

Міністерство освіти і науки України
Українська інженерно-педагогічна академія

На правах рукопису

ЗАЛУЖНА ГАЛИНА ВОЛОДИМИРІВНА



УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО
ПЕРЕНОСУ ТЕПЛА В НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ
З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

01.05.02 – математичне моделювання
та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Литвин Олег Миколайович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Цей примірник дисертаційної роботи
ідентичний за змістом з іншими,
поданими до спеціалізованої вченої
ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д 64.052.02



Л.В. Колесник

Харків – 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ	5
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ, ПРИСВЯЧЕНИХ НАБЛИЖЕНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	14
1.1 Математична модель процесу теплопередачі	14
1.2 Чисельні методи розв'язання задач нестационарної теплопровідності	20
1.3 Методи розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, які зустрічаються при розв'язанні задач нестационарної теплопровідності	36
Висновки до розділу 1	39
РОЗДІЛ 2 РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН-ІНТЕРПІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ	40
2.1 Інтерпінація функцій. Основні твердження	41
2.2 Метод зведення до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (метод ЛІДР) для нестационарного рівняння теплопровідності	47
2.3 Інтерпінаційний метод скінченних елементів (ІМСЕ) розв'язання початково-крайових задач теплопровідності з двома просторовими змінними	53
2.4 Оцінка похибки ІМСЕ	63
Висновки до розділу 2	70
РОЗДІЛ 3 ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІМСЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	71
3.1 Деякі аспекти нумерації вузлів у запропонованому ІМСЕ	71
3.2 Загальний метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестационарної теплопровідності в області складної форми	80

3.2.1	Метод побудови точних розв'язків крайової задачі для диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми ..	80
3.2.2	Метод побудови точного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності в областях складної форми	82
3.2.3	Приклад побудови точного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності.....	87
3.3	Покроковий алгоритм побудови наближеного розв'язку інтерлінаційним МСЕ.....	89
3.4	Деякі аспекти розв'язання задач нестационарної теплопровідності запропонованим ІМСЕ за допомогою суперкомп'ютера.....	95
	Висновки до розділу 3.....	98
РОЗДІЛ 4 ОПИС РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ		100
4.1	Дослідження нестационарного температурного поля в прямокутній пластині.....	100
4.2	Застосування ІМСЕ для дослідження процесу поширення тепла в області, що є об'єднанням прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат.....	116
4.3	Дослідження нестационарного температурного поля за допомогою ІМСЕ в області у вигляді рівнобічної трапеції	127
4.4	Побудова точних розв'язків тестових задач в областях, складених з прямокутників	132
4.5	Загальна похибка наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності, отриманого ІМСЕ	140
	Висновки до розділу 4.....	141
ВИСНОВКИ		143
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		145
ДОДАТКИ		158
	Додаток А Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності в прямокутній пластині в середовищі MathCAD.....	158

Додаток Б Опис та фрагменти програмної реалізації дослідження чисельної ефективності ІМСЕ для нестационарної задачі теплопровідності в середовищі MathCAD.....	161
Додаток В Опис програмної реалізації МСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для однорідної пластини в середовищі MathCAD.....	168
Додаток Г Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для Т-подібної області в середовищі MathCAD	172
Додаток Д Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної теплопровідності для області у вигляді рівнобічної трапеції в середовищі MathCAD.....	180
Додаток Ж Опис програмної реалізації побудови точного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності для області, що має форму швелера, в середовищі MathCAD.....	184
Додаток К Акти впровадження	189

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І
ТЕРМІНІВ

\forall	– квантор загальності “для всіх”;
\exists	– квантор існування “існує”;
\wedge	– логічне „і”;
\vee	– логічне „або”;
$x \in A$	– елемент x належить множині A ;
$x \notin A, x \in \bar{A}$	– елемент x не належить множині A ;
$A \cap B$	– переріз множин A і B (їхня спільна частина);
$A \cup B$	– об’єднання множин A і B ;
$A \subset B$	– множина A є частиною множини B ;
$A \setminus B$	– $\{x \in A : x \notin B\}$ різниця множин A і B ;
\bar{A}	– замикання множини A ;
$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$	– символ Кронекера; $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{i,j} = 0$, якщо $i \neq j$;
$\{x : P_x\}, \{x P_x\}$	– сукупність елементів x з властивістю P_x ;
R	– множина дійсних чисел;
R^n	– евклідів n -вимірний простір, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_i \in R, i = \overline{1, n}$;
$C(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \in R^n$;
$C^n[a, b]$	– простір функцій, неперервних з похідними порядку n на відріжку $[a, b]$;
$C^r(G)$	– простір неперервних у $G \subset R^n$ функцій n змінних із неперервними похідними порядків $\leq r$;
$C^{r,m,n}(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \subset R^3$ разом із частинними похідними до порядку r по першій змінній, m – по другій, n – по третій;

$$W_2^1(\Omega) \quad - W_2^1(\Omega) = \left\{ f(x, y) \mid \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] dx dy < \infty \right\};$$

$L_p(G)$ – простір функцій $f(x), x \in G \subset R^n$, які мають скінченну

$$\text{норму } \|f\|_p = \|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p < \infty);$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad - \text{оператор Лапласа};$$

ВРС – варіаційно-сіткові методи;

МСР – метод скінченних різниць;

метод ЛІДР – метод зведення до системи лінійних інтегро-
диференціальних рівнянь розв'язання крайових задач;

МСЕ – метод скінченних елементів;

ІМСЕ – інтерлінаційний метод скінченних елементів;

система ЗДР – система звичайних диференціальних рівнянь;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

ВСТУП

Актуальність теми. Науково-технічний прогрес ставить широкий спектр задач, що вимагають розв'язання. Серед них велику роль відіграють нестационарні задачі. В наш час суттєве та швидке зростання ресурсів обчислювальної техніки (таких як пам'ять, швидкодія, можливість розв'язувати задачі з розпаралелюванням тощо) поряд зі зниженням вартості дозволяють проводити математичне моделювання об'єктів та процесів з використанням ЕОМ суттєво швидше, ефективніше та значно економніше. Важливим підтвердженням написаного є роботи В. С. Дейнеки, І. В. Сергієнка, В. В. Скопечького [15, 17], в яких побудовані математичні моделі основних процесів, що протікають у багатокомпонентних «зернистих» ґрунтових середовищах, для випадків довільного просторового розташування тонких включень (у вигляді крайових, початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними з умовами спряження та відповідних узагальнених задач, що визначені на класах розривних функцій).

При розв'язанні багатьох наукових та технічних проблем необхідно досліджувати нестационарні скалярні та векторні поля, що є моделями реальних процесів і вимагають розв'язання крайових задач математичної фізики, які допускають точний розв'язок лише у виняткових випадках. Серед методів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності найбільш відомими є класичний метод розділення змінних, метод сіток, варіаційні та проєкційні методи, метод R-функцій, метод скінченних елементів. Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним з найбільш широко використовуваних на даний час методів розв'язання нестационарних задач тепломасопереносу. Інтерес до МСЕ викликаний можливістю автоматизації побудови дискретних моделей та надійною роботою з системами диференціальних рівнянь з розрідженими матрицями.

Оскільки при наближеному розв'язанні нестационарних задач

теплопровідності з двома або трьома просторовими змінними класичним МСЕ виникають системи звичайних диференціальних рівнянь великої розмірності, які треба розв'язувати при заданих початкових умовах, основними методами розв'язання нестационарних задач теплопровідності є чисельні методи, вагомий вклад в розвиток яких внесли дослідження Сергієнка І. В., Дейнеки В. С., Скопечького В. В. [7, 15, 17, 104], Григоренка Я. М., Самарського А. А. [94 – 96], Марчука Г. І. [68, 69], Яненка М. М., Рвачова В. Л. [83 – 89], Ляшка І. І., Молчанова І. М. [74, 75], Литвина О. М. [42, 44, 47], Лучки А. Ю. [66], Панкратової Н. Д., Крюкова Н. Н., Савули Я. Г. [93], Білоцерковського С. М. [5], Ліфанова І. К., Шайдурова В. В. [117], Шинкаренка Г. А., Флейшмана Н. П., Ганделя Ю. В., Стренга Г., Фікса Дж. [108], С'ярле Ф. [109], Мітчела Е., Уейта Р. [72], Barnhill R. E., Cavendish J. C., Gordon W. J., Nielson G. M., Babuska I. [120, 121], Hall C. A., Marshall I. та інших.

Зауважимо, що при розв'язанні задач методом скінченних елементів для підвищення точності часто використовується методика згущення сіток навколо точок з особливостями, використання функцій із відповідними особливостями тощо. Це приводить до збільшення часу на формування матриць та, як наслідок, до збільшення часу розрахунків. Альтернативними способами підвищення точності розв'язку є поєднання вказаної вище методики і відповідного вибору локальних апроксимуючих функцій (найчастіше носії цих функцій включають точки, в яких точний розв'язок має особливості). Додавання до класичних базисних функцій ще однієї або декількох функцій з потрібними особливостями, а також одночасне використання глобальних та локальних базисних функцій передбачає знання додаткової інформації про аналітичні розв'язки досліджуваних задач тощо.

Тому доцільно для розв'язання таких задач використовувати нові методи, в яких наближений розв'язок зображується у вигляді сплайнів за просторовими змінними, невідомі вузлові параметри яких залежать від часу t , і які використовують для наближення точного розв'язку із заданою точністю меншу кількість невідомих параметрів, а, отже, і розв'язання меншої кількості

диференціальних рівнянь. В даній роботі додаткова інформація не використовується.

Відмітимо, що методи інтерлінації функцій $u(x, y, t)$ за змінними x, y дозволяють будувати схеми МСЕ, які для досягнення заданої точності вимагають розв'язання порівняно значно меншого числа диференціальних рівнянь.

На використанні інтерлінації базується метод зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (метод ЛІДР) розв'язання крайових задач, який досліджувався в працях Литвина О. М. [41, 47, 57], Куценка Л. М., Федька В. В. [111] при розв'язанні стаціонарних задач. Тому актуальним є його застосування для розв'язання нестаціонарних задач тепломасопереносу і дослідження його обчислювальних можливостей для побудови математичних моделей нестаціонарної теплопровідності та обчислювальних методів їх дослідження, основаних на використанні інтерлінації функцій трьох змінних за двома просторовими змінними. В роботі [63] Сергієнка І. В., Литвина О. М. було викладено загальний метод розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій.

Таким чином, дана робота присвячена актуальній темі – подальшому розвитку МСЕ розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій і дослідженню його обчислювальних можливостей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії в рамках тематики наукового міжвідомчого центру «Математичне моделювання структури неоднорідного тіла з використанням нових методів розв'язання крайових задач і методів комп'ютерної та сейсмічної томографії», створеного сумісно Інститутом кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України та Українською інженерно-педагогічною академією. Результати дисертаційної роботи були використані у рамках держбюджетної теми «Розробка і дослідження нового методу розвідки і

розробки родовищ корисних копалин на основі інтерлінації функцій» (держбюджетна тема № ДР 0109U008661, 2012-2014 рр.), яка входить до плану науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії.

Мета і задачі дослідження. Метою даного дисертаційного дослідження є розробка та дослідження методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними в областях складної форми з використанням сплайн-інтерлінації функцій.

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі *завдання*:

– розробка та дослідження методу розв'язання крайової задачі нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням інтерлінації функцій;

– розробка та дослідження методу побудови точних розв'язків нестационарного рівняння теплопровідності;

– проведення обчислювального експерименту на основі створеного програмного забезпечення для дослідження ефективності запропонованих методів.

Об'єкт дослідження – процес розповсюдження тепла в двовимірних тілах.

Предмет дослідження – математична модель розподілу температури в двовимірних тілах із використанням методу скінченних елементів на основі інтерлінації функцій.

Методи дослідження. Теоретичні дослідження базуються на загальних методах функціонального аналізу, обчислювальної математики, теорії наближення функцій кількох змінних з використанням апарату інтерлінації; в основі чисельної реалізації лежить метод скінченно-елементної апроксимації, побудованої на основі сплайн-інтерлінації за двома просторовими змінними, розв'язку нестационарної крайової задачі про розподіл температури в областях складної форми; для тестування запропонованих алгоритмів використовувалася система комп'ютерної математики.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі отримано нові результати, що виносяться на захист:

- вперше на основі сплайн-інтерлінації функцій розроблено та досліджено новий метод, який є скінченно-елементною реалізацією методу зведення до системи інтегро-диференціальних рівнянь, використаного при розв’язанні крайової задачі для нестационарного рівняння теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми. Цей метод названий інтерлінаційним методом скінченних елементів (ІМСЕ) для нестационарних задач теплопровідності;

- подальшого розвитку набув метод скінченних елементів розв’язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій;

- вперше для тестування наближувачих та обчислювальних властивостей ІМСЕ розроблено метод побудови точних розв’язків нестационарних задач теплопровідності для областей складної форми, що дає можливість перевірити теоретичні твердження дисертаційної роботи щодо похибки наближених розв’язків;

- при чисельній реалізації вперше для розв’язання нестационарних задач тепломасопереносу за допомогою ІМСЕ запропоновано використовувати спеціальну нумерацію вузлів елементів, яка дозволяє в системі звичайних диференціальних рівнянь $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$, що виникає в ІМСЕ, зберегти блочно-трюхдіагональну структуру матриць A і B . Це дозволяє при проведенні обчислень використати властивості трюхдіагональних та блочно-трюхдіагональних матриць.

Практичне значення одержаних результатів:

- розроблені та протестовані алгоритми знаходження наближеного розв’язку нестационарної крайової задачі з використанням інтерлінації функцій можуть бути використані для створення професійних пакетів програм;

- запропонований метод нумерації вузлів, який зводить систему диференціальних рівнянь до системи з блочно-трюхдіагональними матрицями, дозволяє використовувати відомі методи їх розв’язання, тобто оптимізувати

процес розв'язання;

– на основі запропонованих методів, алгоритмів та програм можна розробляти пакети прикладних програм для наближеного розв'язання нестационарних крайових задач теплопровідності з двома просторовими змінними, при цьому для досягнення заданої точності розв'язувати на порядок меншу кількість диференціальних рівнянь порівняно з класичними схемами МСЕ;

– при чисельній реалізації запропонованого ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними можуть бути використані відомі алгоритми і програми розв'язання задачі Коші для кластера, розроблені в інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ.

Результати дисертаційної роботи впроваджено у навчальний процес Української інженерно-педагогічної академії в курсі «Спеціальні глави вищої математики», що затверджено відповідним актом від 22.04.2015 р.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано у 18 роботах [22, 39, 43, 45, 46, 48, 53, 55, 58 – 62, 64, 65, 82, 101, 124]. Основні результати за темою дисертації отримані особисто автором. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати. У [55] запропоновано використовувати метод побудови точного розв'язку для нестационарного рівняння теплопровідності, проведено обчислювальний експеримент та аналіз його результатів. У [58] побудовано точний розв'язок для тестового прикладу з використанням сплайн-інтерлінації функцій. У [62, 65, 124] побудована скінченно-елементна реалізація методу зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми та проведено аналіз результатів обчислювального експерименту для конкретних областей в системі комп'ютерної математики. У [60] запропоновано для запису системи звичайних диференціальних рівнянь, які виникають в методі ІМСЕ, використовувати спеціальну нумерацію вузлів. У [101] проведено аналіз обчислювальних

можливостей ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності та запропоновано покроковий запис методу. У [45] проведено дослідження похибки наближеного розв'язку з використанням побудованого точного розв'язку.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародній конференції «Питання оптимізації обчислень», Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (Кацивелі, 2005, 2007, 2009 рр.); XV Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008 р.); Всеукраїнських науково-практичних конференціях «Інформатика та системні науки» (Полтава, 2010, 2011, 2014 рр.); науково-технічній конференції з міжнародною участю «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (Харків, 2012 р.); конференції Proceedings of the 2nd International Conference on Mathematical Sciences & Computer Engineering ICMSCE 2015 (Лангкаві, Малайзія, 2015 р.); науково-практичних конференціях науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників Української інженерно-педагогічної академії (секція «Фізико-математичні науки») (Харків, 2005, 2009, 2011 рр.).

Публікації. Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 18 роботах, з них 5 статей у наукових журналах та збірниках наукових праць, які входять до переліку фахових видань України за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (фізико-математичні науки), 1 стаття у виданні іноземної держави, 12 тез доповідей, опублікованих у друкованих матеріалах конференцій та симпозіумів.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ, ПРИСВЯЧЕНИХ НАБЛИЖЕНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1 Математична модель процесу теплопередачі

Вивчення процесів теплообміну завжди відіграло значну роль у розвитку техніки і природознавства. За останні десятиліття сфера інтенсивного дослідження і застосування явищ теплообміну надзвичайно розширилася. Вона включає як провідні напрямки техніки (хімічна технологія, металургія, будівельна справа, нафторозробки, машинобудування, агротехніка тощо), так і основні природничі науки (біологія, геологія, фізика атмосфери й океану та інші). Теоретичне дослідження процесів теплообміну в даний час в значній мірі базується на їх чисельному моделюванні з використанням ЕОМ. Це стало можливим завдяки значному прогресу в розвитку обчислювальних методів вирішення задач для рівнянь в частинних похідних і збільшенню потужності сучасних обчислювальних машин.

Як відомо, існують три механізми передачі тепла: теплопровідність, конвекція і випромінювання [67]. Теплопровідністю називається молекулярний перенос теплоти між безпосередньо дотичними тілами або частинами одного тіла з різною температурою, при якому відбувається обмін енергією руху структурних частин (молекул, атомів, вільних електронів). Теплопровідність залежить від агрегатного стану речовини, його складу, чистоти, температури, тиску та інших характеристик. На практиці часто трапляється, що теплопровідність усередині тіла й поблизу його границь різна. Ця різниця зумовлена як зміною умов протікання процесів теплопереносу, так і зміною структури речовини (в результаті термообробки, наклепу, старіння, зносу тощо). Істотний вплив на теплопровідність можуть надавати зовнішні чинники, наприклад, опромінення, зміна тиску, магнітне поле.

Явище теплопровідності пов'язане з наявністю в тілі зміни температури, тобто з поняттям температурне поле [95]. Температурне поле – це сукупність значень температури у всіх точках вивчаємого простору в даний момент часу. Математично воно записується у вигляді $t = f(x, y, z, \tau)$. Розрізняють стаціонарне температурне поле, коли температура у всіх точках простору не залежить від часу, і нестаціонарне, яке відповідає несталому процесу.

При теоретичному дослідженні теплообміну необхідно розглядати середовище, в якому відбуваються досліджувані процеси. Розрізняють однорідні та неоднорідні середовища. В однорідних фізичні властивості в різних точках однакові при однакових температурі й тиску, в неоднорідних – різні.

В дисертаційній роботі розглядаються нестаціонарні процеси теплопровідності, тобто перенос тепла за рахунок теплопровідності при відсутності внутрішніх джерел тепла, коли температура системи змінюється з часом. Такі процеси мають місце при нагріванні (охолодженні) різних заготовок і виробів, при виробництві скла, випаленні цегли, вулканізації гуми, пуску і зупинці різних теплообмінних пристроїв, енергетичних агрегатів і таке інше.

Вивчення будь-якого фізичного явища зводиться до встановлення залежності між величинами, що характеризують це явище. Розглянемо диференціальне рівняння теплопровідності.

Основне положення теорії теплопровідності, відоме як закон Фур'є, полягає в припущенні пропорційності теплового потоку градієнту температури в однорідному нерухомому середовищі: $q = -k \text{ grad } T$, де k – коефіцієнт теплопровідності [95]. Для отримання рівняння переносу тепла запишемо закон збереження енергії у вигляді:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } q + f, \quad (1.1)$$

де f визначає потужність внутрішніх джерел теплоти, c – питома теплоємність, ρ – щільність середовища.

Підставивши вираз для потоку тепла в (1.1), отримаємо основне диференціальне рівняння теплопровідності:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f. \quad (1.2)$$

Коефіцієнти і права частина рівняння теплопровідності можуть залежати від точки простору (неоднорідне середовище). В цьому випадку $c = c(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$, $k = k(x, y, z)$, $f = f(x, y, z)$, а саме рівняння теплопровідності є лінійним параболічним рівнянням другого порядку.

Якщо теплофізичні властивості середовища постійні (однорідне середовище), то рівняння (1.2) теплопровідності спрощується і приймає вигляд $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{f}{c\rho}$, де $a = \frac{k}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності, $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ – оператор Лапласа.

Коефіцієнт температуропровідності характеризує швидкість зміни температури в нестационарних процесах, є мірою теплоінерційних властивостей тіла. Швидкість зміни температури буде тим вище, чим більше коефіцієнт температуропровідності. Також цей коефіцієнт залежить від природи речовини: для металів більше, ніж для рідин і газів.

Рівняння теплопровідності в рухомому середовищі:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f.$$

Тут член з $v \operatorname{grad} T$ визначає зміну температури за рахунок конвективного переносу.

Рівняння теплопровідності в прямокутній системі координат:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f.$$

Диференціальне рівняння теплопровідності описує процес теплопровідності в загальному вигляді. Щоб виділити конкретний процес і дати його повний математичний опис, необхідно додати умови однозначності, які включають:

- геометричні умови, що характеризують форму і розміри тіла, в якому протікає процес;
- фізичні умови, що характеризують фізичні властивості тіла (теплопровідність, теплоємність, щільність, потужність внутрішніх джерел тепла і таке інше);
- початкові умови, що характеризують розподіл температури в досліджуваному тілі в початковий момент часу;
- граничні умови, що характеризують взаємодію розглядаємого тіла з навколишнім середовищем.

Граничні умови можуть бути задані в різній формі залежно від характеру процесу. В граничних умовах першого роду задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу: $t_c = f(x, y, z, \tau)$; частинний випадок $t_c = const$. В граничних умовах другого роду задається величина теплового потоку для кожної точки поверхні тіла і для будь-якого моменту часу: $q_c = f(x, y, z, \tau)$; частинний випадок $q_c = const$ (наприклад, нагрівання металевих виробів у високотемпературних печах). В граничних умовах третього роду задається температура навколишнього середовища і закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем в процесі охолодження і нагрівання. Граничні умови четвертого роду характеризують теплообмін системи тіл або тіла з навколишнім середовищем за законом теплопровідності.

Для тіла певної геометричної форми з відомими фізичними властивостями умови однозначності зводяться до завдання початкової та

граничної умов. Ці умови в сукупності називаються крайовими умовами. Диференціальне рівняння теплопровідності разом з крайовими умовами становить крайову задачу рівняння теплопровідності.

Опишемо тепловий стан твердого тіла, яке займає обсяг Ω , починаючи з початкового моменту часу $t=0$ до деякого кінцевого моменту часу $t=T$, $T > 0$.

Нехай $\Omega = \{(x,t) | x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$, а $\Gamma = \{(x,t) | x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T\}$ – бокова поверхня Q . Процес поширення тепла в анізотропному середовищі описується наступним рівнянням теплопровідності [95]:

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (1.3)$$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad (1.4)$$

при звичайних обмеженнях

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad k_1 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^m k_{ij} \xi_i \xi_j \leq k_2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad k_1 > 0.$$

Рівняння (1.3), (1.4) є класичним лінійним параболічним рівнянням другого порядку. В більш загальному випадку рухомого середовища

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

В ізотропному середовищі

$$Lu = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Для однорідного середовища рівняння теплопровідності (коли коефіцієнт теплопровідності $k(x)$ і коефіцієнт теплоємності $c(x)$ постійні), маємо найпростіше рівняння другого порядку параболічного типу з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t), \quad x \in \Omega.$$

Рівняння теплопровідності (1.3) (або (1.5)) доповнюється необхідними граничними умовами. Найбільша увага приділяється задачі Діріхле, коли

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in \Gamma. \quad (1.6)$$

Початкова умова для рівняння (1.3):

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.7)$$

Температурне поле $u(x, t)$ в будь-якій точці розрахункової області Ω на будь-який момент часу $0 < t \leq T$ визначається з рівняння теплопровідності (1.3), (1.4) (або (1.3), (1.5)), граничних умов (1.6) і початкової умови (1.7).

Таким чином, диференціальне рівняння спільно з умовами однозначності дають повне математичне формулювання конкретної задачі теплопровідності, яка може бути вирішена аналітично, чисельно, експериментально.

Особливістю задач тепло- і масообміну є істотна відмінність і складність математичного опису елементарних процесів теплопереносу. Кожен з процесів визначається системами диференціальних рівнянь в частинних похідних або інтегро-диференціальних рівнянь. Ці процеси мають просторово-часовий характер, включають ефекти, пов'язані з наявністю малих параметрів і нелінійності [119]. В реальних умовах елементарні процеси часто протікають в сукупності, практичні завдання відрізняються різноманітністю геометрії, граничних умов. Крім того, ці процеси ускладнюються, наприклад, наявністю хімічних реакцій та фазових переходів. До опису таких складних процесів,

точності і надійності висновків, що даються на основі чисельного моделювання, пред'являються досить високі вимоги, що призводить до необхідності розробки спеціальних математичних моделей та чисельних методів, пристосованих до даного класу задач.

1.2 Чисельні методи розв'язання задач нестационарної теплопровідності

Більшість крайових задач математичної фізики неможливо вирішити аналітичними методами. Для їх розв'язання використовують чисельні методи: сіткові (методи кінцевих різниць, скінченних елементів, граничних елементів), варіаційні та проєкційні (методи Рітца, Бубнова – Гальоркіна – Петрова, колокацій, локального потенціалу, Трефтця, найменших квадратів, фіктивних областей, R-функцій). Грань між цими методами дуже умовна [87]: різницеві методи та метод скінченних елементів можна трактувати як варіаційні зі спеціальним вибором координатних функцій, а один і той же обчислювальний алгоритм у багатьох випадках отримують як варіаційним, так і проєкційним шляхом. Тому у всіх таких методах розв'язок крайової задачі має вигляд:

$$u_N = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) + \varphi_0(x), \quad (1.8)$$

де $\varphi_k(x)$ – деякі заздалегідь обрані функції. Так, в методі сіток коефіцієнт C_k – значення невідомого розв'язку в k -ому вузлі сітки, тому $\varphi_k(x)$ – деяка функція, яка дорівнює 1 в k -ому вузлі та 0 в останніх вузлах. Тоді розв'язання крайової задачі зводиться до розв'язання деякої системи алгебраїчних рівнянь

$$F_i(C_1, C_2, \dots, C_N) = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

відносно невідомих C_1, C_2, \dots, C_N .

Кожен з методів має свої переваги і недоліки. У [2] зазначено, що сіткові методи володіють великою ефективністю алгоритму (за рахунок чого і набули

широкого поширення), але при цьому не точно враховують геометрію досліджуваного об'єкта. У разі варіаційних методів не завжди можна побудувати базисні функції, які задовольняли б усім необхідним умовам, тому їх використання обмежене. Метод R-функцій володіє геометричною гнучкістю і універсальністю по відношенню до вибраного способу мінімізації функціоналу.

Розвиток технічної бази (ЕОМ), досягнення математики в самій теорії проєкційних методів, а також в теорії апроксимації за допомогою функцій зі скінченим носієм привели до створення обчислювальної індустрії, що ґрунтується на проєкційно-сіткових методах. Метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ), варіаційно-сіткові методи (ВРС) на сьогоднішній день розглядаються як різновиди проєкційно-сіткових методів, а точніше просто проєкційні, обумовлені різноманітним вибором локальних апроксимуючих функцій. Зацікавлення ними обумовлено, в першу чергу, можливостями автоматизації алгоритмів та роботою з системами рівнянь, що мають розріджені матриці.

Метод сіток (скінчених різниць) є одним з найбільш широко використовуваним чисельним методом розв'язання задач теплопровідності. Це пояснюється відносною простотою математичної ідеї дискретизації. Дискретизація – деяка апроксимаційна процедура, при якій неперервна область замінюється сіткою з окремих точок і невідомі фізичні змінні шукаються в цих конкретних точках. Частинні похідні при такому підході можуть апроксимуватися за допомогою скінчених різниць багатьма способами.

Тобто ідея методу сіток полягає в наступному: область безперервного змінювання аргументу замінюють областю дискретного його змінювання (сітковою областю); функції безперервного аргументу замінюють функціями дискретного аргументу (сітковими функціями); диференціальні рівняння і додаткові умови на границі області замінюють їх сітковими (різницеvими) аналогами. Після виконання цих перетворень вихідна диференціальна задача зводиться до відповідної сіткової (різницеvої). Остання являє собою систему

лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканої функції в вузлах сітки. Розв'язавши цю систему, будемо мати чисельний розв'язок вихідної задачі.

З теорії різницевих схем існує багато спеціальної літератури, фундаментальними є праці Г. І. Марчука [69] та А. А. Самарського [96]. Так, у [96] викладено основні теоретичні питання, які ілюструються на найпростіших задачах для рівнянь параболічного, еліптичного та гіперболічного типів. Розглянуто перш за все ті схеми, які придатні для розв'язання конкретних задач на ЕОМ. Досліджено лише схеми для диференціальних рівнянь другого порядку, тому при розв'язанні різницевих рівнянь (в одновимірному та багатовимірному випадках) використовується лише алгоритм одновимірної прогонки (для систем алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею).

У роботі [3] І Бабушкою, Е. Вітасеком розглянуто застосування МСР до диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Автори відмічають, що труднощі, які виникають при чисельному розв'язанні рівнянь з частинними похідними параболічного типу, не відрізняються від труднощів у разі еліптичних рівнянь. Розглянуто застосування МСР до розв'язання лінійного диференціального рівняння параболічного типу у випадку двох просторових змінних для першої крайової задачі (задачі Діріхле). Відмічено, що чисельні процеси розв'язання крайових задач для двовимірних кінцево-різницевих рівнянь вимагають значного числа арифметичних операцій.

Чисельне розв'язання рівнянь параболічного типу досліджено в роботах М. М. Каліткіна [28], О. О. Ладиженської [36]. Так, у [28] детально розглянуто основні різницеві схеми, які використовують для розв'язання одновимірних задач. На прикладі двовимірного рівняння теплопровідності з постійним коефіцієнтом, для якого задана перша крайова задача в прямокутній області, розглянуто два основних види економічних схем для параболічного рівняння: поздовжньо-поперечна прогонка, що дає гарні результати при розв'язанні задач з двома просторовими змінними, та локально-одновимірною схемою, яка придатна при будь-якому числі вимірів. Відмічено принципові труднощі, що виникають при розв'язанні двовимірних нестационарних задач теплопровідності.

У роботі [31] Е. М. Карташов відмічає, що чисельні методи розв'язання теплових задач, які основані на методиці скінченних різниць, мають великі потенціальні можливості. Диференціальне рівняння теплопровідності при цьому замінюється системою алгебраїчних рівнянь, початкова і граничні умови також замінюються різницевиими початковим і граничними умовами для сіткової функції і подальше розв'язання задачі зводиться до виконання простих алгебраїчних операцій. Повторюваність однотипних операцій в цьому методі представляє великі зручності для використання сучасної обчислювальної техніки. Цим методом можуть бути розв'язані будь-які задачі для тіл довільної геометричної форми, лінійні й нелінійні. Недоліком методу є необхідність виконання дуже великої кількості обчислювальних операцій, особливо для тривимірних і навіть для двовимірних задач.

У роботі [11] автори І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров дослідили застосування методу сіток для багатовимірних задач параболічного типу. Відмічено, що підвищення розмірності задачі параболічного типу, як правило, не потребує нових чисельних методів. Але зі збільшенням розмірності ростуть технічні труднощі при побудові та дослідженні цих методів. Багатовимірність задачі приводить до збільшення обсягу обчислень (кількості арифметичних операцій). Для двовимірного рівняння теплопровідності розглянуто різницеву схему з вагомими коефіцієнтами, досліджено стійкість та збіжність схеми. Автори відзначають переваги і недоліки різницевих схем: для явної схеми перевагою є пропорційність числа арифметичних дій числу вузлів, недоліком – жорстке обмеження на крок; для неявної схеми перевагою є безумовна стійкість схеми, недоліком – збільшення кількості арифметичних операцій. Розглянуто також економні схеми для параболічних рівнянь.

У роботі [27] В. П. Ісаченко при застосованні МСР для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності відмічає, що для отримання розрахункових формул при чисельному інтегруванні користуються також методом теплових балансів та математичними операціями при заміні в диференціальних рівняннях похідних функції скінченними різницями. Методом

теплових балансів отримані розрахункові формули для чисельного інтегрування одновимірної та двовимірної нестационарних задач теплопровідності.

Різницеві схеми для розв'язання рівняння теплопровідності розглянуто А. А. Самарським у книзі [94]. Детально досліджено одновимірне рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами. Наведено різницеві схеми для багатовимірного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами. Відмічено, що при апроксимації диференціальних рівнянь виходять різницеві рівняння, які представляють собою системи лінійних рівнянь високого порядку з матрицями спеціального типу (тобто з матрицями, які мають багато нульових елементів), наприклад, трьохдіагональними. Важливу роль при цьому відіграє вибір ефективних методів (прямих і ітераційних) розв'язання таких систем.

Одним з недоліків методу сіток є труднощі, які пов'язані із задовільненням граничним умовам I, II та III роду на різних частинах границі у випадку областей складної форми. В останні три десятиліття метод сіток практично витіснений методом скінченних елементів. В основі теорії МСЕ лежать варіаційні принципи, що робить цей метод більш гнучким і більш простим в реалізації, ніж МСР, особливо при формулюванні та задовільненні граничних умов. Використовується також варіаційно-різницевий метод. У задачах для областей складної форми успішно застосовується метод потенціалу або метод інтегральних граничних рівнянь.

У практиці інженерних розрахунків поширені методи, які вкладаються в загальну схему проекційних і варіаційних методів. У [11] відзначено, що початкові ідеї цих методів різні, проте алгоритми багатьох варіаційних методів можна отримати як окремі випадки алгоритмів проекційних методів. Тому часто ці методи об'єднують в один клас проекційно-варіаційних методів.

Нехай рівняння $Au = f$, де $A: E \rightarrow F$ – лінійний оператор, що діє з нормованого простору E в нормований простір F , має єдиний розв'язок u_* і відомий функціонал $\Phi: E \rightarrow R^1$ (R^1 – простір дійсних чисел), мінімум якого досягається в єдиній точці u^* . Тоді розв'язання цього рівняння можна замінити

задачею мінімізації функціоналу $\Phi(u)$. Методи, що ґрунтуються на цій ідеї, називаються варіаційними [11].

Для розв'язання нестационарних задач теплопровідності використовуються варіаційні методи (метод локального потенціалу, Гальоркіна і Бубнова–Гальоркіна), які відображено в працях Г. І. Марчука [68, 69], С. Г. Міхліна [73], Л. А. Оганесяна, Л. А. Руховця [78], Е. Мітчела, Р. Уейта [72], К. Ректоріса [90], Г. Стренга, Дж. Фікса [108]. У [68] Марчуком Г. І. представлений короткий огляд методів обчислювальної математики. Зокрема, відзначено, що в обчислювальній математиці важливе місце займають варіаційні методи Рітца, Гальоркіна, Трефтца та інші. Особливо ефективні ці методи в тих задачах, де шуканими є функціонали від розв'язку, оскільки вже при порівняно невисоких наближеннях функціонали виходять з великою точністю. Найбільш повне теоретичне обґрунтування варіаційних методів дано в дослідженнях С. Г. Міхліна [73], який встановив необхідні та достатні умови стійкості варіаційних методів у просторах з енергетичною нормою. Активний розвиток варіаційних методів виявив також і деякі їх недоліки, пов'язані з труднощами побудови пробних функцій, які відображали б особливості розв'язку задачі та при порівняно невеликій кількості цих функцій давали б задовільну апроксимацію розв'язку.

Варіаційні методи, МСР та МСЕ є універсальними для розв'язання задач теплопровідності. Ці чисельні методи називають прямими, для них характерно зведення крайових задач до розв'язання алгебраїчних систем лінійних рівнянь. У всіх прямих методах наближений розв'язок крайової задачі шукається у вигляді (1.8). В деяких методах (сіткових, МСЕ) формулу (1.8) представлення розв'язку не завжди можна представити у явному вигляді. В найпростіших скінченно-різницевих методах, наприклад, за основу береться функція $y = h_1(t)$ (фінітний сплайн Шенберга першого порядку).

У класичних варіаційних методах функції $\varphi_k(x)$ – це координатні функції, що задовольняють крайовим умовам [87]. Застосування таких функцій

приводить до системи алгебраїчних рівнянь, як правило, з повністю заповненими матрицями. Такі системи зазвичай погано обумовлені навіть при порівняно невеликих N (порядку 10^2) і вимагають для зберігання елементів матриці в пам'яті ЕОМ N^2 комірок. Крім того, обчислення коефіцієнтів у методах типу Рітца – Гальоркіна або найменших квадратів вимагає обчислення кратних інтегралів по всій області, в якій вирішується задача. Таким чином, якщо взяти за основу один і той же варіаційний принцип (наприклад, мінімізувати функціонал Рітца), то МСР, МСЕ і класичний варіаційний метод будуть відрізнятися лише вибором функцій $\varphi_k(x)$. При одному і тому ж N будуть різними обчислювальні витрати та накопичення похибок, але тип збіжності, взагалі, буде один і той же. Можливий інший варіант: функції $\varphi_k(x)$ вибираються одні й ті ж, але по-різному визначаються постійні C_k . Таким чином, всі прямі методи об'єднує між собою формула (1.8), а відмінність між ними полягає лише у виборі функцій $\varphi_k(x)$ та способах пошуку постійних C_k .

Загальну схему методу Бубнова – Гальоркіна викладено у [117] В. В. Шайдуровим. У цій роботі коротко викладаються питання збіжності наближених розв'язків методу, розглянуто апроксимуючі властивості скінченних елементів, умови збіжності наближених розв'язків, вибір економічних кубатурних формул, способи апроксимації границі та головних крайових умов, підвищення точності наближених розв'язків.

В книзі [108] Г. Стренгом, Дж. Фіксом досліджуються можливості застосування методу Гальоркіна до рівняння нестационарної теплопровідності в одномірному випадку. Досліджено схему Кранка – Ніколсона, стійкість та збіжність для параболічних задач. Відмічено, що, як і в стаціонарних задачах, МСЕ особливо ефективний при обчисленнях на грубих сітках з великим кроком.

Одним з методів розв'язання крайових задач математичної фізики є метод локального потенціалу. Він дозволяє розв'язувати несамоспряжені системи диференціальних рівнянь з використанням наближених методів варіаційного

числення. Головна особливість методу локального потенціалу полягає в тому, що кожна невідома функція (наприклад, розподіл температури в нелінійній задачі теплопровідності) з'являється двічі: як середнє значення і як флюктуруюча величина. Це приводить до узагальнення класичної варіаційної техніки на несамопряжені задачі. Локальний потенціал досягає мінімуму, коли середнє значення співпадає з найбільш вірогідним. Застосування методу локального потенціалу при дослідженні нестационарних процесів розглянуто Р. С. Шехтером в книзі [118]. В цій роботі відмічено зручність застосування методу: компактність виразів, простий облік граничних умов. Проте недоліком методу є неможливість проведення оцінки точності наближення.

Недоліком варіаційних методів при розв'язанні нестационарних задач теплопровідності є те, що при великій кількості наближень щодо невідомих коефіцієнтів шуканого розв'язку отримуються системи з великою кількістю алгебраїчних лінійних рівнянь. Матриці коефіцієнтів таких систем, які заповнені квадратними матрицями з великим розкидом коефіцієнтів за абсолютною величиною, погано обумовлені. У зв'язку зі збільшенням кількості наближень точність розв'язку погіршується.

Загальним методом розв'язання нестационарних задач теплопровідності є варіаційні методи, що використовують регіонально-структурний метод побудови наближених розв'язків та знаходження наближеного розв'язку для диференціальних рівнянь теплопровідності із застосуванням перетворення Лапласа (роботи [83 – 89] В. Л. Рвачова, А. П. Слесаренко та інших). Важливу роль при побудові вказаних схем наближеного розв'язку відіграють методи задовільнення граничним умовам трьох типів, оснований на використанні R-функцій В. Л. Рвачова. Основні недоліки такого підходу пов'язані з необхідністю продовження граничних умов у внутрішні точки області інтегрування для випадків, коли зміна граничних умов II або III роду повинна виконуватися в довільних точках границі та граничні функції не є диференційованими.

Наближений розрахунок нестационарних температурних полів однорідних тіл простої геометричної форми (необмежені пластини, циліндр, шар та інші) при простих граничних умовах розглядався П. В. Цоєм в роботі [115]. Для розрахунку сумісно застосовувалися перетворення Лапласа та варіаційні методи Рітца і Бубнова–Гальоркіна. Розв’язання нелінійних задач теплопровідності досліджено Л. А. Коздобою у [32].

У [83] В. Л. Рвачов і А. П. Слесаренко відзначають, що у випадку складної геометричної форми конструктивних елементів та якщо взаємодія елементів із навколишньою середою має складний характер, для застосування методів Рітца і Бубнова–Гальоркіна необхідні вміння побудови функцій, які точно задовольняють граничним умовам та умовам повноти. Якщо елемент складається з матеріалів, які мають різноманітні теплофізичні характеристики, то до цих умов додаються ще умови спряження на поверхнях контакту різних матеріалів.

У статті [106] автори А. П. Слесаренко та Н. А. Сафонов відмічають, що при розв’язанні крайових задач математичної фізики наближеними аналітичними методами вдалося ефективно розв’язати проблему точного обліку інформації про геометрію області за допомогою R -функцій академіком НАН України В. Л. Рвачовим. З використанням R -функцій вперше точно розв’язана зворотна задача аналітичної геометрії для областей складної форми. Після цього успішно розвивалися наближені аналітичні методи (метод R -функцій, варіаційно-структурний метод, регіонально-структурний метод) [83 – 89] та ефективно використовувалися до розв’язання крайових задач теплофізики, механіки, електродинаміки та ін.

Метод R -функцій володіє геометричною гнучкістю й універсальністю по відношенню до вибраного способу мінімізації функціонала. За допомогою конструктивного апарату теорії R -функцій можна вирішити проблему побудови в явному вигляді функцій $\varphi_k(x)$ у рівнянні (1.8), які точно задовольняють довільним крайовим умовам для областей складної форми. У [87] В. Л. Рвачовим відзначено, що в більшості випадках необхідно

задовільнення розв'язку u_N крайовим умовам розглядуваної задачі. Основні труднощі пов'язані з тим, що у формули, які представляють функції $\varphi_k(x)$, повинна деяким чином включатися інформація геометричного характеру про форму границі розглядуваної області та форму її частин для крайових умов змішаного типу. Крім цього, ці формули повинні бути конструктивно простими і з точки зору обчислення їх значень, і при виконанні деяких аналітичних дій (наприклад, знаходження їх частинних похідних до необхідного порядку).

Одним із найбільш широко використовуваних методів розв'язання нестационарних задач теплопровідності на даний час є метод скінченних елементів. МСЕ відноситься до групи варіаційно-різницевих методів. Він почав розвиватися як метод розв'язання задач будівельної механіки, потім став широко застосовуватися при проектуванні літаків та автомобілів, теплових і електродвигунів, турбін, теплообмінних апаратів та ін. Перший формальний виклад МСЕ дано в 1956 р. М. Тернером, Р. Клафом, Х. Мартином і Л. Топпом [125]. Ця робота сприяла появленню інших робіт з використанням МСЕ до задач будівельної механіки та механіки суцільних середовищ. Важливий вклад до теоретичної розробки методу зробив у 1963 р. Р. Мелош [123], який показав, що МСЕ можна розглядувати як один з варіантів методу Релея–Рітца.

На цей час існують сотні тисяч публікацій з МСЕ. Переведена велика кількість монографій вчених іноземних вчених: Дж. Аргіріса [1], К. Бате та Р. Вилсона [4], К. Васідзу [9], Р. Галлагера [12], Дж. Деклу [16], О. Зенкевича [23–25], Е. Мітчела та Р. Уейта [72], Дж. Одена [79], Д. Норрі та Ж. де Фріза [77], Л. Сегерлінда [98], Г. Стренга та Дж. Фікса [108], Ф. Сьярле [109]. Свій внесок в розвиток МСЕ зробили і вітчизняні вчені; бібліографія праць, в яких описано МСЕ, налічує десятки найменувань [20, 37, 70, 71, 75, 76, 80, 91, 92, 98, 99, 105, 110, 116, 117].

В МСЕ реалізується проста та очевидна ідея дослідження поведінки тіла на основі поведінки окремих його частин – скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з процедурою мінімізації привела до широкого використання методу при

розв'язанні задач в інших областях техніки. Метод використовувався до задач, які описуються рівняннями Лапласа чи Пуассона. Розв'язок цих рівнянь також пов'язаний з мінімізацією деякого функціоналу. У перших публікаціях за допомогою МСЕ вирішувалися задачі поширення тепла. Потім метод був застосований до задач гідромеханіки, зокрема, до задачі течії рідини в пористому середовищі. МСЕ з чисельної процедури розв'язку задач будівельної механіки перетворився на загальний метод чисельного розв'язку диференціальних рівнянь та їх систем. Цей прогрес був досягнутий за рахунок вдосконалення обчислювальних машин, необхідних для більш точного розрахунку конструкцій.

Зараз МСЕ став одним з найпоширеніших та ефективних методів розв'язання різноманітних задач математичної фізики та техніки. Його популярність пов'язана з універсальністю та простотою математичної форми для широкого кола задач в сполученні з гнучкістю обчислювальних алгоритмів, що дозволяють врахувати конкретні властивості індивідуальних задач. МСЕ став ефективним способом чисельного розв'язання цілого ряду задач для рівнянь з частинними похідними, особливо для нестационарних рівнянь. Він дуже зручний для програмування і дозволяє враховувати додаткову інформацію про розв'язувану задачу в тих випадках, коли вдається одержати теоретичне обґрунтування його застосовності. Це стосується перш за все еліптичних рівнянь, де відразу виявилися його переваги в порівнянні з МСР.

МСЕ може бути використаний для розв'язання як стаціонарних, так і нестационарних задач. Обмежена просторова або просторово-часова область розбивається на деяку кількість елементів, які не перетинаються. Апроксимуючі функції, які можуть бути поліномами, раціональними дробами і т.п., співвідносяться з конкретними елементами, і параметри при цих апроксимуючих функціях узгоджені таким чином, щоб забезпечити необхідну степінь гладкості апроксимації на границі між сусідніми елементами. Тоді апроксимуюча функція на всій області може бути виражена за допомогою своїх значень і значень своїх похідних в кутових точках області через базисні

функції, які відмінні від нуля тільки на деяких елементах, розташованих навколо відповідних вузлів.

МСЕ містить у собі основні концепції методу сіток, які пов'язані з дискретизацією областей неперервної зміни аргументів і шуканої функції, і методу Гальоркіна, що використовує варіаційні принципи для знаходження шуканої функції у вузлах розглядуваної області. В результаті розв'язання нестационарна задача зводиться до розв'язання задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь зі стрічковими матрицями. Порядок системи дорівнює числу вузлових точок. МСЕ полягає у побудові структури наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності у вигляді сум добутків невідомих функцій від змінної t на відомі базисні функції від змінних x та y . Ці допоміжні базисні функції вважаються фінітними і, як правило, будуються у вигляді кусково-поліноміальних сплайнів.

Комп'ютерне моделювання процесів, що базується на МСЕ, передбачає виконання наступних етапів моделювання: 1) побудова чисельної моделі реального середовища, що описує сукупність його геометричних та фізичних властивостей; 2) виконання скінченно-елементного розбиття простору моделі; 3) формування задачі Коші (для нестационарних задач) або системи лінійних алгебраїчних рівнянь (для стаціонарних задач) та пошук розв'язку; 4) аналіз отриманих чисельних результатів і порівняння їх з результатами польових спостережень.

В розв'язанні крайових задач за допомогою МСЕ найбільш важливу роль відіграють похибки, що виникають через наближене задовільнення диференціальних рівнянь та крайових умов [108, 117, 120]. Ці похибки досягають найбільшого значення поблизу різного роду особливостей (в кутових точках, в місцях прилягання зосереджених навантажень, на межі середовищ з різними фізичними властивостями і т.ін.).

В працях багатьох вчених досліджувалися стійкість та похибка МСЕ для рівнянь параболічного типу $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$, де L – деякий еліптичний оператор

порядку $2m$ (найбільш поширений випадок $m=1$). Для дослідження стійкості похибки МСЕ та похибки наближення у випадку, якщо диференціальний оператор L є самоспряженим, було, зокрема, Г. Стренгом і Дж. Фіксом у [108] відзначено 2 різних підходи. Перший підхід пов'язаний з розкладанням функції $u_0(x, y, 0)$ в ряд за власними функціями однорідної задачі (коли $f(x, y, t) = 0$). В цьому випадку доведено, що похибка розвинення в ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} u_k(x, y)$ повністю визначається похибкою наближення початкової функції $u_0(x, y) = u(x, y, 0)$ і залежить від першого власного числа $e^{-\lambda_1 t} h^k$, де $O(h^k)$ – головний член похибки наближення цієї функції сплайнами. Якщо ж права частина $f(x, y, t) \neq 0$, то за допомогою інтеграла Дюамеля знову встановлено той самий порядок похибки при $t \rightarrow \infty$. Другий метод дослідження похибки МСЕ для рівнянь параболічного типу не використовує розвинення наближеного розв'язку за ортогональною системою $((u_k, u_j) = \delta_{k,j})$. Основний підхід, який використовується в цьому випадку, пов'язаний з тим, що $u_{\text{набл.}} = \tilde{u} = (u - Pu) + (Pu - \tilde{u})$. В цьому випадку вважається відомою похибка $u - Pu$, як похибка інтерлінації. Тому треба оцінити лише похибку $\varepsilon(t) = Pu - \tilde{u}$. Для величини $\varepsilon(t)$ отримано диференціальне рівняння з початковою умовою.

Відмітимо переваги та недоліки застосування МСР і МСЕ до розв'язання рівнянь з частинними похідними. МСР є простим з погляду формулювання задачі, вимагає менше обчислювальних ресурсів у порівнянні з МСЕ. Крім того, МСР є досить простим методом при вивченні та найчастіше застосовується для простих областей. Для проблем, пов'язаних з нерегулярною геометрією в області розв'язку, МСЕ може мати певну перевагу, оскільки область біля границі може бути розділена на підобласті. МСЕ і МСР відрізняються способами отримання системи рівнянь для значень шуканих функцій у вузлових точках. МСР базується безпосередньо на диференціальному

рівнянні та граничних умовах, а МСЕ – на еквівалентній варіаційній постановці задачі. Головним недоліком МСР є складність формування ефективного розв’язання задачі для довільно сформованої геометрії обчислювальних полів, оскільки є певні труднощі в інтерполяції полів між границями і внутрішніми точками. Головна відмінність методів МСР і МСЕ полягає в тому, що точність МСР може бути досліджена за порядком похибки усікання в розкладанні ряду Тейлора, а в МСЕ розкладання в ряди Тейлора не застосовується.

Однією з актуальних проблем застосування МСЕ є підвищення точності скінченно-елементних розв’язків за допомогою створення алгоритмів, що практично реалізуються. Основним недоліком класичних схем МСЕ є труднощі, що виникають в зв’язку з необхідністю розв’язання систем ЗДР з великою кількістю рівнянь.

Нестаціонарну задачу теплопровідності з двома просторовими змінними досліджено М. М. Светушковим в роботі [97] методом зведення до систем інтегро-диференціальних рівнянь. У роботі автором запропоновано ітераційний алгоритм чисельного розв’язання задачі теплопровідності, що дозволяє звести розв’язання багатовимірної задачі в складній геометричній області до ітераційного розв’язання системи взаємопов’язаних одновимірних задач (метод інтегральної декомпозиції). Але ця робота не має математичного обґрунтування точності методу у вигляді теорем, немає порівняння з іншими методами.

Теоретичні аспекти функціонально-диференціальних рівнянь досліджувалися в працях Л. А Власенко, А. Г. Руткаса. Так, в роботі [10] авторами встановлено умови існування та єдиності розв’язку нелінійного функціонально-диференціального рівняння з імпульсними впливами в банаховому просторі.

У [100] авторами А. М. Сінотіним, В. В. Семенцем, Т. А. Колесниковою наведено дослідження з виявлення впливу форми, теплофізичних коефіцієнтів, закону концентрації джерел, інтенсивності поверхневого охолодження на межі мінімізації параметра синтезу з метою забезпечення заданого теплового режиму конструкції на початковому етапі конструювання. Зокрема, досліджено

розв'язання неоднорідного рівняння теплопровідності для різних схем розміщення стоків і джерел енергії в нагрітій зоні радіоелектронного апарату.

В роботі [41] О. М. Литвин зазначив, що загально відомі труднощі побудови структур наближених розв'язків граничних задач, які задовольняють на границях областей G складної форми (складених з кусків різних кривих або поверхонь) граничним умовам типу умов Коші. Загальні алгоритми побудови таких структур наближених розв'язків у випадку, коли граничні функції належать до достатньо високого класу диференційовності, дає метод R -функцій. Але, якщо хоча б одна з функцій недиференційовна, то одержувані за допомогою R -функцій структури наближених розв'язків можуть бути недиференційовними в області G . Це справедливо для всіх методів інтерлінації функцій без збереження класу $C^r(R^n)$. Тому актуальною є задача побудови структур наближених розв'язків граничних задач для областей складної форми, які продовжують граничні дані в середину області G із збереженням потрібного класу диференційовності. Для цього можна використати формули інтерлінації на декількох прямих із збереженням класу $C^r(R^n)$.

Питання побудови поліноміальних базисних сплайнів і наближення з їх допомогою функції двох змінних розглянуто в праці [103] О. В. Ткаченком.

Важливим напрямком обчислювальної математики, який використовує інтерлінації функцій, є розробка і дослідження методів розв'язання граничних задач для областей складної форми, які зводять висхідну граничну задачу до до систем інтегро-диференціальних рівнянь (лінійних або нелінійних).

У роботах [50, 56, 111] викладено метод розв'язання граничних задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу, який зводить їх до системи звичайних лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ЛІДР). Цей метод в [50] названо методом ЛІДР; він має високу точність і близький до методу інтегральних співвідношень А. А. Дородніцина [18] і до методу Гальоркіна–Бубнова–Канторовича, викладеного в роботі А. І. Вайндинера [8]. В [52] запропонована дискретна схема методу ЛІДР (див. також [112], де використана

інша обчислювальна схема), яка є схемою МСЕ із спеціальним вибором системи базисних функцій. Для побудови дискретної схеми методу ЛДР суттєво використовуються формули інтерлінації [49, 51].

Загальний підхід до розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з трьома просторовими змінними, який оснований на використанні сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації функцій, досліджувався в [19] І. В. Сергієнком, О. М. Литвиним, Є. І. Дроботом. Запропонований авторами алгоритм МСЕ має відчутні переваги перед класичним МСЕ, оскільки вимагає для досягнення потрібної точності розв'язування системи диференціальних рівнянь меншого порядку. Цей ефект досягається при використанні сплайнів однакового степеня.

У роботах [29, 30] О. М. Литвина, О. Р. Максимович, В. В. Камишана досліджувалися схеми МСЕ, побудовані на основі операторів сплайн-інтерлінації функцій двох змінних. Ці схеми МСЕ мають таку ж високу точність, яку мають оператори інтерлінації функцій, але використовують, на відміну від класичного МСЕ, схеми з вузлами лише на сторонах і у вершинах елементів.

У праці [63] І. В. Сергієнком, О. М. Литвиним започатковано розробку методу розв'язання нестационарних задач теплопровідності з використанням сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації. Авторами викладено метод ЛДР зведення нестационарної задачі теплопровідності у випадку двох просторових змінних до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Метод істотно використовує сплайн-інтерлінацію функцій $u(x, y, t)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих, паралельних осям координат. Метод ЛДР є одним з узагальнень відомого методу Л.В. Канторовича, який зводить двовимірну граничну задачу до систем звичайних диференціальних рівнянь (методу ДР). У структурі наближеного розв'язку методу ДР є невідомі функції тільки однієї змінної. В методі ЛДР наближений розв'язок граничної задачі шукається у вигляді функції, в яку

входять невідомі функції двох змінних. Важливою перевагою методу ЛДР є його розповсюдження (як і в МСЕ) на випадок областей складної форми [41].

1.3 Методи розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, які зустрічаються при розв'язанні задач нестационарної теплопровідності

В обчислювальній практиці досить часто доводиться розв'язувати задачі з початковими даними для системи диференціальних рівнянь. Відома класифікація [21] традиційних методів чисельного інтегрування задачі Коші для ЗДР на основі їх структурних властивостей: лінійні багатокрокові методи (типу Адамса) та однокрокові методи (типу Рунге-Кутта, Тейлора), методи екстраполяції. Побудовано багато модифікацій і комбінацій цих методів з метою одержати алгоритми з новими властивостями [113]. Однокрокові методи використовують одне стартове значення на кожному кроці (коли для знаходження розв'язку в деякій точці відрізка використовується інформація лише про один попередній крок), а багатокрокові спираються на кілька значень розв'язку (коли для знаходження розв'язку в деякій точці використовується інформація про розв'язок в декількох попередніх точках). Методи, в яких використовуються похідні вищих порядків, оснований на використанні розкладання функції в ряд Тейлора. Окремо виділяються задачі, для яких розв'язання має різномасштабні гармоніки (жорсткі системи ЗДР). Методи розв'язання задачі Коші для систем ЗДР викладено в роботах багатьох авторів. Найбільш повне викладення методів можна розглянути у [95, 113, 114].

Метод Ейлера є найпростішим, але одночасно і найменш точним чисельним методом розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь, зазвичай його використовують для отримання оціночних розв'язків на невеликому відрізку $[x_0, x_n]$. Метод Ейлера дуже часто виявляється нестійким: малі локальні похибки приводять до значного збільшення глобальної похибки. Існують деякі модифікації метода Ейлера: метод Ейлера-Коші і модифікований

метод Ейлера. Похибка методів Ейлера-Коші та модифікованого методу Ейлера має другий порядок $O(h^2)$, що досягається покращенням апроксимації похідної.

Метод Рунге-Кутта найчастіше використовується при чисельному розв'язанні задачі Коші і має високу точність. Існують методи Рунге-Кутта різних порядків, найбільше поширення серед них отримав метод четвертого порядку. Суттєвим недоліком методу Рунге-Кутта є відсутність легко визначасмої оцінки його похибки, яка б допомагала обирати крок інтегрування. Метод Ейлера і його модифікації, по суті, є теж методами Рунге-Кутта відповідно першого та другого порядків.

Ітераційні формули методу Ейлера-Коші інакше називають основними формулами Ейлера з перерахунком [81]. Подібні схеми часто називають схемами типу «прогноз-коректор» або «предиктор-коректор». Метод «предиктор-коректор» дає двостороннє наближення до розв'язку.

У роботі [122] W. H. Enright зі співавторами за результатами обчислювальних експериментів зіставив основні типи методів розв'язання задачі Коші. Так, методи типу Адамса змінного порядку вимагають значно меншої кількості обчислень правої частини, ніж всі інші методи, і їх слід завжди використовувати в тих випадках, коли ці обчислення трудомісткі. У цих методах потрібно більше додаткових обчислень, ніж в методах Рунге – Кутта. Відмічено, що методи Адамса реалізуються найбільш ефективно при використанні розділених різниць. Метод Рунге – Кутта четвертого порядку точності простий і найбільш ефективний у звичайних розрахунках з порівняно невисокою точністю. Досить перспективним представляється метод екстраполяції Грегга – Булірша – Штьора, особливо при розрахунках з високою точністю.

Перевага багатокрокових методів полягає в тому, що на кожному кроці права частина диференціального рівняння обчислюється тільки один раз, а в методі Рунге-Кутта четвертого порядку точності на кожному кроці функція

$f(x, y(x))$ обчислюється чотири рази. Гідність методу Адамса порівняно з методом Рунге-Кутта полягає в простоті оцінки залишкового члена методу.

Багатокрокові методи були першими чисельними методами, запропонованими для жорстких диференціальних рівнянь. Жорсткою системою ЗДР називається така система ЗДР, чисельне розв'язання якої явними методами є незадовільним через різке збільшення числа обчислень (при малому кроці інтегрування) або через різке зростання похибки при недостатньо малому кроці. Для жорстких систем характерно те, що для них неявні методи дають кращий результат, ніж явні методи. З появою книги Гіра (1971) засновані на цих методах програми придбали найбільшу популярність і стали найбільш широко використовуватися для всіх жорстких розрахунків [113]. В даний час в практиці розв'язання жорстких систем ЗДР застосовують багатокрокові методи, які засновані на розкладанні в ряд Тейлора і обчисленні похідних. Найбільш поширеними є методи Адамса–Мултона і «формули диференціювання назад» (більш загальна назва – методи Гіра).

Сучасні чисельні методи розв'язання задачі Коші для систем диференціальних рівнянь в багатьох випадках базуються на формулі Тейлора, процес побудови яких полягає у виборі способу апроксимації похідних шуканого розв'язку. В праці [107] Р. В. Слоневський відмічає, що явні методи мають ряд недоліків. При їх реалізації виникають певні обчислювальні труднощі, вони мають обмежену область стійкості та не можуть бути використані для розв'язку жорстких систем. Він пропонує нові чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь першого порядку, які не розв'язані відносно похідної. Ці методи базуються на дрібно-раціональних наближеннях вектор-функції розв'язку системи. Для побудови чисельних методів на базі формул дрібно-раціональних наближень більш вищих порядків необхідно вказати засіб визначення послідовності частинних сум ряду Тейлора від 1-го до p -го порядку точності. Якщо для визначення вказаних сум використовувати відомі методи типу Рунге-Кутта, то, використовуючи

формули дрібно-раціональних наближень, легко побудувати однокрокові дрібно-раціональні чисельні методи.

Висновки до розділу 1

Аналіз праць, присвячених наближеному розв'язку нестационарної задачі теплопровідності, дозволяє зробити наступні висновки.

1. Одним із найбільш широко використовуваних методів розв'язання нестационарних задач теплопровідності на даний час є метод скінченних елементів.

2. Основним недоліком класичних схем МСЕ є труднощі, що виникають в зв'язку з необхідністю розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь з великою кількістю рівнянь.

3. При розв'язанні задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь на загальну похибку великий вплив здійснює похибка заокруглення. Тому розробка методів, які використовують для досягнення заданої точності меншу кількість диференціальних рівнянь, є важливою задачею з теоретичної та практичної точок зору. До таких методів належить метод ЛІДР, який зводить нестационарну задачу теплопровідності з двома просторовими змінними до систем інтегро-диференціальних рівнянь. Тому актуальною є розробка схем МСЕ, які є подальшим розвитком методу ЛІДР з обчислювальної точки зору.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З
ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Метод скінченних елементів є одним з найбільш ефективних методів розв'язання крайових задач математичної фізики. При побудові структур наближеного розв'язку в МСЕ важливу роль відіграють розбиття області інтегрування на підобласті і представлення наближеного розв'язку в кожному з цих елементів розбиття в аналітичній формі, яка забезпечує необхідну гладкість наближеного розв'язку та можливість отримати наближення до точного розв'язку з його допомогою із заданою точністю. При цьому вважається, що наближений розв'язок повинен точно задовольняти граничним умовам задачі.

При чисельній реалізації МСЕ важливу роль відіграють також такі схеми МСЕ, які дозволяють точно задовольняти граничним умовам, ефективно обчислювати коефіцієнти відповідних рівнянь та здійснювати вибір адаптивних методів їх розв'язання. В цьому напрямку важливі результати були отримані І. Бабушкою та його колегами [3, 120, 121], В. Л. Рвачовим та його учнями і послідовниками [83 – 89], В. Г. Корнеєвим [35], а також авторами, які займалися розвитком МСЕ з використанням суперелементів [12, 98, 109].

Загальна теорія побудови операторів мішаної інтерполяції (blending interpolation) побудови функцій із заданими слідами на сторонах прямокутних та трикутних елементів, в тому числі з криволінійною стороною, що належить границі області інтегрування, була створена в працях О.М. Литвина [40, 41, 42, 44, 47] і названа ним теорією інтерлінації функцій. Великою перевагою цієї теорії є можливість побудови економних схем сплайн-інтерполяції функцій, яка для своєї побудови використовує асимптотично мінімальну кількість невідомих параметрів, необхідних для наближення функцій з потрібною точністю.

В працях [19, 38, 63] започатковано розробку методу розв'язання нестационарних задач теплопровідності з використанням сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації.

В даному розділі викладено результати теоретичного обґрунтування методу розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням сплайн-інтерлінації функцій.

2.1 Інтерлінація функцій. Основні твердження

В теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню і деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N на M ($M > 1$) m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхнях в R^n [41, 44, 47]. У випадку $m = 0$, $n \geq 1$ такі оператори наближення називаються інтерполяційними. У випадку $m = 1$, $n \geq 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається її слідами та слідами її нормальних

похідних $\frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $1 \leq |s| \leq N$, на M лініях і такі оператори

називають операторами інтерлінації (inter – між, line – лінія). У випадку $2 \leq m \leq n-1$, $n \geq 3$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ і

слідами її похідних $\frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $1 \leq |s| \leq N$, на M поверхнях в

R^n , і такі оператори наближення називають операторами інтерфлетації (inter – між, flat – плоска поверхня). Операція побудови зазначених операторів називається, відповідно, інтерлінацією або інтерфлетацією.

Наведемо основні твердження інтерлінації функцій.

Нехай $n, M \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $m, N \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – задані числа; $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ – задані m -вимірні ($0 \leq m < n$) множини в R^n ; $\varphi_{k,s}(x)|_{\Pi_k} = L_{k,s}f(x)|_{\Pi_k}$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$ – задані сліди деякої послідовності операторів $L_{k,s}f(x)$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$ на множинах $\Pi_k, k = \overline{1, M}$. Часто $L_{k,0}f(x) = f(x)$. Функція $f(x)$ може бути невідомою. Оператори $L_{k,s}f(x)$ можуть бути, наприклад, частинними похідними або нормальними похідними: $L_{k,s}f(x)|_{\Pi_k} = \frac{\partial^s f}{\partial v_k^s}|_{\Pi_k}$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$ (v_k – вектор нормалі до Π_k , якщо $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$). Диференціальні оператори $L_{k,s}f(x)$ можуть мати також більш загальний вигляд.

Означення 2.1 [47, с. 11]. Оператори

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = O(\{L_{k,s}\}; \{\Pi_k\}; \{\varphi_{k,s}\}; x)$$

називають операторами інтерфлетації, якщо

$$L_{\ell,q} O(\{\varphi_{k,s}\}; x)|_{\Pi_\ell} = \varphi_{\ell,q}(x)|_{\Pi_\ell}, \ell = \overline{1, M}; q = \overline{0, N}.$$

Оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ багатьох змінних за допомогою вказаної інформації. У випадку $m = 0$ множини $\Pi_k \in R^n$ є точками в R^n і сліди $\varphi_{k,s}(x)|_{\Pi_k}$ є значеннями функції $f(x)$ та її похідних в точках Π_k . Тоді оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називають інтерполяційними операторами на M точках. Якщо $m = 1$, $n \geq 2$, то множини Π_k є лініями в R^n і $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називаються операторами інтерлінації. У випадку $2 \leq m \leq n-1$, $n \geq 3$ $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називаються операторами інтерфлетації.

Якщо оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ лінійно залежать від слідів $\varphi_{k,s}(x)$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$, тобто

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^N L_{k,s}(\varphi_{k,s}; \{\Pi_k\}; x) h_{k,s}(x),$$

де $h_{k,s}(x) = h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ – деякі допоміжні функції, що не залежать від наближуваної функції $f(x)$, а залежать лише від параметрів геометричних об'єктів $\{\Pi_k\}$ і від типу операторів $L_{k,s}$, сліди яких $\varphi_{k,s}$ використовують для наближення, то такі оператори називають лінійними операторами інтерфлетації (інтерлінації, інтерполяції). В іншому випадку їх називають нелінійними операторами, або просто нелінійними інтерфлетантами (інтерлінантами, інтерполянтами).

Якщо допоміжні функції $h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ є раціональними, поліноміальними, тригонометричними функціями, або сплайнами тощо, то таку інтерфлетацію (інтерлінацію, інтерполяцію) називають відповідно раціональною, поліноміальною, тригонометричною, сплайн інтерфлетацією (інтерлінацією, інтерполяцією).

Сліди $\varphi_{k,s}(x)$ є функціями m змінних (параметрів), бо стільки змінних (параметрів) потрібно для визначення точки на m -вимірній поверхні Π_k .

Нехай задана функція $u = f(x, y)$ і система ліній $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0$ $k = \overline{1, m}$.

Означення 2.2. Слідом функції $u = f(x, y)$ на лінії $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0$ називаємо функцію однієї змінної (x , або y) $f_k(x)$, $f_k(y)$, яка у кожній точці цієї лінії Γ_k приймає такі ж значення, як і функція $u = f(x, y)$: $f|_{\Gamma_k} = f_k|_{\Gamma_k}$, $k = \overline{1, m}$.

Означення 2.3. Інтерлінацією функції $f(x, y)$ називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y)$ у точках між лініями $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0$, $k = \overline{1, m}$ за допомогою її слідів на цих лініях.

Приклад 2.1. Функція $f(x, y, t) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$, $t > 0$ задана своїми слідами на двох прямих: $L_1 : x = a_1$, $L_2 : y = a_2$. Її інтерлінант $Of(x, y, t)$ має властивості: $Of(x, y, t)|_{L_k} = T_k(\vec{x}, t)$, $k = \overline{1, 2}$, де $T_k(\vec{x}, t) = f(x, y, t)|_{L_k}$.

Оператор інтерлінації має вигляд:

$$Of(x, y, t) = O_1f + O_2f - O_1O_2f,$$

де

$$O_1f(x, y, t) = f(a_1, y, t) = T_1(y, t),$$

$$O_2f(x, y, t) = f(x, a_2, t) = T_2(x, t),$$

$$O_1O_2f(x, y, t) = f(a_1, a_2, t).$$

Приклад 2.2. Функція $f(x, y, t) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$, $t > 0$ задана своїми слідами на чотирьох прямих: $L_1 : x = x_1$, $L_2 : x = x_2$, $L_3 : y = y_1$, $L_4 : y = y_2$.

Оператор інтерлінації має вигляд:

$$O_{40}f(x, y, t) = (O_1 + O_2 - O_1O_2)f(x, y, t),$$

де

$$O_1f(x, y, t) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot f(x_1, y, t) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2, y, t),$$

$$O_2f(x, y, t) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot f(x, y_1, t) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot f(x, y_2, t),$$

$$O_1O_2f(x, y, t) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot O_2f(x_1, y, t) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot O_2f(x_2, y, t) =$$

$$= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \left[\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot f(x_1, y_1, t) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot f(x_1, y_2, t) \right] +$$

$$+ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \cdot f(x_2, y_1, t) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot f(x_2, y_2, t) \right].$$

$$O_{40} f(x_k, y, t) = f(x_k, y, t), \quad k = \overline{1, 2},$$

$$O_{40} f(x, y_\ell, t) = f(x, y_\ell, t), \quad \ell = \overline{1, 2}.$$

Розглянемо оператори поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих.

Нехай Γ_{1i_1} , $i_1 = \overline{1, M_1}$ та Γ_{2i_2} , $i_2 = \overline{1, M_2}$ – дві системи взаємно перпендикулярних прямих, які вважаємо паралельними осям координат Ox та Oy : $\Gamma_{1i_1} : x = x_{i_1}$, $i_1 = \overline{1, M_1}$, $\Gamma_{2i_2} : y = y_{i_2}$, $i_2 = \overline{1, M_2}$.

Нехай $\varphi_{i_1, s_1}(y)$, $s_1 = \overline{0, N}$ та $\psi_{i_2, s_2}(x)$, $s_2 = \overline{0, N}$ – дві системи функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної (x або y); $h_{1, i_1, s_1}(x) = h_{1, M_1, i_1, s_1}(x)$, $h_{2, i_2, s_2}(y) = h_{2, M_2, i_2, s_2}(y)$ – фундаментальні (базисні) поліноми Ерміта, тобто поліноми від змінних x , y степенів $M_1(N+1)-1$, $M_2(N+1)-1$ відповідно із такими властивостями (див. [47, с. 55]):

$$h_{1, i_1, s_1}^{(p_1)}(x_{i_1}) = \delta_{i_1, j_1} \delta_{s_1, p_1}, \quad i_1, j_1 = \overline{1, M_1}, s_1, p_1 = \overline{0, N},$$

$$h_{1, i_2, s_2}^{(p_2)}(y_{i_2}) = \delta_{i_2, j_2} \delta_{s_2, p_2}, \quad i_2, j_2 = \overline{1, M_2}, s_2, p_2 = \overline{0, N}.$$

Теорема [47, с. 55]. Якщо функції $\varphi_{i_1, s_1} \in C^{r-s_1}(R)$, $\psi_{i_2, s_2} \in C^{r-s_2}(R)$, $r \geq 2N$ задовольняють у точках перетину прямих Γ_{1i_1} та Γ_{2i_2} умови С. М. Нікольського $\Upsilon_i^{N, N}$, $i = (i_1, i_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $i_1 = \overline{1, M_1}$, $i_2 = \overline{1, M_2}$, $s_k = \overline{0, N}$, $k = 1, 2$ $\varphi_{i_1, s_1}^{(s_2)}(y_{i_2}) = \psi_{i_2, s_2}^{(s_1)}(x_{i_1}) = f_{i, s}$, то оператор $(M = (M_1, M_2))$

$$E_{MN}(x, y) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{s_1=0}^N h_{1, i_1, s_1}(y) + \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_2=0}^N h_{2, i_2, s_2}(x) \psi_{i_2, s_2}(x) - \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1, s_2=0}^N f_{i, s} h_{1, i_1, s_1}(x) h_{2, i_2, s_2}(y)$$

має такі властивості:

$$E_{MN}(x, y) = E_{MN} \left(\left\{ \varphi_{1, i_1, s_1}; \psi_{2, i_2, s_2} \right\}; x; y \right) \in C^{r-N} (R^2),$$

$$\left. \frac{\partial^{q_1} E_{MN}}{\partial x^{q_1}} \right|_{x=x_{i_1}} = \varphi_{i_1, q_1}(y), \quad 0 \leq q_1 \leq N, 1 \leq i_1 \leq M_1,$$

$$\left. \frac{\partial^{q_2} E_{MN}}{\partial x^{q_2}} \right|_{y=y_{i_2}} = \psi_{i_2, q_2}(x), \quad 0 \leq q_2 \leq N, 1 \leq i_2 \leq M_2.$$

При цьому, якщо $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $r \geq 2N + 2$ – довільна функція, для якої

$$\left. \frac{\partial^{q_1} f}{\partial x^{q_1}} \right|_{x=x_{i_1}} = \varphi_{i_1, q_1}(y), \quad \left. \frac{\partial^{q_2} f}{\partial x^{q_2}} \right|_{y=y_{i_2}} = \psi_{i_2, q_2}(x), \quad 0 \leq q_1, q_2 \leq N, 1 \leq i_1 \leq M_1, 1 \leq i_2 \leq M_2, \text{ то}$$

$$E_{MN} \left(\left\{ \varphi_{i_1, s_1}; \psi_{i_2, s_2} \right\}; x; y \right) = E_{MN} f(x, y) \text{ і для залишку } R_{MN} f(x, y) = (I - E_{MN}) f(x, y)$$

справедливе інтегральне зображення ($(\xi = (\xi_1, \xi_2))$):

$$R_{MN} f(x, y) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N h_{1, i_1, s_1}(x) h_{2, i_2, s_2}(y) \times \\ \times \int_{x_{i_1}}^x \int_{y_{i_2}}^y f^{(p)}(\xi) \frac{(x_{i_1} - \xi_1)^{p_1 - s_1 - 1}}{(p_1 - s_1 - 1)!} \frac{(y_{i_2} - \xi_2)^{p_2 - s_2 - 1}}{(p_2 - s_2 - 1)!} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\forall p = (p_1, p_2): N + 1 \leq p_1 \leq M_1(N + 1), N + 1 \leq p_2 \leq M_2(N + 1),$$

$$f^{(p)}(\xi) = f^{(p_1, p_2)}(\xi_1, \xi_2),$$

$$R_{MN} f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(p)}(\xi) \cdot G_{1, M_1, N, p_1}(x, \xi_1) \cdot G_{2, M_2, N, p_2}(x, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$G_{1, M_1, N, p_1}(x, \xi_1) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{s_1=0}^N h_{1, i_1, s_1}(x) \frac{(x_{i_1} - \xi_1)^{p_1 - s_1 - 1}}{(p_1 - s_1 - 1)!} \chi(x_{i_1}, x; \xi_1),$$

$$G_{2, M_2, N, p_2}(y, \xi_2) = \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_2=0}^N h_{2, i_2, s_2}(y) \frac{(y_{i_2} - \xi_2)^{p_2 - s_2 - 1}}{(p_2 - s_2 - 1)!} \chi(x_{i_2}, x; \xi_2),$$

$$\chi(a, b; t) = \begin{cases} 0, & t \notin [a, b], \\ 1, & a \leq t \leq b, \\ -1, & b \leq t < a. \end{cases}$$

2.2 Метод зведення до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (метод ЛІДР) для нестационарного рівняння теплопровідності

У [104] І. В. Сергієнком, В. В. Скопецьким, В. С. Дейнекою відзначено, що в теорії наближеного розв'язання стаціонарних та нестационарних початково-крайових задач все більше уваги приділяється зменшенню кількості арифметичних операцій (або знаходженню її оптимального числа), необхідної для відновлення розв'язку з потрібною точністю. У [63] для нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними І. В. Сергієнком та О. М. Литвиним запропоновано чисельну реалізацію методу зведення до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (методу ЛІДР), що вимагає розв'язування на порядок меншого числа звичайних диференціальних рівнянь (для досягнення тієї самої точності наближення), ніж класичний МСЕ. Вказаний ефект досягається за рахунок використання двох сіток (в обох випадках використовуються кусково-білінійні базисні функції або сплайни від двох змінних більш високого порядку).

Метод ЛІДР є одним із високоточних методів розв'язання граничних задач, який може бути ефективно використаний для знаходження наближених розв'язків цих задач у випадку областей складної форми (обмежених дугами відомих кривих). Загальна ідея методу ЛІДР полягає в наступному [47, с. 116]: область інтегрування розбивається на елементи – прямокутники і трикутники (граничні елементи можуть мати криволінійну сторону, яка є частиною границі). В кожному з цих елементів шуканий наближений розв'язок представляється у вигляді функцій, які забезпечують потрібний порядок диференційовності на лініях розділу різних елементів, а також забезпечують задовільнення граничних умов. Структура наближеного розв'язку залежить від деяких невідомих функцій однієї змінної (як x , так і y), а також від невідомих сталих. Тобто обидві змінні рівноправні. Ці невідомі функції і сталі знаходяться з вимоги, щоб функціонал енергії, відповідний даній граничній задачі, досягав

мінімуму, або з умови ортогональності нев'язки до відповідної системи функцій однієї та двох змінних.

У роботі [63] викладено метод ЛІДР, в якому використовується сплайн-інтерлінація функцій $u(x, y, t)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих, паралельних осям координат. Розглядається задача:

$$L[u(x, y, t)] := u'_t - (a_1(x, y)u'_x)'_x - (a_2(x, y)u'_y)'_y = f(x, y, t), \quad (2.1)$$

$$(x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \varphi_0(x, y)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.3)$$

На прикладі задачі (2.1) – (2.3) запропоновано алгоритм одержання системи інтегро-диференціальних рівнянь методу ЛІДР і його дискретна форма, яка є схемою МСЕ із спеціальним (нерегулярним) вибором сітки при розбитті області Ω на елементи (в схемі присутні дві схеми – з кроком $1/n$ і $1/n^2$). Поширення запропонованої методики на випадок областей Ω багатокутної форми, складеної із прямокутних та трикутних елементів, не потребує принципових змін. Нехай розв'язок задачі (2.1) – (2.3) належить до класу

$$u \in L_2^{2,2}(\Omega) = \left\{ u \in C^3(\bar{\Omega}) \mid u^{(p,q,0)}(x, y, t) \in L_2(\Omega) \forall t \geq 0 (0 \leq p, q \leq 2) \right\},$$

$$u^{(p,q,0)} = \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}.$$

Із [49] випливає, що функція

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) = & \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}, y, t\right) h(nx - k) + \sum_{\ell=0}^n u\left(x, \frac{\ell}{n}, t\right) h(ny - \ell) - \\ & - \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n u\left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}, t\right) h(nx - k) h(ny - \ell), \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $h(z) = 0,5[|z-1| - 2|z| + |z+1|]$, є кусково-білінійним (відносно змінних x і y) виразом, який збігається з функцією u на площинах, що створюють сітку з більшим кроком: $u_1(k'/n, y, t) = u(k'/n, y, t)$, $u_1(x, \ell'/n, t) = u(x, \ell'/n, t)$ ($0 \leq k', \ell' \leq n$). При цьому $\exists M(t) > 0$:

$$\|u(x, y, t) - u_1(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq n^{-4} M(t) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.5)$$

Наближений розв'язок задачі (2.1) – (2.3) методом ЛІДР шукається у вигляді:

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(y, t) h(nx - k) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \varphi_\ell(x, t) h(ny - \ell) - \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{k\ell}(t) h(nx - k) h(ny - \ell), \end{aligned} \quad (2.6)$$

де невідомі функції $\psi_k(y, t)$, $\varphi_\ell(x, t)$ задовольняють умови

$$\psi_k(0, t) = \psi_k(1, t) = 0, \quad \varphi_\ell(0, t) = \varphi_\ell(1, t) = 0, \quad (1 \leq k, \ell \leq n-1). \quad (2.7)$$

Звідси випливає, що (2.6) задовольняє граничні умови (2.2). Якщо ж для наближеного задовільнення початкової умови (2.3) покласти

$$\psi_k(y, 0) = \varphi(k/n, y), \quad \varphi_\ell(x, 0) = \varphi(x, \ell/n), \quad (2.8)$$

то для випадку, коли $\varphi(x, y) \in L_2^{2,2}(\Omega)$, буде допущена похибка

$$\|\varphi(x, y) - u_2(x, y, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq M_0 n^{-4}, \quad M_0 > 0.$$

Приходимо до такої системи для знаходження $\psi_k(y, t)$, $\varphi_\ell(x, t)$, $C_{k\ell}(t)$:

$$\int_0^1 [Lu_2(x, y, t) - f(x, y, t)] h(nx - k') dx = 0 \quad (k' = \overline{1, n-1}), \quad (2.9)$$

$$\int_0^1 [Lu_2(x, y, t) - f(x, y, t)] h(ny - \ell') dy = 0 \quad (\ell' = \overline{1, n-1}), \quad (2.10)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 [Lu_2(x, y, t) - f(x, y, t)] h(nx - k') h(ny - \ell') dx dy = 0 \quad (2.11)$$

$$(1 \leq k', \ell' \leq n-1).$$

Система рівнянь (2.9) – (2.11) розв'язується при умовах (2.7) – (2.8). Підставляючи її розв'язок у формулу (2.5), знайдемо наближений розв'язок задачі (2.1) – (2.3).

Якщо кожен з функцій $u(k/n, y, t)$, $u(x, \ell/n, t)$ в формулі (2.4) замінити її кусково-лінійним інтерліантом з кроком $\Delta = 1/n^2$

$$u(k/n, y, t) \approx \sum_{j=0}^{n^2} u(k/n, j/n^2, t) h(n^2y - j),$$

$$u(x, \ell/n, t) \approx \sum_{i=0}^{n^2} u(i/n^2, \ell/n, t) h(n^2x - i),$$

то при цьому буде допущена похибка, що задовольняє нерівність (2.5), а оператор (2.4) перетвориться в інтерліант

$$\begin{aligned} u_3(x, y, t) = & \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n^2} u(k/n, j/n^2, t) h(nx - k) h(n^2y - j) + \\ & + \sum_{\ell=0}^n \sum_{i=0}^{n^2} u(i/n^2, \ell/n, t) h(n^2x - i) h(ny - \ell) - \\ & - \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n u(k/n, \ell/n, t) h(nx - k) h(ny - \ell) \end{aligned} \quad (2.12)$$

із такими властивостями:

$$u_3(k/n, j/n^2, t) = u(k/n, j/n^2, t) \quad (k = \overline{0, n}; \quad j = \overline{0, n^2}),$$

$$u_3(i/n^2, \ell/n, t) = u(i/n^2, \ell/n, t) \quad (i = \overline{0, n^2}; \quad \ell = \overline{0, n}),$$

$$\|u(x, y, t) - u_3(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq n^{-1} M_1(t), \quad M_1(t) > 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тобто похибки наближення функції u оператором u_1 та інтерліантом u_3 мають однаковий порядок прагнення до нуля при $n \rightarrow \infty$ ($M(t)$ і $M_1(t)$ залежать лише від $u^{(2,2,0)}$, $u^{(2,0,0)}$, $u^{(0,2,0)}$). Таку ж швидкість прагнення до нуля при $n \rightarrow \infty$ має і залишок наближення u за допомогою інтерліанта

$$J(x, y, t) = \sum_{i=0}^{n^2} \sum_{j=0}^{n^2} u\left(\frac{i}{n^2}, \frac{j}{n^2}, t\right) h(n^2x - i) h(n^2y - j)$$

$$J\left(\frac{i'}{n^2}, \frac{j'}{n^2}, t\right) = u\left(\frac{i'}{n^2}, \frac{j'}{n^2}, t\right), \quad 0 \leq i', j' \leq n^2. \quad (2.13)$$

Оператор (2.13), який часто використовується в МСЕ, має приблизно n^4 значень функції для довільного моменту часу. А в формулі (2.12) використовується лише $2(n+1)(n^2+1) - (n+1)^2 \approx 2n^3$, тобто n^3 значень для довільного часу. Ця дуже важлива перевага формули (2.12) над формулою (2.13) використовується для побудови напівдискретної схеми методу ЛДР. У випадку МСЕ напівдискретного типу наближений розв'язок задачі (2.1) – (2.3) шукається у вигляді:

$$u_4(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) h(nx - k) h(n^2y - j) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) h(n^2x - i) h(ny - \ell) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) h(nx - k) h(ny - \ell),$$

де $C_{\mu,\nu}(t)$ – шукані функції. Функція u_4 задовольняє умову (2.2).

Вводиться позначення:

$$\varphi_{kn,j}(x, y) = h(nx - k) h(n^2y - j), \quad \varphi_{i,\ell n}(x, y) = h(n^2x - i) h(ny - \ell),$$

$$\varphi_{kn,\ell n}(x, y) = h(nx - k) h(n^2y - \ell n) + h(n^2x - kn) h(ny - \ell) - h(nx - k) h(ny - \ell).$$

Невідомі функції $C_{ij}(t)$ визначаються із системи ЗДР:

$$\left(\frac{\partial u_4}{\partial t}, \varphi_{k'n, j'} \right) (t) + [u_4, \varphi_{k'n, j'}] (t) = (f, \varphi_{k'n, j'}) (t) \quad (2.14)$$

$$(j' = \overline{1, n^2 - 1}; \quad j' \neq \ell n; \quad k', \ell = \overline{1, n - 1}),$$

$$\left(\frac{\partial u_4}{\partial t}, \varphi_{i', \ell'n} \right) (t) + [u_4, \varphi_{i', \ell'n}] (t) = (f, \varphi_{i', \ell'n}) (t) \quad (2.15)$$

$$(i' = \overline{1, n^2 - 1}; \quad i' \neq kn; \quad k, \ell' = \overline{1, n - 1}),$$

$$\left(\frac{\partial u_4}{\partial t}, \varphi_{k'n, \ell'n} \right) (t) + [u_4, \varphi_{k'n, \ell'n}] (t) = (f, \varphi_{k'n, \ell'n}) (t) \quad (2.16)$$

$$(k', \ell' = \overline{1, n - 1})$$

при таких початкових умовах $(k', \ell' = \overline{1, n - 1}; \quad i', j' = \overline{1, n^2 - 1})$:

$$C_{k'n, j'}(0) = \varphi\left(\frac{k'}{n}, \frac{j'}{n^2}\right), \quad C_{i', \ell'n}(0) = \varphi\left(\frac{i'}{n^2}, \frac{\ell'}{n}\right), \quad C_{k'n, \ell'n}(0) = \varphi\left(\frac{k'}{n}, \frac{\ell'}{n}\right). \quad (2.17)$$

Використано позначення:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 \, dx \, dy, \quad [u_1, \psi] = \iint_{\Omega} \left[a_1 \frac{\partial u_4}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u_4}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dx \, dy.$$

Початкову задачу (2.14) – (2.17) можна розв'язувати одним з відомих методів розв'язання задачі Коші для системи ЗДР. Але запис системи у вигляді трьох підсистем (2.14, 2.15, 2.16) дозволяє природним шляхом проводити розпаралелювання обчислень, що може привести до алгоритмів розв'язання нестационарних задач в реальному масштабі часу [66].

2.3 Інтерлінаційний метод скінченних елементів (ІМСЕ) розв'язання початково-крайових задач теплопровідності з двома просторовими змінними

В цьому підрозділі розглянемо метод скінченних елементів розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням формул сплайн-інтерполяції, побудованих на основі сплайн-інтерлінації функції $u(x, y, t)$ за просторовими змінними x, y . Суть методу полягає у представленні наближеного розв'язку у вигляді формул сплайн-інтерполяції за просторовими змінними з коефіцієнтами, що є функціями змінної t . Тому цей метод будемо називати інтерлінаційним методом скінченних елементів (ІМСЕ) розв'язання початково-крайових задач. Метод ґрунтується на заміні сплайнами слідів наближеного розв'язку у формулах інтерлінації, які використовуються для його представлення, і є скінченно-елементною реалізацією методу ЛДР розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Для обмеженої області $G \subset R^2$ розв'язуємо нестационарну задачу

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t), \quad (2.18)$$

$$(x, y) \in G, t > 0$$

при наступних початковій і граничній умовах:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in G, G \subseteq \Pi, \Pi = [a, b] \times [c, d], \quad (2.19)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{\partial G} = \varphi(x, y, t) \Big|_{\partial G}. \quad (2.20)$$

Вважаємо: $p_1(x, y), p_2(x, y) \in C^1(G), q(x, y) \in C(G), f(x, y, t) \in C(G \times R^+), R^+ = [0, \infty)$ і розв'язок поставленої задачі задовольняє умови: $u(x, y, t)$ має неперервні похідні $u^{(r, s, 0)}(x, y, t) \in C(G \times R^+) \forall t \geq 0, 0 \leq r, s \leq 2$ за змінними x та

$y; \frac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$. Крім того, вважаємо, що гранична і початкова умови є узгодженими: $\varphi(x, y, 0)|_{\partial G} = u_0(x, y)|_{\partial G}$.

Стосовно області $G \subset R^2$, в якій знаходиться розв'язок задачі, будемо вважати, що вона обмежена границею, яка є об'єднанням дуг відомих кривих. При перетині кривих утворюються кутові точки, кути між кривими в кутових точках не вироджуються в нуль, тобто $\gamma \geq \gamma_{\min} > 0$. Вхідний кут $\alpha \leq \alpha_{\max} < 2\pi$. Загальна теорія поведінки точних класичних розв'язків еліптичних та параболічних рівнянь викладена в роботах В. А. Кондратьєва [33, 34].

Розглянемо загальний метод побудови функції $u(x, y, t)$, яка точно задовольняє умовам Діріхле на границі довільної області $G \subset R^2$. Для побудови структур розв'язків початково-крайових задач використовуємо метод [47] побудови функцій двох змінних x, y , які точно задовольняють граничним умовам на границі двовимірних областей складної форми, при цьому змінну t вважаємо параметром.

З практичної точки зору важливою є побудова операторів інтерлінації на лініях ректангуляції та триангуляції в областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих. Вважаємо, що $G \subset R^2$ – обмежена область на площині, границя якої ∂G є об'єднанням дуг відомих кривих. Припустимо, без втрати загальності, що область G повністю розміщена в прямокутнику $[a, b] \times [c, d]$.

Розіб'ємо G на підобласті прямими $x = x_k, k = \overline{0, M_1}$ та $y = y_l, l = \overline{0, M_2}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b$; $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$. Ці підобласті можуть бути прямокутниками $R_{i,j}^{(0)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$ або чотирикутниками

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G, \quad R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G, \quad R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G,$$

в яких три сторони паралельні осям координат, а одна – криволінійна (взагалі кажучи) сторона – є частиною границі області ∂G . Крім того, підобласті, на які розбивається область G , можуть бути трикутниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) > 0\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) > 0\},$$

в яких дві сторони паралельні осям координат, а одна із сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі ∂G області G (i, j – номер точки, з якою співпадає прямиий кут).

Напишемо формулу для інтерлінації на чотирикутнику $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G$, одна із сторін якого є криволінійною частиною границі ∂G області G :

$$O_{i,j}^{(1)} F(x, y, t) = (P_1 + P_2 - P_1 P_2) F(x, y, t),$$

$$P_1 F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} F(x, y_{j+1}(x), t),$$

$$P_2 F(x, y, t) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} F(x_i, y, t) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} F(x_{i+1}, y, t),$$

$$P_1 P_2 F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} P_2 F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} P_2 F(x, y_{j+1}(x), t).$$

Теорема 2.1. Оператор $OR_{i,j}^{(1)} F(x, y, t)$ інтерлінує функцію $F(x, y, t) \in C(R_{i,j}^{(1)})$ на границі чотирикутника $R_{i,j}^{(1)}$ з однією криволінійною стороною:
 $OR_{i,j}^{(1)} F(x, y, t) = F(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial R_{i,j}^{(1)}$, тобто $OR_{i,j}^{(1)} F(x_q, y, t) = F(x_q, y, t)$, $q = i, i+1$;
 $OR_{i,j}^{(1)} F(x, y_j, t) = F(x, y_j, t)$, $OR_{i,j}^{(1)} F(x, y_{j+1}(x), t) = F(x, y_{j+1}(x), t) \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Аналогічно будуються інтерлінанти, що інтерлінують функцію $F(x, y, t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(2)}$, $R_{i,j}^{(3)}$, $R_{i,j}^{(4)}$ з криволінійними сторонами.

Напишемо тепер формулу для інтерлінації на прямокутному трикутнику з криволінійною гіпотенузою (тобто на трикутнику з катетами, паралельними осям координат, і криволінійною гіпотенузою).

Розглянемо прямокутний трикутник T з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ і гіпотенузою AB , яка визначається рівнянням $f(x) + g(y) = 1$, де функції $f(x)$, $g(y)$ неперервні і монотонні на $[0,1]$ і задовольняють умови $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

Теорема 2.2. Нехай $F(x, y, t) \in C(T)$, $P_1 F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t)$, $P_2 F(x, y, t) = F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)$.

Тоді оператор

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y, t) &= (P_1 \oplus P_2) F(x, y, t) := \\ &:= (P_1 + P_2 - P_1 P_2) F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) + \\ &+ F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) - f(x) \left[F(0, y, t) + F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) - F(0, 0, t) \right] - \\ &- g(y) \left[F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(x, 0, t) - F(0, 0, t) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

інтерлінує функцію $F(x, y, t)$ на трьох сторонах трикутника T , тобто

$$P_{12} F(x, 0, t) = F(x, 0, t), \quad P_{12} F(0, y, t) = F(0, y, t), \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (2.22)$$

$$P_{12} F(x, y, t) = F(x, y, t), \quad \text{якщо } f(x) + g(y) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.23)$$

Доведення. Напишемо формулу (2.21) у формі

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y, t) &= (1 - f(x) - g(y)) \left[F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) \right] + \\ &+ f(x) \left[F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) + F(x, 0, t) \right] + \\ &+ g(y) \left[F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(0, y, t) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Якщо покласти у формулі (2.24) послідовно $y = 0$, $x = 0$, отримаємо :

$$P_{12}F(x, 0, t) = (1 - f(x))F(x, 0, t) + f(x) \left[F(f^{-1}(1), 0, t) - F(f^{-1}(1), 0, t) + F(x, 0, t) \right] = F(x, 0, t),$$

$$P_{12}F(0, y, t) = (1 - g(y))F(0, y, t) + g(y) \left[F(0, g^{-1}(1), t) - F(0, g^{-1}(1), t) + F(0, y, t) \right] = F(0, y, t).$$

Отже, співвідношення (2.22) доведено.

Підставивши $y = g^{-1}(1 - f(x))$ у формулу (2.24), отримаємо:

$$\begin{aligned} P_{12}F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) &= \\ &= f(x) \left[F(f^{-1}(1 - g(g^{-1}(1 - f(x))))), g^{-1}(1 - f(x)), t) - \right. \\ &\quad \left. - F(f^{-1}(1 - g(g^{-1}(1 - f(x))))), 0, t) + F(x, 0, t) \right] + \\ &+ g(g^{-1}(1 - f(x))) \left[F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) \right] = \\ &= f(x) \left[F(f^{-1}(f(x)), g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(f^{-1}(f(x)), 0, t) + F(x, 0, t) \right] + \\ &\quad + (1 - f(x)) \left[F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) \right] = \\ &= f(x) \left[F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(x, 0, t) + F(x, 0, t) \right] + \\ &\quad + (1 - f(x)) \left[F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) \right] = F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t). \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться $P_{12}F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) = F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t)$.

Таким чином, доведено і властивість (2.23).

Теорему 2.2 доведено.

Теорема 2.3. Хай оператори $OR_{i,j}^{(q)}F(x, y, t)$, $q = 0, 1, \dots, 4$ інтерлінують функцію $F(x, y, t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(q)}$, $q = 0, 1, \dots, 4$, а оператори $OT_{i,j}^{(q)}F(x, y, t)$, $q = 1, \dots, 4$ інтерлінують функцію $F(x, y, t)$ на сторонах

трикутників $T_{i,j}^{(q)} \subset G$ з криволінійною (взагалі кажучи) гіпотенузою (означених вище).

$$\text{Тоді оператор } O_G F(x, y, t) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)} F(x, y, t), & (x, y) \in R_{i,j}^{(q)}, q = 0 \vee 1 \vee \dots \vee 4 \\ OT_{i,j}^{(q)} F(x, y, t), & (x, y) \in T_{i,j}^{(q)}, q = 1 \vee \dots \vee 4 \end{cases}$$

$\forall t \geq 0$ інтерлінує функцію $F(x, y, t)$ на прямих $x = x_k \in [a, b]$, $y = y_i \in [c, d]$, а також на границі ∂G довільної області G , тобто $O_G F(x_k, y, t) = F(x_k, y, t)$, $O_G F(x, y_i, t) = F(x, y_i, t)$, $O_G F(x, y, t) = F(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$. При цьому $O_G F(x, y, t) \in C(G) \quad \forall F(x, y, t) \in C(G) \quad \forall t \geq 0$. Це дозволяє стверджувати, що $O_G F(x, y, t) \in W_2^1(G) \quad \forall t \geq 0$, оскільки

$$\begin{aligned} & \iint_G \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ & = \sum_{R_{ij}^{(q)} \subset G} \iint_{R_{ij}^{(q)}} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ & + \sum_{T_{ij}^{(q)}} \iint_{T_{ij}^{(q)} \subset G} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy < \infty. \end{aligned}$$

Доведення. Той факт, що $O_G F(x, y, t) \in C(\bar{G}) \quad \forall t \geq 0$ витікає з того, що при побудові операторів $OR_{i,j}^{(q)} F(x, y, t)$ і $OT_{i,j}^{(q)} F(x, y, t)$, в кожному із елементів $R_{i,j}^{(q)}$, $T_{i,j}^{(q)}$ оператор $O_G F$ представляється у вигляді формули інтерлінації, яка на границі між елементами $R_{i,j}^{(q)}$, $T_{i,j}^{(q)}$ використовує однакові сліди, тобто при переході від одного елемента до другого зберігається неперервність. В той же час в кожному з цих елементів відповідна формула інтерлінації є неперервною за побудовою (у припущенні, що $F \in C(\bar{G})$, отримуємо $F(x_k, y, t) \in C(R)$, $F(x, y_i, t) \in C(R) \quad \forall t \geq 0$).

Той факт, що формула $O_G F(x, y, t)$ задовольняє відповідним інтерлінаційним умовам на лініях $x = x_k$ та $y = y_j$, витікає з того, що за побудовою оператори $OR_{i,j}^{(q)} F(x, y, t)$ і $OT_{i,j}^{(q)} F(x, y, t)$ на границі своїх елементів мають сліди, які є слідами функції $F(x, y, t)$, тобто $F(x_k, y, t)|_{y=y_i} = F(x, y_j, t)|_{x=x_k} \quad \forall t \geq 0$.

Теорему 2.3 доведено.

Зауваження 2.1. Якщо нам невідомі сліди $F(x_k, y, t) = \varphi_k(y, t)$, $F(x, y_i, t) = \psi_i(x, t)$, то їх можна замінити на деякі функції (поліноми, сплайни тощо) з невідомими параметрами. В результаті $O_G F(x, y, t)$ перетвориться на функцію, що збігається з функцією $F(x, y, t)$ на границі ∂G області G незалежно від вибору вказаних вище параметрів. Такого типу функції можна використовувати для наближення функції $F(x, y, t)$, виходячи з тих або інших вимог стосовно вибору невідомих параметрів.

Відносно інтерлінації на трикутнику мають місце наступні твердження.

Теорема 2.4. Нехай

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y, t) = & (1 - f(x) - g(y)) [F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)] + \\ & + f(x) [F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) + F(x, 0, t)] + \\ & + g(y) [F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(0, y, t)]. \end{aligned}$$

Тоді для залишку $R_{12} F(x, y, t) = (I - P_{12}) F(x, y, t) \quad \forall F \in C^{1,1}(T)$ виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} R_{12} F(x, y, t) = & (1 - f(x) - g(y)) \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\ & - f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Доведення. Запишемо рівності:

$$F(x, y, t) = F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) + \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad \forall t \geq 0, \quad (2.26)$$

$$F(x, y, t) = F(f^{-1}(1-g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1-g(y)), 0, t) + F(x, 0, t) - \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad \forall t \geq 0 \quad (2.27)$$

$$F(x, y, t) = F(x, g^{-1}(1-f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1-f(x)), t) + F(0, y, t) - \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad \forall t \geq 0. \quad (2.28)$$

Запишемо тотожність $F(x, y, t) \equiv (1-f(x)-g(y))F(x, y, t) + f(x)F(x, y, t) + g(y)F(x, y, t)$ і підставимо замість $F(x, y, t)$ у перший, другий і третій доданки відповідно її вирази з рівностей (2.26), (2.27) і (2.28):

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= (1-f(x)-g(y)) \left[F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) + \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] + \\ &+ f(x) \left[F(f^{-1}(1-g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1-g(y)), 0, t) + F(x, 0, t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] + \\ &+ g(y) \left[F(x, g^{-1}(1-f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1-f(x)), t) + F(0, y, t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] = \\ &= (1-f(x)-g(y)) [F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)] + \\ &+ f(x) [F(f^{-1}(1-g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1-g(y)), 0, t) + F(x, 0, t)] + \\ &+ g(y) [F(x, g^{-1}(1-f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1-f(x)), t) + F(0, y, t)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - f(x) - g(y)) \cdot \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\
& - f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = \\
& = P_{12} F(x, y, t) + (1 - f(x) - g(y)) \cdot \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\
& - f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned}
R_{12} F(x, y, t) &= (1 - P_{12}) F(x, y, t) = (1 - f(x) - g(y)) \cdot \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\
& - f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

тобто отримали рівність (2.25).

Теорему 2.4 доведено.

Наслідок 2.1. Справедлива рівність

$$P_{12} F(x, y, t) = F(x, y, t) \quad \forall F(x, y, t) = \varphi(x, t) + \psi(y, t) \quad \forall t \geq 0,$$

де $\varphi(x, t), \psi(y, t) \in C^1[0, 1] \quad \forall t \geq 0$ – довільні функції двох змінних.

Доведення випливає з того, що $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi(x, t) + \psi(y, t)) \equiv 0$, завдяки чому

$$R_{12} (\varphi(x, t) + \psi(y, t)) = 0; \text{ отже, } P_{12} (\varphi(x, t) + \psi(y, t)) = \varphi(x, t) + \psi(y, t) \quad \forall t \geq 0.$$

Наведемо два важливих приклади.

Приклад 2.3. В методі скінченних елементів при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку областей складної форми дуже важливим є питання задовільнення крайовим

умовам (особливо неоднорідним). У таких задачах використання операторів інтерлінації функцій є необхідним.

Приклад 2.4. Використання операторів інтерлінації функцій є корисним також у методі найменших квадратів при наближенні функції за допомогою скінченної кількості її значень у внутрішніх точках області G і за допомогою її слідів на дугах відомих кривих всередині області G або таких кривих, що їхнє об'єднання є границею області G тощо. Слід підкреслити, що класичний варіант методу найменших квадратів для наближення функцій двох змінних використовує лише значення функції у деякій системі точок (або деяку іншу систему функціоналів від наближуваної функції) і не використовує сліди наближуваної функції на деяких лініях. Очевидно, така інформація як сліди наближуваної функції на деякій системі ліній є значно більш інформативною, але до появи інтерлінації функцій дослідники не мали змоги її використати.

З огляду на це наведемо ще два твердження.

Теорема 2.5. Нехай G – прямокутний трикутник з криволінійною гіпотенузою ∂G , $G = \{x \geq 0, y \geq 0, f(x) + g(y) \leq 1\}$ і $F(x, y, 0) = \varphi(x, y)$. Тоді функція $H(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$, де $U(x, y, t) = P_2 F(x, y, t)$, задовольняє умови $H(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ та $H(x, y, t) = U(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$, $\forall t \geq 0$ ($F(x, y, t)$ – довільна неперервна в G функція).

Доведення. Дійсно, згідно з припущенням, $\varphi(0, y) = U(0, y, 0) = F(0, y, 0)$, $\varphi(x, 0) = U(x, 0, 0) = F(x, 0, 0)$, $\varphi(x, g^{-1}(1 - f(x))) = U(x, g^{-1}(1 - f(x)), 0) = F(x, g^{-1}(1 - f(x)), 0)$. Тому

$$H(x, y, 0) = \varphi(x, y) + U(x, y, 0) - U(x, y, 0) = \varphi(x, y);$$

$$H(0, y, t) = \varphi(0, y) + U(0, y, t) - U(0, y, 0) = U(0, y, t);$$

$$H(x, 0, t) = \varphi(x, 0) + U(x, 0, t) - U(x, 0, 0) = U(x, 0, t);$$

$$H(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) = \varphi(x, g^{-1}(1 - f(x))) + U(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - U(x, g^{-1}(1 - f(x)), 0) = U(x, g^{-1}(1 - f(x)), t).$$

Теорему 2.5 доведено.

Наслідок 2.2. Функція $u(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$ є точним розв'язком початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad (2.29)$$

$$t > 0, (x, y) \in G,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in G,$$

$$u(x, y, t) = U(x, y, t), (x, y) \in \partial G$$

за умови, що

$$f(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.30)$$

$$U(x, y, t) = P_{12} F(x, y, t), F(x, y, t) \in C^{(1,1,0)}(G).$$

Доведення отримується використанням теореми 2.5 та безпосередньою підстановкою $F(x, y, t)$ в рівняння (2.29) і врахуванням рівності (2.30).

2.4 Оцінка похибки ІМСЕ

Розглянемо для обмеженої області $G \subset R^2$ нестационарну задачу теплопровідності

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t), \quad (2.31)$$

$$(x, y) \in G, t > 0$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in G, G \subseteq \Pi, \Pi = E^2, E = [0, 1], \quad (2.32)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = \varphi(x, y, t)|_{\partial G}. \quad (2.33)$$

Вважаємо: $p_1(x, y), p_2(x, y) \in C^1(G), q(x, y) \in C(G), f(x, y, t) \in C(G \times R^+)$, $R^+ = [0, \infty)$ і розв'язок поставленої задачі задовольняє умови: 1) $u(x, y, t)$ має неперервні похідні до 2-го порядку за змінними x та y $u^{(p, q, 0)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), \forall t \geq 0, 0 \leq p, q \leq 2$; 2) $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$. Крім того, вважаємо, що гранична і початкова умови є узгодженими: $\varphi(x, y, 0)|_{\partial G} = u_0(x, y)|_{\partial G}$.

Замінімо задачу (2.31) – (2.33) відповідною задачею з однорідними початковою і граничною умовами. Для цього введемо замість функції $u(x, y, t)$ функцію $v(x, y, t)$ таким чином:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + \varphi(x, y, t) + u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0).$$

Функція $v(x, y, t)$, означена таким чином, задовольняє диференціальне рівняння $Lv(x, y, t) = f(x, y, t) - L\varphi(x, y, t) - L(u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0))$ та однорідні початкову і граничну умови $v(x, y, 0) = 0, v(x, y, t)|_{\partial G} = 0$,

$$u(x, y, t) \in C^{2,2,1}(G \times R^+) = \left\{ v : v^{(p, q, 1)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), 0 \leq p, q \leq 2 \right\}.$$

Якщо u – побудована вказаним методом функція, то вона є точним розв'язком відповідної початково-крайової задачі. Далі вважаємо початкову та граничну умови однорідними.

Введемо оператор-інтерліант

$$\begin{aligned} Of(x, y, t) = & \sum_{i=0}^m h(mx - i) f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) + \sum_{j=0}^n h(ny - j) f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) - \\ & - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j), \end{aligned}$$

який має властивості: $Of\left(\frac{i}{m}, y, t\right) = f\left(\frac{i}{m}, y, t\right)$, $Of\left(x, \frac{j}{n}, t\right) = f\left(x, \frac{j}{n}, t\right)$, $i = \overline{0, m}$,
 $j = \overline{0, n}$.

Похибка наближення функції $f(x, y, t) \in C^{2,2,\infty}(G \times R^+)$ за допомогою оператора-інтерлінанта (при $(x, y) \in E$):

$$|f(x, y, t) - Of(x, y, t)| = O\left(\frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) = O(\Delta^4), \quad \Delta = \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Замінімо у формулі оператора-інтерлінанта кожен з функцій $f\left(\frac{i}{m}, y, t\right)$,
 $f\left(x, \frac{j}{n}, t\right)$ її відповідним інтерполянтom за просторовими змінними

$$f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) \approx A_{1i}f(y, t) = \sum_{\ell=0}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2y - \ell),$$

$$f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) \approx A_{2j}f(x, t) = \sum_{k=0}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2x - k)$$

з похибками

$$\left|f\left(\frac{i}{m}, y, t\right) - A_{1i}f(y, t)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \forall y \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

$$\left|f\left(x, \frac{j}{n}, t\right) - A_{2j}f(x, t)\right| = O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad \forall x \in [0, 1], \quad t \geq 0.$$

В результаті отримуємо оператор:

$$Jf(x, y, t) = \sum_{i=0}^m h(mx - i) A_{1i}f(y, t) + \sum_{j=0}^n h(ny - j) A_{2j}f(x, t) - \\ - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j),$$

який наближує функцію $f(x, y, t)$ з похибкою $|f(x, y, t) - Jf(x, y, t)| = O(\Delta^4)$
 $\forall t \geq 0$.

В більш детальному записі маємо інтерполянт:

$$\begin{aligned}
Jf(x, y, t) &= \sum_{i=0}^m h(mx - i) \sum_{\ell=0}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2 y - \ell) + \\
&+ \sum_{j=0}^n h(ny - j) \sum_{k=0}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2 x - k) - \\
&- \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) h(mx - i) h(ny - j) = \\
&= \sum_{i=0}^m h(mx - i) \sum_{\ell=0, \ell \neq 0, n, 2n, \dots, n^2}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) h(n^2 y - \ell) + \\
&+ \sum_{j=0}^n h(ny - j) \sum_{k=0, k \neq 0, m, 2m, \dots, m^2}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) h(m^2 x - k) + \\
&+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, t\right) [h(mx - i) h(n^2 y - jn) + \\
&+ h(ny - j) h(m^2 x - im) - h(mx - i) h(ny - j)],
\end{aligned}$$

який має наступні властивості:

$$\begin{aligned}
Jf\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right) &= f\left(\frac{i}{m}, \frac{\ell}{n^2}, t\right), \quad i = \overline{0, m}; \ell = \overline{0, n^2}, \\
Jf\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right) &= f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}, t\right), \quad k = \overline{0, m^2}; j = \overline{0, n}.
\end{aligned}$$

Цей інтерполянт наближує функцію $f(x, y, t)$ з похибкою $O(\Delta^4) \forall t \geq 0$.

Отже, порядок похибки відносно $\Delta \rightarrow 0$ такий же, як і порядок похибки наближення за допомогою оператора-інтерліанта

$$|f(x, y, t) - Jf(x, y, t)| = O(\Delta^4), \quad (x, y) \in E \quad \forall t \geq 0.$$

Теорема 2.6. Якщо $u(x, y, t)$ – точний розв’язок задачі (2.31) – (2.33) і $u \in C^{2,2}(E^2) \forall t \geq 0$, то знайдена методом ЛІДР функція u_2 буде наближувати точний розв’язок u з такою похибкою: $\exists M_2(t) > 0: \|u - u_2\|_{C(\Omega)} \leq M_2(t) \Delta_1^2 \Delta_2^2 = O(\Delta^4) \forall t \geq 0$, де $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$, $\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq m} \{\Delta x_k\}$, $\Delta_2 = \max_{1 \leq \ell \leq n} \{\Delta y_\ell\}$.

Доведення. Для спрощення доведення будемо вважати граничну умову однорідною. Застосовуючи до рівняння (2.31), граничних та початкових умов (2.32) – (2.33) інтегральне перетворення Лапласа з параметром p

$$\tilde{u}(x, y, p) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-pt} dt,$$

отримаємо для функції \tilde{u} граничну задачу:

$$L_1[\tilde{u}(x, y, p)] := p\tilde{u} - (p_1(x, y)\tilde{u}'_x)'_x - (p_2(x, y)\tilde{u}'_y)'_y + q(x, y)\tilde{u} = \quad (2.34)$$

$$= \tilde{f}(x, y, p) + u_0(x, y), \quad (x, y) \in E^2 = [0, 1]^2 \quad \forall p,$$

$$\tilde{u}(x, y, p) = 0, \quad (x, y) \in \partial G. \quad (2.35)$$

Таким чином, ми прийшли до еліптичної задачі (2.34) – (2.35).

Вважаємо, що $a(u, v) = \iint_G [p_1 u'_x v'_x + p_2 u'_y v'_y + (p + q)uv] dx dy \in V$ –

еліптична, неперервна, симетрична білінійна форма рівняння (2.34), яка задовольняє умови

$$\exists \rho(p) > 0, \quad M_4(\lambda): a(v, v) \geq \rho \|v\|_{W_2^1(G)}^0, \quad a(u, v) \leq M_4 \|u\|_{W_2^1(G)}^0 \|v\|_{W_2^1(G)}^0$$

$$(u, v \in W_2^1(G) \forall p).$$

Тоді, якщо \tilde{u}_2 – наближений розв’язок задачі (2.34) – (2.35), знайдений методом ЛІДР, то справедливе таке узагальнення леми Сеа [109]:

$$\exists K(p) > 0 : \|\tilde{u} - \tilde{u}_2\|_{C(G)} \leq K(p) \inf \| \tilde{u} - w \|_{C(G)}. \quad (2.36)$$

Тут \inf береться за функціями $w \in V$, де V – нескінченно-вимірний лінійний простір функцій, що визначаються оператором J ,

$$V = \{w = Jv : v(x, y, p) \in C^{2,2}(G), v|_{\partial G} = 0 \forall p\}.$$

Якщо виконуються умови відносно білінійної форми $a(u, v)$, та $u \in C^{2,2}(E^2)$, то для множника справа у формулі (2.36) можемо написати [44]:

$$\|\tilde{u} - w\|_{C(G)} \leq C(p) \cdot \Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2, C(p) > 0 \forall p, \quad (2.37)$$

оскільки функція $w(x, y, p)$ будується у вигляді, що має ті ж самі сліди на лініях інтерлінації, що і функція $\tilde{u}(x, y, p)$. Це означає, що похибка $\tilde{u} - \tilde{w}$ наближення функції $\tilde{u}(x, y, p)$ за допомогою функції $\tilde{w}(x, y, p)$ буде визначатись для кожного значення параметра p формулою для оцінки похибки інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих [44, с. 167]. Враховуючи це, можна записати:

$$u(x, y, t) - w(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(y) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y u^{(2,2,0)}(\xi, \eta, t) (x - \xi)(y - \eta) d\xi d\eta,$$

звідки у зображеннях отримуємо рівність

$$\tilde{u}(x, y, p) - \tilde{w}(x, y, p) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(y) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y \tilde{u}^{(2,2,0)}(\xi, \eta, p) (x - \xi)(y - \eta) d\xi d\eta,$$

а також нерівність

$$\|\tilde{u}(\cdot, \cdot, p) - \tilde{w}(\cdot, \cdot, p)\| \leq \|\tilde{u}^{(2,2,0)}(\cdot, \cdot, p)\| \cdot \Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2 \cdot C, C > 0.$$

З урахуванням нерівностей (2.36) і (2.37) можна стверджувати, що для наближеного розв'язку $\tilde{u}_2(x, y, p)$, знайденого методом ЛІДР, буде виконуватися нерівність

$$\exists M_2(p) > 0: \|\tilde{u} - \tilde{u}_2\|_{C(G)} \leq M_2(p) \Delta_1^2 \Delta_2^2 \quad \forall p,$$

$$M_2(p) = K(p) \cdot C(p)$$

за умови, що задача Коші для системи інтегро-диференціальних рівнянь інтерлінаційного методу розв'язується точно.

Теорему 2.6 доведено.

Таким чином, враховуючи те, що в ІМСЕ всі сліди $U(x_k, y, t)$ та $V(x, y_\ell, t)$ замінюються сплайнами за змінними x та y , в ІМСЕ буде зберігатися та ж сама велика точність, що і в методі ЛІДР.

Зауваження 2.2. При розв'язанні задачі (2.31) – (2.33) класичним МСЕ з кусково-лінійними допоміжними функціями похибка наближеного розв'язку u_1 (при тому самому розбитті області G на елементи) задовольнятиме таку нерівність: $\exists M_1(t) > 0: \|u - u_1\|_{C(G)} \leq M_1(t) \max\{\Delta_1^2, \Delta_2^2\} \quad \forall t \geq 0$.

Отже, інтерлінаційний МСЕ вимагає для досягнення точності $\varepsilon = O(\Delta^4)$ розбиття області інтегрування на $N = O(n^2 m^2) = O(\Delta^{-2}) = (\Delta = \varepsilon^{1/4}) = O(\varepsilon^{-1/2})$ елементів, а класичний МСЕ вимагає для досягнення тієї самої точності розбиття області інтегрування на $N_2 = O(n^4 m^4) = O(\Delta^{-4}) = (\Delta = \varepsilon^{1/4}) = O(\varepsilon^{-1})$ елементів. Тобто в класичному МСЕ кожену сторону області G треба розбивати не на $n_1 = O(n)$ відрізків, а на $n_2 = O(n^2)$ відрізків.

Зауваження 2.3. Якщо у формулі для $w(x, y, p)$ сліди на лініях інтерлінації замінимо сплайн-інтерполяційними формулами, які наближують сліди теж з похибкою $O(\Delta^4)$, то отримуємо схеми МСЕ, які для кожного p матимуть ту ж саму за порядком похибку, що і метод ЛІДР.

Висновки до розділу 2

У розділі викладено метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням сплайн-інтерлінації функцій.

1. Наведено основні твердження теорії інтерлінації функцій, їх інтерлінаційні властивості. Викладено основні твердження методу ЛІДР.

2. Викладено основні теоретичні твердження методу ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними, сформульовано та доведено теореми.

3. Досліджено оцінку похибки запропонованого методу, доведено теорему про оцінку похибки ІМСЕ.

4. Використання сплайн-інтерлінації функцій дозволяє конструювати наближений розв'язок крайової задачі у вигляді формул, які точно задовольняють граничним умовам на границі областей складної форми. При цьому структура наближеного розв'язку буде мати при заданому розбитті на елементи похибку $O(\varepsilon^2)$, якщо класична сплайн-інтерполяція має точність $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при кожному фіксованому значенні часу t .

5. Використання формул інтерполяції, побудованих на основі сплайн-інтерлінації, дозволяє зберегти високу точність $O(\varepsilon^2)$, яка властива операторам сплайн-інтерлінації. Це означає, що для отримання розв'язку із точністю $O(\varepsilon^2)$ можна використовувати меншу кількість вузлів, тобто можна розв'язувати системи ЗДР менших порядків (порівняно з класичною схемою МСЕ) для досягнення однакової точності.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах [45, 61, 62, 65].

РОЗДІЛ 3

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІМСЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

3.1 Деякі аспекти нумерації вузлів у запропонованому ІМСЕ

Основними етапами застосування МСЕ є наступні [108]:

- 1) дискретизація задачі, тобто представлення області визначення у вигляді сукупності скінченних елементів, взаємопов'язаних у вузлових точках. При цьому границі зовнішніх елементів апроксимують в сукупності границю області в цілому;
- 2) вибір базисних функцій для представлення наближеного розв'язку початково-крайової задачі в кожному елементі, які входять в систему ЗДР;
- 3) отримання матриць і векторів елементів;
- 4) формування глобальних матриць і глобального вектора для всієї області визначення;
- 5) розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь для вузлових функцій;
- 6) розрахунок найменшого розв'язку, що залежить від вузлових функцій.

Першим етапом скінченно-елементної процедури є розбиття області, зайнятої тілом, на елементи. Дискретизація області (тіла) включає: вибір форми елементів, завдання розмірів і кількості елементів, нумерацію елементів і вузлів. При цьому елементи, які апроксимують область в цілому, можуть бути різними як за формою (наприклад, трикутними і чотирикутними), так і за розмірами.

Нумерація вузлів елементів (глобальна нумерація вузлів) [98] – наступна процедура етапу виділення скінченних елементів. Нумерація елементів не впливає на обчислювальні аспекти МСЕ і тому являє собою просту процедуру. Порядок нумерації вузлів має важливе значення, оскільки впливає на

ефективність подальших обчислень. Зазвичай прийнято номер елемента подавати в круглих дужках з тим, щоб уникнути плутанини з номерами вузлів. На рис. 3.1 представлені різні способи нумерації вузлів та елементів [92, с. 21].

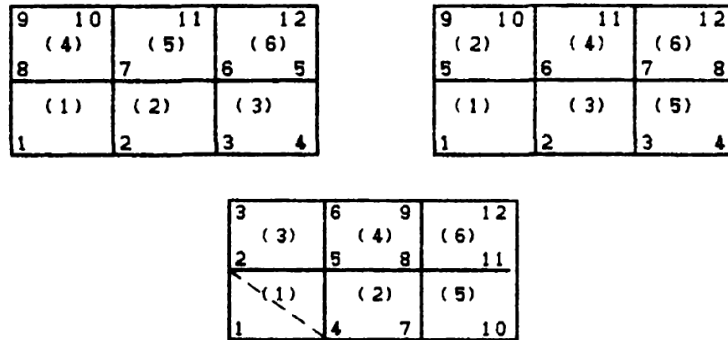


Рисунок 3.1 – Різні способи нумерації вузлів та елементів

Використання МСЕ приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, велика кількість коефіцієнтів якої дорівнює нулю. Матриця коефіцієнтів СЛАР, до якої приводить МСЕ, для стаціонарних задач теплопровідності, і матриці системи ЗДР для нестаціонарної задачі теплопровідності є сильно розрідженими матрицями стрічкової структури.

При використанні МСЕ вигляд отриманої системи ЗДР для знаходження невідомих, а, відповідно, і методи зберігання матриць системи в ЕОМ та методи розв'язання відповідної задачі Коші суттєво залежать від способу нумерації вузлів сітки. У зв'язку з цим в методах удосконалення МСЕ існують напрямки, присвячені цій проблемі. При чисельній реалізації ІМСЕ це питання теж виникає.

В нестаціонарній задачі теплопровідності знаходження вузлових функцій зводиться до розв'язання задачі Коші $A \cdot \frac{dC(t)}{dt} + B \cdot C(t) = D(t)$, $C(0) = C_0$, де матриці A і B мають однакову структуру.

Вигляд СЛАР у методі Рітца залежить від способу нумерації вузлів скінченних елементів. Тому у зв'язку із запропонованою скінченно-елементною реалізацією методу зведення до системи ЛДР теж бажано, щоб

матриці системи ЗДР, що виникають в МСЕ, мали регулярну структуру, яка не повинна змінюватись при переході до більш складних областей.

Для пояснення суті запропонованої нумерації наведемо вигляд матриць для випадку області прямокутної форми. Для цього розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad D = [0, 1] \times [0, 1], \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (3.2)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial D} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{\partial D} = 0. \quad (3.3)$$

Побудуємо на області D сітку, зображену на рис. 3.2. У випадку нумерації вузлів цієї сітки, яка вказана на цьому ж рисунку, матриця трьохдіагональна [26].

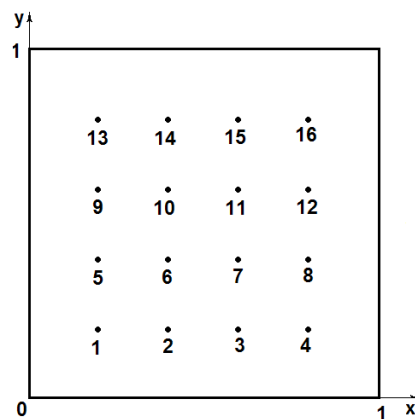


Рисунок 3.2 – Лінійна нумерація вузлів сітки МСЕ (на квадраті)

Для розв'язання задачі методом ЛІДР побудуємо на області D сітку, зображену на рис. 3.3.

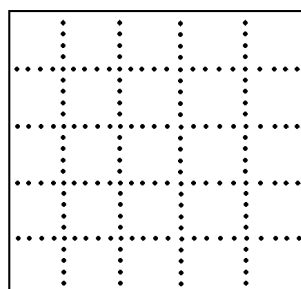


Рисунок 3.3 – Сітка скінченно-елементної реалізації методу ЛІДР (на квадраті)

Використання класичної нумерації вузлів, яка проілюстрована на рис. 3.2, приводить до матриці, яка не є зручною в подальших чисельних розрахунках, оскільки вона ускладнює алгоритм врахування індексів нульових і ненульових елементів матриць. Можна використати таку нумерацію, яка приводить до блочної трьохдіагональної структури матриці системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Таку нумерацію було запропоновано для реалізації в стаціонарних задачах в роботі [30] В. В. Камишана, О. М. Литвина, О. Р. Максимович. Згідно з цією нумерацією виділяються так звані «центральні» вузли, вони виділені на рис. 3.4.

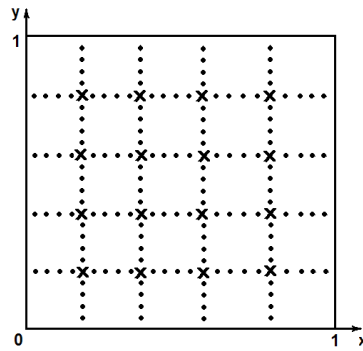


Рисунок 3.4 – Виділення центральних вузлів

Інші вузли будемо звати асоційованими з центральними. Кожний центральний вузол має стандартні асоційовані вузли, які гуртуються навколо центральних. Після виділення центральних вузлів проводиться об'єднання стандартних асоційованих вузлів навколо центральних (рис. 3.5).

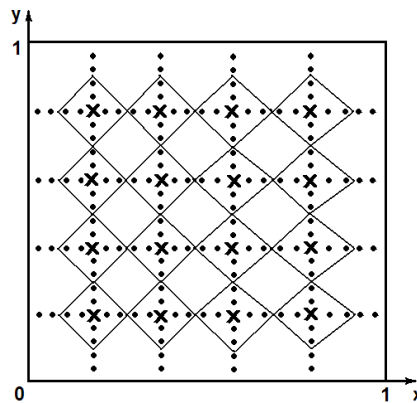


Рисунок 3.5 – Об'єднання стандартних асоційованих вузлів навколо центральних

Найближчі до границі області вузли можуть залишитись непроасоційованими з центральними вузлами і звуться нестандартними асоційованими вузлами (не всі центральні вузли мають асоційовані вузли такого типу). Вони асоціюються з центральними вузлами, як вказано на рис. 3.6.

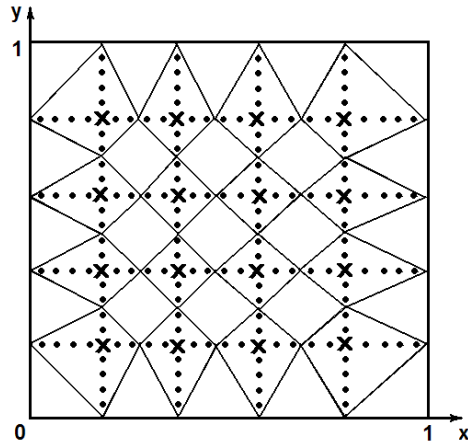


Рисунок 3.6 – Об'єднання стандартних та нестандартних асоційованих вузлів навколо центральних

Нумерація асоційованих вузлів навколо центральних проводиться так, як наведено на рис. 3.7.

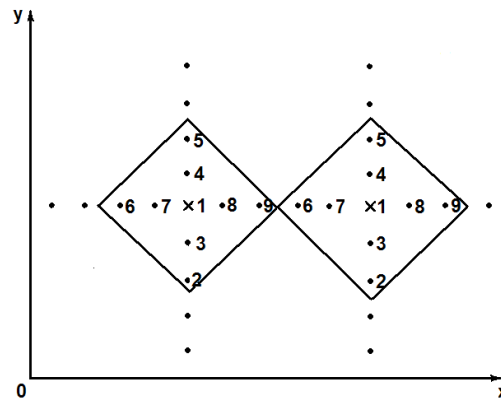


Рисунок 3.7 – Лінійна нумерація стандартних асоційованих вузлів в об'єднанні навколо центрального вузла

Якщо центральний вузол має стандартні та нестандартні вузли, то їх нумерація всередині вектор-вузла проводиться так, як зображено на рис. 3.8.

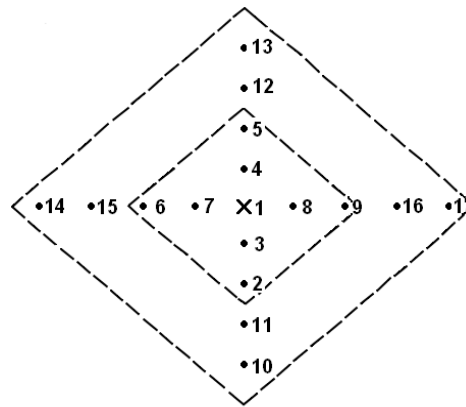


Рисунок 3.8 – Лінійна нумерація стандартних та нестандартних асоційованих вузлів всередині вектор-вузла

Порядок перегляду вектор-вузлів (центральні вузли з асоційованими до них вузлами розглядаються як одне ціле) візьмемо таким, як для вузлів сітки МСЕ (рис. 3.2). Тоді базисних вектор-функцій буде стільки, скільки центральних вузлів в області. Компонентами вектор-функцій є базисні функції, відповідні центральному та асоційованим вузлам, розташовані в тому порядку, як і перенумеровані вузли сітки всередині вектор-вузла. Таким чином, базисні вектор-функції мають різну розмірність в залежності від розташування відповідного центрального вузла відносно границі області. Носій базисної вектор-функції розташований так, як вказано на рис. 3.9. Завдяки цьому матриця має блочно-трьохдіагональну структуру.

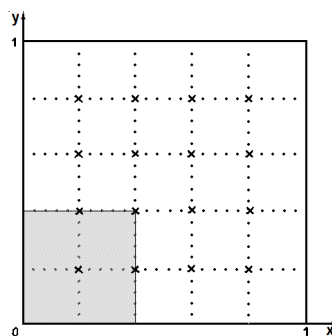


Рисунок 3.9 – Носій базисної вектор-функції

Проаналізуємо переваги запропонованого способу нумерації вузлів (порівняно з класичним методом).

Задача (3.1) – (3.3) при використанні класичної схеми МСЕ зводиться до знаходження функцій $C_{k\ell}(t)$, $k = \overline{1, M-1}$, $\ell = \overline{1, N-1}$ із системи ЗДР $A \cdot \vec{C}'(t) + B \cdot \vec{C}(t) = D(t)$, де $\vec{C}(t)$ – вектор, який отримується з двовимірної матриці $C_{k\ell}(t)$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{pqij} C'_{ij}(t) + a^2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{pqij} C_{ij}(t) = \gamma_{pq}(t), \quad p = \overline{1, M-1}, \quad q = \overline{1, N-1}.$$

Аналогічно, задача (3.1) – (3.3) при використанні схеми ІМСЕ зводиться до системи ЗДР:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn, j'} \right)(t) + [u, \varphi_{kn, j'}](t) &= (f, \varphi_{kn, j'})(t) \\ \left(j' = \overline{1, n^2 - 1}; j' \neq \ell n; k, \ell = \overline{1, n-1}, (k, j') \in J \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \varphi_{i', \ell n} \right)(t) + [u, \varphi_{i', \ell n}](t) &= (f, \varphi_{i', \ell n})(t) \\ \left(i' = \overline{1, n^2 - 1}; i' \neq kn; k, \ell = \overline{1, n-1}, (i', \ell) \in J \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn, \ell n} \right)(t) + [u, \varphi_{kn, \ell n}](t) = (f, \varphi_{kn, \ell n})(t) \quad \left(k, \ell = \overline{1, n-1}; (k, \ell) \in J \right) \quad (3.6)$$

при таких початкових умовах (при $(k, \ell = \overline{1, n-1}; i', j' = \overline{1, n^2 - 1})$):

$$u_{kn, j'}(0) = u_0 \left(\frac{k}{n}, \frac{j'}{n^2} \right) = 0, \quad u_{i', \ell n}(0) = u_0 \left(\frac{i'}{n^2}, \frac{\ell}{n} \right) = 0, \quad u_{kn, \ell n}(0) = u_0 \left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n} \right) = 0.$$

Тут використано позначення:

$$(\psi_1, \psi_2) = \iint_G \psi_1 \psi_2 \, dx \, dy, \quad [u, \psi] = \iint_G \left[p_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dx \, dy.$$

Для практичної реалізації систему (3.4, 3.5, 3.6) перетворюємо на систему ЗДР в матрично-векторній формі:

$$A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D(t), \quad (3.7)$$

$$C(0) = C_0,$$

де A – двовимірна матриця, яка відповідає чотиривимірному масиву α_{pqij} , B – двовимірна матриця, яка відповідає чотиривимірному масиву β_{pqij} , $C(t)$ – вектор, який відповідає двовимірній матриці $C_{k\ell}(t)$, $D(t)$ – вектор правих частин, який відповідає матриці γ_{pq} .

$$A_{\mu,\nu} = \alpha_{pqij}, \quad B_{\mu,\nu} = \beta_{pqij}, \quad C_{i_j}(t) = C_\nu(t), \quad D_\nu(t) = \gamma_{pq}(t),$$

$$p, i = \overline{1, M-1}, \quad q, j = \overline{1, N-1}.$$

В роботі [30] доведено, що матриця, яка стоїть біля \vec{C} в СЛАР, має блочно-трюхдіагональну структуру, блоки якої теж є блочно-трюхдіагональними.

В нашому випадку при записі системи ЗДР у вигляді (3.7) побудова елементів матриць A і B проводиться за майже однаковими алгоритмами. Різниця між ними полягає лише в одному: елементи матриці A знаходяться у вигляді

$$A_{i,j} = \iint_D u_i(x,y) v_j(x,y) dx dy,$$

а відповідні елементи матриці B

$$B_{i,j} = \iint_D \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

де u_i , v_j – функції, біля яких стоять коефіцієнти $C_i(t)$, $C_j(t)$ відповідно.

Аналіз матриць A і B показує, що ці матриці при вибраному способі нумерації вузлів є блочно-трюхдіагональними, як зображено на рис. 3.10 (якщо побудована сітка, як на рис. 3.3). В свою чергу кожний з блоків $A1$, $B1$, $C1$, $A2$,

B2, C2 має таку ж блочно-трихдіагональну структуру, зображену відповідно на рис. 3.11 (а, б).

A=	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>B1</td><td>C1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>A1</td><td>B1</td><td>C1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>A1</td><td>B1</td><td>C1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>A1</td><td>B1</td></tr> </table>	B1	C1			A1	B1	C1			A1	B1	C1			A1	B1
B1	C1																
A1	B1	C1															
	A1	B1	C1														
		A1	B1														

B=	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>B2</td><td>C2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>A2</td><td>B2</td><td>C2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>A2</td><td>B2</td><td>C2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>A2</td><td>B2</td></tr> </table>	B2	C2			A2	B2	C2			A2	B2	C2			A2	B2
B2	C2																
A2	B2	C2															
	A2	B2	C2														
		A2	B2														

a)
б)

Рисунок 3.10 – Блочно-трихдіагональна структура матриць A і B в інтерлінаційному МСЕ: а) структура матриці A ; б) структура матриці B

a)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>B3</td><td>C3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>A3</td><td>B3</td><td>C3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>A3</td><td>B3</td><td>C3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>A3</td><td>B3</td></tr> </table>	B3	C3			A3	B3	C3			A3	B3	C3			A3	B3
B3	C3																
A3	B3	C3															
	A3	B3	C3														
		A3	B3														

b)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>B4</td><td>C4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>A4</td><td>B4</td><td>C4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>A4</td><td>B4</td><td>C4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>A4</td><td>B4</td></tr> </table>	B4	C4			A4	B4	C4			A4	B4	C4			A4	B4
B4	C4																
A4	B4	C4															
	A4	B4	C4														
		A4	B4														

Рисунок 3.11 – Блочно-трихдіагональна структура блоків матриць A і B : а) структура блоків $A1, B1, C1$; б) структура блоків $A2, B2, C2$

Така структура матриць дозволяє спростити алгоритм знаходження невідомих векторів $\vec{C}(t)$, оскільки класичні методи розв'язання задачі Коші для систем ЗДР, як правило, зводять їх до систем вигляду:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -A^{-1} \cdot B \cdot C(t) + A^{-1} \cdot D$$

і для знаходження $A^{-1} \cdot B$ можна врахувати розміщення нульових і ненульових елементів матриць A і B [26]. Таким чином, знаючи чисельні значення елементів матриць A і B та місця розташування ненульових елементів в цих матрицях, можна більш ефективно розв'язати задачу Коші для відповідної системи ЗДР, використовуючи відомі методи (наприклад, метод Рунге-Кутта).

3.2 Загальний метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестационарної теплопровідності в області складної форми

3.2.1 Метод побудови точних розв'язків крайової задачі для диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми

У працях [13, 14] О. М. Литвиним, Л. І. Гулік запропоновано загальний метод побудови функцій двох змінних із заданими слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих, які задовольняють задані умови на границях областей складної форми, обмежених дугами відомих кривих. Метод істотно використовує оператори сплайн-інтерлінації функцій двох змінних.

У праці [54] О. М. Литвиним, Л. С. Лобановою пропонується загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в областях складної форми. Необхідність вирішення такої задачі виникає при розробці нових чисельних методів розв'язання крайових задач для областей складної форми, коли тестування запропонованого методу бажано проводити не тільки на реальних задачах, для яких точний розв'язок невідомий, але також і на тестових задачах, для яких відомий точний розв'язок і можливе проведення аналізу похибки наближення. Метод сплайн-інтерлінації функції двох змінних у [54] застосовується для побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних граничних задач для диференціального рівняння еліптичного типу

$$Lu = f(x, y), (x, y) \in D,$$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c(x, y)u, \quad (3.8)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), (x, y) \in \partial D. \quad (3.9)$$

Теорема [54]. Нехай права частина $f(x, y) = LU(x, y)$, де точний розв'язок $U(x, y) = U(x, y, \{\varphi_{k,p}(x)\}, \{\psi_{\ell,q}(x)\}, \{u_{k,\ell,p,q}\})$ диференціального

рівняння (3.8) визначається відповідною формулою інтерлінації в кожному з елементів (прямокутних, прямокутних з однією криволінійною, взагалі кажучи, стороною, яка належить границі області інтегрування; трикутних, трикутних з однією криволінійною, взагалі кажучи, гіпотенузою, яка належить границі області інтегрування) розбиття області інтегрування D прямими $x = x_k$, $y = y_\ell$ ($k = \overline{0, m}$, $\ell = \overline{0, n}$). Тоді існують такі функції $\varphi_{k,p}(x)$, $\psi_{\ell,q}(y)$, $k = \overline{0, m}$, $\ell = \overline{0, n}$, $0 \leq p, q \leq r$ та сталі $u_{k,\ell,p,q}$ ($k = \overline{0, m}$, $\ell = \overline{0, n}$, $p, q = \overline{0, r}$), при яких $U(x, y) \in C^{r,r}(D)$, $r \geq 1$, і є точним розв'язком крайової задачі із вказаною правою частиною та граничними умовами Діріхле або Неймана, або мішаними граничними умовами. Залежно від типу граничних умов і від значення r функції $\varphi_{k,p}(x)$, $\psi_{\ell,q}(y)$, $0 \leq p, q \leq r$, що відповідають границі області інтегрування, вибираються рівними заданим граничним функціям.

В описі методу припускається, що область D є прямокутним багатокутником і може бути поділена на прямокутні елементи $\Pi_{i,j} = \{(x, y) : x_i \leq x < x_{i+1}; y_j \leq y < y_{j+1}\}$ прямими $x = x_i$, $i = \overline{0, m}$; $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$. Розв'язок $u(x, y)$ задачі (3.8) – (3.9) в кожному прямокутнику $\Pi_{i,j} \subset D$ шукається у вигляді

$$u(x, y) = u_{i,j}(x, y) = \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{p=0}^1 \varphi_{k,p}(x) h_{k,p}(y) + \sum_{\ell=j}^{j+1} \sum_{q=0}^1 \psi_{\ell,q}(y) H_{\ell,q}(x) - \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{p=0}^1 \sum_{\ell=j}^{j+1} \sum_{q=0}^1 u_{k,\ell,p,q} H_{\ell,q}(x) h_{k,p}(y), \quad (x, y) \in \Pi_{i,j} \subset D, \quad (3.10)$$

$H_{\ell,q}(x)$, $h_{k,p}(y) \in C^2(R)$ – кубічні сплайни з властивостями $H_{\ell,q}^{(qq)}(x_{\ell\ell}) = \delta_{\ell,\ell\ell} \delta_{q,qq}$, $\ell, \ell\ell \in \{i, i+1\}$, $q, qq \in \{0, 1\}$, $h_{k,p}^{(pp)}(y_{kk}) = \delta_{k,kk} \delta_{p,pp}$, $k, kk \in \{j, j+1\}$, $p, pp \in \{0, 1\}$ ($\delta_{k,\ell}$ – символ Кронекера).

Формула (3.10) дозволяє будувати функцію двох змінних $u(x, y)$, яка зберігає потрібний клас диференційовності, задовольняє граничні умови на границі області D і є розв'язком рівняння (3.8), якщо $f(x, y) = Lu(x, y)$.

Важливою є наступна теорема, доведена у праці [54].

Теорема [54]. Якщо шукати наближений розв'язок задачі (3.8)–(3.9) методом скінченних елементів, отримаємо точний розв'язок при умові, що в кожному елементі розбиття розв'язок шукаємо у вигляді (3.10) з невідомими $u_{k,\ell,p,q}$.

3.2.2 Метод побудови точного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності в областях складної форми

В даному підрозділі, на основі тверджень роботи [54], пропонується загальний метод побудови тестових точних розв'язків початково-крайових задач для рівняння нестационарної теплопровідності в областях складної форми. Викладемо узагальнення методу, розглянутого в підрозділі 3.2.1, на випадок функції $u(x, y, t)$, де x, y – просторові змінні, t – час.

Використаємо метод сплайн-інтерлінації функції двох змінних для побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних крайових задач для диференціального рівняння параболічного типу:

$$Lu = f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \quad (3.11)$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (3.12)$$

$$u(x, y, t) = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

$$u_1(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G. \quad (3.14)$$

Відомо, що у випадку неоднорідних граничних умов (3.13) можна перейти до однорідних граничних умов шляхом заміни $u(x, y, t) = w(x, y, t) + \varphi_0(x, y, t)$, де

$$\varphi_0(x, y, t) = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G, \quad t > 0, \quad (3.15)$$

що забезпечує для $w(x, y, t)$ однорідну граничну умову, а функція $w(x, y, t)$ є розв'язком наступної задачі:

$$\begin{aligned} Lw &= f(x, y, t) - L\varphi_0(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \\ w(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad t > 0, \\ w(x, y, 0) &= u_0(x, y) - \varphi_0(x, y, 0), \quad (x, y) \in G. \end{aligned}$$

Але для цього потрібне вміння будувати функції $\varphi_0(x, y, t)$, які задовольняють умову (3.15) і належать до потрібного класу диференційовності. Викладемо метод побудови функцій $u(x, y, t)$, які задовольняють неоднорідні граничні умови і належать до потрібного класу диференційовності.

Припустимо, що область G є прямокутним багатокутником і може бути розбита на прямокутні елементи $\Pi_{i,j} = \{(x, y) : x_i \leq x < x_{i+1}; y_j \leq y < y_{j+1}\}$ прямими $x = x_i, i = \overline{1, m}$. $y = y_j, j = \overline{1, n}$. Невідому функцію $u(x, y, t)$ в кожному прямокутнику $\Pi_{p,q} \subset G$ будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \tilde{u}(x, y, t, p, q) = \\ &= \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^1 \varphi_{k,s}(x, t) sp_{k,s}(y) + \sum_{\ell=q}^{q+1} \sum_{r=0}^1 \psi_{\ell,r}(y, t) sp_{\ell,r}(x) - \\ &\quad - \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=q}^{q+1} \sum_{r=0}^1 f_{k,s,\ell,r}(t) sp_{k,s}(x) sp_{\ell,r}(y), \quad (3.16) \\ &\quad (x, y) \in \Pi_{p,q} \subset G, \end{aligned}$$

де $sp_{\ell,r}(x) \in C^2(R)$, $sp_{k,s}(y) \in C^2(R)$ – кубічні сплайни з властивостями:

$$sp_{\ell,r}^{(rr)}(x_{\ell\ell}) = \delta_{\ell,\ell\ell} \delta_{r,rr}, \quad \ell, \ell\ell \in \{p, p+1\}, r, rr \in \{0, 1\},$$

$$sp_{k,s}^{(ss)}(y_{kk}) = \delta_{k,kk} \delta_{s,ss}, \quad k, kk \in \{q, q+1\}, s, ss \in \{0, 1\}.$$

У випадку $\varphi_{k,s}^{(r)}(x_{\ell}, t) = \psi_{\ell,r}^{(s)}(y_k, t) = f_{k,s,\ell,r}(t)$, $k \in \overline{p, p+1}$, $\ell \in \overline{q, q+1}$, $s, r \in \{0, 1\}$, функція $u(x, y, t) \in C^{r,r}(G)$, $r \geq 1$ і має властивості

$$\left. \frac{\partial^{rr} u}{\partial x^{rr}} \right|_{x=x_{\ell\ell}} = \psi_{\ell,rr}(y, t), \quad \ell\ell = \overline{p, p+1}, \quad rr = \overline{0, 1},$$

$$\left. \frac{\partial^{ss} u}{\partial y^{ss}} \right|_{y=y_{kk}} = \varphi_{kk,ss}(x, t), \quad kk = \overline{q, q+1}, \quad ss = \overline{0, 1}$$

незалежно від вибору функцій $\varphi_{\ell\ell,rr}(x, t)$ і $\psi_{kk,ss}(y, t)$ в інших точках інтервалу їх визначення.

Якщо ж невідому функцію $u(x, y, t)$ шукати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \tilde{u}(x, y, t, p, q) = \\ &= \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^2 \varphi_{k,s}(x, t) sp_{k,s}(y) + \sum_{\ell=q}^{q+1} \sum_{r=0}^2 \psi_{\ell,r}(y, t) sp_{\ell,r}(x) - \\ &\quad - \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^2 \sum_{\ell=q}^{q+1} \sum_{r=0}^2 f_{k,s,\ell,r}(t) sp_{k,s}(x) sp_{\ell,r}(y), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$(x, y) \in \Pi_{p,q} \subset G,$$

де $sp_{\ell,r}(x) \in C^2(R)$, $sp_{k,s}(y) \in C^2(R)$ – кубічні сплайни з властивостями

$$sp_{\ell,r}^{(rr)}(x_{\ell\ell}) = \delta_{\ell,\ell\ell} \delta_{r,rr}, \quad \ell, \ell\ell \in \{p, p+1\}, r, rr \in \{0, 1, 2\},$$

$$sp_{k,s}^{(ss)}(y_{kk}) = \delta_{k,kk} \delta_{s,ss}, \quad k, kk \in \{q, q+1\}, s, ss \in \{0, 1, 2\},$$

і виконуються умови

$$\varphi_{k,s}^{(r)}(x_\ell, t) = \psi_{\ell,r}^{(s)}(y_k, t) = f_{k,s,\ell,r}(t), \quad k \in \overline{p, p+1}, \quad \ell \in \overline{q, q+1}, \quad s, r \in \{0, 1, 2\},$$

то функція $u(x, y, t) \in C^{2,2}(G)$ і має властивості

$$\left. \frac{\partial^{rr} u}{\partial x^{rr}} \right|_{x=x_{\ell\ell}} = \psi_{\ell\ell, rr}(y, t), \quad \ell\ell = \overline{p, p+1}, \quad rr = \overline{0, 2},$$

$$\left. \frac{\partial^{ss} u}{\partial y^{ss}} \right|_{y=y_{kk}} = \varphi_{kk, ss}(x, t), \quad kk = \overline{q, q+1}, \quad ss = \overline{0, 2}$$

незалежно від вибору функцій $\varphi_{\ell\ell, rr}(x, t)$ і $\psi_{kk, ss}(y, t)$ в інших точках інтервалу їх визначення.

Таким чином, формули (3.16) і (3.17) дозволяють будувати функцію трьох змінних $u(x, y, t)$, яка зберігає потрібний клас диференційовності і задовольняє граничним умовам на границі області G : $u(x, y, t) = u_1(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$.

Тому функція

$$w(x, y, t) = u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0) \quad (3.18)$$

має наступні властивості:

$$w(x, y, t) = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G,$$

$$w(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G.$$

Теорема 3.1. Функція $U = U(x, y, t) = u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0)$, де функція $u(x, y, t)$ будується за описаним вище методом у вигляді (3.16), має властивості $U(x, y, t) \in C^{1,1}(G) \quad \forall t > 0$ і є розв'язком початково-крайової задачі

$$LU(x, y, t) = Lw(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0,$$

$$U(x, y, t) = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G,$$

$$U(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G.$$

Доведення. Згідно з методом побудови функції $u(x, y, t)$ за допомогою сплайн-інтерлінації, викладеним вище, $U(x, y, t) \equiv w(x, y, t)$. Тому, вважаючи у формулі (3.18) для $w(x, y, t)$ відомими функціями $u_0(x, y)$, $u(x, y, t)$ і $u(x, y, 0)$, можемо написати праву частину $Lw(x, y, t)$.

Дійсно, для функції $U(x, y, t)$ при такій функції $w(x, y, t)$ диференціальне рівняння $LU(x, y, t) = Lw(x, y, t)$ тотожно задовольняється для всіх x, y, t , для яких $(x, y) \in G, t > 0$.

Той факт, що функція $U(x, y, t)$ буде точно задовольняти умову $U(x, y, t) = u_1(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$, витікає з того, що

$$\begin{aligned} U(x, y, t)|_{\partial G} &= (u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0))|_{\partial G} = \\ &= u_0(x, y)|_{\partial G} + u(x, y, t)|_{\partial G} - u(x, y, 0)|_{\partial G} = \\ &= u_0(x, y) + u_1(x, y, t) - u_0(x, y) = u_1(x, y, t). \end{aligned}$$

Задовільнення початковим умовам витікає з того, що

$$\begin{aligned} U(x, y, t)|_{t=0} &= (u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0))|_{t=0} = \\ &= u_0(x, y)|_{t=0} + u(x, y, t)|_{t=0} - u(x, y, 0)|_{t=0} = \\ &= u_0(x, y) + u(x, y, 0) - u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{aligned}$$

Теорему 3.1 доведено.

Таким чином, уміння будувати функцію $u(x, y, t)$ за допомогою сплайн-інтерлінації у вигляді функції, яка точно задовольняє заданим граничним умовам, дає можливість точно задовольняти і початковій, і граничній умовам та диференціальному рівнянню (3.11), в якому $f(x, y, t) = Lw(x, y, t)$.

Зауваження 3.1. При побудові функції $u(x, y, t)$ за формулою (3.16) виникає питання вибору функцій $\varphi_{k,s}(x, t)$ та $\psi_{\ell,r}(y, t)$ і $f_{k,s,\ell,r}(t)$, які повинні

бути пов'язані між собою написаними вище умовами узгодженості у вузлових точках (x_k, y_ℓ) незалежно від вибору їх в інших точках і від вибору $f_{k,s,\ell,r}(t)$. Тобто, вибираючи за тим або іншим алгоритмом функції $f_{k,s,\ell,r}(t)$ та замінюючи функції $\varphi_{k,s}(x,t)$ та $\psi_{\ell,r}(y,t)$ відповідними інтерполяційними операторами, отримаємо один з можливих алгоритмів побудови функції $u(x,y,t)$, яка буде належати потрібному класу диференційовності та буде задовольняти заданим умовам (3.13) на границі області G .

3.2.3 Приклад побудови точного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності

Проілюструємо описаний у підрозділі 3.2.2 метод прикладом. Нехай область G є прямокутником $G = [0, a] \times [0, b]$ і точний розв'язок початково-крайової задачі має вигляд

$$u(x, y, t) = x^2 e^{-2t} + y^2 e^{-3t}.$$

В цьому випадку початкова та гранична умови відповідно мають вигляд:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = u_1(x, y, t) = \begin{cases} y^2 e^{-3t}, & x = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \\ x^2 e^{-2t}, & y = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ a^2 e^{-2t} + y^2 e^{-3t}, & x = a, \quad 0 \leq y \leq b, \\ x^2 e^{-2t} + b^2 e^{-3t}, & y = b, \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^1 \psi_{k,0}(y, t) H_{k,0}(x) + \sum_{k=0}^1 \psi_{k,1}(y, t) H_{k,1}(x) + \\ + \sum_{\ell=0}^1 \varphi_{\ell,1}(x, t) h_{\ell,1}(y) - \sum_{k=0}^1 \sum_{\ell=0}^1 u(x_k, y_\ell, t) H_{k,0}(x) h_{\ell,0}(y) -$$

$$-\sum_{k=0}^1 \sum_{\ell=0}^1 u^{(0,1)}(x_k, y_\ell, t) H_{k,0}(x) h_{\ell,1}(y) - \sum_{k=0}^1 \sum_{\ell=0}^1 u^{(1,1)}(x_k, y_\ell, t) H_{k,1}(x) h_{\ell,1}(y),$$

де функції $\psi_{k,p}(y, t)$ ($k, p = 0, 1$), $\varphi_{\ell,s}(x, t)$ ($\ell, s = 0, 1$) задовольняють умови:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(y_0, t) &= u^{(1,0)}(x_0, y_0, t), & \psi_{0,1}(y_1, t) &= u^{(1,0)}(x_0, y_1, t), \\ \frac{\partial \psi_{0,1}(y_0, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_0, y_0, t), & \frac{\partial \psi_{0,1}(y_1, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_0, y_1, t), \\ \psi_{1,1}(y_0, t) &= u^{(1,0)}(x_1, y_0, t), & \psi_{1,1}(y_1, t) &= u^{(1,0)}(x_1, y_1, t), \\ \frac{\partial \psi_{1,1}(y_0, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_1, y_0, t), & \frac{\partial \psi_{1,1}(y_1, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_1, y_1, t), \\ \varphi_{0,1}(x_0, t) &= u^{(0,1)}(x_0, y_0, t), & \varphi_{0,1}(x_1, t) &= u^{(0,1)}(x_1, y_0, t), \\ \frac{\partial \varphi_{0,1}(x_0, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_0, y_0, t), & \frac{\partial \varphi_{0,1}(x_1, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_1, y_0, t), \\ \varphi_{1,1}(x_0, t) &= u^{(0,1)}(x_0, y_1, t), & \varphi_{1,1}(x_1, t) &= u^{(0,1)}(x_1, y_1, t), \\ \frac{\partial \varphi_{1,1}(x_0, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_0, y_1, t), & \frac{\partial \varphi_{1,1}(x_1, t)}{\partial y} &= u^{(1,1)}(x_1, y_1, t), \end{aligned}$$

і визначаються рівностями:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(y, t) &= \sum_{q=0}^1 \sum_{n=0}^1 h_{q,n}(y) u^{(1,n)}(x_0, y_q, t), & \psi_{1,1}(y, t) &= \sum_{q=0}^1 \sum_{n=0}^1 h_{q,n}(y) u^{(1,n)}(x_1, y_q, t), \\ \varphi_{0,1}(x, t) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{m=0}^1 H_{p,m}(x) u^{(m,1)}(x_p, y_0, t), & \varphi_{1,1}(x, t) &= \sum_{p=0}^1 \sum_{m=0}^1 H_{p,m}(x) u^{(m,1)}(x_p, y_1, t). \end{aligned}$$

Функції $H_{p,m}(x)$ ($p, m = \overline{0,1}$), $h_{q,n}(y)$ ($q, n = \overline{0,1}$) вибираються у вигляді кубічних ермітових сплайнів.

На рис. 3.12 наведено графіки розподілу температури в області G в моменти часу $t = 0,02$ і $t = 1,0$.

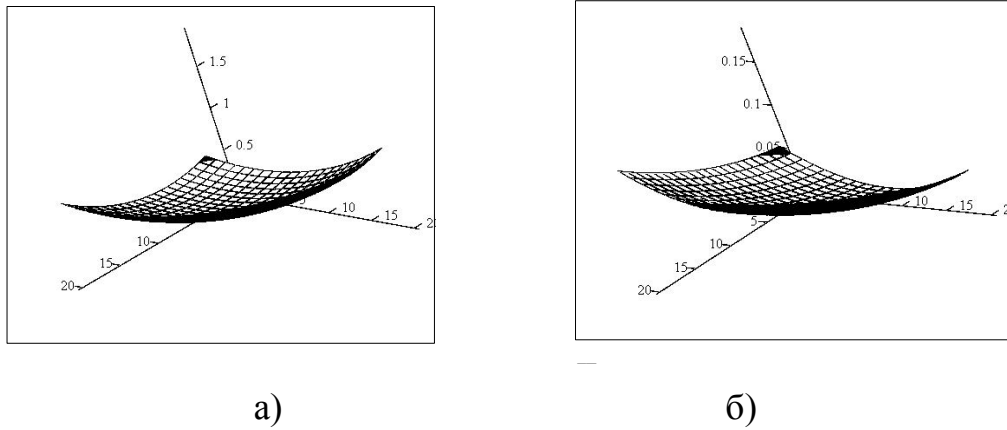


Рисунок 3.12 – Розподіл температури в області $G = [0,1] \times [0,1]$
в моменти часу: а) $t=0,02$, б) $t=1,0$

Таким чином, запропоновано загальний метод побудови тестових прикладів для точного розв'язання початково-крайової задачі (3.11) – (3.14) у випадку областей, які складаються з об'єднання прямокутних підобластей. При цьому точний розв'язок може належати потрібному класу диференційованості і задовольняти початковим і граничним умовам (3.12) – (3.13) за умови узгодженості (3.14).

3.3 Покроковий алгоритм побудови наближеного розв'язку інтерлінаційним МСЕ

Для обмеженої області $G \subset R^2$ розв'язуємо нестационарну задачу теплопровідності (2.18) – (2.20):

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t),$$

$$(x, y) \in G, t > 0$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in G, G \subseteq \Pi, \Pi = [a, b] \times [c, d],$$

$$u(x, y, t) \Big|_{\partial G} = \varphi(x, y, t) \Big|_{\partial G}.$$

Вважаємо: $p_1(x, y), p_2(x, y) \in C^1(G), q(x, y) \in C(G), f(x, y, t) \in C(G \times R^+)$, $R^+ = [0, \infty)$ і розв'язок задачі задовольняє умови: 1) $u(x, y, t)$ має неперервні похідні до 2-го порядку за змінними x та y $u^{(p,q,0)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), \forall t \geq 0, 0 \leq p, q \leq 2$; 2) $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$.

Крім того, вважаємо, що $\varphi(x, y, 0)|_{\partial G} = u_0(x, y)|_{\partial G}$.

Замінімо задачу (2.18) – (2.20) відповідною задачею з однорідними початковою і граничною умовами. Для цього введемо замість функції $u(x, y, t)$ функцію $v(x, y, t)$ наступним чином:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + \varphi(x, y, t) + u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0).$$

Функція $v(x, y, t)$ повинна задовольняти диференціальному рівнянню і однорідним початковій і граничній умовам:

$$\begin{aligned} Lv(x, y, t) &= f(x, y, t) - L\varphi(x, y, t) - L(u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0)), \\ v(x, y, 0) &= 0, \quad v(x, y, t)|_{\partial G} = 0, \end{aligned}$$

$$u(x, y, t) \in C^{2,2,1}(G \times R^+) = \left\{ v : v^{(p,q,1)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), 0 \leq p, q \leq 2 \right\}.$$

Тоді функція $u(x, y, t)$ є точним розв'язком відповідної початково-крайової задачі. Далі вважаємо початкову та граничну умови однорідними.

Викладемо по кроках алгоритм знаходження наближеного розв'язку.

Крок 1. Розіб'ємо область G на елементи прямими $x = x_k, k = \overline{0, M}$ та $y = y_l, l = \overline{0, N}$. В результаті область G розіб'ється на елементи наступних типів:

– прямокутні елементи $\Pi_{ij}^{(0)} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}, i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$;

– прямокутні елементи $\Pi_{ij}^{(r)}$, $r=1,\dots,4$ з однією криволінійною стороною, яка належить границі ∂G . Елементи $\Pi_{ij}^{(2)}$, $\Pi_{ij}^{(3)}$, $\Pi_{ij}^{(4)}$ мають вигляд, аналогічний

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}(x), y_{j+1}(x) > y_j\};$$

– трикутні елементи $T_{ij}^{(r)}$, $r=1,\dots,4$ з однією криволінійною стороною, яка належить границі ∂G . Елементи $T_{ij}^{(2)}$, $T_{ij}^{(3)}$, $T_{ij}^{(4)}$ мають вигляд, аналогічний

$$T_{ij}^{(1)} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0, \eta_{j+1}(x_{i+1}) = y_j, \eta_{j+1}(x_i) = y_{j+1}\}.$$

Крок 2. Будуємо в кожному із вказаних елементів оператор інтерлінації $OF(x, y, t)$ функції $F(x, y, t)$ на $\Pi_{ij}^{(0)}$ або $\Pi_{ij}^{(r)}$ або $T_{ij}^{(r)}$ у вигляді:

$$OF(x, y, t) = \begin{cases} U_{ij}F(x, y, t), (x, y) \in \Pi_{ij}^0, \\ V_{ij}^r F(x, y, t), (x, y) \in \Pi_{ij}^r, r \in \{1, 2, 3, 4\} \\ W_{ij}^r F(x, y, t), (x, y) \in T_{ij}^r, r \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$U_{ij}F(x, y, t) = \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{s=0}^{\lambda} h_{\mu-i,s} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) (x_{i+1}-x_i)^s \varphi_{\mu,s}(y, t) + \\ + \sum_{v=j}^{j+1} \sum_{p=0}^{\lambda} h_{v-j,p} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right) (y_{j+1}-y_j)^p \psi_{v,p}(x, t) - \quad (3.20)$$

$$- \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{s=0}^{\lambda} \sum_{v=j}^{j+1} \sum_{p=0}^{\lambda} h_{\mu-i,s} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) (x_{i+1}-x_i)^s h_{v-j,p} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right) (y_{j+1}-y_j)^p D_{\mu,s,v,p}(t),$$

де $\lambda \in \{1, \dots, 5\}$, допоміжні функції $h_{r,s}(u)$, $r, s \in \{0, 1\}$ мають такі властивості: $h_{r,s}^{(p)}(q) = \delta_{r,q} \delta_{s,p}$, $r, s, p, q \in \{0, \dots, \lambda\}$, $\delta_{s,p}$ – символ Кронекера.

Тоді

$$\left. \frac{\partial^\alpha U_{ij}F}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x_k} = \varphi_{k,\alpha}(y, t), \quad \alpha = \overline{0, \lambda}, \quad k = \overline{i, i+1},$$

$$\left. \frac{\partial^\beta U_{ij}F}{\partial y^\beta} \right|_{y=y_\ell} = \psi_{\ell,\beta}(x, t), \quad \beta = \overline{0, \lambda}, \quad \ell = \overline{j, j+1}.$$

Вважаємо: $\left. \frac{\partial^p \varphi_{i,s}}{\partial y^p} \right|_{y=y_j} = \left. \frac{\partial^s \psi_{j,p}}{\partial x^s} \right|_{x=x_i} = D_{i,s,j,p}(t), (x_i, y_j) \in G, 0 \leq s, p \leq \lambda, \lambda \in \{1, 2\}$.

$$V_{ij}^1 F(x, y, t) = \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{s=0}^1 h_{\mu-i,s} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) (x_{i+1}-x_i)^s \varphi_{\mu,s}(y, t) + \\ + \sum_{v=j}^{j+1} \sum_{p=0}^1 h_{v-j,p} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} \right) (y_{j+1}(x)-y_j)^p \psi_{v,p}(x, t) - \quad (3.21)$$

$$- \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{s=0}^1 \sum_{v=j}^{j+1} \sum_{p=0}^1 h_{\mu-i,s} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) (x_{i+1}-x_i)^s h_{v-j,p} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} \right) (y_{j+1}(x)-y_j)^p D_{i,s,j,p}(t).$$

Для виконання умови $V_{ij}^1 F(x, y_{j+1}(x), t) = 0$ потрібно, щоб $\psi_{j+1,0}(x, t) \equiv 0$.

Нехай $h_{1s}, h_{2s}, h_{is}^{(p)}(x_j) = \delta_{ij} \delta_{sp}, 0 \leq s, p \leq 2$ – базисні поліноми 3-го степеня поліноміальної двоточної ермітової інтерполяції функції $F(x, y, t)$. За допомогою операторів, аналогічних $EF(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{s=0}^1 F^{(s)}(x_k, y, t) h_{ks}(x)$, будемо оператори ермітової інтерлінації функції $F(x, y, t)$ трьох змінних:

$$E_{ij}^1 F(x, y, t) = \sum_{p=0}^1 F^{(p,0)}(x_i, y, t) h_{1,p} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}(y)-x_i} \right) \frac{(x_{i+1}(y)-x_i)^p}{p!} + \\ + \sum_{p=0}^1 F^{(p,0)}(x_{i+1}(y), y, t) h_{2,p} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}(y)-x_i} \right) \frac{(x_{i+1}(y)-x_i)^p}{p!}, \\ E_{ij}^2 F(x, y, t) = \sum_{s=0}^1 F^{(0,s)}(x, y_j, t) h_{1,s} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} \right) \frac{(y_{j+1}(x)-y_j)^s}{s!} + \\ + \sum_{s=0}^1 F^{(0,s)}(x, y_{j+1}(x), t) h_{2,s} \left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j} \right) \frac{(y_{j+1}(x)-y_j)^s}{s!}.$$

Тоді оператор інтерлінації функції $F(x, y, t)$ разом з її частинними похідними до порядку λ по змінних x та y на всіх сторонах трикутника $T_{ij}^{(1)}$ можна записати у вигляді:

$$W_{ij}^{(1)}F(x, y, t) = (E_{ij}^1 + E_{ij}^2 - E_{ij}^1 \cdot E_{ij}^2)F(x, y, t), \quad (x, y) \in T_{ij}^{(1)}.$$

Оператор $W_{ij}^{(1)}F(x, y, t)$ має наступні властивості:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^\alpha W_{ij}^{(1)}F(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x_i} &= \left. \frac{\partial^\alpha F(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x_i}, & \left. \frac{\partial^\alpha W_{ij}^{(1)}F(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x_{i+1}(y)} &= \left. \frac{\partial^\alpha F(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x_{i+1}(y)} \\ \left. \frac{\partial^\beta W_{ij}^{(1)}F(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right|_{y=y_j} &= \left. \frac{\partial^\beta F(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right|_{y=y_j}, & \left. \frac{\partial^\beta W_{ij}^{(1)}F(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right|_{y=y_{j+1}(x)} &= \left. \frac{\partial^\beta F(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right|_{y=y_{j+1}(x)} \end{aligned}$$

($\alpha = \overline{0,1}$, $\beta = \overline{0,1}$) всюди, за виключенням кутових точок.

Аналогічні твердження можна написати також для $W_{ij}^{(r)}F(x, y, t)$, $r = \overline{2,4}$.

Крок 3. Для побудови наближеного розв'язку запропонованим ІМСЕ замінюємо невідомі функції $\varphi_{\mu,s}(x, t)$ та $\psi_{\nu,p}(y, t)$ сплайнами 1-го степеня:

$$\varphi_{\mu,s}(x, t) = \sum_{i=0}^{M^2} A_{i,\mu s}(t) h_i(x), \quad h_i(x) = h(x, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

Для випадку рівномірного розбиття $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $y_\ell = c + \ell \cdot \frac{d-c}{n}$, $k, \ell = \overline{0, n}$, $h_k(x) = h(nx - k)$, $h_\ell(y) = h(ny - \ell)$, де $h(\xi) = 2^{-1}(|\xi + 1| - 2|\xi| + |\xi - 1|)$, наближений розв'язок представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n^2-1} u_{kn,j'}(t) h(nx - k) h(n^2 y - j') + \\ &+ \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i'=1}^{n^2-1} u_{i',\ell n}(t) h(n^2 x - i') h(ny - \ell) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} u_{kn,\ell n} h(nx - k) h(ny - \ell), \end{aligned}$$

де $u_{ij}(t)$, $(i, j) \in J$ – шукані,

$$J = \left\{ (i, j), (i', \ell), (k, j') : \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \in G, \left(\frac{i'}{n^2}, \frac{\ell}{n^2} \right) \in G, \left(\frac{k}{n^2}, \frac{j'}{n^2} \right) \in G \right\}.$$

Для знаходження $u_{ij}(t)$ розв'язується наступна система ЗДР:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn, j'} \right) (t) + [u, \varphi_{kn, j'}] (t) = (f, \varphi_{kn, j'}) (t) \quad (3.22)$$

$$(j' = \overline{1, n^2 - 1}; j' \neq \ell n; k, \ell = \overline{1, n - 1}, (k, j') \in J),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \varphi_{i', \ell n} \right) (t) + [u, \varphi_{i', \ell n}] (t) = (f, \varphi_{i', \ell n}) (t) \quad (3.23)$$

$$(i' = \overline{1, n^2 - 1}; i' \neq kn; k, \ell = \overline{1, n - 1}, (i', \ell) \in J),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn, \ell n} \right) (t) + [u, \varphi_{kn, \ell n}] (t) = (f, \varphi_{kn, \ell n}) (t) \quad (3.24)$$

$$(k, \ell = \overline{1, n - 1}; (k, \ell) \in J)$$

при таких початкових умовах (при $(k, \ell = \overline{1, n - 1}; i', j' = \overline{1, n^2 - 1})$):

$$u_{kn, j'}(0) = u_0 \left(\frac{k}{n}, \frac{j'}{n^2} \right) = 0, \quad u_{i', \ell n}(0) = u_0 \left(\frac{i'}{n^2}, \frac{\ell}{n} \right) = 0, \quad u_{kn, \ell n}(0) = u_0 \left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n} \right) = 0.$$

$$\text{Тут } (\psi_1, \psi_2) = \iint_G \psi_1 \psi_2 dx dy, \quad [u, \psi] = \iint_G \left[p_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dx dy.$$

Крок 4. Для тестування запропонованого ІМСЕ використовуємо загальний метод побудови точних розв'язків тестових задач. Він полягає у представленні допоміжних функцій $h_{1k}(x), h_{2\ell}(y) \in C^r(R)$, $r = 2, 3, 4, 5$ сплайнами r -го степеня ($r \in \{3, 4, 5\}$) і знаходженні невідомих функцій $u_{ij}(t)$ шляхом розв'язання

сформульованої вище задачі Коші з однорідними початковими умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь (3.22) – (3.24).

Відмітимо, що тестові точні розв'язки $O(x, y, t)$ можна будувати у вигляді оператора інтерлінації (3.19) – (3.21), довільним чином вибираючи сліди $\varphi_{\mu s}(y)$, $\psi_{\nu p}(x)$ та $D_{\mu, s, \nu, p}(t)$ так, щоб точно були задовільнені початкова і гранична умови, або за допомогою R -функцій [89], які дозволяють точно задовольнити граничній умові, зберігаючи при цьому потрібний клас диференційовності. Застосовуємо до цієї функції $u = O(x, y, t)$ диференціальний оператор

$$Lu(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u(x, y, t) \equiv g(x, y, t).$$

В результаті отримаємо, що функція $u = O(x, y, t)$ задовольняє рівняння

$$Lu(x, y, t) = g(x, y, t) \quad (3.25)$$

з відомою правою частиною $g(x, y, t)$. Якщо u – побудована вказаним вище методом функція, то вона є точним розв'язком відповідної початково-крайової задачі.

Якщо розв'язувати задачу (3.25) при відповідних початковій і граничній умовах іншим методом (наприклад, класичним МСЕ або методом сіток), то зможемо апостеріорно оцінити похибку наближення, порівнюючи наближений розв'язок з точним.

3.4 Деякі аспекти розв'язання задач нестационарної теплопровідності запропонованим ІМСЕ за допомогою суперкомп'ютера

Запропонований ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними зводить цю задачу до

розв'язання задачі Коші для систем ЗДР. В цьому методі вузли, в яких знаходяться невідомі параметри наближеного розв'язку, залежні від змінної t , розміщені в точках сітки, побудованої з використанням двох сіток: одна сітка з кроком $1/n$, а друга – з кроком $1/n^2$. При цьому при чисельній реалізації цього методу виникають питання з організації обчислень, оскільки матриці відповідної системи ЗДР є рідко заповненими, що, природно, бажано враховувати.

Розглянемо наступну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, t),$$

де $\psi(x, y, 0)|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y)|_{\partial\Omega}$; $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$; $\partial\Omega$ – межа області Ω (задача сформульована в безрозмірних змінних: $x = \frac{\tilde{x}}{\ell}$, $y = \frac{\tilde{y}}{\ell}$, $u = \frac{\tilde{u}}{u_0}$, $t = \frac{a^2 \tilde{t}}{\ell^2}$, a^2 – коефіцієнт теплопровідності, ℓ – лінійний розмір пластини, u_0 має розмірність температури, \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{u} , \tilde{t} – вихідні змінні).

Методом скінченних елементів задача зводиться до задачі Коші для системи лінійних ЗДР першого порядку: $A \cdot \frac{dC}{dt} = B \cdot C(t) + F(t)$, $C(0) = C_0$, де A і B – матриці, $F(t)$ – вектор, C – вектор шуканих значень температури у вузлових точках.

При розв'язанні такої задачі для більшості чисельних методів кількість арифметичних операцій на одному кроці інтегрування в основному визначається кількістю операцій, необхідною для обчислення правих частин системи рівнянь [80]. Тому в першу чергу в більшості чисельних методів розпаралелюється обчислення правих частин. На основі цього

розпаралелювання автоматично розпаралелюється і обчислення матриці Якобі. Проте, якщо кількість арифметичних операцій, яка необхідна для обчислення вектору правих частин, незначна, то обчислення розв'язку задачі Коші для системи ЗДР доцільно проводити на одному або двох процесорах.

Кількість компонент вектор-функції, яка повинна обчислюватися при паралельних обчислюваннях в одному процесі, визначається так: обчислюється число $\left[\frac{n}{p} \right] = g$, де $[a]$ – ціла частина числа a , n – порядок системи рівнянь, p – кількість процесорів, які виконуються на MIMD-комп'ютері; потім обчислюється величина $s = p(g+1) - n$, тоді в останніх s процесорах праві частини будуть обчислюватися блоками по $q = g$ рівнянь, а в перших $p - s$ процесорах – блоками по $q = (g+1)$ рівнянь. Це дозволяє автоматично розподіляти обчислювання компонент вектор-функції системи ЗДР на p процесорів.

Шаблоном для написання програми обчислювання компонент вектор-функції правих частин системи ЗДР на мові Си може бути наступний:

```
Void diffun (int n, int l, int m, double t, double *y, double *f)
{ . . . . .
for (i=1; i<m; i++) {
...
}}.
```

Кожний процес обчислює від l -ї до $(m-1)$ -ї компоненти вектор-функції. При цьому $l = kq$, $m = (k+1)q - 1$, де k – логічний номер процесу, $k = \overline{0, p-1}$; t – незалежна змінна; y – залежна змінна (розв'язок); f – значення тих компонент вектор-функції в точці t , які обчислювалися в k -му процесі.

Для всіх відомих чисельних методів інтегрування системи ЗДР повинна бути задана наступна вхідна інформація в такому порядку: порядок системи звичайних диференціальних рівнянь; кількість точок виводу; початкова та кінцева точки інтервалу інтегрування; потрібна точність розв'язку; похибка

завдання початкових умов та обчислення правих частин; початкові значення вектору розв'язку; масив, який містить координати точок виводу розв'язку.

Наведеним методом розв'язана наступна задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, y, 0) = x(1-x)y(1-y), \quad u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$f(x, y, t) = e^{-t} [2x(1-x) + 2y(1-y) - x(1-x)y(1-y)],$$

точний розв'язок $u(x, y, t) = e^{-t} [(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 + x(1-x)y(1-y) - 0,25]$.

Проведено порівняння наближених розв'язків, отриманих інтерлінаційним методом скінченних елементів та класичним методом скінченних елементів. Для оцінки точності наближеного розв'язку проводилося порівняння з точним розв'язком. Порівняння продемонструвало наступне: ІМСЕ для досягнення точності $O(\varepsilon^2)$ вимагає розв'язання на порядок меншого числа диференціальних рівнянь порівняно з класичним МСЕ.

Висновки до розділу 3

У розділі досліджено деякі аспекти чисельної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності.

1. Досліджено вплив способу нумерації вузлів в ІМСЕ на вигляд матриць в системі ЗДР, що виникає при наближеному розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності.

2. Вперше при чисельній реалізації розв'язання нестационарних задач теплопровідності запропоновано використовувати спеціальну нумерацію вузлів елементів, яка дозволяє в системі звичайних диференціальних рівнянь $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$, що виникає при застосуванні ІМСЕ, зберегти блочно-

трьохдіагональну структуру матриць A і B . Це спрощує обчислювальну реалізацію, оскільки робота буде виконуватись з відомими типами матриць, для яких існують ефективні обчислювальні схеми. Використання системи нумерації вузлів у запропонованому ІМСЕ, тісно пов'язаною зі структурою наближеного розв'язку, дозволяє зменшити час розв'язання задачі Коші для системи ЗДР.

3. Вперше для тестування наближувачих та обчислювальних властивостей ІМСЕ розроблено метод побудови точних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для областей складної форми, що дозволяє провести аналіз похибки наближення шляхом порівняння з точним розв'язком.

4. Викладено покроковий алгоритм знаходження наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності з використанням ІМСЕ.

Основні результати розділу 3 опубліковано у роботах [55, 58, 60, 82, 101].

РОЗДІЛ 4

ОПИС РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

В цьому розділі наведено опис та аналіз результатів обчислювального експерименту при розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності за допомогою ІМСЕ для різних областей.

4.1 Дослідження нестационарного температурного поля в прямокутній пластині

Розглянемо наступну задачу. Знайти розподіл температури $u(x, y, t)$ в довільний момент часу $t \in [0, T]$ всередині однорідної квадратної пластини $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, якщо її границя підтримується при нульовій температурі, початковий розподіл температури визначається функцією $\varphi(x, y)$, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла – функцією $f(x, y, t)$.

Шукана функція $u(x, y, t)$ є розв'язком наступного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t) \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0) \quad (4.1)$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (4.2)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (4.3)$$

де $\Gamma = \{x = 0, 0 \leq y \leq 1; x = 1, 0 \leq y \leq 1; y = 0, 0 \leq x \leq 1; y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ – границя області D .

Знайдемо наближений розв'язок задачі інтерлінаційним методом скінченних елементів.

Розіб'ємо область D на скінченні елементи прямими лініями $x = x_k$, $k = \overline{0, n}$ та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{0, n}$. В результаті область D розіб'ється на прямокутні елементи

$$\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq D, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Наближений розв'язок задачі (4.1) – (4.3) шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n^2-1} C_{kn, j}(t) h(nx - k) h(n^2 y - j) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n^2-1} C_{i, \ell n}(t) h(n^2 x - i) h(ny - \ell) - \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn, \ell n}(t) h(nx - k) h(ny - \ell). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Позначимо: в першій сумі $h(nx - k)h(n^2 y - j) = \varphi_{kn, j}$, $j \neq n, 2n, \dots$, в другій сумі $h(n^2 x - i)h(ny - \ell) = \varphi_{i, \ell n}$, $i \neq n, 2n, \dots$, в третій сумі $h(nx - k)h(ny - \ell) = \varphi_{kn, \ell n}$. Отримаємо:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1, j \neq n, 2n, \dots}^{n^2-1} C_{kn, j}(t) \varphi_{kn, j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i=1, i \neq n, 2n, \dots}^{n^2-1} C_{i, \ell n}(t) \varphi_{i, \ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn, \ell n}(t) \varphi_{kn, \ell n} \quad (4.5)$$

Згідно з методом локального потенціалу та теорією варіаційного числення, сформульована задача еквівалентна варіаційній задачі для функціоналу

$$\begin{aligned} J(u, t) = & \iint_D \left[a^2 \left(\left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - f(x, y, t) \right) u(x, y, t) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

на класі функцій $u(x, y, t)$, диференційованих в області D , задовольняючих умову (4.3) і таких, що $J(u, t) < \infty \quad \forall t \geq 0$, тобто задачі про знаходження

функції, яка належить вказаному класу функцій і на якій функціонал приймає мінімальне значення. При мінімізації виразу (4.4) доданок $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ не підлягає варіації.

$$\begin{aligned}
 J(C, t) = & \\
 = & \iint_D \left[a^2 \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_x + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_x \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_y + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_y \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \varphi_{kn,j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \varphi_{i,\ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \varphi_{kn,\ell n} - f(x, y, t) \right) \times \right. \\
 & \left. \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) \varphi_{kn,j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) \varphi_{i,\ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) \varphi_{kn,\ell n} \right) \right] dx dy \rightarrow \min_C.
 \end{aligned}$$

Для спрощення запису в подальшому будемо вважати $a^2 = 1$, що досягається введенням безрозмірних змінних.

Застосовуючи необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних

$$\begin{cases} \frac{\partial J(C, t)}{\partial C_{k'n, j'}} = 0, & k' = \overline{1, n-1}, j' = \overline{1, n^2-1}, j' \neq n, 2n, \dots, \\ \frac{\partial J(C, t)}{\partial C_{i', \ell'n}} = 0, & \ell' = \overline{1, n-1}, i' = \overline{1, n^2-1}, i' \neq n, 2n, \dots, \\ \frac{\partial J(C, t)}{\partial C_{k'n, \ell'n}} = 0, & k' = \overline{1, n-1}, \ell' = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \iint_D \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_x + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_x \right) (\varphi_{k'n,j'})'_x + \right. \\
& + \left. \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_y + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_y \right) (\varphi_{k'n,j'})'_y + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \varphi_{kn,j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \varphi_{i,\ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \varphi_{kn,\ell n} - f(x,y,t) \right) \varphi_{k'n,j'} \right] dx dy = 0 \\
& k' = \overline{1, n-1}; \quad j' = \overline{1, n^2-1}, \quad j' \neq n, 2n, \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_D \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_x + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_x \right) (\varphi_{i',\ell n})'_x + \right. \\
& + \left. \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_y + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_y \right) (\varphi_{i',\ell n})'_y + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \varphi_{kn,j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \varphi_{i,\ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \varphi_{kn,\ell n} - f(x,y,t) \right) \varphi_{i',\ell n} \right] dx dy = 0 \\
& \ell' = \overline{1, n-1}; \quad i' = \overline{1, n^2-1}, \quad i' \neq n, 2n, \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_D \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_x + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_x \right) (\varphi_{k'n,\ell n})'_x + \right. \\
& + \left. \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) (\varphi_{kn,j})'_y + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) (\varphi_{i,\ell n})'_y + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) (\varphi_{kn,\ell n})'_y \right) (\varphi_{k'n,\ell n})'_y + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \varphi_{kn,j} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \varphi_{i,\ell n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \varphi_{kn,\ell n} - f(x,y,t) \right) \varphi_{k'n,\ell n} \right] dx dy = 0 \\
& k' = \overline{1, n-1}; \quad \ell' = \overline{1, n-1},
\end{aligned}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,j})'_x (\varphi_{k'n,j'})'_x + (\varphi_{kn,j})'_y (\varphi_{k'n,j'})'_y \right] dx dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i, \ell n})'_x (\varphi_{k'n, j'})'_x + (\varphi_{i, \ell n})'_y (\varphi_{k'n, j'})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn, \ell n})'_x (\varphi_{k'n, j'})'_x + (\varphi_{kn, \ell n})'_y (\varphi_{k'n, j'})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn, j}(t) \iint_D \varphi_{kn, j} \varphi_{k'n, j'} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i, \ell n}(t) \iint_D \varphi_{i, \ell n} \varphi_{k'n, j'} dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn, \ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn, \ell n} \varphi_{k'n, j'} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{k'n, j'} dx dy,
\end{aligned}$$

$$k' = \overline{1, n-1}; \quad j' = \overline{1, n^2-1}, \quad j' \neq n, 2n, \dots$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn, j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn, j})'_x (\varphi_{i', \ell' n})'_x + (\varphi_{kn, j})'_y (\varphi_{i', \ell' n})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i, \ell n})'_x (\varphi_{i', \ell' n})'_x + (\varphi_{i, \ell n})'_y (\varphi_{i', \ell' n})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn, \ell n})'_x (\varphi_{i', \ell' n})'_x + (\varphi_{kn, \ell n})'_y (\varphi_{i', \ell' n})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn, j}(t) \iint_D \varphi_{kn, j} \varphi_{i', \ell' n} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i, \ell n}(t) \iint_D \varphi_{i, \ell n} \varphi_{i', \ell' n} dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn, \ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn, \ell n} \varphi_{i', \ell' n} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{i', \ell' n} dx dy,
\end{aligned}$$

$$\ell' = \overline{1, n-1}; \quad i' = \overline{1, n^2-1}, \quad i' \neq n, 2n, \dots$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn, j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn, j})'_x (\varphi_{k'n, \ell' n})'_x + (\varphi_{kn, j})'_y (\varphi_{k'n, \ell' n})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i, \ell n})'_x (\varphi_{k'n, \ell' n})'_x + (\varphi_{i, \ell n})'_y (\varphi_{k'n, \ell' n})'_y \right] dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn, \ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn, \ell n})'_x (\varphi_{k'n, \ell' n})'_x + (\varphi_{kn, \ell n})'_y (\varphi_{k'n, \ell' n})'_y \right] dx dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \iint_D \varphi_{kn,j} \varphi_{k'n,\ell'n} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{i,\ell n} \varphi_{k'n,\ell'n} dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn,\ell n} \varphi_{k'n,\ell'n} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{k'n,\ell'n} dx dy, \\
& k' = \overline{1, n-1}; \quad \ell' = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \iint_D \varphi_{kn,j} \varphi_{k'n,j'} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{i,\ell n} \varphi_{k'n,j'} dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn,\ell n} \varphi_{k'n,j'} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{k'n,j'} dx dy - \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,j})'_x (\varphi_{k'n,j'})'_x + (\varphi_{kn,j})'_y (\varphi_{k'n,j'})'_y \right] dx dy - \\
& - \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i,\ell n})'_x (\varphi_{k'n,j'})'_x + (\varphi_{i,\ell n})'_y (\varphi_{k'n,j'})'_y \right] dx dy - \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,\ell n})'_x (\varphi_{k'n,j'})'_x + (\varphi_{kn,\ell n})'_y (\varphi_{k'n,j'})'_y \right] dx dy, \\
& k' = \overline{1, n-1}; \quad j' = \overline{1, n^2-1}, \quad j' \neq n, 2n, \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \iint_D \varphi_{kn,j} \varphi_{i',\ell'n} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{i,\ell n} \varphi_{i',\ell'n} dx dy + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn,\ell n} \varphi_{i',\ell'n} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{i',\ell'n} dx dy - \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,j})'_x (\varphi_{i',\ell'n})'_x + (\varphi_{kn,j})'_y (\varphi_{i',\ell'n})'_y \right] dx dy - \\
& - \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i,\ell n})'_x (\varphi_{i',\ell'n})'_x + (\varphi_{i,\ell n})'_y (\varphi_{i',\ell'n})'_y \right] dx dy -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,\ell n})'_x (\varphi_{i',\ell n})'_x + (\varphi_{kn,\ell n})'_y (\varphi_{i',\ell n})'_y \right] dx dy,$$

$$\ell' = \overline{1, n-1}; \quad i' = \overline{1, n^2-1}, \quad i' \neq n, 2n, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{kn,j}(t) \iint_D \varphi_{kn,j} \varphi_{k'n,\ell n} dx dy + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C'_{i,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{i,\ell n} \varphi_{k'n,\ell n} dx dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C'_{kn,\ell n}(t) \iint_D \varphi_{kn,\ell n} \varphi_{k'n,\ell n} dx dy = \iint_D f(x, y, t) \varphi_{k'n,\ell n} dx dy -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{kn,j}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,j})'_x (\varphi_{k'n,\ell n})'_x + (\varphi_{kn,j})'_y (\varphi_{k'n,\ell n})'_y \right] dx dy -$$

$$-\sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n, 2n, \dots}}^{n^2-1} C_{i,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{i,\ell n})'_x (\varphi_{k'n,\ell n})'_x + (\varphi_{i,\ell n})'_y (\varphi_{k'n,\ell n})'_y \right] dx dy -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} C_{kn,\ell n}(t) \iint_D \left[(\varphi_{kn,\ell n})'_x (\varphi_{k'n,\ell n})'_x + (\varphi_{kn,\ell n})'_y (\varphi_{k'n,\ell n})'_y \right] dx dy,$$

$$k' = \overline{1, n-1}; \quad \ell' = \overline{1, n-1}.$$

Розв'язок цієї системи, знайдений будь-яким методом, наприклад, методом Рунге–Кутта, визначає температуру в будь-який момент часу у вибраних вузлах сітки, а також дозволяє обчислити температуру в довільній точці пластини за формулою (4.5) у вибраний момент часу.

Щоб продемонструвати ефективність запропонованого інтерлінаційного методу скінченних елементів для нестационарної задачі теплопровідності, розв'яжемо цю ж задачу (4.1) – (4.3) класичним методом скінченних елементів.

Аналогічно попередньому, розіб'ємо область D на скінченні елементи прямими лініями $x = x_i = \frac{i}{M}$, $y = y_j = \frac{j}{N}$, $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, N}$, де M , N – цілі додатні числа (в загальному випадку $M \neq N$). В результаті отримаємо типові прямокутні елементи $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq D$. Сформульована задача еквівалентна варіаційній задачі (4.6).

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u_{\pi}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h(Mx - i) h(Ny - j), \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

де $h(z) = 0,5(|z-1| - 2|z| + |z+1|)$, а функції $C_{ij}(t)$ підлягають визначенню.

Маємо: $u_{\pi}(x, y, t) = 0, (x, y) \in \Gamma$.

$$h(Mx - p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = x_p, \\ 0, & \text{якщо } x = x_i, i \neq p; \end{cases} \quad h(Ny - q) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y = y_q, \\ 0, & \text{якщо } y = y_j, j \neq q. \end{cases}$$

Звідси $u_{\pi}(x_i, y_j, t) = C_{ij}(t), i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}$, де (x_i, y_j) – вузлові точки розбиття D на прямокутники, $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$.

Враховуючи властивості функцій $h(Mx - i)$ і $h(Ny - j)$, можна довести, що $J(u_{\pi}, t) < \infty \quad \forall |C_{ij}(t)| < \infty, i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}$. Підставляємо u_{π} у (4.6):

$$\begin{aligned} J(u_{\pi}, t) = & a^2 \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx - i) h(Ny - j) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h(Mx - i) h'_y(Ny - j) \right)^2 \right] dx dy + \\ & + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C'_{ij}(t) h(Mx - i) h(Ny - j) - f(x, y, t) \right) \times \\ & \times \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h(Mx - i) h(Ny - j) dx dy. \end{aligned}$$

Застосовуючи необхідні умови екстремуму $\frac{\partial F}{\partial C_{pq}} = 0, p = \overline{1, M-1},$

$q = \overline{1, N-1}$, одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$2a^2 \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx - i) h(Ny - j) \right) h'_x(Mx - p) h(Ny - q) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) h(Mx-i) h'_y(Ny-j) \right] h(Mx-p) h'_y(Ny-q) dx dy + \\
& + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C'_{ij}(t) h(Mx-i) h(Ny-j) - f(x,y,t) \right) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy = 0, \\
& p = \overline{1, M-1}, \quad q = \overline{1, N-1},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& a^2 \left[\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h'_x(Mx-i) h(Ny-j) h'_x(Mx-p) h(Ny-q) dx dy + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h(Mx-i) h'_y(Ny-j) h(Mx-p) h'_y(Ny-q) dx dy \right] + \\
& + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C'_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h(Mx-i) h(Ny-j) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy - \\
& - \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,t) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy = 0, \quad p = \overline{1, M-1}, \quad q = \overline{1, N-1}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Враховуючи фінітність функцій $h(Mx-p)$, $h(Ny-q)$, зазначимо, що в кожній з подвійних сум системи рівнянь (4.7) залишиться не більше дев'яти доданків. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
& a^2 \left[\sum_{i=p-1}^{p+1} \sum_{j=q-1}^{q+1} C_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h'_x(Mx-i) h(Ny-j) h'_x(Mx-p) h(Ny-q) dx dy + \right. \\
& \left. + \sum_{i=p-1}^{p+1} \sum_{j=q-1}^{q+1} C_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h(Mx-i) h'_y(Ny-j) h(Mx-p) h'_y(Ny-q) dx dy \right] + \\
& + \sum_{i=p-1}^{p+1} \sum_{j=q-1}^{q+1} C'_{ij}(t) \int_0^1 \int_0^1 h(Mx-i) h(Ny-j) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy - \\
& - \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,t) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy = 0, \quad p = \overline{1, M-1}, \quad q = \overline{1, N-1}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Якщо ввести позначення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{pqij} = \int_0^1 \int_0^1 h(Mx-i)h(Ny-j)h(Mx-p)h(Ny-q)dx dy, \\ \beta_{pqij} = \int_0^1 \int_0^1 (h'_x(Mx-i)h(Ny-j)h'_x(Mx-p)h(Ny-q) + \\ \quad + h(Mx-i)h'_y(Ny-j)h(Mx-p)h'_y(Ny-q))dx dy, \\ \gamma_{pq}(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,t)h(Mx-p)h(Ny-q)dx dy, \end{array} \right.$$

то систему диференціальних рівнянь (4.8) можна представити у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{pqij} C'_{ij}(t) = -a^2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{pqij} C_{ij}(t) + \gamma_{pq}(t), \quad p = \overline{1, M-1}, \quad q = \overline{1, N-1}. \quad (4.9)$$

Зазначимо, що α_{pqij} і β_{pqij} обчислюються аналітично.

Отримана система (4.9) – це система $(M-1)(N-1)$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно $C_{ij}(t)$. Початкові умови розглядуваної задачі мають вигляд:

$$C_{ij}(0) = \varphi(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (4.10)$$

Таким чином, для знаходження невідомих функцій $C_{ij}(t)$ потрібно розв'язати задачу Коші (4.9)–(4.10) будь-яким із відомих методів.

Як ілюстрація до викладеного, розглянемо наступні задачі.

Задача 4.1. Знайти наближений розв'язок початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, y, 0) = x(1-x)y(1-y),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$f(x, y, t) = e^{-\gamma t} \left[2a^2 (x(1-x) + y(1-y)) - \gamma x(1-x)y(1-y) \right]$$

(a, γ – деякі сталі), точний розв’язок якої $u(x, y, t) = x(1-x)y(1-y)e^{-\gamma t}$.

В таблиці 4.1 наведені значення наближеного розв’язку, отриманого ІМСЕ, та точного розв’язку в точках пластини $(0.5, 0.5)$ (другий, третій та четвертий стовпці), та $(0.5, 0.75)$ (четвертий, п’ятий та шостий стовпці) в моменти часу $t = 0,001; 0,01; 0,1$ при $a = 1, \gamma = 1$.

При застосуванні ІМСЕ розрахунки проводилися з використанням лише п’яти вузлів (див. рис. 4.1), тобто при $n = 2$.

Таблиця 4.1 – Значення наближеного та точного розв’язків в точках пластини

Час t	Точка (0,5; 0,5)			Точка (0,5; 0,75)		
	Точний розв’язок	Наближений розв’язок ІМСЕ	Наближений розв’язок МСЕ	Точний розв’язок	Наближений розв’язок ІМСЕ	Наближений розв’язок МСЕ
0,001	0,06244	0,06200	0,06246	0,04683	0,04696	0,04687
0,01	0,06188	0,05973	0,06224	0,04641	0,04739	0,04681
0,1	0,05655	0,05677	0,05890	0,04241	0,04570	0,04426

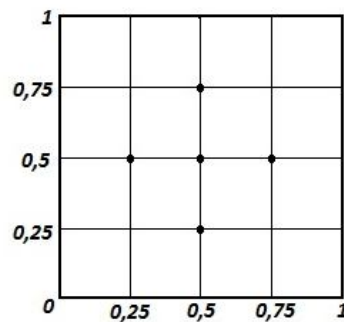


Рисунок 4.1 – Вузли розбиття області $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

Для порівняння наближений розв’язок отриманий також класичним МСЕ при розбитті області інтегрування на елементи прямими $x = \frac{i}{4}, y = \frac{j}{4}, i, j = \overline{1,3}$. Тобто в класичному варіанті МСЕ розв’язувалась задача Коші для системи 9 диференціальних рівнянь з 9 невідомими функціями $C_{ij}(t)$. В методі ІМСЕ,

запропонованому в даній роботі, ці дані порівнювались з даними, отриманими при розв'язанні всього 5 диференціальних рівнянь з 5 невідомими функціями $u(0.5, 0.5, t)$, $u(0.5, 0.25, t)$, $u(0.5, 0.75, t)$, $u(0.25, 0.5, t)$, $u(0.75, 0.5, t)$. На рис. 4.2 наведені графіки точного і наближеного (отриманого ІМСЕ) розв'язків у точках $(0,5; 0,5)$, $(0,5; 0,75)$.

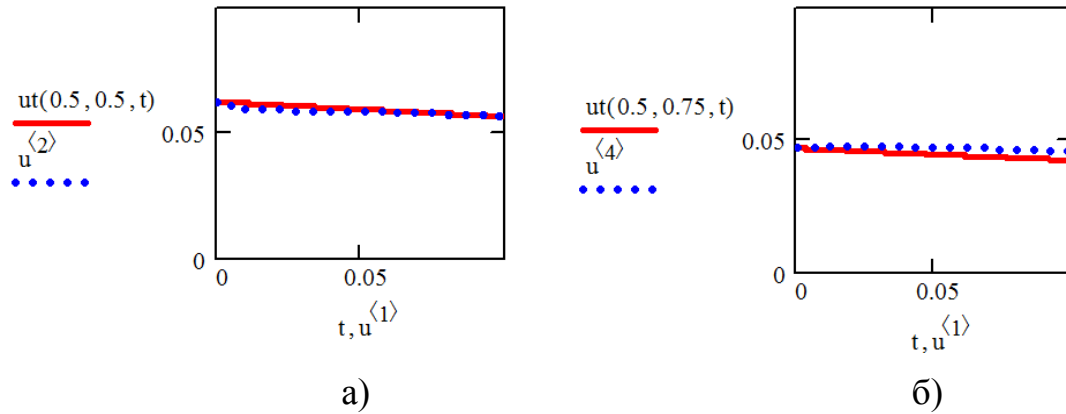


Рисунок 4.2 – Графіки точного і наближеного (отриманого ІМСЕ) розв'язків: а) у точці $(0,5; 0,5)$; б) у точці $(0,5; 0,75)$

Опис програми обчислювальної реалізації цієї задачі в комп'ютерній системі MathCAD наведено в додатку А.

Задача 4.2. Знайти наближений розв'язок початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u(x_1, y_1, t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x_1, y_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, y_1, t)}{\partial y_1^2} \right) + f(x_1, y_1, t), \quad (4.11)$$

$$(x_1, y_1) \in \Omega = [0, \ell] \times [0, \ell] \quad t > 0,$$

$$u(x_1, y_1, 0) = \varphi(x_1, y_1), \quad (x_1, y_1) \in \bar{\Omega}, \quad (4.12)$$

$$u(x_1, y_1, t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.13)$$

Для безрозмірних змінних $x = \frac{x_1}{\ell}$, $y = \frac{y_1}{\ell}$, $Fo = \frac{a^2 t}{\ell^2}$, $u^* = \frac{u}{u_0}$ (u_0 – стала,

яка має розмірність температури) задача (4.11) – (4.13) набуває вигляду:

$$\frac{\partial u^*(x, y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 u^*(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*(x, y, Fo)}{\partial y^2} + f^*(x, y, Fo),$$

$$u^*(x, y, 0) = \varphi^*(x, y), (x, y) \in G = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u^*(x, y, Fo) \Big|_{\partial G} = 0 \quad \forall Fo \geq 0.$$

Для випадку $\varphi^*(x, y) = A \cdot x(1-x)y(1-y)$,

$$f^*(x, y, Fo) = e^{-\lambda \cdot Fo} \cdot (-\lambda \cdot x(1-x)(1-y) + 2y(1-y) + 2x(1-x))$$

точний розв'язок задачі: $u^*(x, y, Fo) = A \cdot e^{-\lambda \cdot Fo} x(1-x)y(1-y)$.

В табл. 4.2 – 4.5 наведено результати обчислювального експерименту при розв'язанні цієї задачі запропонованим методом (ІМСЕ) та класичним методом (МСЕ) при умові, що відповідні системи диференціальних рівнянь розв'язувались методом Рунге-Кутта з фіксованим кроком ΔFo : $\Delta Fo = 0,001$ (при $M=3, N=3$), $\Delta Fo = 0,0001$ (при $M=4, N=4$) при $\lambda = 1$.

Таблиця 4.2 – Значення максимальних похибок наближення шуканого розв'язку у вузлах інтерлінації та на всьому прямокутнику при $M=3, N=3$

A	Число Фур'є	Похибки у вузлах		Похибки на прямокутнику	
		ІМСЕ	МСЕ	ІМСЕ	МСЕ
1	0,01	0,00056	0,000074	0,00174	0,00145
	0,1	0,00047	0,000428	0,00104	0,00096
	0,5	0,00038	0,000344	0,00060	0,00059
	1,0	0,00023	0,000209	0,00036	0,00036
10	0,01	0,00563	0,000737	0,01740	0,01446
	0,1	0,00468	0,00428	0,01041	0,0096
	0,5	0,00375	0,003441	0,00602	0,00586
	1,0	0,00228	0,002087	0,00365	0,00355
20	0,01	0,01126	0,001474	0,03480	0,02892
	0,1	0,00937	0,008561	0,02083	0,01919
	0,5	0,00750	0,006882	0,01203	0,01172
	1,0	0,00455	0,004174	0,00730	0,00711

Таблиця 4.3 – Значення максимальних похибок наближення шуканого розв'язку у вузлах інтерлінації та на всьому прямокутнику при $M=4$, $N=4$

A	Число Фур'є	Похибки у вузлах		Похибки на прямокутнику	
		IMSE	MSE	IMSE	MSE
1	0,01	0,000192	0,000023	0,000560	0,00046
	0,1	0,000168	0,000137	0,000322	0,0003
	0,5	0,000146	0,00011	0,000181	0,00019
	1,0	0,000089	0,000067	0,000110	0,00011
10	0,01	0,001921	0,000231	0,005643	0,00457
	0,1	0,001685	0,001367	0,003220	0,00304
	0,5	0,001460	0,001104	0,001808	0,00185
	1,0	0,000886	0,00067	0,001096	0,00112
20	0,01	0,003842	0,000462	0,011287	0,00914
	0,1	0,003369	0,002734	0,006440	0,00607
	0,5	0,002920	0,002209	0,003615	0,00370
	1,0	0,001771	0,00134	0,002192	0,00224

Таблиця 4.4 – Значення максимальних відносних похибок наближення шуканого розв'язку у вузлах інтерлінації та на всьому прямокутнику при $M=3$, $N=3$

A	Число Фур'є	Похибки у вузлах		Похибки на прямокутнику	
		IMSE	MSE	IMSE	MSE
1	0,01	0,011516	0,005210	0,226475	0,189633
	0,1	0,023580	0,011519	0,215373	0,184547
	0,5	0,025813	0,012691	0,213797	0,183603
	1,0	0,025814	0,012692	0,213796	0,183602

Таблиця 4.5 – Значення максимальних відносних похибок наближення шуканого розв’язку у вузлах інтерлінації та на всьому прямокутнику при $M=4$, $N=4$

A	Число Фур’є	Похибки у вузлах		Похибки на прямокутнику	
		ІМСЕ	МСЕ	ІМСЕ	МСЕ
1	0,01	0,007290	0,003042	0,125516	0,100520
	0,1	0,012166	0,005743	0,121060	0,098098
	0,5	0,012908	0,006243	0,120475	0,097650
	1,0	0,012908	0,006243	0,120475	0,097650

Аналіз результатів обчислювального експерименту дозволяє зробити наступні висновки:

1) максимальна похибка при $A > 1$ дорівнює добутку значень A і максимальної похибки при $A = 1$;

2) похибка зменшується при збільшенні числа Фур’є Fo (це можна пояснити тим, що праві частини в системі диференціальних рівнянь зменшуються при збільшенні числа Фур’є) у $e^{-\lambda^* Fo}$ разів, якщо задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь розв’язується точно;

3) похибка $\varepsilon = O(10^{-3})$ при $M = N = 3$ досягалася при використанні в 2,4 рази більшої кількості диференціальних рівнянь в МСЕ (класичному) порівняно з ІМСЕ (інтерлінаційним) та при $M = N = 4$ в 2,8 рази більшої кількості диференціальних рівнянь в МСЕ порівняно з ІМСЕ. В загальному випадку інтерлінаційний МСЕ вимагає $(n-1)^2(2n+1)$ кількості рівнянь, що на порядок менше, ніж в класичному МСЕ – $(n^2-1)^2$ рівнянь.

Опис програми обчислювальної реалізації цієї задачі в комп’ютерній системі MathCAD наведено в додатку Б. В додатку В – опис програмної реалізації розв’язання задачі нестационарної теплопровідності класичним МСЕ.

На рис. 4.3, 4.4 представлені графіки точного та наближеного розв'язків.

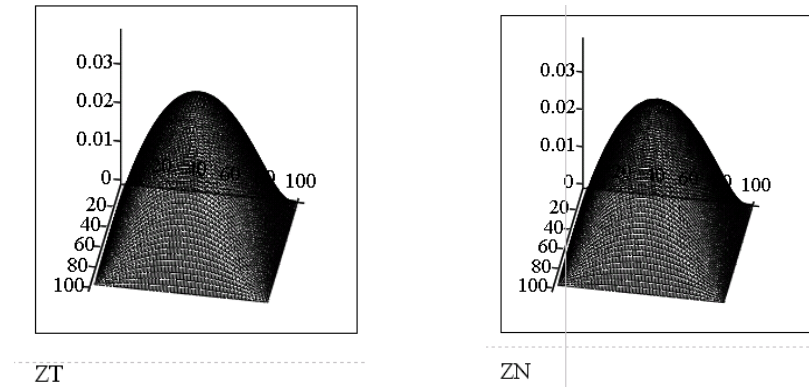


Рисунок 4.3 – Графічне зображення точного (ZT) та наближеного (ZN) розв'язків при $M = N = 4$, $Fo = 0,5$

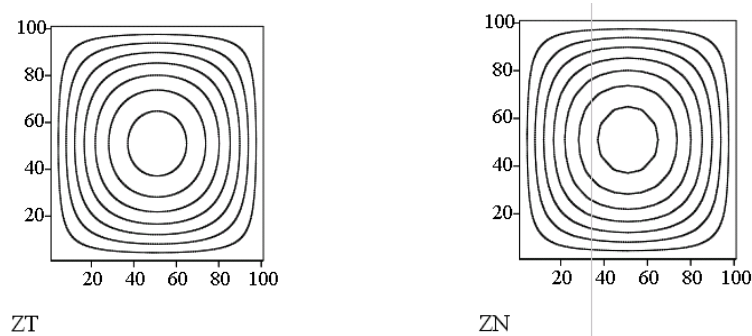


Рисунок 4.4 – Графічне зображення ліній рівня точного (ZT) та наближеного (ZN) розв'язків при $M = N = 4$, $Fo = 0,5$

Отже, при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності для квадратної пластини з похибкою $O(\varepsilon^2)$ класичним МСЕ необхідно розв'язувати задачу Коші для системи n^4 звичайних диференціальних рівнянь. Використання сплайн-інтерполяції функції $u(x, y, t) \in C^{2,2,\infty}(G \times R^+)$ за просторовими змінними x , y , побудованої на основі сплайн-інтерлінації цих функцій, дозволяє зменшити на порядок кількість диференціальних рівнянь для досягнення тієї самої за порядком точності. Зокрема, для прямокутної області замість розв'язання n^4 диференціальних рівнянь достатньо розв'язати $2n^3$ диференціальних рівнянь, наприклад, при $n = 10$ в 5 раз меншу кількість рівнянь.

4.2 Застосування ІМСЕ для дослідження процесу поширення тепла в області, що є об'єднанням прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат

Задача 4.3. Знайти наближений розв'язок початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (4.15)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = 0, \quad (4.16)$$

де область G – Т-подібна область – вертикальний переріз балки (рис. 4.5).

Функція $f(x, y, t)$ має вигляд (при $a = 1$):

$$f(x, y, t) = e^{-\beta t} (-\beta w(x, y) - \Delta w(x, y)),$$

де

$$w(x, y) = \omega_1(x, y) \vee_{\alpha(x, y)} \omega_2(x, y), \quad (4.17)$$

$$\omega_1(x, y) = (a^2 - x^2)y(b - y), \quad \omega_2(x, y) = (c^2 - x^2)y(d - y),$$

$$u \vee_{\alpha} v = u + v + \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv}, \quad u \wedge_{\alpha} v = u + v - \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv},$$

$$\alpha = \alpha(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}.$$

Згідно з методом R -функцій [83], функції $u \vee_{\alpha} v$ і $u \wedge_{\alpha} v \in R$ -диз'юнкцією і R -кон'юнкцією відповідно, тобто функція $w(x, y)$ буде мати властивості: $w(x, y) > 0$, якщо $(x, y) \in G$; $w(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \in \partial G$.

Враховуємо наступні властивості R -операцій:

$$u \wedge_{\alpha} v > 0, \quad \text{якщо } u > 0 \text{ або } v > 0,$$

$$u \wedge_{\alpha} v < 0, \quad \text{якщо } u < 0 \text{ і } v < 0,$$

$$u \vee_{\alpha} v = 0, \quad \text{якщо } u = 0, \quad v \leq 0 \text{ або } v = 0, \quad u \leq 0.$$

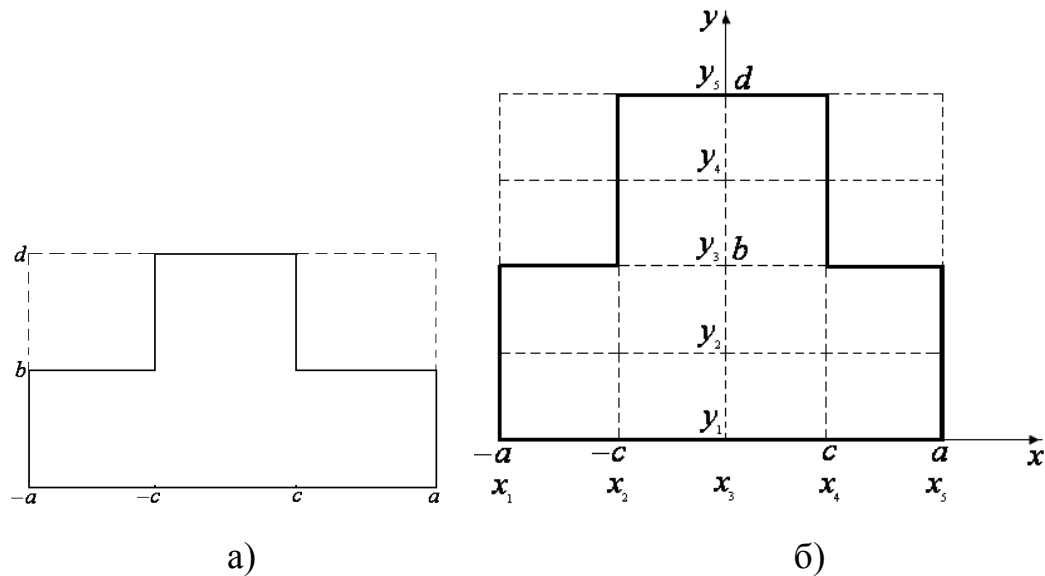


Рисунок 4.5 – Область інтегрування: а) Т-подібна область – вертикальний переріз балки; б) область $G = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi_1 = [-a, a] \times [0, b]$, $\Pi_2 = [-c, c] \times [0, d]$

Враховуючи, що в формулі (4.17) $\omega_1(x, y) > 0$ і $\omega_2(x, y) > 0$ не тільки в прямокутниках Π_1 і Π_2 , то $w(x, y) > 0$ не тільки в області G . Але на границі області G вона дорівнює нулю, тобто $w(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial G$. Це дозволяє стверджувати, що $w(x, y) > 0$, якщо $(x, y) \in G$, і $w(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \in \partial G$, тобто функція $w(x, y)$ може розглядатися, як точний розв'язок поставленої задачі.

Для наближеного розв'язання задачі 4.3 область інтегрування розбивалася на прямокутні елементи прямими $x = x_k$, $k = \overline{1, M_1}$ та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{1, M_2}$, $M = (M_1, M_2)$, $-a = x_1 < x_2 < \dots < x_{M_1} = a$; $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_{M_2} = d$. При цьому $\exists k', k'' : x_{k'} = -c$; $x_{k''} = c$ та $\exists \ell : y_\ell = b$.

Схема розбиття області G на прямокутники зображена на рис. 4.6.

Згідно з методом, наближений розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u_M(x, y, t) = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{s=0}^1 \psi_{ks}(y, t) h_{ks}(x) + \sum_{\ell=1}^{M_2} \sum_{p=0}^1 \varphi_{\ell p}(x, t) H_{\ell p}(y) - \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=1}^{M_2} \sum_{p=0}^1 C_{ks\ell p}(t) h_{ks}(x) H_{\ell p}(y),$$

де невідомі функції $\psi_k(y, t)$, $\varphi_\ell(x, t)$ знаходяться у вигляді:

$$\varphi_\ell(x, t) = \sum_{q=1}^{M_1} C_{q\ell}(t) h_q(x), \quad h_q(x) = h(M_1 x - q),$$

$$\psi_k(y, t) = \sum_{m=1}^{M_2} C_{km}(t) H_m(y), \quad H_m(y) = h(M_2 y - m),$$

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -1, \\ 1+z, & -1 < z \leq 0, \\ 1-z, & 0 < z < 1, \\ 0, & z \geq 1. \end{cases}$$

Зокрема, якщо $M_1 = M_2 = 5$, то

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= 0, & \psi_1(y, t) &= 0, \\ \varphi_2(x, t) &= \sum_{q=2}^4 C_{q2}(t) h_q(x), & \psi_2(y, t) &= \begin{cases} C_{22}(t) H_2(y), & y_1 \leq y < y_3 \\ 0, & y_3 \leq y \leq y_5 \end{cases} \\ \varphi_3(x, t) &= \begin{cases} 0, & x_1 \leq x < x_2 \\ C_{33}(t) h_3(x), & x_2 \leq x \leq x_4 \end{cases} & \psi_3(y, t) &= \sum_{r=2}^4 C_{r3}(t) H_r(y), \quad y_1 \leq y < y_5, \\ \varphi_4(x, t) &= C_{34}(t) h_3(x), \quad x_2 \leq x \leq x_4, & \psi_4(y, t) &= C_{43}(t) H_2(y), \quad y_1 \leq y < y_3, \\ \varphi_5(x, t) &= 0, & \psi_5(y, t) &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, наближений розв'язок в явній формі можна записати:

$$u_M(x, y, t) = \sum_{k=2}^4 \psi_k(y, t) h_k(x) + \sum_{\ell=2}^4 \varphi_\ell(x, t) H_\ell(y) - \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{\ell=1}^{M_2} C_{k\ell}(t) h_k(x) H_\ell(y).$$

При проведенні обчислювального експерименту вважаємо, що $f(x, y, t) = 0$ в точках, які не належать області інтегрування.

При чисельній реалізації інтерлінаційного методу для нестационарної задачі теплопровідності, що досліджується в даній роботі, важливу роль відіграє нумерація вузлів. Нумерація вузлів проводиться так, як описано в пункті 3.1, а також представлено на рис. 4.6.

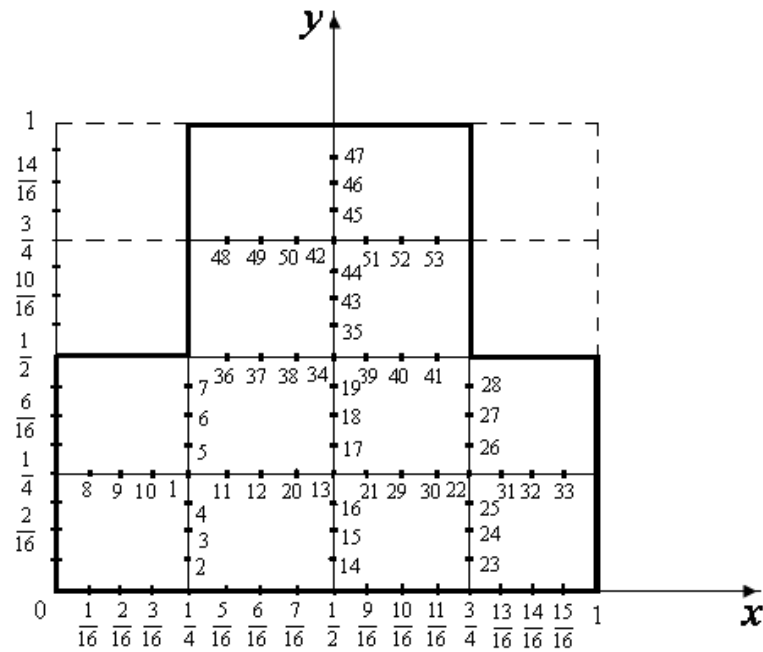


Рисунок 4.6 – Схема розбиття області G на прямокутники та нумерація вузлів при застосуванні ІМСЕ

Знайдений наближений розв'язок за допомогою ІМСЕ порівнювався з точним розв'язком $w(x, y)$ та наближенням, знайденим класичним МСЕ у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=1}^{M_2} \sum_{p=0}^1 C_{ks\ell p}(t) \tilde{h}_{ks}(x) \tilde{H}_{\ell p}(y).$$

Для практичної реалізації зручно базисні функції $h_{ij}(x)$ визначати на кожному з підінтервалів окремо з умов, щоб $h_{ks}^{s'}(x_{k'}) = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'}$, $0 \leq s, s' \leq 1$, $k, k' = \overline{1, M}$. Явні вирази для цих функцій на кожному з підінтервалів $[x_m, x_{m+1}]$, $M = \overline{1, M_1 - 1}$:

$$h_{m0}(x) = (x - x_{m+1})^2 \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} - \frac{2(x - x_m)}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\},$$

$$h'_{m0}(x) = 2(x - x_{m+1}) \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} - \frac{2(x - x_m)}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\} + (x - x_{m+1})^2 \left\{ -\frac{2}{(x_m - x_{m+1})^3} \right\},$$

$$h_{m0}(x_m) = 1, h_{m0}(x_{m+1}) = 0, h'_{m0}(x_m) = 0, h'_{m0}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m1}(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1})^2 \left\{ \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} \right\}, \quad h_{m1}(x_m) = 0, \quad h_{m1}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h'_{m1}(x) = \frac{1}{(x_m - x_{m+1})^2} \left((x - x_{m+1})^2 + 2(x - x_m)(x - x_{m+1}) \right),$$

$$h_{m1}(x_m) = 0, \quad h_{m1}(x_{m+1}) = 0, \quad h'_{m1}(x_m) = 1, \quad h'_{m1}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m+1,0}(x) = (x - x_m)^2 \left\{ \frac{1}{(x_{m+1} - x_m)^2} - \frac{2(x - x_{m+1})}{(x_{m+1} - x_m)^3} \right\},$$

$$h'_{m+1,0}(x) = -\frac{6}{(x_{m+1} - x_m)^3} (x - x_m)(x - x_{m+1}),$$

$$h_{m+1,0}(x_m) = 0, \quad h_{m+1,0}(x_{m+1}) = 1, \quad h'_{m+1,0}(x_m) = 0, \quad h'_{m+1,0}(x_{m+1}) = 0,$$

$$h_{m+1,1}(x) = (x - x_{m+1})^2 \frac{(x - x_m)^2}{(x_{m+1} - x_m)^2},$$

$$h_{m+1,1}(x_m) = 0, \quad h_{m+1,1}(x_{m+1}) = 0, \quad h'_{m+1,1}(x_m) = 0, \quad h'_{m+1,1}(x_{m+1}) = 1.$$

Запишемо основні формули розв'язання задачі класичним МСЕ.

Розіб'ємо область D на скінченні елементи прямими лініями $x = x_i = \frac{a}{M}i$

, $y = y_j = \frac{c}{N}j$, $i = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$ таким чином, щоб прямі $x = d$, $x = a - d$ і

$y = b$ входили в множину вказаних прямих: $x = d = \frac{a}{M} \cdot M_1$, $y = b = \frac{c}{N} \cdot N_1$,

$0 < M_1 < M - 1$, $0 < N_1 < N - 1$ (див. рис. 4.7). В результаті отримуємо типові прямокутні елементи $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq D$.

Маємо: $M = 8$, $M_1 = 2$, $M_2 = 2$, $N = 7$, $N_1 = 3$. При розбитті отримуємо 26 внутрішніх вузлів. Нумерація вузлів проводиться зліва направо і знизу вверх по кожній лінії.

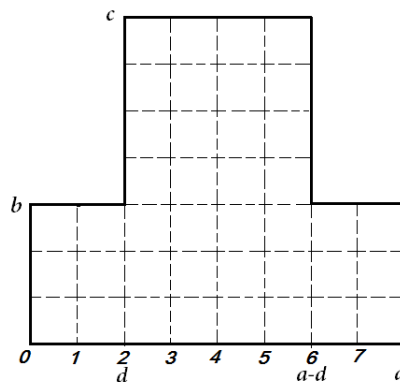


Рисунок 4.7 – Схема розбиття області G на прямокутники
(застосування МСЕ)

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx - i) h(Ny - j) + \sum_{k=M_1+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx - k) h(Ny - \ell) + \\ + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx - m) h(Ny - n).$$

Згідно з методом локального потенціалу та теорією варіаційного числення, задача (4.14) – (4.16) еквівалентна варіаційній задачі для функціоналу

$$J(u, t) = a^2 \iint_D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx - i) h(Ny - j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=M_1+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h'_x(Mx - k) h(Ny - \ell) + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h'_x(Mx - m) h(Ny - n) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx - i) h'_y(Ny - j) + \sum_{k=M_1+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx - k) h'_y(Ny - \ell) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx - m) h'_y(Ny - n) \right]^2 \right\} dx dy + \\ + 2 \iint_D \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C'_{ij}(t) h(Mx - i) h(Ny - j) + \sum_{k=M_1+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C'_{k\ell}(t) h(Mx - k) h(Ny - \ell) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C'_{mn}(t) h(Mx-m) h(Ny-n) - f(x,y,t) \right] + \\
& + \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx-m) h(Ny-n) \right] dx dy \rightarrow \min_c,
\end{aligned}$$

внаслідок чого для визначення невідомих функцій $C_{ij}(t)$, $C_{k\ell}(t)$, $C_{mn}(t)$ отримуємо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \iint_D \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C'_{ij}(t) h(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C'_{k\ell}(t) h(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C'_{mn}(t) h(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy = \\
& = -a^2 \iint_D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h'_x(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h'_x(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h'_x(Mx-p) h(Ny-q) + \right. \\
& \left. + \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx-i) h'_y(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx-k) h'_y(Ny-\ell) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx-m) h'_y(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-p) h'_y(Ny-q) \right\} dx dy + \\
& + \iint_D f(x,y,t) h(Mx-p) h(Ny-q) dx dy, \quad p = \overline{1, M_1}, \quad q = \overline{1, N_1-1}; \\
& \iint_D \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C'_{ij}(t) h(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C'_{k\ell}(t) h(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C'_{mn}(t) h(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-r) h(Ny-s) dx dy =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a^2 \iint_D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h'_x(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h'_x(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h'_x(Mx-r) h(Ny-s) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx-i) h'_y(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx-k) h'_y(Ny-\ell) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx-m) h'_y(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-r) h'_y(Ny-s) \right\} dx dy + \\
&\quad + \iint_D f(x, y, t) h(Mx-r) h(Ny-s) dx dy, \quad r = \overline{M_1+1, M-M_2-1}, \quad s = \overline{1, N-1}; \\
&\quad \iint_D \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C'_{ij}(t) h(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C'_{k\ell}(t) h(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C'_{mn}(t) h(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-t) h(Ny-z) dx dy = \\
&= -a^2 \iint_D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h'_x(Mx-i) h(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h'_x(Mx-k) h(Ny-\ell) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h'_x(Mx-m) h(Ny-n) \right] \cdot h'_x(Mx-t) h(Ny-z) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} C_{ij}(t) h(Mx-i) h'_y(Ny-j) + \sum_{k=M_2+1}^{M-M_2-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} C_{k\ell}(t) h(Mx-k) h'_y(Ny-\ell) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=M-M_2}^{M-1} \sum_{n=1}^{N_1-1} C_{mn}(t) h(Mx-m) h'_y(Ny-n) \right] \cdot h(Mx-t) h'_y(Ny-z) \right\} dx dy + \\
&\quad + \iint_D f(x, y, t) h(Mx-t) h(Ny-z) dx dy, \quad t = \overline{M-M_2, M-1}, \quad z = \overline{1, N_1-1}.
\end{aligned}$$

В таблиці 4.6 наведено результати обчислювального експерименту при $M = N = 4$, $M_1 = M_2 = 1$. Наведено результати обчислення точного розв'язку розподілу температури $u(x, y, t)$ та результати обчислення наближеного розв'язку, знайдені ІМСЕ, для різних значень часу t ($t = t_1 = 0,01$, $t = t_2 = 0,1$). В

силу симетрії точного і наближеного розв'язків в таблиці розміщені результати лише для частки точок розбиття.

Таблиця 4.6 – Результати обчислювального експерименту при $M = N = 4$, $M_1 = M_2 = 1$

Номери точок	Точний розв'язок		Наближений розв'язок (ІМСЕ)	
	$t_1 = 0,01$	$t = 0,1$	$t_1 = 0,01$	$t = 0,1$
2	0,201	0,168	0,208	0,174
14	0,268	0,224	0,277	0,230
3	0,345	0,288	0,355	0,297
15	0,460	0,384	0,475	0,394
4	0,431	0,360	0,443	0,368
16	0,574	0,480	0,596	0,492
8	0,144	0,120	0,150	0,126
9	0,268	0,224	0,279	0,232
10	0,373	0,312	0,386	0,320
1	0,459	0,384	0,471	0,388
11	0,527	0,440	0,523	0,430
12	0,574	0,480	0,523	0,468
20	0,603	0,504	0,615	0,503
13	0,613	0,512	0,640	0,525
5	0,431	0,360	0,441	0,361
17	0,576	0,481	0,582	0,472
6	0,345	0,288	0,334	0,271
18	0,575	0,480	0,540	0,435
7	0,201	0,168	0,173	0,139
19	0,603	0,504	0,593	0,480
36	0,268	0,224	0,239	0,193
37	0,459	0,384	0,453	0,368
38	0,574	0,480	0,594	0,484
34	0,613	0,512	0,652	0,531
35	0,603	0,504	0,631	0,519

Продовження таблиці 4.6

Номери точок	Точний розв'язок		Наближений розв'язок (ІМСЕ)	
	$t_1 = 0,01$	$t = 0,1$	$t_1 = 0,01$	$t = 0,1$
43	0,574	0,480	0,590	0,490
44	0,526	0,440	0,530	0,442
42	0,459	0,383	0,447	0,374
48	0,201	0,168	0,211	0,177
49	0,344	0,288	0,350	0,294
50	0,430	0,359	0,429	0,360
45	0,373	0,311	0,369	0,311
46	0,267	0,223	0,269	0,226
47	0,143	0,119	0,145	0,123

На рис. 4.8 зображено точний розв'язок задачі (4.14) – (4.16), побудований за допомогою R-функцій, та наближений розв'язок задачі при $t = 0,01$. Зауважимо, що максимальна похибка між розв'язками, наведеними на рис. 4.8, не перевищує 0,04.

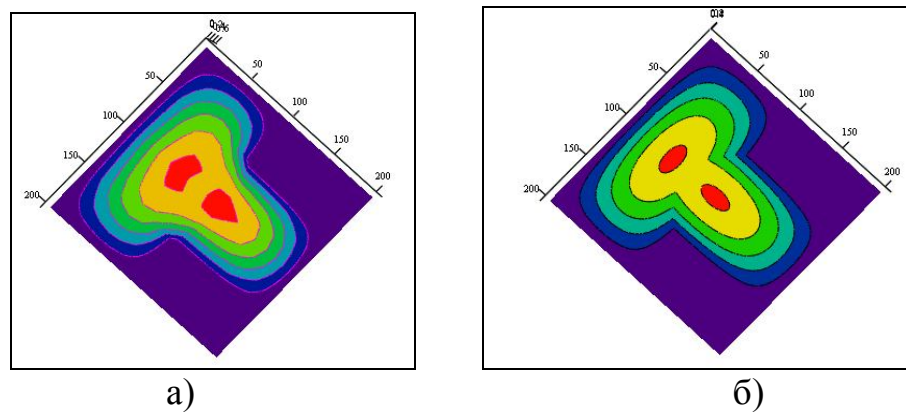


Рисунок 4.8 – Точний та наближений розв'язки задачі при $t = 0,01$: а) точний розв'язок, побудований за допомогою R-функцій; б) наближений розв'язок

На рис. 4.9 зображено графіки точного і наближеного (знайденого ІМСЕ) розв'язків (при $M = N = 4$) на лініях $y = y_2 = 0,25$, $x_1 \leq x \leq x_5$ (рис. 4.9 а),

$y = y_3 = 0,5$, $x_1 \leq x \leq x_5$ (рис. 4.9 б), $y = y_4 = 0,75$, $x_1 \leq x \leq x_5$ (рис. 4.9 в) при $t = 0,01$.

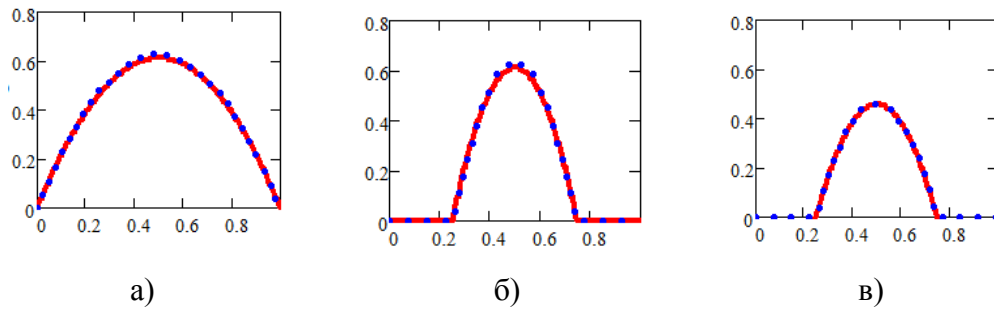


Рисунок 4.9 – Графіки точного і наближеного розв’язків задачі при $t = 0,01$, $x_1 \leq x \leq x_5$ на лініях: а) $y = y_2 = 0,25$, б) $y = y_3 = 0,5$, в) $y = y_4 = 0,75$

На рис. 4.10 зображено графіки точного і наближеного (знайденого ІМСЕ) розв’язків (при $M = N = 4$) на лініях $x = x_2 = 0,25$, $y_1 \leq y \leq y_5$ (рис. 4.10 а), $x = x_3 = 0,5$, $y_1 \leq y \leq y_5$ (рис. 4.10 б), $x = x_4 = 0,75$, $y_1 \leq y \leq y_5$ (рис. 4.10 в) при $t = 0,01$.

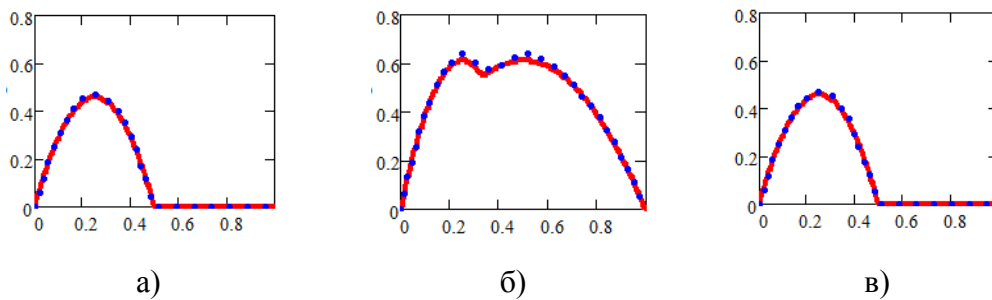


Рисунок 4.10 – Графіки точного і наближеного розв’язків задачі при $t = 0,01$, $y_1 \leq y \leq y_5$ на лініях: а) $x = x_2 = 0,25$, б) $x = x_3 = 0,5$, в) $x = x_4 = 0,75$

Зауважимо, що максимальна похибка між точним та наближеним розв’язками по всій області не перевищує $\varepsilon = O(h^2)$ (при умові, що розв’язок задачі Коші для системи ЗДР проводиться з такою ж похибкою), що збігається з теоретичними твердженнями стосовно похибки наближення диференційовних функцій операторами сплайн-інтерляції [74].

Аналіз результатів обчислювального експерименту показує, що досліджуваний в роботі ІМСЕ розв'язання нестационарних задач дозволяє значно зменшити порядок системи ЗДР, до яких зводиться початково-крайова задача, при досягненні такої ж самої точності. Це означає також, що для його обчислювальної реалізації потрібно використовувати меншу кількість часу, і при цьому можна отримувати меншу загальну похибку заокруглення.

Опис програми обчислювальної реалізації задачі 4.3 в комп'ютерній системі MathCAD наведено в додатку Г.

4.3 Дослідження нестационарного температурного поля за допомогою ІМСЕ в області у вигляді рівнобічної трапеції

Задача 4.4. Розглянемо задачу нестационарної теплопровідності в області G , яка являє собою рівнобічну трапецію.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - e^{-t} & \left((x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) + \right. \\ & \left. + 4(x-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{3y}{2\Delta} \right) + 4(y-\Delta) \left(1 - \frac{3x}{2\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$(x, y) \in G \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = (x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right), \quad (4.19)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{\partial G} = 0, \quad (4.20)$$

$$G = \left\{ (x, y) \mid x+y \geq 0, 1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \geq 0, x \leq \Delta, y \leq \Delta \right\}.$$

Розіб'ємо область G осями координат на три трикутники (див. рис. 4.11):
 $G = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

$$T_1 = \left\{ (x, y) \mid -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \Delta \right\},$$

$$T_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0\}.$$

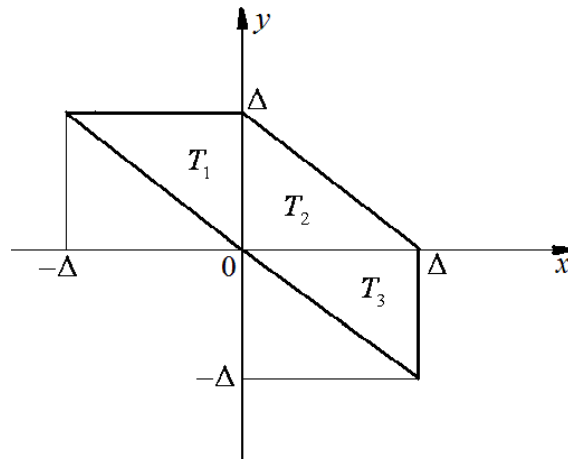


Рисунок 4.11 – Розбиття області G осями координат на трикутники T_1 , T_2 , T_3

Позначимо: $u(0, y, t) = \psi(y, t)$, $u(x, 0, t) = \varphi(x, t)$. Враховуючи симетрію задачі, отримаємо $\varphi(x, t) = \psi(x, t)$. Побудуємо функцію $u(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(y, t) - \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(-x, t), & -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta, \\ \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(y, t) + \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(x, t) - \frac{x}{\Delta}\varphi(\Delta - y, t) - \frac{y}{\Delta}\varphi(\Delta - x, t), & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta, \\ \left(1 + \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(x, t) - \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(-y, t), & 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Ця функція задовольняє однорідним граничним умовам незалежно від вибору функції $\varphi(x, t)$ і збігається з $\varphi(x, t)$ на лінії $y = 0$ та з функцією $\varphi(y, t)$ на лінії $x = 0$, якщо $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(\Delta, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Будемо шукати функцію $\varphi(x, t)$ у вигляді сплайна першого степеня:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{M-1} C_k(t) h_k(Mx - k), \quad h(z) = \frac{1}{2}(|z - 1| - 2|z| + |z + 1|).$$

Функції $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$ знайдемо, мінімізуючи вираз

$$J(u) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, y, t) \right) u \right) dx dy,$$

з використанням методу локального потенціалу (згідно з яким варіація виразу $J(u)$ за функцією u проводиться так, що члену $u \frac{\partial u}{\partial t}$ у рівнянні Ейлера відповідає $\frac{\partial u}{\partial t}$). Це приводить до системи ЗДР відносно $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$:

$$A \frac{dC(t)}{dt} = BC(t) + F(t), \quad t > 0,$$

$$C(0) = C_0, \quad C(t) = (C_1(t), \dots, C_{M-1}(t)).$$

Матриці A , B , F знаходяться шляхом інтегрування по області G виразів

$$\frac{\partial}{\partial x} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} w_j(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} w_j(x, y),$$

$$w_i(x, y) w_j(x, y), \quad f(x, y, t) w_\delta(x, y) \quad (i, j = \overline{1, M-1}).$$

Вважається, що $u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M-1} C_i(t) w_i(x, y)$. Конкретні явні вирази для функцій $w_i(x, y)$ опускаємо.

Для цієї задачі (4.18) – (4.20) проведено обчислювальний експеримент, результати якого наведено нижче.

При $\Delta = 0,5$, $M = 5$ отримані наступні значення наближеного розв'язку, знайденого за допомогою ІМСЕ (табл. 4.7) та точного розв'язку (табл. 4.8).

Також наведено значення наближеного розв'язку $u(x_i; y_j; 0,001)$ (табл. 4.9) та точного розв'язку $ut(x_i; y_j; 0,001)$ (табл. 4.10) у вузлах сітки

$x_i = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(i-1)$, $y_j = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(j-1)$, $i = \overline{1, 2M+1}$, $j = \overline{1, 2M+1}$, які належать області G .

Таблиця 4.7 – Значення наближеного розв'язку, знайденого ІМСЕ

t	u (0,1; 0; t)	u (0,2; 0; t)	u (0,3; 0; t)	u (0,4; 0; t)
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0159	0,0181	0,0121	0,0041
0,0002	0,0159	0,0181	0,0122	0,0041
0,0003	0,0158	0,0182	0,0122	0,0042
0,0004	0,0157	0,0182	0,0123	0,0043
0,0005	0,0157	0,0183	0,0124	0,0043
0,0006	0,0156	0,0184	0,0125	0,0044
0,0007	0,0156	0,0184	0,0126	0,0045
0,0008	0,0155	0,0185	0,0126	0,0046
0,0009	0,0155	0,0185	0,0127	0,0046
0,001	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047

Таблиця 4.8 – Значення точного розв'язку

t	ut (0,1; 0; t)	ut (0,2; 0; t)	ut (0,3; 0; t)	ut (0,4; 0; t)
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0002	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0003	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0004	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0005	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0006	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0007	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0008	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0009	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040

Таблиця 4.9 – Значення наближеного розв’язку $u(x_i; y_j; 0,001)$ у вузлах

сітки

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3									0	-0,0007	0
4								0	0,0002	-0,0009	0
5							0	0,0056	0,0041	0,0007	0
6						0	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047	0
7					0	0,0154	0,0228	0,0197	0,0099	0	
8				0	0,0056	0,0186	0,0197	0,0120	0		
9			0	0,0002	0,0041	0,0128	0,0099	0			
10		0	-0,0007	-0,0009	0,0007	0,0047	0				
11	0	0	0	0	0	0					

Таблиця 4.10 – Значення точного розв’язку $u(x_i; y_j; 0,001)$ у вузлах

сітки

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3									0	0,0064	0
4								0	0,0112	0,0084	0
5							0	0,0144	0,0144	0,0072	0
6						0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040	0
7					0	0,0160	0,0192	0,0144	0,0064	0	
8				0	0,0144	0,0180	0,0144	0,0072	0		
9			0	0,0112	0,0144	0,0120	0,0064	0			
10		0	0,0064	0,0084	0,0072	0,0040	0				
11	0	0	0	0	0	0					

Аналізуючи результати цього прикладу, можна зробити висновок, що узагальнення запропонованого ІМСЕ розв’язання нестационарної задачі теплопровідності на випадок областей складної форми може бути проведено за

стандартною технологією для різних областей, що зручно для чисельної реалізації.

Опис програми обчислювальної реалізації задачі 4.4 в комп'ютерній системі MathCAD наведено в додатку Д.

4.4 Побудова точних розв'язків тестових задач в областях, складених з прямокутників

Задача 4.5. Розглянемо задачу нестационарної теплопровідності в області D , яка має форму швелера (див. рис. 4.12).

Побудувати точний розв'язок $u(x, y, t)$ початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (4.21)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (4.22)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial D} = 0 \quad (4.23)$$

Область $D = \Pi_1 \setminus \Pi_2$, де $\Pi_1 = [-a, a] \times [0, b]$, $\Pi_2 = [-c, c] \times [d, b]$.

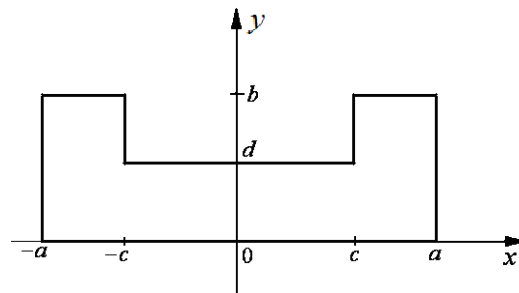


Рисунок 4.12 – Область D у формі швелера

Розіб'ємо область D на прямокутні елементи прямими $x = x_k$, $k = \overline{0, m}$,
 $y = y_\ell$, $\ell = \overline{0, n}$, $-a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = -c < x_{m_1+1} < \dots < x_{m_2} = c < x_{m_2+1} < \dots < x_m = a$,
 $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_1-1} < y_{n_1} = d < y_{n_1+1} < \dots < y_{n-1} < y_n = b$.

Наближений розв'язок задачі (4.21) – (4.23) шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{n_1-1} C_{k\ell}(t) h_k(x) H_\ell(y) + \sum_{k=1}^{m_1-1} \sum_{\ell=n_1}^{n-1} C_{k\ell}(t) h_k(x) H_\ell(y) + \\
& + \sum_{k=m_2+1}^{m-1} \sum_{\ell=n_1}^{n-1} C_{k\ell}(t) h_k(x) H_\ell(y),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

де $(x, y) \in D$, $t \geq 0$.

$$h_k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} < x \leq x_k, \\ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x_k < x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}. \end{cases}$$

Аналогічно визначаються функції $H_\ell(y)$.

$$\mathfrak{I} = \{(k, \ell) \mid 1 \leq k \leq m-1; 1 \leq \ell \leq n_1-1; 1 \leq k \leq m_1-1; n_1 \leq \ell \leq n-1; m_2+1 \leq k \leq m-1; n_1 \leq \ell \leq n-1\}$$

Позначимо: $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \cup \mathfrak{I}_3$, де $\mathfrak{I}_1 = \{(k, \ell) \mid 1 \leq k \leq m-1; 1 \leq \ell \leq n_1-1\}$,

$$\mathfrak{I}_2 = \{(k, \ell) \mid 1 \leq k \leq m_1-1; n_1 \leq \ell \leq n-1\}, \mathfrak{I}_3 = \{(k, \ell) \mid m_2+1 \leq k \leq m-1; n_1 \leq \ell \leq n-1\}$$

Функції $C_{k\ell}(t)$ ($k, \ell \in \mathfrak{I}$) знаходимо, мінімізуючи вираз $J(u)$ з використанням методу локального потенціалу, що приводить до системи ЗДР відносно $C_{k\ell}(t)$.

$$J(u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, y, t) \right) u \right] dx dy.$$

Запишемо (4.24) у вигляді:

$$u(x, y, t) = \sum_{(k, \ell) \in \mathfrak{I}} C_{k\ell}(t) h_k(x) H_\ell(y).$$

Тоді для визначення $C_{k\ell}(t)$ отримаємо систему:

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}} a_{pqk\ell} \dot{C}_{k\ell}(t) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}} b_{pqk\ell} C_{k\ell}(t) + f_{pq}(t), \quad t > 0, \quad (p,q) \in \mathfrak{S}, \quad (4.25)$$

де

$$a_{pqk\ell} = \iint_G h_p(x) H_q(y) h_k(x) H_\ell(y) dx dy,$$

$$b_{pqk\ell} = \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} h_p(x) H_q(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} h_k(x) H_\ell(y) + h_p(x) \frac{\partial}{\partial y} H_q(y) \cdot h_k(x) \frac{\partial}{\partial y} H_\ell(y) \right] dx dy,$$

$$f_{pq}(t) = \iint_G h_p(x) H_q(y) f(x, y, t) dx dy.$$

Проведемо сумування по кожній множині \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 , \mathfrak{S}_3 окремо. Отримаємо замість (4.25) систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_1} a_{pqk\ell} \dot{C}_{k\ell}(t) + \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_2} a_{pqk\ell} \dot{C}_{k\ell}(t) + \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_3} a_{pqk\ell} \dot{C}_{k\ell}(t) = \\ & = - \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_1} b_{pqk\ell} C_{k\ell}(t) - \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_2} b_{pqk\ell} C_{k\ell}(t) - \sum_{(k,\ell) \in \mathfrak{S}_3} b_{pqk\ell} C_{k\ell}(t) + f_{pq}(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$C_{k\ell}(0) = \varphi(x_k, y_\ell).$$

Систему (4.26) запишемо у матричному вигляді $A \frac{dC}{dt} = BC + D(t)$, $t > 0$

шляхом заміни чотиривимірних масивів $a_{pqk\ell}$, $b_{pqk\ell}$ на матриці $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ та матриці вільних членів $f_{pq}(t)$ на вектор $D(t)$, матрицю $C_{k\ell}(t)$ на вектор $C(t)$ згідно з описаним нижче алгоритмом.

При формуванні результуючої матриці A , що відповідає написаним вище трьом матрицям, поступаємо наступним чином:

$$A_{\mu\nu} = A1_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq (m-1)(n_1-1), \quad 1 \leq \nu \leq (m-1)(n_1-1),$$

$$A_{(m-1)(n_1-1)+\mu, (m-1)(n_1-1)+\nu} = A2_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq (m_1-1)(n-1-n_1), \quad 1 \leq \nu \leq (m_1-1)(n-1-n_1),$$

$$A_{(m-1)(n_1-1)+(m_1-1)(n-1-n_1)+\mu, (m-1)(n_1-1)+(m_1-1)(n-1-n_1)+\nu} = A3_{\mu\nu},$$

$$1 \leq \mu \leq (m-1-m_2)(n-1-n_1), \quad 1 \leq \nu \leq (m_1-1-m_2)(n-1-n_1).$$

Аналогічно формуємо матрицю B .

Побудуємо точний розв'язок задачі (4.21) – (4.23) для тестового прикладу з використанням сплайн-інтерполяції функцій. Необхідно, щоб точний розв'язок належав до класу функцій, які мають неперервну похідну по t і неперервні другі похідні u''_{xx} , u''_{yy} . Для цього будемо шукати точний розв'язок тестового прикладу у вигляді п'яти різних формул у п'яти різних підобластях D_I , D_{II} , D_{III} , D_{IV} , D_V розбиття (рис. 4.13).

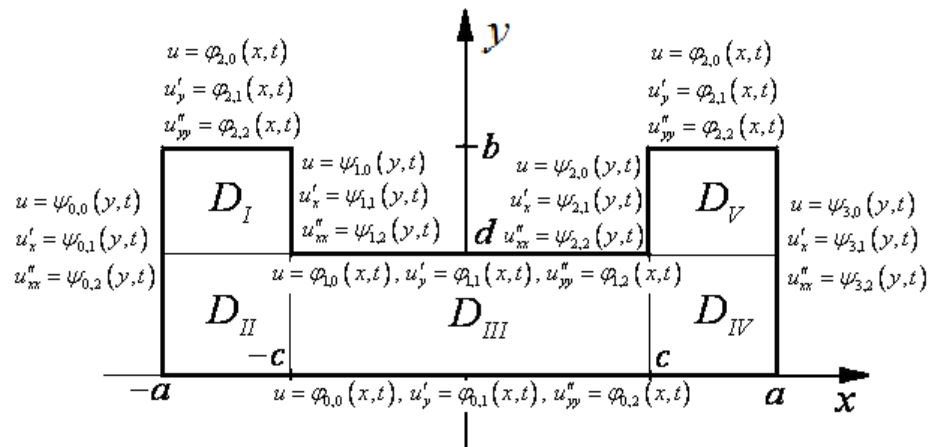


Рисунок 4.13 – Розбиття області D на підобласті та граничні умови на частинах границі області, де $D = D_I \cup D_{II} \cup D_{III} \cup D_{IV} \cup D_V$

Будемо вважати, що точний розв'язок на лініях $y = 0$, $y = d$, $y = b$ визначається наступними формулами:

$$\left. \frac{\partial^s ut}{\partial y^s} \right|_{y=0} = \varphi_{0,s}(x, t), \quad \left. \frac{\partial^s ut}{\partial y^s} \right|_{y=d} = \varphi_{1,s}(x, t), \quad \left. \frac{\partial^s ut}{\partial y^s} \right|_{y=b} = \varphi_{2,s}(x, t), \quad s = \overline{0, 2}.$$

Точний розв'язок на лініях $x = -a$, $x = -c$, $x = c$, $x = a$ визначається такими формулами:

$$\left. \frac{\partial^s ut}{\partial x^s} \right|_{x=-a} = \psi_{0,s}(y, t), \quad \left. \frac{\partial^s ut}{\partial x^s} \right|_{x=-c} = \psi_{1,s}(y, t),$$

$$\left. \frac{\partial^s ut}{\partial x^s} \right|_{x=c} = \psi_{2,s}(y, t), \quad \left. \frac{\partial^s ut}{\partial x^s} \right|_{x=a} = \psi_{4,s}(y, t), \quad s = \overline{0, 2}.$$

При цьому

$$\varphi_{1,0}(x,t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,0}(x,t), & -a < x < -c, \\ 0, & -c < x < c, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,0}(x,t), & c < x < a, \end{cases} \quad \varphi_{1,1}(x,t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,1}(x,t), & -a < x < -c, \\ 0, & -c < x < c, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,1}(x,t), & c < x < a, \end{cases}$$

$$\varphi_{1,2}(x,t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,2}(x,t), & -a < x < -c, \\ 0, & -c < x < c, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,2}(x,t), & c < x < a, \end{cases}$$

$$\psi_{1,0}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{1,0}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases} \quad \psi_{2,0}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{2,0}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{1,1}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases} \quad \psi_{2,1}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{2,1}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{1,2}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases} \quad \psi_{2,2}(y,t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{2,2}(y,t), & 0 < y < d, \\ 0, & d < y < b, \end{cases}$$

де $\varphi_{ks}(x,t)$, $k = \overline{0,2}$, $\psi_{lp}(y,t)$, $\ell = \overline{0,3}$, $0 \leq s, p \leq 2$ – довільні функції, які задовольняють умови С.М. Нікольського [44] у кутових точках. Зокрема, в точці $(-a, 0)$ мають вигляд $\varphi_{0,s}^{(p)}(-a, t) = \psi_{0,p}^{(s)}(0, t)$, $0 \leq s, p \leq 2$, що є наслідком незалежності мішаних похідних від порядку диференціювання:

$$\left. \frac{\partial^{s+p} ut}{\partial x^p \partial y^s} \right|_{(-a,0)} = \left. \frac{\partial^{p+s} ut}{\partial y^s \partial x^p} \right|_{(-a,0)}, \quad 0 \leq s, p \leq 2.$$

Згідно з твердженням праці [34], в кутових точках області D точний розв'язок крайової задачі для диференціального рівняння Лапласа має особливість $r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}$ ($r = r(x, y)$ – відстань від точки $(x, y) \in D$ до кутової точки, α – вхідний кут, φ – полярний кут).

Враховуючи однорідність граничних умов, в загальному випадку частинні похідні першого порядку в кутових точках $(-a, 0)$, $(-a, b)$, $(-c, b)$,

(c,b) , (a,b) , $(a,0)$ повинні дорівнювати нулю. Мішані похідні в цих точках не дорівнюють нулю. Частинні похідні другого порядку у цих точках теж дорівнюють нулю. Мішані похідні другого порядку у цих точках не дорівнюють нулю.

В точках з вхідними кутами, тобто в точках $(-c,d)$ і (c,d) , розв'язок $u(x,y,t)$ дорівнює нулю, в загальному випадку частинні похідні першого та другого порядку і мішані похідні $u^{(p,q)}(x,y)$ ($0 \leq p,q \leq 2$) не дорівнюють нулю. Але у частинному випадку вони (або деякі похідні) можуть дорівнювати нулю.

Точний розв'язок $u(x,y,t)$ шукаємо у вигляді:

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_I(x,y,t), & (x,y) \in D_I \\ u_{II}(x,y,t), & (x,y) \in D_{II} \\ u_{III}(x,y,t), & (x,y) \in D_{III} \\ u_{IV}(x,y,t), & (x,y) \in D_{IV} \\ u_V(x,y,t), & (x,y) \in D_V \end{cases}$$

де функції u_μ , $\mu = I, II, III, IV, V$ задовольняють умови на границях між сусідніми областями D_μ , що забезпечують виконання властивості $u \in C^{2,2,1}(R^3)$.

Зокрема,

$$u_I(x,y,t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{p=0}^2 \varphi_{k,p}(x,t) S1_{k,p}(y) + \sum_{\ell=0}^1 \sum_{q=0}^2 \psi_{\ell,q}(y,t) S2_{\ell,q}(x) - \sum_{k=1}^2 \sum_{p=0}^2 \sum_{\ell=0}^1 \sum_{q=0}^2 u^{(q,p)}(x_k, y_\ell, t) S2_{\ell,q}(x) S1_{k,p}(y).$$

При побудові тестового прикладу використовуємо лише два підходи (для побудови допоміжних функцій).

Підхід 1. $S1_{k,p}(y)$ будуємо у вигляді поліномів 5-го степеня, якщо вимагаємо, щоб у формулі інтерлінації використовувались і сліди функцій, і сліди перших та других похідних (в цьому випадку по змінній y маємо всього

3 вузлових точки $y_0 = 0$, $y_1 = d$, $y_2 = b$). Якщо в формулі Ерміта використовуються сліди функцій і перших похідних по y , то кожна така допоміжна функція буде поліномом 5-го степеня (6 коефіцієнтів можуть бути однозначно знайдені з 6 інтерполяційних умов). Якщо ж використовуємо формули, які при $y = y_0$, $y = y_1$, $y = y_2$ мають задані сліди та задані сліди першої і другої похідних, то потрібно використовувати для побудови допоміжних функцій $S1_{k,p}(y)$ поліноми степеня 8, які мають 9 коефіцієнтів.

Аналогічно по змінній x . Якщо в кожній точці інтерполюємо лише функцію і похідну, то потрібно використовувати поліноми 7-го степеня, оскільки в 4-х точках буде задано 8 умов. Якщо ж в кожній точці інтерполяції по x задана функція та перша і друга похідна, то на 4-х точках по x нам потрібно задовольнити 12 умовам. Таку кількість умов можна задовольнити поліномом 11-го степеня.

Підхід 2. Якщо використовуємо в якості допоміжних функцій сплайни, то при умові, що нам необхідно, щоб точний розв'язок належав класу $C^1(\overline{\Omega})$, достатньо взяти сплайни 3-го степеня, оскільки в цьому випадку на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}) в точці x_k та в точці x_{k+1} можемо відновити значення функції та її перших похідних (4 умови).

Якщо хочемо, щоб тестова функція належала класу $C^2(\overline{\Omega})$, потрібно використовувати сплайни 5-го степеня, оскільки в точці x_k та в точці x_{k+1} будуть задані значення слідів функції, першої та другої похідних (6 умов). Тобто, на цьому інтервалі можемо скористатися поліномом 5-го степеня, який має 6 коефіцієнтів.

Функції $S1_{k,p}(y)$, $S2_{\ell,p}(x)$, $k = \overline{0,2}$, $\ell = \overline{0,3}$, $p = \overline{0,2}$ є відповідними базисними поліномами Ерміта, їх похідні відповідного степеня повинні задовольняти визначені умови у вузлових точках. При визначенні цих функцій використовується позначення

$$\{g(x)\}_a^{(n)} = \sum_{s=0}^n g^{(s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!}.$$

Зокрема, $S1_{0,0}(y)$ – поліном 3-го степеня з властивостями:

$$S1_{0,0}(y)|_{y=0} = 1, \quad S1_{0,0}(y)|_{y=d} = 0, \quad \left. \frac{dS1_{0,0}(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 S1_{0,0}(y)}{dy^2} \right|_{y=0} = 0.$$

$$S1_{0,0}(y) = (y-d) \left\{ \frac{1}{y-d} \right\}_{y=0}^{(2)} = (y-d) \left(-\frac{1}{d} - \frac{y}{d^2} - \frac{y^2}{d^3} \right).$$

Припустимо, що точний розв'язок задачі має вигляд:

$$u(x, y, t) = e^{-\lambda t} \tilde{u}(x, y).$$

При цьому права частина рівняння теплопровідності:

$$f(x, y, t) = -e^{-\lambda t} (\lambda \tilde{u}(x, y) + \Delta \tilde{u}(x, y)).$$

Графік функції $f(x, y, t)$ при $t = 0$, $\lambda = 2$, яка визначає щільність розподілу точкових джерел тепла у пластині, зображено на рис. 4.14.

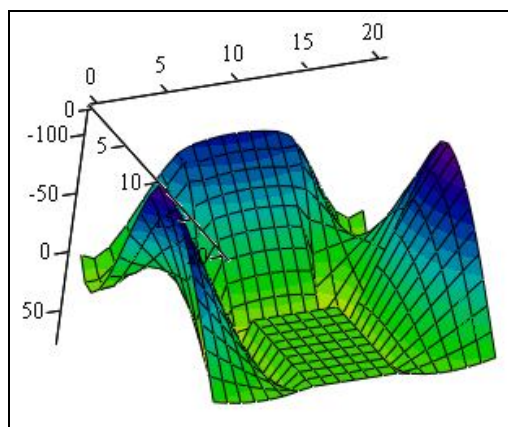


Рисунок 4.14 – Графік функції $f(x, y, t)$ при $t = 0$, $\lambda = 2$

Проведений обчислювальний експеримент показав, що відхилення наближеного розв'язку крайової задачі з вказаною правою частиною $f(x, y, t)$

має в рівномірній нормі похибку $\varepsilon = O(h^2)$, де h – крок розбиття, згідно з теоретичними твердженнями, що задовольняє співвідношенню

$$\|u(t) - u^S(t)\|_0 \leq Ch^{2k} \left[\|u(t)\| + e^{-\lambda_1 t} \|u_0\| + \int_0^t e^{\lambda_1(\tau-t)} \|u_t(\tau)\| d\tau \right],$$

при умові, що задача Коші для системи ЗДР розв'язується (наприклад, методом Рунге-Кутта) з точністю, яка має такий же або менший порядок точності.

Таким чином, запропонований метод побудови точних розв'язків нестационарної задачі теплопровідності в областях, складених з прямокутників, дозволяє використовувати ці розв'язки для випадків, коли $u(x, y, t) \in C^{2,2,1}(\bar{D} \times (0, +\infty))$.

Опис програми обчислювальної реалізації задачі 4.5 в комп'ютерній системі MathCAD наведено в додатку Ж.

4.5 Загальна похибка наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності, отриманого ІМСЕ

Як відомо, загальна похибка [102], що виникає при розв'язанні задачі, складається з трьох типів похибок

$$\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_M + \varepsilon_3,$$

де ε_N – неусувна похибка, або похибка початкових даних;

ε_M – похибка методу;

ε_3 – похибка заокруглення.

Неусувна похибка ε_N виникає, коли початкові дані є даними, що отримуються шляхом вимірювання, і її вплив на кінцевий результат знищити не можна. В досліджуваній задачі експериментальні дані, які використовуються, пов'язані з завданням початкової функції $u_0(x, y)$, граничних функцій, які

задані лише в точках границі області, та при створенні початкових даних при розв'язанні задачі Коші для системи ЗДР.

Похибка ε_M методу в даній роботі визначається похибкою сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайни-інтерлінації. Як було доведено в роботі, ця похибка $\varepsilon_M = O(\Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2) = O(\Delta^2)$ при умові, що задача Коші для системи ЗДР розв'язується точно, або розв'язується з похибкою, меншою, ніж ця похибка. Крім того, похибка методу включає в себе похибку, яка виникає при зведенні системи ЗДР $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$ до системи $C'(t) + A^{-1} \cdot B \cdot C(t) = A^{-1} \cdot D$. Тут похибка пов'язана не тільки з алгоритмом обернення матриці A , але й з множенням $A^{-1} \cdot B$ та $A^{-1} \cdot D$.

Похибка ε_3 заокруглення виникає, якщо обчислення проводяться з невеликою кількістю розрядних чисел при виконанні арифметичних операцій. Цю похибку на даний час можна зменшити за допомогою проведення обчислень з більшою кількістю розрядів [6]. Така опція є в системах комп'ютерної математики Mathematica, MathCAD, Maple, Matlab.

Висновки до розділу 4

У розділі описано та проведено аналіз результатів обчислювального експерименту при розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності за допомогою МСЕ для прямокутника та деяких областей складної форми (Т-подібної області, рівнобічної трапеції, швелера).

Аналізуючи результати обчислювального експерименту, можна зробити наступні висновки.

1. При розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності для квадратної пластини з похибкою $O(\varepsilon^2)$ класичним МСЕ необхідно розв'язувати задачу Коші для системи n^4 звичайних диференціальних рівнянь. Використання сплайн-інтерполяції функції $u(x, y, t) \in C^{2,2,\infty}(G \times R^+)$ за просторовими

змінними x , y , побудованої на основі сплайн-інтерлінації цих функцій, дозволяє зменшити на порядок кількість диференціальних рівнянь для досягнення тієї самої за порядком точності. Зокрема, для прямокутної області замість розв'язання n^4 диференціальних рівнянь достатньо розв'язати $2n^3$ диференціальних рівнянь, наприклад, при $n=10$ в 5 раз меншу кількість рівнянь.

2. Досліджуваний в роботі інтерлінаційний метод скінченних елементів розв'язання крайових задач теплопровідності дозволяє значно зменшити порядок системи диференціальних рівнянь, до яких зводиться крайова задача, при досягненні такої ж самої точності. Це означає також, що для його обчислювальної реалізації потрібно використовувати меншу кількість часу, і при цьому можна отримувати меншу загальну похибку заокруглення.

3. Узагальнення запропонованого ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності на випадок областей складної форми може бути проведено за стандартною технологією для різних областей, що зручно для чисельної реалізації.

Основні результати розділу 4 опубліковано у роботах [45, 60, 65, 62, 124].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі одержано результати, які в сукупності є подальшим розвитком теорії інтерлінації функцій трьох змінних за двома просторовими змінними, методу лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ЛІДР) розв'язання нестационарної задачі теплопровідності, запропонованого в роботі Сергієнка І. В., Литвина О. М.

1. На основі сплайн-інтерлінації функцій розроблено та досліджено новий метод (інтерлінаційний метод скінчених елементів – ІМСЕ) розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми, що дозволяє зберегти високу точність методу ЛІДР на основі заміни слідів відповідними сплайнами і зберегти можливість точного задовільнення граничним умовам.

2. Вперше для тестування наближуючих та обчислювальних властивостей ІМСЕ розроблено метод побудови точних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для областей складної форми, що дозволяє провести аналіз похибки наближення шляхом порівняння з точним розв'язком.

3. Вперше проведено чисельну реалізацію запропонованого ІМСЕ розв'язання нестационарних задач про поширення тепла в областях складної форми та порівняльний аналіз розв'язків, отриманих ІМСЕ, класичним МСЕ та точних розв'язків. Це дозволяє підтвердити теоретичне твердження про те, що метод ІМСЕ зберігає похибку $O(\varepsilon^2)$ при розбитті області інтегрування на прямокутні елементи системою $2M$ взаємно перпендикулярних прямих, в той час, як класичний метод МСЕ для досягнення такої ж похибки вимагає розбиття області інтегрування на $\approx 2M^2$ взаємно перпендикулярних прямих.

4. Вперше при чисельній реалізації розв'язання нестационарних задач теплопровідності запропоновано використовувати спеціальну нумерацію вузлів елементів, яка дозволяє в системі звичайних диференціальних рівнянь

$A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$, що виникає при застосуванні ІМСЕ, зберегти блочно-трихдіагональну структуру матриць A і B . Це спрощує обчислювальну реалізацію, оскільки робота буде виконуватись з відомими типами матриць, для яких існують ефективні обчислювальні схеми.

5. Проведене теоретичне обґрунтування інтерлінаційних та апроксимаційних властивостей наближеного розв'язку за допомогою наведених теорем підтверджене результатами обчислювального експерименту, проведеного для областей різної геометричної форми з використанням програм, створених дисертантом. Це дозволяє зробити висновок про високу ефективність запропонованого і розробленого ІМСЕ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Дж. Аргирис; [пер. с англ.]. – М. : Изд-во иностр. лит., 1968. – 240 с.
2. Атомарные функции и WA-системы функций в современных проблемах радиофизики и техники / В. Ф. Кравченко, О. В. Кравченко, В. И. Пустовойт [и др.] // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2011. – Т. 16, № 9. – С. 7–28.
3. Бабушка И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М. : Мир, 1969. – 368 с.
4. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Р. Вилсон; [пер. с англ.]. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.
5. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1994. – 442 с.
6. Бирюков А. Г. Метод оценки погрешностей округления решений задач вычислительной математики в арифметике с плавающей запятой, основанный на сравнении решений с изменяемой длиной мантиссы машинного числа / А. Г. Бирюков, А. И. Гриневиц // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 160–174.
7. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наук. думка, 2007. – 292 с.
8. Вайндинер А. И. Об одном обобщении метода Бубнова–Галеркина–Канторовича / А. И. Вайндинер // Вести МГУ. Сер. Матем.-мех. – 1967. – № 2. – С. 16–21.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

10. Власенко Л. А. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором / Л. А. Власенко, А. Г. Руткас // Математические заметки. – 2014. – Вып. 1. – С. 37–49.
11. Гаврилюк І. П. Методи обчислень: підруч. для вузів : у 2 ч. Ч. 2. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища школа, 1995. – 431 с.
12. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер; [пер. с англ. В. М. Картвелишвили]. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
13. Гулік Л. І. Точне задоволення умов Діріхле на границі тривимірної області складної форми за допомогою інтерфлетації / Л. І. Гулік // Міждерж. науково-методична конф., 26–28 травня 2004 р. : тези доп. – Дніпродзержинськ, 2004. – С. 14–15.
14. Гулік Л. І. Точне задоволення граничних умов для тривимірної області складної форми за допомогою інтерфлетації / Л. І. Гулік, О. М. Литвин // Питання оптимізації обчислень: праці міжнар. конф., 19–23 вересня 2005 р., смт. Кацивелі. – К., 2005. – С. 66.
15. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К. : Наук. думка, 2001. – 606 с.
16. Деклу Дж. Метод конечных элементов / Дж. Деклу. – М. : Мир, 1976. – 94 с.
17. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1995. – 262 с.
18. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Журн. прикл. мех. и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 111–118.
19. Дробот Є. І. Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестационарної теплопровідності з трьома просторовими змінними / Є. І. Дробот, О. М. Литвин, І. В. Сергієнко // Доповіді НАНУ. – 2000. – № 2. – С. 67–73.

20. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: учеб. пособие [для теплофизич. и теплоэнергетич. спец. вузов] / Г. Н. Дульнев, В. Г. Парфенов, А. В. Сигалов. – М. : Высш. шк., 1990. – 207 с.
21. Задірака В. К. Т-ефективні алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики / В. К. Задірака, М. Д. Бабич. – К. : Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, 2003. – 261 с.
22. Залужна Г. В. Про чисельну реалізацію нового методу розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку / Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII): праці міжнар. симпозиуму, присвяченого 50-річчю створення Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кацевелі, 23–28 вересня 2007 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К., 2007. – С. 110.
23. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 319 с.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. – М. : Недра, 1974. – 238 с.
25. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
26. Ильин В. П. Трехдиагональные матрицы и их приложения / В. П. Ильин, Ю. М. Кузнецов. – М. : Наука, 1985. – 207 с.
27. Исаченко В. П. Теплопередача. Учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1975. – 488 с.
28. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1975. – 512 с.
29. Камишан В. В. До чисельного розв'язання систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь / В. В. Камишан, О. М. Литвин, О. Р. Максимович // Труды 6-го междунар. симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Часть 2. – М., 1996. – С. 49–50.
30. Камишан В. В. Про чисельну реалізацію інтерлінаційного методу скінченних елементів (ІМСЕ) для рівняння Пуассона в областях, складених з

прямокутників / В. В. Камишан, О. М. Литвин, О. Р. Максимович // Доп. АН України. Сер. А. – 1995. – № 11. – С. 34–38.

31. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 553 с.

32. Коздоба Л. А. Решение нелинейных задач теплопроводности / Л. А. Коздоба. – К. : Наук. думка, 1976. – 136 с.

33. Кондратьев В. А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях / В. А. Кондратьев // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1966. – Т. 15 – С. 400–451.

34. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками / В. А. Кондратьев // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – Т. 16 – С. 209–292.

35. Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности / В. Г. Корнеев. – Л. : Ленингр. ун-т им. А. А. Жданова, 1977. – 206 с.

36. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Изд-во «Наука», 1973. – 408 с.

37. Лисицын Б. М. Метод конечных элементов и его приложение к решению граничных задач на ЭВМ / Б. М. Лисицын. – К. : КАДИ, 1979. – 93 с.

38. Литвин О. М. Деякі аспекти чисельної реалізації інтерлінаційних схем МСЕ розв'язання нестационарних задач теплопровідності. / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XV Всеукраїнська наук. конф., 23-25 вересня 2008 р. : тези доп. – Львів, 2008. – С. 91.

39. Литвин О. М. Деякі аспекти чисельної реалізації нового методу розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку / О. М. Литвин, Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII): праці міжнар. конф., присвяченої пам'яті академіка В. С. Михалевича, Кацевелі, 19–23 вересня 2005 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К., 2005. – С. 88–89.

40. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В. Л. Рвачова / О. М. Литвин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 50, № 4. – 2007. – С. 1–22.
41. Литвин О. М. Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. – Х. : Основа, 1992. – 236 с.
42. Литвин О. Н. Интерлинация функции: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.07 / Литвин Олег Николаевич. – Х., 1989. – 255 с.
43. Литвин О. М. Інтерлінація функцій при розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали II Всеукр. наук.-практ. конф., Полтава, 17–19 березня 2011 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2011. – С. 167–170.
44. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : монографія / О. М. Литвин. – Х. : Основа, 2002. – 544 с.
45. Литвин О. Н. Исследование нестационарного температурного поля в прямоугольной пластине интерлиначионным методом конечных элементов / О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2014. – № 19 (190). – Вып. 36. – С. 49–56.
46. Литвин О. М. Математичне моделювання поширення тепла за допомогою інтерлінації. / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики : матеріали XV Всеукр. наук. конф., Львів, 23–25 вересня 2008 р. / Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 2008. – С. 77.
47. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи : навч. посіб. / О. М. Литвин. – К. : Наук. думка, 2005. – 344 с.
48. Литвин О. М. Новый метод розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку / О. М. Литвин, Г. В. Залужна // XXXVIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2005. – С. 89.

49. Литвин О. Н. Обобщенная кусочно-эрмитова интерполяция / О. Н. Литвин, В. В. Федько // Укр. матем. журн. – 1976. – № 6. – С. 812–819.
50. Литвин О. М. Оцінка швидкості збіжності методу ЛІДР / методу зведення до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 12–16.
51. Литвин О. М. Поліноміальна інтерлінація Тейлора... / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 7. – С. 10–14.
52. Литвин О. Н. Построение экономических схем МКЭ с помощью интерликации / О. Н. Литвин // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 1. – С. 30–33.
53. Литвин О. М. Про дослідження інтерлінаційним МСЕ впливу точкових джерел на розподіл тепла в пластині / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // XLIV наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, 18–25 лютого 2011 р., Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2011. – Ч. 4. – С. 14–15.
54. Литвин О. М. Про один метод побудови точних розв'язків крайової задачі диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова // Доповіді НАН України. – № 7. – 2011. – С. 37–41.
55. Литвин О. М. Про один метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестационарної теплопровідності в області складної форми / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: зб. наук. пр. / Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільськ, 2010. – Вип. 4. – С. 132–138.
56. Литвин О. М. Про один метод розв'язання граничних задач для рівнянь з частинними похідними шляхом зведення їх до систем звичайних інтегро-диференціальних рівнянь / О. М. Литвин, А. М. Підгорний // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – С. 522–526.
57. Литвин О. М. Про один підхід до побудови формули інтерлінації на прямокутному трикутнику з криволінійною гіпотенузою / О. М. Литвин, О. Р. Пашковська // Волинський математичний вісник. – 1997. – Вип. 4. – С. 13–15.

58. Литвин О. М. Про один підхід до тестування нових методів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 219–228.

59. Литвин О. М. Про оцінку похибки інтерлінаційного МСЕ для нестационарної задачі теплопровідності в прямокутнику / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): матеріали: V Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнар. участю, Полтава, 13–15 березня 2014 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2014. – С. 192–194.

60. Литвин О. М. Розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінченних елементів / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): праці міжнар. симпозиуму, присвяченого 40-річчю 1-го симпозиуму та літньої математичної школи з питань точності й ефективності обчислювальних алгоритмів (м. Київ, м. Одеса; 1969 рік), Кацевелі, 24–29 вересня 2009 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К., 2009. – Т. 2. – С. 14–19.

61. Литвин О. М. Чисельна реалізація інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях : труды науч.-техн. конф. с междунар. участием, Харьков, 24–27 апреля 2012 г. / ХНУ им. В. Н. Каразина. – Харьков, 2012. – С. 258–261.

62. Литвин О. М. Чисельна реалізація інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач з двома просторовими змінними / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Труды института прикладной математики и механики. – 2013. – Т. 27. – С. 199–207.

63. Литвин О. М. Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестационарної теплопровідності / О. М. Литвин, І. В. Сергієнко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 10. – С. 69–73.

64. Литвин О. М. Чисельна реалізація методу ЛІДР розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними /

О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // XLIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, 20–23 грудня 2009 р., Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2009. – Ч. 1. – С. 47.

65. Литвин О. Н. Численная реализация метода линейных интегро-дифференциальных уравнений для уравнения нестационарной теплопроводности с двумя пространственными переменными / О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная // Управляющие системы и машины. – 2012. – № 4. – С. 11–19.

66. Лучка А. Ю. Параллельная организация вычислений при решении линейных уравнений методами проекционно-итерационного типа / А. Ю. Лучка, О. Э. Нощенко, И. В. Сергиенко, Н. И. Тукалевская // Кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 38–47.

67. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.

68. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 415 с.

69. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1980. – 586 с.

70. Метод конечных элементов в механике твердых тел / под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, Лейпциг: ФЭБ Фахбухферфлаг, 1982. – 480 с.

71. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / [В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк и др.]. – К. : Наук. думка, 2003. – 316 с.

72. Митчел Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчел, Р. Уэйт. – М. : Мир, 1981. – 216 с.

73. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.

74. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / И. Н. Молчанов. – К. : Наукова думка, 1988. – 344 с.
75. Молчанов И. Н. Основы метода конечных элементов / И. Н. Молчанов, Л. Д. Николенко. – К. : Наук, думка, 1989. – 272 с.
76. Морозов Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
77. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
78. Оганесян Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. – Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.
79. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
80. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики / [А. Н. Химич, И. Н. Молчанов, А. В. Попов и др.]. – К. : Наукова думка, 2008. – 248 с.
81. Пирумов У. Г. Численные методы: учебное пособие / У. Г. Пирумов. – М. : Изд-во МАИ, 1998. – 188 с.
82. Про один підхід до розв'язання задачі нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними за допомогою кластера / О. М. Литвин, О. М. Хіміч, М. Ф. Яковлев, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., Полтава, 18–20 березня 2010 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 114–116.
83. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1976. – 289с.
84. Рвачев В. Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К. : Наук. думка, 1978. – 140 с.

85. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – К. : Техніка, 1967. – 212 с.
86. Рвачев В. Л. К вопросу о построении координатных последовательностей / В. Л. Рвачев // Диф. ур-я. – 1970. – №6. – С. 1034–1047.
87. Рвачев В. Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1979. – 196 с.
88. Рвачев В. Л. Регионально-структурный метод / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко // Диф. ур-я. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 720–728.
89. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 566 с.
90. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М. : Мир, 1985. – 590 с.
91. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л. А. Розин. – М. : Стройиздат, 1977. – 129 с.
92. Румянцев А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: учебное пособие / А. В. Румянцев. – Калининград : Калинингр. ун-т, 1995. – 170 с.
93. Савула Я. Г. Некоторые приложения метода конечных элементов : учебное пособие / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, В. Н. Вовк. – Л. : Изд-во при ЛГУ, 1981. – 87 с.
94. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1982. – 272 с.
95. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
96. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
97. Светушков Н. Н. Моделирование нестационарных тепловых процессов в неоднородных средах : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук : спец. 05.13.18 «Математическое моделирование, численные

методы и комплексы программ» и 05.16.09 «Материаловедение (в машиностроении)» / Н. Н. Светушков. – Москва, 2010. – 20 с.

98. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир. – 1979. – 392 с.

99. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.

100. Семенец В. В. Проектирование одноблочных радиоэлектронных приборов с заданным тепловым режимом : монография / В. В. Семенец, А. М. Синотин, Т. А. Колесникова. – Х. : ХНУРЭ, 2006. – 172 с.

101. Сергієнко І. В. Аналіз обчислювальних можливостей інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Доповіді НАН України. – 2014. – № 3. – С. 43–50.

102. Сергієнко І. В. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання : монографія / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин. – К. : Наук. думка, 2010. – 418 с.

103. Сергиенко И. В. Интерлинация эрмитового типа на системе непересекающихся линий (Обзор) / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, А. В. Ткаченко, О. Л. Грицай // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – т. 51, № 2. – С.134–144.

104. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.

105. Слепцов А. Г. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач / А. Г. Слепцов, Ю. М. Шохин. // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347, № 3. – С. 164–167.

106. Слесаренко А. П. R -функции, вариационно-структурный и итерационные методы в идентификации и математическом моделировании нелинейных процессов теплопроводности в областях с источниками энергии /

А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов // Доповіді НАН України. – 2007. – № 1. – С. 94–99.

107. Слоневский Р. В. Дробно-рациональные методы решения жестких систем дифференциальных уравнений / Р. В. Слоневский, Р. Р. Столярчук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т.12, №4. – С. 203–208.

108. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.

109. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М. : Мир, 1980. – 520 с.

110. Трушин С. И. Метод конечных элементов. Теория и задачи / С. И. Трушин. – М. : АСВ, 2008. – 256 с.

111. Федько В. В. Обобщенная кусочно-эрмитова интерполяция и решение краевых задач : автореф. дис. на получение науч. степени канд. физ.-мат. наук / В. В. Федько. – Харьков, 1978. – 140 с.

112. Федько В. В. Об одной вариационно-разностной схеме / В. В. Федько // Вариационно-разностные методы в математ. физике. – 1981. – С. 150–154.

113. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер; [пер. с англ. И. А. Кульчицкой и С. С. Филиппова]. – М. : Мир, 1990. – 512 с.

114. Холл Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт; [пер. с англ. В. В. Поспелова, Б. П. Герасимова]. – М. : Мир, 1979. – 312 с.

115. Цой П. В. Об одном приближенном методе решения задач нестационарной теплопроводности / П. В. Цой // Теплофизика высоких температур. – 1967. – Том 5. – Выпуск 6. – С. 1048–1057.

116. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н. Н. Шабров. – Л. : Машиностроение, 1983. – 212 с.

117. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М. : Наука, 1989. – 288 с.

118. Шехтер Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р. С. Шехтер; [пер. с англ. В. Д. Скаржинского]. – М. : Мир, 1971. – 292 с.
119. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена / Д. Ши; [пер. с англ. И. Е. Зино и В. Л. Грязнова]. – М. : Мир, 1988. – 544 с.
120. Babuska I. A posteriori error estimates for the finite element method / I. Babuska, W. C. Rheinboldt // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 1978. – Vol. 12. – P. 1597–1615.
121. Babuska I. Finite Element Method for domain with corners / I. Babuska // *Computing.* – 1970. – Vol. 6, N. 3. – P. 264–273.
122. Enright W. H. Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations / W. H. Enright // *SIAM J. Numer. Anal.*, 11. – 1974. – P. 321–331.
123. Melosh R. J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method / R. J. Melosh // *J. Am. Inst. for Aeronautics and Astronautics*, 1. – 1965. – P. 1631–1637.
124. Method for Solution of Non-Stationary Heat Conduction Problem with Two Space Variables / I. V. Sergienko, O. N. Lytvyn, O. O. Lytvyn, V. I. Mezhuiev, L. S. Lobanova, G. V. Zalyzhna // *Proceedings of the 2nd International Conference on Mathematical Sciences & Computer Engineering ICMSC 2015 (Langkawi, Malaysia, 5–6 February 2015).* – P. 116–121.
125. Turner M. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp. // *J. Aeronaut. Sci*, 23. – 1956. – P. 805–824.

ДОДАТКИ

Додаток А

Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності в прямокутній пластині в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, y, 0) = x(1-x)y(1-y),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$f(x, y, t) = e^{-\gamma t} \left[2a^2 (x(1-x) + y(1-y)) - \gamma x(1-x)y(1-y) \right]$$

(a, γ – деякі сталі).

$$u(x, y, t) = x(1-x)y(1-y)e^{-\gamma t} \text{ – точний розв'язок.}$$

ORIGIN := 1

Кількість вузлів, в яких знаходиться розв'язок задачі: $q := 5$

$$h(x, N, i) := \begin{cases} N \cdot x - i + 1 & \text{if } \frac{i-1}{N} \leq x \leq \frac{i}{N} \\ -N \cdot x + i + 1 & \text{if } \frac{i}{N} \leq x \leq \frac{i+1}{N} \\ 0 & \text{if } x \leq \frac{i-1}{N} \vee x \geq \frac{i+1}{N} \end{cases} \quad \text{Ph}(x, N, i) := \begin{cases} N & \text{if } \frac{i-1}{N} < x < \frac{i}{N} \\ -N & \text{if } \frac{i}{N} < x < \frac{i+1}{N} \\ 0 & \text{if } x \leq \frac{i-1}{N} \vee x \geq \frac{i+1}{N} \vee x = \frac{i}{N} \end{cases}$$

Побудова координатних функцій та їх похідних:

$$\psi(k, x, y) := \begin{cases} h(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 2) + h(x, 4, 2) \cdot h(y, 2, 1) - h(x, 2, 1) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 1 \\ h(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 1) & \text{if } k = 2 \\ h(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 3) & \text{if } k = 3 \\ h(x, 4, 1) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 4 \\ h(x, 4, 3) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 5 \end{cases}$$

$$P_{x\psi}(k, x, y) := \begin{cases} \text{Ph}(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 2) + \text{Ph}(x, 4, 2) \cdot h(y, 2, 1) - \text{Ph}(x, 2, 1) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 1 \\ \text{Ph}(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 1) & \text{if } k = 2 \\ \text{Ph}(x, 2, 1) \cdot h(y, 4, 3) & \text{if } k = 3 \\ \text{Ph}(x, 4, 1) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 4 \\ \text{Ph}(x, 4, 3) \cdot h(y, 2, 1) & \text{if } k = 5 \end{cases}$$

$$P_{y\psi}(k, x, y) := \begin{cases} h(x, 2, 1) \cdot \text{Ph}(y, 4, 2) + h(x, 4, 2) \cdot \text{Ph}(y, 2, 1) - h(x, 2, 1) \cdot \text{Ph}(y, 2, 1) & \text{if } k = 1 \\ h(x, 2, 1) \cdot \text{Ph}(y, 4, 1) & \text{if } k = 2 \\ h(x, 2, 1) \cdot \text{Ph}(y, 4, 3) & \text{if } k = 3 \\ h(x, 4, 1) \cdot \text{Ph}(y, 2, 1) & \text{if } k = 4 \\ h(x, 4, 3) \cdot \text{Ph}(y, 2, 1) & \text{if } k = 5 \end{cases}$$

Обчислення матриць системи ЗДР:

$$A := \begin{cases} \text{for } s \in 1..q \\ \text{for } r \in 1..q \\ a_{s,r} \leftarrow \int_0^1 \int_0^1 \psi(s, x, y) \cdot \psi(r, x, y) \, dx \, dy \end{cases} \quad a$$

$$B := \begin{cases} \text{for } s \in 1..q \\ \text{for } r \in 1..q \\ b_{s,r} \leftarrow \int_0^1 \int_0^1 (P_{x\psi}(s, x, y) \cdot P_{x\psi}(r, x, y) + P_{y\psi}(s, x, y) \cdot P_{y\psi}(r, x, y)) \, dx \, dy \end{cases} \quad b$$

$$f(x, y, t) := e^{-t} [2x \cdot (1 - x) + 2y \cdot (1 - y) - x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)]$$

$$f_0(x, y) := 2 \cdot x \cdot (1 - x) + 2 \cdot y \cdot (1 - y) - x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)$$

$$F := \begin{cases} \text{for } s \in 1..q \\ f_s \leftarrow \int_0^1 \int_0^1 f_0(x, y) \cdot \psi(s, x, y) \, dx \, dy \end{cases} \quad f$$

$$D4(y1) := A2 \cdot B5(y1) \quad D5(t, y1) := D3(t) - D4(y1)$$

Початковий розподіл температури в пластині:

$$u_p(x, y) := x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)$$

Формування матриці-стовпця початкових умов:

$$\begin{aligned}
 y_{01} &:= \text{up}(0.5, 0.5) & y_{02} &:= \text{up}(0.5, 0.25) \\
 y_{03} &:= \text{up}(0.5, 0.75) & y_{04} &:= \text{up}(0.25, 0.5) \\
 y_{05} &:= \text{up}(0.75, 0.5)
 \end{aligned}
 \quad
 y_0 = \begin{pmatrix} 0.0625 \\ 0.04688 \\ 0.04688 \\ 0.04688 \\ 0.04688 \end{pmatrix}$$

Наближений розв'язок задачі: $u := \text{rkfixed}(y_0, 0, 0.1, 1000, D5)$

$$u =$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	0.0625	0.04688	0.04688	0.04688	0.04688
2	0.0001	0.06245	0.04688	0.04688	0.04688	0.04688
3	0.0002	0.06239	0.04689	0.04689	0.04689	0.04689
4	0.0003	0.06234	0.0469	0.0469	0.0469	0.0469
5	0.0004	0.06229	0.04691	0.04691	0.04691	0.04691
6	0.0005	0.06224	0.04692	0.04692	0.04692	0.04692
7	0.0006	0.06219	0.04692	0.04692	0.04693	0.04693
8	0.0007	0.06215	0.04693	0.04693	0.04693	0.04693
9	0.0008	0.0621	0.04694	0.04694	0.04694	0.04694
10	0.0009	0.06205	0.04695	0.04695	0.04695	0.04695
11	0.001	0.062	0.04696	0.04696	0.04696	0.04696
12	0.0011	0.06196	0.04696	0.04696	0.04696	0.04696
13	0.0012	0.06191	0.04697	0.04697	0.04697	0.04697
14	0.0013	0.06187	0.04698	0.04698	0.04698	0.04698
15	0.0014	0.06183	0.04699	0.04699	0.04699	0.04699
16	0.0015	0.06178	0.04699	0.04699	0.04699	0.04699

Точний розв'язок задачі: $ut(x, y, t) := x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y) \cdot e^{-t}$

$$ut_1 := y_0 \cdot e^{-0.001} \quad ut_2 := y_0 \cdot e^{-0.01} \quad ut_3 := y_0 \cdot e^{-0.1}$$

$$ut_1 = \begin{pmatrix} 0.06244 \\ 0.04683 \\ 0.04683 \\ 0.04683 \\ 0.04683 \end{pmatrix} \quad
 ut_2 = \begin{pmatrix} 0.06188 \\ 0.04641 \\ 0.04641 \\ 0.04641 \\ 0.04641 \end{pmatrix} \quad
 ut_3 = \begin{pmatrix} 0.05655 \\ 0.04241 \\ 0.04241 \\ 0.04241 \\ 0.04241 \end{pmatrix}$$

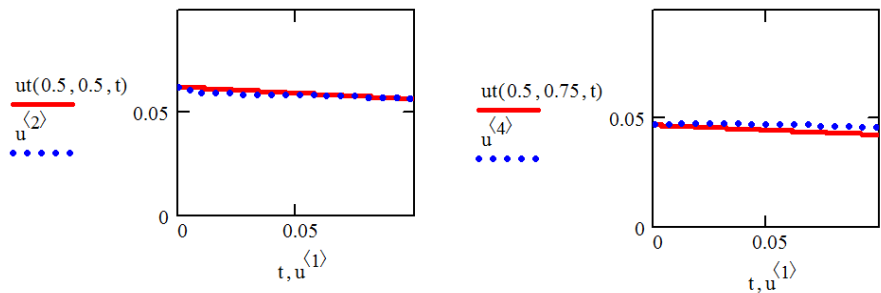


Рисунок А.1 – Графіки точного і наближеного розв'язків

Додаток Б

Опис та фрагменти програмної реалізації дослідження чисельної ефективності ІМСЕ для нестационарної задачі теплопровідності в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u(x, y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 u(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, Fo)}{\partial y^2} + f(x, y, Fo),$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in G = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, y, Fo)|_{\partial G} = 0 \quad \forall Fo \geq 0.$$

$$\varphi(x, y) = a \cdot x(1-x)y(1-y),$$

$$f(x, y, Fo) = e^{-\lambda \cdot Fo} \cdot (\lambda \cdot x(1-x)(1-y) - 2y(1-y) - 2x(1-x)).$$

Точний розв'язок задачі має вигляд: $u(x, y, Fo) = a \cdot e^{-\lambda \cdot Fo} x(1-x)y(1-y)$.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$M := 4 \quad N := 4$$

$$MN1 := (M-1) \cdot (N-1) \quad MN2 := (M-1) \cdot (M+N)$$

$$Q := (M-1) \cdot (N-1) \cdot N + (M^2 - 1) \cdot (N-1)$$

Кількість вузлів, в яких знаходиться розв'язок задачі: $Q = 81$

$$\text{hh}(x, M, i) := \begin{cases} M \cdot x - i + 1 & \text{if } \frac{i-1}{M} < x \leq \frac{i}{M} \\ -M \cdot x + i + 1 & \text{if } \frac{i}{M} < x < \frac{i+1}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Dhh}(x, M, i) := \begin{cases} M & \text{if } \frac{i-1}{M} < x \leq \frac{i}{M} \\ -M & \text{if } \frac{i}{M} < x < \frac{i+1}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Обчислення координат вузлів сітки:

```

X := for s ∈ 0..N - 1
      for k ∈ 0..N - 2
        for r ∈ 1..M - 1
          ky ← k(M - 1) + r + s · (M - 1) · (N + M)
          aa_ky ←  $\frac{r}{M}$ 
          aa
        for ss ∈ 0..N - 2
          for kk ∈ 0..M - 1
            for rr ∈ 1..M - 1
              kx ← (M - 1) · (N - 1) + rr + ss · (M - 1) · (M + N) + kk · M
              aa_kx ←  $\frac{kx - [(M - 1) · (N - 1) + ss · (M - 1) · (M + N) + kk · M] + kk · M}{M^2}$ 
              aa
            for kkk ∈ 0..N - 2
              for rrr ∈ 1..M - 1
                kxy ← (N - 1) · (M - 1) + rrr · M + kkk · (M - 1) · (N + M)
                aa_kxy ←  $\frac{kxy - [(N - 1) · (M - 1) + rrr · M + kkk · (M - 1) · (N + M)] + rrr}{M}$ 
                aa
              aa
            aa
          aa
        aa
      aa

```

X =

	1
1	0.25
2	0.5
3	0.75
4	0.25
5	0.5
6	0.75
7	0.25
8	0.5
9	0.75
10	0.0625
11	0.125
12	0.1875
13	0.25
14	0.3125
15	0.375
16	0.4375

```

Y := for s ∈ 0..N - 1
      for k ∈ 0..N - 2
        for r ∈ 1..M - 1
          ky ← k(M - 1) + r + s · (M - 1) · (N + M)
          aa_ky ←  $\frac{ky - [k · (M - 1) + r + s · (M - 1) · (N + M)] + (k + 1) + M · s}{N^2}$ 
          aa
        for ss ∈ 0..N - 2
          for kk ∈ 0..M - 1
            for rr ∈ 1..M - 1
              kx ← (M - 1) · (N - 1) + rr + ss · (M - 1) · (M + N) + kk · M
              aa_kx ←  $\frac{ss + 1}{N}$ 
              aa
            for kkk ∈ 0..N - 2
              for rrr ∈ 1..M - 1
                kxy ← (N - 1) · (M - 1) + rrr · M + kkk · (M - 1) · (N + M)
                aa_kxy ←  $\frac{kkk + 1}{N}$ 
                aa
              aa
            aa
          aa
        aa
      aa

```

Y =

	1
1	0.0625
2	0.0625
3	0.0625
4	0.125
5	0.125
6	0.125
7	0.1875
8	0.1875
9	0.1875
10	0.25
11	0.25
12	0.25
13	0.25
14	0.25
15	0.25
16	0.25


```

ψx(x,y) := for s ∈ 0..N-1
            for k ∈ 0..N-2
              for r ∈ 1..M-1
                ky ← k·(M-1) + r + s·(M-1)·(N+M)
                aaky,1 ← Dhh(x,M,r)·hh[y,N2,(k+1)+s·N]
                aaky,2 ← ky
                aa
              aa
            for ss ∈ 0..N-2
              for kk ∈ 0..M-1
                for rr ∈ 1..M-1
                  kx ← (M-1)·(N-1) + rr + ss·(M-1)·(M+N) + kk·M
                  aakx,1 ← Dhh(x,M2,rr+kk·M)·hh(y,N,ss+1)
                  aakx,2 ← kx
                  aa
                aa
              aa
            for kkk ∈ 0..N-2
              for rrr ∈ 1..M-1
                kxy ← (N-1)·(M-1) + rrr·M + kkk·(M-1)·(N+M)
                aakxy,1 ← Dhh(x,M,rrr)·hh[y,N2,(kkk+1)·N] + Dhh(x,M2,rrr·M)·hh(y,N,kkk+1) - Dhh(x,M,rrr)·hh(y,N,kkk+1)
                aakxy,2 ← kxy
                aa
              aa
            aa

```

```

ψy(x,y) := for s ∈ 0..N-1
            for k ∈ 0..N-2
              for r ∈ 1..M-1
                ky ← k·(M-1) + r + s·(M-1)·(N+M)
                aaky,1 ← hh(x,M,r)·Dhh[y,N2,(k+1)+s·N]
                aaky,2 ← ky
                aa
              aa
            for ss ∈ 0..N-2
              for kk ∈ 0..M-1
                for rr ∈ 1..M-1
                  kx ← (M-1)·(N-1) + rr + ss·(M-1)·(M+N) + kk·M
                  aakx,1 ← hh(x,M2,rr+kk·M)·Dhh(y,N,ss+1)
                  aakx,2 ← kx
                  aa
                aa
              aa
            for kkk ∈ 0..N-2
              for rrr ∈ 1..M-1
                kxy ← (N-1)·(M-1) + rrr·M + kkk·(M-1)·(N+M)
                aakxy,1 ← hh(x,M,rrr)·Dhh[y,N2,(kkk+1)·N] + hh(x,M2,rrr·M)·Dhh(y,N,kkk+1) - hh(x,M,rrr)·Dhh(y,N,kkk+1)
                aakxy,2 ← kxy
                aa
              aa
            aa

```


$$A4 := A^{-1} \quad A2 := A4 \cdot B$$

$$f(x, y, t) := e^{-t} [2x \cdot (1 - x) + 2y \cdot (1 - y) - x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)]$$

$$f0(x, y) := 2 \cdot x \cdot (1 - x) + 2 \cdot y \cdot (1 - y) - x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)$$

$$F := \left| \begin{array}{l} \text{for } s \in 1..Q \\ f_s \leftarrow \int_0^1 \int_0^1 f0(x, y) \cdot \psi(x, y)_{s, 1} dx dy \\ f \end{array} \right.$$

	1
1	0.007184
2	0.009081
3	0.007184
4	0.008631
5	0.010478
6	0.008631
7	0.009855
8	0.01166
9	0.009855
10	0.007184
11	0.008631
12	0.009854
13	-0.020566
14	0.011635
15	0.012191
16	...

$$D2(t) := e^{-t} \cdot F \quad D12 := A4 \cdot F \quad D3(t) := D12 \cdot e^{-t}$$

$$B5(y1) := \left| \begin{array}{l} \text{for } ii \in 1..Q \\ c_{ii} \leftarrow y1_{ii} \\ c \end{array} \right.$$

$$D4(y1) := A2 \cdot B5(y1) \quad D5(t, y1) := D3(t) - D4(y1)$$

Початковий розподіл температури в пластині:

$$up(x, y) := x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)$$

$$mn := 1..Q \quad y0_{mn} := up(X_{mn}, Y_{mn}) \quad n := 1000$$

Наближений розв'язок задачі:

$$u := rkfixed(y0, 0, 0.5, n, D5)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0.010986	0.014648	0.010986	0.020508	0.027344	0.020508	0.028564	0.038086	0.028564	0.010986	0.020508	0.028564
2	0.0005	0.010984	0.01464	0.010984	0.020488	0.027316	0.020488	0.028534	0.038045	0.028534	0.010984	0.020488	0.028534
3	0.001	0.010985	0.014635	0.010985	0.020481	0.027302	0.020481	0.028507	0.038013	0.028507	0.010985	0.020481	0.028507
4	0.0015	0.010987	0.014633	0.010987	0.020477	0.027292	0.020477	0.028484	0.037985	0.028484	0.010987	0.020477	0.028484
5	0.002	0.010989	0.014631	0.010989	0.020474	0.027282	0.020474	0.028465	0.03796	0.028465	0.010988	0.020473	0.028464
6	0.0025	0.01099	0.014629	0.01099	0.02047	0.027273	0.02047	0.028447	0.037938	0.028447	0.01099	0.02047	0.028446
7	0.003	0.010991	0.014627	0.010991	0.020466	0.027265	0.020466	0.028431	0.037917	0.028431	0.010991	0.020465	0.028431
8	0.0035	0.010991	0.014624	0.010991	0.020461	0.027256	0.020461	0.028417	0.037898	0.028417	0.010991	0.020461	0.028416
9	0.004	0.010991	0.014621	0.010991	0.020456	0.027246	0.020456	0.028404	0.03788	0.028404	0.01099	0.020456	0.028403
10	0.0045	0.01099	0.014618	0.01099	0.020451	0.027237	0.020451	0.028391	0.037862	0.028391	0.010989	0.02045	0.02839
11	0.005	0.010988	0.014614	0.010988	0.020445	0.027227	0.020445	0.028379	0.037845	0.028379	0.010988	0.020444	0.028378
12	0.0055	0.010986	0.01461	0.010986	0.020439	0.027217	0.020439	0.028367	0.037828	0.028367	0.010986	0.020438	0.028366
13	0.006	0.010984	0.014605	0.010984	0.020432	0.027207	0.020432	0.028355	0.037811	0.028355	0.010983	0.020432	0.028354
14	0.0065	0.010981	0.014601	0.010981	0.020426	0.027197	0.020426	0.028344	0.037795	0.028344	0.010981	0.020425	0.028343
15	0.007	0.010978	0.014596	0.010978	0.020419	0.027187	0.020419	0.028332	0.037778	0.028332	0.010978	0.020418	0.028331
16	0.0075	0.010975	0.014591	0.010975	0.020412	0.027176	0.020412	0.028321	0.037762	0.028321	0.010974	0.020411	...

Формули точного і наближеного (IMCE) розв'язків:

$$UT(x, y, t) := e^{-t} \cdot x \cdot (1-x) \cdot y \cdot (1-y) \quad UN(x, y) := \sum_{mm=1}^Q (u_{n+1, mm+1} \cdot \Psi(x, y)_{mm, 1})$$

Обчислення похибки наближення:

$$\begin{aligned} ii &:= 1..Q & ZZ_{ii} &:= |UT(X_{ii}, Y_{ii}, 0.5) - UN(X_{ii}, Y_{ii})| \\ i &:= 1..101 & j &:= 1..101 & XXX_i &:= \frac{i-1}{100} & YYY_j &:= \frac{j-1}{100} \\ ZT_{i,j} &:= UT(XXX_i, YYY_j, 0.5) & ZN_{i,j} &:= UN(XXX_i, YYY_j) \\ POX_{i,j} &:= |ZN_{i,j} - ZT_{i,j}| \\ \max(ZZ) &= 0.000146 & \min(ZZ) &= 0.000006 \\ \max(POX) &= 0.000181 \end{aligned}$$

Максимальна похибка дорівнює 0,000181 в момент часу $t = 0,5$ при 100 x 100 точках (при 1000 кроках в `rkfixed`). Максимальна похибка у вузлах дорівнює 0,000146.

Максимальна похибка дорівнює 0,00056 в момент часу $t = 0,01$ при 100 x 100 точках (при 100 кроках в `rkfixed`). Максимальна похибка у вузлах дорівнює 0,000192.

Максимальна похибка дорівнює 0,00032 в момент часу $t = 0,1$ при 100 x 100 точках (при 1000 кроках в `rkfixed`). Максимальна похибка у вузлах дорівнює 0,000168.

Додаток В

Опис програмної реалізації МСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для однорідної пластини в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, y, 0) = 2x(1-x) + 2y(1-y) - \lambda \cdot [x y (1-x)(1-y)],$$

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$f(x, y, t) = a \cdot e^{-\lambda t} [2x(1-x) + 2y(1-y) - \lambda x y (1-x)(1-y)]$$

(a, λ – деякі сталі).

$$u(x, y, t) = a x(1-x)y(1-y)e^{-\lambda t} \text{ – точний розв'язок.}$$

ORIGIN := 1

$$M := 16 \quad N := 16 \quad a1 := 20 \quad \lambda := 1$$

$$hh(x, M, i) := \begin{cases} M \cdot x - i + 1 & \text{if } \frac{i-1}{M} < x \leq \frac{i}{M} \\ -M \cdot x + i + 1 & \text{if } \frac{i}{M} < x < \frac{i+1}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$Q := (M-1) \cdot (N-1)$ – кількість вузлів, в яких знаходиться розв'язок.

$$f0(x, y) := 2x \cdot (1-x) + 2y \cdot (1-y) - \lambda \cdot [x \cdot y \cdot (1-x) \cdot (1-y)]$$

$$f(x, y, t) := a1 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot [2x \cdot (1-x) + 2y \cdot (1-y) - \lambda \cdot x \cdot y \cdot (1-x) \cdot (1-y)]$$

$$p1 := 1..M-1 \quad q1 := 1..N-1$$

$$CC1(p1, q1) := \int_{\frac{p1-1}{M}}^{\frac{p1}{M}} \left(\int_{\frac{q1-1}{N}}^{\frac{q1}{N}} f0(x, y) \cdot hh(y, N, q1) dy \right) \cdot hh(x, M, p1) dx$$

$$CC2(p1, q1) := \int_{\frac{p1-1}{M}}^{\frac{p1}{M}} \left(\int_{\frac{q1}{N}}^{\frac{q1+1}{N}} f0(x, y) \cdot hh(y, N, q1) dy \right) \cdot hh(x, M, p1) dx$$

$$CC3(p1, q1) := \int_{\frac{p1}{M}}^{\frac{p1+1}{M}} \left(\int_{\frac{q1-1}{N}}^{\frac{q1}{N}} f0(x, y) \cdot hh(y, N, q1) dy \right) \cdot hh(x, M, p1) dx$$

$$CC4(p1, q1) := \int_{\frac{p1}{M}}^{\frac{p1+1}{M}} \left(\int_{\frac{q1}{N}}^{\frac{q1+1}{N}} f0(x, y) \cdot hh(y, N, q1) dy \right) \cdot hh(x, M, p1) dx$$

```

A := | for pp ∈ 1..N - 1
      | | for qq ∈ 1..N - 1
      | | | for ii ∈ 1..N - 1
      | | | | for jj ∈ 1..N - 1
      | | | | | n1pq ← (N - 1) · (pp - 1) + qq
      | | | | | n2pq ← (N - 1) · (ii - 1) + jj
      | | | | | aan1pq, n2pq ←  $\frac{1}{36 \cdot M \cdot N}$  if (ii = pp + 1 ∨ ii = pp - 1) ∧ (jj = qq + 1 ∨ jj = qq - 1)
      | | | | | aan1pq, n2pq ←  $\frac{1}{9 \cdot M \cdot N}$  if (ii = pp) ∧ (jj = qq + 1 ∨ jj = qq - 1)
      | | | | | aan1pq, n2pq ←  $\frac{1}{9 \cdot M \cdot N}$  if ((ii = pp + 1 ∨ ii = pp - 1)) ∧ (jj = qq)
      | | | | | aan1pq, n2pq ←  $\frac{4}{9 \cdot M \cdot N}$  if (ii = pp) ∧ (jj = qq)
      | | | | | aan1pq, n2pq ← 0 otherwise
      | | | | aa
      | | | aa
      | | aa
      | aa

```

```

B := for pp ∈ 1..N - 1
      for qq ∈ 1..N - 1
        for ii ∈ 1..N - 1
          for jj ∈ 1..N - 1
            n1pq ← (N - 1) · (pp - 1) + qq
            n2pq ← (N - 1) · (ii - 1) + jj
            bbn1pq, n2pq ←  $-\frac{N}{6 \cdot M} - \frac{M}{6 \cdot N}$  if (ii = pp + 1 ∨ ii = pp - 1) ∧ (jj = qq + 1 ∨ jj = qq - 1)
            bbn1pq, n2pq ←  $\frac{4 \cdot M}{3 \cdot N} + \frac{4 \cdot N}{3 \cdot M}$  if (ii = pp) ∧ (jj = qq)
            bbn1pq, n2pq ←  $\frac{-2 \cdot N}{3 \cdot M} + \frac{M}{3 \cdot N}$  if (ii = pp) ∧ (jj = qq + 1 ∨ jj = qq - 1)
            bbn1pq, n2pq ←  $\frac{-2 \cdot N}{3 \cdot M} + \frac{M}{3 \cdot N}$  if ((ii = pp + 1 ∨ ii = pp - 1) ∧ (jj = qq))
            bb(N-1)·(pp-1)+qq, (N-1)·(ii-1)+jj ← 0 otherwise
          bb
        bb
      bb
bb

```

$$D1_{(M-1) \cdot (p1-1) + q1} := CC1(p1, q1) + CC2(p1, q1) + CC3(p1, q1) + CC4(p1, q1)$$

$$D2(t) := e^{-t} \cdot D1 \cdot a1$$

$$A4 := A^{-1} \quad D12 := A4 \cdot D1 \quad D3(t) := a1 \cdot e^{-t} \cdot D12$$

$$A2 := A^{-1} \cdot B \quad B5(y) := \begin{cases} \text{for } ii \in 1..(M-1) \cdot (N-1) \\ c_{ii} \leftarrow y_{ii} \\ c \end{cases}$$

$$D4(y) := A2 \cdot B5(y) \quad D5(t, y) := D3(t) - D4(y)$$

$$p1 := 1..M - 1 \quad q1 := 1..N - 1 \quad y0_{(p1-1)(M-1)+q1} := \text{up}\left(\frac{p1}{M}, \frac{q1}{M}\right)$$

$$n := 10000 \quad u := \text{rkfixed}(y0, 0, 1.0, n, D5)$$

Формула точного розв'язку:

$$UT(x, y, t) := a1 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot x \cdot (1 - x) \cdot y \cdot (1 - y)$$

Формула наближеного розв'язку (IMCE):

$$UN(x, y) := \sum_{pp=1}^{M-1} \sum_{qq=1}^{N-1} \left[u_{n+1, (M-1) \cdot (pp-1) + qq+1} \right] \cdot hh(x, M, pp) \cdot hh(y, N, qq)$$

Обчислення максимальної похибки наближення у вузлах сітки:

$$\begin{aligned} \ddot{i} &:= 1..M+1 & \ddot{j} &:= 1..N+1 & \text{POX1}_{\ddot{i}, \ddot{j}} &:= \left| \text{UT}\left(\frac{\ddot{i}-1}{M}, \frac{\ddot{j}-1}{N}, 1.0\right) - \text{UN}\left(\frac{\ddot{i}-1}{M}, \frac{\ddot{j}-1}{N}\right) \right| \\ \max(\text{POX1}) &= 0.00134 \end{aligned}$$

Обчислення максимальної похибки наближення по всій пластині:

$$\begin{aligned} i &:= 1..101 & j &:= 1..101 & \text{XXX}_i &:= \frac{i-1}{100} & \text{YYY}_j &:= \frac{j-1}{100} \\ \text{ZT}_{i,j} &:= \text{UT}(\text{XXX}_i, \text{YYY}_j, 1.0) & \text{ZN}_{i,j} &:= \text{UN}(\text{XXX}_i, \text{YYY}_j) \\ \text{POX}_{i,j} &:= |\text{ZN}_{i,j} - \text{ZT}_{i,j}| \\ \max(\text{POX}) &= 0.00224 \end{aligned}$$

Графічна ілюстрація отриманих чисельних результатів.

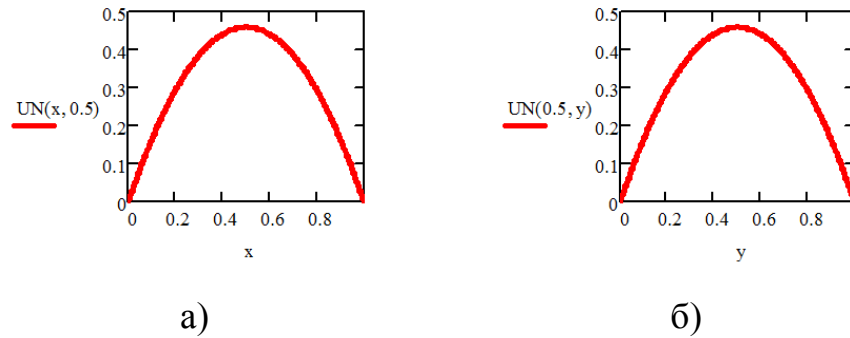


Рисунок В.1 – Розподіл температури в момент часу $t=0,1$:

а) на лінії $y=0,5$; б) на лінії $x=0,5$

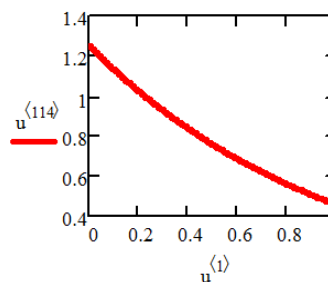


Рисунок В.2 – Залежність температури від часу в точці $(0,5; 0,5)$ пластини

Додаток Г

Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для Г-подібної області в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = 0,$$

G – Г-подібна область – вертикальний переріз балки,

$$G = \Pi_1 \cup \Pi_2, \quad \Pi_1 = [-a, a] \times [0, b], \quad \Pi_2 = [-c, c] \times [0, d].$$

$$f(x, y, t) = e^{-\beta t} (-\beta w(x, y) - \Delta w(x, y)),$$

$$w(x, y) = \omega_1(x, y) \vee_{\alpha(x, y)} \omega_2(x, y),$$

$$\omega_1(x, y) = (a^2 - x^2)y(b - y), \quad \omega_2(x, y) = (c^2 - x^2)y(d - y),$$

$$u \vee_{\alpha} v = u + v + \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv}, \quad u \wedge_{\alpha} v = u + v - \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv}.$$

$$\alpha = \alpha(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \lambda := 2 \quad M := 4 \quad N := 4$$

$$\text{hh}(z) := \begin{cases} z + 1 & \text{if } -1 < z \leq 1 \\ 1 - z & \text{if } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{hh}(x, M, i) := \begin{cases} M \cdot x - i + 1 & \text{if } \frac{i-1}{M} < x \leq \frac{i}{M} \\ -M \cdot x + i + 1 & \text{if } \frac{i}{M} < x < \frac{i+1}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Dhh}(x, M, i) := \begin{cases} M & \text{if } \frac{i-1}{M} < x \leq \frac{i}{M} \\ -M & \text{if } \frac{i}{M} < x < \frac{i+1}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a := 1.0 \quad b := 0.5 \quad c := 1 \quad d := 0.25$$

$$\text{al}(u, v) := \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$$

$$\omega_1(x, y) := x \cdot [(a - x) \cdot (b - y) \cdot y] \quad \omega_2(x, y) := (x - d) \cdot y \cdot (c - y) \cdot (a - d - x)$$

$$w(x, y) := \left(\omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) + \sqrt{\omega_1(x, y)^2 + \omega_2(x, y)^2 - 2 \cdot \text{al}(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) \cdot \omega_1(x, y) \cdot \omega_2(x, y)} \right)$$

$$f_0(x, y) := \begin{cases} -\left(\frac{d^2}{dx^2} w(x, y) + \frac{d^2}{dy^2} w(x, y) + \lambda \cdot w(x, y) \right) & \text{if } [(0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 0.5)] \vee [(0.25 \leq x \leq 0.75) \wedge (0.5 < y \leq 1)] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Побудова координатних функцій та їх похідних.

$$\psi(x, y, k) := \begin{cases} \text{hh}(x, M, 1) \cdot \text{hh}(y, N^2, N) + \text{hh}(x, M^2, M) \cdot \text{hh}(y, N, 1) - \text{hh}(x, M, 1) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } k = 1 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, N) + \text{hh}(x, M^2, 2 \cdot M) \cdot \text{hh}(y, N, 1) - \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } k = 13 \\ \text{hh}(x, M, 3) \cdot \text{hh}(y, N^2, N) + \text{hh}(x, M^2, 3 \cdot M) \cdot \text{hh}(y, N, 1) - \text{hh}(x, M, 3) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } k = 22 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, 2 \cdot N) + \text{hh}(x, M^2, 2M) \cdot \text{hh}(y, N, 2) - \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N, 2) & \text{if } k = 34 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, 3 \cdot N) + \text{hh}(x, M^2, 2M) \cdot \text{hh}(y, N, 3) - \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N, 3) & \text{if } k = 42 \\ \text{hh}(x, M, 1) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 1) & \text{if } 2 \leq k \leq 4 \\ \text{hh}(x, M, 1) \cdot \text{hh}(y, N^2, k) & \text{if } 5 \leq k \leq 7 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 7) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } 8 \leq k \leq 10 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 6) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } 11 \leq k \leq 12 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 13) & \text{if } 14 \leq k \leq 16 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 12) & \text{if } 17 \leq k \leq 19 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 13) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } k = 20 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 12) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } k = 21 \\ \text{hh}(x, M, 3) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 22) & \text{if } 23 \leq k \leq 25 \\ \text{hh}(x, M, 3) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 21) & \text{if } 26 \leq k \leq 28 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 19) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } 29 \leq k \leq 30 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 18) \cdot \text{hh}(y, N, 1) & \text{if } 31 \leq k \leq 33 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 26) & \text{if } k = 35 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 31) \cdot \text{hh}(y, N, 2) & \text{if } 36 \leq k \leq 38 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 30) \cdot \text{hh}(y, N, 2) & \text{if } 39 \leq k \leq 41 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 33) & \text{if } 43 \leq k \leq 44 \\ \text{hh}(x, M, 2) \cdot \text{hh}(y, N^2, k - 32) & \text{if } 45 \leq k \leq 47 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 43) \cdot \text{hh}(y, N, 3) & \text{if } 48 \leq k \leq 50 \\ \text{hh}(x, M^2, k - 42) \cdot \text{hh}(y, N, 3) & \text{if } 51 \leq k \leq 53 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
D_{x\psi}(x, y, k) := & \left. \begin{aligned}
& Dhh(x, M, 1) \cdot hh(y, N^2, N) + Dhh(x, M^2, M) \cdot hh(y, N, 1) - Dhh(x, M, 1) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 1 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, N) + Dhh(x, M^2, 2 \cdot M) \cdot hh(y, N, 1) - Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 13 \\
& Dhh(x, M, 3) \cdot hh(y, N^2, N) + Dhh(x, M^2, 3 \cdot M) \cdot hh(y, N, 1) - Dhh(x, M, 3) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 22 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, 2 \cdot N) + Dhh(x, M^2, 2M) \cdot hh(y, N, 2) - Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N, 2) \quad \text{if } k = 34 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, 3 \cdot N) + Dhh(x, M^2, 2M) \cdot hh(y, N, 3) - Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N, 3) \quad \text{if } k = 42 \\
& Dhh(x, M, 1) \cdot hh(y, N^2, k - 1) \quad \text{if } 2 \leq k \leq 4 \\
& Dhh(x, M, 1) \cdot hh(y, N^2, k) \quad \text{if } 5 \leq k \leq 7 \\
& Dhh(x, M^2, k - 7) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } 8 \leq k \leq 10 \\
& Dhh(x, M^2, k - 6) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } 11 \leq k \leq 12 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, k - 13) \quad \text{if } 14 \leq k \leq 16 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, k - 12) \quad \text{if } 17 \leq k \leq 19 \\
& Dhh(x, M^2, k - 13) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 20 \\
& Dhh(x, M^2, k - 12) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 21 \\
& Dhh(x, M, 3) \cdot hh(y, N^2, k - 22) \quad \text{if } 23 \leq k \leq 25 \\
& Dhh(x, M, 3) \cdot hh(y, N^2, k - 21) \quad \text{if } 26 \leq k \leq 28 \\
& Dhh(x, M^2, k - 19) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } 29 \leq k \leq 30 \\
& Dhh(x, M^2, k - 18) \cdot hh(y, N, 1) \quad \text{if } 31 \leq k \leq 33 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, k - 26) \quad \text{if } k = 35 \\
& Dhh(x, M^2, k - 31) \cdot hh(y, N, 2) \quad \text{if } 36 \leq k \leq 38 \\
& Dhh(x, M^2, k - 30) \cdot hh(y, N, 2) \quad \text{if } 39 \leq k \leq 41 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, k - 33) \quad \text{if } 43 \leq k \leq 44 \\
& Dhh(x, M, 2) \cdot hh(y, N^2, k - 32) \quad \text{if } 45 \leq k \leq 47 \\
& Dhh(x, M^2, k - 43) \cdot hh(y, N, 3) \quad \text{if } 48 \leq k \leq 50 \\
& Dhh(x, M^2, k - 42) \cdot hh(y, N, 3) \quad \text{if } 51 \leq k \leq 53
\end{aligned} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Dy\psi(x, y, k) := & \left. \begin{aligned}
& hh(x, M, 1) \cdot Dhh(y, N^2, N) + hh(x, M^2, M) \cdot Dhh(y, N, 1) - hh(x, M, 1) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 1 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, N) + hh(x, M^2, 2 \cdot M) \cdot Dhh(y, N, 1) - hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 13 \\
& hh(x, M, 3) \cdot Dhh(y, N^2, N) + hh(x, M^2, 3 \cdot M) \cdot Dhh(y, N, 1) - hh(x, M, 3) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 22 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, 2 \cdot N) + hh(x, M^2, 2M) \cdot Dhh(y, N, 2) - hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N, 2) \quad \text{if } k = 34 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, 3 \cdot N) + hh(x, M^2, 2M) \cdot Dhh(y, N, 3) - hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N, 3) \quad \text{if } k = 42 \\
& hh(x, M, 1) \cdot Dhh(y, N^2, k - 1) \quad \text{if } 2 \leq k \leq 4 \\
& hh(x, M, 1) \cdot Dhh(y, N^2, k) \quad \text{if } 5 \leq k \leq 7 \\
& hh(x, M^2, k - 7) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } 8 \leq k \leq 10 \\
& hh(x, M^2, k - 6) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } 11 \leq k \leq 12 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, k - 13) \quad \text{if } 14 \leq k \leq 16 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, k - 12) \quad \text{if } 17 \leq k \leq 19 \\
& hh(x, M^2, k - 13) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 20 \\
& hh(x, M^2, k - 12) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } k = 21 \\
& hh(x, M, 3) \cdot Dhh(y, N^2, k - 22) \quad \text{if } 23 \leq k \leq 25 \\
& hh(x, M, 3) \cdot Dhh(y, N^2, k - 21) \quad \text{if } 26 \leq k \leq 28 \\
& hh(x, M^2, k - 19) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } 29 \leq k \leq 30 \\
& hh(x, M^2, k - 18) \cdot Dhh(y, N, 1) \quad \text{if } 31 \leq k \leq 33 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, k - 26) \quad \text{if } k = 35 \\
& hh(x, M^2, k - 31) \cdot Dhh(y, N, 2) \quad \text{if } 36 \leq k \leq 38 \\
& hh(x, M^2, k - 30) \cdot Dhh(y, N, 2) \quad \text{if } 39 \leq k \leq 41 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, k - 33) \quad \text{if } 43 \leq k \leq 44 \\
& hh(x, M, 2) \cdot Dhh(y, N^2, k - 32) \quad \text{if } 45 \leq k \leq 47 \\
& hh(x, M^2, k - 43) \cdot Dhh(y, N, 3) \quad \text{if } 48 \leq k \leq 50 \\
& hh(x, M^2, k - 42) \cdot Dhh(y, N, 3) \quad \text{if } 51 \leq k \leq 53
\end{aligned} \right|
\end{aligned}$$

Побудова матриць системи ЗДР, записаної в матричному вигляді.

$$kk := 1..53 \quad D0_{kk} := \int_0^1 \left(\int_0^1 f0(x, y) \cdot \psi(x, y, kk) dy \right) dx$$

$$A := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..53 \\ \quad \text{for } i \in 1..53 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} s_{k,i} \leftarrow \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi(x,y,i) \cdot \psi(x,y,k) \, dy \right) dx \\ s \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$B := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..53 \\ \quad \text{for } i \in 1..53 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} ss_{k,i} \leftarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(D_x \psi(x,y,i) \cdot D_x \psi(x,y,k) + D_y \psi(x,y,i) \cdot D_y \psi(x,y,k) \right) dy \right] dx \\ ss \end{array} \right. \end{array} \right.$$

	1	2	3	4	5
1	0.01	-1.705·10 ⁻³	-3.41·10 ⁻³	-3.378·10 ⁻³	-3.378·10 ⁻³
2	-1.705·10 ⁻³	6.944·10 ⁻³	1.738·10 ⁻³	0	0
3	-3.41·10 ⁻³	1.738·10 ⁻³	6.943·10 ⁻³	1.739·10 ⁻³	0
4	-3.378·10 ⁻³	0	1.739·10 ⁻³	6.944·10 ⁻³	0
5	-3.378·10 ⁻³	0	0	0	6.944·10 ⁻³
6	-3.41·10 ⁻³	0	0	0	1.739·10 ⁻³
7	-1.705·10 ⁻³	0	0	0	0
8	-1.705·10 ⁻³	2.472·10 ⁻⁴	4.94·10 ⁻⁴	7.172·10 ⁻⁴	7.172·10 ⁻⁴
9	-3.41·10 ⁻³	4.854·10 ⁻⁴	9.757·10 ⁻⁴	1.463·10 ⁻³	1.463·10 ⁻³
10	-3.383·10 ⁻³	7.246·10 ⁻⁴	1.47·10 ⁻³	2.197·10 ⁻³	2.197·10 ⁻³
11	-3.383·10 ⁻³	7.246·10 ⁻⁴	1.47·10 ⁻³	2.197·10 ⁻³	2.197·10 ⁻³
12	-3.41·10 ⁻³	4.854·10 ⁻⁴	9.757·10 ⁻⁴	1.463·10 ⁻³	1.463·10 ⁻³
13	3.338·10 ⁻³	-6.019·10 ⁻⁴	-1.219·10 ⁻³	-1.396·10 ⁻³	-1.396·10 ⁻³
14	-6.092·10 ⁻⁴	1.736·10 ⁻³	4.293·10 ⁻⁴	0	0
15	-1.219·10 ⁻³	4.293·10 ⁻⁴	1.736·10 ⁻³	4.294·10 ⁻⁴	0
16	-1.396·10 ⁻³	0	4.294·10 ⁻⁴	1.736·10 ⁻³	...

	1	2	3	4	5
1	8.667	0	0	-2.583	-2.583
2	0	5.667	-2.583	0	0
3	0	-2.583	5.667	-2.583	0
4	-2.583	0	-2.583	5.667	0
5	-2.583	0	0	0	5.667
6	0	0	0	0	-2.583
7	0	0	0	0	0
8	-6.154·10 ⁻⁶	0	0	0	0
9	-3.077·10 ⁻⁶	0	0	0	0
10	-2.583	0	0	0	0
11	-2.583	0	0	0	0
12	-3.077·10 ⁻⁶	0	0	0	0
13	1.5	0	0	-0.708	-0.708
14	0	1.167	-0.708	0	0
15	0	-0.708	1.167	-0.708	0
16	-0.708	0	-0.708	1.167	...

$$A4 := A^{-1} \quad D12 := A4 \cdot D1 \quad D3(t) := D12 \cdot (e^{-\lambda \cdot t}) \quad A2 := A^{-1} \cdot B$$

Визначення вузлів сітки:

$XX :=$	$YY :=$
for $k \in 1..7$ $v_k \leftarrow 0.25$	for $k \in 8..12$ $vv_k \leftarrow 0.25$
for $k \in 13..19$ $v_k \leftarrow 0.5$	for $k \in 1$ $vv_k \leftarrow 0.25$
for $k \in 34..35$ $v_k \leftarrow 0.5$	for $k \in 20..22$ $vv_k \leftarrow 0.25$
for $k \in 42..47$ $v_k \leftarrow 0.5$	for $k \in 29..33$ $vv_k \leftarrow 0.25$
for $k \in 22..28$ $v_k \leftarrow 0.75$	for $k \in 13$ $vv_k \leftarrow 0.25$
for $k \in 8..10$ $v_k \leftarrow \frac{k-7}{16}$	for $k \in 34$ $vv_k \leftarrow 0.5$
for $k \in 11..12$ $v_k \leftarrow \frac{k-6}{16}$	for $k \in 35$ $vv_k \leftarrow \frac{9}{16}$
for $k \in 20$ $v_k \leftarrow \frac{7}{16}$	for $k \in 42$ $vv_k \leftarrow 0.75$
for $k \in 21$ $v_k \leftarrow \frac{9}{16}$	for $k \in 36..41$ $vv_k \leftarrow 0.5$
for $k \in 29..30$ $v_k \leftarrow \frac{k-19}{16}$	for $k \in 48..53$ $vv_k \leftarrow 0.75$
for $k \in 31..33$ $v_k \leftarrow \frac{k-18}{16}$	for $k \in 2..4$ $vv_k \leftarrow \frac{k-1}{16}$
for $k \in 36..38$ $v_k \leftarrow \frac{k-31}{16}$	for $k \in 5..7$ $vv_k \leftarrow \frac{k}{16}$
for $k \in 39..41$ $v_k \leftarrow \frac{k-30}{16}$	for $k \in 14..16$ $vv_k \leftarrow \frac{k-13}{16}$
for $k \in 48..50$ $v_k \leftarrow \frac{k-43}{16}$	for $k \in 17..19$ $vv_k \leftarrow \frac{k-12}{16}$
for $k \in 51..53$ $v_k \leftarrow \frac{k-42}{16}$	for $k \in 23..25$ $vv_k \leftarrow \frac{k-22}{16}$
	for $k \in 26..28$ $vv_k \leftarrow \frac{k-21}{16}$
	for $k \in 43..44$ $vv_k \leftarrow \frac{k-33}{16}$
	for $k \in 45..47$ $vv_k \leftarrow \frac{k-32}{16}$

 $XX =$

	1
1	0.25
2	0.25
3	0.25
4	0.25
5	0.25
6	0.25
7	0.25
8	0.063
9	0.125
10	0.188
11	0.313
12	0.375
13	0.5
14	0.5
15	0.5
16	0.5

 $YY =$

	1
1	0.25
2	0.063
3	0.125
4	0.188
5	0.313
6	0.375
7	0.438
8	0.25
9	0.25
10	0.25
11	0.25
12	0.25
13	0.25
14	0.063
15	0.125
16	0.188

$$up(x, y) := 20w(x, y) \quad jj := 1..53 \quad y0_{jj} := up(XX_{jj}, YY_{jj})$$

Розв'язання системи ЗДР. $u := Rkadapt(y0, 0, 0.1, 100, D5)$

	1	2	3	4	5	6
1	0	0.469	0.205	0.352	0.439	0.439
2	$1 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
3	$2 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
4	$3 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
5	$4 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
6	$5 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
7	$6 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.44
8	$7 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.441
9	$8 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.441
10	$9 \cdot 10^{-5}$	0.469	0.205	0.352	0.44	0.441
11	$1 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.205	0.352	0.44	0.441
12	$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.205	0.352	0.44	0.441
13	$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.206	0.352	0.441	0.441
14	$1.3 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.206	0.352	0.441	0.442
15	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.206	0.352	0.441	0.442
16	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.206	0.352	0.441	...

Точний розв'язок задачі:

$$U_t(x, y, t) := 20e^{-\lambda \cdot t} \cdot w(x, y) \quad z_p := U_t(XX_p, YY_p, 0.1)$$

$$pp := 1..53 \quad uppp := |z_{pp} - u_{101, pp+1}|$$

	1
1	0.014
2	$6.061 \cdot 10^{-3}$
3	0.01
4	0.013
5	0.018
6	$9.574 \cdot 10^{-3}$
7	$5.314 \cdot 10^{-3}$
8	$3.6 \cdot 10^{-3}$
9	$5.313 \cdot 10^{-3}$
10	$7.202 \cdot 10^{-3}$
11	$6.563 \cdot 10^{-3}$
12	$9.121 \cdot 10^{-3}$
13	0.025
14	$7.49 \cdot 10^{-3}$
15	0.013
16	...

	1
1	0.459
2	0.201
3	0.345
4	0.431
5	0.431
6	0.345
7	0.201
8	0.144
9	0.268
10	0.373
11	0.527
12	0.574
13	0.613
14	0.268
15	0.46
16	...

Максимальна похибка між розв'язками

$$\max(upp) = 0.0357092$$

Графічна ілюстрація отриманих чисельних результатів.

$$U_{tt}(x, y) := \begin{cases} U_t(x, y, 0.1) & \text{if } [(0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 0.5)] \vee [(0.25 \leq x \leq 0.75) \wedge (0.5 < y \leq 1)] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$kk := 1..53 \quad UU_{kk} := u_{101, kk+1}$$

$$UN(x, y) := \sum_{kk=1}^{53} (u_{101, kk+1} \cdot \psi(x, y, kk))$$

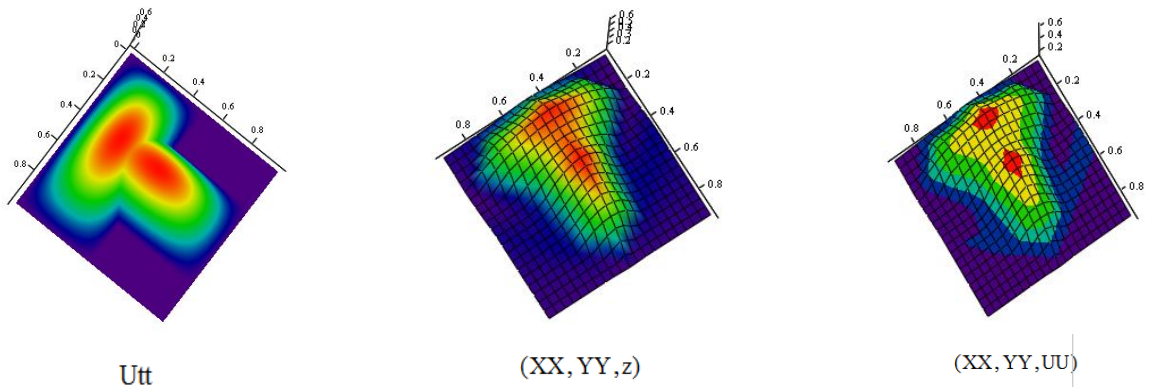


Рисунок Г.1 – Точний (побудований за допомогою R-функцій) та наближений розв’язки задачі

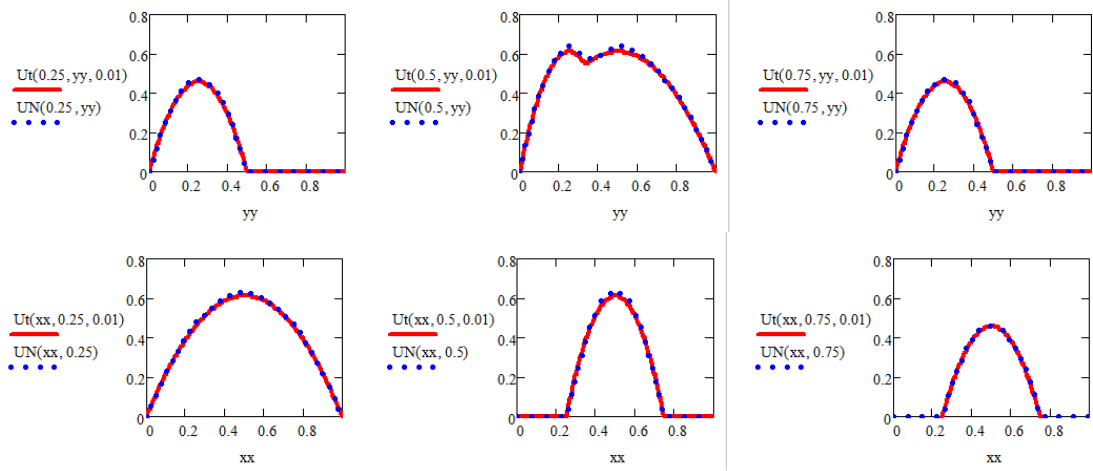


Рисунок Г.2 – Графіки точного і наближеного розв’язків задачі при $t = 0,1$ на різних лініях

$$UU(x, y) := \begin{cases} Ut(x, y, 0.1) & \text{if } [(0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 0.5)] \vee [(0.25 \leq x \leq 0.75) \wedge (0.5 < y \leq 1)] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$UUU(x, y) := \begin{cases} UN(x, y) & \text{if } [(0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 0.5)] \vee [(0.25 \leq x \leq 0.75) \wedge (0.5 < y \leq 1)] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$ii := 1..201 \quad jj := 1..201 \quad XX_{ii} := \frac{ii-1}{200} \quad YY_{jj} := \frac{jj-1}{200} \quad WWW_{ii, jj} := UUU(XX_{ii}, YY_{jj})$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	$3.774 \cdot 10^{-4}$	$7.549 \cdot 10^{-4}$	$1.132 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$
3	0	$7.549 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$2.265 \cdot 10^{-3}$	$3.02 \cdot 10^{-3}$
4	0	$1.132 \cdot 10^{-3}$	$2.265 \cdot 10^{-3}$	$3.397 \cdot 10^{-3}$	$4.529 \cdot 10^{-3}$
5	0	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$3.02 \cdot 10^{-3}$	$4.529 \cdot 10^{-3}$	$6.039 \cdot 10^{-3}$
6	0	$1.887 \cdot 10^{-3}$	$3.774 \cdot 10^{-3}$	$5.662 \cdot 10^{-3}$	$7.549 \cdot 10^{-3}$
7	0	$2.265 \cdot 10^{-3}$	$4.529 \cdot 10^{-3}$	$6.794 \cdot 10^{-3}$	$9.059 \cdot 10^{-3}$
8	0	$2.642 \cdot 10^{-3}$	$5.284 \cdot 10^{-3}$	$7.926 \cdot 10^{-3}$	0.011
9	0	$3.02 \cdot 10^{-3}$	$6.039 \cdot 10^{-3}$	$9.059 \cdot 10^{-3}$	0.012
10	0	$3.397 \cdot 10^{-3}$	$6.794 \cdot 10^{-3}$	0.01	0.014
11	0	$3.774 \cdot 10^{-3}$	$7.549 \cdot 10^{-3}$	0.011	0.015
12	0	$4.152 \cdot 10^{-3}$	$8.304 \cdot 10^{-3}$	0.012	0.017
13	0	$4.529 \cdot 10^{-3}$	$9.059 \cdot 10^{-3}$	0.014	0.018
14	0	$4.89 \cdot 10^{-3}$	$9.78 \cdot 10^{-3}$	0.015	0.02
15	0	$5.234 \cdot 10^{-3}$	0.01	0.016	0.021
16	0	$5.578 \cdot 10^{-3}$	0.011	0.017	...

Додаток Д

Опис програмної реалізації ІМСЕ розв'язання нестационарної теплопровідності для області у вигляді рівнобічної трапеції в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - e^{-t} \left((x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) + 4(x-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{3y}{2\Delta} \right) + 4(y-\Delta) \left(1 - \frac{3x}{2\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) \right),$$

$$(x, y) \in G, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = (x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right),$$

$$u(x, y, t) \Big|_{\partial G} = 0,$$

$$G = \left\{ (x, y) \mid x + y \geq 0, 1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \geq 0, x \leq \Delta, y \leq \Delta \right\}.$$

ORIGIN:= 1

N:= 5

 $\Delta := 0.2$

$$H(x, N, k) := \begin{cases} \frac{N}{\Delta} \cdot x - k + 1 & \text{if } \frac{k-1}{N} \cdot \Delta < x \leq \frac{k}{N} \cdot \Delta \\ \frac{-N}{\Delta} \cdot x + k + 1 & \text{if } \frac{k}{N} \cdot \Delta < x < \frac{k+1}{N} \cdot \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$HP(x, N, k) := \begin{cases} \frac{N}{\Delta} & \text{if } \frac{k-1}{N} \cdot \Delta < x \leq \frac{k}{N} \cdot \Delta \\ \frac{-N}{\Delta} & \text{if } \frac{k}{N} \cdot \Delta < x \leq \frac{k+1}{N} \cdot \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x, y) := (x+y) \cdot (x-\Delta) \cdot (y-\Delta) \cdot \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) + 4 \cdot (x-\Delta) \cdot \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{3y}{2\Delta} \right) + 4 \cdot (y-\Delta) \cdot \left(1 - \frac{y}{\Delta} - \frac{3x}{2\Delta} \right)$$

Точний розв'язок задачі:

$$ut(x, y, t) := (x+y) \cdot (x-\Delta) \cdot (y-\Delta) \cdot \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot e^{-t}$$

Обчислення елементів матриці-стовпця Γ .

k:= 1.. N - 1

$$\gamma_{1k} := \int_{-\Delta}^0 \int_{-x}^{\Delta} F(x, y) \cdot \left[\left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, k) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(-x, N, k) \right] dy dx$$

$$\gamma_{2k} := \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta-x} F(x, y) \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, k) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, k) - \frac{x}{\Delta} \cdot \left(H(\Delta - y, N, k) - \frac{y}{\Delta} \cdot H(\Delta - x, N, k) \right) \right] dy dx$$

$$\gamma_3^k := \int_0^\Delta \int_{-x}^0 F(x, y) \cdot \left[\left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, k) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(-y, N, k) \right] dy dx$$

$$\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

Обчислення елементів матриці А.

$$k := 1.. N - 1 \quad p := 1.. N - 1$$

$$A1_{k,p} := \int_{-\Delta}^0 \int_{-x}^\Delta \left[\left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, k) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(-x, N, k) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, p) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(-x, N, p) \right] dy dx$$

$$A2_{k,p} := \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} \left[\left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, k) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, k) - \frac{x}{\Delta} \cdot \left(H(\Delta - y, N, k) - \frac{y}{\Delta} \cdot H(\Delta - x, N, k) \right) \right] \dots dy dx$$

$$+ \left[\left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(y, N, p) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, p) - \frac{x}{\Delta} \cdot \left(H(\Delta - y, N, p) - \frac{y}{\Delta} \cdot H(\Delta - x, N, p) \right) \right]$$

$$A3_{k,p} := \int_0^\Delta \int_{-x}^0 \left[\left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, k) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(-y, N, k) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \cdot H(x, N, p) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot H(-y, N, p) \right] dy dx$$

$$A := A1 + A2 + A3$$

Обчислення елементів матриці В.

$$k := 1.. N - 1 \quad p := 1.. N - 1$$

$$B1_{k,p} := \int_{-\Delta}^0 \int_{-x}^\Delta \left[\left[\frac{1}{\Delta} \cdot H(y, N, k) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(-x, N, k) \right] \cdot \left[\frac{1}{\Delta} \cdot H(y, N, p) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(-x, N, p) \right] \dots \right] + \left[\left[\left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(y, N, k) + \frac{1}{\Delta} \cdot H(-x, N, k) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(y, N, p) + \frac{1}{\Delta} \cdot H(-x, N, p) \right] \right] dy dx$$

$$B3_{k,p} := \int_0^\Delta \int_{-x}^0 \left[\left[\left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(x, N, k) + \frac{1}{\Delta} \cdot H(-y, N, k) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(x, N, p) + \frac{1}{\Delta} \cdot H(-y, N, p) \right] \dots \right] + \left[\left[\frac{1}{\Delta} \cdot H(x, N, k) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(-y, N, k) \right] \cdot \left[\frac{1}{\Delta} \cdot H(x, N, p) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(-y, N, p) \right] \right] dy dx$$

$$B21_{k,p} := \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} \left[\left[\frac{-1}{\Delta} \cdot H(y, N, k) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(x, N, k) - \frac{1}{\Delta} \cdot H(\Delta - y, N, k) - \frac{y}{\Delta} \cdot HP(\Delta - x, N, k) \right] \dots \right] \cdot \left[\left[\frac{-1}{\Delta} \cdot H(y, N, p) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \cdot HP(x, N, p) - \frac{1}{\Delta} \cdot (H(\Delta - y, N, p)) - \frac{y}{\Delta} \cdot HP(\Delta - x, N, p) \right] \right] dy dx$$

$$B22_{k,p} := \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} \left[\left[\left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(y, N, k) - \frac{1}{\Delta} \cdot H(x, N, k) - \frac{x}{\Delta} \cdot HP(\Delta - y, N, k) - \frac{1}{\Delta} \cdot H(\Delta - x, N, k) \right] \dots \right] dy dx$$

$$+ \left[\left[\left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \cdot HP(y, N, p) - \frac{1}{\Delta} \cdot H(x, N, p) - \frac{x}{\Delta} \cdot HP(\Delta - y, N, p) - \frac{1}{\Delta} \cdot H(\Delta - x, N, p) \right] \right]$$

$$B_{k,p} := B1_{k,p} + B21_{k,p} + B22_{k,p} + B3_{k,p}$$

$$A4 := A^{-1} \quad D12 := A4 \cdot \Gamma \quad D3(t) := -D12 e^{-t} \quad A2 := A4 \cdot B$$

$$D4(C) := A2 \cdot B5(C) \quad D5(t, C) := D3(t) - D4(C)$$

Початковий розподіл температури:

$$up(x, y) := (x + y) \cdot (x - \Delta) \cdot (y - \Delta) \cdot \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta}\right)$$

$$p1 := 1..N - 1 \quad C0_{p1} := up\left(\frac{p1}{N} \cdot \Delta, 0\right) \quad C0 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.0012 \\ 0.0008 \\ 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..1001$$

$$j := 1..N - 1$$

$$u := rkfixed(C0, 0, 0.01, 1000, D5)$$

$$Z_{i,j} := ut\left[\frac{\Delta}{N} \cdot j, 0, 0.00001(i - 1)\right]$$

$$u =$$

	1	2	3	4	5
1	0	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
2	0	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
3	0	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
4	0	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
5	0	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
6	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
7	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
8	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
9	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
10	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
11	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
12	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
13	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
14	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
15	0.0001	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
16	0.0002	0.001	0.0012	0.0008	...

$$Z =$$

	1	2	3	4
1	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
2	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
3	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
4	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
5	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
6	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
7	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
8	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
9	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
10	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
11	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
12	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
13	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
14	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
15	0.001	0.0012	0.0008	0.0003
16	0.001	0.0012	0.0008	...

Формула для знаходження наближеного розв'язку задачі:

$$un(x, y, j) := \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(y, N, k)) - \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(-x, N, k)) & \text{if } -\Delta \leq x \leq 0 \wedge -x \leq y \leq \Delta \\ \left[\left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(y, N, k)) + \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(x, N, k)) \right] \dots & \text{if } x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + y \leq \Delta \\ + \left[-\frac{x}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(\Delta - y, N, k)) - \frac{y}{\Delta} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(\Delta - x, N, k)) \right] \\ \left(1 + \frac{y}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(x, N, k)) - \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (u_{j,k+1} \cdot H(-y, N, k)) & \text{if } 0 \leq x \leq \Delta \wedge -x \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad n := 2 \cdot N$$

Обчислення похибки наближення до точного розв'язку

Додаток Ж

Опис програмної реалізації побудови точного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності для області, що має форму швелера, в середовищі MathCAD

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial D} = 0,$$

Область $D = \Pi_1 \setminus \Pi_2$, де $\Pi_1 = [-a, a] \times [0, b]$, $\Pi_2 = [-c, c] \times [d, b]$.

$$x_0 := 0 \quad x_1 := \frac{1}{3} \quad x_2 := \frac{2}{3} \quad x_3 := 1 \quad y_0 := 0 \quad y_1 := 0.5 \quad y_2 := 1$$

$$C_{0110} := 10 \quad C_{0011} := -5 \quad C_{1211} := -2 \quad C_{3111} := -5$$

$$C_{3110} := -10 \quad C_{3011} := 5 \quad C_{0111} := 5 \quad C_{2211} := 2$$

$$C_{1011} := 15 \quad C_{2011} := -15 \quad C_{1001} := 10 \quad C_{2001} := 10$$

$$C_{1111} := -15 \quad C_{2111} := 15 \quad C_{3211} := 25 \quad C_{0211} := -25$$

$$H_{00}(x) := (x - x_1)^2 \cdot \left[\frac{1}{(x_0 - x_1)^2} + \frac{2 \cdot (x_0 - x)}{(x_0 - x_1)^3} \right] \quad H_{00p}(x) := \frac{d}{dx} H_{00}(x)$$

$$H_{01}(x) := \begin{cases} (x - x_1)^2 \cdot \frac{x - x_0}{(x_0 - x_1)^2} & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad H_{01p}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(x - x_1)^2 \cdot \frac{x - x_0}{(x_0 - x_1)^2} \right] & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_{10}(x) := \begin{cases} (x - x_0)^2 \cdot \left[\frac{x_1 - x_0 + 2 \cdot (x_1 - x)}{(x_1 - x_0)^3} \right] & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ (x - x_2)^2 \cdot \left[\frac{x_1 - x_2 + 2 \cdot (x_1 - x)}{(x_1 - x_2)^3} \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad H_{10p}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(x - x_0)^2 \cdot \left[\frac{x_1 - x_0 + 2 \cdot (x_1 - x)}{(x_1 - x_0)^3} \right] \right] & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{d}{dx} \left[(x - x_2)^2 \cdot \left[\frac{x_1 - x_2 + 2 \cdot (x_1 - x)}{(x_1 - x_2)^3} \right] \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$H_{11}(x) := \begin{cases} (x - x_0)^2 \cdot \frac{x - x_1}{(x_1 - x_0)^2} & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ (x - x_2)^2 \cdot \frac{x - x_1}{(x_1 - x_2)^2} & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad H_{11p}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(x - x_0)^2 \cdot \frac{x - x_1}{(x_1 - x_0)^2} \right] & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{d}{dx} \left[(x - x_2)^2 \cdot \frac{x - x_1}{(x_1 - x_2)^2} \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$H_{20}(x) := \begin{cases} (x - x_1)^2 \cdot \left[\frac{x_2 - x_1 + 2 \cdot (x_2 - x)}{(x_2 - x_1)^3} \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ (x - x_3)^2 \cdot \left[\frac{x_2 - x_3 + 2 \cdot (x_2 - x)}{(x_2 - x_3)^3} \right] & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases} \quad H_{20p}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(x - x_1)^2 \cdot \left[\frac{x_2 - x_1 + 2 \cdot (x_2 - x)}{(x_2 - x_1)^3} \right] \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{d}{dx} \left[(x - x_3)^2 \cdot \left[\frac{x_2 - x_3 + 2 \cdot (x_2 - x)}{(x_2 - x_3)^3} \right] \right] & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

$$H21(x) := \begin{cases} (x-x_1)^2 \cdot \frac{x-x_2}{(x_2-x_1)^2} & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ (x-x_3)^2 \cdot \frac{x-x_2}{(x_2-x_3)^2} & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases} \quad H21p(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(x-x_1)^2 \cdot \frac{x-x_2}{(x_2-x_1)^2} \right] & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{d}{dx} \left[(x-x_3)^2 \cdot \frac{x-x_2}{(x_2-x_3)^2} \right] & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

$$H30(x) := (x-x_2)^2 \cdot \left[\frac{1}{(x_3-x_2)^2} + \frac{2 \cdot (x_3-x)}{(x_3-x_2)^3} \right] \quad H30p(x) := \frac{d}{dx} H30(x)$$

$$H31(x) := \begin{cases} (x-x_2)^2 \cdot \frac{x-x_3}{(x_3-x_2)^2} & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad H31p(x) := \frac{d}{dx} H31(x)$$

$$h00(y) := (y-y_1)^2 \cdot \left[\frac{1}{(y_0-y_1)^2} + \frac{2 \cdot (y_0-y)}{(y_0-y_1)^3} \right] \quad h00p(y) := \frac{d}{dy} h00(y)$$

$$h01(y) := (y-y_1)^2 \cdot \frac{y-y_0}{(y_0-y_1)^2} \quad h01p(y) := \frac{d}{dy} h01(y)$$

$$h10(y) := (y-y_0)^2 \cdot \left[\frac{1}{(y_1-y_0)^2} + \frac{2 \cdot (y_1-y)}{(y_1-y_0)^3} \right] \quad h10p(y) := \frac{d}{dy} h10(y)$$

$$h10(y) := \begin{cases} (y-y_0)^2 \cdot \left[\frac{y_1-y_0+2 \cdot (y_1-y)}{(y_1-y_0)^3} \right] & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ (y-y_2)^2 \cdot \left[\frac{y_1-y_2+2 \cdot (y_1-y)}{(y_1-y_2)^3} \right] & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases} \quad h10p(y) := \begin{cases} \frac{d}{dy} \left[(y-y_0)^2 \cdot \left[\frac{y_1-y_0+2 \cdot (y_1-y)}{(y_1-y_0)^3} \right] \right] & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ \frac{d}{dy} \left[(y-y_2)^2 \cdot \left[\frac{y_1-y_2+2 \cdot (y_1-y)}{(y_1-y_2)^3} \right] \right] & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$h11(y) := \begin{cases} (y-y_0)^2 \cdot \frac{y-y_1}{(y_1-y_0)^2} & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ (y-y_2)^2 \cdot \frac{y-y_1}{(y_1-y_2)^2} & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases} \quad h11p(y) := \begin{cases} \frac{d}{dy} \left[(y-y_0)^2 \cdot \frac{y-y_1}{(y_1-y_0)^2} \right] & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ \frac{d}{dy} \left[(y-y_2)^2 \cdot \frac{y-y_1}{(y_1-y_2)^2} \right] & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$h20(y) := (y-y_1)^2 \cdot \left[\frac{1}{(y_2-y_1)^2} + \frac{2 \cdot (y_2-y)}{(y_2-y_1)^3} \right] \quad h20p(y) := \frac{d}{dy} h20(y)$$

$$h21(y) := (y-y_1)^2 \cdot \frac{y-y_2}{(y_2-y_1)^2} \quad h21p(y) := \frac{d}{dy} h21(y)$$

$$YY(x) := C2011 \cdot H21(x) + C2001 \cdot H20(x) + C3011 \cdot H31(x)$$

$$XX(x) := C0011 \cdot H01(x) + C1001 \cdot H10(x) + C1011 \cdot H11(x)$$

$$\phi_{01}(x) := \begin{cases} C_{0011} \cdot H_{01}(x) + C_{1001} \cdot H_{10}(x) + C_{1011} \cdot H_{11}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{1001} \cdot H_{10}(x) + C_{1011} \cdot H_{11}(x) + C_{2011} \cdot H_{21}(x) + C_{2001} \cdot H_{20}(x) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ C_{2011} \cdot H_{21}(x) + C_{2001} \cdot H_{20}(x) + C_{3011} \cdot H_{31}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

$$\phi_{01p}(x) := \begin{cases} C_{0011} \cdot H_{01p}(x) + C_{1001} \cdot H_{10p}(x) + C_{1011} \cdot H_{11p}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{1001} \cdot H_{10p}(x) + C_{1011} \cdot H_{11p}(x) + C_{2011} \cdot H_{21p}(x) + C_{2001} \cdot H_{20p}(x) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ C_{2011} \cdot H_{21p}(x) + C_{2001} \cdot H_{20p}(x) + C_{3011} \cdot H_{31p}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

$$\phi_{10}(x) := \begin{cases} \frac{C_{0110} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2} & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{C_{3110} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_2)^2}{(x_3 - x_2)^2} & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_{10p}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} \frac{C_{0110} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2} & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{d}{dx} \frac{C_{3110} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_2)^2}{(x_3 - x_2)^2} & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_{11}(x) := \begin{cases} C_{0111} \cdot H_{01}(x) + C_{1111} \cdot H_{11}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{1111} \cdot H_{11}(x) + C_{2111} \cdot H_{21}(x) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ C_{2111} \cdot H_{21}(x) + C_{3111} \cdot H_{31}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases} \quad \phi_{11p}(x) := \begin{cases} C_{0111} \cdot H_{01p}(x) + C_{1111} \cdot H_{11p}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{1111} \cdot H_{11p}(x) + C_{2111} \cdot H_{21p}(x) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ C_{2111} \cdot H_{21p}(x) + C_{3111} \cdot H_{31p}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

$$\phi_{21}(x) := \begin{cases} C_{0211} \cdot H_{01}(x) + C_{1211} \cdot H_{11}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{2211} \cdot H_{21}(x) + C_{3211} \cdot H_{31}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_{21p}(x) := \begin{cases} C_{0211} \cdot H_{01p}(x) + C_{1211} \cdot H_{11p}(x) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_{2211} \cdot H_{21p}(x) + C_{3211} \cdot H_{31p}(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\psi_{01}(y) := \begin{cases} C_{0011} \cdot h_{01}(y) + C_{0110} \cdot h_{10}(y) + C_{0111} \cdot h_{11}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{0110} \cdot h_{10}(y) + C_{0111} \cdot h_{11}(y) + C_{0211} \cdot h_{21}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$\psi_{10}(y) := \begin{cases} \frac{C_{1001} \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1)^2}{(y_0 - y_1)^2} & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \psi_{10p}(y) := \frac{d}{dy} \psi_{10}(y)$$

$$\psi_{11}(y) := \begin{cases} C_{1011} \cdot h_{01}(y) + C_{1111} \cdot h_{11}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{1111} \cdot h_{11}(y) + C_{1211} \cdot h_{21}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases} \quad \psi_{11p}(y) := \begin{cases} C_{1011} \cdot h_{01p}(y) + C_{1111} \cdot h_{11p}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{1111} \cdot h_{11p}(y) + C_{1211} \cdot h_{21p}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$\psi_{20}(y) := \begin{cases} \frac{C_{2001} \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1)^2}{(y_0 - y_1)^2} & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \psi_{20p}(y) := \begin{cases} \frac{d}{dy} \frac{C_{2001} \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1)^2}{(y_0 - y_1)^2} & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\psi_{21}(y) := \begin{cases} C_{2011} \cdot h_{01}(y) + C_{2111} \cdot h_{11}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{2111} \cdot h_{11}(y) + C_{2211} \cdot h_{21}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases} \quad \psi_{21p}(y) := \begin{cases} C_{2011} \cdot h_{01p}(y) + C_{2111} \cdot h_{11p}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{2111} \cdot h_{11p}(y) + C_{2211} \cdot h_{21p}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$\psi_{31}(y) := \begin{cases} C_{3011} \cdot h_{01}(y) + C_{3110} \cdot h_{10}(y) + C_{3111} \cdot h_{11}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{3110} \cdot h_{10}(y) + C_{3111} \cdot h_{11}(y) + C_{3211} \cdot h_{21}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$\psi_{31p}(y) := \begin{cases} C_{3011} \cdot h_{01p}(y) + C_{3110} \cdot h_{10p}(y) + C_{3111} \cdot h_{11p}(y) & \text{if } y_0 \leq y \leq y_1 \\ C_{3110} \cdot h_{10p}(y) + C_{3111} \cdot h_{11p}(y) + C_{3211} \cdot h_{21p}(y) & \text{if } y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

$$U11(x, y) := \phi_{01}(x) \cdot h_{01}(y) + \phi_{10}(x) \cdot h_{10}(y) + \phi_{11}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$U12(x, y) := \psi_{01}(y) \cdot H_{01}(x) + \psi_{10}(y) \cdot H_{10}(x) + \psi_{11}(y) \cdot H_{11}(x)$$

$$U13(x, y) := C_{0011} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{1001} \cdot H_{10}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{1011} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{01}(y)$$

$$U14(x, y) := C_{0110} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{10}(y) + C_{0111} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{11}(y) + C_{1111} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$UU1(x, y) := U11(x, y) + U12(x, y) - U13(x, y) - U14(x, y)$$

$$U21(x, y) := \phi_{01}(x) \cdot h_{01}(y) + \phi_{11}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$U22(x, y) := \psi_{10}(y) \cdot H_{10}(x) + \psi_{20}(y) \cdot H_{20}(x) + \psi_{21}(y) \cdot H_{21}(x) + \psi_{11}(y) \cdot H_{11}(x)$$

$$U23(x, y) := C_{1001} \cdot H_{10}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{1011} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{2001} \cdot H_{20}(x) \cdot h_{01}(y)$$

$$U24(x, y) := C_{2011} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{1111} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{11}(y) + C_{2111} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$UU2(x, y) := U21(x, y) + U22(x, y) - U23(x, y) - U24(x, y)$$

$$U31(x, y) := \phi_{01}(x) \cdot h_{01}(y) + \phi_{10}(x) \cdot h_{10}(y) + \phi_{11}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$U32(x, y) := \psi_{20}(y) \cdot H_{20}(x) + \psi_{21}(y) \cdot H_{21}(x) + \psi_{31}(y) \cdot H_{31}(x)$$

$$U33(x, y) := C_{2001} \cdot H_{20}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{2011} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{01}(y) + C_{3011} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{01}(y)$$

$$U34(x, y) := C_{3110} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{10}(y) + C_{2111} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{11}(y) + C_{3111} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$UU3(x, y) := U31(x, y) + U32(x, y) - U33(x, y) - U34(x, y)$$

$$U41(x, y) := \phi_{10}(x) \cdot h_{10}(y) + \phi_{11}(x) \cdot h_{11}(y) + \phi_{21}(x) \cdot h_{21}(y)$$

$$U42(x, y) := \psi_{01}(y) \cdot H_{01}(x) + \psi_{11}(y) \cdot H_{11}(x)$$

$$U43(x, y) := C_{0110} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{10}(y) + C_{0111} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{11}(y) + C_{1111} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$U44(x, y) := C_{0211} \cdot H_{01}(x) \cdot h_{21}(y) + C_{1211} \cdot H_{11}(x) \cdot h_{21}(y)$$

$$UU4(x, y) := U41(x, y) + U42(x, y) - U43(x, y) - U44(x, y)$$

$$U51(x, y) := \phi_{10}(x) \cdot h_{10}(y) + \phi_{11}(x) \cdot h_{11}(y) + \phi_{21}(x) \cdot h_{21}(y)$$

$$U52(x, y) := \psi_{21}(y) \cdot H_{21}(x) + \psi_{31}(y) \cdot H_{31}(x)$$

$$U53(x, y) := C_{3110} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{10}(y) + C_{2111} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{11}(y) + C_{3111} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{11}(y)$$

$$U54(x, y) := C_{2211} \cdot H_{21}(x) \cdot h_{21}(y) + C_{3211} \cdot H_{31}(x) \cdot h_{21}(y)$$

$$UU5(x, y) := U51(x, y) + U52(x, y) - U53(x, y) - U54(x, y)$$

Формула точного розв'язку сформульованої задачі:

$$UU(x, y) := \begin{cases} UU1(x, y) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ UU2(x, y) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ UU3(x, y) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ UU4(x, y) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_1 \leq y \leq y_2 \\ UU5(x, y) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \wedge y_1 \leq y \leq y_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D2xUU1(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} UU1(x, y) \quad D2xUU2(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} UU2(x, y) \quad D2xUU3(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} UU3(x, y)$$

$$D2xUU4(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} UU4(x, y) \quad D2xUU5(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} UU5(x, y)$$

$$D2yUU1(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} UU1(x, y) \quad D2yUU2(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} UU2(x, y)$$

$$D2yUU4(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} UU4(x, y) \quad D2yUU5(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} UU5(x, y) \quad D2yUU3(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} UU3(x, y)$$

$$f(x, y, t) := \begin{cases} -e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot UU1(x, y) + D2xUU1(x, y) + D2yUU1(x, y)) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ -e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot UU2(x, y) + D2xUU2(x, y) + D2yUU2(x, y)) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ -e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot UU3(x, y) + D2xUU3(x, y) + D2yUU3(x, y)) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \\ -e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot UU4(x, y) + D2xUU4(x, y) + D2yUU4(x, y)) & \text{if } x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_1 \leq y \leq y_2 \\ -e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot UU5(x, y) + D2xUU5(x, y) + D2yUU5(x, y)) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \wedge y_1 \leq y \leq y_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i := 0..20 \quad j := 0..20 \quad X_i := i \cdot 0.05 \quad Y_j := j \cdot 0.05 \quad Z_{i,j} := UU(X_i, Y_j)$$

Точний розв'язок задачі:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.022	0.054	0.094	0.138	0.184	0.23	0.273	0.311	0.341
2	0	0.076	0.144	0.206	0.261	0.31	0.354	0.393	0.429	0.461
3	0	0.15	0.257	0.328	0.372	0.395	0.404	0.407	0.412	0.425
4	0	0.232	0.378	0.453	0.474	0.455	0.413	0.363	0.32	0.301
5	0	0.311	0.494	0.572	0.569	0.508	0.412	0.306	0.212	0.155
6	0	0.376	0.592	0.677	0.66	0.57	0.436	0.286	0.149	0.054
7	0	0.416	0.659	0.76	0.748	0.655	0.508	0.34	0.179	0.056
8	0	0.441	0.704	0.819	0.816	0.725	0.576	0.399	0.224	0.081
9	0	0.456	0.731	0.854	0.856	0.767	0.616	0.434	0.251	0.096
10	0	0.461	0.74	0.866	0.87	0.781	0.63	0.446	0.26	0.101
11	0	0.456	0.731	0.854	0.856	0.767	0.616	0.434	0.251	0.096
12	0	0.441	0.704	0.819	0.816	0.725	0.576	0.399	0.224	0.081
13	0	0.416	0.659	0.76	0.749	0.655	0.508	0.34	0.179	0.056
14	0	0.376	0.592	0.677	0.66	0.57	0.436	0.286	0.149	0.054
15	0	0.311	0.494	0.572	0.569	0.508	0.412	0.306	0.213	0.155

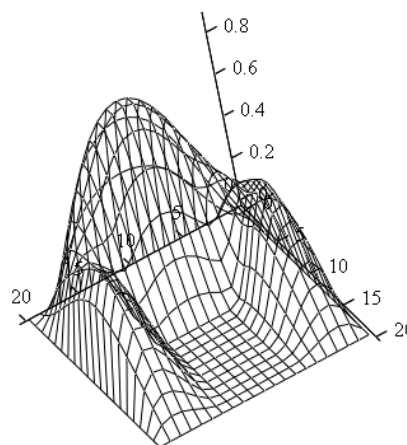


Рисунок Ж.1 – Точний розв'язок задачі

Додаток К
Акти впровадження



ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор
з науково-педагогічної роботи УПА
 д.т.н., професор
 (посада керівника організації)
А.П. Тарасюк
 (ініціали, прізвище) 20 15 р.

АКТ

про запровадження результатів кандидатської дисертації Залужної Г. В.
 «Математичне моделювання нестационарного переносу тепла в неоднорідному
 середовищі з використанням інтерлінації функцій»

Комісія, створена проректором з наукової роботи Лазарєвим М. І., у складі:

Лазарєв М. І. – голова, проректор з наукової роботи, доктор педагогічних наук, професор;

Нечуйвітер О. П. – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики;

Першина Ю. І. – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики,

розглянула матеріали стосовно запровадження результатів кандидатської дисертації Залужної Г. В. «Математичне моделювання нестационарного переносу тепла в неоднорідному середовищі з використанням інтерлінації функцій» і встановила:

1. Результати дисертаційної роботи Залужної Г.В. використовувались при виконанні держбюджетної теми «Розробка і дослідження нового методу розвідки і розробки родовищ корисних копалин на основі інтерлінації функцій» (№ ДР 0109U008661, 2012-2014 рр.).
2. Елементи теорії класичного методу скінченних елементів розв'язання задач нестационарної теплопровідності включені до курсу «Спеціальні глави вищої математики».

Голова комісії
 д.пед.н., проф.,
 проректор з наукової роботи

М. І. Лазарєв

Члени комісії
 д.ф.-м.н., доц. кафедри
 вищої та прикладної математики

О. П. Нечуйвітер

д.ф.-м.н., доц. кафедри
 вищої та прикладної математики

Ю. І. Першина

Згідно з оригіналом

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Л.В. Колесник