

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Артюха Антона Володимировича

«Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій  
нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини»,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні  
методи

Система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса є математичною моделлю гідродинамічних процесів. Зазвичай рідину можна вважати нестисливим та в'язким середовищем, що дозволяє зробити ряд спрощень. Наразі відома обмежена кількість точних розв'язків системи Нав'є-Стокса, які можна отримати лише в деяких частинних випадках, тому розв'язання цієї системи часто виконується за допомогою чисельних методів. Значна увага приділяється сітковим методам, але більш прийнятними є проєкційні методи, які подають наближений розв'язок в аналітичному вигляді.

**Актуальність теми дисертації.** У роботі проведено чисельний аналіз нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини з урахуванням теплопровідності у скінченних складних областях. Математичне моделювання таких течій викликає інтерес у сучасних вчених, які працюють в таких галузях науки, як біомедицина, геофізика, теплоенергетика тощо. Це допомагає уникнути значних витрат на фізичні експерименти та отримати необхідні числові показники за значно коротший проміжок часу. Найбільш часто для моделювання використовуються методи скінченних різниць та скінченних елементів. Хоча ці методи легко програмуються та є всебічно вивченими, вони мають суттєвий недолік – з їх допомогою неможливо точно врахувати геометрію області та крайові умови (особливо, якщо область криволінійна). Метод  $R$ -функцій вирішує цю проблему і в поєднанні з методом Гальоркіна дозволяє отримувати наближені розв'язки в аналітичному вигляді, які точно задовольняють крайовим умовам. Тому розробка нових методів математичного моделювання нестационарних течій на основі методів  $R$ -функцій та Гальоркіна є актуальною науковою задачею.



**Зв'язок роботи з науковими програмами.** Робота виконана відповідно робочих планів держбюджетних тем Харківського національного університету радіоелектроніки: «Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витокami» (2011–2013 рр. ДР№ 0111U002624).

**Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації.** Обґрунтованість наведених в роботі положень базується на: 1) застосуванні методів функціонального аналізу та математичної фізики для побудови методів розв'язання початково-крайових задач, до яких зводяться відповідні гідродинамічні процеси; 2) доведенні збіжності гальоркінських наближень до єдиних узагальнених розв'язків в нормах відповідних просторів; 3) отриманні умов збіжності ітераційних процесів для розв'язання нелінійних початково-крайових задач до єдиних узагальнених розв'язків. Достовірність підтверджується порівнянням наближених розв'язків початково-крайових задач, отриманих за допомогою запропонованих методів, з відомими з літератури результатами для тестових областей.

**Характеристика змісту дисертації, її відповідність встановленим вимогам, стиль та повнота викладу наукових положень в опублікованих працях.** Дисертаційна робота Артюха Антона Володимировича «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини» складається зі вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел зі 194 найменувань та п'яти додатків. Стиль оформлення та повнота викладу наукових положень дисертації в цілому відповідають встановленим вимогам.

У вступі до дисертації обґрунтовано актуальність теми роботи, сформульована мета, об'єкт, предмет та методи дослідження, поставлені задачі дослідження та надана стисла інформація про ступінь апробації результатів дослідження.

У першому розділі наведена система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса у натуральних змінних, яка далі записується за допомогою функції течії в безрозмірних змінних. Проведено аналіз існуючих чисельних методів

моделювання нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини. Наведені основні поняття теорії  $R$ -функцій та сформульовані задачі дослідження.

У другому розділі обґрунтовано метод розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини (лінеаризація Стокса). Для цього були використані структурний метод  $R$ -функцій для побудови структури розв'язку та нормалізованого рівняння межі області і проєкційний метод Гальоркіна для апроксимації невизначеної компоненти структури. Отримано оцінки норм наближеного розв'язку та умови застосовності методу, доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку задачі. Проведено обчислювальний експеримент для задачі з відомим точним розв'язком з метою обрання найкращого типу координатних функцій, які використовувались в подальших обчисленнях. Для тестових задач у різних областях (квадрат, параболічних сегмент, трапеція) отримані наближені розв'язки, які були порівняні з відомими результатами застосування інших методів.

Третій розділ присвячено методу розрахунку лінеаризованої задачі, яка є математичною моделлю нестационарної течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини. Як і у другому розділі, для побудови методу були використані методи  $R$ -функцій і Гальоркіна. Доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку задачі, отримано умови застосовності методу. Проведено обчислювальний експеримент для тестових задач у трьох областях (квадрат, параболічних сегмент, трапеція).

Четвертий розділ присвячений методу розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини (нелінійна задача для функції течії). На основі методу послідовних наближень побудовано ітераційний процес, який зводить розв'язання нелінійної задачі до розв'язання послідовності лінійних, подібних до задачі, розглянутої у другому розділі. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса до єдиного узагальненого розв'язку задачі. Проведено обчислювальний експеримент для тестових задач, а також для задачі з відомим точним розв'язком, що дозволило оцінити вплив нелінійної складової на наближений розв'язок.

В п'ятому розділі розглядається задача розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини, яка описується початково-крайовою задачею для системи нелінійних рівнянь відносно функції течії та температури. Як і у четвертому розділі, на основі методу послідовних наближень побудовано ітераційний процес, який зводить розв'язання нелінійної задачі до розв'язання послідовності лінійних задач, метод розрахунку яких запропоновано у третьому розділі. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу до єдиного узагальненого розв'язку задачі за умови малості чисел Рейнольдса, Грасгофа та Пекле. Проведено обчислювальні експерименти для тестових та прикладних задач.

В додатку представлені графічні результати обчислювальних експериментів для низки тестових початково-крайових задач, які дозволяють оцінити ефективність запропонованих методів.

Отримані у дисертаційній роботі результати достатньо повно відображені у 23 наукових працях, серед яких: 6 статей в наукових фахових виданнях згідно з переліком фізико-математичних наук, 1 стаття у закордонному науковому виданні (наукометрична база VazTech), 16 тез доповідей, опублікованих у матеріалах наукових конференцій.

**Нові наукові результати дисертаційної роботи.** У дисертаційній роботі отримані нові наукові результати:

- вперше розроблено два методи розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини з урахуванням і без урахування теплопровідності у скінченних однозв'язних областях з кусково гладкою межею на основі методів  $R$ -функцій та Гальоркіна;

- розвинено на нестационарний випадок ітераційний метод розрахунку течії в'язкої рідини на основі методу послідовних наближень, при якому нелінійна початково-крайова задача замінюється послідовністю лінійних задач; отримані умови та оцінки швидкості збіжності в нормі відповідного простору до єдиного узагальненого розв'язку задачі;

- розвинено на нестационарний випадок ітераційний метод розрахунку течії в'язкої теплопровідної рідини на основі методу послідовних наближень та запропонованого методу для лінеаризованої задачі; отримані умови та

оцінки швидкості збіжності в нормі відповідного простору до єдиного узагальненого розв'язку задачі.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи доповідалися і обговорювалися на 13-ти міжнародних конференціях, участь в яких підтверджена тезами доповідей, на наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків).

**Практичне та теоретичне значення одержаних результатів.** Запропоновані в роботі методи розв'язання задач розрахунку нестационарних течій в'язкої нестисливої теплопровідної рідини дозволяють здійснювати ефективне математичне моделювання різних геофізичних, біологічних та інших процесів завдяки їх універсальності – алгоритм залишається незмінним при переході від однієї області до іншої. Розроблені методи впровадженні в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Вибрані глави математичної фізики», «Конструктивні засоби математики», «Теорія  $R$ -функцій та її застосування» і «Чисельні методи» при проведенні лабораторних робіт, практичних занять, у курсовому та дипломному проектуванні.

В процесі знайомства з дисертаційною роботою у рецензента виникли наступні зауваження:

1) У постановках початково-крайових задач (3.4) – (3.9), (4.1) – (4.3) і (5.1) – (5.6) у дисертаційній роботі та у постановках задач (1) – (3), (11) – (14), (26) – (27), (35) – (38), наведених в авторефераті, не вказано тип нормалі

у крайовій умові  $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = g_0(s, t)$ .

2) При отриманні оцінки норми вектора похибок у п'ятому розділі використано евклідову норму. Можна також було використати кубічну або октаедричну норми.

3) З роботи не зрозуміло, чи є принциповим використання однакової кількості координатних функцій для побудови наближеного розв'язку лінеаризованої задачі для функції течії та температури (формули (3.28),

(3.29)) та нелінійної задачі (формули (5.35), (5.36)).

4) Бажано було би провести порівняння отриманих чисельних розв'язків для тестових задач з результатами роботи відомих прикладних програм, наприклад, Abaqus/CFD.

5) У тексті дисертації відсутні посилання на літературні джерела під номерами 33 і 162.

6) Рецензент вважає, що здобувачу слід продовжити дослідження задач нестационарних течій в'язкої нестисливої теплопровідної рідини, що ускладнені масообміном.

**Висновки по дисертаційній роботі.** Слід відмітити, що попри наявність зауважень, автором проведено якісне дослідження, результати якого мають теоретичне і практичне значення у вивченні нестационарних течій в'язкої нестисливої теплопровідної рідини. Сумісне використання методів  $R$ -функцій, Гальоркіна та послідовних наближень дозволило отримати наближені розв'язки нелінійних задач та провести ретельний чисельний аналіз у різних областях, серед яких наявна і криволінійна.

Зміст автореферату відповідає основним положенням дисертації.

Вважаю, що дисертаційну роботу «Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини» можна розглядати як закінчену наукову працю, результати якої опубліковані у провідних фахових виданнях, робота відповідає всім вимогам до кандидатських дисертацій згідно з «Порядком присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», затвердженого Постановою КМ України від 24.07.2013 р. №567, а її автор, Артюх Антон Володимирович, заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02– математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент,

кандидат фізико-математичних наук

В.С. Булігін

*Від імені Булігіна*

*Вчений секретар  
спецради Д 64.052.02*



*Л.В. Каленчук*