

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЖИЛА ОЛЬГА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 537.87

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛЮВАННІ АСИМЕТРИЧНИХ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ЯВИЩ У НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

01.04.03 – радіофізика

фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О. В. Жила

Науковий керівник:

Нерух Олександр Георгійович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Жила О.В. Метод інтегральних рівнянь у моделюванні асиметричних електромагнітних явищ у неоднорідному середовищі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 «Радіофізика». – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2018

У дисертаційній роботі запропоновано розв'язання актуальної науково-практичної задачі перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі, що має несиметричну форму, у нестационарному середовищі з плоскими межами. Об'єктом дослідження в роботі виступають нестационарні електромагнітні процеси в неоднорідних нестационарних середовищах; предметом дослідження – перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі у неоднорідному нестационарному середовищі.

Методи дослідження та моделювання імпульсу Ейрі у нестационарних електромагнітних процесах оснований на використанні теорії інтегральних рівнянь, а саме на застосуванні інтегрального рівняння Вольтерра другого роду до розв'язання поставленої електродинамічної задачі. Такі інтегральні рівняння містять у собі початкові та граничні умови та мають гарну фізичну наочність, що суттєво полегшує побудову алгоритму розв'язання задач. Важливою особливістю цього методу є також його універсальність відносно вільного члена, що описує первинне електромагнітне поле. Це дозволяє застосовувати метод інтегральних рівнянь до розв'язання електродинамічних задач про перетворення різноманітних імпульсів у неоднорідному нестационарному середовищі, у тому числі й імпульсів Ейрі. Для розв'язання інтегрального рівняння виоркистовується метод резольвенти, а також інші методи математичної фізики.

У роботі сформульовано та розв'язано початково-граничну електродинамічну задачу перетворення електромагнітного імпульсу у неоднорідному нестационарному середовищі методом інтегральних рівнянь з включеними початковими та граничними умовами. Отримано симетричну функцію Гріна початково-граничної задачі у параксіальному наближенні. За допомогою неї розглянуто параксіальне наближення інтегрального рівняння Вольтерра другого роду і застосовано до задачі про взаємодію електромагнітного імпульсу Ейрі з нестационарним діелектричним шаром. Отримано спектри імпульсів, що пройшли в шар і відбилися від нього. Проведено аналіз спектрів у середовищах з різною оптичною щільністю, досліджено залежність спектрів від товщини шару. Показано, що при збільшенні товщини шару на деякій частоті виникає складова поля, амплітуда якої значно виділяється з-поміж складових поля з іншими частотами. Також відбувається зміщення максимуму спектру відбитого імпульсу Ейрі в область малих частот.

Застосовано метод інтегральних рівнянь Вольтерра до розв'язання задачі про взаємодію електромагнітного імпульсу Ейрі з плоскою межею, що виникає в нульовий момент часу.

Показано, що задача про перетворення несиметричного імпульсу ускладнюється наявністю більш ніж однієї асиметрії. Така ситуація може бути обумовлена появою межі розділення середовищ або нестационарністю середовища, утворюючи при цьому потрібну асиметрію задачі, а саме: по-перше, асиметрія, що полягає в асиметричності первинного імпульсу Ейрі, який має неперіодичну структуру у вигляді головного пелюстка і осцилюючого хвоста, що затухає при збільшенні значень аргументу. По-друге, асиметрія полягає в асиметричності об'єкта дифракції, а саме, в наявності межі розділення середовищ з різними параметрами. По-третє, асиметрична поведінка в часі первинного імпульсу. Вона характеризується тим, що імпульс починає взаємодіяти з неоднорідністю в певний момент часу.

Виявлено, що положення імпульсу Ейрі відносно плоскої межі середовищ контролюється стартовим параметром, який характеризується моментом початку дії імпульсу та місцем розташування джерел, що генерує імпульс. Показано, що при додатніх значеннях стартового параметра головна частина первинного імпульсу Ейрі перебуває глибоко у середовищі, де діелектрична проникність змінилась у нульовий момент часу. У протилежному випадку, при від'ємних значеннях цього параметра, передній фронт імпульсу не досягає межі до нульового моменту часу.

Досліджено характер поширення імпульсів, що пройшли через межу і відбилися від неї. Обчислено й проаналізовано потоки енергії, що переносяться імпульсом. Проведено аналіз асимптотичної формули для великих від'ємних значень аргументу функції Ейрі. Шляхом числового інтегрування промодельоване переміщення максимуму потоків енергії як первинного, так і того, що пройшов імпульсів.

Досліджено більш складний випадок, коли нестационарна межа рухається, починаючи з нульового моменту часу. Показано вплив вибору значення стартового параметра на фізичну картину взаємодії імпульсу Ейрі з межею, що рухається. Шляхом вибору оптимальних значень стартового параметра наочно проілюстровано процес взаємодії імпульсу Ейрі з межею.

Детально досліджено і описано більш складний тип руху, а саме випадок, коли межа рухається по релятивістському рівноприскореному закону. Це випадок плавної нестационарності, коли швидкість межі поступово змінюється від нульового значення до значення швидкості імпульсу. Отримано аналітичні вирази для трансформованих імпульсів Ейрі рухомою межею та показано, що в момент досягнення межею швидкості імпульсу, утворюється два нескінченні розриви. Встановлено, що в цей момент відбувається розрив «хвоста» імпульсу так, що по одну сторону від межі залишається відсічений головний пелюсток імпульсу, а з іншої сторони – осцилюючий хвіст. Такі розриви пояснюються наявністю особливих точок у виразах, що описують електромагнітне поле в момент взаємодії імпульсу та

межу. Крім того, лінії розривів утворюють дві просторово-часові смуги, що перетинаються. В області перетину цих смуг електромагнітне поле дорівнює нулю.

Останній розділ дисертаційної роботи містить дослідження перетворення імпульсу Ейрі нестационарним плоским шаром діелектрика з постійними межами та межами, що рухаються. Показано, що в шарі з постійними межами утворюються чотири імпульси, один з яких гасить первинний імпульс згідно принципу погашення, другий переміщується в тому ж напрямку, що і первинний, а два останніх, що утворились у результаті стрибка діелектричної проникності, переміщуються у протилежних напрямках. Отримано загальну аналітичну формулу для обчислення електромагнітного поля у будь-якій точці шару та більш детально досліджено властивості імпульсу на початковому етапі взаємодії з шаром.

Показано також, що просторово-часова структура імпульсу значно ускладнюється, якщо межі шару не постійні, а рівномірно рухаються відносно одна одної зі сталою швидкістю, починаючи з нульового моменту часу, і змикаються в одній точці в певний момент часу. Отримано аналітичний вираз для поля в будь-якій точці шару, що дозволяє детально дослідити структуру поля в різних зонах. Із аналізу отриманих результатів випливає, що структура поля в такому шарі складніша, ніж у випадку, коли його межі постійні, а саме: ускладнюється вираз для амплітуди імпульсу; ускладнюється часова залежність в аргументах функцій Ейрі; у випадку шару з межами, що рухаються, залежність від товщини шару набагато складніша, ніж у шарі з постійними межами. Після одноразового та дворазового відбиття від меж шару структура імпульсу ще більш ускладнюється появою вторинних пелюстків та додатковими коливаннями. Нескінченна кількість таких відбиттів вкладається в шар за скінчений проміжок часу, так як межі шару замикаються.

Отримані аналітичні результати дозволять більш обґрунтовано застосовувати імпульси Ейрі до вирішення практичних задач.

Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 19 наукових працях: серед яких 6 статей у спеціалізованих наукових журналах (з них 3 статті у закордонних наукових виданнях – Scopus), 13 тез доповідей на міжнародних та вітчизняних наукових конференціях (з них 6 тез – Scopus).

Ключові слова: діелектричний шар, інтегральне рівняння Вольтерра, резольвента, імпульс Ейрі, нестационарне середовище, електромагнітне поле, асиметрія.

ABSTRACT

Zhyla O.V. Integral equation method in modeling of asymmetric electromagnetic phenomena in an inhomogeneous medium. – Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

The dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on the speciality 01.04.03 «Radiophysics».–Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019

The thesis proposed the solution of the actual scientific and practical problem of converting an Airy electromagnetic pulse, which has the asymmetrical form, in a non-stationary medium with flat boundaries. The object of research in the work are non-stationary electromagnetic processes in non-uniform non-stationary media; the subject of research is the transformation of an Airy electromagnetic pulse in a non-uniform non-stationary medium.

Methods of research and modeling of the Airy pulse in non-stationary electromagnetic processes based on the use of the theory of integral equations, namely the application of the second-kind Volterra integral equation to the solution of the stated electrodynamic problem. Such integral equations include the initial and boundary conditions and have good physical visibility, which greatly simplifies the construction of an algorithm for solving problems. An important feature of this method is also its universality to the free term describing the primary electromagnetic field. This makes it possible to apply the method of integral equations to the solution of electrodynamic problems of transforming various pulses in a non-uniform and non-stationary medium, including Airy pulses. To solve the integral equation the resolvent method, as well as other methods of mathematical physics, are used.

The initial boundary electrodynamic problem of transforming an electromagnetic pulse in an inhomogeneous nonstationary medium was formulated and solved in the thesis by the method of integral equations with initial and boundary conditions included. A symmetric Green function is obtained for the

initial-boundary problem in the Paraxial approximation. With the help of it, the Paraxial approximation of the Volterra integral equation of the second kind was considered and applied to the problem of the interaction of an Airy electromagnetic pulse with the nonstationary dielectric layer. The spectra of the pulses transmitted into the layer and reflected from it were obtained. Spectra were analyzed in the media with different optical densities, and the dependence of the spectra on the layer thickness was studied. It is shown that with an increase in the layer thickness at a certain frequency, a field component arises, the amplitude of which is significantly distinguished among the field components with other frequencies. The shift of the maximum of the spectrum of the reflected Airy pulse to the region of low frequencies also occurs.

The method of Volterra integral equations is applied to the solution of the problem of the interaction of an Airy electromagnetic pulse with a flat boundary, arises at zero time.

It is shown that the problem of converting an asymmetric pulse is complicated by the presence of more than one asymmetry. This situation may be caused by the appearance of the new boundary between the media or the nonstationarity of the medium, thus forming a triple asymmetry of the problem. The first asymmetry is the asymmetry of the primary Airy pulse, which has a non-periodic structure in the form of the main lobe and an oscillating tail fading with increasing values of the argument. The second asymmetry is the asymmetry of the diffraction object, namely, in the presence of the boundary between media with different parameters. The third type is asymmetric behavior in time of the primary pulse. It is characterized by the fact that the pulse begins to interact with heterogeneity at a certain point in time.

It is revealed that the position of the Airy pulse relative to the flat boundary of the media is controlled by the starting parameter, which is characterized by the instant of the onset of the pulse and the location of the sources, which generates a pulse. It is shown that for positive values of the starting parameter, the main part of the primary Airy pulse is deep in the medium, where the dielectric constant

changes at zero time. Otherwise, at negative values of this parameter, the leading edge of the pulse reaches the limit at zero time.

The nature of the propagation of pulses that have passed through the border and are reflected from it is investigated. The energy flow carried by the pulse is calculated and analyzed. The analysis of the asymptotic formula for large negative values of the argument of the Airy function is carried out. By numerical integration, the displacement of the maximum energy fluxes of both the primary and the transmitted pulses is simulated.

The more complex case, when the non-stationary boundary moves, starting from the zero moment of time is investigated. The influence of the choice of the starting parameter value on the physical picture of the interaction of the Airy pulse with the boundary that moves is shown. By choosing the optimal values of the starting parameter, the process of interaction of the Airy pulse with the limit is clearly illustrated.

A more complex type of motion, namely, the case when the boundary moves along a relativistic uniformly accelerated law, is investigated and described in detail. This is a case of smooth nonstationarity, when the velocity of the boundary gradually changes from zero to the value of the pulse velocity. Analytical expressions are obtained for transformed Airy pulses by a moving boundary, and it is shown that at the time the boundary reaches the pulse speed, two infinite discontinuities are formed. It was established that at this moment there is a break of the “tail” of the pulse so that the main lobe of the pulse remains cut off on the one side of the border, and the oscillating tail on the other. Such discontinuities are explained by the presence of singular points in the expressions describing the electromagnetic field at the moment of interaction of the pulse and the boundary. In addition, the break lines form two space-time bands that intersect. At the intersection of these bands, the electromagnetic field is zero.

The last section of the thesis contains the study of the transformation of the Airy pulse by a nonstationary flat dielectric layer with constant boundaries and limits of moving objects. It is shown that in a layer with constant boundaries four

pulses are formed, one of which dampens the initial pulse according to the cancellation principle, the second moves in the same direction as the primary one, and the last two, which were formed as a result of a jump in dielectric constant, move in opposite directions. A general analytical formula was obtained for calculating the electromagnetic field at any point of the layer and the pulse properties at the initial stage of interaction with the layer were studied in more detail.

It is also shown that the space-time structure of the pulse becomes much more complicated if the layer boundaries are not constant, but move uniformly relative to each other at a constant speed, starting from the zero time point, and merge at one point at a certain time point. An analytical expression for the field at any point of the layer allows us to investigate in detail the structure of the field in different zones. From the analysis of the obtained results it follows that the structure of the field in such a layer is more complicated than in the case when its boundaries are constant, namely the expression for the amplitude of the pulse is complicated; the time dependence in the arguments of the Airy functions is complicated; in the case of a layer with moving boundaries, the dependence on the layer thickness is much more complicated than in a layer with constant limits. After single and double reflection from the layer boundaries, the structure of the pulse is become more complicated by the appearance of secondary lobes and additional oscillations. An infinite number of such reflections fit into the layer in a finite period of time, since the boundaries of the layer are closed.

The obtained analytical results will allow more reasonably apply Airy pulses to the solution of practical problems.

The thesis materials are completely presented in 19 scientific works: among which there are 6 articles in the specialized scientific journals (3 of them are in foreign scientific journals - Scopus), 13 abstracts of the reports at international and native scientific conferences (6 of them are Scopus).

Keywords: dielectric layer, Volterra integral equation, resolvent, Airy pulse, nonstationary medium, electromagnetic field, asymmetry.

ЗМІСТ

ВСТУП	13
РОЗДІЛ 1. ІМПУЛЬСНІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ СИГНАЛИ У НЕОДНОРІДНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СЕРЕДОВИЩАХ	19
1.1. Імпульси Ейрі як моделі імпульсних сигналів зі складною формою.....	20
1.2. Формулювання початково-граничної задачі для імпульсних електромагнітних сигналів.....	26
1.3. Обґрунтування теми дисертаційної роботи	29
Висновки по розділу	30
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ	32
2.1. Симетрична функція Гріна для початково-граничної електродинамічної задачі у параксіальному наближенні	32
2.2. Метод інтегральних рівнянь у розв'язанні нестационарних граничних задач.....	37
2.3. Метод резольвенти для розв'язання інтегрального рівняння нестационарної граничної задачі.....	54
Висновки по розділу	62
РОЗДІЛ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСІВ ПЛОСКОЮ МЕЖЕЮ РОЗДІЛЕННЯ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ.....	64
3.1. Трансформація імпульсу Ейрі плоскою межею нестационарного діелектрика.....	64
3.2. Просторово-часова структура імпульсу Ейрі у	

	12
нестационарному середовищі	70
3.3. Особливості перетворення імпульсу Ейрі межею, що рівномірно.....	
рухається	88
3.4. Особливості перетворення імпульсу Ейрі плоскою границею, що	
рухається рівноприскорено	98
Висновки по розділу	106
РОЗДІЛ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСУ ЕЙРІ НЕСТАЦІОНАРНИМ	
ПЛОСКИМ ШАРОМ ДІЕЛЕКТРИКА	108
4.1. Дослідження перетворення імпульсу Ейрі плоским шаром	
діелектрика у параксіальному наближенні	101
4.2. Аналіз спектрів імпульсів, дифрагованих на нестационарному	
діелектричному шарі у параксіальному наближенні	115
4.3. Точне (непараксіальне) розв'язання задачі про взаємодію	
імпульсу Ейрі з нестационарним плоским шаром.....	119
4.4. Просторово-часова структура імпульсу Ейрі в шарі з межами, що	
рівномірно рухаються відносно одна одної	131
Висновки по розділу	139
ВИСНОВКИ.....	140
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	143
ДОДАТОК А. Список власних публікацій.....	162

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження взаємодії електромагнітних полів з неоднорідними нестационарними середовищами має фундаментальне значення і являється базовим процесом у багатьох прикладних задачах електродинаміки. Це сприяє розвитку лазерних технологій, оптоволоконної техніки, фотоніки, а також формуванню широкого спектра їх застосувань в екології та медицині.

Вивчення нестационарних електромагнітних явищ диктується новими сучасними проблемами комунікації. Застосування оптичних квантових генераторів, які стали новими потужними джерелами випромінювання хвиль в оптичному діапазоні, широкосмугові й завадостійкі оптичні мережі, у яких генерація, обробка та передача сигналів відбувається в оптичному діапазоні довжин хвиль, є важливими напрямками розвитку оптики. Оптичні мережі можуть застосовуватися у гідроакустичних системах зв'язку для моніторингу морського шельфу, у пристроях для керування мікрочастинками - лазерних і оптичних пінцетах, оптичних і квантових комп'ютерах та ін. Після винаходу А. Ашкіном в 1986 році першого лазерного пінцета, заснованого на одномодовому пучку Гауса, концепція лазерних пучків розвивалася за рахунок використання лазерних мод більш високого порядку. В 2018 році А. Ашкіну була присуджена Нобелівська премія з фізики « за винахід оптичного пінцета та його застосування в біологічних системах».

В 2007 році був фізично реалізований ще один тип лазерних пучків – експоненціальний світловий пучок Ейрі, що має такі унікальні властивості як самоприскорення, самовідновлення (самолікування) і недиспергуюче поширення. Цей пучок розповсюджується в просторі по параболічній траєкторії, зберігаючи свою форму. Інша не менш цікава властивість пучка Ейрі – самолікування - полягає у відновленні своєї початкової форми при проходженні через перешкоду.

Особливий інтерес викликають застосування імпульсу Ейрі в

неоднорідних середовищах, а саме при проходженні імпульсів через різні прилади й обладнання (лінзи, дзеркала та ін.). Це важливо в задачах оптичного неруйнівного контролю, маніпулюванні мікрочастками та діагностиці в біохімії для сортування мікро- і наночасток, у біомедицині для керування мікропотоками рідин і для відбору живих клітин, а також у дослідженні атмосфери.

Поряд із просторовою неоднорідністю принципове значення має вплив нестационарності середовища на поширення електромагнітних імпульсів. Результати таких досліджень становлять як науковий, так і прикладний інтерес, оскільки зміна в часі може якісно впливати на структуру імпульсу.

Для детального дослідження властивостей імпульсів у неоднорідних нестационарних середовищах потрібні математичні методи, що дозволяють аналізувати такі складні електромагнітні процеси. Одним з таких методів є метод інтегральних рівнянь Вольтерра, що дозволяє будувати й досліджувати розв'язки електродинамічних задач макроскопічної електродинаміки. Такі інтегральні рівняння містять у собі початкові й граничні умови та мають фізичну наочність, що суттєво полегшує побудову алгоритму розв'язання задач. Важливою особливістю цього методу є також його універсальність відносно вільного члена, що описує первинне електромагнітне поле. Це дозволяє застосовувати метод інтегральних рівнянь до розв'язання електродинамічних задач про перетворення різноманітних імпульсів у неоднорідному нестационарному середовищі, у тому числі й імпульсів Ейрі.

Таким чином, тема дисертаційних досліджень, спрямованих на дослідження властивостей електромагнітних імпульсів у нестационарних неоднорідних середовищах, є *актуальною*.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційні дослідження пов'язані з фундаментальною НДР, яка виконувалась у Харківському національному університеті радіоелектроніки в

лабораторії «Електроніка-Оріон» на кафедрі фізичних основ електронної техніки (ФОЕТ): «Концепція розвитку резонансної компресії імпульсів та інструментарій для отримання потужних надкоротких мікрохвильових імпульсів у X, Ku та міліметровому діапазонах», 2017–2019 рр. (ДР № 0117U002525), у якій здобувач була виконавцем.

Мета і задачі роботи.

Метою роботи є дослідження особливостей поширення електромагнітних імпульсів Ейрі у нестационарних неоднорідних середовищах.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні *задачі*:

- дослідити властивості імпульсу Ейрі у результаті його взаємодії з нерухомою плоскою межею розділення діелектричних середовищ;
- провести дослідження властивостей імпульсу Ейрі у випадку рівномірного прямолінійного руху межі розділення середовищ;
- провести дослідження властивостей імпульсу Ейрі при рівноприскореному прямолінійному русі межі;
- дослідити перетворення імпульсу Ейрі у плоскошаруватій структурі з постійними межами;
- дослідити перетворення імпульсу Ейрі у плоскому діелектричному шарі з межами, що рівномірно рухаються відносно одна одної.

Об'єкт дослідження – нестационарні електромагнітні процеси в неоднорідних нестационарних середовищах.

Предмет дослідження – перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі у неоднорідному нестационарному середовищі.

Методи дослідження. Для дослідження та моделювання імпульсу

Ейрі у нестационарних електромагнітних процесах в даній роботі застосовується метод інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Для розв'язання інтегральних рівнянь використовується метод резольвенти, а також інші методи математичної фізики.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розв'язано просторово-часову задачу про перетворення імпульсу Ейрі у неоднорідному нестационарному середовищі методом інтегральних рівнянь та резольвенти.

2. Вперше отримано аналітичні вирази, які описують просторово-часову структуру імпульсу Ейрі в результаті його взаємодії з нерухомою плоскою межею з урахуванням його початкового положення у вільному просторі.

3. Вперше розв'язано задачу про перетворення імпульсу Ейрі нестационарною межею розділення середовищ, що рухається рівномірно.

4. Вперше отримано розв'язок задачі про перетворення імпульсу Ейрі нестационарною межею розділення середовищ, що рухається рівноприскорено.

5. Вперше отримано розв'язки задачі про перетворення імпульсу Ейрі після його проходження у діелектричний шар та детально досліджено його властивості на початковому етапі взаємодії із шаром.

6. Вперше отримано аналітичні вирази, які описують перетворення імпульсу Ейрі діелектричним шаром, межі якого рівномірно рухаються відносно одна одної.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати дослідження електромагнітного імпульсу Ейрі можуть бути застосовані у дистанційних методах дослідження атмосфери (створення штучних блискавок для «розрядки» хмар, пошарове дослідження атмосфери), в експериментальних дослідженнях плазмових утворень, у

процесах керування мікрочастинками, в біохімії, в медицині (видалення біологічних клітин із заданої області, лазерна терапія й ін.), в обробці матеріалів, при створенні оптичних обчислювальних пристроїв та ін.

Особистий внесок здобувача.

У наукових статтях і матеріалах доповідей на конференціях, опублікованих у співавторстві, автору належать такі результати:

у роботах [2-5,15,17-19] – одержання точних розв’язків задачі про перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі у результаті нормального падіння на плоску межу діелектрика; розв’язання точної просторово-часової задачі про взаємодію електромагнітного імпульсу Ейрі з плоскою межею, швидкість якої поступово досягає швидкості імпульсу; аналіз отриманих аналітичних розв’язків і моделювання отриманих результатів;

у роботах [1,7-14,16] – дослідження особливостей перетворення імпульсу Ейрі у діелектричному шарі з постійними межами, одержання точних розв’язків і моделювання результатів;

у роботі [6] – одержання точних виразів, які описують поширення імпульсу Ейрі в шарі, межі якого рівномірно рухаються; проведення порівняльного аналізу структури поля в шарі з постійними межами, та межами, що рухаються .

Апробація результатів дисертації.

Викладені в дисертації результати доповідались та були обговорені на міжнародних конференціях:

- XXIII International Workshop on Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modelling OWTNM – 2015 (17-18 квітня 2015, Лондон, Великобританія);

- 19-й международный молодежный форум «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (21-22 квітня 2015 , м. Харків, Україна);

- X Anniversary International Conference on Antenna Theory and

Techniques ICATT – 2015 (21-24 квітня 2015 , м. Харків, Україна);

- Scientists Forum on Applied Physics International Young YSF-2015 (29 вересня – 2 жовтня 2015 , м. Дніпр, Україна);

- 20-й юбилейный международный молодежный форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (19-22 квітня 2016, м. Харків, Україна);

- XXIV International Workshop on Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modelling OWTNM – 2015 (20-21 травня 2016 , м. Варшава, Польща);

- 9th International Kharkiv Symposium on Physician Dengeering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves MSMW-2016 (20-24 червня 2016 м., Харків, Україна);

- 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals UWBUSIS – 2016 (5-11 вересня 2016 , м. Одеса, Україна);

- 7th Intern. Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers CAOL-2016 (12-15 вересня 2016, м. Одеса, Україна);

- Young Scientists Forum on Applied Physics International YSF-2016 (10-14 жовтня 2016, м. Харків, Україна);

- XXV International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling OWTNM – 2017 (5-6 квітня 2017, Эйндохвен, Нідерланди);

- International Conference on Antenna Theory and Techniques ICATT – 2017 (24-27 травня 2017, м. Київ, Україна).

Публікації.

Матеріали дисертації опубліковано в 19 наукових працях, серед яких 6 статей у спеціалізованих наукових журналах [1–6] (з них 3 статті в закордонних наукових виданнях [1,3,5] – Scopus), 13 тез доповідей на міжнародних конференціях [7–19] (з них [7,10,13,14,15,16] – Scopus).

РОЗДІЛ 1

ІМПУЛЬСНІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ СИГНАЛИ У НЕОДНОРІДНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розвиток науки і телекомунікаційних технологій вимагає підвищення пропускної здатності провідних і безпроводних каналів зв'язку [1–8], а також створення пристроїв, які дозволяють впливати на об'єкт із мінімальними часовими інтервалами [9–11]. Досягнення електронної техніки ХХ століття дозволили одержати наносекундні імпульсні сигнали [12, 13], а надалі фемтосекундні електромагнітні випромінювання [14, 15]. На даний момент вже досліджені процеси формування й генерації фемтосекундних імпульсів та їх взаємодія з наноматеріалами у вигляді вуглецевих нанотрубок, нанониток, квантових ям [16–20] тощо.

Стрімкий розвиток нанотехнологій з використанням ультракоротких імпульсів сприяло дослідженню процесів поширення імпульсів зі складною формою у неоднорідних середовищах [21–23], розробці й впровадженню відповідного обладнання, здатного приймати й генерувати такі сигнали [24]. Особливої уваги заслуговує поширення електромагнітного випромінювання в нестационарних структурах [25–26].

Поряд з відкриттям фемтосекундних імпульсів було розпочато дослідження нового оптичного імпульсу Ейрі, який має такі унікальні властивості як самоприскорення, самолікування й недифрагированное поширення [27]. Але ці властивості імпульс Ейрі демонструє у параксіальному наближенні [28]. Тому залишається відкритим, важливим і актуальним питання про дослідження властивостей імпульсу Ейрі у неоднорідному нестационарному середовищі без використання такого наближення.

1.1 . Імпульси Ейрі як моделі імпульсних сигналів зі складною формою

У початок історії практичної електроніки покладено відкриття й вивчення електромагнітних хвиль, теоретично передбачених М. Фарадеєм і Дж. Максвеллом і практично доведених і реалізованих Г.Герцом. У цей час імпульсні електромагнітні сигнали мають місце у бездротових радіопередаючих пристроях, до яких відносяться супутникове телебачення, стільникові телефони, безпроводні мережі передачі даних тощо. Провідне радіопередаюче обладнання у вигляді оптоволоконних і кабельних систем передачі даних лежить в основі інфраструктури сучасних підприємств для передачі/обробки/одержання даних через Інтернет, трансляції потокового відео/аудио [29–32].

Поширення електромагнітних сигналів складної форми у неоднорідних нестационарних середовищах становить суттєвий інтерес у багатьох галузях науки й техніки, і інтерес до них не слабшає і сьогодні. Активно розвивається такий напрямок, як імпульсне зондування, яке застосовується у біохімії при дослідженні фізико-хімічних властивостей середовища з використанням пікосекундних імпульсів [33], при дослідженні неоднорідних середовищ [34], у геології для дослідження неоднорідних геологічних середовищ із частотно залежними електричними й магнітними властивостями [35, 36] тощо. Актуальним напрямком розвитку лазерної фізики є також розробка нових режимів генерації оптичних імпульсів різної частоти й тривалості [37, 39].

У цей час розвиток технологій тісно пов'язаний з імпульсною наноелектронікою. Покладена в її основу імпульсна техніка відіграє дуже важливу роль у задачах по збору, обробці й аналізу інформації. Сучасна нанотехніка дозволяє створювати напівпровідникові структури з унікальними нелінійно-оптичними властивостями [40]. Шляхом впливу

лазерними імпульсами на структури можна одержувати наночастинки металів, газів, рідин [41–45] для створення наноструктур і наноповітрянок [46], змінювати їхню форму, розмір, внутрішню структуру, а також вивчати їхню динаміку, оптичні й електромагнітні властивості.

Широке застосування має також метод імпульсної абляції твердих мішеней у газі або рідині. Цей метод полягає у фізичній і хімічній модифікації речовини, що відбувається у результаті поглинання сфальцьованого лазерного випромінювання у манометровому масштабі, і є відносно простим методом в одержанні нанокристалів, нанокластерів та інших складних матеріалів [47, 48]. Широке застосування знаходить також оптична лазерна нанолітографія, спрямована на створення інтегральних мікросхем з нанометричними параметрами [49, 50], а також її похідні: наносферна, нанопечатна, скануюча лазерна нанолітографія [51–53]. Особливе місце серед перелічених вище методів займає останній – метод лазерної нанолітографії, за допомогою якого можна одержувати наноотвори або нанолінії у плівках або прозорих скельцях [54, 55].

Паралельно нанотехнологіям сьогодні активно розвивається лазерна оптика більш коротких пікосекундних імпульсів, а також генерація надкоротких імпульсів тривалістю в кілька фемтосекунд [56]. Одним зі способів переходу до таких імпульсів є метод синхронного накачування лазерів ультракороткими імпульсами, що забезпечує генерацію пікосекундних імпульсів високої точності [57]. Їх можна підсилювати до фемтосекундних імпульсів, перетворювати в інфрачервоний та ультрафіолетовий діапазони, а також досліджувати їх вплив на різні нанооб'єкти [58].

Вражаючі успіхи досягнуто у застосуванні фемтосекундних лазерів у метрології. В 2014 р. на базі ННЦ ХФТІ створено фемтосекундний лазер, який генерує імпульси тривалістю 17,3 фс на довжині хвилі 800 нм [59]. Головною особливістю роботи цього лазера у режимі самосинхронізації є отримання стабільної «гребінки» еквідістантних поздовжніх мод.

Представлені в цих роботах характеристики фемтосекундного лазера визначають широкий спектр їх застосування у різних галузях науки й техніки [60–64]. Так, у роботі [65] описано методику АЧХ широкосмугових фотоприймачів у діапазоні 200×10^9 Гц із точністю 2% і реалізовано при вимірюванні АЧХ високочастотного фотодіода фірми «Hamamatsu».

Не менш важливою областю застосування лазерних імпульсів є медицина: рентгенівські лазери, лазерна імплантація, лазерна хірургія на основі газових лазерів, нетеплове електромагнітне випромінювання міліметрового діапазону для ефективного терапевтичного лікування хвороб шляхом підвищення імунологічних здатностей організму тощо. В останні десятиліття активно розвивається застосування фемтосекундних лазерів у офтальмології для вдосконалення методики проведення операцій на очах при мінімальному порушенні їх структури, корекції зору й ін. [66–72]. Завдяки фемтосекундній лазерній техніці, яка відрізняється високою точністю, вдається одержати дуже тонкий шар роговиці заданими заздалегідь параметрами шматка.

Важливе наукове значення мають методи лазерного дистанційного зондування, серед яких особливе місце займає лазерна інтроскопія виявлення корисних копалин [73–80], візуалізація поверхневих звукових хвиль, акустична й мікрохвильова мікроскопія [81–83], ультразвукова томографія [84, 85].

Яскравим представником сучасних фемтосекундних імпульсів є імпульси Ейрі, дослідження яких активно проводиться з кінця 1970-х рр.. В оригінальній роботі [27] Berry і Balazs показали, що розв'язанням одновимірного рівняння Шредингера для вільної частинки

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(t, x)}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

є хвильовий пакет $\Psi(t, x)$, що не розширюється. Розв'язання початкової задачі рівняння Шредингера $\Psi(0, x) = \text{Ai}(Bx / \sqrt[3]{\hbar^2})$ описує складний імпульс, що має обвідну у вигляді функції Ейрі

$$\Psi(t, x) = \text{Ai}\left(\frac{B}{\sqrt[3]{\hbar^2}}\left[x - \frac{B^3 t^2}{4m^2}\right]\right) e^{i\frac{B^3}{2m\hbar}\left[tx - \frac{B^3 t^3}{6m^2}\right]}. \quad (1.2)$$

У даній роботі теоретично й експериментально показано, що світловий пучок, що описується функцією Ейрі, може поширюватися практично без дифракції, причому, максимум щільності енергії світлового пучка буде зміщатися перпендикулярно напрямку поширення, так що його траєкторія поширення стає параболічною. У наслідок цього розподілу інтенсивності пучок Ейрі у поперечному напрямку має максимум у вигляді головного й бічних пелюстків. У роботі [86] запропонований метод подавлення бічних пелюстків, що заснований на використанні кільцевої амплітудної маски. В інших роботах [87-89] використовується конічний аксикон і асиметрична аподізація Фур'є-спектру для посилення інтенсивності головного максимуму й, у свою чергу, подавлення бічних пелюстків.

Пізніше в 2007 р. Siviloglou і Christodoulides [28] виявили цікаву аналогію між рівнянням Шредингера й параксіальним рівнянням дифракції

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad (1.3)$$

де s - поперечна координата, ξ - поздовжня. Ця аналогія проявляється у випадку, коли часова змінна t у рівнянні Шредингера замінюється на поздовжню координату ξ , що визначає напрямок поширення хвилі.

Розв'язання граничної задачі при $\xi = 0$ дає ідеалізовані пучки Ейрі з нескінченною енергією.

У наступній своїй роботі [90] Siviloglou і Christodoulides запропонували метод практичної реалізації пучків Ейрі шляхом їхнього усічення введеною апертурною функцією. Недолік запропонованого методу у тому, що при такому усіченні пучки Ейрі практично втрачають одну зі своїх унікальних властивостей – бездифракційне поширення, але інші особливості при цьому зберігаються. Ці адаптовані до практичного застосування пучки Ейрі зі скінченною енергією можуть зберігати свої унікальні властивості на досить великій відстані у порівнянні, наприклад, з імпульсами Гауса.

Пучки Ейрі унікальні по своїй природі, тому що це єдині недифрагуючі промені, які можуть існувати в одномірних системах.

Усі перелічені вище властивості пучків Ейрі дають цікаві застосування. Так, у роботах [91–94] представлені результати по перетворенню за допомогою дзеркал пучків від точкового джерела в поле із круговою каустикою. У роботі [95] вивчаються симетричні пучки Ейрі, а в [96] вивчається вплив астигматизму на вид пучків такого типу. Робота [97] описує спіральне фокусування імпульсів Ейрі.

Наступним етапом розвитку в цьому напрямку стали плазмони Ейрі – новий клас плазмонних недифрагуючих хвиль [98]. У роботі [99] запропоновано плазмову обробку пучком Ейрі в структурі метал-діелектрик-метал, у якій одна з металевих пластин нахилена для створення ефективного лінійного оптичного потенціалу. Були представлені чисельні й аналітичні результати, які показують, що при різних кутах нахилу плазмове відхилення пучка Ейрі може бути підсилене, компенсоване й навіть скасоване, у той час, як властивість самолікування буде зберігатися. Не менш цікаві дослідження плазмонів Ейрі описані в роботах [100–103].

Досліджувані імпульси Ейрі є розв'язанням рівняння, отриманого із рівняння Гельмгольца за допомогою параксіального наближення. Останнім часом проводяться спроби у отриманні точного розв'язання рівняння Гельмгольца [104, 105], яке описує самоприскорювані пучки, що поширюються по криволінійній траєкторії й відхиляються на кути, більші в

порівнянні з параксіальним наближенням. Точне розв'язання двовимірного рівняння Гельмгольца було отримано у роботі Мат'є й Вебера [106]. Ці пучки поширюються по еліптичній та параболічній траєкторіям відповідно. У нещодавній роботі [107] досліджувались непараксіальні пучки Бесселя й було показано, що вони поширюються по круговій траєкторії. У роботах [108–111] досліджувалась комбінація імпульсів Ейрі й Бесселя і у результаті такої взаємодії було створено новий клас багатогранних 3-D світових куль. Тому поряд з параксіальними пучками Ейрі актуальним також є дослідження непараксіального імпульсу Ейрі.

В останніх роботах в області дослідження пучків Ейрі експериментально показано прискорення цих імпульсів шляхом введення щільної кореляції між просторовими й часовими спектрами фемтосекундного імпульсного пучка [112]. Виявлено, що такі промені проявляють поперечне прискорення тільки у локальному часовому інтервалі. У роботі [113] описано процес генерації неприскорюваного імпульсу Ейрі, що має висококорельований просторово-часовий спектр. Прискорення у цьому випадку відновлюється шляхом введення невизначеності у спектральну кореляцію. Цікавий чисельний підхід до покращення енергетичного обмеження світлових куль Ейрі шляхом стиснення спектра Фур'є описано в [114], у результаті чого нові кулі демонструють значне підсилення пікової інтенсивності.

На даний момент проведено експериментальні дослідження різних режимів модуляцій (лінійної/нелінійної) таких імпульсів [115, 116], показано, що всі частотні складові хвилі рухаються уздовж загальної траєкторії й навіть при широкому частотному діапазоні імпульс не диспергує [117]. Також проводяться експерименти по динамічному контролюванню траєкторії імпульсу.

1.2. Формулювання початково-граничної задачі для імпульсних електромагнітних сигналів

З рівнянь Максвелла випливає хвильове рівняння для електричного поля

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} E = S, \quad (1.4)$$

де $S(t, x)$ —джерело поля, $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ —швидкість хвиль у середовищі з діелектричною ϵ та магнітною μ проникністю відповідно, σ —провідність середовища. По відношенню до цього рівняння можна сформулювати два типи задач [118–121]:

1) задача з початковими умовами, коли за заданим значенням $E(0, x)$ та $\frac{\partial E(0, x)}{\partial t}$ у початковий момент часу визначається значення у довільний момент часу. Ця задача відповідає задачі про поширення хвильового пакету, початкова форма якого $E(0, x)$ уже відома.

2) задача з граничними умовами, коли за заданим значенням $E(t, 0)$ та $\frac{\partial E(t, 0)}{\partial t}$ на межі системи ($x = 0$) визначають значення у будь-якій точці цієї системи ($x > 0$). Цю задачу можна пов'язати з задачею про поширення імпульсу, заданого на межі.

Обидві умови можуть бути включені у джерело поля так само, як і деяке зовнішнє по відношенню до поля джерело.

У випадку розв'язання початкової задачі цікаво представляти поле тільки у моменти часу $t > 0$: $E(t, x) = E^+(t, x)\theta(t)$, де $\theta(t)$ —одинична функція Хевісайда. Тоді його значення та значення його похідної по часу визначає поле на часовій піввісі $t \geq 0$.

Розписавши похідні по часу у (1.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial E^+(t, x)}{\partial t} \theta(t) + E^+(t, x) \delta(t) = \frac{\partial E^+(t, x)}{\partial t} \theta(t) + E^+(0, x) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 E(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E^+(t, x)}{\partial t^2} \theta(t) + \frac{\partial E^+(0, x)}{\partial t} \delta(t) + E^+(0, x) \delta'(t)\end{aligned}\quad (1.5)$$

із отриманого рівняння для всіх моментів часу $t > 0$ (якщо зовнішнє джерело відсутнє) впливає вираз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} E^+ - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E^+ - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} E^+ &= \\ &= \frac{1}{v^2} \left[\partial E^+(0, x) / \partial t \delta(t) + E^+(0, x) \delta'(t) \right] + \mu\sigma E^+(0, x) \delta(t)\end{aligned}\quad (1.6)$$

Тобто права частина визначається значенням поля та значенням його похідної по часу у нульовий момент $t = 0$. Розв'язання такої задачі повинно задовольняти принципу причинності.

У випадку граничної задачі цікаво представляти тільки поле на додатній піввісі $x > 0$. Припустимо, що $E(t, x) = E^+(t, x)\theta(x)$. Тоді, розписавши просторові похідні,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial E^+(t, x)}{\partial x} \theta(x) + E^+(t, x) \delta(x) = \frac{\partial E^+(t, x)}{\partial x} \theta(x) + E^+(t, 0) \delta(x) \\ \frac{\partial^2 E(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E^+(t, x)}{\partial x^2} \theta(x) + \frac{\partial E^+(t, 0)}{\partial x} \delta(x) + E^+(t, 0) \delta'(x)\end{aligned}\quad (1.7)$$

з рівняння (1.4) у всіх точках області $x \geq 0$ (знову при відсутності зовнішнього джерела) впливає вираз:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E^+ - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E^+ - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} E^+ = - \left[\partial E^+(t, 0) / \partial x \delta(x) + E^+(t, 0) \delta'(x) \right], \quad (1.8)$$

де права частина визначається значенням поля та його похідної по просторовій змінній у граничній точці $x = 0$.

Для розв'язання рівняння з правою частиною зручно користуватись функцією Гріна. За допомогою неї розв'язок початкової задачі у будь-який момент часу має вигляд:

$$E(t, x) = \int_0^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t, t', x, x') S(t', x'), \quad (1.9)$$

де функція Гріна $G(t, t', x, x')$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(t, x) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, x) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \delta(t) \delta(x), \quad (1.10)$$

та початковим умовам $G(0, x) = 0$, $\frac{\partial G(0, x)}{\partial t} = -v^2$.

Якщо цікаво представляти тільки поле, що визначається джерелом, то можна вважати, що початкові та граничні умови відсутні:

$$\begin{aligned} E^+(0, x) &= \frac{\partial E^+(0, x)}{\partial t} = 0 \\ E^+(t, 0) &= \frac{\partial E^+(t, 0)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Функція Гріна також дозволяє перейти від хвильового рівняння у диференціальній формі до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Перші інтегральні формулювання рівнянь для поля за допомогою функції Гріна на основі рівнянь Максвелла з'явилися ще наприкінці 1850 г. В 1968 р. інтегральне рівняння у частотній області було вперше успішно застосовано М.А. Хижняком для розв'язання багатьох стаціонарних задач [122]. Надалі розв'язання нестационарних і нелінійних задач методом інтегральних рівнянь Вольтерра було доповнено й описано в роботах [123–126].

Головною перевагою інтегральних рівнянь є те, що вони мають гарну фізичну наочність, ніж рівняння у диференціальній формі, і дозволяють єдиним чином розглянути одночасно початкові й граничні умови. Це значно

спрощує побудову алгоритму розв'язання задачі. Інтегральне рівняння являє собою згортку в просторі узагальнених функцій і є універсальним математичним апаратом для задач електродинаміки. Крім цього, форма інтегрального рівняння залишається незмінною для різних середовищ, а також допускає вибір довільного початкового поля. Це робить такі рівняння універсальними відносно їхнього вільного члена.

Даний підхід до розв'язання електродинамічних задач успішно застосовувався при дослідженні нестационарних процесів у плазмі [127–129] та діелектрику [130–135].

Тип інтегрального рівняння визначає вибір способу його розв'язання. Наближене розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду можна отримати методом чисельного інтегрування [136, 137], методами послідовних наближень [138] і ін. Точне розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра другого роду також можна будувати методом резольвенти [131, 139].

1.3 Обґрунтування теми дисертаційної роботи

Аналіз літератури показав актуальність дослідження властивостей імпульсів у нестационарних неоднорідних середовищах. Крім розвитку чисельних методів у розв'язанні нестационарних електродинамічних задач необхідно розвивати методи теоретичного описання надкоротких імпульсів. У якості математичного апарата у процесі дослідження зручно користуватись методом інтегральних рівнянь Вольтерра, який має гарну фізичну інтерпретацію та дозволяє максимально враховувати особливості досліджуваного явища.

Під час аналізу математичних аспектів та фізичної інтерпретації електромагнітного імпульсу Ейрі в основному розглядаються хвилі, у яких такий зв'язок є тільки між просторовими координатами, у той час, як часова залежність є простою гармонійною. Тому термін «прискорений пакет» має безпосередній зміст, тому що дійсно відноситься до прискореного руху, що

обгинає імпульсу. І по відношенню до електромагнітних пучків Ейрі цей термін має лише умовний характер, позначаючи скривлену по параболі траєкторію пучка. І тільки кілька публікацій описують більш загальну часову залежність [88, 140]. Просторово-часові імпульси Ейрі в цих публікаціях розглядаються в диспергуючому середовищі, у якому член параксіального хвильового рівняння містить коефіцієнт, що обертається в нуль за відсутності дисперсії [88].

Таким чином, актуальною є наукова задача щодо теоретичного описання властивостей імпульсу Ейрі, що дозволить сформувати комплексне уявлення про взаємодію цього імпульсу з неоднорідностями нестационарного середовища.

Висновки по розділу

1. Показано актуальність дослідження взаємодії електромагнітних полів з неоднорідними середовищами у зв'язку з розвитком лазерних нанотехнологій. Сучасна нанотехніка дозволяє створювати за допомогою лазерних імпульсів напівпровідникові структури з унікальними нелінійно-оптичними властивостями.

2. Відмічено актуальність розробок в області імпульсної техніки, призначеної для зондування неоднорідних середовищ, лазерної техніки для генерації оптичних імпульсів (піко- і фемтосекундні лазери й ін.). В останні роки активно розвивається застосування фемтосекундних лазерів в офтальмології для вдосконалення методики проведення операцій на очах при мінімальній порушенні їх структури, корекції зору й ін.

3. Показано, що актуальним напрямком у дослідженні надкоротких імпульсів є вивчення імпульсу Ейрі з його унікальними властивостями (самоприскорення, самолікування й недифраговане поширення) у неоднорідному середовищі. Як відомо, світловий пучок, що описується функцією Ейрі, може поширюватися практично без дифракції, причому,

максимум щільності енергії світлового пучка буде зміщуватись перпендикулярно напрямку поширення, так що його траєкторія поширення буде параболічною. У наслідок цього розподілу інтенсивності пучок Ейрі у поперечному напрямку має максимуми у вигляді головного пелюстка й бічних пелюстків. Вивчення властивостей імпульсу Ейрі у часовій області становить особливий інтерес, тому що у вже існуючих публікаціях розглядається гармонійна часова залежність, і вповільнення у такому випадку означає просте скривлення форми променя. У той же час, практичний інтерес представляють просторово-часові пучки Ейрі, які рухаються, уповільнюючись з часом. Більшість досліджень цих пучків у неоднорідних середовищах носить чисто експериментальний характер і теоретична сторона цього питання мало досліджена. Теоретичний опис еволюції імпульсу Ейрі у задачах дифракції дозволить отримати точні розв'язки та проаналізувати всі перехідні процеси. Детальне дослідження властивостей імпульсу Ейрі може знайти застосування у дистанційнім дослідженні атмосфери, в експериментальних дослідженнях плазмових утворень, у процесах керування мікрочастинками, у біохімії, в обробці матеріалів тощо.

4. Обґрунтовано доцільність застосування методу інтегральних рівнянь Вольтерра до аналітичного опису процесу взаємодії імпульсу Ейрі з неоднорідними середовищами. Використання строгого математичного апарата, що має гарну фізичну наочність, дозволяє суттєво спростити алгоритм розв'язання поставленої задачі й проаналізувати всі перехідні процеси досліджуваного явища.

Таким чином, актуальним є детальний опис імпульсів, у тому числі імпульсів Ейрі, на основі інтегральних рівнянь Вольтерра з метою дослідження процесу взаємодії цих імпульсів з неоднорідними нестационарними середовищами.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОИДНАМІЧНИХ ЗАДАЧ

У даному розділі розглянуто основні методи розв'язання електродинамічних задач, поставлених у дисертаційній роботі. Коротко викладено метод інтегральних рівнянь Вольтерра [122], за допомогою якого описується поширення електромагнітних імпульсів у неоднорідних середовищах. Розв'язок інтегрального рівняння задачі про взаємодію електромагнітної хвилі з неоднорідностями середовища отримано методом резольвенти. Розглянуто випадок застосування резольвентного оператора задачі про взаємодію електромагнітної хвилі із плоскою межею розділення середовищ. Отримано симетричну функцію Гріна рівняння параболічного типу для початково-граничної електродинамічної задачі. Обґрунтовано перспективу застосування розглянутих вище методів до розв'язання електродинамічної задачі для випадку первинного поля у вигляді імпульсу Ейрі.

2.1 Симетрична функція Гріна для початково-граничної електродинамічної задачі у параксіальному наближенні.

Точний розв'язок задачі про випромінювання джерела електромагнітних хвиль задовольняє хвильовому рівнянню з відомою правою частиною, яке в одновимірному випадку середовища без втрат має вигляд:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = Q, \quad (2.1)$$

де фазова швидкість хвиль $v = c / \sqrt{\epsilon\mu}$, c - швидкість світла у вакуумі, ϵ та μ діелектрична та магнітна проникності середовища поширення хвиль, а функція Q описує джерело електромагнітного випромінювання. Головну зацікавленість викликає імпульсне випромінювання, тому поле слід

розглядати у вигляді $E = F(t, x)e^{-ikx}$, де функція $F(t, x)$ описує обвідну випромінювання, що має у просторі періодичну структуру з хвильовим числом k . Такий спрощений вигляд відповідає одновимірній задачі, що дозволяє проаналізувати властивості параксіального випромінювання, зокрема, властивості випромінювання у вигляді імпульсу Ейрі.

Підстановка $E = F(t, x)e^{-ikx}$ у хвильове рівняння (2.1) дає рівняння для обвідної

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial x} + k^2 F = Q(t, x)e^{ikx}, \quad (2.2)$$

розв'язок якого має дві складові

$$F(t, x) = \tilde{F}(t, x) + F^*(t, x), \quad (2.3)$$

де $\tilde{F}(t, x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, $F^*(t, x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння при нульових початкових умовах дорівнює нулю. Розв'язок неоднорідного рівняння, що описує випромінювання джерела, знаходиться за допомогою функції Гріна, рівняння якої має вигляд:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial G}{\partial x} + k^2 G = \delta(t)\delta(x). \quad (2.4)$$

Функція Гріна, що відповідає цій початково-граничній задачі, знаходиться шляхом використання перетворення Фур'є:

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (2.5)$$

Використовуючи представлення

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x),$$

показано, що ядро інтегрального перетворення задовольняє рівнянню

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - 2k\xi g + (k^2 + \xi^2)g = \delta(t). \quad (2.6)$$

Вважаючи, що $g(t, \xi) = h(t, \xi)\theta(t)$, где $\theta(t)$ - одинична функція Хевісайда, при нульових початкових умовах $h(0, \xi) = 0$, отримаємо першу похідну, що дорівнює

$$\frac{\partial g(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial h(t, \xi)}{\partial t} \theta(t) + h(t, \xi) \delta(t) = \frac{\partial h(t, \xi)}{\partial t} \theta(t), \quad (2.7)$$

і другу похідну

$$\frac{\partial^2 g(t, \xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h(t, \xi)}{\partial t^2} \theta(t) + \frac{\partial h(0, \xi)}{\partial t} \delta(t). \quad (2.8)$$

Вважаючи, що

$$\frac{\partial h(0, \xi)}{\partial t} = v^2,$$

отримуємо рівняння

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - 2k\xi h + (k^2 + \xi^2)h = 0 \quad (2.9)$$

з початковими умовами у вигляді

$$h(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial h(0, \xi)}{\partial t} = v^2.$$

Розв'язок рівняння (2.9) з урахуванням початкових умов дає функцію Гріна

$$G(t, x) = \pm \frac{v}{2\pi} \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[v|k - \xi|t]}{|k - \xi|} e^{i\xi x} d\xi. \quad (2.10)$$

Після обчислення інтегралу в (2.10) [141] отримуємо явний вираз для функції Гріна:

$$G(t, x) = \pm \frac{v}{2} \theta(t) e^{ikx} \theta(vt - |x|). \quad (2.11)$$

Область впливу функції

$$\theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right),$$

що показана на рисунку 2.1 вертикальним штрихуванням, враховує вплив на поле у точці спостереження x у момент t усіх попередніх моментів часу. Причому, ці моменти часу задовольняють принципу причинності, так як на поле в даній точці x у момент часу t можуть впливати тільки ті стани поля у точці x' в попередні моменти часу, що розміщені у штрихованій області.

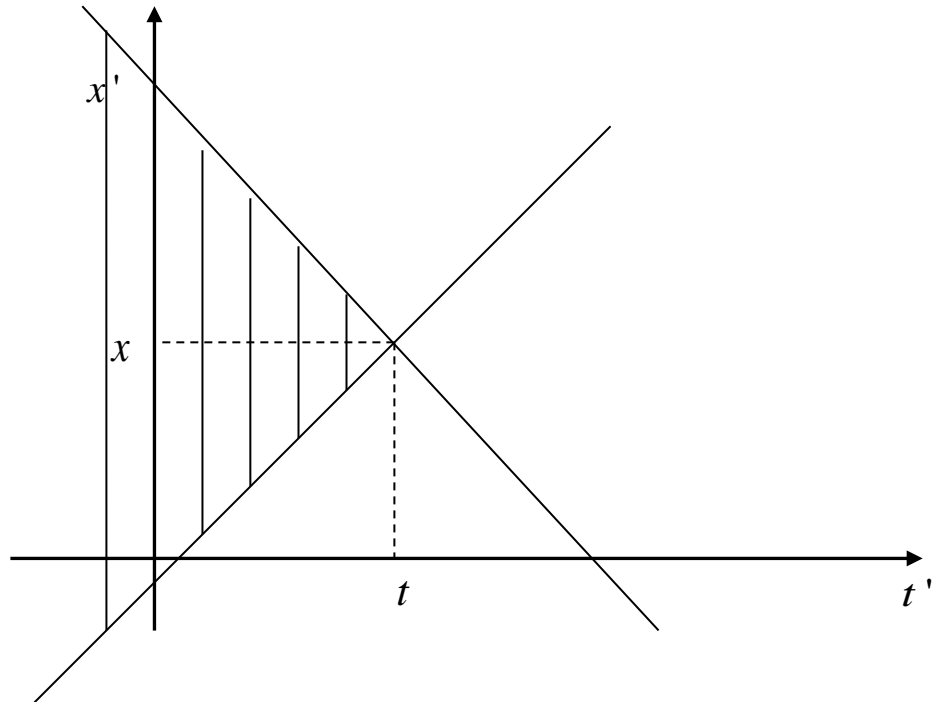


Рисунок 2.1—Область впливу функції Гріна початкової задачі

Функція Гріна граничної задачі знаходиться шляхом використання перетворення Фур'є

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, x) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

в наслідок того, що тепер часова змінна змінюється у нескінченних межах $-\infty < t < \infty$. Підстановка у рівняння (2.4) дає вираз

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial g}{\partial x} + (k^2 - \frac{\omega^2}{v^2})g = \delta(x). \quad (2.13)$$

Розв'язок рівняння (2.13) знаходиться у вигляді $g(\omega, x) = h(\omega, x)\theta(x)$ при граничних умовах

$$h(\omega, 0) = 0, \quad \frac{\partial h(\omega, 0)}{\partial x} = -1.$$

Із рівності (2.13) з урахуванням граничних умов отримуємо функцію Гріна граничної задачі:

$$G(t, x) = -\frac{v}{2} e^{ikx} \theta\left(\frac{x}{v} - |t|\right). \quad (2.14)$$

Область впливу функції (2.14) показано на рисунку 2.2 горизонтальним штрихуванням. На рисунку 2.2 видно, що на поле в точці x впливають стани поля в інших точках у всі момент часу t , як минулі, так і майбутні. Мається на увазі, що для того, щоб поле у заданій точці дорівнювало заданій величині, необхідно враховувати всі момент часу. Принцип причинності у цьому випадку втрачає сенс.

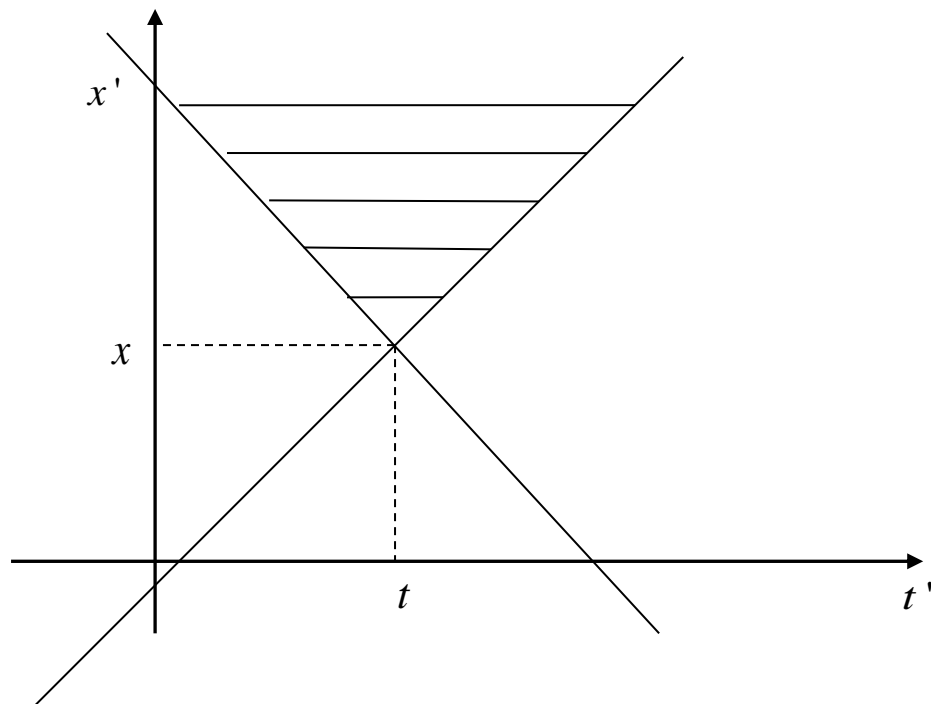


Рисунок 2.2– Область впливу функції Гріна граничної задачі

Вище розглядався випадок функції Гріна хвильового рівняння без урахування втрат у середовищі. Урахування втрат у середовищі з математичної точки зору дозволяє зняти неоднозначності під час обчислення інтегралів за рахунок конкретного вибору шляху інтегрування.

Розглянемо функцію Гріна хвильового рівняння у середовищі з втратами:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \gamma \frac{\partial}{\partial t} E = S, \quad (2.15)$$

де втрати у середовищі описуються коефіцієнтом $\gamma = \mu_0 \mu \sigma$. Тут σ провідність середовища, μ_0 та μ – магнітна проникність вакуума і середовища відповідно. Швидкість поширення хвиль у цьому випадку стає комплексною величиною:

$$\frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} + i\sigma.$$

Для поля $E = F(t, x)e^{-ikx}$, що розглядається, обвідна задовольняє рівнянню

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F + 2ik \frac{\partial}{\partial x} F + k^2 F + \gamma \frac{\partial}{\partial t} F = S e^{ikx}. \quad (2.16)$$

Фунція Гріна виразу (2.16) задовольняє рівнянню, де права частина задається дельта-функціями Дірака:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G - \frac{\partial^2}{\partial x^2} G + 2ik \frac{\partial}{\partial x} G + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G + k^2 G = \delta(t)\delta(x). \quad (2.17)$$

Розглянемо початкову задачу, коли у деякий момент часу задано функцію та її похідну на всій координатній вісі ξ . Розв'язок рівняння (2.17) знаходиться за допомогою функції Гріна, що записана у вигляді перетворення Фур'є

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} g(t, \xi) d\xi, \quad (2.18)$$

де функція

$$g(t, \xi) = h(t, \xi)\theta(t) \quad (2.19)$$

задовольняє рівнянню

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t, \xi) + (\xi^2 + k^2 - 2k\xi)g(t, \xi) + \gamma \frac{\partial}{\partial t} g(t, \xi) = \delta(t). \quad (2.20)$$

Тоді для початкових умов

$$h(0, \xi) = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h(0, \xi) = v^2 \quad (2.22)$$

з (2.19) випиває функція Гріна [142]:

$$G = \frac{v}{2} \theta(t) e^{ikx} \theta(vt - |x|), \quad (2.23)$$

що співпадає з функцією (2.14).

Розглянемо тепер параксіальне рівняння

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2ikv^2 \frac{\partial F}{\partial x} + k^2 v^2 F = S. \quad (2.24)$$

Знайдемо для нього функцію Гріна

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G + 2ikv^2 \frac{\partial}{\partial x} G + k^2 v^2 G = \delta(t) \delta(x). \quad (2.25)$$

Після застосування перетворення Фур'є $g(\omega, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\xi x} G(t, x)$ та

обчислення відповідних інтегралів, функція Гріна описується виразом:

$$G(t, x) = \frac{-\theta(x)(1-i)}{4\sqrt{kv^2\pi x}} e^{-i\frac{k}{2}x} e^{-ikv^2\frac{t^2}{2x}}. \quad (2.26)$$

Функція Гріна параксіального рівняння визначається єдиним чином незалежно від порядку інтегрування, на відміну від хвильового рівняння. Таким чином, функція Гріна параксіального рівняння у часовій області визначається тільки у напівпросторі $x > 0$, що обумовлено вибором виразу для поля $E(t, x) = F(t, x) e^{-ik|x|}$, $k > 0$. Особливістю функцій (2.26) є відсутність затримки. Коливання, що описується функцією (2.26), поширюється миттєво з нескінченною швидкістю, отже, процеси, що описуються цією формулою, не містять відношень по типу причина-наслідок.

Розглянемо тепер випадок параксіального рівняння параболічного типу, яке отримується з хвильового рівняння шляхом застосування

параксіального наближення [143, 144]. Такий тип наближення передбачає знехтування похідною другого порядку порівняно з першою похідною

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right| \ll \left| 2ik \frac{\partial F}{\partial x} \right|. \quad (2.27)$$

Суть параксіального наближення (наближення обвідної, що повільно змінюється) у тому, що напрямок поширення випромінювання складає малий кут з нормаллю до хвильового фронту. Використовуючи і у цьому випадку представлення поля у вигляді добутку обвідної на осцилюючий множник $E(t, x) = F(t, x)e^{-ik|x|}$, $k > 0$, отримаємо рівняння параболічного типу

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial}{\partial x} F + 2ik \delta(x) F + k^2 F + \gamma \frac{\partial}{\partial t} F = Q e^{ik|x|}. \quad (2.28)$$

Модуль у показнику експоненти введено для того, щоб можна було розглядати обидва напрямки просторової змінної $x \rightarrow \pm\infty$. Рівняння для функції Гріна у цьому випадку має вигляд [145, 146]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, x) + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial}{\partial x} G(t, x) + \\ + 2ik \delta(x) G(t, x) + k^2 G(t, x) + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \delta(t) \delta(x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для розв'язку початкової задачі рівняння (2.29), запишемо функцію Гріна у вигляді перетворення Фур'є

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} g(t, q) e^{qx} dq$$

і дельта-функцію запишемо у вигляді

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{qx} dq.$$

Тода з (2.29) отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t, q) + 2ik(qg(t, q) - G(t, 0)) + k^2 g(t, q) + \gamma \frac{\partial}{\partial t} g(t, q) = \delta(t), \quad (2.30)$$

З урахуванням початкових умов $h(0, q) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} h(0, q) = v^2$ отримаємо функцію Гріна в інтегральній формі:

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\gamma v^2 t/2 + qx} (C_1 e^{ivt\sqrt{k^2 - 2k\xi - \gamma^2 v^2/4}} + C_1 e^{-ivt\sqrt{k^2 - 2k\xi - \gamma^2 v^2/4}}) dq. \quad (2.31)$$

Розглянемо граничну задачу. Записавши функцію Гріна у вигляді інтегралу Фур'є

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, x) e^{i\omega t} d\omega$$

у середовищі без втрат, отримаємо

$$-\frac{\omega^2}{v^2} g(\omega, x) + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial g(\omega, x)}{\partial x} + 2ik \delta(x) g(\omega, x) + k^2 g(\omega, x) + i\omega \gamma g(\omega, x) = \delta(x). \quad (2.32)$$

За умови, що $g(\omega, 0) = 1/2ik$, рівняння (2.32) є звичайним диференціальним рівнянням

$$-\frac{\omega^2}{v^2} g(\omega, x) + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial g(\omega, x)}{\partial x} + k^2 g(\omega, x) + i\omega \gamma g(\omega, x) = 0. \quad (2.33)$$

На піввісі $x \geq 0$ рівняння (2.33) має вигляд:

$$-\frac{\omega^2}{v^2} g(\omega, x) + 2ik \frac{\partial g(\omega, x)}{\partial x} + k^2 g(\omega, x) + i\omega \gamma g(\omega, x) = 0. \quad (2.34)$$

З урахуванням граничної умови $g(\omega, 0) = 1/2ik$, знаходимо частинний розв'язок рівняння (2.34), що має вигляд функції:

$$g(\omega, x) = -\frac{i}{2k} \theta(-x) \exp \left[i \frac{\omega^2 - v^2 k^2 - i\omega v^2 \gamma}{2v^2 k} x \right]. \quad (2.35)$$

Таким чином, на всій просторовій вісі x для будь-якого моменту часу $-\infty < t < \infty$ функція Гріна визначається виразом:

$$G(t, x) = -\frac{i}{4\pi k} e^{ik|x|/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega^2 - i\omega v^2 \gamma}{2v^2 k} |x| + i\omega t} d\omega. \quad (2.36)$$

Обчислення інтегралу у формулі (2.36) дає симетричну функцію Гріна рівняння параболічного типу у параксіальному наближенні [146]:

$$G(t, x) = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k|x|}} e^{ik|x|/2} e^{i\frac{(v^2 kt + \frac{iv^2 \gamma |x|}{2})^2}{2v^2 k|x|}}. \quad (2.37)$$

Упевнимся в тому, що при $\gamma = 0$ функція Гріна

$$G(t, x) = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k|x|}} e^{ik|x|/2} e^{it^2 \frac{v^2 k}{2|x|}} \quad (2.38)$$

буде розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, x) + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial}{\partial x} G(t, x) + 2ik \delta(x) G(t, x) + k^2 G(t, x) = \delta(t) \delta(x), \quad (2.39)$$

шляхом прямої підстановки функції (2.38) у рівняння (2.39).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial}{\partial x} G(t, |x|) = \frac{\partial}{\partial |x|} G(t, |x|) \operatorname{sign}(x),$$

рівняння (2.39) зводиться до вигляду:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, |x|) + 2ik \frac{\partial}{\partial |x|} G(t, |x|) + 2ik \delta(x) G(t, 0) + k^2 G = \delta(t) \delta(x). \quad (2.40)$$

Якщо

$$G(t, 0) = \delta(t) / 2ik, \quad (2.41)$$

що необхідно довести, то рівняння (2.40) спрощується:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, |x|) + 2ik \frac{\partial}{\partial |x|} G(t, |x|) + k^2 G = 0. \quad (2.42)$$

Покажемо, що функція (2.38) задовольняє рівнянню (2.42). Для цього запишемо функцію $G(t, x)$ у вигляді

$$G(t, |x|) = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{i\left(\frac{k}{2}|x| + \frac{v^2 k t^2}{2|x|}\right)} = AH(t, |x|), \quad (2.43)$$

де множники A і H відповідно дорівнюють

$$A = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k}}, \quad H(t, |x|) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{i\left(\frac{k}{2}|x| + \frac{v^2 k t^2}{2|x|}\right)}.$$

Позначаючи $u = |x|$, знаходимо частинні похідні $H(t, |x|)$ по часу і новій змінній u :

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t, u) = \left[-\frac{1}{2u\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} i \left(\frac{k}{2} - \frac{v^2 k t^2}{2u^2} \right) \right] e^{i\left(\frac{k}{2}u + \frac{v^2 k t^2}{2u}\right)}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t, u) = ikv^2 \frac{t}{u\sqrt{u}} e^{i\left(\frac{k}{2}u + \frac{v^2 k t^2}{2u}\right)}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H(t, u) = \left[-k^2 v^4 \frac{t^2}{u^2 \sqrt{u}} + ikv^2 \frac{1}{u\sqrt{u}} \right] e^{i\left(\frac{k}{2}u + \frac{v^2 k t^2}{2u}\right)}. \quad (2.46)$$

Після підстановки знайдених похідних у рівняння (2.38) отримуємо тотожність.

Перейдемо до границі у (2.43) при $|x| \rightarrow 0$ [147]:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 u}} e^{-\frac{t^2}{4a^2 u}} \rightarrow \delta(t), \quad u \rightarrow 0. \quad (2.47)$$

Тоді формула (2.43) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 G(t, |x|) &= -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{i\left(\frac{k}{2}|x| + \frac{v^2 k t^2}{2|x|}\right)} = \\
 &= e^{\frac{i k}{2}|x|} \frac{1}{2ik} \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{i}{2v^2 k}|x|}} e^{-\frac{t^2}{4\frac{i}{2v^2 k}|x|}} \rightarrow \frac{1}{2ik} \delta(t), \quad |x| \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

В наслідок того, що

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{i}{2v^2 k}|x|}} e^{-\frac{t^2}{4\frac{i}{2v^2 k}|x|}} \rightarrow \delta(t), \quad |x| \rightarrow 0, \tag{2.49}$$

справедливо граничне співвідношення

$$G(t, x) \rightarrow \frac{1}{2ik} \delta(t) . \tag{2.50}$$

Таким чином, параксіальне рівняння відноситься до типу параболічних рівнянь, які традиційно описують задачі теплопровідності або дифузії [148 150]. Такі рівняння описують поширення електромагнітних хвиль із нескінченною швидкістю, тобто при наскільки завгодно малій зміні коливання в даній точці зміна буде відмінною від нуля у всіх точках відразу. Це інтерпретується як результат нескінченно швидкого поширення коливання. Очевидне протиріччя, наприклад, з молекулярно-кінетичним уявленням про природу тепла пояснюється тим, що рівняння теплопровідності отримано без урахування інерційності процесів руху молекул, що є наслідком наближеного опису процесу поширення тепла цим рівнянням і приводить до виродження принципу причинності. Дійсно, нескінченна швидкість поширення означає, що всі причинно-наслідкові зв'язки є виродженими, тому що коливання в даній точці в цей момент часу проявляється відразу в усі інших точках.

Параксіальне рівняння (2.28) описує поширення електромагнітних сигналів $F(t, x)$, які, як відомо, повинні задовольняти принципу причинності,

а це входить у суперечність із природою цього рівняння. Очевидно, це є наслідком того, що це рівняння описує електромагнітне поле наближено. Точний розв'язок електромагнітної задачі, що описується рівнянням (2.2), повинен задовольняти принципу причинності, що й показують функції Гріна хвильового рівняння.

2.2 Метод інтегральних рівнянь у розв'язання нестационарних граничних задач

Інтегральні рівняння мають широке застосування у математиці та її прикладних додатках. Для інтегральних рівнянь було сформульовано багато ідей та цілей, а також сформовано різні методи в розв'язанні цих рівнянь, які мають ряд важливих переваг і активно застосовуються при розв'язанні задач електродинаміки [151-153]

Розвиток теорії інтегральних рівнянь має довгу історію, яка починається наприкінці XIX в. роботами Ж. Фур'є, Н. Абеля, Л. Ейлера, П. С. Лапласа тощо. Сам термін «інтегральні рівняння» був запропонований у 1888 році Паулем Дюбуа Реймоном [154].

У сучасних роботах [121, 124, 125] опубліковані результати, що відносяться до еволюційного підходу в розв'язанні нестационарних початково-граничних електродинамічних задач із залежними від часу параметрами і межами, що рухаються (2D і 3D).

Переваги інтегральних рівнянь разом з методами їх розв'язання формують універсальний апарат при побудові математичних моделей задач електродинаміки.

Сформулюємо метод інтегральних рівнянь Вольтерра.

Нехай у ізотропному фоновому середовищі з магнітною проникністю $\mu=1$, діелектричною проникністю ε , провідністю σ існує електромагнітне поле. Неоднорідність фонового середовища представлена об'ємом $V(t)$, що

обмежений поверхнею $S(t)$. Об'єм $V(t)$ визначається характеристичною функцією χ , що дорівнює одиниці всередині об'єму та нулю за його межами.

Розглянемо рівняння Максвелла у диференціальній формі [118, 120]:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\mathbf{i}} \delta(S(t)) + \mu_0 \vec{\mathbf{j}}, \\ \text{rot } \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \end{cases}, \quad (2.50)$$

де $\vec{\mathbf{B}}$ – вектор магнітної індукції електричного поля,

$\vec{\mathbf{E}}$ – вектор напруженості електричного поля,

$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(1 - \chi)\vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \vec{\mathbf{P}}_{in}$ – вектор електричної поляризації,

$S(t)$ – поверхня, що обмежує об'єм $V(t)$,

$\delta(t)$ – одинична дельта-функція,

Система рівнянь (2.50) у диференціальній формі описує поле у всьому просторі з урахуванням початкових та граничних умов, які включаються шляхом використання узагальнюючих функцій. Із системи (2.50) випливає хвильове рівняння для поля в середовищі, що характеризується швидкістю світла $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0}$ (фонове середовище):

$$\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\mathbf{P}}_{in} - \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{\mathbf{E}}) \chi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{i}} \delta(S(t)) + \frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t} \right], \quad (2.51)$$

Права частина рівняння (2.51) повністю характеризує властивості об'єму $V(t)$.

Перехід від рівняння у диференціальній формі до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду здійснюється за допомогою функції Гріна [118, 121]

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(t, \vec{\mathbf{r}}) = & \vec{\mathbf{E}}_0(t, \vec{\mathbf{r}}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{\mathbf{r}}' \left(\nabla \nabla - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \hat{I} \right) \chi(t', \vec{\mathbf{r}}') \times \\ & \times \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta(t - t' - |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|/v)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} (\vec{\mathbf{P}}(t', \vec{\mathbf{r}}') - (\varepsilon - 1)\vec{\mathbf{E}}(t', \vec{\mathbf{r}}')) \right] \end{aligned}, \quad (2.52)$$

де $\vec{E}_0(t, \vec{r})$ – первинне електромагнітне поле у фоновому середовищі,

\hat{I} – одиничний оператор, ∇ – оператор Гамільтона.

У формулі (2.52) мається на увазі, що первинне поле $\vec{E}_0(t, \vec{r})$ існує у фоновому середовищі незалежно від наявності неоднорідності і ϵ , по суті, розв'язком однорідного рівняння. Також вважається, що електрична поляризація у фоновому середовищі відрізняється від тої, що існує всередині об'єму $V(t)$.

Рівняння (2.52) визначене у всьому просторі від початкового моменту до моменті спостереження і описує поле тільки в точках, що належать об'єму $V(t)$. За межами цього об'єму інтегральне рівняння являє собою квадратурну формулу, що дозволяє визначити поле за межами об'єму. Рівняння (2.52) містить у собі початкові та граничні умови.

В одновимірному випадку, опускаючи [147] просторові координати, рівняння Вольтерра другого роду приймає вигляд:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \delta(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}) \left[\frac{1}{\epsilon \epsilon_0} P(t', x') - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} E(t', x') \right]. \quad (2.53)$$

Як і загальне рівняння (2.52), вираз (2.53) містить початкові та граничні умови і також описує електромагнітне поле у неоднорідному середовищі.

Для розв'язання частинних задач у дисертаційній роботі сформулюємо метод інтегральних рівнянь Вольтерра у параксіальному наближенні.

Оригінальним буде хвильове рівняння з джерелом j [155]:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = - \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v^2} \right) h(x) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (2.54)$$

де функція $h(x) = 0$ поза інтервалом (a, b) і дорівнює одиниці $h(x) = 1$ всередині інтервалу. Права частина рівняння (2.54) містить функцію

$$- \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v^2} \right) h(x) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

що відмінна від нуля тільки всередині інтервалу (a, b) . Поза цим інтервалом права частина рівняння (2.54) містить тільки доданок, що описується джерелом j . За допомогою функції Гріна $G_w(t, x)$ рівняння (2.54) записується у вигляді інтегрального співвідношення:

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_w(t - t', x - x') h(x') \frac{\partial^2 E(t', x')}{\partial t'^2}, \quad (2.55)$$

де вільний член рівняння є сумою $\tilde{E}_0(t, x)$, що існує в однорідному середовищі і являє собою розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0,$$

і поля, що породжується джерелом $j(t, x)$,

$$E_0(t, x) = \tilde{E}_0(t, x) - \mu_0 \mu \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_w(t - t', x - x') \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'}. \quad (2.56)$$

Зміст рівняння (2.54) залежить від положення точки спостереження x щодо інтервалу (a, b) .

Поле всередині цієї області (точка спостереження x належить інтервалу (a, b) , рисунок 2.3а, знаходиться як розв'язок неоднорідного рівняння (2.53).

Поле поза інтервалом (точка спостереження x не належить інтервалу (a, b)), рисунок 2.3б–2.3с знаходиться у результаті інтегрування внутрішнього поля по цьому інтервалу.

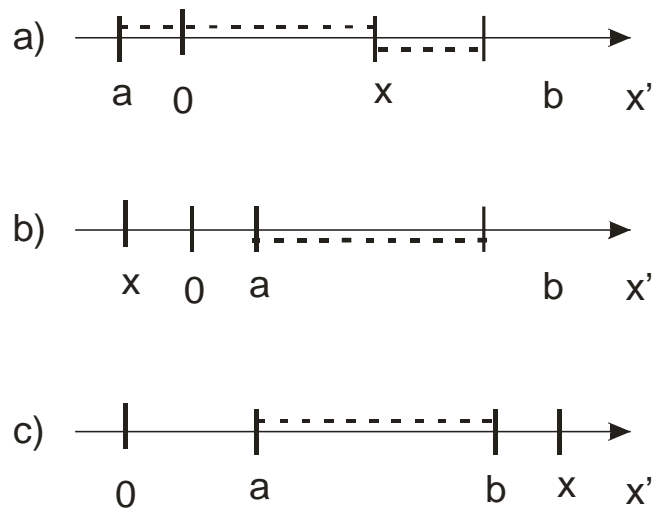


Рисунок 2.3—Визначення поля: а) усередині інтервалу як розв’язок первинного рівняння; б)–с) поза інтервалом квадратурною формулою для внутрішнього поля

Вважатимемо, що поле являє собою хвилю, що поширюється переважно уздовж осі x ,

$$E(t, x) = F(t, x)e^{-ikx}, \quad (2.57)$$

де $k > 0$ і $F(t, x)$ – обвідна електромагнітного сигналу, представленого даним полем.

Таке припущення має сенс, тільки якщо рівняння розглядається на півосі $x > 0$, оскільки, при $x < 0$ експонентний множник дорівнюватиме нескінченності. З урахуванням параксіального співвідношення (2.27) рівняння (2.54) зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t, x)e^{-ikx} - 2ik \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)e^{-ikx} - k^2 F(t, x)e^{-ikx} \approx \\ &\approx -2ik \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)e^{-ikx} - k^2 F(t, x)e^{-ikx} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Нехай права частина рівняння (2.58) продовжується нулем на від’ємну піввісь $x < 0$ [108]. Тоді розв’язок рівняння визначається формулою:

$$F(t, x) = \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', x-x') \left[\frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} h(x') \frac{\partial^2 F(t', x')}{\partial t'^2} - \mu_0 \mu \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'} e^{ikx'} \right], \quad (2.59)$$

де $G(t, t', x, x')$ – функція Гріна параболічного рівняння. Виділивши інтеграл із джерелом $j(t, x)$ як задану функцію

$$F_0(t, x) = -\mu_0 \mu \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t, x-x') \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'} e^{ikx'} \quad (2.60)$$

у рівнянні (2.59), отримаємо інтегральне рівняння відносно функції $F(t, x)$:

$$F(t, x) = F_0(t, x) + \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t, x-x') h(x') \frac{\partial^2 F(t', x')}{\partial t'^2}. \quad (2.61)$$

Функція Гріна у інтегральному рівнянні (2.61) визначається співвідношенням (2.38):

При такій функції Гріна інтеграл у правій частині рівняння (2.59) задовольняє умові:

$$\left(\int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t, x-x') \left[\frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} h(x') \frac{\partial^2 F(t', x')}{\partial t'^2} - \mu_0 \mu \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'} e^{ikx'} \right] \right) \Bigg|_{x=0} = 0. \quad (2.62)$$

Підставивши вираз (2.38) для функції Гріна, перепишемо інтегральне рівняння (2.61) у вигляді:

$$F(t, x) = F_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{v v_1^2} \frac{(1+i)}{4\sqrt{k\pi}} \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\theta(x-x')}{\sqrt{x-x'}} e^{ik(x-x')/2} e^{i \frac{v^2 k}{2(x-x')} (t-t')^2} h(x') \frac{\partial^2 F(t', x')}{\partial t'^2} \quad (2.63)$$

з вільним членом, що визначається джерелом:

$$F_0(t, x) = -\frac{1+i}{4\sqrt{k\pi}} v \mu_0 \mu \int_0^{\infty} dx' \frac{\theta(x-x')}{\sqrt{x-x'}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i \frac{k}{2}(x-x' + \frac{v^2(t-t')^2}{x-x'})} \frac{\partial}{\partial t'} j(t', x'). \quad (2.64)$$

Розглянемо зміст виразу (2.63) залежно від розміщення інтервалу (a, b) й точки спостереження x .

а) Нехай шар (інтервал) (a, b) знаходиться праворуч від джерела й від нульової точки, $a > 0$, і точка спостереження знаходиться усередині шару

$a < x < b$ (рисунок 2.4). Таке положення природним чином визначає інтерес відбиття сигналу від шару. На рисунку 2.4 і в подальших рисунках штрихована лінія позначає інтервал, по якому проводиться інтегрування. Крапками позначається незадіяний інтервал, тобто інтервал, що не дає внеску в інтеграл.

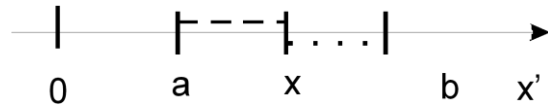


Рисунок 2.4– Положення шару праворуч від джерела й від нульової точки, точка спостереження $x \in (a, b)$

У цьому випадку функція $F(t, x)$ розглядається у внутрішніх точках як усередині інтервалу в (2.63), так і поза ним. Тобто, для цієї функції співвідношення (2.63) описується інтегральним рівнянням

$$F(t, x) = F_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{v v_1^2} \frac{(1+i)}{4\sqrt{k\pi}} \int_a^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{x-x'}} e^{ik(x-x')/2} e^{i\frac{v^2 k}{2(x-x')}(t-t')^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} F(t', x'), \quad (2.65)$$

і у цьому випадку функція $F(t, x)$ повинна бути його розв'язком. Рівняння (2.65) є інтегральним рівнянням Вольтерра по просторовій координаті. Розв'язок цього рівняння означає знаходження електричного поля усередині шару.

б) Якщо точка спостереження знаходиться поза шаром ліворуч, $x < a$, то інтеграл в (2.63) дорівнює нулю й шукана функція $F(t, x)$ дорівнює вільному члену рівняння, рисунок 2.5.



Рисунок 2.5– Положення шару праворуч від джерела й від нульової точки, точка спостереження спостереження $x < a$

Таким чином, у цьому випадку шар не впливає на поле й воно представлено тільки безпосереднім випромінюванням джерела

в) Якщо точка спостереження знаходиться поза інтервалом (a, b) праворуч $x > b$ (рисунок 2.6), то функція $F(t, x)$ дорівнює сумі вільного члена й інтеграла по інтервалу, що відповідає ширині шару:

$$F(t, x) = F_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{vv_1^2} \frac{(1+i)}{4\sqrt{k\pi}} \int_a^b dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{x-x'}} e^{ik(x-x')/2} e^{i\frac{v^2 k}{2(x-x')}(t-t')^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} F(t', x') \quad (2.66)$$

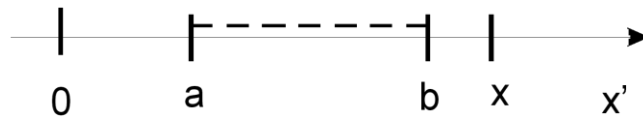


Рисунок 2.6— Положення шару праворуч від джерела й від нульової точки, точка спостереження $x \notin (a, b)$, $x > b$

Інтеграл по інтервалу визначається значеннями функції всередині нього: поле являє собою суму випромінювання джерела поля, перевипроміненого шаром.

г) Якщо джерело знаходиться усередині шару, тобто інтервал, відповідний до товщини шару, потрапляє на додатну піввісь тільки частково, $a < 0$, і точка спостереження x знаходиться в цій частині інтервалу, $0 < x < b$ (рисунок 2.7), то в рівнянні (2.65) змінюється тільки нижня межа інтегрування:

$$F(t, x) = F_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{vv_1^2} \frac{(1+i)}{4\sqrt{k\pi}} \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{x-x'}} e^{ik(x-x')/2} e^{i\frac{v^2 k}{2(x-x')}(t-t')^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} F(t', x') \quad (2.67)$$

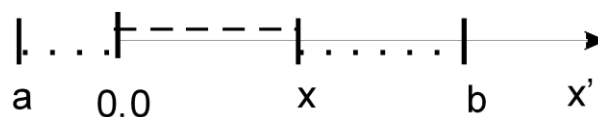


Рисунок 2.7– Положення джерела усередині шару, $a < 0$, $0 < x < b$

д) Якщо ж точка спостереження x знаходиться праворуч від шару, а він частково знаходиться на додатній півосі, то перевипромінювання буде тільки цією частиною інтервалу (рисунок 2.8)

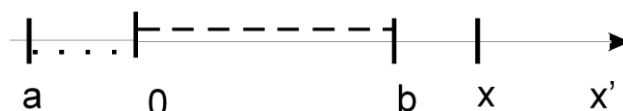


Рисунок 2.8– Положення точки спостереження x праворуч від інтервалу (a, b)

е) Якщо шар (a, b) знаходиться ліворуч від джерела (інтервал не знаходиться повністю ліворуч від нульової точки), то він ніяк не впливає на розв'язання поставленої задачі (рисунок 2.9)

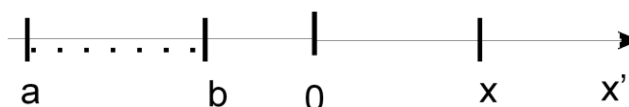


Рисунок 2.9– Положення точки спостереження x праворуч від джерела й нульової точки й розташування шару (a, b) ліворуч від джерела.

У порівнянні із задачею для хвильового рівняння змінюються ролі просторової й часової змінної. Просторова змінна переймає на себе роль часової, оскільки, стосовно неї з'являється неоднорідність. Усе дослідження напрямлене тільки в додатному напрямку вісі x , у той час як за часом однобічності немає. Функція Гріна хвильового рівняння індиферентна відносно просторових координат, але несиметрична відносно часу.

Розглянемо тепер задачу з іншою постановкою, а саме, початкову задачу відносно просторової змінної.

Нехай поле задане в точці $x = 0$ в будь-який момент часу

$$E(t, x)|_{x=+0} = E_0(t) = \bar{F}(t). \quad (2.68)$$

Тоді задачу можна переформулювати у такий спосіб: розглянемо рівняння з початковою умовою

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial x} + k^2 F &= f(t, x), \\ F(t, x)|_{x=+0} &= \bar{F}_0(t) \end{aligned}, \quad (2.69)$$

$$\text{де } f(t, x) = \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} h(x) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Розв'язок рівняння (2.69) визначається сумою потенціалів

$$F(t, x) = G * f + G * \bar{F}_0(t), \quad (2.70)$$

де в першому потенціалі передбачається, що функція $f(t, x)$ продовжена нулем на негативну піввісь $x < 0$

$$\begin{aligned} G * f(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', x-x') \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} h(x') \theta(x') \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} = \\ &= \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', x-x') \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} h(x') \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} \end{aligned}, \quad (2.71)$$

а другий інтеграл визначає вільний член інтегрального рівняння

$$F_0(t, x) = G * \bar{F}_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', x) \bar{F}_0(t'). \quad (2.72)$$

Вільний член (2.71) повинен задовольняти граничній умові

$$F_0(t, x)|_{x=+0} = \bar{F}_0(t). \quad (2.73)$$

Таким чином, співвідношення (2.70) має вигляд інтегрального рівняння:

$$F(t, x) = F_0(t, x) + \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', x-x') h(x') \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2}. \quad (2.74)$$

Підставивши функцію Гріна в (2.74), остаточно отримуємо:

$$F(t, x) = F_0(t, x) - \frac{(1+i)v}{4\sqrt{k\pi}} \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \theta(x) \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{x-x'}} e^{ik(x-x')/2} e^{i\frac{v^2 k}{2x}(t-t')^2} h(x') \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2}, \quad (2.75)$$

де вільний член $F_0(t, x)$ визначається полем у нульовій точці:

$$\bar{F}_0(t) = F_0(t, x)|_{x=+0}: F_0(t, x) = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{k\pi x}} e^{ikx/2} \theta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\frac{v^2 k}{2x}(t-t')^2} \bar{F}_0(t') \quad (2.76)$$

У параксіальному випадку неоднорідність існує увесь час, а вільний член являє собою випромінювання джерела, розташованого в деякій точці, наприклад, у точці x_0 , у півпросторі правіше від цієї точки $x > x_0$. Відбите поле буде у випадку, якщо $a > x_0$.

2.3 Метод резольвенти для розв'язання інтегрального рівняння нестационарної граничної задачі

Для розв'язання інтегральних рівнянь існують як точні, так і наближені методи (метод послідовних наближень, заміна інтеграла кінцевою сумою, метод квадратур тощо) [147, 156 160]. Вибір методу розв'язання залежить від виду рівняння. Точний розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра другого роду можна отримати методом резольвенти. Суть цього методу полягає у використанні спеціальної функції, названою резольвентою.

Якщо точка спостереження розташована усередині об'єму $V(t)$, то інтегральне рівняння (2.52) є інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду і його розв'язок може бути знайдене за допомогою резольвенти \hat{R} [121, 126]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} + \hat{R}\mathbf{F}, \quad (2.77)$$

де \mathbf{E} й \mathbf{F} - вектор-функції й

$$\hat{R} = \int d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \hat{R} | \mathbf{x}' \rangle. \quad (2.78)$$

У формулі (2.78) і нижче будуть використовуватися дужкові позначення Дірака $\langle A \rangle$ для елементів оператора A . Резольвенту \hat{R} отримано методом послідовних наближень й представлено у вигляді ряду:

$$\hat{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}^n = (\hat{I} - \hat{K})^{-1} \hat{K} = \hat{K} (\hat{I} - \hat{K})^{-1}, \quad (2.79)$$

З рівняння (2.79) випливає операторне рівняння для резольвенти:

$$\hat{R} - \hat{K}\hat{R} = \hat{K}, \quad (2.80)$$

$$\hat{R} - \hat{R}\hat{K} = \hat{K}. \quad (2.81)$$

Надалі будемо використовувати першу форму цих рівнянь.

Підставляємо знайдене по формулі (2.77) поле у формулу

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} + \hat{K}\mathbf{E}, \quad (2.82)$$

де

$$\hat{K} = \int d\mathbf{x}' \left\{ \langle \mathbf{x} | \Gamma_e | \mathbf{x}' \rangle \chi \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} (\hat{P}_1 - \hat{P}_{ex}) - \langle \mathbf{x} | \Gamma_b | \mathbf{x}' \rangle \chi \mu_0 \mu (\hat{M}_1 - \hat{M}_{ex}) + \langle \mathbf{x} | \Gamma_j | \mathbf{x}' \rangle \mu_0 \mu (\chi \hat{j}_1 + \hat{i} \delta(S)) \right\}, \quad (2.83)$$

і оператори $\hat{P}_1, \hat{M}_1, \hat{j}_1$ і \hat{i} відповідають функціям $\mathbf{P}_1(\mathbf{E}), \mathbf{M}_1(\mathbf{E}), \mathbf{i}(\mathbf{E}), \mathbf{j}_1(\mathbf{E})$, Ці функції отримані зі співвідношень для узагальнених функцій $\mathbf{P}(\mathbf{E}), \mathbf{M}(\mathbf{E}), \mathbf{j}(\mathbf{E})$, які описують електромагнітне представлення середовища у всьому просторі [126].

Вважаючи, що точка спостереження знаходиться за межами об'єму $V(t)$, запишемо вираз для поля поза $V(t)$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_{ex} + \hat{K}_{ex} \mathbf{E}_{in} = \mathbf{F}_{ex} + \hat{K}_{ex} (\mathbf{F}_{in} + \hat{R} \mathbf{F}_{in}) = \mathbf{F}_{ex} + \hat{N} \mathbf{F}_{in}. \quad (2.84)$$

У формулі (2.84) індекси «ex» і «in» позначають належність точки спостереження до зовнішньої або внутрішній частині об'єму $V(t)$. Введений у формулі (2.84) оператор відбиття дорівнює:

$$\hat{N} = \hat{K}_{ex}(\hat{I} + \hat{R}). \quad (2.85)$$

Таким чином, задача знаходження електричного поля зводиться до побудови резольвентного оператора. Більш докладне описання вищенаведених формул наведено в [126].

Для визначення основних особливостей методу резольвенти розглянемо одновимірну задачу для електромагнітного поля в діелектричному півпросторі, у якому діелектрична проникність фонового середовища ε змінюється на величину ε_1 . Також фонове середовище вважається немагнітною ($\mu = 1$), недисперсійним та без втрат. Характеристична функція визначається як $\chi(\mathbf{x}) = \theta(x)$.

Нехай електромагнітне поле не залежить від поперечних координат y і z , а залежить тільки від поздовжньої координати x , вісь якої перпендикулярна нестационарній межі розділення середовищ, рівняння якої можна записати у вигляді $x = 0$. Така умова виконується для електромагнітних хвиль, що падають на межу розділення середовищ по нормалі. Опускаємо поперечні координати у рівнянні

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{F} + \int d\mathbf{x}' \left\{ \langle \mathbf{x} | \Gamma_e | \mathbf{x}' \rangle \chi \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} (\hat{P}_1 - \hat{P}_{ex}) - \right. \\ \left. - \langle \mathbf{x} | \Gamma_b | \mathbf{x}' \rangle \chi \mu_0 \mu (\hat{M}_1 - \hat{M}_{ex}) + \langle \mathbf{x} | \Gamma_j | \mathbf{x}' \rangle \mu_0 \mu (\chi \hat{J}_1 + i \delta(S)) \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

та інтегруємо за формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int dy' dz' \frac{\delta(\tau - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 2\pi v \theta(\tau) \theta(v\tau - |x - x'|), \quad (2.87)$$

де $\tau = t - t'$. Враховуючи також, що $\nabla(\nabla \mathbf{E}) = 0$, у цьому випадку виходить скалярне рівняння для електричного поля:

$$E = F + \int d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \hat{K} | \mathbf{x}' \rangle E(\mathbf{x}'). \quad (2.88)$$

Ядро цього інтегрального рівняння має вигляд

$$\langle \mathbf{x} | \hat{K} | \mathbf{x}' \rangle = -\alpha \theta(x) \langle \mathbf{x} | \hat{\Gamma} | \mathbf{x}' \rangle \theta(x'), \quad (2.89)$$

де $\alpha = (\varepsilon_1 - \varepsilon) / 2\varepsilon v$ и $\langle \mathbf{x} | \hat{\Gamma} | \mathbf{x}' \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta \left(\tau - \frac{|x - x'|}{v} \right)$.

Зміст інтеграла в (2.88) полягає в інтегруванні по $\mathbf{x} = (t, x)$ при $0 \leq t < \infty$, $-\infty < x < \infty$.

Якщо вилучити множник одиничної функції $\chi(\mathbf{x}) = \theta(x)$, то отримуємо задачу в необмеженому просторі з резольвентою

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R}^{(1)} | \mathbf{x}' \rangle = -\alpha \frac{v_1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right). \quad (2.90)$$

З рівняння (2.90) видно, що твірні конуса резольвенти являють собою характеристики, уздовж яких визначаються властивості середовища. Внесок відбитої характеристики визначається коефіцієнтом $R = (v - v_1) / (v + v_1)$ [126]. Резольвента для області з однієї границею розділення середовищ визначається формулою (рисунок 2.10):

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R} | \mathbf{x}' \rangle = \theta(x) \left\{ \langle \mathbf{x} | \hat{R}^{(1)} | \mathbf{x}' \rangle - \alpha \frac{v_1}{v} \frac{\partial}{\partial t} R \frac{\partial}{\partial t} \theta \left(t - t' + \frac{x + x'}{v_1} \right) \right\} \theta(x'), \quad (2.91)$$

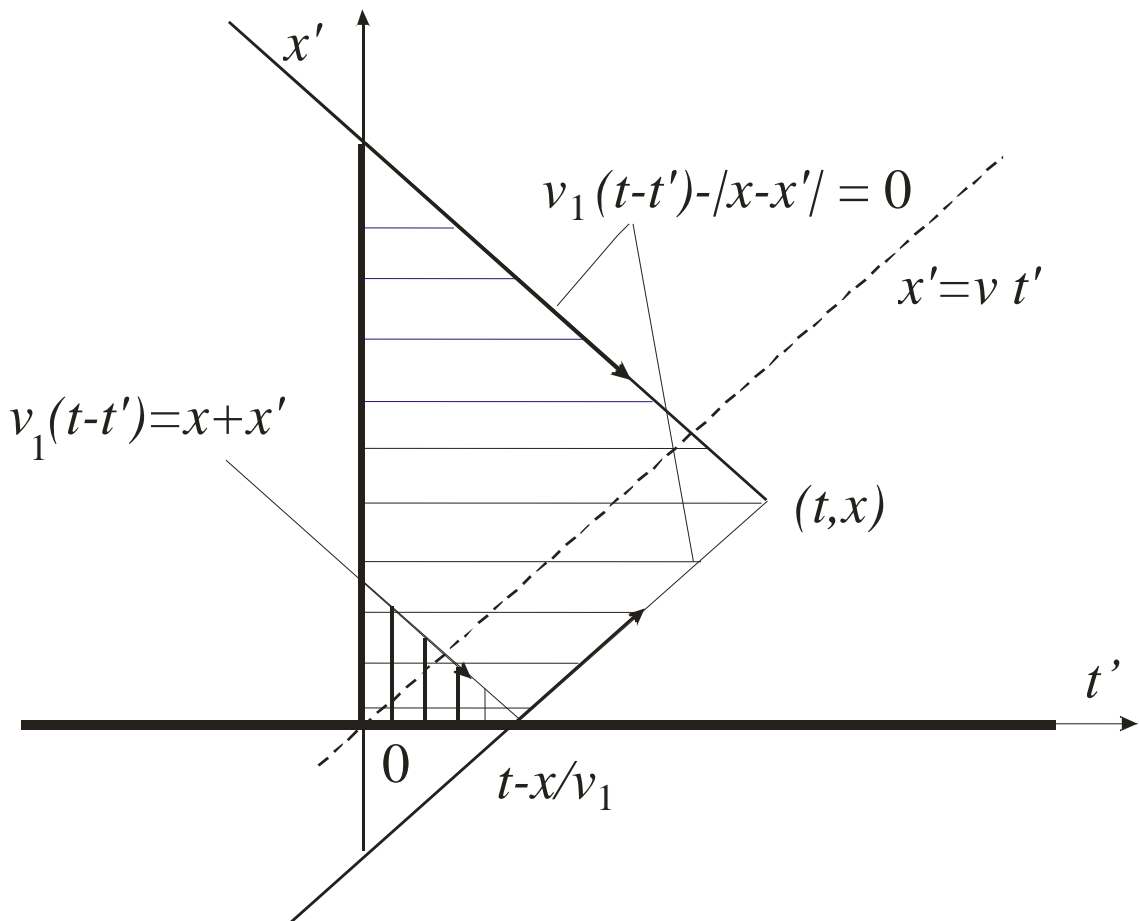


Рисунок 2.10–Відбиття конуса резольвенти від світлової межі.

Розглянемо тепер метод інтегральних рівнянь Вольтерра для визначення поля хвилі, що пройшла з півпростору із середовищем ε через плоску межу в нескінченний півпростір, що займає середовище з діелектричною проникністю ε_1 . Скористаємось інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду, яке має вигляд:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2\varepsilon v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E(t', x'), \quad (2.92)$$

де $E_0(t, x)$ – первинне поле, $E(t, x)$ (t, x) – поле в точці спостереження (t, x).

Якщо точка спостереження (t, x) знаходиться в півпросторі з діелектричною проникністю ε_1 , то розв'язок цього рівняння будемо шукати за допомогою методу резольвенти, отриманої вище для випадку утворення

півпростору в нульовий момент часу на півосі $0 \leq t < \infty$. Резольвента інтегрального рівняння в цьому випадку складається із двох частин:

$$\hat{R} = \theta(x)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)\theta(x'), \quad (2.93)$$

де:

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R}_1 | \mathbf{x}' \rangle = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1}\right) \theta(x'), \quad (2.94)$$

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R}_2 | \mathbf{x}' \rangle = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x) R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1}\right) \theta(x'). \quad (2.95)$$

У формулах (2.94)–(2.95) фазові швидкості хвиль рівні $v = c / \sqrt{\varepsilon}$, $v_1 = c / \sqrt{\varepsilon_1}$.

Продовжимо резольвенту (2.93) на всю числову область як показано на рисунку 2.11.

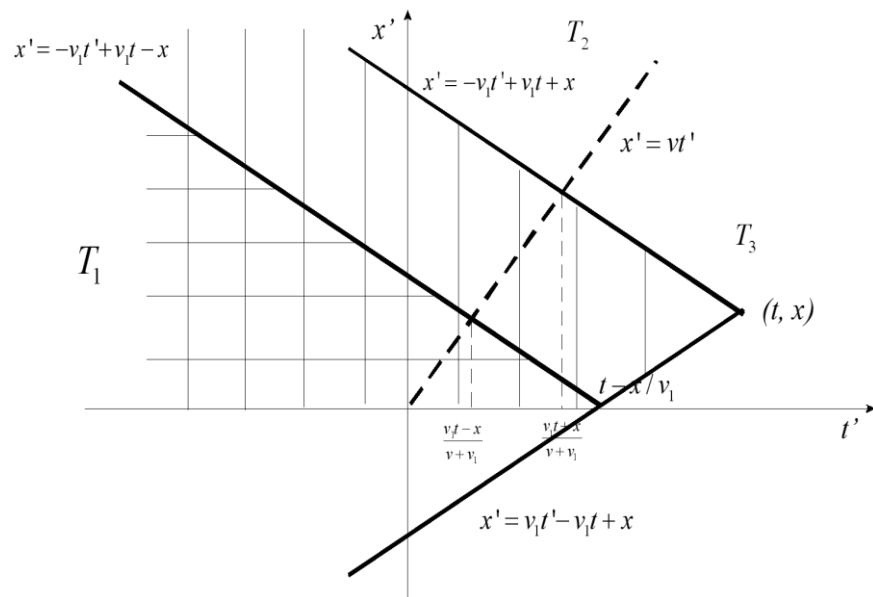


Рисунок 2.11–Відбиття конуса резольвенти від світової межі в необмеженому просторі

Характеристики резольвенти, $x' = -v_1 t' + v_1 t - x$, $x' = -v_1 t' + v_1 t + x$ і $x' = v_1 t' - v_1 t + x$, обумовлені дельта-функціями, показані рисунку 2.11 суцільними лініями.

Поле необмеженої хвилі, що пройшло через границю розділення середовищ, визначається формулою:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_0(t, x) + \theta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dx' \left\{ \langle \mathbf{x} | \hat{R}_1 | \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{x} | \hat{R}_2 | \mathbf{x}' \rangle \right\} E_0(t', x') = \\
&= E_0(t, x) + \theta(x) \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^x dx' \theta \left(t - t' - \frac{x - x'}{v_1} \right) E_0(t', x') + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_x^{\infty} dx' \theta \left(t - t' + \frac{x - x'}{v_1} \right) E_0(t', x') + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dx' R \theta \left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1} \right) E_0(t', x') \right\}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Підставивши первинне поле $E_0(t, x)$ у вигляді плоскої монохроматичної хвилі в (2.96) і обчисливши відповідні інтеграли, отримаємо:

$$E_1 = E_0(t, x) + \theta(x) \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \left\{ \frac{2v^2 v_1}{(v^2 - v_1^2)} e^{i\omega(t - \frac{x}{v})} + \frac{4v^2 v_1^2}{(v^2 - v_1^2)(v + v_1)} e^{i\omega(t - \frac{x}{v_1})} \right\}. \tag{2.97}$$

Таким чином, у наслідок взаємодії плоскої хвилі із межею утворюється хвиля такого ж типу, як і падаюча, і хвиля з новим хвильовим числом. Перша хвиля у формулі (2.98) гасить падаючу, що узгоджується з теоремою погашення Евальда-Озеєна [161]. Після спрощення в (2.97) отримуємо поле плоскої хвилі, що пройшла через межу розділення середовищ:

$$E_1 = \theta(x) \frac{2v_1}{v + v_1} e^{i\omega(t - \frac{x}{v_1})}. \tag{2.98}$$

Хвиля, що пройшла через межу, має частоту падаючої хвилі, нове хвильове число, відповідне до нового значення діелектричної проникності й амплітуду, що збігається з відомим співвідношенням.

Тепер розглянемо випадок більш складного первинного поля, а саме хвилю, обмежену переднім фронтом $E_0 = e^{i\omega(t - x/v)} \theta(t - x/v)$. Поле такої хвилі відмінно від нуля нижче пунктирної лінії $x' = vt'$, показаної на рисунку 2.12.

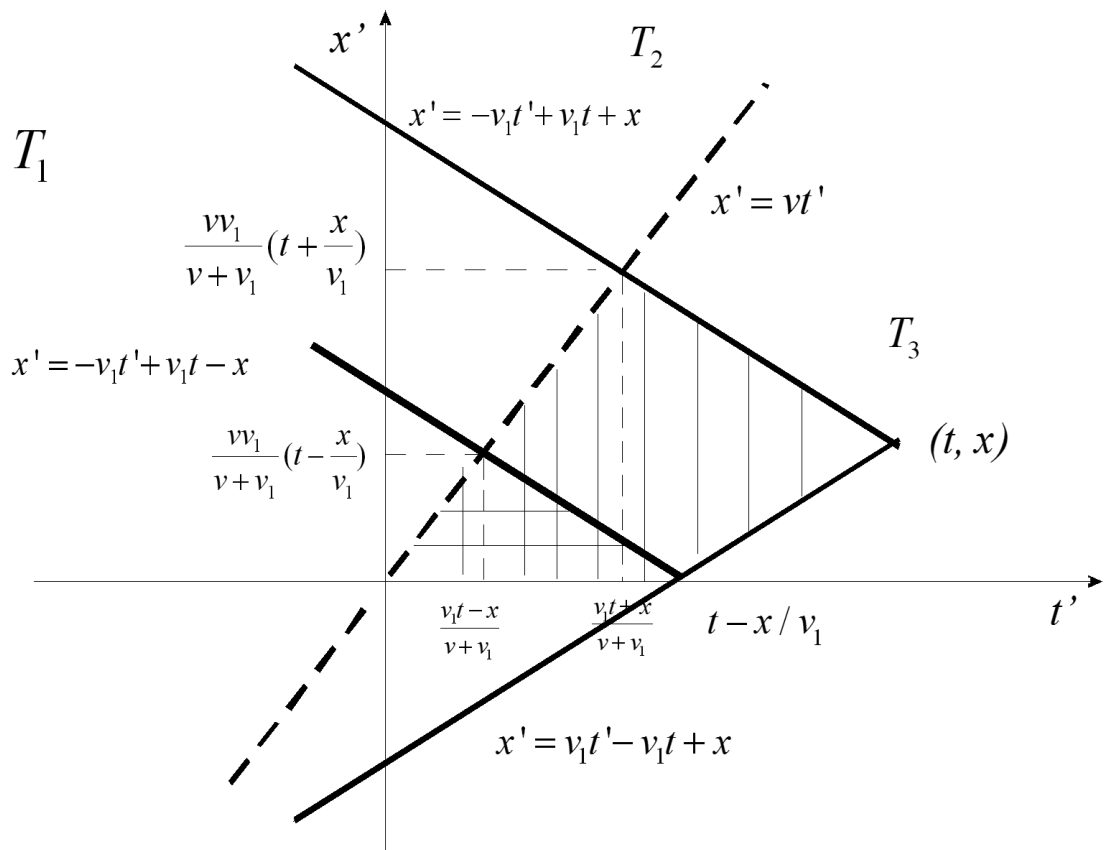


Рисунок 2.12– Відбиття конуса резольвенти від світової межі в необмеженому просторі для поля, обмеженого переднім фронтом.

Така задача еквівалентна задачі, коли півпростір з'являється у нульовий момент часу. Електричне поле буде обчислюватися по тій же формулі (2.96), якщо точка спостереження знаходиться праворуч від фронту падаючої хвилі. Тоді поле в цій точці буде мати вигляд:

$$E_1 = E_0(t, x) + \theta(x)\theta\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \left[-e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} + \frac{2v_1}{(v + v_1)} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} \right]. \quad (2.99)$$

Теорема погашення також виконується, і поле визначає тільки одна хвиля з новим хвильовим числом, як і у випадку необмеженої хвилі:

$$E_1 = \theta(x)\theta\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \frac{2v_1}{(v + v_1)} e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}. \quad (2.100)$$

Якщо ж точка спостереження знаходиться ліворуч від цієї ж лінії, то поле хвилі, що пройшла, буде дорівнювати нулю.

Вищевикладені методи були застосовані для дослідження плоскої монохроматичної хвилі, однак, метод резольвенти дозволяє розглядати довільне первинне поле. Подальші дослідження з використанням цього методу будуть зроблені для випадку імпульсу Ейри, що виступає в якості первинного поля.

Висновки по розділу

1. За допомогою інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, яке еквівалентно рівнянням Максвелла із включеними граничними й початковими умовами, сформульовано початково-граничну електродинамічну задачу про перетворення електромагнітних сигналів у неоднорідному нестационарному середовищі. Крім автоматичного включення граничних і початкових умов, інтегральне рівняння Вольтера має наочний фізичний зміст і універсально стосовно вільного члена рівняння.

2. Розглянуто параксіальне наближення такого рівняння. Суть такого наближення полягає в тому, що воно описує поширення хвиль переважно у напрямку, який становить малий кут з віссю симетрії середовища.

3. Розглянуто й проаналізовано ідеологію інтегральних рівнянь Вольтера у параксіальному наближенні. Отримано симетричну стосовно просторової координати функцію Гріна параксіального рівняння.

4. Докладно викладено метод резольвенти для розв'язання інтегрального рівняння задачі про перетворення електромагнітної хвилі. Метод резольвенти для розв'язання інтегрального рівняння дозволяє розглядати в якості первинного поля довільну електромагнітну хвилю. Докладні дослідження в дисертаційній роботі проведені для первинного поля у вигляді імпульсу Ейри.

5. Проведено аналіз поширення плоскої хвилі у неоднорідному середовищі, властивості якого різко змінюються в певний момент часу. Показано, що в результаті взаємодії плоскої хвилі із границею утворюється хвиля такого ж типу, як і падаюча, і хвиля з новим хвильовим числом. Одна з

новоутворених хвиль гасить падаючу, а друга має частоту падаючої й нове хвильове число, що відповідає новому значенню діелектричної проникності, й амплітуду, що збігається з відомим співвідношенням.

РОЗДІЛ 3

ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСІВ ПЛОСКОЮ МЕЖЕЮ РОЗДІЛЕННЯ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ

У даному розділі досліджується нестационарна задача про перетворення імпульсів неоднорідним середовищем. Детально досліджуються властивості проходження непараксіального імпульсу Ейрі через плоску нерухому нестационарну межу розділення середовищ. Динаміку процесу зміни електромагнітного імпульсу розглянуто для випадку релятивістського рівноприскореного руху межі середовища. Для трансформованого імпульсу Ейрі отримано точні вирази. Усі дослідження проведено за допомогою методу резольвенти, застосовуваного до інтегрального рівняння Вольтерра, що описує розглянутий процес.

3.1 Трансформація імпульсу Ейрі плоскою межею нестационарного діелектрика

Розглянемо задачу про перетворення імпульсу Ейрі межею нестационарного діелектрика методом інтегральних рівнянь Вольтерра [162–168]. Нестационарність полягає у різкій зміні у півпросторі $x > 0$ в нульовий момент часу значення діелектричної проникності середовища. Первинний електромагнітний імпульс $E_0(t, x)$, де t – час, x – просторова координата, поширюється перпендикулярно межі $x = 0$ з боку діелектрика із проникністю ε ($x < 0$).

Розглянемо в якості первинного поля імпульс, випромінюваний джерелом з кубічним спектром $\Phi(\omega) = e^{i(\omega T)^3/3}$.

Випромінювання такого джерела являє собою просторово-часовий імпульс, що описується функцією Ейрі

$$\text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT}\right) e^{\alpha(-t/T+x/vT)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{(\omega+i\alpha)^3}{3}} e^{i\omega x/vT} e^{-i\omega t/T} d\omega. \quad (3.1)$$

Тут параметр α характеризує дисипативні властивості середовища.

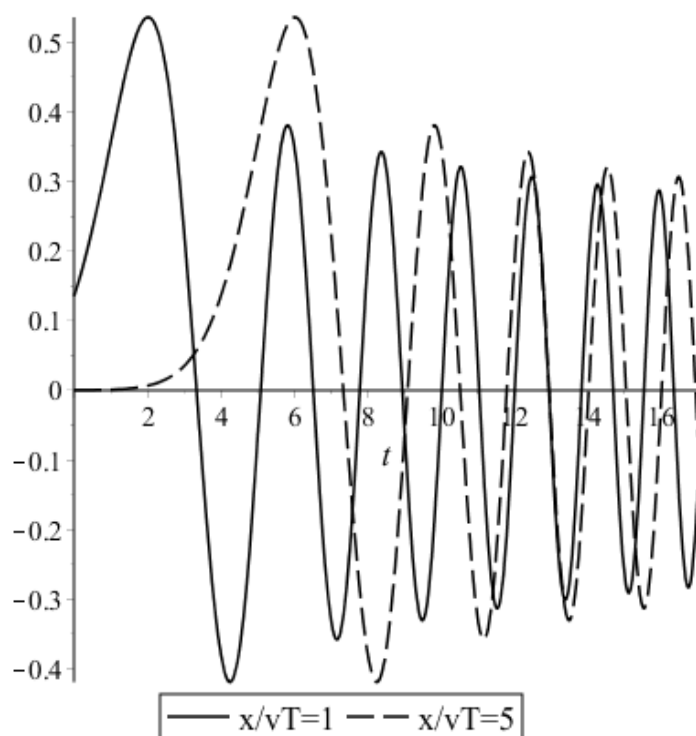
Беручи до уваги особливості функції Ейрі, імпульс (3.1) обмежений переднім фронтом [161, 169]:

$$\text{Ai}(z) = \frac{z^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \left[1 + o(z^{-3/2})\right], z \rightarrow +\infty \quad (3.2)$$

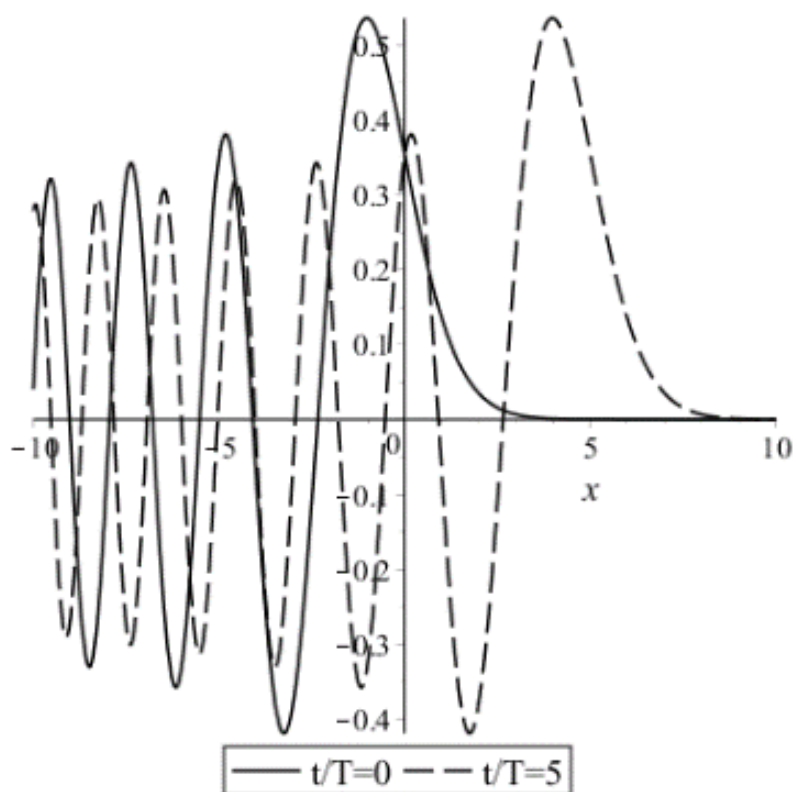
і його початкова позиція обрана так, що він починає взаємодіяти із межею в нульовий момент часу. Рисунок 3.1а демонструє часовий хід первинного імпульсу у двох різних точках, а розподіл величини поля уздовж шляху поширення в різні моменти часу показано на рисунку 3.1б. Електричне поле в точці спостереження (t, x) описується інтегральним рівнянням [126]

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{v_1^2 - v^2}{2v_1v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E(t', x'), \quad (3.3)$$

У рівнянні (3.3) у якості вільного члена $E_0(t, x)$ розглянуто імпульс Ейрі (0.1).



а) часовий хід первинного імпульсу у двох різних точках



б) розподіл поля уздовж шляху поширення в різні моменти часу

Рисунок 3.1—Просторово-часовий розподіл електромагнітного імпульсу Ейрі

Якщо точка спостереження (t, x) знаходиться в області імпульсу, що пройшов через межу (в області середовища з діелектричною проникністю ε_1), то співвідношення (3.3) являє собою рівняння для поля минулого імпульсу.

Якщо точка спостереження знаходиться в області середовища із проникністю ε , то це ж саме співвідношення являє собою формулу для розрахунку поля, відбитого імпульсу, по уже знайденому полю імпульсу, що пройшов через межу.

Первинний імпульс обмежений переднім фронтом і його взаємодія із межею розділення середовищ починається в нульовий момент часу. Тоді постановка задачі зводиться до добре досліджених задач про електромагнітне поле у нестационарному середовищі [126, 160].

Поле імпульсу, що пройшов через межу, визначається розв'язанням інтегрального рівняння (3.3), отриманого методом резольвенти, який описаний вище. Резольвента інтегрального рівняння складається із двох частин [126]:

$$\hat{R} = \theta(x)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)\theta(x'), \quad (3.4)$$

де перша її частина має такий же вигляд, як для випадку необмеженого півпростору:

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R}_1 | \mathbf{x}' \rangle = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1}\right) \theta(x'). \quad (3.5)$$

Друга частина резольвенти

$$\langle \mathbf{x} | \hat{R}_2 | \mathbf{x}' \rangle = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x) R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1}\right) \theta(x'), \quad (3.6)$$

обумовлена наявністю плоскої межі. Множник $R = (v - v_1) / (v + v_1)$ збігається з коефіцієнтом відбиття плоскої гармонійної хвилі від плоскої межі діелектричного середовища. Застосування резольвенти (3.4) до вільного члена рівняння (3.3) дає електричне поле імпульсу, що пройшов через межу розділення середовищ:

$$\begin{aligned}
E_{Tr}(t, x) &= E_0(t, x) + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \hat{R} E_0(t', x') = \\
&= \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right) E_0(t', x') + \right. \\
&\quad \left. + R \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \theta \left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1} \right) E_0(t', x') \right\}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Область інтегрування у першому доданку виразу (3.7), обумовлена нерівністю

$$t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} > 0.$$

Другий інтеграл у цій формулі враховує вплив межі розділення середовищ і область інтегрування в ньому, обумовлена нерівністю

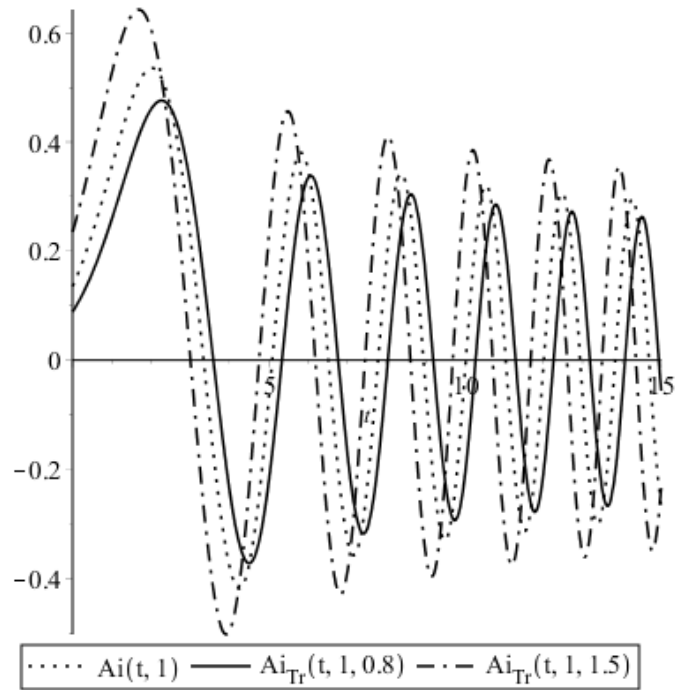
$$t - t' - \frac{x + x'}{v_1} > 0.$$

Первинний імпульс відмінний від нуля в області, що задається нерівністю, $x' < vt'$.

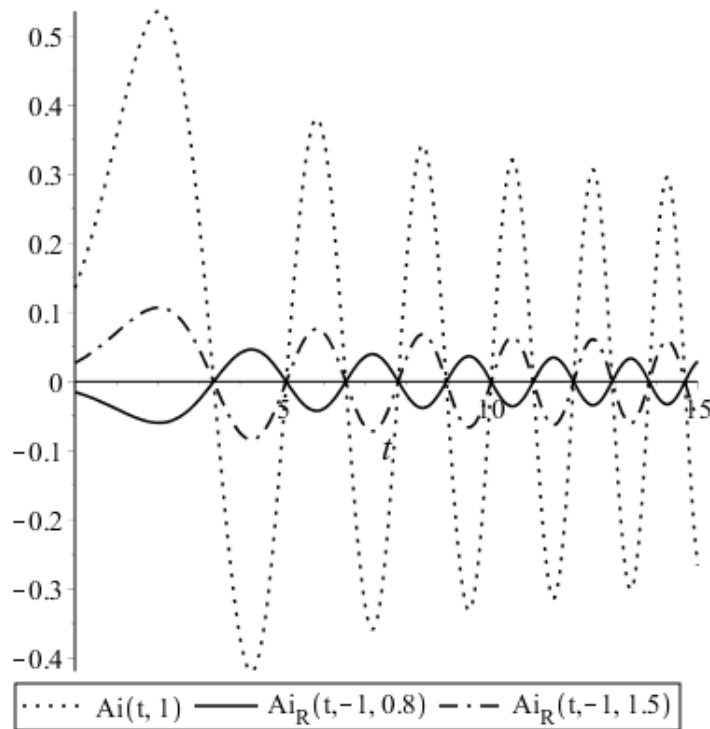
Результатом інтегрування у формулі (3.7) буде вираз імпульсу, що пройшов через межу. Він складається з віртуального імпульсу, який гасить падаючий імпульс, і другого, що представляє собою власне імпульс, що пройшов через межу. Це є демонстрацією виконання принципу погашення Евальда-Озеєна, про який згадувалося вище:

$$E_{Tr}(t, x) = E_0(t, x) - \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} \right) + \frac{2v_1}{v_1 + v} \theta(x) I_0 \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} \right). \tag{3.8}$$

Як і слід було очікувати, імпульс поширюється з новою швидкістю, що відповідає середовищу з діелектричною проникністю ε_1 . В більш оптично щільнім середовищі, $u = v_1 / v < 1$, відбувається затримка імпульсу Ейрі у часі, і прискорення в протилежному випадку. Форма імпульсу при цьому не змінюється, рисунок 3.2а, що пояснюється в цьому випадку відсутністю дисперсії середовища.



(а) Імпульс Ейрі, що пройшов через межу, $E_{Tr}(t, x)$ в точці $x/vT = 1$



(б) Відбитий імпульс Ейрі $E_R(t, x)$ в точці $x/vT = -1$

Рисунок 3.2– Часовий хід відбитого імпульсу Ейрі та того, що пройшов, після взаємодії із плоскою границею. Крапками показано первинний імпульс, суцільна лінія відповідає випадку $v_1/v = 0.8$, пунктирна із крапками відповідає випадку $v_1/v = 1.5$

Підставляючи вираз для вторинного поля (3.8) у вираз (3.3), та проводячи інтегрування, отримаємо вираз для відбитого від межі імпульсу:

$$E_R(t, x) = \frac{v_1 - v}{v_1 + v} I_0 \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right). \quad (3.9)$$

Відбитий імпульс також описується функцією Ейрі, поширюється в протилежному напрямку в порівнянні з падаючим і має суттєво меншу амплітуду, як показано на рисунку 3.2б. В більш оптично щільній середовищі, де $u = v_1 / v > 1$, відбитий імпульс відрізняється лише по величині від первинного. В оптично менш щільній середовищі відбувається переворот головного пелюстка відбитого імпульсу в порівнянні з головним пелюстком падаючого.

Коефіцієнт проходження

$$\frac{2v_1}{v_1 + v}$$

у формулі (3.8) і коефіцієнт відбиття

$$\frac{v_1 - v}{v_1 + v}$$

в (3.9) для імпульсу Ейрі збігаються з відповідними коефіцієнтами для плоскої гармонійної хвилі.

3.2 Просторово-часова структура імпульсу Ейрі у нестационарному середовищі

Асиметрична форма імпульсу Ейрі становить інтерес для подальшого дослідження процесу його взаємодії з неоднорідним середовищем. Особливий інтерес у розглянутому явищі являє наявність більш, ніж однієї асиметрії. Така асиметрія може бути представлена появою межі розділення або нестационарністю середовища [171–177]. Параметричні явища в активних середовищах довгий час привертала увагу у зв'язку з генерацією й посиленням електромагнітних хвиль за допомогою часової модуляції

параметрів середовища [178–187]. Дослідження перехідних електромагнітних явищ суттєво важливо для керування сигналом за допомогою часового настроювання параметрів середовища, що зумовлене активним розвитком оптоелектронних систем. Для побудови бажаної картини електромагнітного поля необхідно використовувати комплексну модуляцію параметрів середовища. Однак, основні особливості хвильового перетворення можна виявити, розглянувши простий випадок різкої зміни параметрів середовища в часі.

Розглянемо перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі $E_0(t, x)$ плоскою межею ($x > 0$), яка виникає в нульовий момент часу. До нульового моменту показник заломлення середовища дорівнював $n = \sqrt{\varepsilon}$, а після нульового моменту різко змінився до значення $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ (рисунок 3.3)

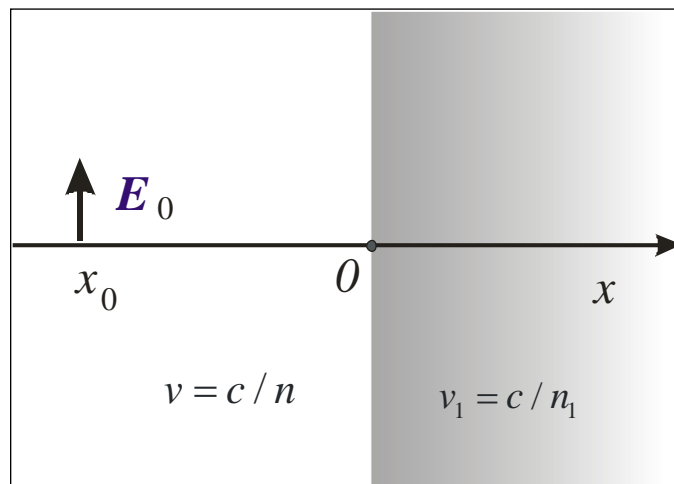


Рисунок 3.3– Геометрія задачі. Середовище з показником заломлення n_1 виникає в нульовий момент часу.

Первинний імпульс Ейрі поширюється перпендикулярно границі нестационарного діелектрика. Така постановка задачі визначає асиметрію в часі й просторі: у майбутньому ($t \rightarrow \infty$) і в минулому ($t \rightarrow -\infty$) ситуації відрізняються, а також ситуації різні в напрямку $x \geq 0$ й у протилежному випадку ($x \leq 0$).

Тепер будемо розглядати імпульс Ейрі залежно від стартового параметра

$$p = -\frac{t_0}{T} + \frac{x_0}{vT},$$

обумовленого моментом t_0 початку поширення імпульсу й місцем розташування джерела x_0 , що генерує імпульс:

$$E_0(t, x) = \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} - p\right). \quad (3.10)$$

де T – часовий масштаб.

Поведінка імпульсу t_0 в протилежних напрямках визначається асимптотиками

$$\text{Ai}(t) \approx \begin{cases} 2^{-1} \pi^{-1/2} t^{-1/4} \exp(-2t^{3/2}/3), & t \rightarrow +\infty \\ \pi^{-1/2} |t|^{-1/4} \sin\left(2|t|^{3/2}/3 + \pi/4\right), & t \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.11)$$

і визначає третю асиметрію в постановці задачі, показану на рисунку 3.4.

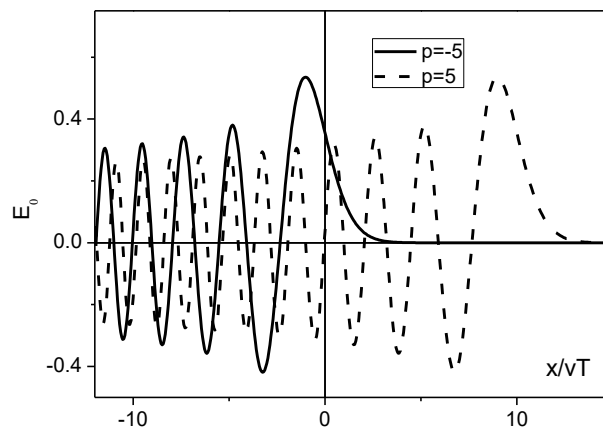
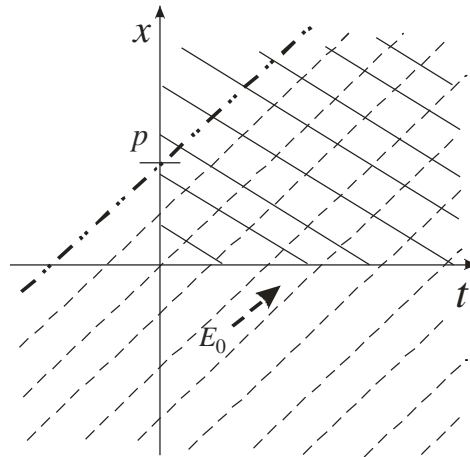


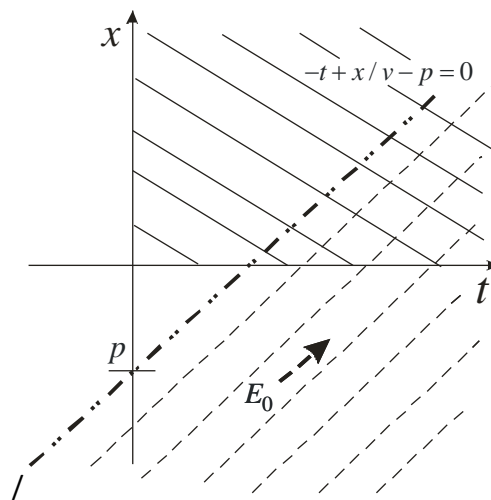
Рисунок 3.4– Просторовий розподіл імпульсу Ейрі в момент часу $t/T = 5$ для $p = -5$ (суцільна лінія) і $p = 5$ (пунктирна лінія).

Таким чином, розглядається потрійна асиметрія: асиметричність первинного імпульсу, асиметричність об'єкта дифракції й асиметрична поведінка цього об'єкта у часі.

Особливе значення в перетворенні імпульсу має знак його стартового параметра p . Положення переднього фронту первинного імпульсу в (3.10) визначається нерівністю $-t + x/v - pT > 0$. Ця нерівність визначає область у координатах простір-час із майже нульовим полем як показано на рисунку 3.6 жирною пунктирною лінією із двома крапками й тонкими пунктирними лініями.



(а) при додатному значенні стартового параметра $p > 0$



(б) при від'ємному значенні стартового параметра $p < 0$

Рисунок 3.5– Початкове положення імпульсу Ейрі у середовищі зі змінним у нульовий момент часу показником заломлення для різних значень стартового параметра p .

Суцільними лініями показано просторово-часову область, відповідну до нового стану середовища, де діелектрична проникність змінилася в

нульовий момент часу. Пунктирними лініями показано область, що займає первинний імпульс.

Якщо стартовий параметр приймає додатне значення $p > 0$, то головний пелюсток і частина «хвоста» первинного імпульсу Ейрі знаходиться глибоко в середовищі, де діелектрична проникність змінилася в нульовий момент часу (рисунок 3.6а). У протилежному випадку, при від'ємних значеннях $p < 0$, передній фронт імпульсу Ейрі не досягає межі до нульового моменту часу $t = 0$ (рисунок 3.6б)

Для розв'язання задачі про взаємодію імпульсу Ейрі із плоскою межею використовується метод інтегральних рівнянь Вольтерра, описаний вище. У випадку, коли показник заломлення середовища різко змінюється в нульовий момент часу, електричне поле описується рівнянням:

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2v_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) E(t', x'), \quad (3.12)$$

Поза нестационарним середовищем, $x \geq 0$, де показник заломлення різко змінюється, вираз (3.12) являє собою інтегральне рівняння для поля в цій частині середовища. Якщо точка спостереження (t, x) належить нестационарному середовищу ($t > 0, x > 0$), то розв'язок рівняння (3.12) визначає поле імпульсу, що пройшов через межу. Якщо ж точка спостереження (t, x) знаходиться поза нестационарним середовищем ($t > 0, x < 0$), то рівняння (3.12) є формулою для відбитого поля, що обчислюється по вже знайденому полю. Для $t < 0$ ядро інтегрального рівняння (3.12) дорівнює нулю, у наслідок чого $E(t, x) = E_0(t, x)$.

Для знаходження вторинного поля, яке визначається рівнянням,

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' R(t, t', x, x') E_0(t', x'), \quad (3.13)$$

використовуємо резольвенту інтегрального рівняння (3.13) [128]:

$$\hat{R} = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2v_1} \theta(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right) + \frac{v - v_1}{v + v_1} \theta \left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1} \right) \right] \theta(x'). \quad (3.14)$$

Підставимо вираз для резольвенти (3.14) у формулу для вторинного поля (3.13) і виконаємо інтегрування:

$$\int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \hat{R}(t, t', x, x') E_0(t', x') = -E_0(t, x) + E_T(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (3.15)$$

де перший доданок $-E_0(t, x)$ – це віртуальний імпульс, який гасить падаючий імпульс згідно з теоремою Евальда-Озеєна, а другий доданок визначає імпульс, що пройшов через границю $E_T(t, x)$.

Перший доданок, що входить до складу $E_T(t, x)$

$$E_{T_1} = \frac{2v_1}{v_1 + v} \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p \right), \quad (3.16)$$

являє собою проходження первинного імпульсу через межу, яка виникає в нульовий момент часу (рисунок 3.6). Він поширюється в тому ж напрямку, що й первинний імпульс, але з новою швидкістю, відповідною до середовища з новим показником переломлення.

Наступні два доданки, що входять до складу минулого імпульсу $E_T(t, x)$

$$E_{T_2} = \frac{v_1(v_1 - v)}{2v^2} \text{Ai} \left(\frac{v_1}{vT} \left(t + \frac{x}{v_1} \right) - p \right), \quad E_{T_3} = \frac{v_1(v_1 + v)}{2v^2} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{vT} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) - p \right) \quad (3.17)$$

є результатом розщеплення первинного імпульсу $E_0(t, x)$ на два інших унаслідок стрибка діелектричної проникності в нульовий момент часу [179]. Вони поширюються в протилежних напрямках, але імпульс $E_{T_3}(t, x)$ існує тільки в області $x > v_1 t$, тому що утворився вже після зміни діелектричної проникності. Цей імпульс зберігає той ж напрямок, що й первинний імпульс Ейрі, але має протилежний напрямок з імпульсом $E_{T_2}(t, x)$, який

поширюється в напрямку до межі, що утворилась. Цей імпульс, відбиваючись від межі ($x=0$), формує відбитий імпульс $E_{T_4}(t, x)$, що існує в середовищі, описаному нерівністю $0 < x < v_1 t$:

$$E_{T_4} = -\frac{v_1(v-v_1)^2}{2v^2(v+v_1)} \text{Ai}\left(\frac{v_1}{vT}\left(t - \frac{x}{v_1}\right) - p\right). \quad (3.18)$$

Таким чином імпульс, що пройшов через плоску межу, складається із чотирьох хвиль і має вигляд:

$$E_T(t, x) = \theta(x) \left[\theta\left(t - x/v_1\right)(E_{T_1} + E_{T_4}) + E_{T_2} + \theta\left(x/v_1 - t\right)E_{T_3} \right]. \quad (3.19)$$

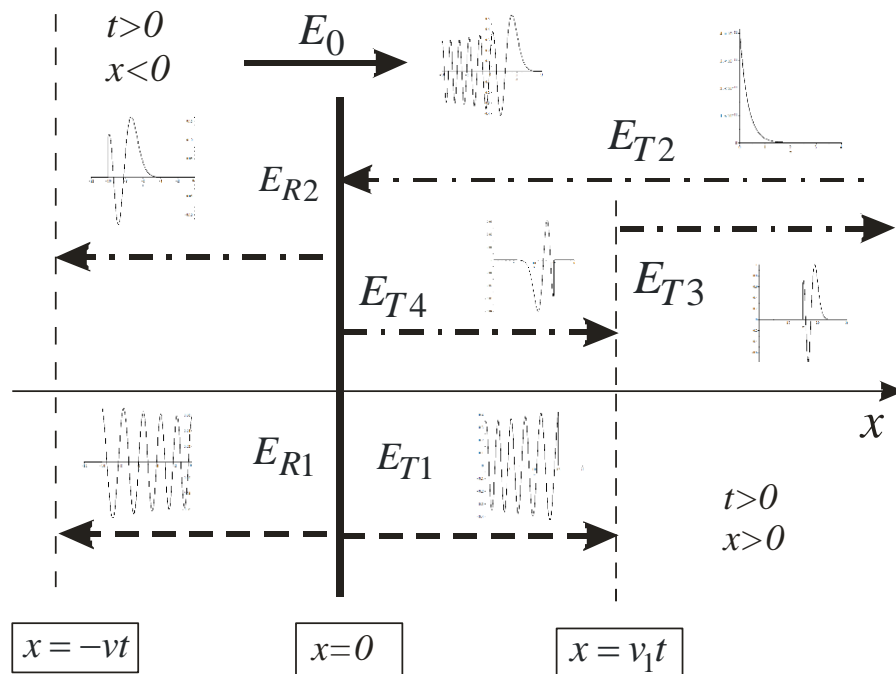


Рисунок 3.6—Положення дифрагованих імпульсів. Звичайні пунктирними стрілками, а імпульси, утворені в результаті зміни в часі середовища, позначені точечно-пунктирними стрілками.

Обчислення інтегралів у формулі (3.12) з використанням знайденого внутрішнього поля у формулі (3.19) визначає відбите від межі поле у вигляді

$$E_R(t, x) = \theta(t)\theta(-x)\theta\left(t + \frac{x}{v}\right)(E_{R_1} + E_{R_2}), \quad (3.20)$$

де компоненти поля $E_R(t, x)$ є виразами:

$$E_{R_1}(t, x) = \frac{v_1 - v}{v + v_1} \text{Ai} \left[-\left(t + \frac{x}{v}\right) / T - p \right], \quad (3.21)$$

та

$$E_{R_2}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v_1 - v}{v + v_1} \text{Ai} \left[\frac{v_1}{v} \left(t + \frac{x}{v}\right) / T - p \right]. \quad (3.22)$$

Перший імпульс $E_{R_1}(t, x)$ має звичайний аргумент $(-t + x/v)/T - p$, другий імпульс $E_{R_2}(t, x)$ має новий аргумент, який характеризується стрибком діелектричної проникності: $v_1(t + x/v)/vT - p$.

Схематичне зображення всіх дифрагованих імпульсів показано на рисунку 3.6. Стрибок у часі показника заломлення призводить до розщеплення первинного імпульсу на два $E_{T_1}(t, x)$ й $E_{T_2}(t, x)$, які поширюються в протилежних напрямках. Імпульс $E_{T_3}(t, x)$, що існує в області $x > v_1 t$, рухається у напрямку від межі. Імпульс $E_{T_2}(t, x)$ поширюється в напрямку до межі, частково її перетинає й частково відбивається, формуючи при цьому імпульс $E_{R_2}(t, x)$ в області відбитого поля $x < 0$. Імпульс $E_{T_2}(t, x)$ також частково відбивається від межі в області нестационарного середовища і дає при цьому імпульс $E_{T_4}(t, x)$. Цей імпульс відбивається від межі, що утворилась в нульовий момент часу, і існує в області $0 < x < v_1 t$. Первинний імпульс Ейрі $E_0(t, x)$ породжує вторинний імпульс $E_{T_1}(t, x)$, що пройшов через межу, в області $0 < x < v_1 t$ й відбитий імпульс $E_{R_1}(t, x)$ в області $-vt < x < 0$.

Легко переконатися з виразів (3.19) і (3.20) у тому, що електричне поле неперервне на межі діелектрика $(E_0 + E_R)|_{x=-0} = E_T|_{x=+0}$, а також у момент стрибка показника переломлення $(v_1/v)^2 E|_{t=-0} = E|_{t=+0}$.

Характер поширення вторинних імпульсів сильно залежить від значення стартового параметра p , а саме від його знака. Особливо добре це видно для відбитих імпульсів, які існують в області $-vt < x < 0$ й обумовлені наявністю межі (рисунок 3.7). Якщо стартовий параметр приймає додатне значення ($p > 0$), обидві компоненти відбитого поля, $E_{R_1}(t, x)$ і $E_{R_2}(t, x)$, присутні, але відбитий імпульс поширюється зі зміненою фазою

$$E_{R_2}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v_1 - v}{v + v_1} \text{Ai} \left(\frac{v_1}{vT} \left(t + \frac{x}{v} \right) - p \right)$$

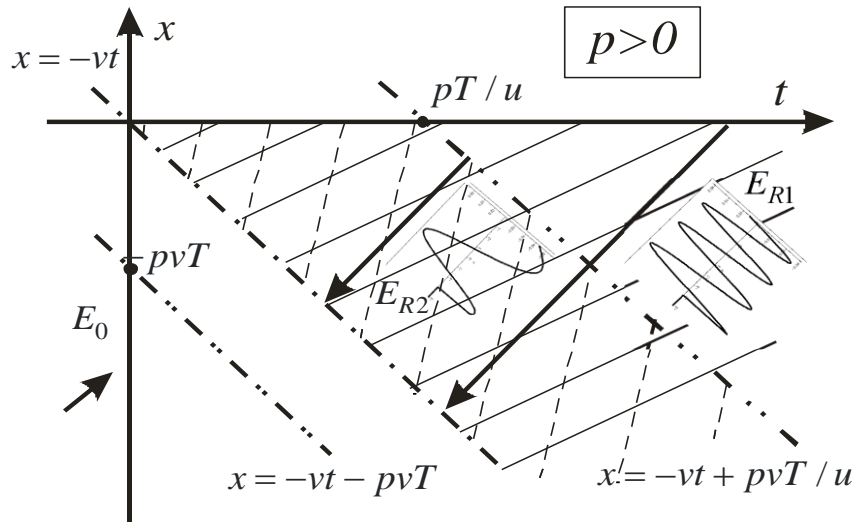
і займає тільки область, обумовлену нерівностями $x/v + t - pTv/v_1 < 0$ й $x/v + t > 0$ (показано на рисунку 3.7а подвійним штрихуванням). У випадку, коли стартовий параметр приймає від'ємне значення ($p < 0$), перехідна область є смугою в просторі координати-час

$$\left(\frac{x}{v} + t - pT < 0, \frac{x}{v} + t > 0 \right),$$

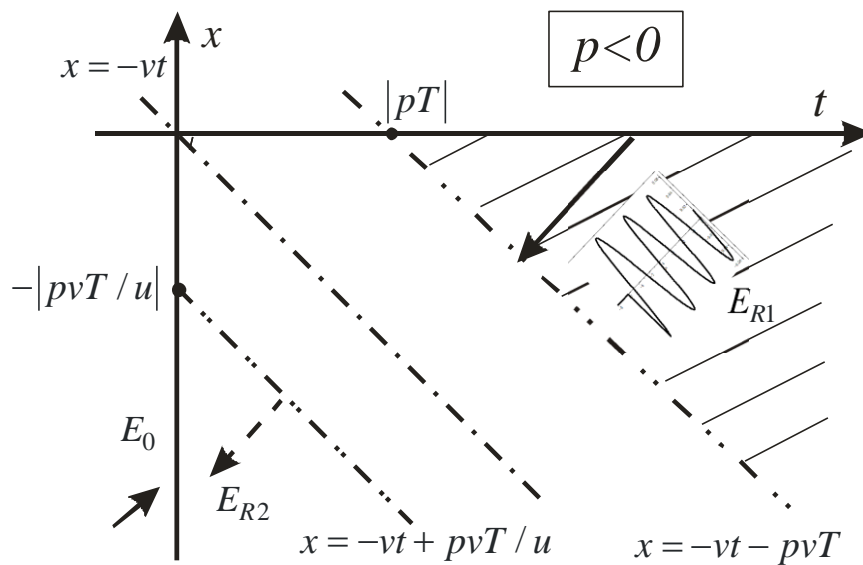
як показано на рисунку 3.7б.

Поширення усіх дифрагованих імпульсів поблизу межі розділення середовищ $E = E_T + E_R$ показано на рисунку 3.8 для різних значень стартового параметра.

Поширення поля поблизу межі середовища показано на рисунку 3.9. Характер цього розподілу дуже складний і суттєво відрізняється для двох знаків стартового параметра, $p > 0$ і $p < 0$. Ця складність пояснюється різними аргументами у функціях Ейрі, що входять до складу виразу для електричного поля: $\pm(v_1 t \pm x)/vT - p$ і $\pm(t \pm x/v_1)/T - p$ в полі імпульсу, що пройшов, а також у відбитому імпульсі $-(t + x/v)/T - p$ й $v_1(t + x/v)/vT - p$.

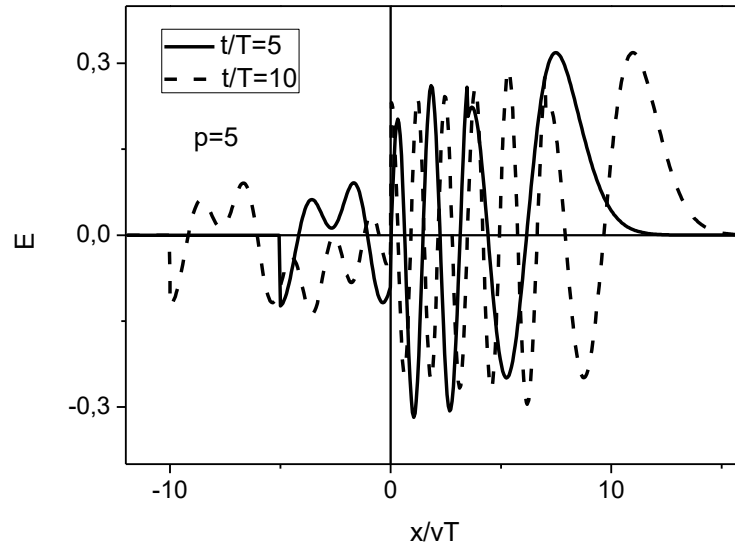


(а) геометрія задачі при додатному значенні стартового параметра

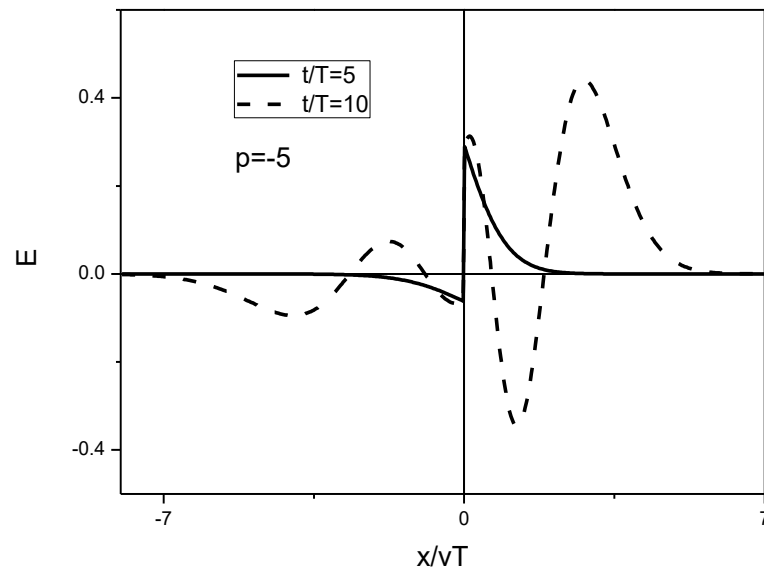


(б) геометрія задачі при від'ємному значенні стартового параметра $p < 0$

Рисунок 3.7– Просторово-часові зони в області відбитого поля для різних знаків стартового параметра в середовищі з показником заломлення, що дорівнює $v_1/v = 0.8$



(а) поширення імпульсу Ейрі при додатньому значенні стартового параметра $p = 5$



(б) поширення імпульсу Ейрі при від'ємному значенні стартового параметра $p = -5$

Рисунок 3.8– Вторинні імпульси поблизу межі для двох моментів часу $t/T = 5$ (суцільна лінія) і $t/T = 10$ (пунктирна лінія). Показник заломлення дорівнює $v_1/v = 0.8$

Внесок імпульсів, обумовлених зміною в часі параметрів середовища, добре вилено, якщо вилучити імпульси зі звичайними аргументами

$(-t + x/v_1)/T - p$ в полі імпульсу, що пройшов, та $-(t + x/v)/T - p$ у відбитому імпульсі й розглядати тільки імпульси з новими аргументами $\pm(v_1 t \pm x)/vT - p$ й $v_1(t + x/v)/vT - p$.

Це означає, що

$$E_{T_{new}} = \theta(x) \left[\theta(t - x/v_1) E_{T_4} (v_1(t - x/v_1)/vT - p) + \right. \\ \left. + E_{T_2} (v_1(t + x/v_1)/vT - p) + \theta(x/v_1 - t) E_{T_3} (-v_1(t - x/v_1)/vT - p) \right], \quad (3.23)$$

для минулого поля й

$$E_{R_{new}} = \theta(t) \theta(-x) \theta(t + x/v) E_{R_2} (v_1(t + x/v)/vT - p), \quad (3.24)$$

для відбитого.

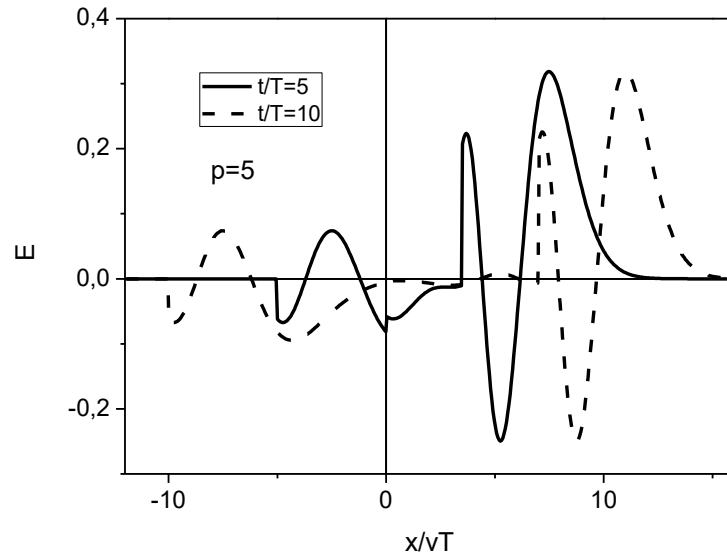
Розподіл поля імпульсів у просторі в різні моменти часу показано на рисунку 3.9.

Рисунок 3.10 ілюструє, що складний характер поширення поля на рисунку 3.9, пояснюється додаванням імпульсів зі старими аргументами

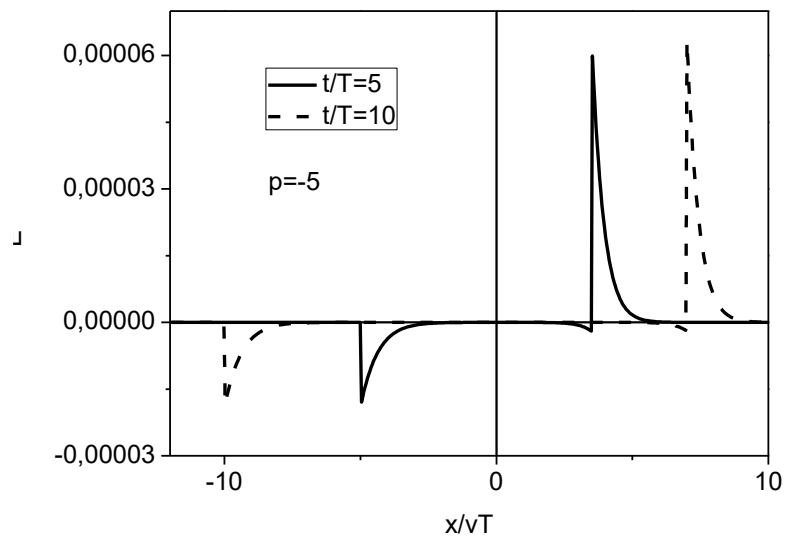
$$E_{ord} = \theta(x) \theta \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \frac{2v_1}{v_1 + v} \text{Ai} \left[-\left(t - \frac{x}{v_1} \right) / T + p \right] + \\ + \theta(-x) \theta \left(t + \frac{x}{v} \right) \frac{v_1 - v}{v + v_1} \text{Ai} \left[-\left(t + \frac{x}{v} \right) / T + p \right], \quad (3.25)$$

до імпульсів (3.23) і (3.24).

У такий спосіб показано, що всі дифракційні процеси в цій задачі повністю контролюються введеним стартовим параметром. Усі дифраговані імпульси складаються із двох видів імпульсів: імпульсів, обумовлених неоднорідністю середовища й імпульсів, утворених у результаті зміни характеристик середовища в часі.



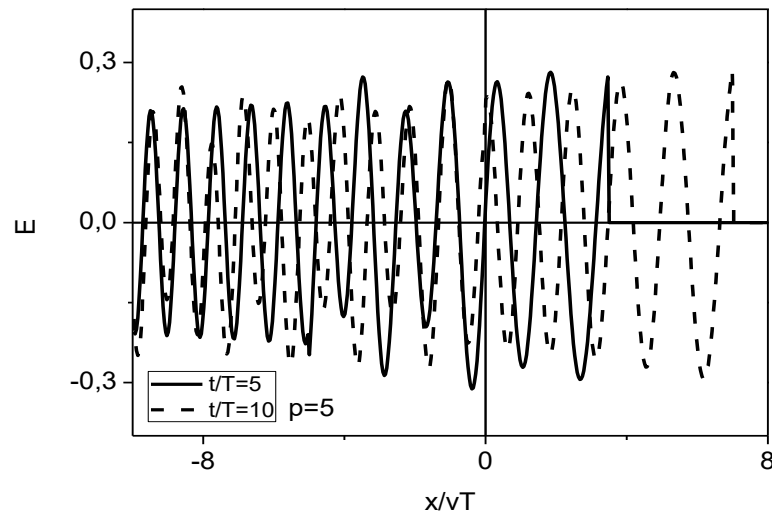
(а) розподіл поля імпульсу Ейрі при додатньому значенні стартового параметра $p = 5$



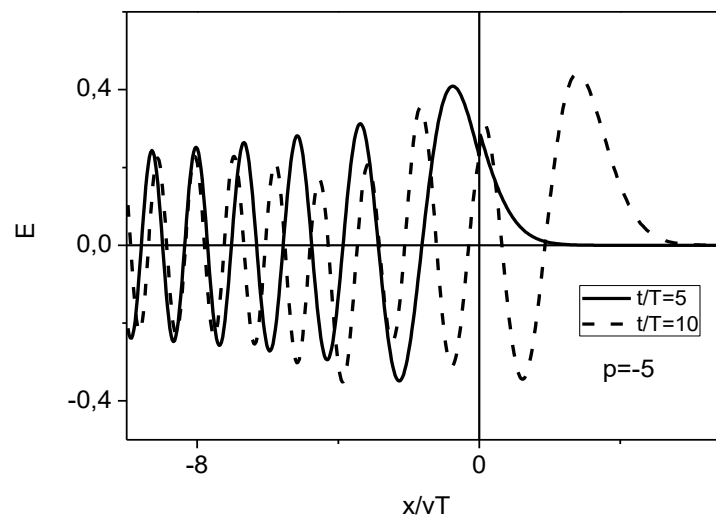
(б) розподіл поля імпульсу Ейрі при від'ємному значенні стартового параметра $p = -5$

Рисунок 3.9– Вторинні імпульси з новими аргументами в перехідній зоні для двох моментів часу $t/T = 5$ (суцільна лінія) і $t/T = 10$ (пунктирна лінія).

Показник заломлення дорівнює $v_1/v = 0.8$



(а) поширення імпульсу Ейрі при додатньому значенні стартового параметра $p = 5$



(б) поширення імпульсу Ейрі при від'ємному значенні стартового параметра $p = -5$

Рисунок 3.10– Вторинні імпульси з різними аргументами в перехідній зоні для двох моментів часу $t/T = 5$ (суцільна лінія) і $t/T = 10$ (пунктирна лінія).

Показник заломлення дорівнює $v_1/v = 0.8$

Знайдемо тепер потоки енергії

$$P(t, x) = E(t, x)B(t, x),$$

що переноситься імпульсами, розраховавши магнітне поле за допомогою рівняння Максвелла

$$B(t, x) = -\int_0^t \frac{\partial E(t', x')}{\partial x} dt'.$$

У результаті отримуємо сильно осцилюючу функцію, що обумовлена характером «хвоста» функції Ейри для більших негативних значень аргументу:

$$\text{Ai}(t) = \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + o(|z|^{-7/4})\right] \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3.26)$$

Оскільки при великих значеннях аргументу функція Ейрі стає квазіперіодичною, то для аналізу потоку енергії потрібно провести усереднення по часовому інтервалу T_0 . Аналіз асимптотичної формули (3.26) показує, що інтервал усереднення для функції Ейрі при $x \rightarrow -\infty$ може бути обраний із проміжку $t/T_0 \in [1.5; 3]$. Використовуючи формулу:

$$\bar{P}(t, x) = \frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} P(t', x') dt', \quad (3.27)$$

отримуємо усереднені потоки енергії для імпульсу, що пройшов

$$\begin{aligned} \bar{P}_{Tr}(t, x) = & \left(\frac{2u}{u+1}\right)^2 I_0^2 \left(\left[\text{Ai}\left(-\frac{t'}{T} + \frac{x}{v_1 T}\right) \right]^2 \theta(T_1 - t) + \right. \\ & \left. + \theta(t - T_1) \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \left[\text{Ai}\left(-\frac{t'}{T} + \frac{x}{v_1 T}\right) \right]^2 dt' \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

та для відбитого імпульсу:

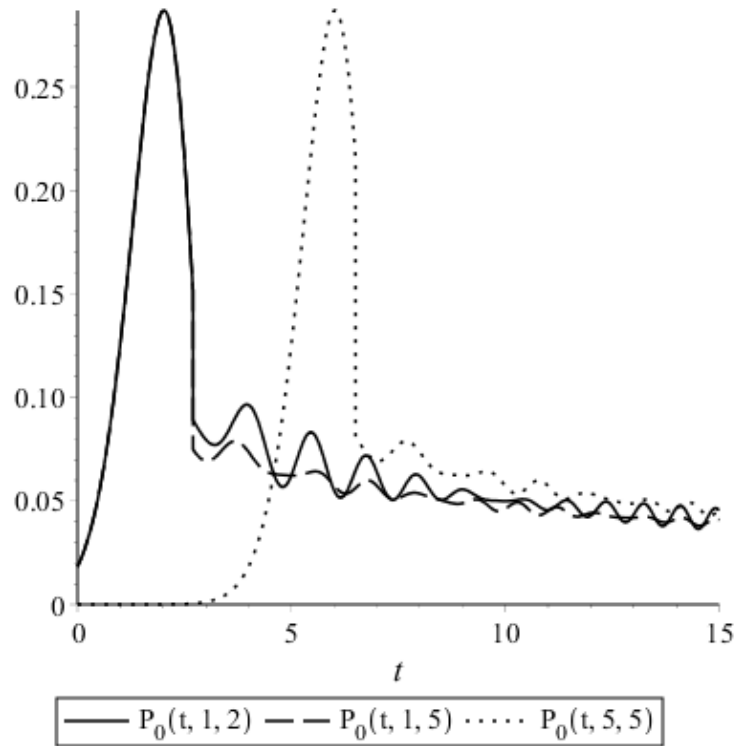
$$\bar{P}_R(t, x) = \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^2 I_0^2 \left(\left[\text{Ai} \left(-\frac{t'}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) \right]^2 \theta(T_1 - t) + \right. \\ \left. + \theta(t - T_1) \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \left[\text{Ai} \left(-\frac{t'}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) \right]^2 dt' \right), \quad (3.29)$$

де $\theta(T_1 - t)$, $\theta(t - T_1)$ - функції Хевісайда, які визначають межі усереднення для вторинних імпульсів, T_1 - права межа головного пелюстка. На рисунку 3.11 показано переміщення потоку енергії вторинних імпульсів Ейрі.

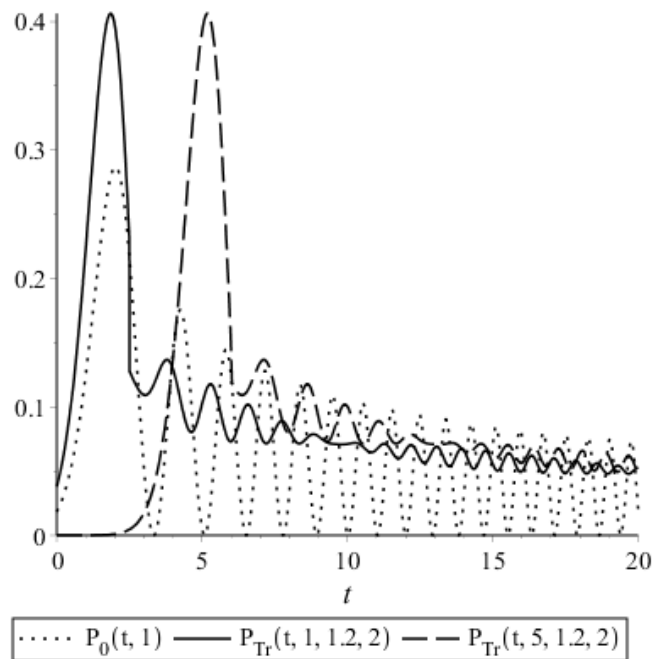
Залежність потоку енергії від просторової координати x визначається в аргументі підінтегральної функції Ейрі безпосередньо, а часова залежність являє собою усереднений по часовому проміжку t/T_0 результат.

На рисунку 3.11 показано вплив величини інтервалу усереднення на характер усередненого потоку енергії первинного імпульсу $\bar{P}_0(t, x, T_0)$.

Як і слід очікувати, збільшення T_0 приводить до більшого згладжування осциляцій «хвоста» сигналу. Такий самий ефект спостерігається й для вторинного імпульсу, головний пелюсток якого разом з усередненим осцилюючим «хвостом» зноситься від межі розділення середовищ. Це добре ілюструє рисунок 3.11б, на якому показано часовий хід потоку енергії імпульсу, що пройшов через межу $\bar{P}_{Tr}(t, x, T_0)$, отриманого шляхом чисельного інтегрування для випадку показника заломлення $v_1/v = 1.2$ й інтервалу усереднення $t/T_0 = 2$. Усереднені осциляції згодом асимптотично наближаються до того ж самого значення.



(a)



(б)

Рисунок 3.11– Переміщення максимуму потоку енергії первинного (а) і вторинного (б) імпульсів у середовищі з коефіцієнтом заломлення $v_1 / v = 1.2$

Переміщення усередненого потоку енергії відбитого імпульсу $\bar{P}_R(t, x, T_0)$ показано на рисунку 3.12 для таких же параметрів і $t/T_0 = 2$

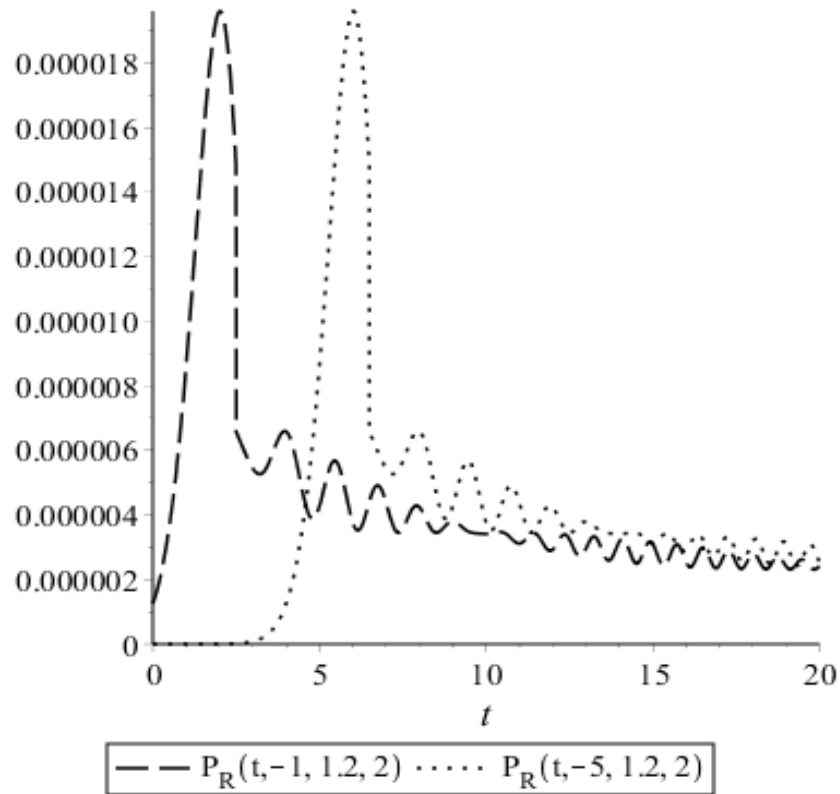


Рисунок 3.12– Часовий хід потоку енергії відбитого імпульсу в точках

$\frac{x}{vT} = -1$ і $\frac{x}{vT} = -5$ в середовищі з показником заломлення $v_1/v = 1.2$

Характер поширення відбитого імпульсу не змінюється з часом і максимум енергії досягається при значно менших значеннях у порівнянні з первинним імпульсом.

Баланс потоків енергії дифрагованих імпульсів Ейрі $\bar{P}_{Tr}(t, x, u, T_0) + \bar{P}_R(t, x, u, T_0)$ й первинного імпульсу $\bar{P}_0(t, x, T_0)$ показано на рисунку 3.13.

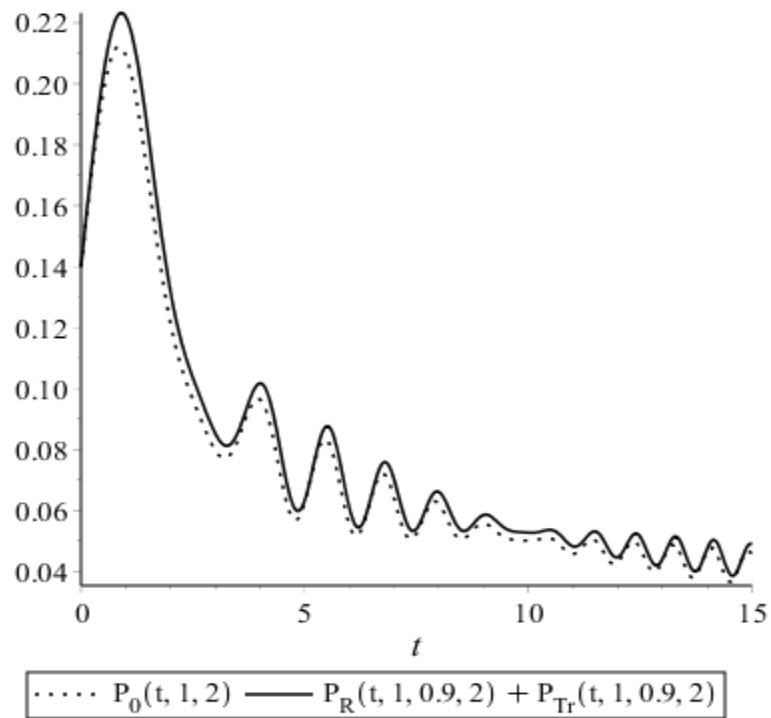


Рисунок 3.13– Баланс потоків енергії $\bar{P}_{Tr}(t, x, u, T_0) + \bar{P}_R(t, x, u, T_0)$ й $-\bar{P}_0(t, x, T_0)$ для параметрів $v_1 / v = 0.9$ і $T_0 = 2$

3.3 Особливості перетворення імпульсу Ейрі межею, що рівномірно рухається.

Цікаві особливості перетворення електромагнітних хвиль виникають при нестационарному переміщенні межі розділення середовищ, коли характер взаємодії електромагнітної хвилі із такою межею прямо залежить від співвідношення між їхніми швидкостями. Також цікаві особливості проявляються у випадку плавного нестационарного руху межі, коли її швидкість поступово досягає величини фазової швидкості хвилі. Така плавна нестационарність реалізується нерівномірним рухом межі. Особливості переміщення нестационарної межі, що рухається, вже описувались у роботах [188-190], але дослідження впливу на поширення хвилі неоднорідного руху у цих роботах не проводилося. Тому цікаво досліджувати випадок взаємодії електромагнітних хвиль на межі, яка здійснює нерегулярний рух. Таким неінерційним рухом є релятивістський рівноприскорений рух.

Спочатку розглянемо задачу про перетворення імпульсу Ейрі плоскою межею, яка починає рух у певний момент часу, тобто значення швидкості різко змінюється від нульових значень до значення u . Для опису цього явища використовується інтегральне рівняння Вольтерра (3.3) і в якості вільного члена цього рівняння розглядається електромагнітний імпульс Ейрі (3.1).

Положення межі визначається характеристичною функцією $\chi(t, x)$, яка дорівнює одиниці в півпросторі $x > 0$ й нулю в півпросторі $x < 0$. Ядро розглянутого інтегрального рівняння (3.3) відмінно від нуля тільки усередині світлового конуса з вершиною в точці спостереження (t, x) , описуваного функцією Хевисайда

$$\theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right).$$

Вважається, що до нульового моменту межа розділення середовищ була нерухомою, тобто $\chi^-(t', x') = \theta(x)$. У цьому випадку розв'язок рівняння (3.3) визначається співвідношеннями (3.16)-(3.22).

Розглянемо випадок, коли у нульовий момент часу межа починає свій рух $\chi^+(t', x') = \theta(x - x_s(t))$, але середовища по обидві сторони межі залишаються нерухомими. Змінюються межі інтегрування в (3.3): частина області інтегрування належить півплощині $T = \{0 < t < \infty, -\infty < x < \infty\}$, а рівняння для минулого поля визначається «історією» поля до моменту зміни швидкості границі:

$$E = F - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) \chi^+(t', x') E(t', x'). \quad (3.30)$$

У формулі (3.30) вільний член F рівняння визначається «історією» поля до нульового моменту часу й має вигляд:

$$F = E_0 - \frac{v^2 - v_1^2}{2vv_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) \chi^-(t', x') E_1(t', x'). \quad (3.31)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (3.3) отримано методом резольвенти \hat{R} , яка має вигляд [96]:

$$\begin{aligned} \hat{R} = & -\chi(x-ut) \frac{v^2 - v_1}{2v_1 v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{v - v_1}{v + v_1} \frac{\partial}{\partial t} \theta \left(v_1 t - x - \frac{v_1 - u}{v_1 + u} (v_1 t' + x') \right) \right\} \chi(x' - ut') \end{aligned} \quad (3.32)$$

Підставивши резольвенту (3.32) у рівняння (3.3), отримаємо вираз для електромагнітного поля у вигляді:

$$E(x) = F(x) - \frac{v^2 - v_1^2}{2v v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{R} F(x'). \quad (3.33)$$

Резольвента (3.32) визначає поле в наступних областях: перша область описується нерівністю $0 \leq t < x/v_1$ й характеризується відсутністю впливу межі розділення середовищ, друга область – нерівністю $ut \leq x < v_1 t$ й ураховує наявність межі.

Розглянемо випадок, коли рух межі розпочався в нескінченно далекому минулому, без прив'язки до певного моменту часу. У цьому випадку також можна використовувати резольвенту (3.3), продовживши в рівнянні (3.3) значення часової змінної t на від'ємну піввісь. Вільний член тоді дорівнює виразу для падаючої хвилі $F = E_0$. У результаті зустрічного руху імпульсу й межі з відповідним співвідношенням між швидкостями $|u| < v_1$ формується вторинний імпульс:

$$E_{T1}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v - u}{v_1 - u} \frac{2v_1}{v + v_1} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v - u}{v_1 - u} \frac{t}{T} + \frac{v - u}{v_1 - u} \frac{x}{vT} \right). \quad (3.34)$$

Імпульс $E_{T1}(t, x)$ існує тільки в області $x < v_1 t$, яка показано на рисунку 3.14 горизонтальним штрихуванням.

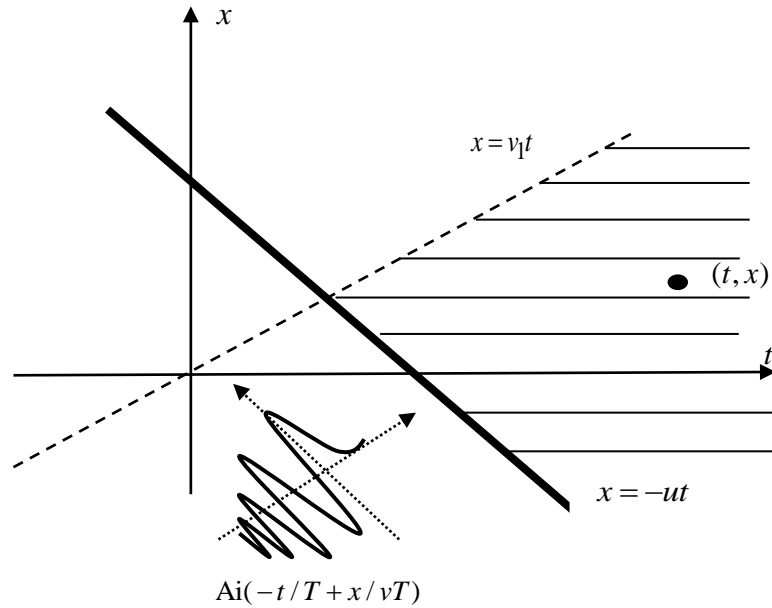


Рисунок 3.14—Область існування вторинного імпульсу

$$E_{T1}(t, x) \text{ при } |u| < v_1$$

У випадку зустрічного руху з надсвітловою швидкістю $-u > v_1$ формується два вторинні імпульси:

$$E_{T2}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT} \right) + \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{2v}{v+v_1} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} - \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} \right). \quad (3.35)$$

Таким чином, коли швидкість межі більше швидкості імпульсу, він досягнеться точки спостереження пізніше моменту початку руху межі. Це означає, що в цей момент відбудеться розщеплення імпульсу на два інших у результаті різкої зміни значення діелектричної проникності середовища. Після проходження імпульсом межі утворюється два імпульси, які поширюються з новою швидкістю v_1 в протилежних напрямках. Области існування вторинних імпульсів показано на рисунку 3.15. горизонтальним й вертикальним штрихуваннями відповідно.

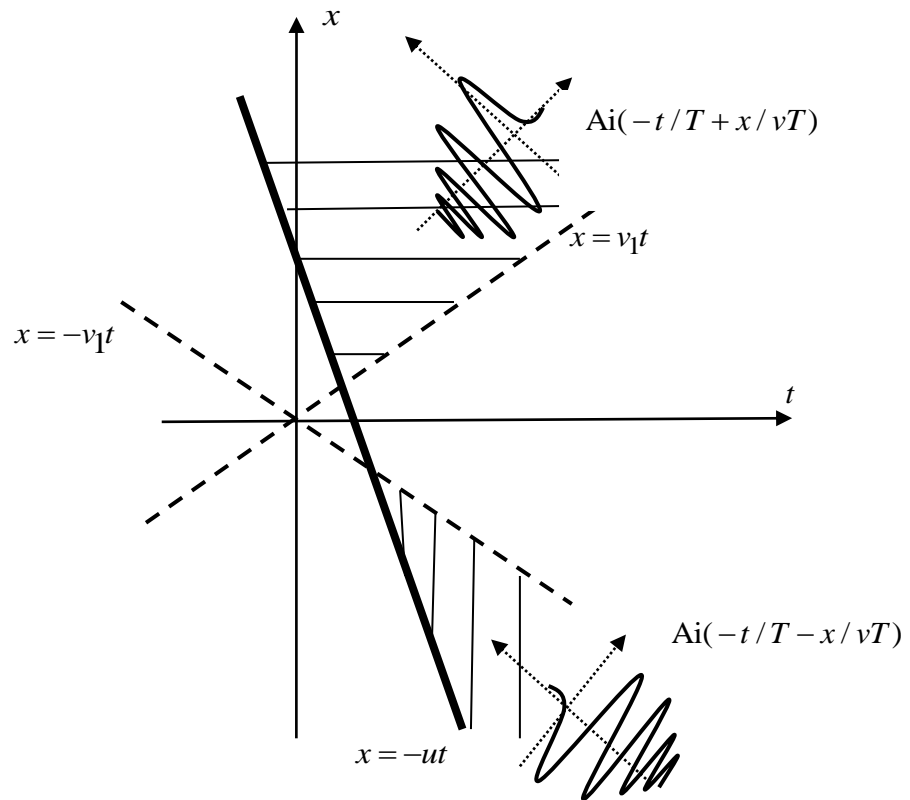


Рисунок 3.15– Область існування імпульсу $E_{T2}(t, x)$ при $-u > v_1$: область $(v_1/v)t < x < -ut$ - горизонтальне штрихування, область $-ut < x < -v_1 t$ - вертикальне штрихування.

Відбиті від межі імпульси знаходяться шляхом підстановки виразів (3.34) і (3.35) в оригінальне інтегральне рівняння, коли точка спостереження знаходиться в області $x < ut$. У випадку $-u > v_1, v$ відбиті імпульси не можуть обігнати межу в силу того, що швидкість межі перевищує швидкість поширення імпульсу.

При $|u| < v_1, v$ відбитий імпульс має вигляд:

$$E_R(t, x) = -\frac{v - v_1}{v + v_1} \frac{v - u}{v + u} \text{Ai} \left(\frac{v - u}{v + u} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} \right) \right). \quad (3.36)$$

Відбитий імпульс (3.36) існує тільки в області, обумовленій нерівністю $-ut < x < vt$.

Розглянемо тепер ситуацію, у якій рівномірний рух границі почався не в нескінченно далекому минулому, а в нульовий момент часу. Як уже описувалося раніше, в області $x > v_1 t$ стан межі не змінюється і поле в цій області визначається виразом, який отримано для випадку нерухомої до нульового моменту часу межі.

У випадку, коли $u > -v_1$, тобто коли швидкість межі більша за швидкість імпульсу, поле збігається з виразом (3.34). У протилежному випадку, $u < -v_1$, уся просторово-часова область ділиться на дві підобласті $T_2(v_1 t \geq x \geq -v_1 t)$ й $T_4(-v_1 t \geq x \geq ut)$. У першій з них поле складається із двох імпульсів Ейрі:

$$E_{T3}(t, x) = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT} \right) + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1-u} \text{Ai} \left(\frac{v-u}{v_1-u} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) \right). \quad (3.37)$$

У нестационарному випадку формується такий же імпульс, як і в стаціонарному (перший імпульс Ейрі у формулах (3.35) і (3.37) збігається). Відмінність полягає в тому, що у нестационарному випадку утворюється імпульс, обумовлений доданком F_0 , тобто «історією» поля до нульового моменту часу. Даний процес є аналогією процесу розщеплення падаючої на межу хвилі в результаті стрибка діелектричної проникності. Тільки у випадку зміни швидкості межі необхідно враховувати тепер зв'язок між швидкостями імпульсу й межі. А саме: у випадку $u > -v_1$ розщеплення неможливе, тому що в полі імпульсу, що пройшов, не можуть існувати імпульси, які поширюються в напрямку до межі. Для $u < -v_1$ після обчислення поля в підобласті T_4 одержимо імпульси:

$$\begin{aligned}
E_{T4}(t, x) = & \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{v+v_1}{2v} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1-u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1-u} \frac{x}{vT} \right) + \\
& + \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{v-v_1}{2v} \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1T} \right) \right) + \\
& + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1-u} \text{Ai} \left(\frac{v-u}{v_1-u} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1T} \right) \right) + \\
& + F_0 \frac{v-v_1}{2v} \frac{v+u}{v_1+u} \text{Ai} \left(\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1T} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Область існування поля $E_{T3}(t, x)$ в (3.37) показана на рисунку 3.16 горизонтальним штрихуванням, а область існування $E_{T4}(t, x)$ в (3.38) – вертикальним. В області $T_3(t, x)$ формується поле, що складається із двох імпульсів. Перший імпульс у формулі (3.37) такий же, як і у формулі (3.35) у стаціонарному випадку. Він поширюється в тому ж напрямку, що й падаючий, але рухається з новою швидкістю в області $x > v_1 t$. Різка зміна швидкості межі в нульовий момент часу призводить до утворення нового імпульсу в зоні $x < v_1 t$. Якщо межа рухається з меншою швидкістю, ніж імпульс, то розщеплення падаючого імпульсу неможливо, тому що вполі імпульсу, що пройшов, не можуть існувати імпульси, що рухаються в напрямку до межі.

Таким чином, просторово-часова картина даного явища ділиться на дві частини: до нульового моменту часу, коли границя була нерухомою, і після нульового моменту, коли розпочався її рух. Нестационарність такої задачі ускладнюється асиметричною формою імпульсу Ейрі. Тому для подальшого дослідження взаємодії імпульсу із межею розглянемо три випадки розташування імпульсу відносно межі в момент початку її руху як показано на рисунку 3.17: а) межа розпочала рух, коли імпульс ще не досяг її до нульового моменту часу; б) межа розпочала рух, коли передній фронт імпульсу вже досяг її до нульового моменту часу; в) межа розпочала рух, коли передній фронт імпульсу вже пройшов її в нульовий момент часу.

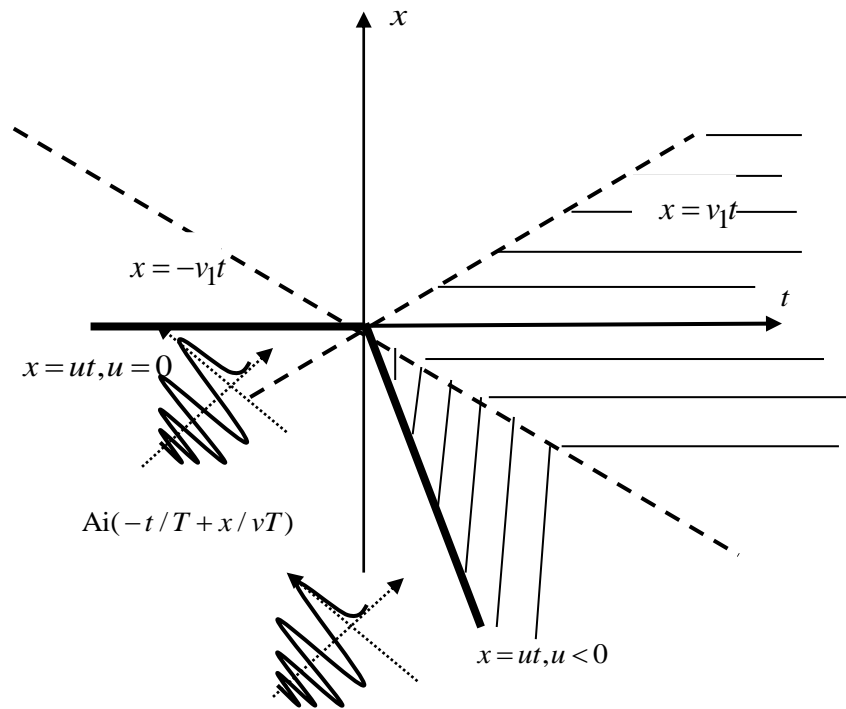


Рисунок 3.16– Области існування вторинних імпульсів при $-u > v_1$:
 $T_3(v_1t \geq x \geq -v_1t)$ - горизонтальне штрихування, $T_4(-v_1t \geq x \geq ut)$ - вертикальне штрихування.

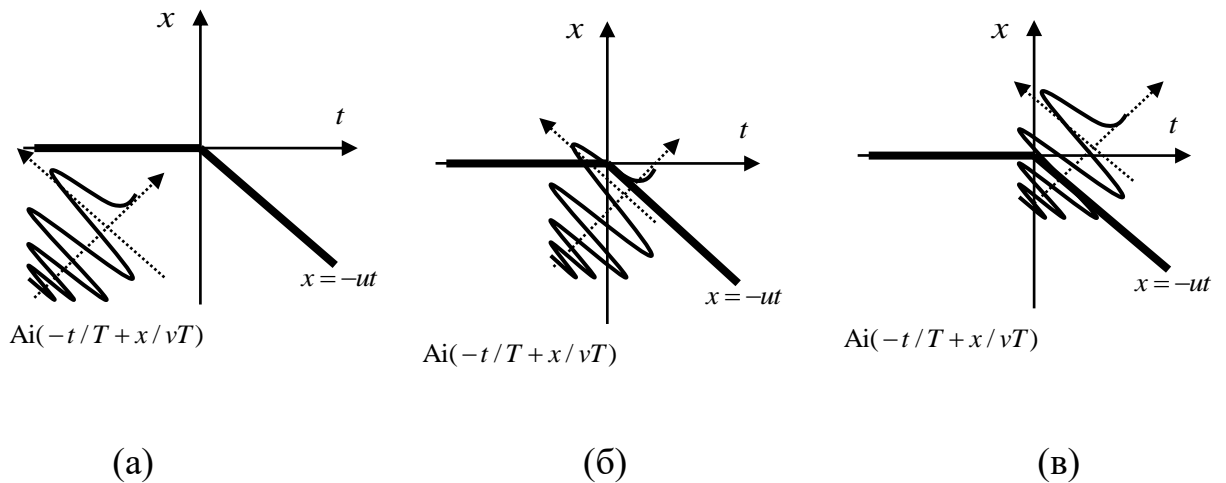


Рисунок 3.17–Розміщення імпульсу Ейрі відносно межі після початку її руху

Ці три ситуації контролюються вибором значення стартового просторово-часового параметра p , що визначає початкове місце розташування первинного поля. Чим більше значення стартового параметра, тим ближче знаходиться імпульс до межі.

На рисунку 3.18а. показано взаємодію імпульсу Ейрі з нерухомою межею. Фактично, це ілюстрація імпульсу, які визначається «історією» поля до нульового моменту часу, коли рух межі ще не почався. Форма імпульсу, що пройшов через нерухомих межу, в точності відповідає формі первинного імпульсу. Цей імпульс продовжує рух у тому ж напрямку, що й до взаємодії із границею, але з переворотом головного пелюстка.

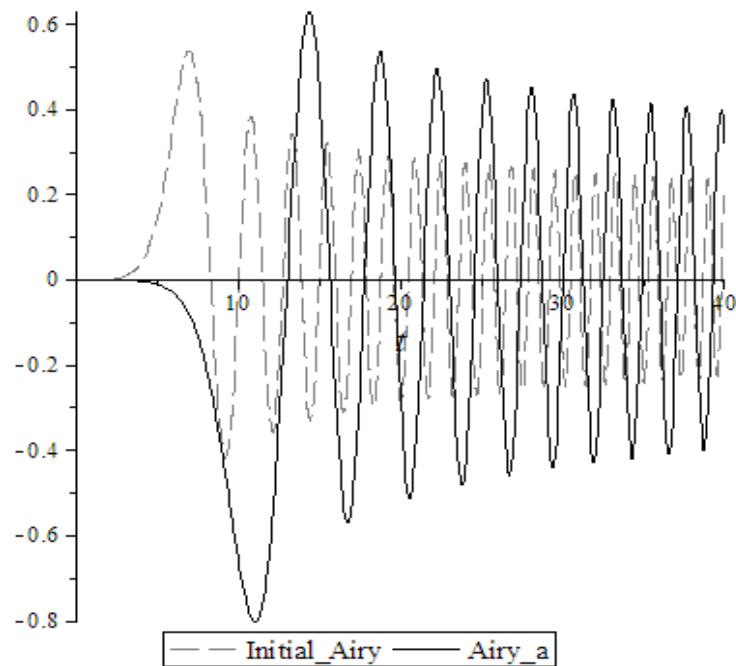


Рисунок 3.18а–Часове переміщення первинного імпульсу Ейрі (пунктирна лінія) та імпульсу $E_{T3}(t, x)$ (суцільна лінія) до початку руху межі

$$\text{при } p = -5: \frac{x}{vT} = 1, \frac{v_1}{v} = 0,5, \frac{u}{v} = 0,8 .$$

Рисунок 3.18б добре ілюструє випадок, коли рух межі ропочався в момент початку взаємодії імпульсу із межею, тобто, коли передній фронт

імпульсу тільки перетнув лінію межі. Форма імпульсу й у цьому випадку не змінюється, але з'являються під вплив руху межі його нові модуляції.

На рисунку 3.18в показано вплив початку руху межі на переміщення імпульсу Ейрі в момент, коли його передній фронт уже пройшов через межу. Різка зміна швидкості межі призвела до зміни більшою мірою хвоста імпульсу, чим його головного пелюстка, форма якого не змінюється у всіх трьох розглянутих випадках.

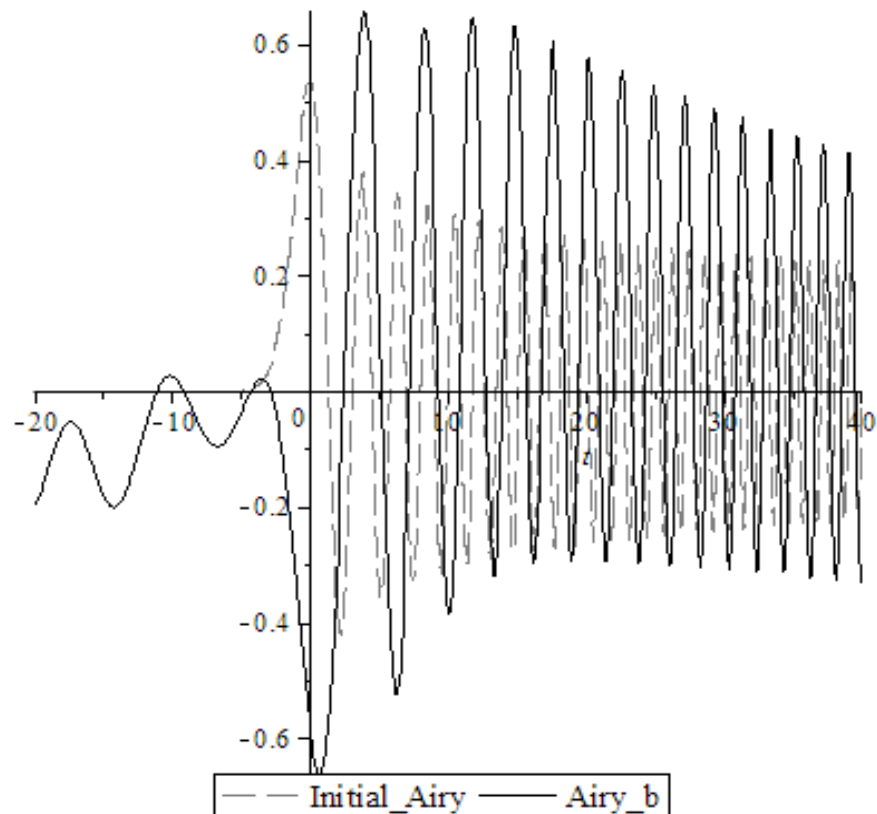


Рисунок 3.18б–Еволюція імпульсу $E_{T3}(t, x)$ (суцільна лінія) при $p=1: \frac{x}{vT} = 1$,

$$\frac{v_1}{v} = 0,5, \frac{u}{v} = 0,8 .$$

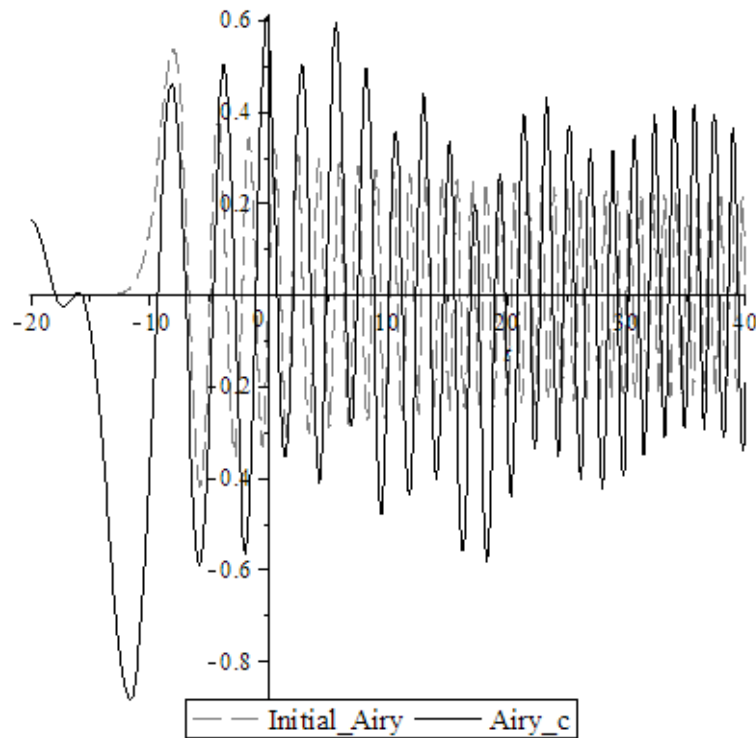


Рисунок 3.18в–Еволюція імпульсу $E_{T3}(t, x)$ (суцільна лінія) при $p = 10: \frac{x}{vT} = 1$,

$$\frac{v_1}{v} = 0,5, \frac{u}{v} = 0,8 .$$

Таким чином, процес взаємодії імпульсу Ейрі з межею, що рухається назустріч, легко контролювати вибором значення стартового параметра. При від’ємних значеннях цього параметра вторинне поле визначається своєю «історією» до нульового моменту часу і явних змін імпульсу не відбувається, а при додатніх значеннях стартового параметра відбувається трансформація імпульсу межею, що рухається.

3.4 Особливості перетворення імпульсу Ейрі плоскою межею, що рухається рівноприскорено.

Розглянемо тепер більш складний випадок руху межі, а саме, випадок плавної нестационарності, коли швидкість межі поступово змінюється від нульового значення до значення швидкості імпульсу. Дане явище

реалізується у випадку релятивістського рівноприскореного руху. Такий тип руху визначає поступовий рух межі від нульових значень її швидкості до релятивістських.

Закон зустрічного рух межі й електромагнітної хвилі описується законом

$$x_s(t) = -v(\sqrt{\xi^2 + t^2} - \xi),$$

де $\xi = \frac{c}{\varpi}$, ϖ - прискорення у власній системі відліку [157].

При $t \rightarrow \infty$ швидкість руху межі змінюється за законом $u(t) = -vt / \sqrt{\xi^2 + t^2}$ і стає рівною фазовій швидкості хвиль $u(t) \rightarrow -v$.

Властивості середовища не змінюються після початку руху межі в нульовий момент часу, тому в області $T'_3: x > v_1 t$ (рисунок 3.19) минуле поле буде таким же, як і до нульового моменту часу для випадку рівномірного руху. В області $x < v_1 t$ резольвента має різний вигляд для різних значень показника заломлення v / v_1 .

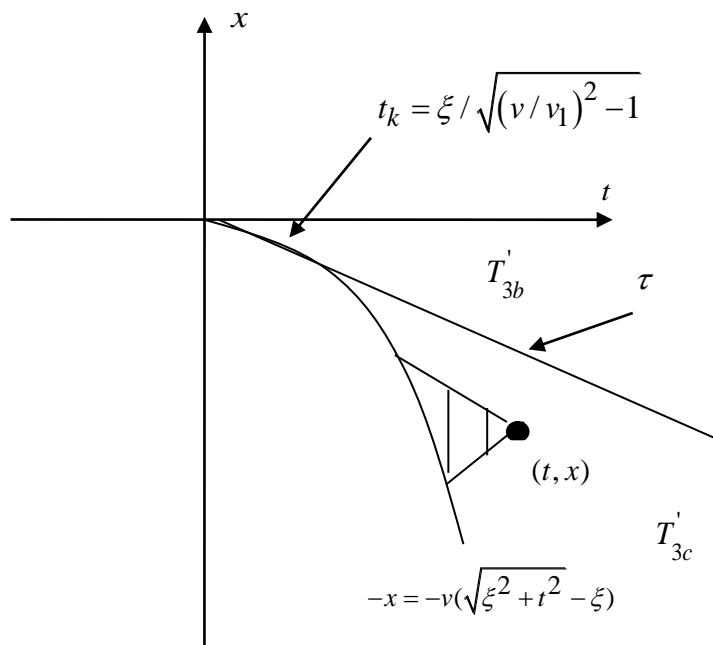


Рисунок 3.19– Просторово-часові зони у випадку рівноприскореного руху межі. Вертикальним штрихуванням показано світловий конус резольвенти з вершиною в точці спостереження (t, x) .

Коли $\frac{v}{v_1} < 1$, резольвента визначається виразом:

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{R} | x' \rangle = & -\Theta(x - x_s(t)) \frac{v^2 - v_1}{2v_1 v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right) + \right. \\ & \left. + R_u(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Theta \left(\varphi(\tau) - t' - \frac{x}{v_1} \right) \right\} \Theta(x' - x_s(t')), \end{aligned} \quad (3.39)$$

де $\varphi(\tau) = 2t_1 - \tau$, t_1 - точка перетину нижньої характеристики резольвенти зі світовою лінією межі

$$t_{1,2}(\tau) = \frac{v_1 v}{v^2 - v_1^2} \left(\pm \xi - \frac{v_1}{v} \tau + \sqrt{\xi^2 \pm 2 \frac{v_1}{v} \xi \tau + \tau^2} \right).$$

Коефіцієнт

$$R_u(\tau) = \frac{v - v_1}{v + v_1} \frac{v_1 - u_1(\tau)}{v_1 + u_1(\tau)}$$

є функція точки спостереження (швидкість межі обирається в момент зближення з характеристикою резольвенти $u_1(\tau) = u(t_1)$).

При $\frac{v}{v_1} > 1$ відбита характеристика належить області $\chi^+ = 1$ тільки до

моменту дотику

$$t_k = \xi / \sqrt{(v/v_1)^2 - 1},$$

коли швидкість межі зрівняється зі швидкістю імпульсу v_1 .

Промінь

$$\tau = \xi \left((v^2 + 1) / v_1 \sqrt{v^2 - v_1^2} - v / v_1 \right)$$

відокремлює від області T_3' під область T_{3b}' , у якій відбита характеристика вже не дає внеску в резольвенту, а дотична

$$t_k = \xi / \sqrt{(v/v_1)^2 - 1}$$

відокремлює область T_{3c}' , у якій обидві лінії характеристики резольвенти перетинаються із межею.

При співвідношенні $v/v_1 > 1$ в підобласті T_3' поле складається тільки з одного імпульсу Ейрі:

$$Ai_3(t, x) = \frac{2v_1^2}{(v+v_1)^2} (1+\Omega^-) Ai \left[-\frac{v_1}{v+v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} - \xi + \sqrt{\xi^2 + 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \left(t - \frac{x}{v_1} \right)^2} \right) \right], \quad (3.40)$$

$$\text{де } \Omega^- = \frac{\frac{v}{v_1} \xi + t - \frac{x}{v_1}}{\sqrt{\xi^2 + 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \left(t - \frac{x}{v_1} \right)^2}}.$$

При такому ж співвідношенні $v/v_1 > 1$ в іншій підобласті T_{3b}' вторинне поле складається із двох імпульсів:

$$Ai_{3b}(t, x) = \frac{v_1}{2v} (1+\Omega^-) Ai \left[-\frac{v_1}{v+v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} - \xi + \sqrt{\xi^2 + 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \left(t - \frac{x}{v_1} \right)^2} \right) \right] - \frac{v_1}{2v} (1-\Omega^-) Ai \left[-\frac{v_1}{v-v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} + \xi + \sqrt{\xi^2 + 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \left(t - \frac{x}{v_1} \right)^2} \right) \right]. \quad (3.41)$$

У цьому випадку на межі відбувається розщеплення початкових хвиль, що задаються вільним членом F , і це призводить до утворення зворотних хвиль у підобласті T_{3c}' :

$$Ai_{3c}(t, x) = Ai_{3b}(t, x) - \frac{v_1}{2v} (1-\Omega^+) Ai \left[\frac{v_1}{v-v_1} \left(t + \frac{x}{v_1} - \xi - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t + \frac{x}{v_1} \right) + \left(t + \frac{x}{v_1} \right)^2} \right) \right] + \frac{v_1}{2v} (1+\Omega^+) Ai \left[\frac{v_1}{v+v_1} \left(t + \frac{x}{v_1} + \xi + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t + \frac{x}{v_1} \right) + \left(t + \frac{x}{v_1} \right)^2} \right) \right] \quad (3.42)$$

$$\text{де } \Omega^+ = \frac{-\frac{v}{v_1} \xi + t + \frac{x}{v_1}}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi \frac{v}{v_1} \left(t + \frac{x}{v_1} \right) + \left(t + \frac{x}{v_1} \right)^2}}.$$

У момент, коли швидкість межі досягає швидкості імпульсу, $-u = v_1$, на межі утворюється два нескінченні розриви. На рисунках 3.21– 3.22 зображено поле $Ai_{3c}(t, x)$ при рівних швидкостях імпульсу й межі для різних значень стартового параметра p .

Рисунок 3.20 показує поширення поля $Ai_{3c}(t, x)$ до того, як межа досяглася швидкості імпульсу. Стартовий параметр у цьому випадку вибирається рівним від'ємному значенню $p = -5$.

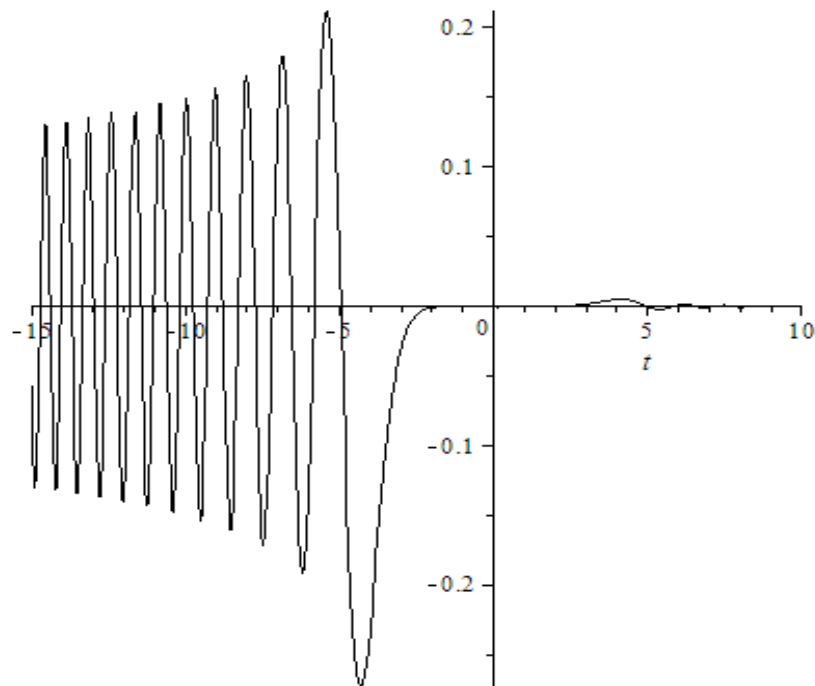


Рисунок 3.20– Зустрічний рух імпульсу Ейрі та межі у момент зрівняння їх швидкостей при $p = -5$.

Рисунок 3.21 ілюструє ситуацію, коли швидкість межі досяглася швидкості імпульсу в момент взаємодії межі з переднім фронтом імпульсу.

Така ситуація можлива при виборі додатнього значення стартового параметра близького до одиниці. У цьому випадку утворюється два нескінченні розриви, які чітко видно на рисунку 3.21: на більшому часовому інтервалі, $-15 \leq t \leq 10$ (а), і на меншому $5 \leq t \leq 1$ (б). Унаслідок такої взаємодії лінії переднього фронту імпульсу, які формують головний пелюсток, ідуть на нескінченність.

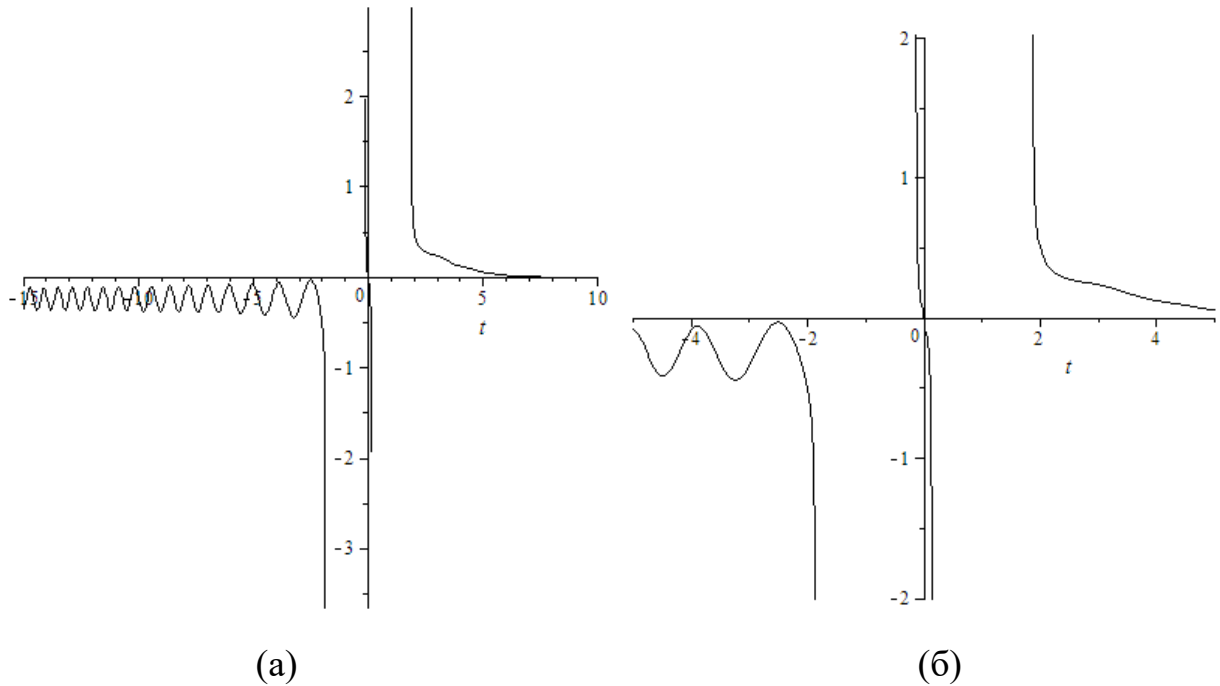


Рисунок 3.21– Зустрічний рух імпульсу Ейрі та межі у момент зрівняння їх швидкостей при $p = 1$: на часовому проміжку $-15 \leq t \leq 10$ (а) та на часовому проміжку $5 \leq t \leq 1$ (б).

На рисунку 3.22 показано ситуацію, коли межа досягла швидкості імпульсу після того, як вона вже перетнула його передній фронт.

У результаті такої взаємодії відбувається зменшення головного пелюстка імпульсу Ейрі межею і його роздвоєння, у той час, як періодичність коливань хвоста імпульсу залишається незмінною у порівнянні з первинним полем.

У момент досягнення межею швидкості імпульсу відбувається розрив хвоста так, що по одну сторону від межі залишається відсічений головний пелюсток імпульсу, а з іншого боку – осцилюючий хвіст. Такий ефект можна використовувати для усічення хвоста імпульсу з метою використання його максимальної енергії, що знаходиться у його головному пелюстку.

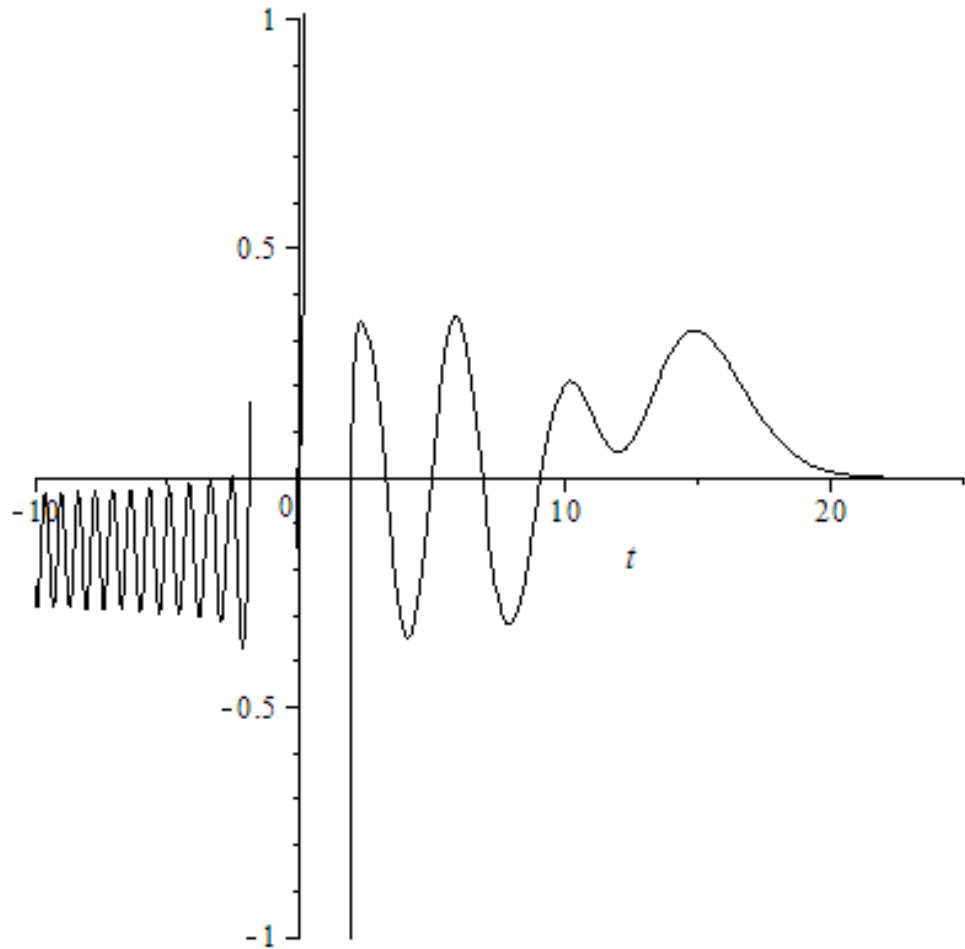


Рисунок 3.22– Зустрічний рух імпульсу Ейрі та межі у момент зрівняння їх швидкостей при $p = 10$.

Порівняння первинного імпульсу Ейрі й поля вторинного імпульсу $Ai_{3c}(t, x)$ показано на рисунку 3.23.

Походження розривів у вториннім полі випливає з виразів для Ω^+ й Ω^- у формулах (3.40) і (3.42) відповідно. З аналізу цих виразів випливає, що знаменник Ω^+ обертається в нуль у двох точках

$$\tau_1^+ = t + \frac{x}{v_1} = 2\xi \left(\frac{v + \sqrt{v^2 - v_1^2}}{v_1} \right) \quad \text{та} \quad \tau_1^- = t + \frac{x}{v_1} = 2\xi \left(\frac{v - \sqrt{v^2 - v_1^2}}{v_1} \right),$$

причому, дані вирази справедливі для співвідношення $\frac{v}{v_1} < 1$.

У протилежному випадку підкореневий вираз буде чисто уявним. Знаменник Ω^- обертається в нуль також у двох точках

$$\tau_1^- = t - \frac{x}{v_1} = -2\xi \left(\frac{v + \sqrt{v^2 - v_1^2}}{v_1} \right) \text{ та } \tau_1^- = t - \frac{x}{v_1} = -2\xi \left(\frac{v - \sqrt{v^2 - v_1^2}}{v_1} \right),$$

й визначений при $v/v_1 < 1$.

Наявність особливих точок пояснює розриви поля у результаті взаємодії із межею. Більше того, лінії розривів формують дві пересічні смуги в просторово-часовій області поширення імпульсу, де імпульс не існує взагалі.

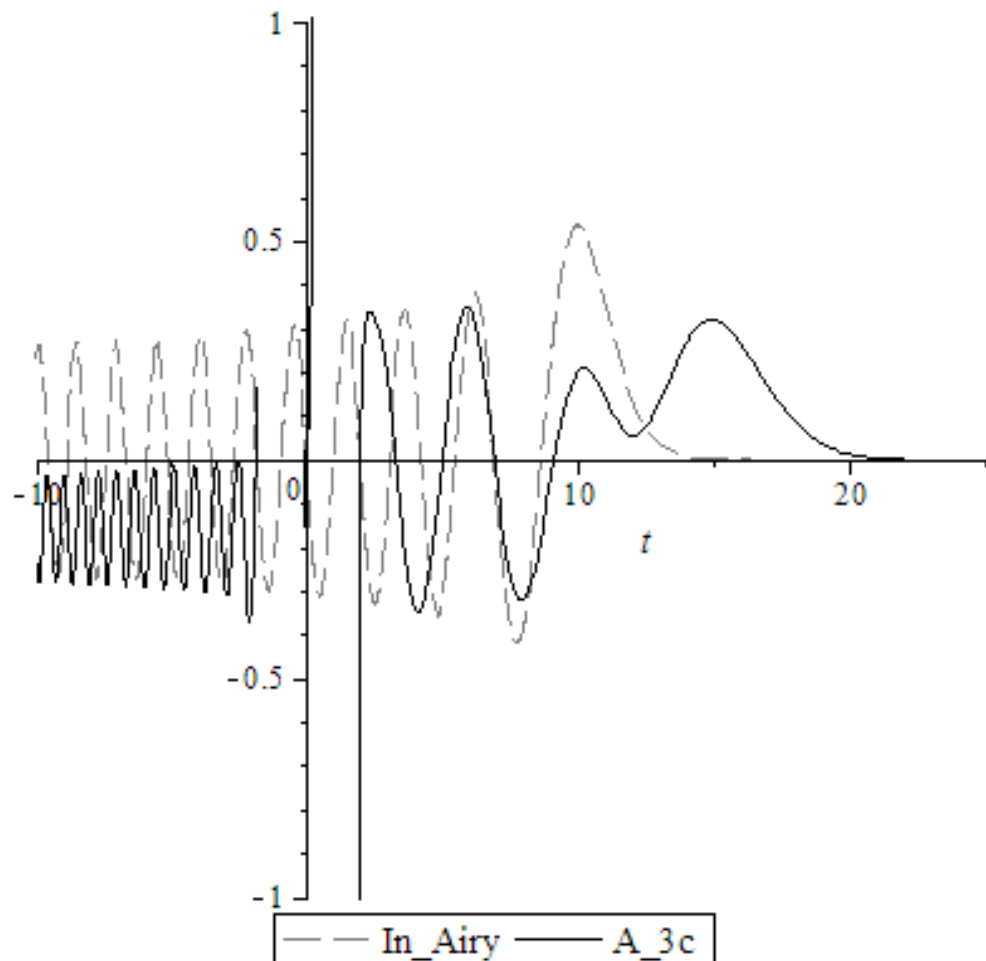


Рисунок 3.23– Порівняння первинного імпульсу Ейрі $In_Airy(t, x, p)$ й вторинного імпульсу $Ai_{3c}(t, x, p)$ в точці $x=1$ при $p=10$.

Висновки по розділу

1. Розв'язано просторово-часову задачу про взаємодію імпульсу Ейрі із плоскою межею нестационарного діелектрика, що виникає в нульовий момент часу. Унаслідок взаємодії імпульсу із межею формується віртуальний імпульс, який гасить падаючий, згідно із принципом погашення Евальда-Озеєна, і, власне імпульс, що пройшов через межу і поширюється з новою швидкістю, відповідною до середовища з новою діелектричною проникністю. Результат проведених досліджень показав, що в більш оптично щільнім середовищі відбувається затримка імпульсу Ейрі, і прискорення в протилежному. При цьому форма імпульсу не змінюється, що пояснюється у цьому випадку відсутністю дисперсії.

2. Розв'язано більш складну задачу, яка містить потрійну асиметрію розглянутого явища (асиметричність первинного імпульсу Ейрі, асиметричність об'єкту дифракції й асиметрична поведінка імпульсу в часі). Часовий стрибок показника заломлення призводить до розщеплення первинного імпульсу на два, що поширюються в протилежних напрямках. Один із цих імпульсів частково проходить через межу й частково відбивається від неї в області нестационарного середовища, й формує при цьому новий імпульс, який поширюється у напрямку від межі. Таким чином, усі дифраговані імпульси діляться на два типи: імпульси, утворені неоднорідністю середовища й імпульси, утворені в результаті зміни характеристик середовища у часі.

3. Характер поширення минулого й відбитого імпульсів контролюється вибором значення стартового параметра. При від'ємних значеннях цього параметра передній фронт імпульсу не досягає межі до нульового моменту часу й імпульс «не відчуває» неоднорідності. У протилежному випадку, коли стартовий параметр має додатній знак, головний пелюсток і частина «хвоста» імпульсу Ейрі перебуває глибоко в нестационарному середовищі.

4. За допомогою чисельного інтегрування обчислені потоки енергії, що переносяться імпульсом. Аналіз асимптотичної формули для великих від'ємних значень аргументу функції Ейрі показав необхідність введення інтервалу усереднення, по якому проведено чисельне інтегрування й промодельовано переміщення максимуму потоку енергії як первинного імпульсу, так і тих, що пройшли через межу і відбилися від неї. Залежність потоку енергії від просторової координати визначається в підінтегральній функції Ейрі безпосередньо, а часова залежність являє собою усереднений по часовому інтервалу проміжок. Показано, що характер поширення відбитого імпульсу не змінюється з часом і максимум енергії досягається при значно менших значеннях у порівнянні з первинним імпульсом.

5. Розв'язано задачу про взаємодію імпульсу Ейрі з межею, що рівномірно рухається назустріч, у випадку плавної нестационарності, коли межа почала свій рух у нескінченно далекому минулому й у випадку різкої нестационарності, коли нерухома межа розмочала рух у нульовий момент часу. Отримано вирази для вторинних імпульсів Ейрі. Показано, що процес взаємодії імпульсу Ейрі з межею, що рухається назустріч, легко контролювати вибором значення стартового параметра. При від'ємних значеннях цього параметра вторинне поле визначається своєю «історією» до нульового моменту часу і явних змін імпульсу не відбувається, а при виборі додатніх значень стартового параметра відбувається трансформація імпульсу межею, що рухається.

6. Розв'язано більш складну задачу, коли межа поступово досягає значення швидкості імпульсу. Отримано вирази для трансформованих імпульсів Ейрі й показано, що в момент досягнення межею швидкості імпульсу, утворюється два нескінченні розриви. У цьому випадку процес взаємодії також контролюється вибором значення стартового параметра.

7. У момент досягнення межею швидкості імпульсу відбувається розрив хвоста так, що по одну сторону від межі залишається відсічений головний пелюсток імпульсу, а з іншого сторони – осцилюючий хвіст.

РОЗДІЛ 4

ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСУ ЕЙРІ НЕСТАЦІОНАРНИМ ПЛОСКИМ ШАРОМ ДІЕЛЕКТРИКА

Даний розділ присвячений дослідженню взаємодії імпульсу Ейрі з плоским нестационарним шаром діелектрика. Проведено аналіз спектрів вторинних імпульсів при взаємодії з діелектричним шаром у параксіальному наближенні. Проаналізовано та детально описано випадок взаємодії імпульсу Ейрі з діелектричним шаром, межі якого як постійні, так і рівномірно рухаються, без використання наближення. Показано вплив руху меж на форму імпульсу Ейрі та на характер його поширення.

4.1 Дослідження перетворення імпульсу Ейрі плоским шаром діелектрика у параксіальному наближенні

Розглянута вище задача про взаємодію імпульсу Ейрі з однієї плоскою межею показує його складну просторово-часову структуру. Цілком очікувано, що ця структура ускладниться при наявності двох меж, а така структура досить просто реалізується у випадку діелектричного плоского шару. Розглянемо задачу поширення імпульсу без яких-небудь припущень про часову залежність поля, але з припущенням про параксіальне наближення [130].

Нехай джерело $j(x_0)$, що розташоване в точці $x = x_0$, випромінює електромагнітний імпульс Ейрі перпендикулярно шару, середовище в якому характеризується діелектричною проникністю ε , магнітною проникністю μ та провідністю σ (рисунок 4.1). Випромінюване електричне поле має такий самий напрямок, як і струм джерела. У випадку неоднорідного середовища поле визначається неоднорідним хвильовим рівнянням із правою частиною, що обумовлена тим же струмом джерела. Неоднорідність середовища

представлена плоским шаром з діелектричною проникністю ε_1 й провідністю σ_1 . Вона введена в праву частину хвильового рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \\ = \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) \chi(t, x) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (\gamma - \gamma_1) \chi(t, x) \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0 \mu \frac{\partial j}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тут $v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}$, $v_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}$, $\gamma = \mu_0 \mu \sigma$ і $\gamma_1 = \mu_0 \mu \sigma_1$. Характеристична функція $\chi(t, x)$ дорівнює одиниці усередині шару й нулю поза ним.

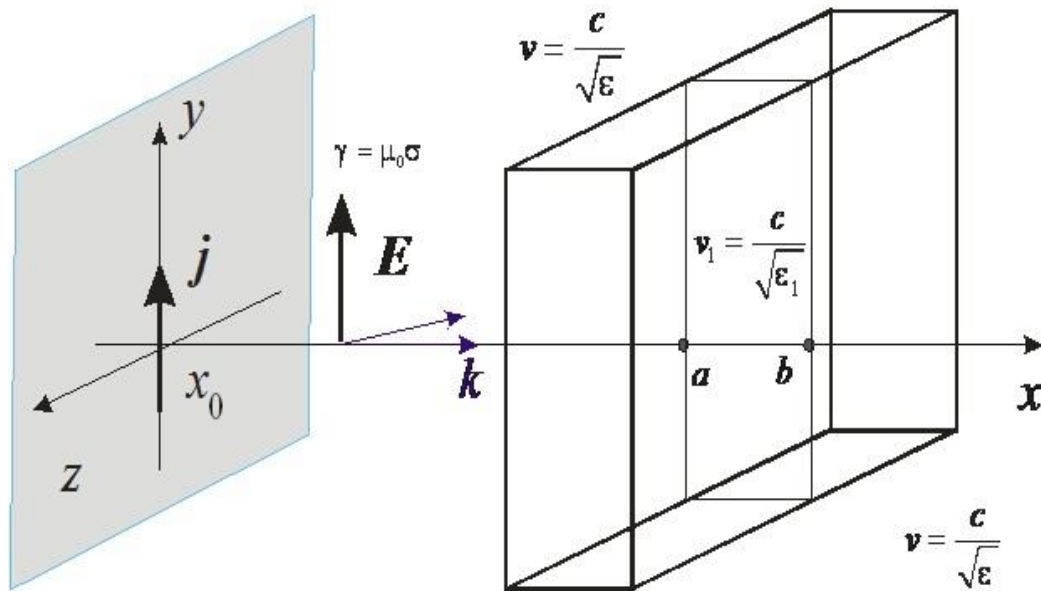


Рисунок 4.1—Геометрія задачі. Струм джерела випромінює просторово-часовий імпульс, який поширюється перпендикулярно шару, проходить через нього, відбиваючись від його меж.

Розглянемо випадок, коли імпульс поширюється переважно уздовж осі x :

$$E(t, x) = F(t, x) e^{-ik|x|}.$$

Будемо розглядати задачу у параксіальному наближенні, з якого випливає нерівність $\left| 2ik \frac{\partial F}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|$ для обвідної $F(t, x)$ сигналу. Таким чином, знехтуючи похідною другого порядку в рівнянні (4.1), отримаємо рівняння для обвідної [145 146]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial F}{\partial t} + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + 2ik \delta(x) F(t, x) + k^2 F(t, x) = \\ & = \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \chi(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (\gamma - \gamma_1) \chi(t, x) \frac{\partial F}{\partial t} - \mu_0 \mu \frac{\partial j}{\partial t} e^{ik|x|} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Симетрична функція Гріна, що задовольняє диференціальному рівнянню (4.2)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial G}{\partial t} + 2ik \operatorname{sign}(x) \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} + 2ik \delta(x) G(t, x) + k^2 G(t, x) = \delta(t) \delta(x), \quad (4.3)$$

визначається виразом:

$$G(t, x) = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k|x|}} e^{i\left[k\frac{|x|}{2} + \frac{v^2(2kt+i\gamma|x|)^2}{8k|x|}\right]} = -\frac{i}{4\pi k} e^{ik\frac{|x|}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega^2 - i\omega v^2 \gamma |x|}{v^2 k}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.4)$$

За допомогою цієї функції диференціальне рівняння (4.2) може бути записане у вигляді інтегрального рівняння для обвідної $F(t, x)$:

$$F(t, x) = F_0(t, x) -$$

$$\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi k}} \int_a^b dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{|x-x'|}} e^{i\frac{k}{2}[|x-x'| + \frac{v^2(2k(t-t')+i\gamma|x-x'|)^2}{4k^2|x-x'|}]} \left[\frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} + (\gamma - \gamma_1) \frac{\partial F}{\partial t'} \right] \quad (4.5)$$

де вільний член цього рівняння описується співвідношенням:

$$F_0 = \frac{(1+i)v\mu_0\mu}{4\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{|x-x'|}} e^{i\frac{k}{2}[|x-x'| + \frac{v^2(2k(t-t')+i\gamma|x-x'|)^2}{4k^2|x-x'|}]} \frac{\partial j}{\partial t'}. \quad (4.6)$$

Якщо точка спостереження знаходиться усередині шару, $x \in [a, b]$, то вираз (4.5) є рівнянням для поля усередині шару $F_{in}(t, x)$. Вторинні імпульси

$F_{T,R}(t, x)$ знаходяться шляхом інтегрування внутрішнього поля по інтервалу, який займає шар. Причому, задовольняє умовам неперервності на межах шару $F_R(t, a - 0) = F_{in}(t, a + 0)$, $F_{in}(t, b - 0) = F_T(t, b + 0)$.

Використання перетворення Фур'є для обвідної

$$f(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, x) e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

дозволяє отримати інтегральне рівняння для спектра поля. Спектр як внутрішнього, так і зовнішнього поля задовольняє інтегральному рівнянню:

$$\begin{aligned} f_{in}(\omega, x) = & j_0(\omega) e^{ik\Omega \frac{x}{2}} + \\ & + \frac{i}{2k} e^{ik\Omega \frac{x}{2}} \int_a^x dx' e^{-ik\Omega(\omega) \frac{x'}{2}} \left\{ \omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right\} f_{in}(\omega, x') +, \quad (4.8) \\ & + \frac{i}{2k} e^{-ik\Omega \frac{x}{2}} \int_x^b dx' e^{ik\Omega(\omega) \frac{x'}{2}} \left\{ \omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right\} f_{in}(\omega, x') \end{aligned}$$

$$\text{де } \Omega(\omega) = \Omega' + i\Omega'' = 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v^2} + i \frac{\omega v^2 \gamma}{k^2 v^2}.$$

Вільний член рівняння F_0 випливає з формули (4.6), коли джерело знаходиться ліворуч, $x - x_0 > 0$, $x_0 < a$ і записується у вигляді:

$$F_0(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_0(\omega) e^{i(k - \frac{\omega^2 - i\omega v^2 \gamma}{v^2 k}) \frac{x}{2}} e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.9)$$

де

$$j_0(\omega) = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi k} e^{ik(|x_0| - \frac{x_0}{2}) + i \frac{\omega^2 - i\omega v^2 \gamma}{v^2 k} \frac{x_0}{2}} \omega \Phi(\omega).$$

Тут $\Phi(\omega)$ визначає спектр струму джерела $j_0(\omega)$

$$j(t, x) = \delta(x - x_0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Спектри поля поза шаром виражаються через внутрішній спектр. Спектр відбитого від шару (ліворуч) імпульсу має вигляд:

$$f_R(\omega, x) = j_0(\omega) e^{ik\Omega \frac{x}{2}} + \frac{i}{2k} e^{-ik\Omega \frac{x}{2}} \int_a^b dx' e^{ik\Omega \frac{x'}{2}} \left[\omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right] f_{in}(\omega, x') \quad (4.10)$$

Спектр імпульсу, що пройшов через шар (праворуч):

$$f_T(\omega, x) = j_0(\omega) e^{ik\Omega \frac{x}{2}} + \frac{i}{2k} e^{ik\Omega \frac{x}{2}} \int_a^b dx' e^{-ik\Omega \frac{x'}{2}} \left[\omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right] f_{in}(\omega, x'). \quad (4.11)$$

Вирази для спектрів (4.10) і (4.11) задовольняють умові неперервності на межах шару $F_R(t, a-0) = F_{in}(t, a+0)$, $F_{in}(t, b-0) = F_T(t, b+0)$.

Представляючи внутрішнє поле у вигляді

$$f_{in}(\omega, x) = C_1(\omega) e^{is(\omega)x} + C_2(\omega) e^{-is(\omega)x}$$

з рівняння (4.8) отримуємо рівняння для хвильового числа s й коефіцієнтів C_1, C_2 . Хвильове число s задовольняє дисперсійному рівнянню

$$s^2 - k^2 \Omega^2 / 4 - \frac{1}{2} \left[\omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right] \Omega = 0 \quad (4.12)$$

і визначається формулою:

$$s = \pm \frac{1}{2} k \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}. \quad (4.13)$$

Тут $\Omega_1(\omega) = \Omega_1' + i\Omega_1'' = 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v_1^2} + i \frac{\omega \gamma_1}{k^2}$ і радикал в (4.13) обирається таким

чином, щоб $\text{Im} \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)} > 0$. Знайдені коефіцієнти C_1, C_2 мають вигляд:

$$C_1 = j_0(\omega) \frac{2k}{\left\{ \omega^2 \frac{v_1^2 - v^2}{v^2 v_1^2} - i\omega(\gamma - \gamma_1) \right\}} \times \frac{(s - k\Omega/2)(s + k\Omega/2)^2}{(s + k\Omega/2)^2 e^{i2sa} - (s - k\Omega/2)^2 e^{i2sb}} e^{isa + ik\Omega a/2} \quad (4.14)$$

$$C_2 = C_1 \left(\frac{s - \frac{k\Omega}{2}}{s + \frac{k\Omega}{2}} \right) e^{i2bs},$$

Підставляючи $f_{in}(\omega, x)$ в (4.10) і (4.11), отримуємо спектри вторинних імпульсів:

$$f_R(\omega, x) = j_0(\omega) e^{ik\Omega x/2} + j_0(\omega) e^{ik\Omega(a-x/2)} \left(e^{ik\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}(b-a)} - 1 \right) \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} D, \quad (4.15)$$

$$f_T(\omega, x) = 2j_0(\omega) e^{ik\Omega x/2} e^{i(\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)} - \Omega)k\frac{(b-a)}{2}} \frac{\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} D. \quad (4.16)$$

У формулах (4.15) і (4.16) коефіцієнт D визначається виразом:

$$D = \frac{1}{1 - \frac{\Omega_1 - \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} e^{ik\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}(b-a)}}. \quad (4.17)$$

Вираз (4.13), що характеризує хвильове число, обертається в нуль у випадках $\Omega=0$ і $\Omega_1 = \Omega/2$. У цих випадках як для всіх вторинних імпульсів, існує невизначеність у коефіцієнтах відбиття й проходження.

$$K = e^{ik\Omega a} \frac{(\Omega_1 - \Omega) \left(e^{ik\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}a} - 1 \right)}{(\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)})} D. \quad (4.18)$$

Граничне значення цих коефіцієнтів при $\Omega_1 \rightarrow \Omega/2$ визначається виразом

$$\lim_{\Omega_1 \rightarrow \frac{\Omega}{2}} K = \frac{\Omega k a (\Omega k (b-a) + 4i) e^{ik\Omega a}}{16 + \Omega^2 k^2 (b-a)^2}. \quad (4.19)$$

Хвильове число s в (4.13) стає уявним, якщо $\Omega(2\Omega_1 - \Omega) < 0$. Дану область показано на рисунку 4.2 штрихуванням.

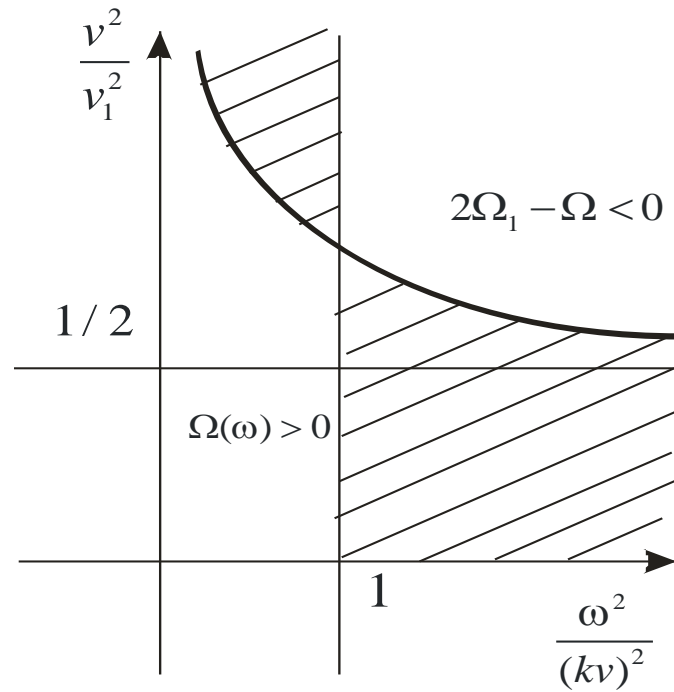


Рисунок 4.2– Область $\Omega(2\Omega_1 - \Omega) < 0$ (показана штрихуванням), де хвильове число S стає чисто уявним.

Якщо $\Omega(2\Omega_1 - \Omega) > 0$, то абсолютне значення дробу (4.17) менше одиниці й ця функція може бути розкладена в ряд

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Omega_1 - \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} \right]^n e^{ink\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}(b-a)}. \quad (4.20)$$

Знаменники членів ряду заноляються тільки в найпростішому випадку $v_1 = v$, але в цьому випадку немає неоднорідності, тобто немає шару й, отже, немає дифракції.

Якщо $\Omega(2\Omega_1 - \Omega) < 0$, то корінь у формулі (4.17) уявний і

$$\frac{\Omega_1 - \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} = e^{i\varphi}$$

с абсолютним значенням, рівним

$$\frac{\Omega_1 - \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}}{\Omega_1 + \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}} = 1.$$

У цьому випадку ряд (4.20) спрощується

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi - nk} \left| \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)} \right|^{(b-a)}. \quad (4.21)$$

В обох випадках члени ряду (4.20) і (4.21) описуються як степеневі функції.

4.2 Аналіз спектрів імпульсів, дифрагованих на нестационарному діелектричному шарі у параксіальному наближенні

Розглянемо більш докладно вирази (4.15) і (4.16), що описують спектри минулого й відбитого імпульсів. Спектри дифрагованих хвиль описуються виразами, що складаються із двох множників, один з яких визначається самою неоднорідністю, а другий має вигляд первинної первинної хвилі. Для більш детального аналізу впливу шару на імпульс, розглянемо у вираженнях (4.15) і (4.16) тільки ту частину, яка містить інформацію про шар:

$$f_{RL}(\omega) = \left[e^{ik\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)}(b-a)} - 1 \right] (\Omega_1 - \Omega) D, \quad \kappa = kL \quad (4.23)$$

для ефекту відбиття

$$f_{TL}(\omega) = e^{i\left[\sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)} - \Omega\right]k\frac{(b-a)}{2}} \sqrt{\Omega(2\Omega_1 - \Omega)} D \quad (4.24)$$

і проходження.

Відбиті спектри, обумовлені неоднорідністю, показано на рисунках 4.8 – 4.10 для двох параметрів середовища: більш оптично щільного шару при $v/v_1 = 1.25$ (а) і менш оптично щільного при $v/v_1 = 0.75$ (б).

Модуль спектра, його дійсна й уявна частини для відбитого сигналу $f_{RL}(\omega)$ показано на рисунку 4.8 для параметрів $\omega_c/(kv) \approx 0,68599$ і $\omega_c/(kv) \approx 2,82842$. Видно, що найбільші значення величини спектра досягаються на критичній частоті у двох випадках: близько значення 1 для більш оптично щільного шару й близько значення 2 для менш оптично щільного шару.

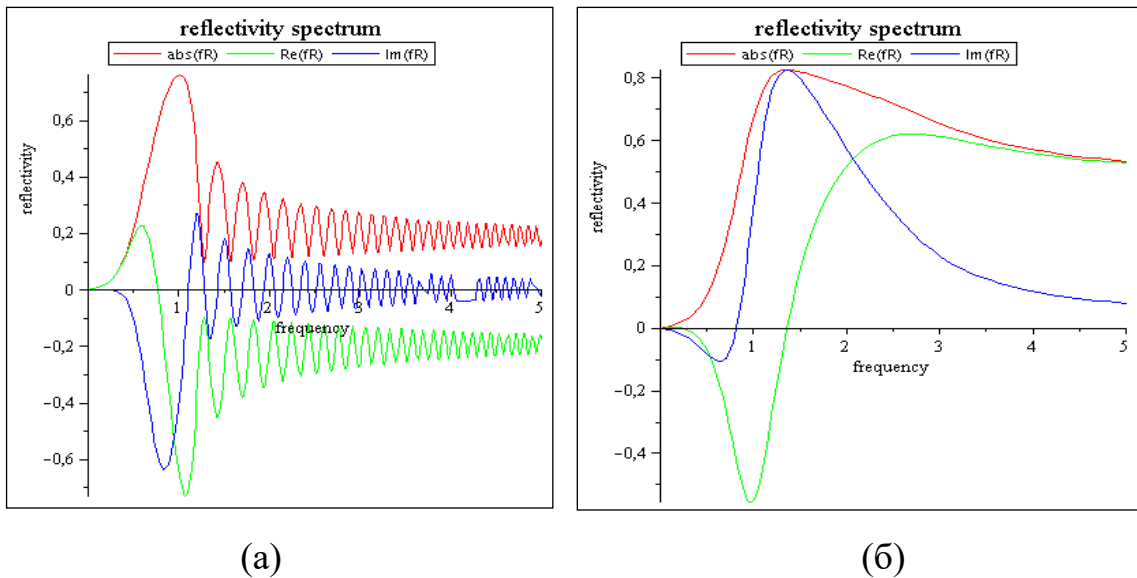


Рисунок 4.8– Спектри відбитого сигналу при товщині шару $L = k(b - a) = 5$ й коефіцієнті $\gamma_1 \mu_0 \mu_1 = 0.1$

Залежність ефекту відбиття від товщини шару показано на рисунку 4.9. У двох випадках оптичної щільності середовища помітно набагато більший вплив товщини шару на спектр, а також на якісну зміну спектра. При збільшенні товщини шару спостерігається поява резонансу, виникає частота, амплітуда якої значно виділяється серед інших частот. Також спостерігається зсув максимуму спектра відбитого імпульсу Ейрі в область малих частот.

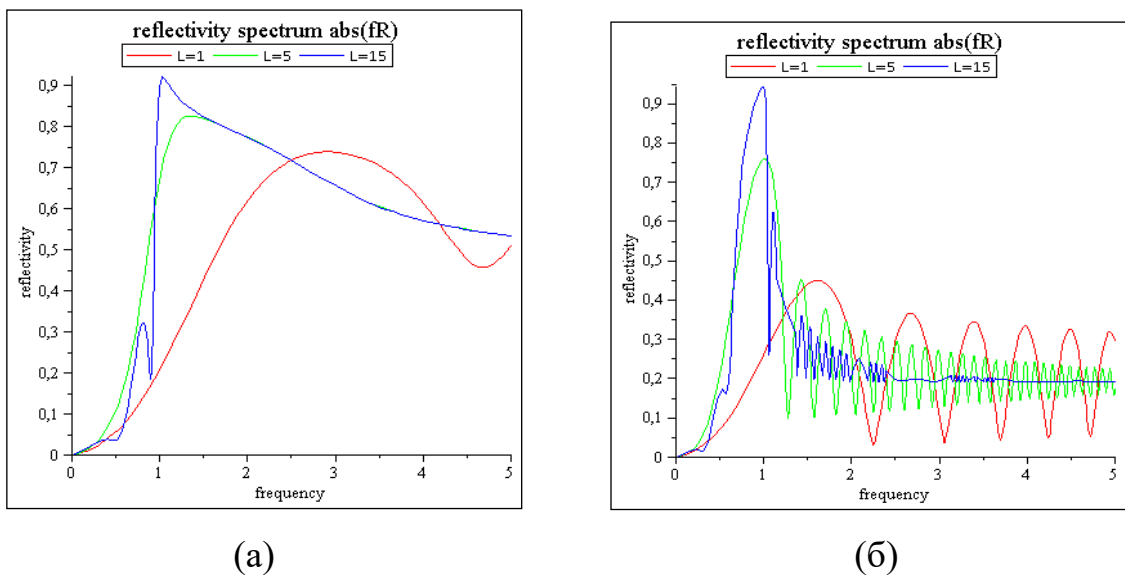
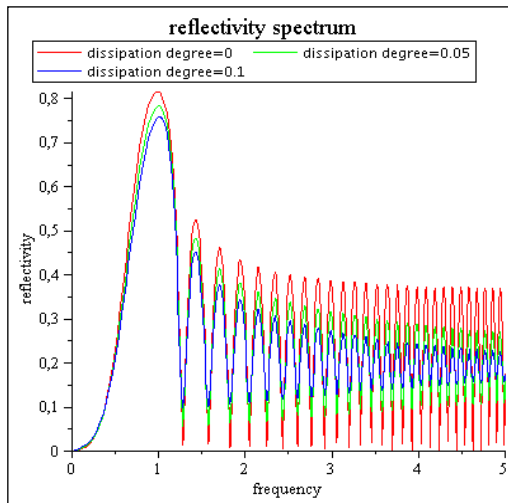
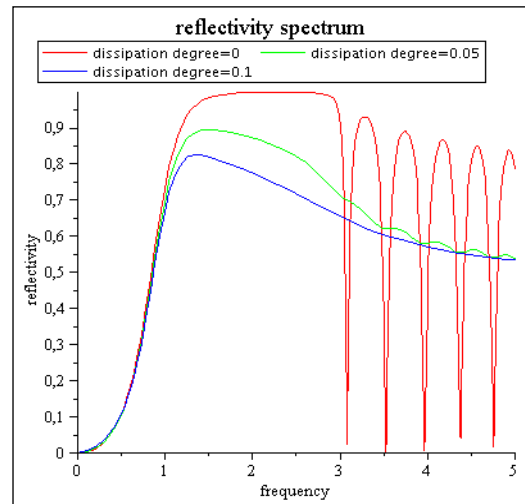


Рисунок 4.9– Залежність ефекту відбиття від товщини шару при $L = 5$, $L = 10$, $L = 15$ і коефіцієнту $\gamma_1 \mu_0 \mu_1 = 0.1$.

Модуль спектра, його дійсна й уявна частини для ефекту відбиття показано на рисунку 4.10 для таких же двох випадків параметрів середовища. Видно, що найбільше значення спектра досягається також на критичній частоті в обох випадках: поблизу значення 1 для більш оптично щільного середовища й близько значення 2 для випадку середовища менш оптично щільного.



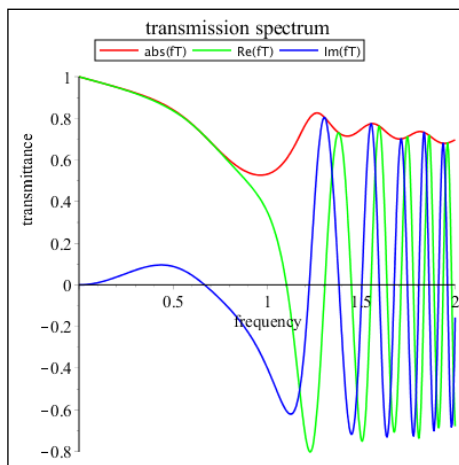
(а)



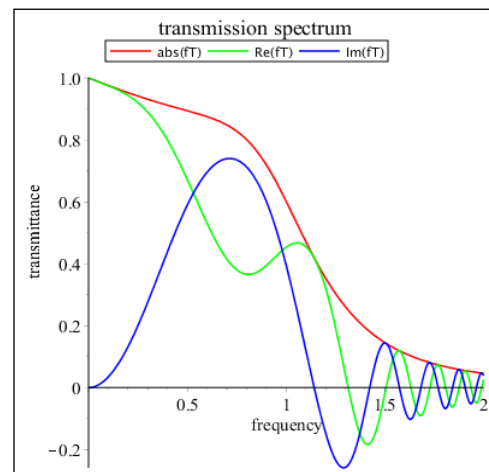
(б)

Рисунок 4.10– Ефект відбиття в шарі при $L = 5$ й $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0$,
 $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.05$ і $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.1$

Модуль спектра, дійсна й уявні частини спектра проходження $f_{TL}(\omega)$ показано на рисунку 4.11.



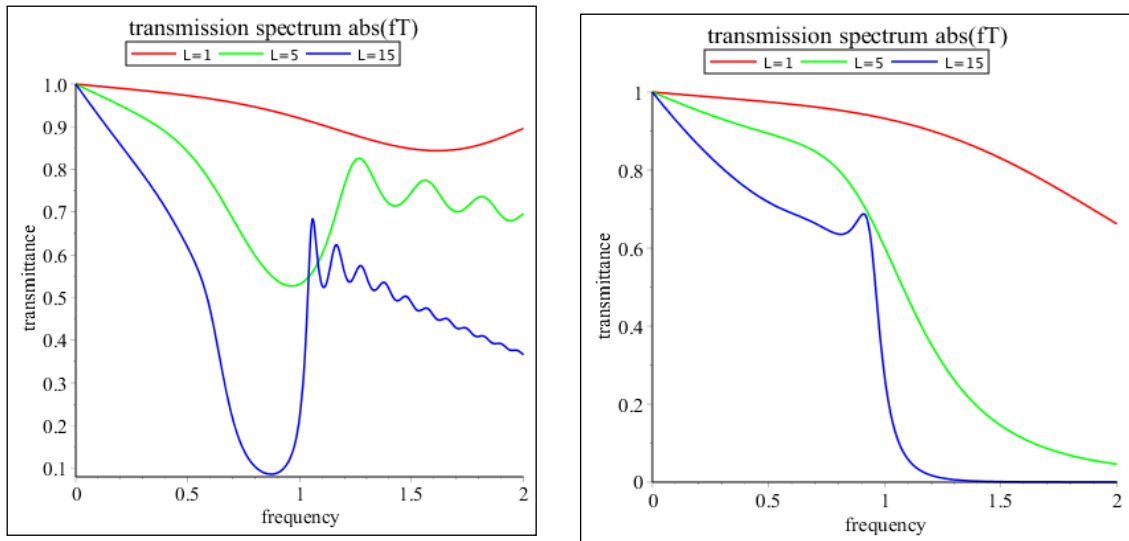
(а)



(б)

Рисунок 4.11– Спектри ефекту проходження при $L = 5$ та $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.1$

Рисунок 4.12 ілюструє залежність ефекту проходження від товщини шару.

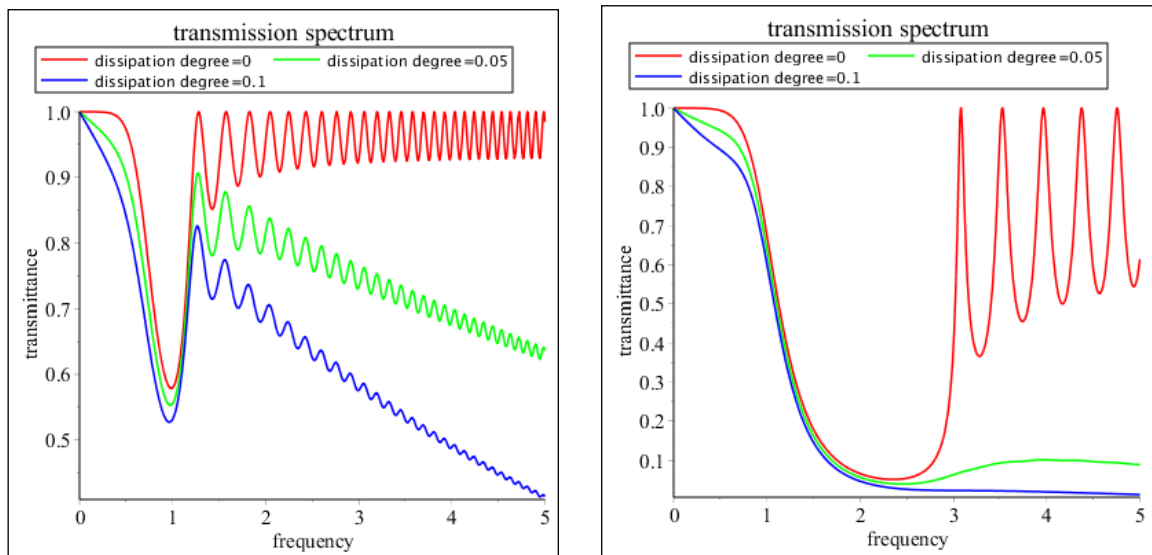


(a)

(б)

Рисунок 4.12– Залежність ефекту проходження від товщини шару при $L = 5, L = 10, L = 15$ і коефіцієнтом $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.1$

Залежність ефекту проходження від коефіцієнта $\gamma_1\mu_0\mu_1$ показано на рисунку 4.13.



(a)

(б)

Малюнок 4.13– Залежність ефекту проходження від коефіцієнта $\gamma_1\mu_0\mu_1$ в шарі при $L = 5$ й $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0, \gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.05$ і $\gamma_1\mu_0\mu_1 = 0.1$

4.3 Точне (непараксіальне) розв'язання задачі про взаємодію імпульсу Ейрі з нестационарним плоским шаром

Дифракція електромагнітних хвиль у нестационарних умовах середовища поширення має еволюційний характер. Під нестационарними умовами мається на увазі як нестационарна форма первинного сигналу, так і нестационарність середовища поширення, параметри якого змінюються у часі. При цьому важливе значення являє собою вибір початкового моменту нестационарності.

Як відомо, свої унікальні властивості імпульс Ейрі демонструє саме у параксіальному наближенні.

Розглянемо точну постановку задачі про взаємодію імпульсу Ейрі із шаром без припущення про параксіальне наближення [192–200].

Як і раніше, будемо описувати електромагнітне поле інтегральним рівнянням (3.3). Для шару $0 < x < a$ рівняння має вигляд:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{v^2 - v_1^2}{2vv_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_0^a dx' \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v} \right) E(t', x'). \quad (4.25)$$

У випадку визначення поля поза цим шаром, формула (4.25) є квадратурною, що дозволяє обчислити зовнішнє поле. У якості первинного поля розглянемо імпульс Ейрі (3.10) зі стартовим параметром p .

Розглянемо однорідний плоский шар товщиною a , у якому діелектрична проникність стрибком змінюється в нульовий момент часу від значення ε до значення ε_1 . Імпульс поширюється перпендикулярно шару й починає взаємодіяти з ним у нульовий момент часу. Таким чином, як і у випадку однієї границі, така постановка задачі визначає потрібну асиметрію розглянутого явища.

Розв'язок рівняння будується методом резольвенти [126], описаним вище. Перша частина \hat{R}_1 резольвенти $\hat{R} = \theta(x)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)\theta(x')$ має такий же

вигляд, як і (3.5), а друга частина \hat{R}_2 обумовлена наявністю другої межі. Виходячи із цього, просторово-часова область діелектричного шару розбивається на просторово-часові зони mn (рисунок 4.14). Перший індекс m показує кількість відбиттів імпульсу від освітленої межі шару, а другий n – від тіньової.

Застосування резольвенти \hat{R}_1 до інтегрального рівняння (4.25) дає електричне поле в зоні, що вільна від впливу меж шару, тобто в зоні з номером 00. Друга частина резольвенти \hat{R}_2 , обумовлена наявністю меж шару, будується з урахуванням відбиттів світових ліній від меж шару, і для поля в зоні з довільним номером mn має вигляд:

$$\hat{R}_2 = \hat{R}_{mn} \theta(x') \theta(a - x'), \quad (4.26)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{R}_{mn} = & \frac{v^2 - v_1^2}{2vv_1^2} \frac{v_1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left\{ \sum_{k=1}^m R^k \theta \left[v_1(t-t') - x + (-1)^{k-1} \left(\frac{a}{2} - x' \right) - \frac{2k-1}{2} a \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m R^k \theta \left[v_1(t-t') + x + (-1)^k \left(\frac{a}{2} - x' \right) - \frac{2k+1}{2} a \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

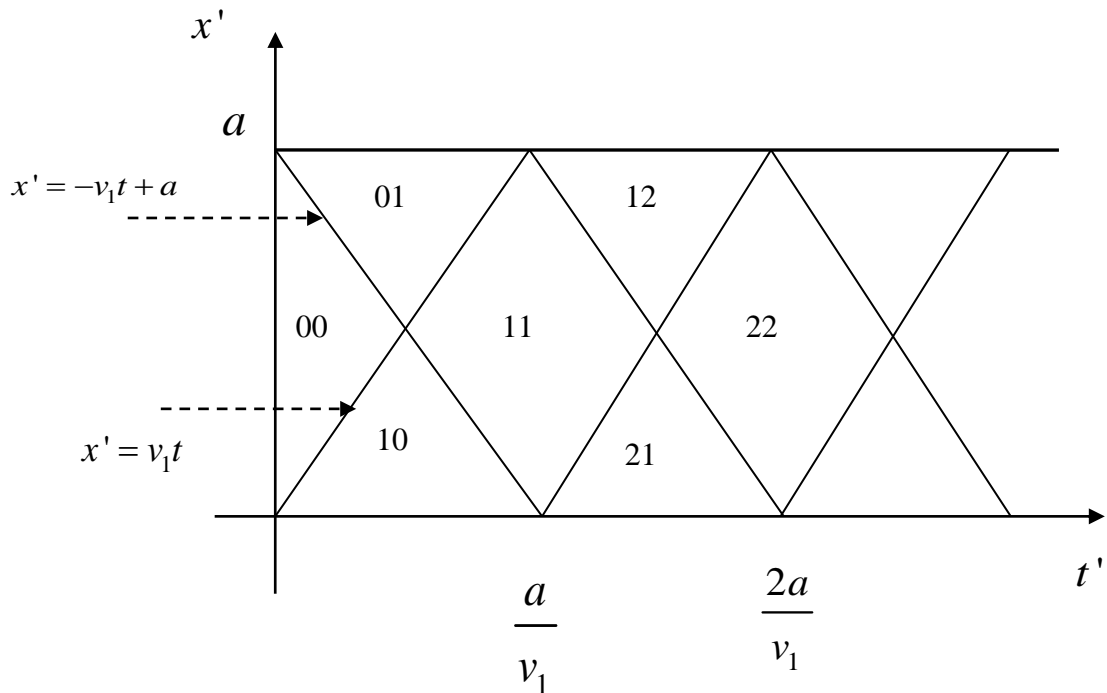


Рисунок 4.14–Просторово-часові зони у діелектричному шарі

Перша сума в (4.27) показує внесок відбиттів сигналу від освітленої межі шару, а друга – від тіньової. Коефіцієнт $R = (v - v_1) / (v + v_1)$ збігається з коефіцієнтом відбиття плоскої гармонійної хвилі від плоскої границі [126]. Зі збільшенням номера зони доданки, що містять цей коефіцієнт, будуть давати менший внесок у поле внаслідок того, що $R < 1$.

Дослідимо перетворення імпульсу Ейрі в зонах з номерами 00, 11 і суміжних трикутних зонах (рисунок 4.15). У зоні з номером 00, обмеженої просторово-часовими лініями $x' = v_1 t$ й $x' = -v_1 t + a$, імпульс «не відчуває» впливу границь шару й поле в цій зоні має вигляд:

$$\begin{aligned}
 E_{00}(t, x) &= \theta(x)\theta(a-x) \int_0^\infty dt' \int_0^a dx' \hat{R}_1 E_0(t', x') = \\
 &= \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x)\theta(a-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_0^a dx' \theta\left(t-t' - \frac{|x-x'|}{v_1}\right) E_0(t', x')
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

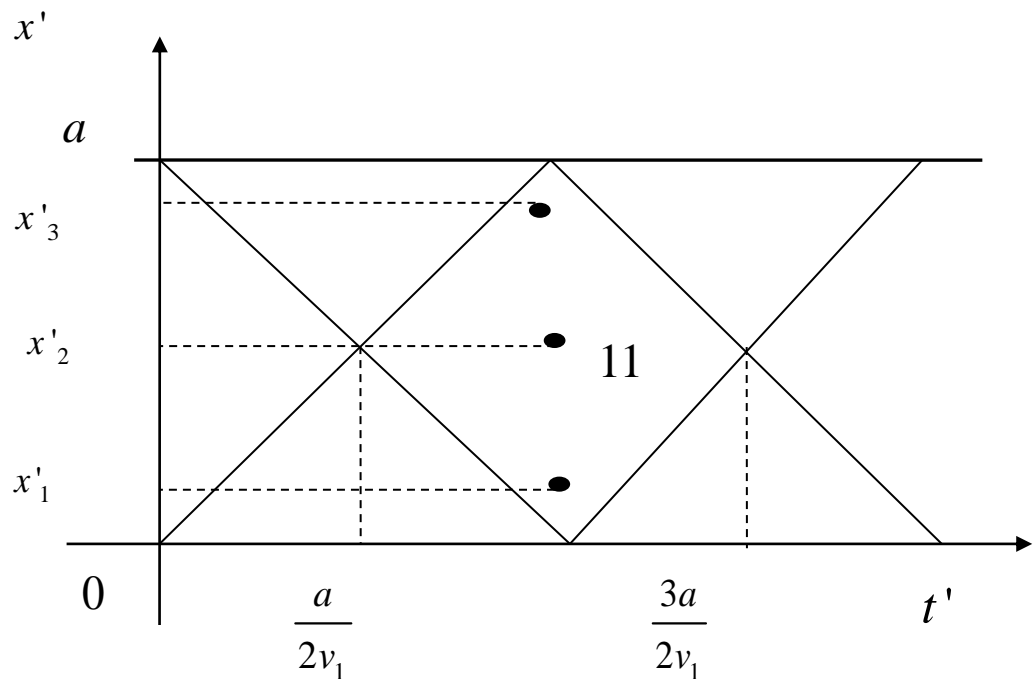


Рисунок 4.15–Вибір точки спостереження в зоні з номером 11.

Виконавши інтегрування в (4.28) отримаємо явний вираз для поля в зоні 00:

$$E_{00}(t, x) = \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T}\right) \left[\frac{v_1 v_1 - v}{v 2v} \text{Ai}\left(\frac{v_1 t}{v T} + \frac{x}{vT} - p\right) + \right. \\ \left. + \frac{v_1 v_1 + v}{v 2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} + \frac{x}{vT} - p\right) \right] \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} - \frac{a}{vT}\right). \quad (4.29)$$

У досліджуваній зоні поле складається із двох імпульсів Ейрі, що поширюються з новою швидкістю в протилежних напрямках. У цій зоні поле не відчуває впливу меж шару, отримані ж хвилі сформувалися в результаті стрибка діелектричної проникності усередині шару, що призвело до розщеплення падаючого імпульсу Ейрі на два імпульси. Подальша взаємодія імпульсу із шаром полягає у відбитті його від меж. При цьому характер вторинного імпульсу буде змінюватись при переході із зони в зону, що описуються функціями Хевисайда у формулі (4.29) і нижче.

У зоні з номером 01 імпульс однократно відбивається від верхньої межі шару

$$E_{01}(t, x) = \theta(x)\theta(a-x) \int_0^{\infty} dt' \int_0^a dx' \hat{R}_{01} E_0(t', x') = \\ = \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x)\theta(a-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} R \int_0^{\infty} dt' \int_0^a dx' \left\{ \theta\left[t - t' + s_1^{(-)}(x, x')\right] \right\} E_0(t', x') \quad (4.30)$$

$$\text{Тут } s_1^{(-)}(x, x') = \frac{1}{2v_1} \{2x - a + 2x' - 3a\}$$

Виконавши інтегрування в (4.30), отримуємо вираз для поля в зоні 01:

$$E_{01}(t, x) = \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T}\right) \left[\frac{v_1 v_1 + v}{v 2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} + \frac{x}{vT} - p\right) + \right. \\ \left. + R \frac{v_1 v_1 + v}{v 2v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} + \frac{2a}{vT} - p\right) \right] \theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} - \frac{a}{vT}\right). \quad (4.31)$$

У цій зоні електромагнітне поле складається із двох хвиль, що поширюються в протилежних напрямках. Перша хвиля є результатом розщеплення імпульсу в момент стрибка діелектричної проникності, а друга, пропорційна коефіцієнту відбиття R , формується в результаті відбиття імпульсу від верхньої межі шару.

У зоні 10 резольвента (4.27) будується з урахуванням відбиття від нижньої межі шару й поле в цій зоні обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned}
 E_{10}(t, x) &= \theta(x)\theta(a-x) \int_0^{\infty} dt' \int_0^a dx' \hat{R}_{10} E_0(t', x') = \\
 &= \frac{v_1^2 - v^2}{2v^2 v_1} \theta(x)\theta(a-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} R \int_0^{\infty} dt' \int_0^a dx' \left\{ \theta \left[t - t' - s_1^{(+)}(x, x') \right] \right\} E_0(t', x')
 \end{aligned} \quad , (4.32)$$

$$\text{де } s_1^{(+)}(x, x') = \frac{1}{2v_1} \{2x - a + 2x' + a\}.$$

Після інтегрування в (4.32) отримаємо електромагнітне поле в зоні 10:

$$\begin{aligned}
 E_{10}(t, x) &= \theta \left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} \right) \left[\frac{2v_1}{v_1 + v} \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{v_1 v - v_1}{v} \text{Ai} \left(\frac{v_1 t}{v T} + \frac{x}{vT} - p \right) + R \frac{v_1 v - v_1}{v} \text{Ai} \left(\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} - p \right) \right] \theta \left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + \frac{a}{vT} \right),
 \end{aligned} \quad (4.33)$$

У цій зоні поле складається із трьох типів хвиль: перша являє собою безпосереднє проходження в шар падаючої хвилі, має такий же напрямок поширення, але нову швидкість. Друга хвиля поширюється в протилежному напрямку й породжена зворотною хвилею, що виникла в результаті часового стрибка діелектричної проникності. Відбиття цієї хвилі від тіньової межі шару породжує третю хвилю, яка поширюється в тому ж напрямку, що й падаюча хвиля.

У центральних зонах шару резольвента будується з урахуванням відбиття від двох границь. Поле в зоні з m -кратним відбиттям від двох меж шару, тобто в зонах з однаковими індексами mm , описується формулою:

$$\begin{aligned}
E_{mm}(t, x) = & \theta\left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} + (1-m)\frac{a}{vT}\right)\theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} - m\frac{a}{vT}\right) \times \\
& \times \left[C_0 \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p\right) + \right. \\
& + C_0 \sum_{k=1}^{m-1} R^k \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + (-1)^k \frac{x}{v_1 T} + (k-2+i_k)\frac{a}{v_1 T} - p\right) + \\
& + R^m C_1 \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} + (-1)^m \frac{x}{vT} - \frac{v_1}{v}(m+i_m)\frac{a}{vT} - p\right) + \\
& \left. + R^m C_2 \text{Ai}\left(\frac{v_1 t}{v T} + (-1)^m \frac{x}{vT} - \frac{v_1}{v}(m-i_m)\frac{a}{vT} - p\right) \right] \times \\
& \times \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + (1+m)\frac{a}{vT}\right)\theta\left(\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + m\frac{a}{vT}\right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\text{де } C_0 = \frac{2v_1}{v+v_1}, \quad C_1 = \frac{v_1}{v} \frac{v_1+v}{2v}, \quad C_2 = \frac{v_1}{v} \frac{v_1-v}{2v}, \quad i_k = \frac{1}{2}(1-(-1)^k)$$

Зі співвідношення (4.34) видно, що поле усередині шару має складну структуру й складається із чотирьох типів хвиль. Хвилі, що пропорційні коефіцієнту C_0 , породжуються падаючим після нульового моменту полем. Два останні доданки, що пропорційні коефіцієнтам C_1 й C_2 , породжуються хвилями, що розщепилися в результаті стрибка діелектричної проникності. Зі збільшенням номера зони mm внесок перевідбиттів імпульсу від меж шару буде зменшуватися, тому що відповідні доданки у формулі (4.34), пропорційні коефіцієнту $R < 1$. Тому важливо досліджувати внутрішнє поле саме в зонах з невеликими номерами.

Зокрема, поле в зоні з номером 11 з одним відбиттям від верхньої й одним відбиттям від нижньої межі має вигляд:

$$\begin{aligned}
E_{11}(t, x) = & \theta\left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} - \frac{a}{vT}\right) \times \\
& \times \left[-\text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} - p\right) + \frac{2v_1}{v+v_1} \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p\right) + \right. \\
& \left. + R \frac{v_1+v}{2v} \frac{v_1}{v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} + \frac{2a}{vT} - p\right) + R \frac{v_1}{v} \frac{v-v_1}{2v} \text{Ai}\left(\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} - p\right) \right] \times \\
& \times \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + \frac{2a}{vT}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + \frac{a}{vT}\right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Поле в шарі складається із чотирьох типів хвиль. Перші дві сформувалися після проходження первинного імпульсу в зону 11. Одна із цих хвиль поширюється з новою швидкістю

$$\frac{2v_1}{v+v_1} \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p\right),$$

а друга

$$-\text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} - p\right)$$

гасить падаючу хвилю згідно із принципом погашення Евальда-Озеєна.

З урахуванням цього, формула (4.35) має вигляд:

$$\begin{aligned}
E_{11}(t, x) = & \theta\left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} - \frac{a}{vT}\right) \times \\
& \times \left[\frac{2v_1}{v+v_1} \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p\right) + \right. \\
& \left. R \frac{v_1+v}{2v} \frac{v_1}{v} \text{Ai}\left(-\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} + \frac{2a}{vT} - p\right) + R \frac{v_1}{v} \frac{v-v_1}{2v} \text{Ai}\left(\frac{v_1 t}{v T} - \frac{x}{vT} - p\right) \right] \times \\
& \times \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + \frac{2a}{vT}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + \frac{a}{vT}\right)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Хвилі, які утворилися після стрибка діелектричної проникності в нульовий момент часу, після однократного відбиття від двох меж шару формують дві останні хвилі у формулі (4.36).

Отримані вирази для вторинних імпульсів дозволяють визначити поле поза шаром.

Механізм взаємодії імпульсу Ейрі з однієї межею відрізняється від випадку наявності двох границь. Поле, що пройшло через одну плоску границю, має вигляд:

$$E_T = \frac{v_1(v_1 - v)}{2v^2} \text{Ai} \left[\frac{v_1}{v} \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} \right) - p \right] + \theta \left(\frac{x}{v_1 T} - \frac{t}{T} \right) \frac{v_1(v_1 + v)}{2v^2} \text{Ai} \left[-\frac{v_1}{v} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) - p \right] + \theta \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) \left\{ \frac{2v_1}{v_1 + v} \text{Ai} \left[-\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T} - p \right] - \frac{v_1(v - v_1)^2}{2v^2(v + v_1)} \text{Ai} \left[\frac{v_1}{v} \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right) - p \right] \right\}. \quad (4.37)$$

Порівнюючи отримані вирази для поля при наявності однієї й двох меж, слід зазначити, що наявність другої межі явно визначається доданками, що залежать від товщини шару. Також поле вторинного імпульсу складається з перевідбитих від меж шару імпульсів, які відсутні у випадку однієї межі.

Положення імпульсу Ейрі в зоні 00 при додатньому значенні стартового параметра p показано на рисунку 4.16а.

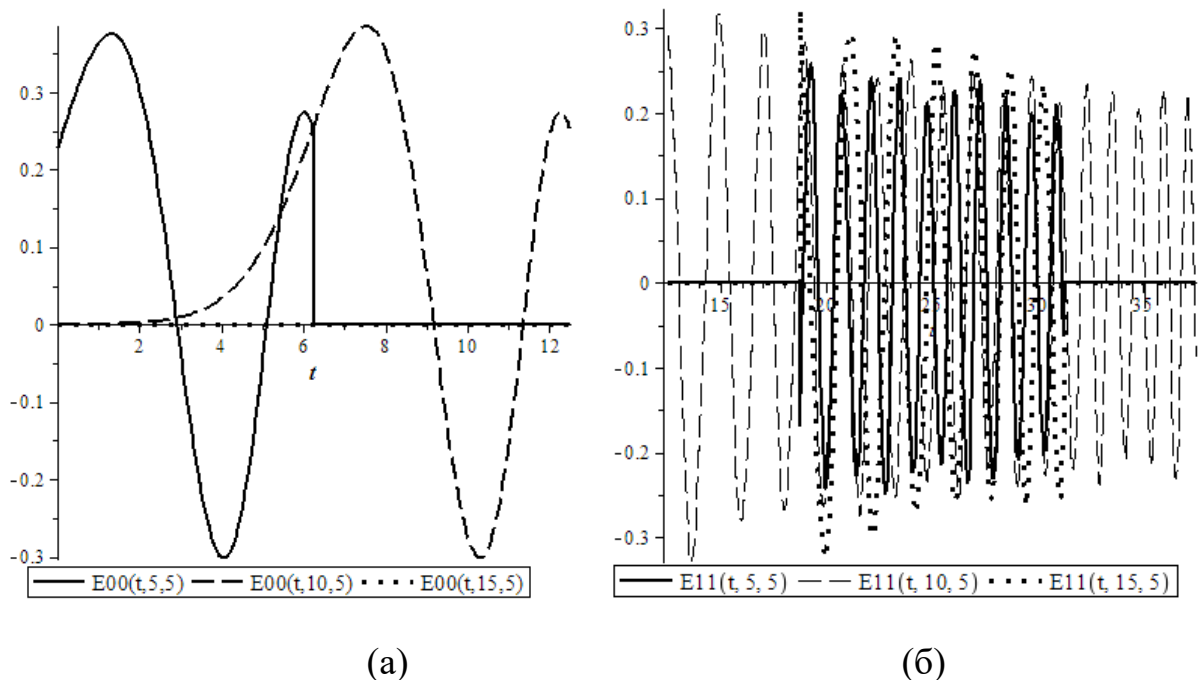


Рисунок 4.16– Часовий хід імпульсу Ейрі в зоні 00: (а) на часовому інтервалі від $t_0 = 0$ до $t_1 = a/2u$ й у зоні 11(б) на часовому інтервалі від $t_1 = a/2u$ до $t_2 = 3a/2u$ при $p = 5$, $a/vT = 20$, $u = v_1/v = 0.8$ у різних точках шару: $x/vT = 5$ (суцільна лінія), $x/vT = 10$ (штрихована лінія), $x/vT = 15$ (пунктирна лінія).

З аналізу графіків випливає, що в даній зоні за проміжок часу від $t_0 = 0$ до $t_1 = a/2u$ встигає з'явитися лише передній фронт імпульсу Ейрі, що добре видно поблизу освітленої межі в точці $x/vT = 5$ й у середині шару в точці $x/vT = 10$. Час запізнювання імпульсу t/T легко визначити за рисунком 4.16а, обчисливши різницю між значеннями часу, коли імпульс досягає свого максимального значення.

Враховуючи динаміку поширення імпульсу, можна сказати, що в точку $x/vT = 15$, близьку до тіньової межі шару, імпульс потрапить у момент часу, який буде перевищувати часовий інтервал зони 00. Отже, імпульс переходить у сусідню зону, а в зоні 00 відсутній (рисунок 4.16а).

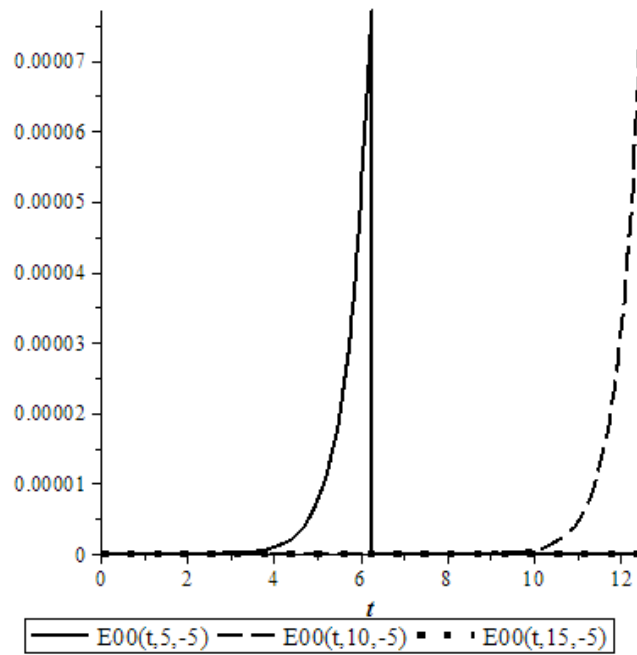
При переході імпульсу в зону 11 за проміжок часу $t_1 = a/2u$ й $t_2 = 3a/2u$ (малюнок 4.16б) видно зміна імпульсу під час його проходження по товщині шару.

Вибір точки спостереження в зоні 11 показано на рисунку 4.15. У точках, близьких до меж шару (на рисунку 4.16б суцільна й пунктирні лінії), імпульс має значно меншу тривалість, ніж в середині шару (на рисунку 4.16б штрихована лінія). Це обумовлене ромбовидною формою віртуальних просторово-тимчасових зон, на які ділиться шар.

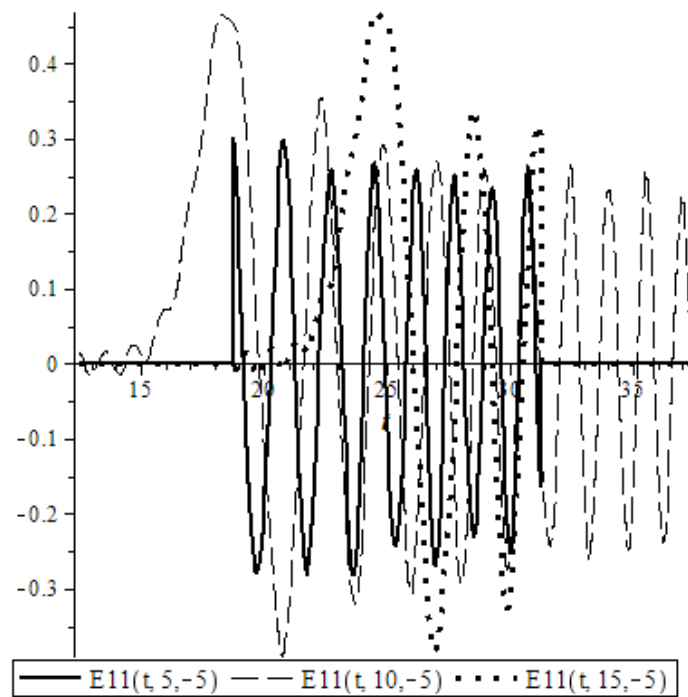
На рисунку 4.17 показано поширення імпульсу Ейрі в зонах 00 і 11 при від'ємному значенні стартового параметра $p = -5$. З аналізу графіків випливає, що при $p < 0$ (рисунок 4.17а) сигнал досягає обраної точки спостереження пізніше, ніж при $p > 0$ (рисунок 4.16а)

У зоні 11 спостерігається лише сильно осцилюючий «хвіст» імпульсу Ейрі при $p = 5$ (рисунок 4.16б), у той час, як при від'ємному значенні $p = -5$ (рисунок 4.17б), у зоні 11 видно ще й головний пелюсток імпульсу.

Отже, з детального аналізу поведінки імпульсу Ейрі діелектричному шарі випливає, що вибір значення стартового параметра важливий при дослідженні явища взаємодії імпульсу з неоднорідністю середовища.



(a)



(б)

Рисунок 4.17– Часовий хід імпульсу Ейрі в зоні 00 на часовому інтервалі від $t_0 = 0$ до $t_1 = a / 2u$ й у зоні 11 за часом від $t_1 = a / 2u$ до $t_2 = 3a / 2u$ у випадку шару при $p = -5$, $a / vT = 20$, $u = v_1 / v = 0.8$ у різних точках шару: $x / vT = 5$ (суцільна лінія), $x / vT = 10$ (штрихована лінія), $x / vT = 15$ (пунктирна лінія).

На рисунках 4.18 – 4.19 показано положення імпульсу Ейрі в середовищі з показником заломлення більше одиниці $v_1/v > 1$ при різних знаках стартового параметра p .

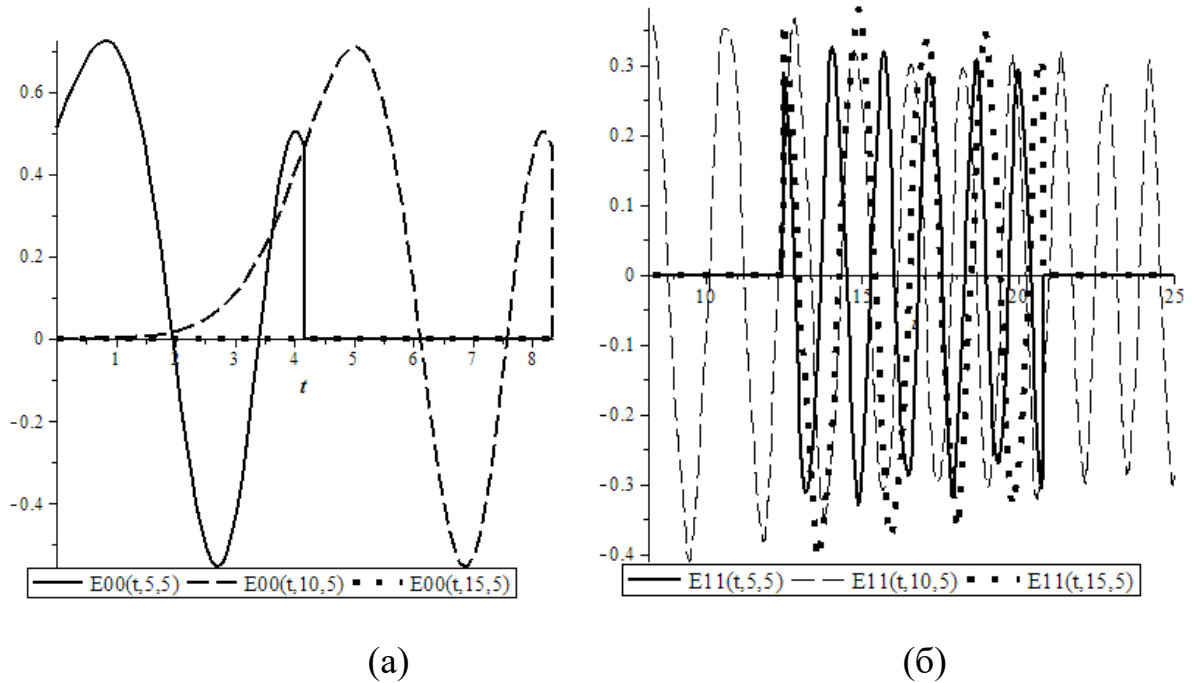


Рисунок 4.18– Поширення імпульсу Ейрі в зоні 00 (а) на часовому інтервалі від $t_0 = 0$ до $t_1 = a / 2u$ й у зоні 11 (б) за часом від $t_1 = a / 2u$ до $t_2 = 3a / 2u$ у випадку шару при $p = 5$, $a / vT = 20$, $u = v_1 / v = 1.2$ у різних точках шару: $x / vT = 5$ (суцільна лінія), $x / vT = 10$ (штрихована лінія), $x / vT = 15$ (пунктирна лінія)

На рисунку 4.18а видно, що максимального значення головний пелюсток імпульсу в зоні 00 досягає в більш оптично щільній середовищі й поширюється швидше в порівнянні із середовищем з меншим показником заломлення. Характер осциляцій «хвоста» імпульсу не змінюється в середовищі з більшим коефіцієнтом заломлення.

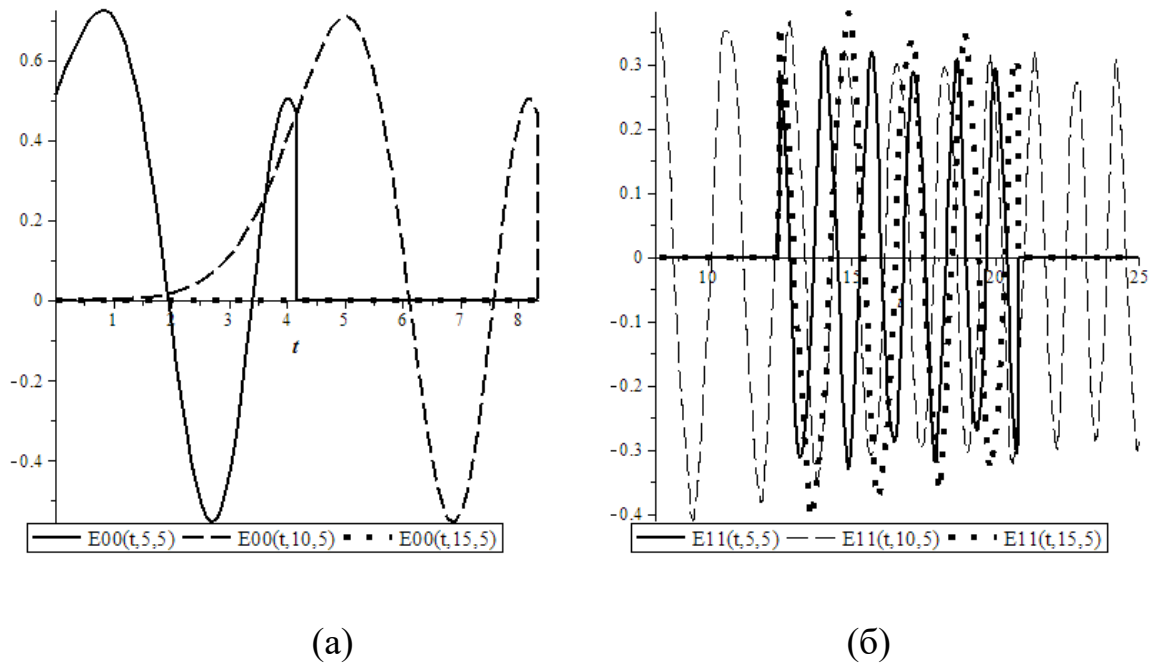


Рисунок 4.19– Поширення імпульсу Ейрі в зоні 00 (а) на часовому інтервалі від $t_0 = 0$ до $t_1 = a / 2u$ й у зоні 11 (б) за часом від $t_1 = a / 2u$ до $t_2 = 3a / 2u$ у випадку шару при $p = -5$, $a / vT = 20$, $u = v_1 / v = 1.2$ у різних точках шару: $x / vT = 5$ (суцільна лінія), $x / vT = 10$ (штрихована лінія), $x / vT = 15$ (пунктирна лінія).

При від’ємних значеннях стартового параметра $p = -5$ в більш оптично щільній середовищі амплітуда коливань імпульсу збільшується (рисунок 4.19). Свого максимального значення в середовищі з показником заломлення $v_1 / v = 1.2$ він досягає набагато раніше (рисунок 4.19б), у порівнянні з випадком, коли $v_1 / v = 0.8$ (рисунок 4.17б). Змінюється також форма головного пелюстка: з’являються побічні пелюстки імпульсу в середині шару й ближче до верхньої межі.

З аналізу поширення імпульсу в середовищах з різним коефіцієнтом заломлення випливає, що головний пелюсток імпульсу Ейрі змінює свою форму в більш оптично щільній середовищі як при додатніх, так і при негативних значеннях стартового параметра. Також показано, що вибір початкового просторово-тимчасового параметра впливає на місце розташування імпульсу в шарі, а перехід сигналу в середовище з новою

діелектричною проникністю призводить до збільшення його амплітуди й зміні форми головного пелюстка.

4.4 Просторово-часова структура імпульсу Ейрі в шарі з межами, що рівномірно рухаються відносно одна одної.

Розглянемо тепер задачу з діелектричним плоским шаром товщиною a , границі якого не постійні, а рівномірно рухаються назустріч одна одній з постійною швидкістю u , й у момент часу $t = a/2u$ шар збігається в одну точку.

Поле в шарі описується тим же інтегральним рівнянням Вольтерра (4.25), тільки функція Хевисайда тепер визначається як

$$f(t, x) = \theta(a - ut - x)\theta(x - ut), \quad (4.38)$$

де u - швидкість меж шару, яка задовольняє нерівності $0 < u < v_2$. Умова $u > 0$ є необхідною для того, щоб межі шару збігались в одну точку, а вхідний у нього імпульс Ейрі «встиг» відчувати вплив цих меж при $u < v_2$. У протилежному випадку, коли $u < 0$, межі шару віддаляються одна від одної й шар розлітається.

Коли швидкість меж шару більше швидкості імпульсу, те вся світова область, утворена цими межами, повністю вкладається у вільну від впливу меж шару просторово-часову зону з номером 00. У цьому випадку імпульс Ейрі «не чуває» впливу меж шару.

Розв'язання інтегрального рівняння (4.25) також будемо будувати за допомогою резольвенти. Як і у випадку з постійними межами, шар розбивається на просторово-часові зони, як показано на рисунку 4.20.

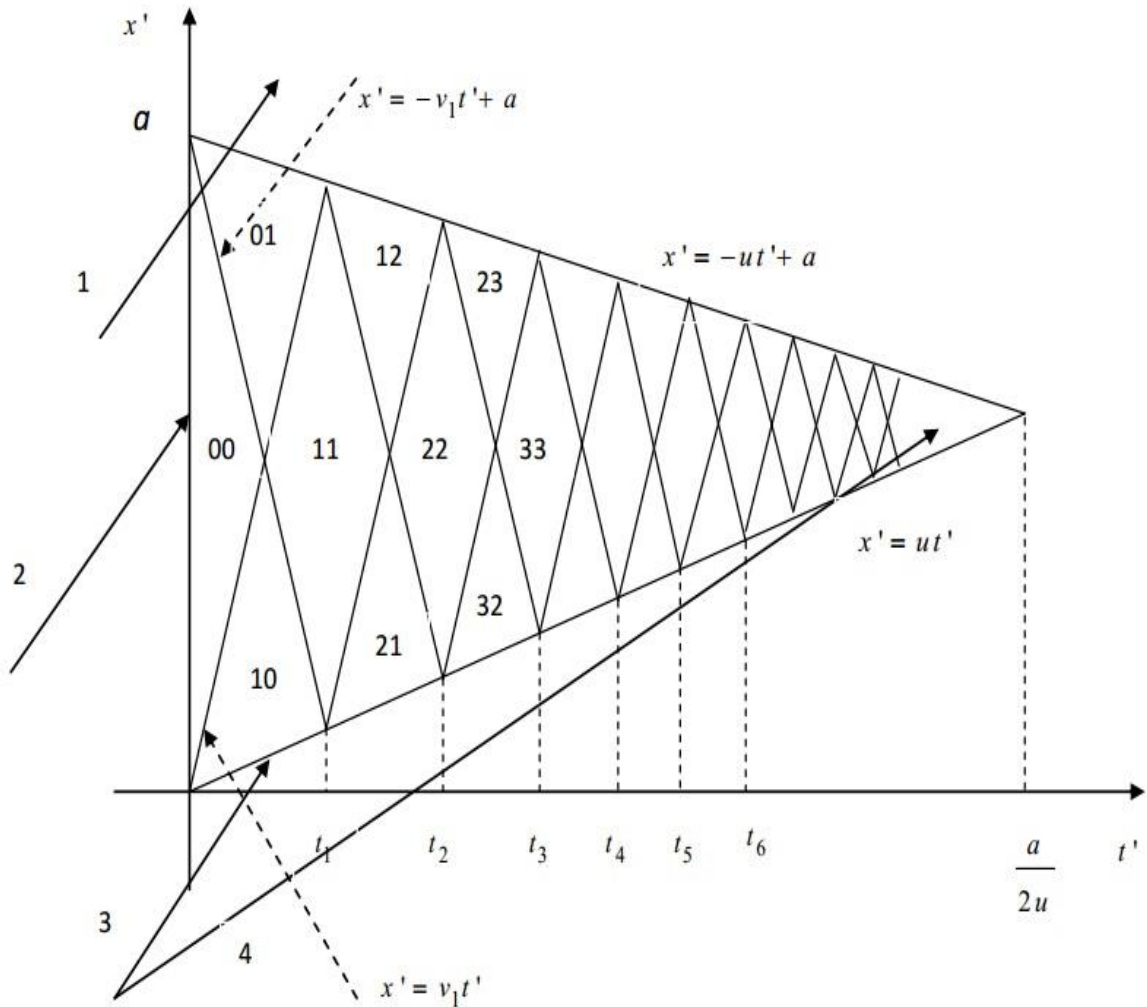


Рисунок 4.20–Геометрія задачі у випадку взаємодії імпульсу Ейрі з шаром, межі якого збігаються в одну точку.

Просторово-часову структуру взаємодії імпульсу Ейрі з шаром показано на рисунку 4.20 занумерованими стрілками. Стрілка з номером 1 показує падіння імпульсу на шар у момент початку руху меж, тобто передній фронт імпульсу буде знаходитись за межами шару, коли межі цього шару почнуть зустрічний рух. Стрілка 2 вказує на положення переднього фронту імпульсу в момент, коли відбувається стрибок діелектричної проникності. Стрілки 3 і 4 ілюструють ситуацію, коли межі починають рух раніше, ніж почнеться процес взаємодії імпульсу з шаром.

Відстань між просторово часовими зонами змінюється за законом:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{w^{1-n}}{v_1 + u}, \quad (4.39)$$

$$\text{де } w = \frac{v_1 + u}{v_1 - u}.$$

Резольвента інтегрального рівняння (4.25) також складається із двох частин [126]. Якщо точка спостереження знаходиться в зоні з номером 00, то перша частина резольвенти має такий же вид, як і у випадку необмеженого простору.

Друга частина резольвенти для точки спостереження, яка знаходиться в зоні з номером mmi має вигляд:

$$\hat{R}_{mm} = -\zeta \frac{v_1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{k=1}^m R_u^k \chi_1(t', x') + \sum_{k=1}^m R_u^k \chi_2(t', x') \right), \quad (4.40)$$

де

$$\chi_1(t', x') = \theta \left(-v_1 t' + (-1)^k x' + w^{i_k} \left(1 + \frac{u}{v_2} q^2 \frac{1 - w^{k-i_k}}{1 - w^2} \right) v_1 \tau^{(-)} - \right. \\ \left. - w^{i_k} \frac{1 - w^{k+i_k}}{1 - w^2} qa \right),$$

$$\chi_2(t', x') = \theta \left(-v_1 t' - (-1)^k x' + w^{i_k} \left(1 + \frac{u}{v_2} w^2 \frac{1 - w^{k-i_k}}{1 - w^2} \right) v_1 \tau^{(+)} - \right. \\ \left. - w^{k-i_k} \frac{1 - w^{k+i_k}}{1 - w^2} qa \right),$$

$$q = \frac{2v_1}{v_2 - u}, \quad \tau^{(\pm)} = t \pm x / v_1, \quad i_k = \left[1 + (-i)^k \right] / 2.$$

Структура внутрішнього поля в зоні з номером 00, де немає впливу меж шару, така ж, як і в шарі з постійними границями:

$$\begin{aligned}
E_{00}(t, x) = & \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T}\right) \left[\lambda^+ \text{Ai}\left(\frac{v_1 t}{v T} + \frac{x}{vT} + p\right) + \right. \\
& \left. + \lambda^- \text{Ai}\left(-\frac{v_2 t}{v T} + \frac{x}{vT} + p\right) \right] \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} - \frac{a}{vT}\right). \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Структура в зоні з довільним номером mm визначається виразом:

$$\begin{aligned}
E_{mm}(t, x) = & \theta\left(-\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} + (1-m)\frac{a}{vT}\right) \theta\left(\frac{x}{vT} + \frac{v_1 t}{v T} - m\frac{a}{vT}\right) \times \\
& \times \left[K \left\{ C_0 \text{Ai}\left(-K\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{v_1 T}\right) + p\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + R_1^k C_0 \sum_{k=1}^{m-1} \text{Ai}\left[K \left[w^k \left(-\frac{t}{T} + (-1)^k \frac{x}{v_1 T}\right) + w \frac{1-w^2}{1-w^2} \frac{a}{v_1 T} \right] + p \right] \right\} + \right. \\
& \left. + R_1^m C_1 \text{Ai}\left(w^m \left[-\frac{v_1 t}{v T} + (-1)^m \frac{x}{v_1 T} \right] + q\eta \frac{a}{vT} + p \right) + \right. \\
& \left. + R_1^m C_2 \text{Ai}\left(w^m \left[\frac{v_1 t}{v T} + (-1)^m \frac{x}{v_1 T} \right] + wq\eta \frac{a}{vT} + p \right) \right] \times \\
& \times \theta\left(-\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + (1+m)\frac{a}{vT} + p\right) \theta\left(\frac{x}{vT} - \frac{v_1 t}{v T} + m\frac{a}{vT}\right). \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти у формулі (4.42) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
C_0 = \frac{2v_1}{v+v_1}, \quad C_{1,2} = \frac{v_1(v_1 \pm v)}{2v^2}, \quad R_1 = wR = \frac{v_1+u}{v_1-u} \frac{v-v_1}{v+v_1}, \quad R = \frac{v-v_1}{v+v_1} \frac{v_1-u}{v_1+u}, \\
\lambda^\pm = \frac{v_1}{v} \frac{v_1 \pm v}{2v}, \quad K = \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u}, \quad \eta = \frac{1-w^{(m+i_m)/2}}{1-w^2}.
\end{aligned}$$

Функції Хевісайда у формулі (4.42) визначають межі відповідних просторово-часових зон шару. У шарі формується два імпульси, які пропорційні коефіцієнтам $C_{1,2}$. Ці імпульси утворюються унаслідок стрибка діелектричної проникності й поширюються по шару, відбиваючись від його

меж. Нескінченна кількість таких відбиттів вкладається в шар за скінченний проміжок часу, тому що межі шару збігаються в одну точку. Імпульси, які пропорційні C_0 , формуються після проходження імпульсу в шар з боку освітленої межі шару. Амплітуди цих імпульсів збільшуються, що призводить до нестійкості падаючого імпульсу в шарі й до розкладання хвилі на хвильові пакети. Для більш детального аналізу віртуальної структури поля в шарі із межами, що рухаються, розглянемо поля в зонах 00, 11 і 22 при від'ємному значенні стартового параметра p .

Структура поля в зоні 00 описується формулою (4.41), а в зонах 11 і 22 формулами (4.43) і (4.44) відповідно.

$$\begin{aligned}
 E_{11}(t, x) = & \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} C_0 \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} + p \right) + \\
 & + R_1 C_1 \text{Ai} \left(w \left[-\frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + q \frac{1-\sqrt{w}}{1-w^2} \frac{a}{vT} + p \right) \\
 & + R_1 C_2 \text{Ai} \left(w \left[\frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + wq \frac{1-\sqrt{w}}{1-w^2} \frac{a}{vT} + p \right)
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
 E_{22}(t, x) = & \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} C_0 \text{Ai} \left(-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} + \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} + p \right) + \\
 & + R_1 \frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} C_0 \text{Ai} \left(w \left[-\frac{v_1}{v} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{t}{T} - \frac{v-u}{v_1+u} \frac{x}{vT} \right] + \right. \\
 & \left. + q \frac{1-\sqrt{w}}{1-w^2} \frac{v-u}{v_1+u} \frac{a}{vT} + p \right) + \\
 & + R_1^2 C_1 \text{Ai} \left(w \left[-\frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + q \frac{1-\sqrt{w}}{1-w^2} \frac{a}{vT} + p \right) + \\
 & + R_1^2 C_2 \text{Ai} \left(w \left[\frac{v_1}{v} \frac{t}{T} - \frac{x}{v_1 T} \right] + wq \frac{1-\sqrt{w}}{1-w^2} \frac{a}{vT} + p \right)
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Поле в зоні з номером 11 складається із трьох імпульсів Ейрі, перший з яких сформувався внаслідок проходження імпульсу в шар з боку освітленої межі шару. Інші два імпульси в цій зоні утворились у результаті відбиттів первинного імпульсу від меж шару після розщеплення імпульсу внаслідок стрибка діелектричної проникності в нульовий момент часу.

Формула (4.44) описує часову-просторово-тимчасову структуру поля в зоні 22. Тут формується вже чотири імпульси: перші два - це результат проходження первинного імпульсу в шар, а інші, які пропорційні коефіцієнту R_1^2 , є результатом дворазового відбиття від меж шару.

Структура полів у цих зонах складніше, чим у задачі із шаром з постійними межами. По-перше, змінюється множник, який описує амплітуду імпульсу. По-друге, ускладнюється просторово-часова залежність між компонентами аргументів функцій Ейрі. І, по-третє, у випадку шару з межами, що рухаються, залежність від товщини шару набагато складніша, чим у випадку, коли межі шару постійні. На рисунку 4.21 показана еволюція імпульсу Ейрі при переході з однієї просторово-часової зони в іншу.

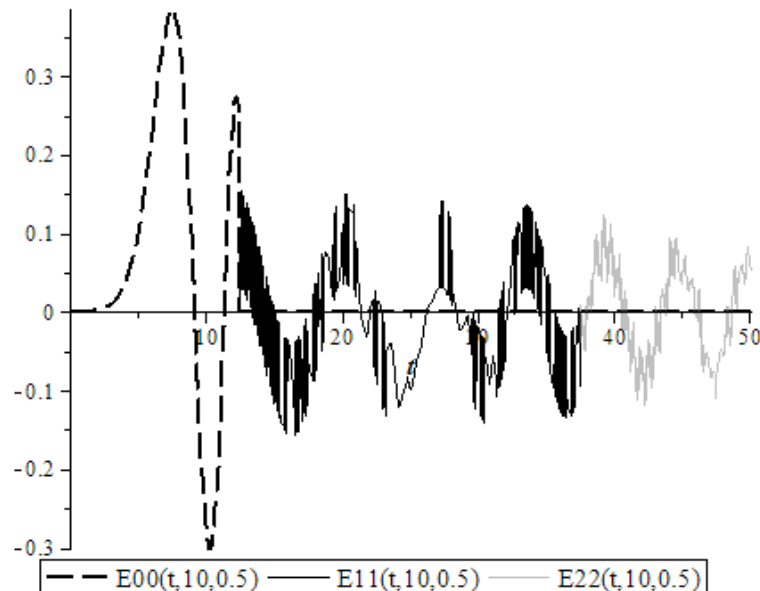


Рисунок 4.21–Еволюція імпульсу Ейрі у часі в зонах 00 (пунктирна лінія), 11 (чорна суцільна лінія) і 22 (сіра суцільна лінія): $a / vT = 20$,

$$x / vT = 10, u / v = 0.5, v_1 / v = 0.8$$

На рисунку 4.22 показано зміну імпульсу Ейрі шаром у порівнянні з первинним імпульсом. З аналізу рисунку 4.22 випливає, що у імпульса змінюється лише величина головного пелюстка в зоні, що вільна від впливу меж шару, у той час, як форма самого імпульсу зберігається. При переході в зону 11 після однократного відбиття від меж шару форма імпульсу суттєво міняється. З'являються побічні пелюстки й вторинні коливання.

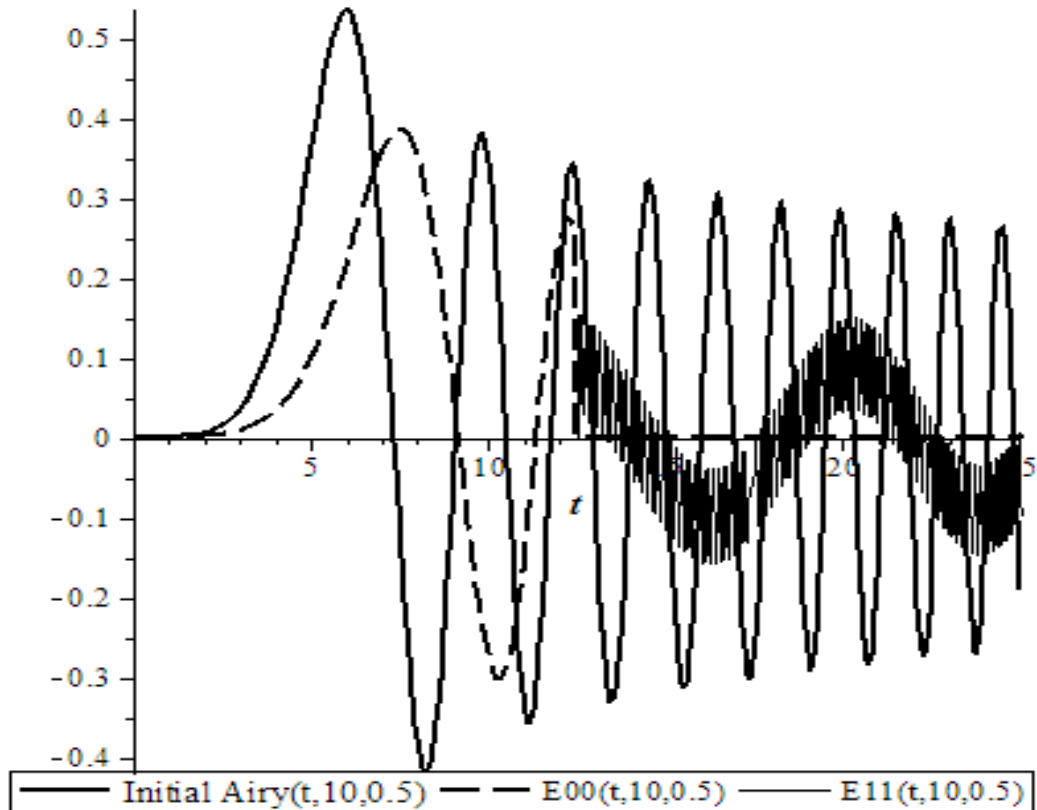


Рисунок 4.22– Порівняння дифрагованих імпульсів E_{00} і E_{11} в зонах 00 і 11 відповідно: $a/vT = 20$, $x/vT = 10$, $u/v = 0.5$, $v_1/v = 0.8$.

Явний вплив руху меж шару демонструє рисунок 4.23, на якому показано трансформацію імпульсу Ейрі в порівнянні з шаром, межі якого не рухаються. У цьому випадку поле менше змінюється у порівнянні з первинним, на відміну від випадку шару, межі якого збігаються в одну точку. У «нульовій» зоні імпульс не змінюється в обох випадках, а після відбиття від меж змінюється амплітуда «хвоста» у порівнянні з первинним імпульсом.

У випадку взаємодії плоскої хвилі і шару з межами, що рухаються [135], були визначені параметри, при яких амплітуда хвиль у шарі зростає й поле стає нестійким. У результаті цього відбувається накопичення енергії в шарі за рахунок перетворення кінетичної енергії його границь в енергію електромагнітного поля.

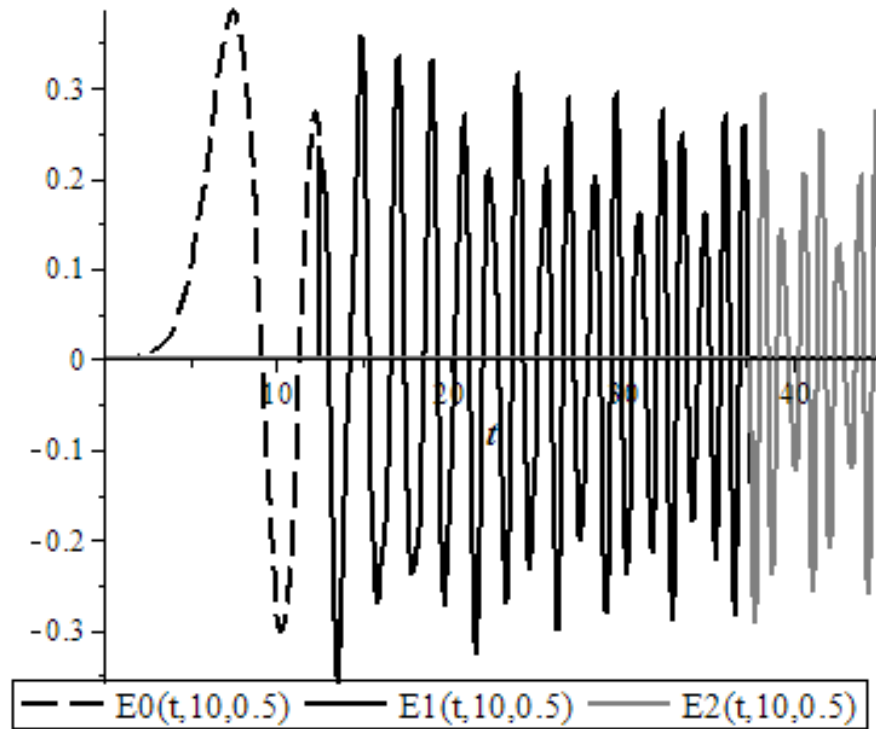


Рисунок 4.23– Імпульс Ейрі в шарі з постійними межами в зонах 00 (пунктирна лінія), 11 (чорна суцільна лінія) і 22(сіра суцільна лінія):

$$a/vT = 20, x/vT = 10, u/v = 0.5, v_1/v = 0.8$$

Таким чином, у шарі із зустрічним рухом меж відбувається збільшення амплітуди імпульсу, як і у випадку первинної плоскої хвилі, але також міняється його форма й загальна структура поля в шарі.

Висновки по розділу

1. Розв'язано просторово-часову задачу про взаємодію імпульсу Ейрі з діелектричним плоским шаром у параксіальному наближенні.

Отримано спектри вторинних імпульсів. Ілюстрація спектрів у середовищах з різною оптичною щільністю показала явно виражену якісну зміну спектрів.

2. Розв'язано точну задачу про взаємодію імпульсу Ейрі з діелектричним шаром. Розв'язок отримано методом інтегральних рівнянь Вольтерра. Проведено аналіз поля в шарі залежно від положення точки спостереження. Положення імпульсу в цій задачі, як і у випадку з однією межею, контролюється значенням стартового параметра, тому вибір значення цього параметра, і тим паче його знака, дуже важливий при дослідженні явища взаємодії імпульсу з неоднорідністю. Імпульс Ейрі змінює свою форму в більш оптично щільнім середовищі як при додатніх, так і при від'ємних значеннях стартового параметра, а перехід сигналу в середовище з новою діелектричною проникністю призводить до збільшення його амплітуди й зміни форми головного пелюстка.

3. Розв'язано задачу про взаємодію імпульсу Ейрі з шаром у випадку, коли межі шару не постійні, а рухаються назустріч одна одній та у певний момент часу шар збігається в одну точку. Отримано точні вирази для поля в довільній точці шару. Проведено порівняння імпульсу Ейрі в шарі з постійними межами у випадку зустрічного руху меж при різних коефіцієнтах заломлення й знаках стартового параметра. Структура поля у випадку шару з рухомими межами складніша, ніж у випадку з постійними межами: змінюється коефіцієнт, що описує амплітуду імпульсу, ускладнюється просторово-часова залежність в аргументах функцій Ейрі, ускладнюється загальна структура імпульсу.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову задачу перетворення електромагнітного імпульсу Ейрі у нестационарному середовищі з плоскими межами. Шляхом застосування резольвентного оператора до побудови розв'язку задачі про взаємодію електромагнітного сигналу з неоднорідним нестационарним середовищем отримано аналітичні вирази перетворених імпульсів Ейрі та проведено їх всебічний аналіз на базі строгого опису їх властивостей та комп'ютерного моделювання досліджуваних процесів. Це дозволить більш обґрунтовано застосовувати імпульси Ейрі до вирішення практичних задач.

1. Сформульовано початково-граничну електродинамічну задачу про перетворення електромагнітного сигналу у неоднорідному нестационарному середовищі у вигляді інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду із включеними граничними й початковими умовами. Отримано симетричну функцію Гріна початково-граничної задачі в параксіальному наближенні. За допомогою неї розглянуто параксіальне наближення такого рівняння і застосовано до задачі про взаємодію імпульсу Ейрі з нестационарним діелектричним шаром. Отримано спектри імпульсів, що пройшли в шар і відбилися від нього. Проведено аналіз спектрів у середовищах з різною оптичною щільністю, досліджено залежність спектрів від товщини шару. Показано, що при збільшенні товщини шару на деякій частоті виникає складова поля, амплітуда якої значно виділяється з-поміж складових поля з іншими частотами. Також відбувається зміщення максимуму спектру відбитого імпульсу Ейрі в область малих частот.

2. Сформульовано просторово-часову задачу про взаємодію імпульсу Ейрі з плоскою межею нестационарного діелектрика, що утворюється в деякий момент часу. Показано, що така задача містить потрібну асиметрію, а саме: по-перше, асиметрія, що полягає в асиметричності первинного імпульсу Ейрі, який має неперіодичну структуру

у вигляді головного пелюстка і осцилюючого хвоста, що затухає при збільшенні значень аргументу. По-друге, асиметрія полягає в асиметричності об'єкта дифракції, а саме, в наявності межі розділення середовищ з різними параметрами. По-третє, асиметрична поведінка в часі первинного імпульсу. Вона характеризується тим, що імпульс починає взаємодіяти з неоднорідністю в певний момент часу.

3. Досліджено характер поширення імпульсів, що пройшли через межу і відбилися від неї. Цей процес контролюється вибором значення стартового параметра. При від'ємних значеннях цього параметра передній фронт імпульсу не досягає межі до нульового моменту часу й імпульс «не відчуває» неоднорідності. У протилежному випадку, коли стартовий параметр має додатній знак, головний пелюсток і частина «хвоста» імпульсу Ейрі перебувають глибоко в нестационарному середовищі. Обчислено й проаналізовано потоки енергії, що переносяться імпульсом. Проведено аналіз асимптотичної формули для великих від'ємних значень аргументу функції Ейрі. Шляхом числового інтегрування промодельоване переміщення максимуму потоків енергії як первинного, так і того, що пройшов імпульсів.

4. Досліджено випадок, коли межа, починаючи з нульового моменту часу, рухається рівномірно назустріч імпульсу. Показано, що процес взаємодії імпульсу Ейрі з рухомою межею, легко контролювати вибором значення стартового параметра. Шляхом вибору оптимальних значень стартового параметра наочно проілюстровано процес взаємодії імпульсу Ейрі з межею.

5. Детально досліджено більш складний тип руху, а саме випадок, коли межа рухається по релятивістському рівноприскореному закону. Отримано аналітичні вирази для трансформованих імпульсів Ейрі рухомою межею та показано, що в момент досягнення межею швидкості імпульсу, утворюється два нескінченні розриви. Встановлено, що в цей момент відбувається розрив «хвоста» імпульсу так, що по одну сторону від межі залишається відсічений головний пелюсток імпульсу, а з іншої сторони –

осцилюючий хвіст. Такі розриви пояснюються наявністю особливих точок у виразах, що описують електромагнітне поле в момент взаємодії імпульсу та межу.

6. Проведено аналіз розподілу поля в шарі залежно від положення точки спостереження у випадку наявності двох границь (шару). Показано, що в шарі з постійними межами утворюються чотири імпульси, один з яких гасить первинний імпульс згідно принципу погашення, другий переміщується в тому ж напрямку, що і первинний, а два останніх, що утворились у результаті стрибка діелектричної проникності, переміщуються у протилежних напрямках. Отримано загальну аналітичну формулу для обчислення електромагнітного поля у будь-якій точці шару та більш детально досліджено властивості імпульсу на початковому етапі взаємодії з шаром.

7. Показано, що просторово-часова структура імпульсу значно ускладнюється, якщо межі шару не постійні, а рівномірно рухаються відносно одна одної. Отримано аналітичний вираз для обчислення поля і будь-якій точці шару. Із аналізу отриманих результатів випливає, що структура поля в такому шарі складніша, ніж у випадку, коли його межі постійні. По-перше, ускладнюється вираз для амплітуди імпульсу. По-друге, ускладнюється часова залежність в аргументах функцій Ейрі. І, по-третє, у випадку шару з межами, що рухаються, залежність від товщини шару набагато складніша, ніж у шарі з постійними межами. Після одноразового та дворазового відбиття від меж шару структура імпульсу ще більш ускладнюється появою вторинних пелюстків та додатковими коливаннями. Нескінченна кількість таких відбиттів вкладається в шар за скінчений проміжок часу, так як межі шару замикаються.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Наний О.Е., Трещиков В.Н., Убайдуллаев Р.Р. Дальность работы и пропускная способность когерентных систем связи // Вестник связи. 2013, №9, с.17–19.
2. Paulraj A.J., Gore D.A., Nabar R.U., Bolecskei H. An Overview of MIMO Communications – A Key to Gigabit Wireless// Proceedings of IEEE, 2004, Vol.92, No.2, pp. 198-218
3. Sandhu S., Paulraj A. Space-time block codes a capacity perspective//IEEE Communications Letters, 2000, vol. 4, № 12, pp. 384 -386.
4. Коньшев В.А., Леонов А.В., Наний О.Е., Трещиков В.Н., Убайдуллаев Р.Р. Рекордная производительность систем 100G как маркер перехода к эволюционному развитию ВОСП // Первая миля, 2015, №6, с.40–43.
5. Gainov V., Gurkin N.V., Lukin S.N., Makovejs S., Akopov S.G., Ten S.Y., Nanii O.E., Treshchikov V., Sleptsov M. Record 500 km unrepeated 1 Tbit/s (10x100G) transmission over an ultra-low loss fiber // Optics Express 22 , 2014, pp.22308–22313.
6. Пахомов, С.Д. Технологии беспроводных сетей семейства // Информ. технології та комп'ютерна інженерія, 2004, № 3, с. 10 – 15.
7. Баканов А.С. Метод оценки показателей производительности беспроводных сетей с централизованным управлением // Автоматика и телемеханика, 2000, № 4, с. 97 – 105
8. Нестеренко С.А. Метод расчета пропускной способности моноканала беспроводной сети стандарта// УНДІРТ, 2005, № 4, с. 26 –31.
9. Шанин О.И. Адаптивные оптические системы в импульсных мощных лазерных установка// Москва, "Техносфера", 2012.
10. Авакянц Л.И., Арбузов В.И., А.Н., Волинкин В.М., Игнатов А.Н., Крехова Е.Ю., Поздняков А.Е., Суркова В.Ф., Шашкин А.В., Федоров Ю.К., Фролова А.В. Неодимовые и медьсодержащие фосфатные стекла для

изготовления крупногабаритных стержневых и дисковых активных элементов лазеров и мощных высокоэнергетических усилителей излучения// Оптический журнал, 2014, т. 81, № 12, с.9–13.

11. Гагарский С.В., Ермолаев В.С., Сергеев А.Н., Пузык М.В. Исследование лучевой прочности диэлектрических покрытий, нанесенных на оптическую поверхность// Изв. Вузов. Приборостроение, 2012, т. 55, № 7, с. 80–85.

12. Поляков Н.П. Наносекундные озонаторы // Приборы и техника эксперимента, 2004. № 5. С. 126 – 129

13. Крастелев Е.Г. Генератор высоковольтных наносекундных импульсов для возбуждения диффузных газовых разрядов при атмосферном давлении // Приборы и техника эксперимента, 2009, №5, с. 98– 101.

14. Tausenev A.V., Kryukov P.G. Raman-converter-diode-pumped continuous-wave femtosecond Er-doped fibre laser//Kvantovaya elektronika, 2004, vol. 34, no. 2, pp. 106-110. (English version of journal: Quantum Electronics, 2004, vol. 34, no. 2, pp. 106-110.)

15. Borkunov R.Yu., Bryukhanov V.V. Femtosekundnaya ablyatsiya nanochastits medi i serebra v vode [Femtosecond ablation of copper and silver nanoparticles in water]//Izvestiya KGTU, 2013, № 31, pp. 11-17.

16. Захарова Г.С. Нанотрубки и родственные наноструктуры оксидов металлов// Екатеринбург: УрОРАН, 2005, 243 с.

17. Кандидов В.П., Шленов С.А., Косарева О.Г. Филаментация мощного фемтосекундного лазерного излучения // Квант, электрон.,2009. Т. 39(3), с. 205-228.

18. Земляное А.А., Гейнц Ю.Э. Интегральные параметры мощного фемтосекундного лазерного излучения при филаментации в воздухе // Оптика атмосферы и океана. 2005, Т. 18, № 7, с. 574-579.

19. Kandidov V.P., Dormidonov A.E., Kosareva O. G., AkozbekN., Scalora M., Chin S.L. Optimum small-scale management of random beam

perturbations in a femtosecond laser pulse // *Appl. Phys. B.* 2007, V. 87(1), pp. 29-36.

20. Mlejnek M., Wright E.M., Moloney J. V. Dynamic spatial replenishment of femtosecond pulses propagation in air // *Opt. Lett.*, 1998, V. 23, № 5, pp. 382-384.

21. Craig ament supercontinuum generation with self-healing Airy pulses // *OSA/CLEO*, 2011.

22. Gorbach A.V. Soliton self-frequency shift and spectral broadening in Air-core photonic crystal fibres // *OSA/CLEO/QELS*, 2010

23. Shifman Y. On the use of spatio-temporal multiresolution analysis in method of moments solutions of transient electromagnetic scattering // *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2001, Vol.49, p.1123.

24. Rodrigues-Moral A. Optical data networking: Protocols, technologies and architectures for next generation optical transport networks and optical internetworks // *J. of Lightwave Technology*, 2000, Vol.18, pp.1855–1869.

25. Linh W. Time-domain electromagnetic fields radiating along the horizontal interface between vertically uniaxial half-space medium // *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 2007, vol. 55, № 5, pp. 1305-1317

26. Fante R.L. Transmission of electromagnetic waves into time-varying media // *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 1971, vol. AP-19, p. 417-424

27. Berry M.V., Balazs N. L. Non spreading wave packets // *Am. J. Phys.*, 1979, 47, pp. 264

28. Siviloglou, G.A. Accelerating finite energy Airy beams // *Optics Letters*, 2007, V. 32, p. 979-981.

29. Мелешко Е.А. Быстродействующая импульсная электроника // Москва, 2007, ФИЗМАТЛИТ, 320 с.

30. Jammeh, E., Fleury. M., Ghanbari, M. All-IP network video streaming through interval type-2 fuzzy logic congestion control // *IST 2008*, pp.452 – 457

31. Adams J. C. Ultra-Wideband for Navigation and Communications // Big Sky, Montana, USA, 2001, Proc. Aerospace Conf., Vol. 2. pp. 785–791.

32. Rui-Yen Chang, Chin-Lung Lee IP Video Surveillance Applications over WiMAX Wireless Broadband Technology// INC, IMS and IDC, 2009, pp. 2100 - 2102

33. Глебович Г. В. Исследование объектов с помощью пикосекундных импульсов// Радио и связь, Москва, 1984, с. 256

34. Комаров С.А., Музалевский К.В. Импульсное зондирование неоднородной среды// Известия АлтГУ, Барнаул, 2005, Вып.1, №1, с.103-105.

35. Барсуков П.О., Файнберг Э.Б. Хабенский Е.О. Антенный поляризационный эффект в импульсных электромагнитных зондированиях// Изв. РАН, Физика Земли, 2003, 11, с. 81-87.

36. Kocinac S., Ikonc Z., Milanovic V. The influence of permanent dipole moments on second harmonic generation in asymmetric semiconductor quantum wells// Optics Communications , 1997, Vol. 140, pp. 89 – 92.

37.. Jauregui C. et al. Impact of modal interference on the beam quality of high-power fiber amplifiers //Optics express, 2011, Т. 19, №. 4, сс. 3258-3271.

38. Babushkin A. V. et al. Pulsed fiber laser with 30W output power at 532nm //Lasers and Applications in Science and Engineering. – International Society for Optics and Photonics, 2006, с. 61021E-61021E-5

39. Eidam T. Femtosecond fiber CPA system emitting 830 W average output power //Optics letters, 2010, Т. 35, №. 2, сс. 94-96.

40. Baimuratov A. S., Pereziabova T. P., Zhu W., Leonov M. Yu., Baranov A. V., Fedorov A. V., Rukhlenko I. D. Optical Anisotropy of Topologically Distorted Semiconductor Nanocrystals// Nano Lett., Article ASAP, 2017, DOI: 10.1021/acs.nanolett.7b02203

41. Макаров Г.Н. Кластерная температура. Методы её измерения и стабилизации// УФН, Москва, 2006, т.176, №4. с.124 – 174.

42. Макаров Г.Н. Экстремальные процессы в кластерах при столкновении с твердой поверхностью// УФН, Москва, 2008, т.181, с.365 – 387.

43. Макаров Г.Н. Классические методы определения температуры кластеров и наночастиц в молекулярных пучках // УФН, Москва, 2008, т.178, №4. с.337 – 376.
44. Макаров Г.Н. Применение лазеров в нанотехнологии: получение наночастиц и наноструктур методами лазерной абляции и лазерной нанолитографии // УФН, Москва, 2013, т.183, с.673 – 718.
45. Макаров Г.Н. Управление параметрами и составом молекулярных и кластерных пучков с помощью инфракрасных лазеров // УФН, Москва, 2018, т.188, с.689 – 719.
46. Yang G. W. Laser ablation in liquids: Applications in the synthesis of nanocrystals // Prog. Mater. Sci., 2007, 52(4), pp. 648–698
47. Semaltianos N. G. Nanoparticles by Laser Ablation// Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences, 2010, vol. 35, Issue 2, pp. 105-124
48. Naveed Ahmed, Saied Darwish, Abdulrehman M. Alahmari Laser Ablation and Laser-Hybrid Ablation Processes: A Review// Materials and Manufacturing Processes, 2016, Volume 31, Issue 9, pp. 1121-1142
49. Seisyan R. P. Nanolithography in microelectronics: A review// Technical Physics, 2011, Vol. 81, No. 8, pp. 1–14.
50. Lu C., Lipson R. H. Interference lithography: a powerful tool for fabricating periodic structures// Laser and Photonics reviews, 2010, Volume4, Issue4, pp. 568-580
51. Rodriguez A. Laser interference lithography for nanoscale structuring of materials: From laboratory to industry// Microelectronic Engineering, 2009, Vol. 86, Issues 4–6, pp. 937-94
52. Shur M. Frontiers in Electronics // Selected Topics in Electronics and Systems, Vol. 50, 2009, pp. 55-58
53. Johannes de Boor, Nadine Geyer, Ulrich Gosele, Volker Schmidt Three-beam interference lithography: upgrading a Loyd's interferometer for single-exposure hexagonal patterning// Optics Letters, 2009, Vol. 34, Issue 12, pp. 1783-1785

54. Hong M. H. Laser precision engineering: from microfabrication to nanoprocesing //Laser and Photonics reviews, 2010, Volume4, Issue1, pp. 123-143
55. Chong T C, Hong M H Laser precision engineering: from microfabrication to nanoprocesing// Laser and Photonics reviews, 2010, Vol.4, Issue1, pp. 123-143
56. Крюков П.Г. Лазеры ультракоротких импульсов // Квантовая электроника, 2001, т.31, №2, с. 95-119.
57. Klass Wynne, Gavin D. Reid Ultrafast Laser Technology and Spectroscopy// Encyclopedia of Analytical Chemistry,2006, pp. 13644–13670.
58. Герасименко А. Ю. Лазерное структурирование ансамбля углеродных нанотрубок для создания биосовместимых упорядоченных композиционных материалов// Конденсирование среды и межфазные границы, 2017, Т.17, №4, с. 489-501
59. Поврозин А.И., Онищенко И.Н., Егоров А.М., Зайцев В.П., Васильев А.В., Лещенко В.П. Фемтосекундный лазер – широкие возможности и применения// Метрология, Харьков, 2014,с 8-11
60. Rulliere C. Femtosecond Laser Pulses: Principles and Experiments// Berlin: Springer, 1998, pp.865-868
61. Крюков П. Г. Фемтосекундные импульсы. Введение в новую область лазерной физики// Физматлит, 2008, с.234
62. Крюков П. Г. Фемтосекундные лазеры для астрофизики//УФН, Москва, ,2015,с. 817–827
63. Gazazyan E.A. Interactions of femtosecond pulses with π -type atoms// J. Contemp. Phys.-Armen. Acad. Sci, 2016,pp. 22–27
64. Weber M. J. Handbook of optical materials // CRC press, 2002, p 19.
65. Vasilyev A.V.,Zajtsev V.P., Leshchenko V.P., Povrozin A.I. Application of femtosecond Ti-Sa lasers for measuring of amplitude-frequency characteristics of wide-band photodevices//Вопросы атомной науки и техники, 2013, №6(88), pp. 244

66. Robert H. Webb, George W. Hughes, Francois C. Delori Confocal scanning laser ophthalmoscope//Applied Optics, 1987, vol. 26, pp. 1492.

67. Lesiecki M. L., Lowery J. A. Er:YAG Laser Applications In Ophthalmology //LEOS '92, Conference Proceedings. IEEE Lasers and Electro-Optics Society, 1992 Annual Meeting, 1992, pp. 410-410.

68. Govan A. A. Laser ablation and comparable techniques in ophthalmology// IEEE Colloquium on Through the Keyhole: Microengineering in Minimally Invasive Surgery, London, 1995, p. 1/1

69. Cvetkovic Mario, Dragan Poljak, Andres Peratta Thermal modelling of the human eye exposed to laser radiation//Software Telecommunications and Computer Networks 2008 (SoftCOM 2008),2008, pp 16-20.

70. Burrows C. H. T., Girkin J. M. Lasers in ophthalmology: new lasers, new optics, new frontiers// IEEE Colloquium on Optical Techniques and Biomedical Applications, London, 1991, pp. 5/1-5/2.

71. Johnson M. A. Applications of lasers in ophthalmology//Lasers and Electro-Optics (CLEO '99), Summaries of Papers Presented at the Conference on Baltimore, MD, USA, 1999, pp. 399-405.

72. Jelhkova, K. Hamal, V. Kubecek and I. Prochazka Nd and Er:YAG Lasers in Ophthalmology//Proceedings of European Meeting on Lasers and Electro-Optics, Hamburg, Germany, 1996, pp. 290-290.

73. Sartania S. Generation 0,1 TW 5-fs optical pulses at a 1-kHz repetition rate// Opt. Lett., 1997, vol. 22, №20, pp. 1562-1564

74. Kaplan A.E. Lasetron: A Proposed Source of Powerful Nuclear-Time-Scale Electromagnetic Bursts// Phys.Rev.Lett.,2002, V. 88, №7, p.074801

75. Gordienko S. Relativistic Doppler Effect: Universal Spectra and Zeptosecond Pulses// Phys.Rev.Lett., 2004, V. 93. №11., p.115002

76. Гринев А.Ю. Вопросы подповерхностной радиолокации. Коллективная монография// Радиотехника, Москва, 2005, с.416

77. Rui-Yen Chang IP Video Surveillance Applications over WiMAX Wireless Broadband Technology// INC, IMS and IDC, 2009, pp.2100 – 2102

78. Jammeh, E. All-IP network video streaming through interval type-2 fuzzy logic congestion control// , IST 2008, 2008, pp. 452 – 457
79. Dinu L.C. Measurement of the Subcycle Timing of Attosecond XUV Bursts in High-Harmonic Generation// Phys.Rev.Lett.,2003, V. 91, №6, p.063901
80. Adams J. C. Ultra-Wideband for Navigation and Communication// Proc. Aerospace Conf., Montana, USA, 2001, Vol. 2, pp. 785–791.
81. Марко А.П., Марукович Е.И. Световодные способы и технологии комбинированной дефектоскопии // Минск:Беларус.навука, 2013.-с.309
82. Halliwell N.A. Laser vibrometry optical methods in engineering metrology, London: Chapman and Hall, edited by Williams D.C// 1993, Chapter 6,pp. 179-211.
83. Castellini P., Paone N. Development of the tracking laser vibrometer: performance and uncertainty analysis// Rev. Sci. Instrum, 2000, Vol. 71, pp. 4639-4647.
84. Миллер Э., Хилл К.Р., Бэмбер Д. Применение ультразвука в медицине//Мир, Москва, 1989. с. 568
85. Rubin J.M., Bude R.O.,Carson P.L. Power Doppler ULTRASOUND: A potentially useful alternative// Radiology, 1994, pp. 853-856.
- 86.Ohtake, Y. Sidelobe reduction of tightly focused radially higher-order Laguerre-Gaussian beams using annular masks// Optics Letters, 2008, V. 33, pp. 617-619.
87. Kotlyar, V. Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon // Optics Letters, 2007, V. 32, pp. 921-923.
88. Barwick, S. Reduced side-lobe Airy beams// Optics Letters, 2011, V. 36, pp. 2827-2829.
89. James D. Ring, Christopher J. Howls, and Mark R. Dennis Incomplete Airy beams: finite energy from a sharp spectral cutoff// Optics Letters, 2013, Vol. 38, Issue 10, pp. 1639–1641.

90. Siviloglou Georgios, Broky John, Dogariu Aristide, Christodoulides Demetrios Airy Beams: A New Class of Optical Waves// Optics and Photonics News, 2008, Vol.19, Issue 12, p. 21
91. Polynkin P., Kolesik M., Moloney J., Siviloglou G., Christodoulides D. Curved Plasma Channel Generation in Air Using Ultra-Intense Self-Bending Airy Beams// Optics and Photonics News, 2009, Vol. 20, Issue 12, pp. 28-28
92. Хонина С.Н., Волоотовский С.Г., Ограниченные 1D пучки Эйри: лазерный веер// Компьютерная оптика, 2008, 32(2), с.168-174
93. Miguel A. Bandres Accelerating parabolic beams//California Institute of Technology, Pasadena, OPTICS LETTERS, 2008, Vol. 33, № 15.
94. Alonso M. Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors. I: Two dimensions// Optics Express, 2014, V. 22, Issue 6, pp. 7124-7132.
95. Vaveliuk P., Alberto Lencina, Jose A. Rodrigo and Y. Martnez-Matos Intensity-symmetric Airy beams// J. Opt. Soc. Am., 2015, Vol. 32, №3
96. Liang, Y. Dynamical deformed Airy beams with arbitrary angles between two wings// Journal of the Optical Society of America ,2014, V. 31, Issue 7, pp. 1468-1472.
97. Li P. Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices// Optics Express, 2014, V. 22, Issue 7, pp. 7598-7606.
98. Salandrino A., Christodoulides D. Airy Plasmon: a nondiffracting surface wave// Optics Letters, 2010, Vol. 35, No. 12, pp.2082-2084
99. Wei Liu, Neshev D. N., Shadrivov I. V., Miroshnichenko A. E., Kivshar Y. S. Plasmonic Airy beam manipulation by linear optical potentials// Conference on Lasers and Electro-Optics Europe and 12th European Quantum Electronics Conference (CLEO EUROPE/EQEC), Munich, 2011, p. 1
100. Imran M., Rujang Li and Hongsheng Chen Self-deflection of Airy plasmons in graphene based waveguides// Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS), Shanghai, 2016, pp. 2657-2657.
101. Rujang Li, M. Imran and Hongsheng Chen Airy plasmons in graphene based waveguides// International Microwave Workshop Series on

Advanced Materials and Processes for RF and THz Applications (IMWS-AMP), Chengdu, 2016, pp. 1-3

102. Yang Y., Dai H. T., Zhu B. F. and Sun X. W. Dynamic Control of the Airy Plasmons in a Graphene Platform// Photonics Journal, 2014, vol. 6, № 4, pp. 1-7

103. Minovich A. E., Bleckmann F., Frohnhaus J., Neshev D. N. and Linden S. Control of Airy plasmon trajectories in linear gradient systems// 2013 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, Talence, 2013, pp. 415-417.

104. Novitsky A. V. and Novitsky D. V. Nonparaxial Airy beams: role of evanescent waves// Opt. Lett. 34, 2009, pp. 22432

105. Kaminer, I. Nondiffracting Accelerating Wave Packets of Maxwell's Equations // Physical Review Letters, 2012, V. 108, p. 16390

106. Zhang, P. Nonparaxial Mathieu and Weber Accelerating Beams// Physical Review Letters, 2012, V. 109, p. 193901.

107. Aleahmad P., Moya-Cessa H., Kaminer I., Segev M., Christodoulides D. Dynamics of accelerating Bessel solutions of Maxwell's equations// Journal of the Optical Society of America, Diffraction theory, 2016, p.675

108. Chong A. Airy-Bessel wave packets as versatile linear light bullets// Nature photonics, 2010, vol. 4, pp. 103-106

109. Piksarv P., Valtna-Lukner H., Valdmann A., Löhmus M., R. Matt and P. Saari Measuring the temporal focusing of ultrashort Airy-Bessel wave packets// IEEE Photonics Conference 2012, Burlingame, 2012, pp. 497-498.

110. Huang X., Q. Cao, H. Li, P. Li, C. Wan and A. Chong Generation of versatile vortex linear light bullet// Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO 2015), San Jose, CA, 2015, pp. 1-2.

111. Kim K. Y. Superluminal Transmission of Waveguide Mode-Airy Wavepackets// IEEE Photonics Journal, 2012, vol. 4, №2, pp. 369-374

112. Kondakci H. E., Abouraddy A. F. Demonstration of diffraction-free, acceleration-free space-time airy beams// Photonics Conference (IPC2017), Orlando, FL, 2017, pp. 143-144.

113. Kondakci H. E., Abouraddy A. F. Demonstration of non-accelerating space-time airy beams// Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO 2017), San Jose, CA, 2017, pp. 1-2.

114. Bongiovanni D., Wetzel B., Hu Y., Chen Z., Morandotti R. Optimal energy confinement of optical Airy bullets//Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO 2017), San Jose, CA, 2017, p. 1

115. Li D.-U. An Efficient Full-Vectorial Finite-Element Modal Analysis of Dielectric Waveguides Incorporating Inhomogeneous Elements Across Dielectric Discontinuities // Journal of Quantum Electronics. 2000, Vol.36, №.11. pp.1251-1261.

116. Mc Gowan R.W. Experimental study of the surface waves on a dielectric cylinder via terahertz impulse radar ranging // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, Vol.48, No.3, pp.417-422.

117. Думин А. Н. Дифракция нестационарной ТЕМ-волны на открытом конце коаксиального волновода // Радиофизика и радиоастрономия, 2000, Т. 5, № 1, с. 55-66.

118. Федорченко А.М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика// Вища школа, Киев, 1988, 540с.

119. Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма// Полиграфкнига ОГИЗа, Ленинград, 1947, Гл.І, 541с.

120. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика и электродинамика// изд. «Наука», Москва, 1969, 768с.

121. Никольский В.В., Теория электромагнитного поля //Вища школа, Москва, 1961, 342с.

122. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики// Наукова думка, 1968, 280с.

123. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике, // Мир, Москва, 1978, 520 с.

124. Нерух А.Г. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики// НПО Тест-Радио, Харьков, 1991, 279с.

125. Nerukh A.G. Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics//Warsaw:Nat. Institute of Telecommunic. Publishing House, 2001, p. 328

126. Nerukh A., Sakhnenko N., Benson T., Sewell Ph. Non-stationary electromagnetic// Singapore: Pan Stanford Publishing Pte., 2013,p. 596

127. Нерух А.Г. Рассеяние электромагнитных волн плазменным полупространством после начала его движения // ЖТФ, 1984, №2,с.216-226.

128. Nerukh A.G. Enhanced reflection of anelectromagnetic wave from a plasma cluster moving in a waveguide// Microwave and Optical Technology Letters,1998., Vol. 17, №4,pp. 267-273.

129. Nerukh A.G. Penetration of electromagnetic wave into plasma expanding in a waveguide// Journal of Applied Electromagnetism, 1999, Vol. 2, №1,pp. 63-70.

130. Nerukh A.G. Using evolutionary recursion to solve an electromagnetic problem with time-varying parameters// Microwave and optical technology letters, 1997, Vol.14, №1, pp. 31-36

131. Нерух А.Г. Метод резольвенты в задачах нестационарной дифракции электромагнитных волн// Харьковский институт радиоэлектроники, Харьков, 1987, с.92

132. Nerukh A.G. Electromagneticpulse generation when inhomogeneity collapses// Trans. on Plasma Science, 2000, Vol.28, №5, pp. 1637-1641.

133. Nerukh A.G. Evolutionary Approach in Transient Electrodynamics Problems// Radio Science, 1995, Vol. 30, No. 3, pp. 481-491.

134. Нерух А.Г. Электромагнитные волны в диэлектрическом слое с зависящими от времени параметрами // ЖТФ, 1987, Т. 57, №. 11, с.2078-2087.

135. Нерух А.Г. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики// НПО Тест-Радио, Харьков, 1991, 279с.
136. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения// Спб, Лань, 2008, 400 с.
137. Зарипов Р.С. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения//Спб, Лань, 2016, 400с.
138. Калиткин Н.Н. Численные методы// Наука, Москва, 1978, 512 с.
139. Nerukh A.G. Penetration of electromagnetic wave into plasma expanding in a waveguide// Journal of Applied Electromagnetism, 1999, Vol. 2, №1. с 63-70.
140. L. Novotny, B. Hecht Principles of nano-optics// Cambridge University Press, Cambridge (UK),2006, p.539
141. Брычков Ю.А., Прудников А.П., Интегральные преобразования обобщенных функций// СМБ, Наука, М., 1977, с. 202
142. Бейтмен Г., Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований// Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Наука, М., 1969, Т.1. с. 26,
143. Бегунов Б. Н. Геометрическая оптика// Изд-во МГУ, 1966, 212с.
144. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов// Л., «Машиностроение», 1966, 564 с.
145. Nerukh A., Zolotariov D., Kuryzheva O., Benson T. Dynamics of decelerating pulses at a dielectric layer// XXIII International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), London, UK, 2015, Abstract book, p. 99
146. Nerukh A., Zolotariov D., Kuryzheva O., Benson T. Dynamics of decelerating pulses at a dielectric layer// Optical and Quantum Electronics 2016, vol. 48, № 2, pp. 88-96
147. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Учебник для физич. и механико-математ. спец. вузов, 4-е изд., испр. и доп// М.: Наука, 1981, с.512.

148. Швыдкий В.С. Математические методы теплофизики. Учебник для вузов // «Машиностроение-1», Москва, 2001., с.232

149. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики, Издание 2-е, стереотипное// Наука, Москва, 1969, Главная редакция физико-математической литературы, 288 с.

150. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, Учеб. пособие, 6-е изд., испр. и доп. // Изд-во МГУ, Москва, 1999, 728с.

151. Felsen, L.B., Whitman, G.M. Wave propagation in time-varying media// Trans. on Antennas and Propag., 1970, AP-18, pp. 242-253

152. Ostrovsky, L.A., Stepanov, N.S. Non-resonance parametric phenomena in distributive systems (in Russian)//Radiophysics Quantum Electronics (English transl.), 1971, vol. 14, pp. 489-529

153. Averkov, S.I., Boldin, V.P. Waves in nondispersive nonstationary inhomogeneous media// Radiophysics Quantum Electronics. (English transl.), 1980, vol. 23, pp. 1060-1066

154. Hlawka E. Bemerkung Zum Lemma Von Du Bois-Reymond//Technical University of Vienna, 2006, Vol. 103. pp. 26–29.

155. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Решение задачи дифракции импульса в параксиальном приближении посредством интегрального уравнения// Материалы 19-го международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2015, с. 66-67.

156. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения.// Наука, Москва, 1976, с. 214.

157. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов. В 10 т., Т. I. Механика// ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004, с.42-43

158. Краснов М. Л.. Интегральные уравнения: введение в теорию// Наука, Москва, 1975, 302 с.

159. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, 3-е изд// Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1961, 400 с.

160. Васильева А. Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, 2-е изд, стереот././Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2002, 160 с.

161. Born M., Wolf E. Principles of optics// Cambridge University Press, 1959, p. 106.

162. Kuryzheva O. V., Nerukh A. G. Evolution of an Airy pulse energy flow induced by a dielectric plane boundary// 7th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL), Odessa, 2016, pp. 57-59.

163. Курыжева О.В. Трансформация импульса Эйри при взаимодействии с плоской границей диэлектрика// Материалы 21-го международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2017, с. 86-87.

164. Nerukh A., Kuryzheva O., Benson T. Time-Spatial Structure of Airy Pulse in Non-stationary Environment// XXV International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), 2017, Eindhoven, the Netherlands, p.18

165. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Преобразование импульса Эйри на плоской границе диэлектрика// Прикладная радиоэлектроника (AppliedRadioElectronics), 2016, vol. 15, N 4, с.321-326

166. Nerukh A., Kuryzheva O., Benson T. Time-spatial structure of airy pulse in non-stationary environment// Optical and Quantum Electronics, 2018, Issue 2, Articles 52, pp 1-10.

167. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Преобразование импульса Эйри на временном скачке диэлектрической проницаемости среды// Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника, Харьков, Украина, 2017, вып.192, с.94-101

168. Nerukh, A.G., Kuryzheva, O.V. Transformation of the airy pulse by a jump-like change of the medium permittivity in time// Telecommunications and

Radio Engineering (English translation of *Elektrosvyaz* and *Radiotekhnika*), 2018,77(12), с. 1017-1028

169. Bass M. Handbook of Optics, Volume IV. Optical Properties of Materials, Nonlinear Optics // Quantum Optics, The McGraw-Hill, 2010, 1152 p.

170. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами// Наука, Москва, 1979, с.832

171. Nerukh A.G., Nerukh D. A. Time-spatial drift of decelerating electromagnetic pulses// Optics Express, vol. 21,2013, № 14, pp. 17366-17372

172. Barwick S. Reduced side-lobe Airy beams// Opt. Lett., 2011, vol.36, pp. 2827-2829

173. Kaminer I., Lumer Y., Segev M., Christodoulides D.N. Causality effects on accelerating light pulses// Opt. Exp., 2011, vol.19, pp. 23132-23139

174. Zhang L., Huang P., Conti C., Wang Z., Hu Y., Lei D., Ying Li Decelerating Airy pulse propagation in highly non-instantaneous cubic media// Optics Express,2017, Vol. 25,Issue 3, pp. 1856-1866

175. Aleahmad P., Cessa H.M., Kaminer I., Segev M., Christodoulides D. Dynamics of accelerating Bessel solutions of Maxwell's equations// J. of the Opt. Soc. of America , 2016, vol.33, pp.2047-2052

176. Alonso, M., Bandres, M Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors. I: Two dimensions// Opt. Exp., 2014, vol. 22, pp.7124-7132

177. Liang, Y., Hu, Y., Ye, Z., Song, D., Lou, C., Zhang, X., Xu, J., Morandotti, R., Chen, Z. Dynamical deformed Airy beams with arbitrary angles between two wings// J. of the Opt. Soc. of America, 2014, vol.31, pp. 1468-1472

178. Li, P., Liu, S., Peng, T., Xie, G., Gan, X., Zhao, J. Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices// Opt. Exp., 2014, 22, p.7598-7606

179. Morgenthaler, F.R. Velocity modulation of electromagnetic waves// Trans. Microwave Theory Techn., MTT-6, 1958, pp. 167-172

180. Kalluri, D.K. Electromagnetics of complex media: Frequency shifting by a transient magnetoplasma medium// CRC Press, Boca Raton,1999, p. 292
181. Fante, R.L. Transmission of electromagnetic waves into time-varying media//. Trans. on Antennas and Propag., 1971, AP-19, pp. 417-424
182. Borisov, V.V. Nonsteady electromagnetic waves. (In Russian)//Leningrad, Leningrad University Publishing House, 1987, p. 240
183. Stolyarov, S.N. Resonance transform of waves in periodic non-stationary medium// Radiophysics Quantum Electronics. (English transl.), 1983, vol.26, pp. 514-516
184. Nerukh A.G. Evolutionary approach in transient electrodynamics problems// Radio Science, 1995,vol. 30, pp. 481-491.
185. Nerukh A.G., Scherbatko I.V., Marciniak M. Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics//Nat. Inst. of Telecommunications Publishing House, Warsaw, 2001, p. 268
186. Горелов Д.Н., Смолин Ю.С. Применение системы интегральных уравнений к решению плоских задач теории крыла// Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, Омск, Россия, 1999, т.4, №5.
187. Широкова Е.А. Применение интегральных уравнений Фредгольма при исследовании внутренней обратной краевой задачи, Тр. сем. по краев. Задачам// Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1984,с.233–239
188. Апарцин А.С., Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики// Институт систем энергетики Л.А.Мелентьева СО РАН, Иркутск, 2005, с 69-75.
189. Krasilnikov V.N., Lutchenko L.N. Principle of seeming location of an interface and generalization of V.A.Fock's reflection formulae on the case of moving boundaries //Leningrad university Publish. House,1973,vol. 12, pp.150-157

190. Buldyrev V.S., Maslova G.N. Reflection of modulated wave from moving boundary of arbitrary shape// Proc VIII USSR Symp. Waves Diffraction Propag., Moscow, 1982, vol.3, pp 280-283

191. Pogorzelskyi R.J. Electromagnetic scattering from a radially moving spherical discontinuity // J Appl.Phys.,1973, vol. 44(1), pp 168 – 173.

192. Nerukh A. G., Zolotariov D. A., Kuryzheva O. V. Radiation of accelerating pulses with specified envelopes// International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT), Kharkiv, 2015, pp. 1-3.

193. Kuryzheva O. V., Nerukh A. G. Nonparaxial airy pulses at a dielectric layer// International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF), Dnipropetrovsk, 2015, pp. 1-4.

194. Курыжева О.В., Нерух О.Г Исследование импульса Эйри в диэлектрическом слое методом интегральных уравнений Вольтерра// Материалы 20-го юбилейного международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2016, с. 96-97.

195. Kuryzheva O., Nerukh A., Benson T. Resonances excited by an Airy pulse in a dielectric layer// XXIV International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), Warsaw, Poland, 2016,p-04

196. Kuryzheva O., Tkach A., Nerukh A. Spectral features of a dielectric layer in paraxial approximation// 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW), Kharkiv, 2016, pp. 1-4.

197. Kuryzeva O. V., Tkach A. D., Nerukh A. G. Implementation of the extinction theorem in a problem of Airy pulse scattering by a dielectric layer// 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS), Odessa, 2016, pp. 97-100.

198. Kuryzheva O. V. and Nerukh A. G. Changing of an Airy pulse form due to re-reflections inside a dielectric layer// International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering (YSF), Kharkiv, 2016, pp. 183-186.

199. Nerukh A. G., Kuryzheva O. V. Airy pulse transformation on time-spatial jumps of refractive index// International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT), Kyiv, Ukraine , 2017, pp. 122-124

200. Kuryzheva O., Nerukh A. Conversion of an Airy pulse by dielectric layer, whose boundaries are converging// Scientific and Technical Journal «Applied Radio Electronics», 2018, vol 17, №1,2, pp. 55-59.

ДОДАТОК А

Список власних публікацій здобувача

1. Nerukh A., Zolotariov D., Kuryzheva O., Benson T. Dynamics of decelerating pulses at a dielectric layer// XXIII International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), London, UK, 2015, Abstract book, p. 99
2. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Решение задачи дифракции импульса в параксиальном приближении посредством интегрального уравнения// Материалы 19-го международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2015, с. 66-67.
3. Nerukh A. G., Zolotariov D. A., Kuryzheva O. V. Radiation of accelerating pulses with specified envelopes// International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT), Kharkiv, 2015, pp. 1-3.
4. Kuryzheva O. V., Nerukh A. G. Nonparaxial airy pulses at a dielectric layer// International Young Scientists Forum on Applied Physics (YSF), Dnipropetrovsk, 2015, pp. 1-4.
5. Nerukh A., Zolotariov D., Kuryzheva O., Benson T. Dynamics of decelerating pulses at a dielectric layer// Optical and Quantum Electronics 2016, vol. 48, № 2, pp. 88-96
6. Курыжева О.В., Нерух О.Г. Исследование импульса Эйри в диэлектрическом слое методом интегральных уравнений Вольтерра// Материалы 20-го юбилейного международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2016, с. 96-97.
7. Kuryzheva O., Nerukh A., Benson T. Resonances excited by an Airy pulse in a dielectric layer// XXIV International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), Warsaw, Poland, 2016,p-04
8. Kuryzheva O., Tkach A., Nerukh A. Spectral features of a dielectric layer in paraxial approximation// 9th International Kharkiv Symposium on Physics

and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW), Kharkiv, 2016, pp. 1-4.

9. Kuryzheva O. V., Tkach A. D., Nerukh A. G. Implementation of the extinction theorem in a problem of Airy pulse scattering by a dielectric layer// 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS), Odessa, 2016, pp. 97-100.

10. Kuryzheva O. V., Nerukh A. G. Evolution of an Airy pulse energy flow induced by a dielectric plane boundary// 7th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL), Odessa, 2016, pp. 57-59.

11. Kuryzheva O. V. and Nerukh A. G. Changing of an Airy pulse form due to re-reflections inside a dielectric layer// International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering (YSF), Kharkiv, 2016, pp. 183-186.

12. Курыжева О.В. Трансформация импульса Эйри при взаимодействии с плоской границей диэлектрика// Материалы 21-го международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков, 2017, с. 86-87.

13. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Преобразование импульса Эйри на плоской границе диэлектрика// Прикладная радиоэлектроника (AppliedRadioElectronics), 2016, vol. 15, N 4, с.321-326

14. Nerukh A., Kuryzheva O., Benson T. Time-Spatial Structure of Airy Pulse in Non-stationary Environment// XXV International Workshop on Optical Wave & Waveguide Theory and Numerical Modelling (OWTNM), 2017, Eindhoven, the Netherlands, p.18

15. Nerukh A. G., Kuryzheva O. V. Airy pulse transformation on time-spatial jumps of refractive index// International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT), Kyiv, Ukraine , 2017, pp. 122-124

16. Nerukh A., Kuryzheva O., Benson T. Time-spatial structure of airy pulse in non-stationary environment// Optical and Quantum Electronics, 2018, Issue 2, Articles 52, pp 1-10.

17. Курыжева О.В., Нерух А.Г. Преобразование импульса Эйри на временном скачке диэлектрической проницаемости среды// Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника, Харьков, Украина, 2017, вып.192, с.94-101

18. Nerukh, A.G.,Kuryzheva, O.V. Transformation of the airy pulse by a jump-like change of the medium permittivity in time// Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika), 2018,77(12), с. 1017-1028

19. Kuryzheva O., Nerukh A. Conversion of an Airy pulse by dielectric layer, whose boundaries are converging// Scientific and Technical Journal «Applied Radio Electronics», 2018, vol 17, №1,2, pp. 55-59.