (змінюється лише функція, яка описує цю геометрію), структури розв’язку точно враховують крайові умови для функції течії та тем-



ператури, а наближені розв'язки мають аналітичний вигляд, що спрощує їх подальше використання для визначення характеристик течії.

**Вірогідність** отриманих результатів забезпечується строгістю математичних постановок задач із використанням основних положень функціонального аналізу та математичної фізики та доведеними в роботі теоремами. Всі результати підтверджені відповідними обчислювальними експериментами, результати яких порівняно з відомими із літератури точними розв'язками, результатами фізичних експериментів та чисельними розв'язками.

### **3. Практична цінність результатів роботи**

В дисертаційній роботі розроблено методи математичного моделювання плоскопаралельних нестационарних течій в'язкої теплопровідної рідини у однозв'язних областях, які дозволяють ефективно моделювати різні геофізичні, фізико-механічні, біологічні течії тощо. Результати досліджень впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах “Вибрані глави математичної фізики”, “Конструктивні засоби математики”, “Теорія  $R$ -функцій та її застосування” і “Чисельні методи” при проведенні лабораторних робіт, практичних занять, у курсовому і дипломному проектуванні.

### **4. Повнота викладення основних результатів дисертації**

Результати дисертаційної роботи достатньо повно відображені в публікаціях здобувача. За темою дисертаційної роботи опубліковано 23 наукових праці, в тому числі 6 статей в наукових фахових виданнях згідно з переліком фізико-математичних наук, 1 стаття у закордонному науковому виданні, яке входить до наукометричної бази VazTech, 16 тез доповідей, опублікованих у матеріалах наукових конференцій, 13 з яких є міжнародними. Публікації розкривають основний зміст дисертації та відповідають її основним положенням і висновкам.

### **5. Оцінка змісту дисертації та автореферату**

Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків по роботі, списку використаних джерел і п'яти додатків.

У першому розділі розглянуто основні існуючі математичні моделі нестационарних течій в'язкої теплопровідної рідини, а також огляд існуючих методів їх чисельного аналізу; наведено основні відомості про  $R$ -функції та



огляд робіт, у яких метод  $R$ -функцій застосовувався у обчислювальній гідродинаміці.

У другому розділі розроблено метод чисельного аналізу для лінійної початково-крайової задачі відносно функції течії (лінеаризація Стокса), яка є математичною моделлю повільної плоскопаралельної нестационарної в'язкої течії в однозв'язній області. Розроблений метод заснований на сумісному використанні методу  $R$ -функцій і методу Гальоркіна для нестационарних задач. Побудовано структуру розв'язку задачі, яка точно задовольняє крайові умови для функції течії, описано алгоритм апроксимації невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна, доведено існування і єдиність побудови гальоркінських наближень. Також отримано оцінки норми наближеного розв'язку, доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку задачі у просторі  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$  і сформульовано умови застосовності методу  $R$ -функцій. Ефективність розробленого методу проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі з відомим точним розв'язком і задачі для трьох тестових областей: квадрата, параболічного сегменту і трапеції, причому результати отримані для квадрата порівняно з відомими із літератури чисельними розв'язками.

У третьому розділі розглянуто повільну плоскопаралельну нестационарну в'язку теплопровідну течію в однозв'язній області. Для відповідної лінійної початково-крайової задачі відносно функції течії та температури розроблено метод чисельного аналізу, який заснований на сумісному використанні методів  $R$ -функцій і Гальоркіна. Побудовано структуру розв'язку задачі, яка точно задовольняє крайові умови для функції течії та температури, описано алгоритм апроксимації невизначених компонент структури методом Гальоркіна, доведено існування і єдиність побудови гальоркінських наближень, отримано оцінки норми наближеного розв'язку, доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку задачі у просторі  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$  і сформульовано умови застосовності методу  $R$ -функцій. Розроблений метод проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі, яка розглядається у трьох тестових областях.

У четвертому та п'ятому розділах на базі розроблених у попередніх розділах методах побудовано ітераційний чисельний метод аналізу нелінійних задач для функції течії і функції течії та температури: вихідні нелінійні



задачі на основі методу послідовних наближень за нелінійністю замінюються на послідовність лінійних задач. Для кожної з задач доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса і при малих числах Рейнольдса, Пекле та Грасгофа до єдиних узагальнених розв'язків. Ефективність розроблених методів проілюстровано обчислювальними експериментами для трьох тестових областей при різних числах Рейнольдса і числах Рейнольдса, Пекле та Грасгофа, а також у четвертому розділі проведено чисельний аналіз для задачі з відомим точним розв'язком. Крім того, у п'ятому розділі розглянуто застосування розроблених методів до математичного моделювання прикладних задач, а саме до моделювання течії в канавці підшипника, вільної конвекції у розплавленому склі та вільної конвекції у порожнині з теплопровідними стінками.

За структурою та оформленням дисертація та автореферат відповідають установленим вимогам. Автореферат повністю висвітлює основні положення та результати дисертації.

На мій погляд, заслуговує на увагу в майбутній роботі дисертанта використання інтерлінації функцій для розв'язання розглянутих у роботі початково-крайових задач, що теж дозволило б побудувати чисельний метод, при реалізації якого точно задовольняються крайові умови і зберігається потрібний клас диференційовності.

## **6. Зауваження до змісту дисертації та автореферату**

1. При формулюванні умов застосовності методу  $R$ -функцій (пп. 2.2, 3.2) для розв'язання лінеаризованих задач для функції течії та функції течії і температури не досліджено, які саме системи  $R$ -функцій при цьому доцільно використовувати.

2. У роботі результати обчислювальних експериментів подаються лише у вигляді ліній рівня і поверхонь функції течії, завихореності і температури. Крім того, за отриманим наближеним розв'язком будується поле швидкостей. Бажано було б розглянути використання знайдених наближень до функції течії для знаходження інших характеристик потоку, зокрема, тиску і компонент тензору напружень.

3. У четвертому розділі при поданні результатів обчислювальних експериментів розв'язування тестових задач для нелінійного рівняння відносно функції течії не наведено кількість ітерацій, за яку зійшлися послідовні наближення з заданою точністю.

4. У п'ятому розділі при побудові ітераційного методу розв'язання системи нелінійних рівнянь відносно функції течії та температури розглядається випадок, коли на всій межі для температури задано умову Діріхле, але у п. 5.4 розроблений метод застосовується до розв'язання прикладних задач з умовою третього роду та умовами спряження для температури.

5. В авторефераті при огляді п'ятого розділу не наведено результатів обчислювальних експериментів розв'язування тестових і прикладних задач для нелінійної системи рівнянь відносно функції течії та температури.

Зазначені зауваження не впливають на загальне позитивне враження від дисертаційної роботи.

### 7. Загальний висновок

Вважаю, що дисертаційна робота «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини» є завершеною актуальною науковою працею, в якій одержано нові науково обґрунтовані результати, що представляють вагомий внесок в методи математичного моделювання нестационарних течій в'язкої теплопровідної нестисливої рідини.

Дисертація відповідає паспорту спеціальності та всім вимогам до кандидатських дисертацій згідно з "Порядком присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника" Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 № 567, а її автор, Артюх Антон Володимирович, заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,  
завідувач кафедри вищої та прикладної математики  
Української інженерно-педагогічної академії,

д-р фіз.-мат. наук, проф.

О.М. Литвин

