

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу **Ламтюгової Світлани Миколаївни «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R -функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною»**, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Математичне моделювання процесів обтікання, течії рідини в трубах, каналах тощо, передбачає дослідження початково-крайових та крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса в областях складної геометрії. Розв'язування таких задач відбувається наближеними методами, зокрема методами скінчених різниць та методами скінчених елементів. Застосуванню структурно-варіаційних методів, які називають методами R -функцій, надається також певна увага, оскільки ці методи дозволяють будувати розв'язки крайових задач в областях складної геометрії з точним задоволенням відповідних граничних умов.

Актуальність теми дисертації. В роботі аналізуються моделі поведінки нестисливої в'язкої рідини, коли область течії може бути і нескінченною, зокрема задачі обтікання тіл. Такі моделі описуються рівняннями Нав'є-Стокса, особливістю яких є нелінійність та наявність малого параметра при старшій похідній. Важливий клас складають течії, в яких можна знехтувати нелінійними членами і перейти до лінійної задачі. Знехтування інерційними членами приводить до рівнянь повзучої течії, або рівнянь Стокса. Але у випадку розглядання задач обтікання, зокрема, циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною не існує розв'язку рівнянь Стокса, що приводить до застосування наближення Озеєна. Теоретичне обґрунтування коректності початково-крайових та крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса і лінеаризація таких рівнянь були виконані багатьма дослідниками. Розв'язування задач обтікання тіл в'язкою рідиною на основі



використання методу R -функцій розширює низку методів математичного моделювання стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною і формує базу для дослідження більш складних випадків моделювання задач обтікання, що є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами. Робота виконана відповідно робочих планів держбюджетних тем Харківського національного університету радіоелектроніки: «Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витоками» (2011–2013 рр. ДРН^о 0111U002624).

Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації. Обґрунтованість викладених в роботі положень базується на застосуванні методів математичної фізики при розробці математичних моделей обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною, процесів та методів обчислювальної математики для вирішення крайових задач, що представляють відповідні математичні моделі; на наявності доведень збіжності гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиних розв'язків задач, що розглядаються в обмежених областях; отриманні оцінок розв'язків в енергетичній нормі. Достовірність результатів розв'язування крайових задач підтверджується аналізом отриманих результатів при застосуванні наближених методів розв'язування, а також порівнянням результатів наближеного розв'язування модельних крайових задач з результатами точного їх розв'язування та даними експериментів.

Характеристика змісту дисертації, її відповідність встановленим вимогам, стиль та повнота викладу наукових положень в опублікованих працях. Дисертаційна робота Ламтюгової Світлани Миколаївни «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R -функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною» складається з вступу, шести розділів, списку використаних джерел зі 208 найменуваннями та шести

додатків. Стиль оформлення та повнота викладу наукових положень дисертації в цілому відповідають встановленим вимогам.

У вступі до дисертації обґрунтовано актуальність теми роботи, сформульовано мету, об'єкт, предмет та методи дослідження, приведена інформація про наукові праці, які були надруковані під час виконання роботи.

Перший розділ присвячений представленню основних математичних моделей стаціонарних течій в'язкої рідини та огляду літературних джерел для зовнішніх течій в'язкої рідини та задач обтікання тіл, що ускладнені масообміном. Наведені основні відомості про математичні засоби теорії R -функцій, оглянуті задачі гідродинаміки, які розв'язувались з застосуванням методу R -функцій та сформульовані задачі дослідження.

У другому розділі представлений метод розрахунку лінеаризованої за Озеєном задачі не швидкого обтікання циліндричних тіл в циліндричній системі координат. У відповідності з методом R -функцій застосована структура розв'язку, яка дозволила звести задачу в нескінченій області до задачі в скінченій області. Обґрунтований числовий метод розрахунку зовнішніх не швидких течій в'язкої нестисливої рідини поза циліндричного тіла. Доведено збіжність гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв'язку задачі, яка розглядалася в обмеженій області. Отримана оцінка розв'язку в енергетичній нормі. Проведений обчислювальний експеримент для визначених циліндричних тіл, перпендикулярним перерізом яких є круг, еліпс та область, що обмежена кривою Ламе.

В третьому розділі обґрунтований числовий метод розв'язування нелінійної стаціонарної задачі обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною – розв'язування нелінійної задачі зводиться до розв'язку послідовності лінійних крайових задач, для розв'язування яких на кожному кроці ітераційного процесу розроблений числовий алгоритм на основі методу Бубнова-Гальоркіна. Доведена збіжність цього ітераційного

процесу при малих числах Рейнольдса, отримані оцінки швидкості збіжності в енергетичній нормі. Проведені обчислювальні експерименти для визначених циліндричних тіл, перпендикулярним перерізом яких є круг, еліпс та область, що обмежена кривою Ламе. Для кожного тіла визначені числа Рейнольдса, при яких за тілом виникають вторинні вихори.

Четвертий розділ присвячений розгляду лінеаризованої за Стоксом математичної моделі процесу не швидкого обтікання в'язкою нестисливою рідиною тіла обертання. На основі методу R -функцій побудована структура розв'язку відповідної крайової задачі. Доведена збіжність гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиного загального розв'язку задачі, розв'язування якої відбувається в скінченій області. Отримані оцінки розв'язків в енергетичній нормі. Для деяких тіл обертання проведений обчислювальний експеримент для задачі, що розглядається.

В п'ятому розділі розглядається нелінійна стаціонарна задача обтікання в'язкою нестисливою рідиною тіла обертання. Обґрунтований числовий метод розв'язування такої задачі на основі структурного методу та проєкційного методу Бубнова-Гальоркіна – розв'язування нелінійної задачі зводиться до розв'язування послідовності лінійних крайових задач. Доведена збіжність ітераційного процесу, що використовується, при малих числах Рейнольдса. Отримані оцінки швидкості збіжності в енергетичній нормі. У випадку розбіжності послідовних наближень при апроксимації невизначених компонент структури вихідної задачі в сферичній системі координат, запропоновано застосування нелінійного методу Гальоркіна. Проведені обчислювальні експерименти для деяких тіл обертання (сфера, еліпсоїди обертання з різним співвідношенням піввісів, два сполучених еліпсоїда). Для кожного випадку дослідження відповідного тіла визначені числа Рейнольдса, при яких при обтіканні за тілом виникають вторинні вихори.

Шостий розділ присвячений розгляданню стаціонарної задачі обтікання в'язкою нестисливою рідиною циліндричних тіл та тіл обертання з урахуванням масопереносу. Обґрунтований числовий метод розв'язування

таких задач на основі апроксимації невизначених компонент в структурі розв'язку (метод R -функцій) крайових задач методом Бубнова-Гальоркіна. Доведена збіжність гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиного загального розв'язку задачі, розв'язування якої відбувається в скінченій області. Отримані оцінки розв'язків в енергетичній нормі. Проведені обчислювальні експерименти задач обтікання циліндричних тіл (кругового та еліптичного циліндрів, та циліндра, перерізом якого є область, що обмежена кривою Ламе) та тіл обертання (сфери, еліпсоїда обертання з різним співвідношенням піввісів, два сполучених еліпсоїда).

В додатку представлені результати розрахунків низки тестових крайових задач, які демонструють можливості методів, які запропоновані в роботі, для дослідження математичних моделей, що розглядаються.

Нові наукові результати дисертаційної роботи. У дисертаційній роботі отримані нові наукові результати, серед яких найбільш вагомими визначаємо наступні:

– розроблено метод розрахунку повільного обтікання циліндричних тіл та тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною (в наближенні Озесна та Стокса), який передбачає сумісне використання структурного методу (методу R -функцій) та проєкційного методу Бубнова-Гальоркіна і спрощує процедуру побудови наближеного розв'язку при розгляданні областей довільної конфігурації;

– розвинений ітераційний числовий метод розрахунку задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною, коли вихідна нелінійна крайова задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач, при розв'язуванні яких на кожному кроці ітераційного процесу використовується числовий алгоритм на основі методів R -функцій та Бубнова-Гальоркіна; для ітераційного процесу, що використовується, отримані умови збіжності; числовий алгоритм відрізняється від раніше застосованих тим, що дозволяє звести розгляд задач обтікання до задач в скінченній області, яка прилягає до тіла, а умови на нескінченності враховувати точно;

– вперше розроблений числовий метод розрахунку масообміну циліндричних тіл і тіл обертання з рівномірним поступальним потоком, заснований на сумісному використанні структурного методу (методу R -функцій) та проекційного методу Бубнова-Гальоркіна; структура розв'язку точно враховує крайові умови на межі обтічного тіла, і з поверхні якого відбувається масообмін, а також умови на нескінченності.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи в цілому і по частинам доповідалися і обговорювалися на 16-ти міжнародних конференціях, участь в яких підтверджена тезами доповідей, на наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова, кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків).

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів. Запропоновані в роботі методи розв'язання задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною дозволяють здійснювати ефективне моделювання течій в'язкої нестисливої рідини з урахуванням масообміну при точному опису геометрії області тіл, точному задовольненню крайових умов задачі та умов на нескінченності. Отримані результати дозволяють проводити обчислювальні експерименти при математичному моделюванні течій різної фізичної природи. Результати досліджень впровадженні в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки при викладанні дисциплін: «Вибрані глави математичної фізики», «Конструктивні засоби математики», «Теорія R -функцій та її застосування», «Чисельні методи».

В процесі знайомства з дисертаційною роботою у рецензента виникли наступні зауваження:

1) При визначенні поняття загальної структури (стор. 38, визначення 1.3) виписаний вираз, який містить одну невизначену компоненту, що відповідає випадку задовольнення лише одній крайовій умові крайової задачі. У

випадку декількох крайових умов кількість таких невизначених компонент в структурі відповідає кількості крайових умов. В подальшому автор виписує структури розв'язку відповідних крайових задач, в яких використовуються дві невизначені компоненти (стор. 52, 102, 155 тощо).

2) При введенні достатньо гладкої функції $y = f_M(x)$ (стор. 43, сукупність умов (2.8)) умова в) не колерує з умовою б).

3) При зображенні тривимірних областей в декартовій системі координат (рисунки 2.2, 2.5, 2.8, 4.3, 4.8, 5.1 (стор.135), Б.1-Б.5, В.1, В.4, В.7, В.8, Г.1, Г.3 (додаток)) не позначені вісі координат.

4) При визначенні функції $\omega(r, \varphi)$ (стор. 43) було би доцільним вказати клас гладкості цієї функції.

5) На стор. 187 замість вислову «цилиндра, сечением которого является кривая Ламе» слід застосовувати вислів «цилиндра, перпендикулярным к оси сечением которого является область, ограниченная кривой Ламе»; подібні зауваження стосуються стор. 3, 85 (п. 3.2.3).

б) На стор. 18 одну і ту же величину визначають різними позначками ($T_{\partial\Omega}$ та T_Γ); на стор. 107 доречно вживати позначення «координаты эллипсоидальной системы координат», а не «переменные ...»; на стор.28 «свободно вращающиеся и неподвижные круговые цилиндры...»; на стор. 45 «(считаем, что цилиндр радиуса R представляет собой обтекаемое тело)».

7) Рецензент сподівається на продовження досліджень розглянутих в роботі задач і проведення обчислювальних експериментів при обтіканні тривимірних тіл довільної форми, які можна описати за допомогою математичних засобів теорії R -функцій.

Висновки по дисертаційній роботі. Проте, попри цих зауважень, можна стверджувати, що автором проведене корисне дисертаційне дослідження, результати якого знайдуть своє місце в практиці при дослідженні задач в рамках моделей поведінки нестисливої в'язкої рідини. Рецензент відмічає значну кількість модельних задач, яку досліджував автор. Треба підкреслити, що в роботі автор досліджує застосування структурного методу

(методу R -функцій) для дослідження задач математичного моделювання, зокрема, стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною. Запропоновано використання нелінійного методу Гальоркіна для апроксимації компонент структури у разі розбіжності ітераційного процесу. Для розрахунку масообміну тіл з рівномірним поступальним потоком розроблено числовий метод, заснований на апроксимації компонент структури розв'язку крайових задач методом Бубнова-Гальоркіна. Можливості числових методів ілюструються результатами обчислювальних експериментів.

Зміст автореферату відповідає основним положенням дисертації.

Вважаю, що дисертаційну роботу «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R -функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною» можна розглядати як закінчену наукову працю, результати якої опубліковані у провідних фахових виданнях і пройшли апробацію на міжнародних конференціях та семінарах, робота відповідає всім вимогам до кандидатських дисертацій згідно з «Порядком присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», затвердженого Постановою КМ України від 24.07.2013 р. №567, пункти: 9, 11, 12, а її автор, Ламтюгова Світлана Миколаївна, заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02– математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,
професор кафедри прикладної математики
Харківського національного
автомобільно-дорожнього університету,
доктор фізико-математичних наук, професор

В.М. Колодяжний

ЗАПИС
ЗАСВІДЧУЮ
СЕКРЕТАР

