

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

ЗАЛУЖНА ГАЛИНА ВОЛОДИМИРІВНА



УДК 519.6

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПЕРЕНОСУ ТЕ-  
ПЛА В НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРЛІ-  
НАЦІЇ ФУНКЦІЙ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Харків-2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Українській інженерно-педагогічній академії, м. Харків, Міністерство освіти і науки України.

**Науковий керівник** – доктор фізико-математичних наук, професор  
**Литвин Олег Миколайович,**  
Українська інженерно-педагогічна академія  
(м. Харків), завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор  
**Руткас Анатолій Георгійович,**  
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,  
професор кафедри прикладної математики;

кандидат фізико-математичних наук  
**Ткаченко Олександр Володимирович,**  
Державне підприємство «Івченко-Прогрес», начальник відділу автоматизації інженерних розрахунків.

Захист відбудеться “08” грудня 2015 р. о 15-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському національному університеті радіоелектроніки: 61166, м. Харків, просп. Леніна, 14.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки: 61166, м. Харків, просп. Леніна, 14.

Автореферат розісланий “04” листопада 2015 р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
кандидат технічних наук, доцент



Колесник Л.В.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** При розв'язанні багатьох наукових та технічних проблем необхідно досліджувати нестационарні скалярні та векторні поля, що є моделями реальних процесів і вимагають розв'язання крайових задач математичної фізики, які допускають точний розв'язок лише у виняткових випадках. Серед методів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності найбільш відомими є класичний метод розділення змінних, метод сіток, варіаційні та проєкційні методи, метод R-функцій, метод скінченних елементів. Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним з найбільш широко використовуваних на даний час методів розв'язання нестационарних задач тепломасопереносу. Інтерес до МСЕ викликаний можливістю автоматизації побудови дискретних моделей та надійною роботою з системами диференціальних рівнянь з розрідженими матрицями.

Оскільки при наближеному розв'язанні нестационарних задач теплопровідності з двома або трьома просторовими змінними класичним МСЕ виникають системи звичайних диференціальних рівнянь великої розмірності, які треба розв'язувати при заданих початкових умовах, основними методами розв'язання нестационарних задач теплопровідності є чисельні методи, вагомий вклад в розвиток яких внесли дослідження Сергієнка І.В., Дейнеки В.С., Скопечького В.В., Григоренка Я.М., Самарського А.А., Марчука Г.І., Яненка М.М., Рвачова В.Л., Ляшка І.І., Молчанова І.М., Литвина О.М., Лучки А.Ю., Панкратової Н.Д., Крюкова Н.Н., Савули Я.Г., Флейшмана Н.П., Шинкаренка Г.А., Шайдурова В.В., Ліфанова І.К., Білоцерковського С.М., Ганделя Ю.В., Мітчела Е., Уейта Р., Стренга Г., Фікса Дж., С'ярле Ф., Barnhill R.E., Cavendish J.C., Gordon W.J., Nielson G.M., Babuska I., Hall C.A., Marshall I. та інших.

Зауважимо, що при розв'язанні задач методом скінченних елементів для підвищення точності часто використовується методика згущення сіток навколо точок з особливостями, використання функцій із відповідними особливостями тощо. Це приводить до збільшення часу на формування матриць та, як наслідок, до збільшення часу розрахунків. Альтернативними способами підвищення точності розв'язку є поєднання вказаної вище методики і відповідного вибору локальних апроксимуючих функцій (найчастіше носії цих функцій включають точки, в яких точний розв'язок має особливості). Додавання до класичних базисних функцій ще однієї або декількох функцій з потрібними особливостями, а також одночасне використання глобальних та локальних базисних функцій передбачає знання додаткової інформації про аналітичні розв'язки досліджуваних задач тощо.

Тому доцільно для розв'язання таких задач використовувати нові методи, в яких наближений розв'язок зображується у вигляді сплайнів за просторовими змінними, невідомі вузлові параметри яких залежать від часу  $t$ , і які використовують для наближення точного розв'язку із заданою точністю меншу кількість невідомих параметрів, а, отже, і розв'язання меншої кількості диференціальних рівнянь. В даній роботі додаткова інформація не використовується.

Відмітимо, що методи інтерлінації функцій  $u(x, y, t)$  за змінними  $x$ ,  $y$  дозволяють будувати схеми МСЕ, які для досягнення заданої точності вимагають розв'язання порівняно значно меншого числа диференціальних рівнянь.

На використанні інтерлінації базується метод зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (метод ЛДР) розв'язання крайових задач, який досліджувався в працях Литвина О.М., Куценка Л.М., Федька В.В. при розв'язанні стаціонарних задач. Тому актуальним є його застосування для розв'язання нестационарних задач тепломасопереносу і дослідження його обчислювальних можливостей для побудови математичних моделей нестационарної теплопровідності та обчислювальних методів їх дослідження, оснований на використанні інтерлінації функцій трьох змінних за двома просторовими змінними. В роботі Сергієнка І.В., Литвина О.М. було викладено загальний метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій.

Таким чином, дана робота присвячена актуальній темі – подальшому розвитку МСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій і дослідженню його обчислювальних можливостей.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії в рамках тематики наукового міжвідомчого центру «Математичне моделювання структури неоднорідного тіла з використанням нових методів розв'язання крайових задач і методів комп'ютерної та сейсмічної томографії», створеного сумісно Інститутом кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України та Українською інженерно-педагогічною академією. Результати дисертаційної роботи були використані у рамках держбюджетної теми «Розробка і дослідження нового методу розвідки і розробки родовищ корисних копалин на основі інтерлінації функцій» (держбюджетна тема № ДР 0109U008661, 2012-2014 рр.), яка входить до плану науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії.

**Мета і задачі дослідження.** Метою даного дисертаційного дослідження є розробка та дослідження методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними в областях складної форми з використанням сплайн-інтерлінації функцій.

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі завдання:

- розробка та дослідження методу розв'язання крайової задачі нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням інтерлінації функцій;
- розробка та дослідження методу побудови точних розв'язків нестационарного рівняння теплопровідності;
- проведення обчислювального експерименту на основі створеного програмного забезпечення для дослідження ефективності запропонованих методів.

*Об'єкт дослідження* – процес розповсюдження тепла в двовимірних тілах.

*Предмет дослідження* – математична модель розподілу температури в двовимірних тілах із використанням методу скінченних елементів на основі інтерлінації функцій.

**Методи дослідження.** Теоретичні дослідження базуються на загальних методах функціонального аналізу, обчислювальної математики, теорії наближення функцій кількох змінних з використанням апарату інтерлінації; в основі чисельної реалізації лежить метод скінченно-елементної апроксимації, побудованої на основі

сплайн-інтерлінації за двома просторовими змінними, розв'язку нестационарної крайової задачі про розподіл температури в областях складної форми; для тестування запропонованих алгоритмів використовувалася система комп'ютерної математики.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У роботі отримано нові результати, що виносяться на захист:

- вперше на основі сплайн-інтерлінації функцій розроблено та досліджено новий метод, який є скінченно-елементною реалізацією методу зведення до системи інтегро-диференціальних рівнянь, використаного при розв'язанні крайової задачі для нестационарного рівняння теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми. Цей метод названий інтерлінаційним методом скінченних елементів (ІМСЕ) для нестационарних задач теплопровідності;

- подальшого розвитку набув метод скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням інтерлінації функцій;

- вперше для тестування наближувочих та обчислювальних властивостей ІМСЕ розроблено метод побудови точних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для областей складної форми, що дає можливість перевірити теоретичні твердження дисертаційної роботи щодо похибки наближених розв'язків;

- при чисельній реалізації вперше для розв'язання нестационарних задач тепломасопереносу за допомогою ІМСЕ запропоновано використовувати спеціальну нумерацію вузлів елементів, яка дозволяє в системі звичайних диференціальних рівнянь  $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$ , що виникає в ІМСЕ, зберегти блочно-трюхдіагональну структуру матриць  $A$  і  $B$ . Це дозволяє при проведенні обчислень використати властивості трюхдіагональних та блочно-трюхдіагональних матриць.

**Практичне значення одержаних результатів:**

- розроблені та протестовані алгоритми знаходження наближеного розв'язку нестационарної крайової задачі з використанням інтерлінації функцій можуть бути використані для створення професійних пакетів програм;

- запропонований метод нумерації вузлів, який зводить систему диференціальних рівнянь до системи з блочно-трюхдіагональними матрицями, дозволяє використовувати відомі методи їх розв'язання, тобто оптимізувати процес розв'язання;

- на основі запропонованих методів, алгоритмів та програм можна розробляти пакети прикладних програм для наближеного розв'язання нестационарних крайових задач теплопровідності з двома просторовими змінними, при цьому для досягнення заданої точності розв'язувати на порядок меншу кількість диференціальних рівнянь порівняно з класичними схемами МСЕ;

- при чисельній реалізації запропонованого ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними можуть бути використані відомі алгоритми і програми розв'язання задачі Коші для кластера, розроблені в інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ.

*Впровадження результатів дисертації.* Результати дисертаційної роботи Залужної Г.В. впроваджено у навчальний процес Української інженерно-педагогічної академії в курсі «Спеціальні глави вищої математики».

**Особистий внесок здобувача.** Основний зміст дисертаційної роботи опублі-

ковано у 18 роботах [1–18]. Основні результати за темою дисертації отримані особисто автором. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати. У [1] запропоновано використовувати метод побудови точного розв'язку для нестационарного рівняння теплопровідності, проведено обчислювальний експеримент та аналіз його результатів. У [2] побудовано точний розв'язок для тестового прикладу з використанням сплайн-інтерлінації функцій. У [3, 4, 18] побудована скінченно-елементна реалізація методу зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь для розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми та проведено аналіз результатів обчислювального експерименту для конкретних областей в системі комп'ютерної математики. У [10] запропоновано для запису системи звичайних диференціальних рівнянь, які виникають в методі ІМСЕ, використовувати спеціальну нумерацію вузлів. У [5] проведено аналіз обчислювальних можливостей ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності та запропоновано покроковий запис методу. У [6] проведено дослідження похибки наближеного розв'язку з використанням побудованого точного розв'язку.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародній конференції «Питання оптимізації обчислень», Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (Кацивелі, 2005, 2007, 2009 рр.); XV Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008 р.); Всеукраїнських науково-практичних конференціях «Інформатика та системні науки» (Полтава, 2010, 2011, 2014 рр.); науково-технічній конференції з міжнародною участю «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (Харків, 2012 р.); конференції Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Mathematical Sciences & Computer Engineering ICMSCE 2015 (Лангкаві, Малайзія, 2015 р.); науково-практичних конференціях науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників Української інженерно-педагогічної академії (секція «Фізико-математичні науки») (Харків, 2005, 2009, 2011 рр.).

**Публікації.** Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 18 роботах, з них 5 статей у наукових журналах та збірниках наукових праць, які входять до переліку фахових видань України за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (фізико-математичні науки), 1 стаття у виданні іноземної держави, 12 тез доповідей, опублікованих у друкованих матеріалах конференцій та симпозіумів.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація включає вступ, чотири розділи, список використаних джерел із 125 найменувань (на 13 с.), 26 ілюстрацій (на 19 с.), 10 таблиць (на 8 с.) і 7 додатків (на 33 с.). Загальний обсяг роботи складає 190 с. друкованого тексту, з них 144 с. основного тексту.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність проблем, що досліджуються в роботі, сформульовано мету та задачі досліджень, визначено наукову новизну роботи і практичне значення отриманих результатів.

У **розділі 1** дисертаційної роботи проведено аналіз відомих досліджень, присвячених наближеному розв'язанню нестационарної задачі теплопровідності. Зокрема, розглянуто застосування методу сіток, варіаційних методів до розв'язання нестационарних задач теплопровідності. Відмічено, що одним із найбільш широко використовуваних методів розв'язання нестационарних задач теплопровідності на даний час є метод скінченних елементів. Цей метод полягає у побудові структури наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності у вигляді сум добутоків невідомих функцій від змінної  $t$  на відомі базисні функції від змінних  $x$  та  $y$ . Ці допоміжні базисні функції вважаються фінітними і, як правило, будуються у вигляді кусково-поліноміальних сплайнів. Основним недоліком класичних схем МСЕ є труднощі, що виникають в зв'язку з необхідністю розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з великою кількістю рівнянь. У зв'язку з цим в роботі проведено аналіз методів розв'язання задачі Коші для систем ЗДР. Зроблено висновок, що при розв'язанні задачі Коші для систем ЗДР на загальну похибку великий вплив здійснює похибка заокруглення. Тому розробка методів, які використовують для досягнення заданої точності меншу кількість диференціальних рівнянь, є важливою задачею з теоретичної та практичної точок зору.

У **розділі 2** викладено метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з використанням сплайн-інтерлінації функцій.

У **підрозділі 2.1** наведено основні твердження теорії інтерлінації функцій. У **підрозділі 2.2** сформульовано загальний метод побудови структур наближеного розв'язку нестационарних крайових задач, який зводить нестационарну крайову задачу для функції трьох змінних до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, в якій невідомими функціями є сліди наближеного розв'язку на заданій системі ліній (метод ЛІДР, запропонований в роботі Сергієнка І.В., Литвина О.М.). Метод полягає в наступному: область інтегрування розбивається на елементи – прямокутники і трикутники (граничні елементи можуть мати криволінійну сторону, яка є частиною границі). В кожному з цих елементів шуканий наближений розв'язок представляється у вигляді функцій, які забезпечують потрібний порядок диференційовності на лініях розділу різних елементів, а також забезпечують задовільнення граничних умов. Структура наближеного розв'язку залежить від деяких невідомих функцій двох змінних (як  $x$ , так і  $y$ , та змінної  $t$ ), а також від невідомих функцій від  $t$ . Ці невідомі функції двох та однієї змінної знаходяться з умови ортогональності нев'язки до відповідної системи функцій однієї та двох змінних.

В дисертаційній роботі пропонується чисельна реалізація методу ЛІДР для нестационарної задачі теплопровідності, яка основана на побудові операторів інтерполяції функції  $u(x, y, t)$  за просторовими змінними, побудованих на основі інтерлінації функцій за просторовими змінними. МСЕ, побудований на основі вказаних інтерполяційних формул, названий ІМСЕ. Суть методу полягає у представленні наближеного розв'язку у вигляді формул сплайн-інтерполяції за просторовими змінними з коефіцієнтами, що є функціями змінної  $t$ . Метод ґрунтується на заміні сплайнами слідів наближеного розв'язку у формулах інтерлінації, які використовуються для його представлення, і є скінченно-елементною реалізацією методу ЛІДР розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У **підрозділі 2.3** викладено основні теоретичні твердження методу ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними, сформульовано та доведено теореми.

Для обмеженої області  $G \subset R^2$  розв'язуємо нестационарну крайову задачу:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$(x, y) \in G, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in G, G \subseteq \Pi, \Pi = [a, b] \times [c, d], \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = \varphi(x, y, t)|_{\partial G}. \quad (3)$$

Вважаємо:  $p_1(x, y), p_2(x, y) \in C^1(G)$ ,  $q(x, y) \in C(G)$ ,  $f(x, y, t) \in C(G \times R^+)$ ,  $R^+ = [0, \infty)$  і розв'язок поставленої задачі задовольняє умовам:  $u(x, y, t)$  має неперервні похідні  $u^{(r, s, 0)}(x, y, t) \in C(G \times R^+) \quad \forall t \geq 0, 0 \leq r, s \leq 2$  за змінними  $x$  та  $y$ ;  $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$ .

Крім того, вважаємо, що гранична і початкова умови є узгодженими:  $\varphi(x, y, 0)|_{\partial G} = u_0(x, y)|_{\partial G}$ .

Розіб'ємо  $G$  на підобласті прямими  $x = x_k, k = \overline{0, M_1}$  та  $y = y_\ell, \ell = \overline{0, M_2}$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b$ ;  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$ . Ці підобласті можуть бути прямокутниками

$$R_{i,j}^{(0)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$$

або чотирикутниками

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G, \quad R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G, \quad R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G,$$

в яких три сторони паралельні осям координат, а одна – криволінійна (взагалі кажучи) сторона – є частиною границі області  $\partial G$ . Крім того, підобласті, на які розбивається область  $G$ , можуть бути трикутниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) > 0\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) > 0\},$$



в яких дві сторони паралельні осям координат, а одна із сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі  $\partial G$  області  $G$  ( $i, j$  – номер точки, з якою співпадає прями́й кут).

Введемо оператор

$$\begin{aligned} O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) &= (P_1 + P_2 - P_1P_2)F(x, y, t), \\ P_1F(x, y, t) &= \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}F(x, y_{j+1}(x), t), \\ P_2F(x, y, t) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}F(x_i, y, t) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}F(x_{i+1}, y, t), \\ P_1P_2F(x, y, t) &= \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}P_2F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}P_2F(x, y_{j+1}(x), t). \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Оператор  $OR_{i,j}^{(1)}F(x, y, t)$  інтерлінує функцію  $F(x, y, t) \in C(R_{i,j}^{(1)})$  на границі чотирикутника  $R_{i,j}^{(1)}$  з однією криволінійною стороною:  $OR_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) = F(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \partial R_{i,j}^{(1)}$ , тобто  $OR_{i,j}^{(1)}F(x_q, y, t) = F(x_q, y, t)$ ,  $q = i, i+1$ ;  $OR_{i,j}^{(1)}F(x, y_j, t) = F(x, y_j, t)$ ,  $OR_{i,j}^{(1)}F(x, y_{j+1}(x), t) = F(x, y_{j+1}(x), t) \forall t \in [0, \infty)$ .

**Теорема 2.** Нехай  $F(x, y, t) \in C(T)$ ,  $P_1F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t)$ ,  $P_2F(x, y, t) = F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)$ .

Тоді оператор

$$\begin{aligned} P_{12}F(x, y, t) &= (P_1 \oplus P_2)F(x, y, t) := \\ &:= (P_1 + P_2 - P_1P_2)F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) + \\ &+ F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) - f(x) \left[ F(0, y, t) + F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) - F(0, 0, t) \right] - \\ &- g(y) \left[ F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(x, 0, t) - F(0, 0, t) \right] \end{aligned}$$

інтерлінує функцію  $F(x, y, t)$  на трьох сторонах трикутника  $T$ , тобто  $P_{12}F(x, 0, t) = F(x, 0, t)$ ,  $P_{12}F(0, y, t) = F(0, y, t)$ ,  $P_{12}F(x, y, t) = F(x, y, t)$ , якщо  $f(x) + g(y) = 1$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ .

**Теорема 3.** Нехай оператори  $OR_{i,j}^{(q)}F(x, y, t)$ ,  $q = \overline{0, 4}$  інтерлінують функцію  $F(x, y, t)$  на сторонах чотирикутників  $R_{i,j}^{(q)} \subset G \in [a, b] \times [c, d]$ ,  $q = \overline{0, 4}$ , а оператори  $OT_{i,j}^{(q)}F(x, y, t)$ ,  $q = \overline{1, 4}$  інтерлінують функцію  $F(x, y, t)$  на сторонах трикутників  $T_{i,j}^{(q)} \subset G$  з криволінійною (взагалі кажучи) гіпотенузою (означених вище).

Тоді оператор  $O_G F(x, y, t) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)} F(x, y, t), & (x, y) \in R_{i,j}^{(q)}, q = 0 \vee 1 \vee \dots \vee 4, \\ OT_{i,j}^{(q)} F(x, y, t), & (x, y) \in T_{i,j}^{(q)}, q = 1 \vee \dots \vee 4 \end{cases}$

$\forall t \geq 0$  інтерлінує функцію  $F(x, y, t)$  на прямих  $x = x_k \in [a, b]$ ,  $y = y_i \in [c, d]$ , а також на границі  $\partial G$  довільної області  $G$ , тобто  $O_G F(x_k, y, t) = F(x_k, y, t)$ ,  $O_G F(x, y_i, t) = F(x, y_i, t)$ ,  $O_G F(x, y, t) = F(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \partial G$ . При цьому  $O_G F(x, y, t) \in C(G) \forall F(x, y, t) \in C(G) \forall t \geq 0$ , отже,  $O_G F(x, y, t) \in W_2^1(G) \forall t \geq 0$ .

Відносно інтерлінації на трикутнику мають місце наступні твердження.

**Теорема 4.** Нехай

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y, t) &= (1 - f(x) - g(y)) [F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)] + \\ &+ f(x) [F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) + F(x, 0, t)] + \\ &+ g(y) [F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(0, y, t)]. \end{aligned}$$

Тоді для залишку  $R_{12} F(x, y, t) = (I - P_{12}) F(x, y, t) \quad \forall F \in C^{1,1}(T)$  виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} R_{12} F(x, y, t) &= (1 - f(x) - g(y)) \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\ &- f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

**Наслідок 1.** Справедлива рівність

$$P_{12} F(x, y, t) = F(x, y, t) \quad \forall F(x, y, t) = \varphi(x, t) + \psi(y, t) \quad \forall t \geq 0,$$

де  $\varphi(x, t), \psi(y, t) \in C^1[0, 1] \quad \forall t \geq 0$  – довільні функції двох змінних.

**Теорема 5.** Нехай область  $G = \{x \geq 0, y \geq 0, f(x) + g(y) \leq 1\}$  – прямокутний трикутник з криволінійною гіпотенузою,  $F(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ . Тоді функція  $H(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$ , де  $U(x, y, t) = P_{12} F(x, y, t)$ , задовольняє початкову  $H(x, y, 0) = \varphi(x, y)$  та граничну  $H(x, y, t) = U(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \partial G$  умови  $\forall t \geq 0$  ( $F(x, y, t)$  – довільна неперервна в  $G$  функція).

**Наслідок 2.** Функція  $u(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$  є точним розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad t > 0, (x, y) \in G,$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in G, \\ u(x, y, t) &= U(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G \end{aligned}$$

за умови, що

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ U(x, y, t) &= P_{12} F(x, y, t), \quad F(x, y, t) \in C^{(1,1,0)}(G). \end{aligned}$$

Замінімо задачу (1) – (3) відповідною задачею з однорідними початковою і граничною умовами. Для цього введемо замість функції  $u(x, y, t)$  функцію  $v(x, y, t)$  наступним чином:  $u(x, y, t) = v(x, y, t) + \varphi(x, y, t) + u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0)$ .

Функція  $v(x, y, t)$ , означена таким чином, задовольняє диференціальне рівняння  $Lv(x, y, t) = f(x, y, t) - L\varphi(x, y, t) - L(u_0(x, y) - \varphi(x, y, 0))$  та однорідні умови  $v(x, y, 0) = 0$ ,  $v(x, y, t)|_{\partial G} = 0$ ,  $u(x, y, t) = \left\{ v : v^{(p,q,1)}(x, y, t) \in C(G \times R^+), 0 \leq p, q \leq 2 \right\}$ ,  $u(x, y, t) \in C^{2,2,1}(G \times R^+)$ .

Якщо  $u(x, y, t)$  – побудована вказаним методом функція, то вона є точним розв'язком відповідної однорідної крайової задачі. Далі вважаємо початкову та граничну умови однорідними.

Важливо відмітити, що запропоновані схеми МСЕ в ІМСЕ дозволяють точно задовольняти головним граничним умовам крайової задачі у випадку областей складної форми та зберігати високу точність наближення  $\varepsilon = O(\varepsilon_1^2)$ , де  $\varepsilon_1$  – похибка класичного МСЕ. Це дозволяє значно зменшити порядок системи ЗДР для досягнення потрібної точності.

Наприклад, для області  $D = [0, 1]^2$ , якщо в класичному МСЕ потрібно розбиття з кроком  $h = 1/n^2$  по  $x$  та по  $y$  для досягнення похибки  $\varepsilon_1 = O(1/n^4)$  і отримуємо систему з кількістю  $n^4$  ЗДР, то в методі ІМСЕ потрібно для досягнення такої ж за порядком точності розв'язувати систему лише для  $2n^3$  ЗДР.

У **підрозділі 2.4** досліджується оцінка похибки методу ІМСЕ. Доведена наступна теорема.

**Теорема 6.** Якщо  $u(x, y, t)$  – точний розв'язок задачі (1)–(3) і  $u \in C^{2,2}(E^2)$ ,  $E^2 = [0, 1]^2$ ,  $\forall t \geq 0$ , то знайдена методом ЛДР функція  $u_2$  буде наближувати точний розв'язок  $u$  з такою похибкою:  $\exists M_2(t) > 0 : \|u - u_2\|_{C(\Omega)} \leq M_2(t) \Delta_1^2 \Delta_2^2 = O(\Delta^4) \quad \forall t \geq 0$ .

Основні результати другого розділу опубліковано у роботах [3, 4, 6, 13].

У **розділі 3** досліджуються деякі аспекти чисельної реалізації методу ІМСЕ розв'язання нестационарної задачі теплопровідності.

У **підрозділі 3.1** досліджується вплив способу нумерації вузлів в ІМСЕ на вигляд матриць в системі ЗДР, що виникає при наближеному розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності. Запропоновано використовувати спеціальний спосіб нумерації вузлів, який для стаціонарної задачі еліптичного типу був вперше використаний в праці Камишан В.В., Литвин О.М., Максимович О.Р. Відмічається, що поширення цього способу на нестационарні задачі теплопровідності дозволяє зберегти блочно-трюхдіагональну структуру матриць  $A$  і  $B$  в системі  $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$ ,  $C(0) = C_0$ , що дозволяє використовувати для розв'язання таких систем відомі методи (наприклад, метод Рунге-Кутта).

У **підрозділі 3.2** пропонується для тестування ІМСЕ використовувати точні розв'язки, побудовані за допомогою сплайн-інтерлінації функцій. Ці точні розв'язки дозволяють підтвердити отримані реальні оцінки похибки наближеного розв'язку, одержаного ІМСЕ для тих випадків, коли точні розв'язки задач невідомі, для областей складної форми.

Основна ідея побудови точних розв'язків полягає в наступному.

Припустимо, що область  $G$  є прямокутним багатокутником і може бути розбита на прямокутні елементи  $\Pi_{i,j} = \{(x,y) : x_i \leq x < x_{i+1}; y_j \leq y < y_{j+1}\}$  прямими  $x = x_i$ ,  $i = \overline{1,m}$ ,  $y = y_j$ ,  $j = \overline{1,n}$ . Невідому функцію  $u(x,y,t)$  в кожному прямокутнику  $\Pi_{p,q} \subset G$  будемо шукати у вигляді:

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y,t,p,q) = \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^1 \varphi_{k,s}(x,t) sp_{k,s}(y) + \sum_{l=q}^{q+1} \sum_{r=0}^1 \psi_{l,r}(y,t) sp_{l,r}(x) - \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^1 \sum_{l=q}^{q+1} \sum_{r=0}^1 f_{k,s,l,r}(t) sp_{k,s}(x) sp_{l,r}(y), \quad (4)$$

$$(x,y) \in \Pi_{p,q} \subset G,$$

де  $sp_{l,r}(x) \in C^2(R)$ ,  $sp_{k,s}(y) \in C^2(R)$  – кубічні сплайни з властивостями;

$$sp_{\ell,r}^{(rr)}(x_{\ell\ell}) = \delta_{\ell,\ell\ell} \delta_{r,rr}, \quad \ell, \ell\ell \in \{p, p+1\}, r, rr \in \{0,1\},$$

$$sp_{k,s}^{(ss)}(y_{kk}) = \delta_{k,kk} \delta_{s,ss}, \quad k, kk \in \{q, q+1\}, s, ss \in \{0,1\}.$$

Якщо ж функцію  $u(x,y,t)$  у прямокутнику  $\Pi_{p,q} \subset G$  шукати у вигляді

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y,t,p,q) = \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^2 \varphi_{k,s}(x,t) sp_{k,s}(y) + \sum_{l=q}^{q+1} \sum_{r=0}^2 \psi_{l,r}(y,t) sp_{l,r}(x) - \sum_{k=p}^{p+1} \sum_{s=0}^2 \sum_{l=q}^{q+1} \sum_{r=0}^2 f_{k,s,l,r}(t) sp_{k,s}(x) sp_{l,r}(y), \quad (5)$$

$$(x,y) \in \Pi_{p,q} \subset G,$$

де  $sp_{\ell,r}(x) \in C^2(R)$ ,  $sp_{k,s}(y) \in C^2(R)$  – кубічні сплайни з властивостями

$$sp^{(rr)}_{\ell,r}(x_{\ell\ell}) = \delta_{\ell,\ell\ell} \delta_{r,rr}, \quad \ell, \ell\ell \in \{p, p+1\}, r, rr \in \{0, 1, 2\},$$

$$sp^{(ss)}_{k,s}(y_{kk}) = \delta_{k,kk} \delta_{s,ss}, \quad k, kk \in \{q, q+1\}, s, ss \in \{0, 1, 2\}$$

і виконуються умови  $\varphi^{(r)}_{k,s}(x_{\ell}, t) = \psi^{(s)}_{\ell,r}(y_k, t) = f_{k,s,\ell,r}(t)$ ,  $k \in \overline{p, p+1}$ ,  $\ell \in \overline{q, q+1}$ ,  $s, r \in \{0, 1, 2\}$ , то  $u(x, y, t) \in C^{2,2}(G)$  і має властивості  $\left. \frac{\partial^{rr} u}{\partial x^{rr}} \right|_{x=x_{\ell\ell}} = \Psi_{\ell\ell, rr}(y, t)$ ,

$\ell\ell = \overline{p, p+1}$ ,  $rr = \overline{0, 2}$ ,  $\left. \frac{\partial^{ss} u}{\partial y^{ss}} \right|_{y=y_{kk}} = \varphi_{kk, ss}(x, t)$ ,  $kk = \overline{q, q+1}$ ,  $ss = \overline{0, 2}$  незалежно від вибору

функцій  $\varphi_{\ell\ell, rr}(x, t)$  і  $\psi_{kk, ss}(y, t)$  в інших точках інтервалу їх визначення.

Таким чином, формули (4) і (5) дозволяють будувати функцію трьох змінних  $u(x, y, t)$ , яка зберігає потрібний клас диференційовності і задовольняє граничним умовам на границі області  $G$ :  $u(x, y, t) = u_1(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \partial G$ .

Тоді функція  $w(x, y, t) = u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0)$  має наступні властивості:  $w(x, y, t) = u_1(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \partial G$ ;  $w(x, y, 0) = u_0(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ .

**Теорема 7.** Функція  $U = U(x, y, t) = u_0(x, y) + u(x, y, t) - u(x, y, 0)$ , де функція  $u(x, y, t)$  будується за описаним вище методом у вигляді (4), має властивості  $U(x, y, t) \in C^{1,1}(G) \quad \forall t > 0$  і є розв'язком крайової задачі

$$LU(x, y, t) = Lw(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0,$$

$$U(x, y, t) = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial G,$$

$$U(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G.$$

Таким чином, уміння будувати функцію  $u(x, y, t)$  за допомогою сплайн-інтерлінації у вигляді функції, яка точно задовольняє заданим граничним умовам, дає можливість точно задовольняти і початковій, і граничній умовам та диференціальному рівнянню  $Lu = f(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in G$ ,  $t > 0$ , у якому  $f(x, y, t) = Lw(x, y, t)$ .

У **підрозділі 3.3** викладено покроковий алгоритм знаходження наближеного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності з використанням ІМСЕ.

Основні результати третього розділу опубліковано у роботах [1, 2, 5, 10, 11].

**Розділ 4** присвячено опису та аналізу результатів обчислювального експерименту при розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності за допомогою ІМСЕ для прямокутника та деяких областей складної форми (Т-подібної області, рівнобічної трапеції, швелера). Так, наприклад, наведемо результати обчислювального експерименту для Т-подібної області.

Розглянемо задачу: знайти наближений розв'язок початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = 0,$$

де область  $G$  – Т-подібна область – вертикальний переріз балки (див. рис. 1).

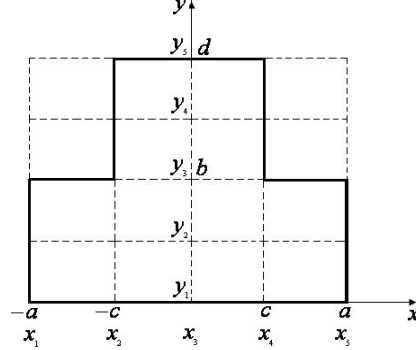


Рисунок 1 – Область інтегрування – вертикальний переріз балки;  
 область  $G = \Pi_1 \cup \Pi_2$ ,  $\Pi_1 = [-a, a] \times [0, b]$ ,  $\Pi_2 = [-c, c] \times [0, d]$

Функція  $f(x, y, t)$  має вигляд:  $f(x, y, t) = e^{-\beta t} (-\beta w(x, y) - \Delta w(x, y))$ , де  $w(x, y) = \omega_1(x, y) \vee_{\alpha(x, y)} \omega_2(x, y)$ ,  $\omega_1(x, y) = (a^2 - x^2)y(b - y)$ ,  $\omega_2(x, y) = (c^2 - x^2)y(d - y)$ ,  $u \vee_{\alpha} v = u + v + \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv}$ ,  $u \wedge_{\alpha} v = u + v - \sqrt{u^2 + v^2 - 2\alpha uv}$ ,  $\alpha = \alpha(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$ .

Згідно методу  $R$ -функцій, функції  $u \vee_{\alpha} v$  і  $u \wedge_{\alpha} v \in R$ -диз'юнкцією і  $R$ -кон'юнкцією відповідно, тобто функція  $w(x, y)$  має властивості:  $w(x, y) > 0$ , якщо  $(x, y) \in G$ ;  $w(x, y) = 0$ , якщо  $(x, y) \in \partial G$ .

Для наближеного розв'язання сформульованої задачі область інтегрування розбиваємо на прямокутні елементи прямими  $x = x_k$ ,  $k = \overline{0, M_1}$  та  $y = y_{\ell}$ ,  $\ell = \overline{0, M_2}$ ,  $M = (M_1, M_2)$ ,  $-a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = a$ ;  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$ . При цьому розбиття вибираємо таким чином, щоб відповідні лінії розбиття  $x = x_{k_0}$ ,  $x = x_{k_1}$  та  $y = y_{\ell_0}$  при певних значеннях  $x$  та  $y$  співпадали з лініями  $x = -c$ ,  $x = c$  та  $y = b$ . Приклад схеми розбиття області  $G$  на прямокутники зображено на рис. 1.

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u_M(x, y, t) = \sum_{k=1}^{M_1-1} \sum_{s=0}^1 \psi_{ks}(y, t) h_{ks}(x) + \sum_{\ell=1}^{M_2-1} \sum_{p=0}^1 \varphi_{\ell p}(x, t) H_{\ell p}(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{M_1-1} \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=1}^{M_2-1} \sum_{p=0}^1 C_{ks\ell p}(t) h_{ks}(x) H_{\ell p}(y),$$

де невідомі функції  $\psi_k(y, t)$ ,  $\varphi_{\ell}(x, t)$  знаходяться у вигляді:

$$\varphi_{\ell}(x, t) = \sum_{q=1}^{M_1} C_{q\ell}(t) h_q(x), \quad h_q(x) = h(M_1 x - q),$$

$$\Psi_k(y, t) = \sum_{m=1}^{M_2} C_{km}(t) H_m(y), \quad H_m(y) = h(M_2 y - m),$$

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -1, \\ 1+z, & -1 < z \leq 0, \\ 1-z, & 0 < z < 1, \\ 0, & z \geq 1. \end{cases}$$

При проведенні обчислювального експерименту вважаємо, що  $f(x, y, t) = 0$  в точках, які не належать області інтегрування. Нумерація вузлів проводиться так, як представлено на рис. 2.

Знайдений наближений розв'язок порівнюємо з точним розв'язком  $w(x, y)$  та наближеним, знайденим класичним методом скінченних елементів у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=1}^{M_2} \sum_{p=0}^1 C_{ks\ell p}(t) \tilde{h}_{ks}(x) \tilde{H}_{\ell p}(y).$$

Для практичної реалізації зручно базисні функції  $h_{ij}(x)$  визначати на кожному з підінтервалів окремо з умов, щоб  $h_{ks}^{s'}(x_{k'}) = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'}$ ,  $0 \leq s, s' \leq 1$ ,  $k, k' = \overline{1, M}$ . Явні вирази для цих функцій на кожному з підінтервалів  $[x_m, x_{m+1}]$ ,  $M = \overline{1, M_1 - 1}$  представлено в роботі.

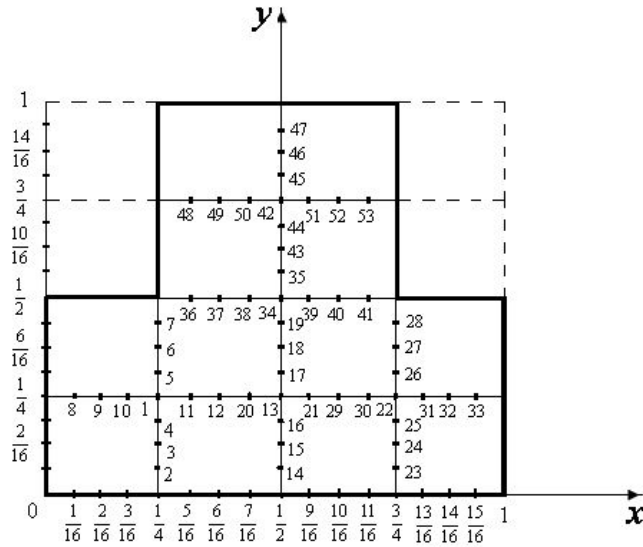


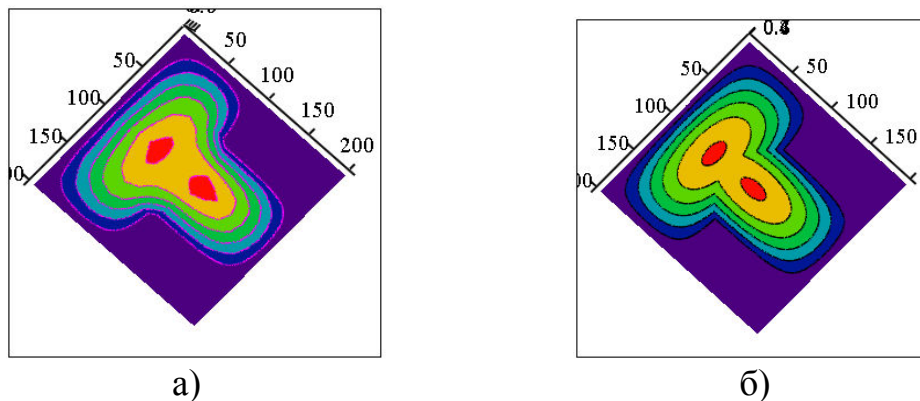
Рисунок 2 – Схема розбиття області  $G$  на прямокутники та нумерація вузлів при застосуванні ІМСЕ

В табл. 1 наведено частину результатів обчислювального експерименту при  $M_1 = M_2 = 5$ . Це результати точного розв'язку розподілу температури  $u(x, y, t)$  та наближеного, знайденого ІМСЕ для різних значень  $t$  ( $t = 0,01$  і  $t = 0,1$ ).

Таблиця 1 – Результати обчислювального експерименту при  $M_1=M_2=5$ 

Номери точок	Точний розв'язок		Наближений розв'язок (ІМСЕ)	
	$t = 0,01$	$t = 0,1$	$t = 0,01$	$t = 0,1$
2	0,201	0,168	0,208	0,174
14	0,268	0,224	0,277	0,230
3	0,345	0,288	0,355	0,297
15	0,460	0,384	0,475	0,394
4	0,431	0,360	0,443	0,368
16	0,574	0,480	0,596	0,492
8	0,144	0,120	0,150	0,126
9	0,268	0,224	0,279	0,232
10	0,373	0,312	0,386	0,320
1	0,459	0,384	0,471	0,388
11	0,527	0,440	0,523	0,430
12	0,574	0,480	0,523	0,468
20	0,603	0,504	0,615	0,503
13	0,613	0,512	0,640	0,525
5	0,431	0,360	0,441	0,361

На рис. 3 зображено точний розв'язок, побудований за допомогою R-функцій, та наближений розв'язок задачі при  $t = 0,01$ .

Рисунок 3 – Точний та наближений розв'язки задачі при  $t = 0,01$ :

- а) точний розв'язок, побудований за допомогою R-функцій;  
 б) наближений розв'язок.

На рис. 4 зображено графіки точного і наближеного (знайденого ІМСЕ) розв'язків (при  $M = 5$ ,  $t = 0,01$ ) на таких лініях:  $y = y_2 = 0,25$ ,  $x_1 \leq x \leq x_5$  (рис. 4 а),  $y = y_3 = 0,5$ ,  $x_1 \leq x \leq x_5$  (рис. 4 б),  $y = y_4 = 0,75$ ,  $x_1 \leq x \leq x_5$  (рис. 4 в). Зауважимо, що максимальна похибка між розв'язками, наведеними на рис. 4, не перевищує 0,04.



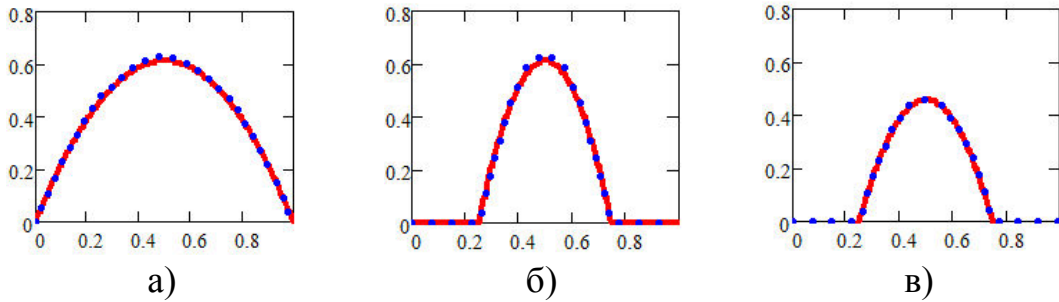


Рисунок 4 – Графіки точного і наближеного розв’язків задачі при  $t=0,01$ .

Максимальна похибка між точним та наближеним розв’язками по всій області не перевищує  $\varepsilon = O(h^2)$  (при умові, що розв’язок задачі Коші для системи ЗДР знаходився з такою ж похибкою), що збігається з теоретичними твердженнями стосовно похибки наближення диференціальних функцій операторами сплайн-інтерлінації.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у роботах [3, 4, 6, 10, 18].

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі одержано результати, які в сукупності є подальшим розвитком теорії інтерлінації функцій трьох змінних за двома просторовими змінними, методу лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ЛІДР) розв’язання нестационарної задачі теплопровідності, запропонованого в роботі Сергієнка І. В., Литвина О. М.

1. На основі сплайн-інтерлінації функцій розроблено та досліджено новий метод (інтерлінаційний метод скінченних елементів – ІМСЕ) розв’язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними у випадку областей складної геометричної форми, що дозволяє зберегти високу точність методу ЛІДР на основі заміни слідів відповідними сплайнами і зберегти можливість точного задоволення граничних умовам.

2. Вперше для тестування наближуваних та обчислювальних властивостей ІМСЕ розроблено метод побудови точних розв’язків нестационарних задач теплопровідності для областей складної форми, що дозволяє провести аналіз похибки наближення шляхом порівняння з точним розв’язком.

3. Вперше проведено чисельну реалізацію запропонованого ІМСЕ розв’язання нестационарних задач про поширення тепла в областях складної форми та порівняльний аналіз розв’язків, отриманих ІМСЕ, класичним МСЕ та точних розв’язків. Це дозволяє підтвердити теоретичне твердження про те, що метод ІМСЕ зберігає похибку  $O(\varepsilon^2)$  при розбитті області інтегрування на прямокутні елементи системою  $2M$  взаємно-перпендикулярних прямих, в той час, як класичний метод МСЕ для досягнення такої ж похибки вимагає розбиття області інтегрування на  $\approx 2M^2$  взаємно перпендикулярних прямих.

4. Вперше при чисельній реалізації розв’язання нестационарних задач теплопровідності запропоновано використовувати спеціальну нумерацію вузлів елементів, яка дозволяє в системі звичайних диференціальних рівнянь  $A \cdot C'(t) + B \cdot C(t) = D$ ,

що виникає при застосуванні ІМСЕ, зберегти блочно-трюхдіагональну структуру матриць  $A$  і  $B$ . Це спрощує обчислювальну реалізацію, оскільки робота буде виконуватись з відомими типами матриць, для яких існують ефективні обчислювальні схеми.

5. Проведене теоретичне обґрунтування інтерлінаційних та апроксимаційних властивостей наближеного розв'язку за допомогою наведених теорем підтверджене результатами обчислювального експерименту, проведеного для областей різної геометричної форми з використанням програм, створених дисертантом. Це дозволяє зробити висновок про високу ефективність запропонованого і розробленого ІМСЕ.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Литвин О. М. Про один метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестационарної теплопровідності в області складної форми / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: зб. наук. пр. / Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 4. – С. 132–138.

2. Литвин О. М. Про один підхід до тестування нових методів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 219–228.

3. Литвин О. Н. Численная реализация метода линейных интеграл-дифференциальных уравнений для уравнения нестационарной теплопроводности с двумя пространственными переменными / О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная // Управляющие системы и машины. – 2012. – № 4. – С. 11–19.

4. Литвин О. М. Чисельна реалізація інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач з двома просторовими змінними / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Труды института прикладной математики и механики. – 2013. – Т. 27. – С. 199–207.

5. Сергієнко І. В. Аналіз обчислювальних можливостей інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності / І. В. Сергієнко., О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Доповіді НАН України. – 2014. – № 3. – С. 43–50.

6. Литвин О. Н. Исследование нестационарного температурного поля в прямоугольной пластине интерлинеационным методом конечных элементов / О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2014. – № 19 (190). – Вып. 36. – С. 49–56.

7. Литвин О. М. Деякі аспекти чисельної реалізації нового методу розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку / О. М. Литвин, Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII): праці міжнар. конф., присвяченої пам'яті академіка В. С. Михалевича, Кацевелі, 19–23 вересня 2005 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України – К., 2005. – С. 88–89.

8. Залужна Г. В. Про чисельну реалізацію нового методу розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку / Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII): праці міжнар. симпозіуму, присвячено-

го 50-річчю створення Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кацевелі, 23–28 вересня 2007 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України – К., 2007. – С. 110.

9. Литвин О. М. Математичне моделювання поширення тепла за допомогою інтерлінації. / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики : матеріали XV Всеукр. наук. конф., Львів, 23–25 вересня 2008 р. / Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 2008. – С. 77.

10. Литвин О. М. Розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінчених елементів / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): праці міжнар. симпозиуму, присвяченого 40-річчю 1-го симпозиуму та літньої математичної школи з питань точності й ефективності обчислювальних алгоритмів (м. Київ, м. Одеса; 1969 рік), Кацевелі, 24–29 вересня 2009 р. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України – К., 2009. – Т. 2. – С. 14–19.

11. Про один підхід до розв'язання задачі нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними за допомогою кластера / О. М. Литвин, О. М. Хіміч, М. Ф. Яковлев, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., Полтава, 18–20 березня 2010 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 114–116.

12. Литвин О. М. Інтерлінація функцій при розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали II Всеукр. наук.-практ. конф., Полтава, 17–19 березня 2011 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2011. – С. 167–170.

13. Литвин О. М. Чисельна реалізація інтерлінаційного методу скінчених елементів розв'язання початково-крайових задач / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях : труды науч.-техн. конф. с междунар. участием, Харьков, 24–27 апреля 2012 г. / ХНУ им. В. Н. Каразина. – Харьков, 2012. – С. 258–261.

14. Литвин О. М. Про оцінку похибки інтерлінаційного МСЕ для нестационарної задачі теплопровідності в прямокутнику / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): матеріали: V Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнар. участю, Полтава, 13–15 березня 2014 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О. О. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2014. – С. 192–194.

15. Литвин О. М. Новий метод розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку / О. М. Литвин, Г. В. Залужна // XXXVIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2005. – С. 89.

16. Литвин О. М. Чисельна реалізація методу ЛДР розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна // XLIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, 20–23 грудня 2009 р., Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2009. – Ч. 1. – С. 47.

17. Литвин О. М. Про дослідження інтерлінаційним МСЕ впливу точкових джерел на розподіл тепла в пластині / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна //

XLIV наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії, 18–25 лютого 2011 р., Харків : зб. тез доп. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2011. – Ч. 4. – С. 14–15.

18. Method for Solution of Non-Stationary Heat Conduction Problem with Two Space Variables / I. V. Sergienko, O. N. Lytvyn, O. O. Lytvyn, V. I. Mezhuiev, L. S. Lobanova, G. V. Zalyzhna // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Mathematical Sciences & Computer Engineering ICMSCE 2015 (Langkawi, Malaysia, 5-6 February 2015). – P. 116–121.

## АНОТАЦІЯ

**Залужна Г.В. Математичне моделювання нестационарного переносу тепла в неоднорідному середовищі з використанням інтерлінації функцій.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2015.

Дисертація присвячена розробці та дослідженню ефективних обчислювальних схем інтерлінаційного методу скінченних елементів (ІМСЕ) розв’язання крайових задач теплопровідності для плоских областей складної форми.

ІМСЕ є скінченно-елементною реалізацією методу розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, запропонованого в роботі Сергієнка І.В., Литвина О.М. Наближений розв’язок нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними представляється у вигляді формул сплайн-інтерполяції (за просторовими змінними), побудованих на основі формул сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних за двома просторовими змінними. Невідомі вузлові параметри інтерполяції, які є функціями від часу  $t$ , знаходяться шляхом розв’язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Кількість рівнянь системи на порядок менша, ніж кількість рівнянь аналогічної системи ЗДР у класичній схемі МСЕ, при цьому забезпечується одна й та ж за порядком точність.

В дисертаційній роботі досліджено питання найбільш ефективної нумерації вузлів елементів розбиття, яка дозволяє отримати матриці системи ЗДР, що мають блочно-трьохдіагональний вигляд. Запропоновано метод побудови точних розв’язків тестових задач.

Відповідні теоретичні твердження роботи обґрунтовані за допомогою теорем і підтверджені результатами обчислювальних експериментів, проведених з використанням пакету прикладних програм, створеного дисертантом. Обчислювальний експеримент продемонстрував та підтвердив високу точність запропонованого ІМСЕ і правильність теоретичних тверджень роботи.

**Ключові слова:** крайові задачі, метод скінченних елементів, інтерлінація функцій, метод зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (метод ЛІДР).

## АННОТАЦИЯ

**Залужная Г.В. Математическое моделирование нестационарного переноса тепла в неоднородной среде с использованием интерлинации функций** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2015.

Диссертация посвящена разработке и исследованию эффективных вычислительных схем интерлинационного метода конечных элементов (ИМКЭ) решения краевых задач теплопроводности для плоских областей сложной формы.

ИМКЭ является конечно-элементной реализацией метода решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, предложенного в работе Сергиенко И.В., Литвина О.Н. ИМКЭ основан на замене сплайнами следов приближенного решения в формулах интерлинации. Приближенное решение нестационарной задачи теплопроводности с двумя пространственными переменными представляется в виде формул сплайн-интерполяции (по пространственным переменным), построенных на основе формул сплайн-интерлинации функций трех переменных по двум пространственным переменным. Неизвестные узловые параметры интерполяции, которые являются функциями времени  $t$ , находятся из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Предложенные схемы метода конечных элементов (МКЭ) в ИМКЭ позволяют точно удовлетворять граничным условиям краевой задачи нестационарной теплопроводности в случае областей сложной формы и сохранять высокую точность приближения  $\varepsilon = O(\varepsilon_1^2)$ , где  $\varepsilon_1$  – погрешность классического МКЭ. Это позволяет значительно уменьшить порядок системы ОДУ для достижения необходимой точности. Например, для области  $D = [0,1]^2$ , если в классическом МКЭ необходимо разбиение с шагом  $h = 1/n^2$  по  $x$  и по  $y$  для достижения точности приближения  $\varepsilon_1 = O(1/n^4)$  и получаем систему с количеством  $n^4$  ОДУ, то в ИМКЭ для достижения точности такого же порядка необходимо решать систему только  $2n^3$  ОДУ.

При численной реализации ИМКЭ для нестационарной задачи теплопроводности важную роль играет нумерация узлов элементов разбиения. Поэтому в диссертационной работе исследован вопрос об наиболее эффективной нумерации узлов элементов разбиения, которая позволяет получить матрицы системы ОДУ, имеющие блочно-трехдиагональный вид. В работе предложен метод построения точных решений тестовых задач. При построении и исследовании точных решений нестационарного уравнения теплопроводности используется метод сплайн-интерлинации функции двух переменных. Точные решения позволяют подтвердить полученные реальные оценки погрешности ИМКЭ для случаев, когда точные решения задач неизвестны для областей сложной формы.

Соответствующие теоретические утверждения работы обоснованы с помощью теорем и подтверждены результатами вычислительных экспериментов, проведен-

ных с использованием пакета прикладных программ, созданного диссертантом. Вычислительный эксперимент продемонстрировал и подтвердил высокую точность предложенного ИМКЭ и правильность теоретических утверждений работы.

**Ключевые слова:** краевые задачи, метод конечных элементов, интерлинация функций, метод приведения к системе линейных интегро-дифференциальных уравнений (метод ЛИДУ).

## ABSTRACT

**Zalyzhna G.V. Mathematical modeling of unsteady heat transfer in a heterogeneous environment using functions interlination.** – The manuscript.

The dissertation is presented for the Candidate of Physical and Mathematical degree in speciality 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2015.

The dissertation is devoted to research and development of effective computing schemes of interlination finite element method (IFEM) for solving of boundary value problems of heat conduction for flat areas of complex shape.

IFEM is finite cell realization of method of solving boundary value problems for differential equations in partial derivatives proposed by Serhiyenko I.V., Litvin O.M. Approximate solution of non-stationary heat conduction problem with two space variables is sought in the form of spline interpolation formulas (by spatial variables), based on spline-interlination formulas of function of three variables in two spatial variables. To find the unknown nodal interpolation parameters which are functions of time  $t$ , obtained the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. Quantity of equations in the system to order less than the quantity of equations of similar ODE system in the classical scheme of the FEM, wherein accuracy of the same order ensures.

In the dissertation the problem of the most effective numbering for element partition nodes is investigated, which provides a matrix of ODE system with block-three-diagonal look. The method of construction of exact solutions for test problems is offered.

Corresponding theoretical statements of paper are grounded by means of theorems and confirmed by results of the computing experiments spent with use of a package of applied programs, created by the author of dissertation. Computing experiment demonstrated and confirmed the high accuracy of the proposed method IFEM and correctness of theoretical statements.

**Keywords:** boundary value problems, finite elements method, interlineations of the functions, method of reduction to a system of the linear integro-differential equations (method LIDE).

Підписано до друку 30.10.2015 р.  
Формат 60x84 1/16. Ум. др. арк. 0,9.  
Наклад 100 прим. Зам. № 813.

---

**Видавництво Б.І. Маторіна**  
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.  
Тел.: +38 06262 3-20-99; +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.

---

