

Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

На правах рукописи

ВАЛИД АХМЕД МАХМУД АЛЬРЕФАИ

УДК 519.87

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
Наумейко Игорь Владимирович,
кандидат технических наук, доцент

Этот экземпляр диссертации идентичный
по содержанию с другими, поданными
в специализированный ученый совет Д 64.052.02.

Ученый секретарь специализированного
ученого совета

Л. В. Колесник

Харьков – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Системный анализ динамики нелинейных систем с конкурентным взаимодействием и постановка задач исследования.....	13
1.1 Анализ литературных источников по проблеме моделирования нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием.	13
1.2 Анализ технических систем с конкурентным взаимодействием.....	15
1.3 Анализ проблемы устойчивого развития динамических систем с конкурентным взаимодействием.....	18
1.4 Моделирование процессов конкуренции за ресурс в электроэнергетических системах.....	19
1.4.1 Структура системы.....	19
1.4.2 Вербальная модель системы.....	20
1.4.3 Морфологическое описание системы.....	21
1.4.4 Формальное описание системы.....	22
1.5 Современное состояние методов математического моделирования конкурентных процессов в нелинейных системах.....	22
1.5.1 Выбор и обоснование класса объектов и математических моделей динамических систем с конкурентным взаимодействием.....	22
1.5.2 Выбор методов математического моделирования систем в критических точках фазового пространства.....	25
1.6 Постановка задачи исследования.....	26
1.7 Выводы по разделу.....	28
2 Анализ свойств нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием	29
2.1 Анализ условий устойчивого развития и конкуренции в нелинейных системах.....	29
2.1.1 Современное состояние математического моделирования	

	3
конкурентных процессов в нелинейных системах.....	29
2.1.2 Особенности исследования конкуренции акторов в рамках нелинейной модели.....	39
2.2 Расширение нелинейной модели Вольтерра на множество акторов и схем их взаимодействия.....	40
2.2.1 Анализ базовой модели конкуренции.....	40
2.2.2 Модификация базовой модели конкуренции.....	42
2.2.3 Инструментарий, использованный для исследования динам- ики математических моделей.....	46
2.3 Численный анализ модифицированной нелинейной модели Воль- терра.....	47
2.3.1 Численный анализ устойчивого развития при солидарных отношениях двух акторов.....	47
2.3.2 Численный анализ устойчивого развития системы при кон- курентных отношениях нескольких акторов.....	50
2.4 Выводы по разделу.....	53
3 Исследование условий устойчивого развития в многосвязной линейной модели с конкурентным взаимодействием.....	55
3.1 Структуризация задачи устойчивого развития для многосвязной линейной модели с конкурентным взаимодействием.....	55
3.2 Выбор и обоснование методов анализа устойчивости многосвязной линейной модели.....	59
3.2.1 Аттракторы и качественный анализ линейной динамическ- ой модели.....	59
3.2.2 Локальный анализ динамической модели.....	61
3.3 Устойчивость стационаров многосвязной линейной модели.....	62
3.3.1 Исследование линеаризованной модели делового цикла Кейнса.....	62
3.3.2 Условия возникновения хаотической динамики линеаризо- ванной модели Кейнса.....	63

	4
3.4 Численный анализ линейных многосвязных моделей конкуренции	68
3.4.1 Численный анализ линеаризованной модели для двух акто- ров.....	68
3.4.2 Численный анализ линеаризованной модели для трех акто- ров.....	74
3.5 Использование линейной модели конкуренции для описания дина- мики взаимодействия насосных агрегатов при их параллельном включении на насосной станции.....	82
3.5.1 Технологические особенности взаимодействия насосных агрегатов насосной станции.....	82
3.5.2 Результаты расчета динамики взаимодействия и их анализ...	86
3.6 Анализ возможного применения многосвязной линейной модели устойчивого развития с конкурентным взаимодействием.....	89
3.7 Выводы по разделу.....	90
4 Конкурентные модели нелинейных динамических систем с периодичес- ким внешним возмущением.....	92
4.1 Устойчивость решений дифференциальных систем по линейному приближению.....	92
4.1.1 Спектр ляпуновских характеристических показателей фазо- вой траектории динамической системы.....	92
4.1.2 Устойчивость периодических решений. Мультипликаторы предельного цикла.....	96
4.2 Бифуркации динамических систем.....	100
4.2.1 Структурная устойчивость и бифуркации.....	100
4.2.2 Бифуркации периодических решений.....	105
4.3 Численные методы исследования условий возникновения хаоса ...	106
4.3.1 Экспериментальный подход к исследованиям динамики не- линейных систем.....	106
4.3.2 Расчет отображений Пуанкаре.....	107
4.4 Неавтономная модель конкуренции с возмущением правой части..	114

	5
4.4.1 Невозмущенная модель Вольтерра.....	114
4.4.2 Преобразования периодически возмущенной системы.....	115
4.4.3 Построение области существования периодических траекторий.....	116
4.4.4 Хаотическая потеря устойчивости.....	118
4.4.5 Характеристические показатели решений при бифуркации для движений, близких к синхронным.....	121
4.5 Результаты расчетов периодически возмущенных систем в математическом пакете.....	122
4.5.1 Синусоидальное возмущение численности пассивного актора.....	122
4.5.2 Периодическое возмущение численности типа $(\sin(\Omega \cdot t))^2$...	123
4.5.3 Синусоидальное возмущение численности активного актора.....	124
4.5.4 Появление хаоса в результате внешнего, близкого к резонансному, воздействия.....	125
4.6 Выводы по разделу.....	126
Выводы.....	127
Список использованных источников.....	130
Приложение А Исследование динамики взаимодействия стран с помощью линейной модели.....	142
Приложение Б Фазовые портреты динамики в нелинейной конкурентной системе.....	151
Приложение В Результаты расчетов периодически возмущенных систем...	158
Приложение Г Документы о внедрении и использовании результатов работы.....	160

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Процесс развития технических, экономических и социальных систем приводит к усложнению взаимосвязей, как внутри этих систем, так и их взаимодействия между собой и окружающей средой, что потребовало уточнения математических моделей с учетом фактической нелинейности большинства объектов. Этот процесс в конце XX века привел к возникновению научной проблемы исследования нелинейной динамики систем с «конкуренным взаимодействием», которое проявилось как обобщение понятия «обратной связи» в связи с усложнением структуры объектов и моделей систем, нелинейность которых является существенным свойством их динамики. Новая научная проблема исследования условий «устойчивого развития» в технике, экономике и обществе появилась сравнительно недавно, в связи с общим кризисом начала нашего века [73], когда динамика детерминированных систем претерпевает колебания, близкие к хаотическим. Оказалось [77], что подобные колебания возникают как в технических системах, так и в экономических и социальных, и даже в технической физике [7, 45]. Для их описания можно пользоваться качественно подобными моделями из одного и того же класса или их линейными приближениями. Научные исследования в области моделирования и управления линейными динамическими системами, в основном, были завершены работами Болтянского, Гамклеридзе и других последователей школы Понтрягина [74, 84]. Однако, в процессе применения даже линейных динамических моделей, возник ряд проблем технического и вычислительного характера, связанных с многомерностью систем и возможностью их хаотической динамики, которая практически не отличима от стохастической [102]. Эта проблема стала еще более актуальной при анализе взаимодействия многосвязных существенно нелинейных систем. Моделирование нелинейных систем, динамика которых не может быть адекватно описана в линейном приближении, восходит к работам Вышнеградского – для механических систем, и Андронова – для систем

электро- и радиотехники [58]. К тому времени уже существовали развитые Пуанкаре, Понтрягиным, Петровским и Хопфом [101, 112, 115] необходимые математические методы.

В настоящее время исследования существенно нелинейных взаимосвязанных динамических систем, допускающих хаотическую динамику, ведутся в рамках синергетического подхода [27, 84, 112].

"Устойчивое развитие" взаимосвязанных динамических систем является относительно новым понятием и не предполагает удовлетворения классическим определениям устойчивости динамических систем по Ляпунову. Это связано с тем, что при моделировании динамики взаимосвязанных систем интервал моделирования конечен. Известно [73], что абсолютное большинство всех нелинейных динамических моделей адекватно описывают реальные процессы на заданном конечном интервале времени $[0, T]$. При $t \rightarrow \infty$ эти модели выходят за рамки адекватности, как например, все модели процессов "с обострением" [76]. Кроме того, в технических системах существуют жесткие ограничения на амплитуды колебания переменных состояния системы.

С понятием устойчивого развития тесно связана проблема исследования условий устойчивого роста, стагнации, циклической неустойчивости или хаоса в взаимосвязанных нелинейных динамических моделях систем различной природы. Для существенно нелинейных систем она возникает в связи с тем, что их динамика не может быть разделена на затухающее "собственное движение" и движение под действием внешних факторов (вынуждающих сил). Поэтому классическая устойчивость здесь не является определяющим условием.

Также для любых нелинейных взаимосвязанных динамических систем характерна конкуренция, либо за ресурс, либо за влияние на выходные характеристики системы. Конкурентные и кооперативные (солидарные) процессы характерны для таких областей техники, как системы энергоснабжения, защиты и восстановления, и технического обслуживания городского хозяйства. Они также известны в экономике, биологии, экологии, психологии, военном деле, логистике, исследовании операций и

многокритериальной оптимизации [66 – 72, 75, 78, 97, 100, 105]. Поэтому модельное понятие "актор" (*actor – производящий действие*) может быть как "технической подсистемой", например, насосным или газоперекачивающим агрегатом, так и "биологическим видом", "предприятием", или иметь другой смысл и прикладное содержание. Во всех этих системах и их математических моделях, независимо от предметной области и физического смысла объектов, их общими свойствами являются: многосвязность, гладкость и замкнутость. Нелинейность абсолютного большинства из них определяет сложную динамику, даже для систем малой размерности [9, 59 – 63]. Различные модели конкуренции ранее исследовались в работах Пуанкаре [101] и Вольтерра [66, 67]. Все они описывали сравнительно простые технические объекты и экологические системы.

Диссертационная работа посвящена решению актуальной научно-технической задачи разработки методов математического моделирования и численного анализа условий устойчивого развития нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием акторов.

Цель и задачи исследования – выбор и исследование класса математических моделей для определения условий устойчивого роста, или стагнации и хаоса взаимосвязанных нелинейных динамических систем, включающего в себя как известные модели, так и новые многосвязные динамические модели с различными типами возмущений правой части, характерными признаками которых являются конкурентное или солидарное взаимодействие подсистем;

Достижение поставленной цели требует исследования поведения различных подклассов динамических моделей технических систем из рассматриваемого класса, безотносительно к физической природе порождающих их объектов, и решения следующих *задач*:

– модифицировать или разработать новую, структурно устойчивую, т.е. «мягкую», нелинейную динамическую модель взаимодействия акторов в выделенном классе многосвязных моделей;

– исследовать в расширенном пространстве состояний и параметров области хаотического поведения линейных и нелинейных моделей из данного класса;

– модифицировать численный метод выявления областей параметров рассмотренных моделей, отвечающих за устойчивое развитие, стагнацию или хаос в данном классе систем;

– исследовать расширенное фазовое пространство нелинейных динамических моделей с периодически возмущенной правой частью системы дифференциальных уравнений с целью определения условий:

- 1) устойчивого роста переменных состояния системы;
- 2) хаотической динамики, которую следует избегать.

Объект исследования – процессы устойчивого развития в многосвязных нелинейных динамических системах с конкурентным взаимодействием.

Предмет исследования – многосвязные нелинейные динамические модели устойчивого развития и конкурентного взаимодействия.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы для выбора класса и разработке математических моделей использованы методы системного анализа; для исследования динамики моделей систем были использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений; для получения фазовых портретов были модифицированы аналитический и численный методы решения линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и метод анализа их устойчивости, необходимые для решения задачи достижения устойчивого роста исследуемых систем и избегания их хаотической динамики.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планом научно-исследовательских работ Харьковского национального университета радиоэлектроники и приказом Минобразования и науки Украины, в рамках госбюджетной темы № 293 «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку», раздел №293-4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста» (№ ДР 0115U001522), в которой диссертант был одним

из соисполнителей. Модель взаимоотношений владельцев жилого фонда и обслуживающей компании-монополиста из раздела 3 диссертационной работы является составной частью проводимых по этой теме исследований.

Научная новизна полученных результатов. В процессе решения поставленных задач автором обоснован выбор класса математические модели конкурентного и солидарного взаимодействия, в рамках которого разработаны или модифицированы и исследованы модели замкнутых систем, а также модели систем с детерминированным периодическим внешним воздействием. Разработаны методы их анализа для решения задач устойчивого роста исследуемых систем и избегания их хаотической динамики.

В работе:

– впервые, для выделенного класса нелинейных динамических моделей с конкурентным взаимодействием, в расширенном фазовом пространстве получены и исследованы условия существования стационарных множеств тороидального типа и хаотических аттракторов, определены факторы, ответственные за появления квази-хаотических режимов в исследуемом классе конкурентных моделей функционирования систем, приводящие к катастрофам;

– впервые предложены феноменологические модели динамики взаимодействия параллельно включаемых насосных агрегатов насосной станции, отличающиеся от известных учетом их нелинейных связей, что позволяет адекватно описать их взаимодействие при переходе между двумя стационарными состояниями, использование которых дает возможность получить желаемую характеристику переходного процесса;

– получили дальнейшее развитие математические модели конкурирующих систем с множеством акторов, которые отличаются от известных тем, что включают два типа (солидарных и антагонистических) акторов. Исследована динамика их состояний, что позволило определить степень устойчивости системы при различных типах и параметрах интенсивности конкуренции акторов;

– усовершенствован метод сечений Пуанкаре применительно к численному анализу хаотической динамики моделей с периодически возмущенной правой частью их систем дифференциальных уравнений при

близком к резонансному внешнем воздействии, который позволил исследовать условия появления и наглядно изобразить хаотические аттракторы в расширенном фазовом пространстве и его проекциях.

Практическое значение полученных результатов заключается в том, что разработанные методы позволяют оценить состояния и параметры технических систем, которые приводят к устойчивому росту системы, или к квази-хаотической динамике, при этом:

– получены расчетные формулы динамики моделей систем, состоящих как из конкурирующих, так и солидарных акторов, что позволило аналитически исследовать явные зависимости фазовых портретов от бифуркационных параметров;

– расширена область применения метода фазового пространства на практически важный класс неавтономных систем с возмущением скорости изменения акторов.

Результаты работы использованы при выполнении госбюджетной тематики, а также внедрены в учебный процесс кафедры прикладной математики (приложение Г).

Личный вклад соискателя. Все положения, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Материалы, которые составляют основу диссертационной работы, опубликованы в работах [6, 7, 51 – 56], выполненных единолично, а также в работах [88–94], выполненных в соавторстве с научным руководителем. Так в работах [92 – 94] соискателем предложен класс динамических моделей для описания конкурентных процессов в технических системах, использование которых позволит в дальнейшем эффективно управлять этими процессами. В работе [90] предложена модель и исследована динамика взаимодействия технической системы и ее системы защиты. В работах [88, 89, 91] соискателем усовершенствована математическая модель конкурирующих систем из нескольких акторов, которая отличается тем, что включает акторов двух типов. Это позволило определить степень устойчивости и скорость роста подсистем при разных типах и параметрах интенсивности

конкуренции и кооперации. Также в работах [92, 93] соискателем усовершенствован метод моделирования хаотической динамики при близком к резонансному периодическом внешнем воздействии, расширена область применения метода фазового пространства на практически важный класс неавтономных систем с возмущением скорости роста акторов.

Апробация результатов диссертации. Научные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры прикладной математики ХНУРЭ, а также на шести международных конференциях, в том числе:

- 17-й Международный форум "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке" (г. Харьков, 2013);
- 18-й Международный форум "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке" (г. Харьков, 2014);
- Международный форум (Международный научный конгресс) "Энерго-сбережение и информационные технологии" ИСТ (г. Харьков, 2013 и 2014.);
- Aktualne problemy Nowoczesnych nauk, (г. Пшемишль 2014);
- Международная научно-техническая конференция "Информационные системы и технологии" (г. Харьков, 2014). Все выступления – по теме диссертации.

Основные положения диссертации отражены в 15 научных работах [6, 7, 51 – 56, 88 – 94]. Из них: семь статей – в специализированных изданиях, включенных в перечень МОН Украины; все девять статей опубликованы в журналах, которые реферируются и включены в иностранные и международные наукометрические базы, репозитории и поисковые системы, такие как Ulrich's Periodicals Directory, DRIVER, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), Index Copernicus (Польша), WorldCat, РИНЦ (Россия) и др., а также электронные библиотеки (полный список – на сайтах журналов). В сборниках опубликованы тезисы докладов на шести международных научных конференциях [53, 54, 55, 88, 93, 94].

1 СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Анализ литературных источников по проблеме моделирования нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием

Объектом исследования являются процессы устойчивого развития динамических конкурентных и солидарных подсистем в технических и других системах, то есть модели динамики целого класса систем, обладающих конкурентным (или солидарным) взаимодействием, которое реализует разные типы обратных связей в многомерных объектах.

На протяжении многих лет и многими авторами было отмечено, что дифференциальные (непрерывные) нелинейные модели играют важную роль практически во всех отраслях техники [18] и науки, включая также медицину [11, 21, 22], физику, экологию [13, 14, 17], биологию и т. д. – Cushing [16], Gopalsamy [24], Kuang [33]. Динамические модели с конкурентным взаимодействием можно условно разделить на три больших класса: модели без временных задержек, модели с задержками и распределенные модели.

Так, в экологии реалистичные модели часто включают временной лаг между моментом, когда действие происходит, и моментом, когда наблюдается его эффект. То есть реальная система может включать в себя дополнительный параметр, который называется временем задержки [1, 2].

Модель, которая не имеет временной задержки, обычно состоит из уравнения или системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дифференциальных уравнений в частных производных. Если уравнения или модели включают историю, они могут принимать форму дифференциальных уравнений с запаздыванием или функционально-дифференциальных уравнений. Далее рассмотрим некоторые отдельные

математические уравнения и модели объектов техники, которые также используются при исследовании динамики популяций и экономики. Основной акцент здесь сосредоточен на изучении локальной и глобальной асимптотической устойчивости уединенных стационарных решений, их позитивность и ограниченность, а также бифуркации поведения решений.

В литературе многие из уравнений и моделей рассматриваются с дискретными задержками [42]. Их динамика, в общем, гораздо сложнее, чем динамика обыкновенных дифференциальных уравнений без задержки [37, 46]. В различных монографиях, например, Макдональд [36], Wu [48], а также в работах Цзоу [50], Ал-Омари [3 – 5] и Гурли [25, 26] исследовались биологические модели, как имеющие задержки, так и без них. Исследованы равновесия таких моделей и их свойства устойчивости. Авторами [28, 32] проведено численное моделирование, которое подтвердило результаты анализа. Многочисленные исследования посвящены широко используемой в разных приложениях «мягкой» модели – обобщении модели Лотки–Вольтерра «хищник – жертва» (обширная библиография в [12, 15], а также работы [38, 40, 44]). Интерес представляют обобщенные системы гауссовского типа [20] и модели Wangersky-Cunningham [47]. Динамика таких моделей исследована аналитически и численно. Отметим, однако, что для моделирования динамики технических систем задержка не существенна, поскольку реакция системы почти мгновенная по сравнению с характерным временем работы системы. Хотя такие модели появились исторически раньше остальных, для них еще остался ряд важных нерешенных задач. Поэтому данная работа посвящена численно-аналитическим исследованиям таких задач для моделей именно этого типа.

Различные модели взаимодействия и конкуренции систем, линейные и нелинейные, восходят к классическим работам Вито Вольтерра [67] и первоначально получили приложение при моделировании, в основном, экономических и экологических систем [8, 10]. Далее в работе предлагаются качественно-подобные данным модели для технических систем, реализующие

обобщение обратных связей всех типов.

В настоящее время важной задачей в этой области является исследование механизмов и условий возникновения неустойчивости и хаоса в процессе сосуществования двух или большего числа акторов в замкнутых и открытых системах. В моделях, рассмотренных в работе конкретных объектов, понятие «актор» конкретизируется, в частности, как насосный агрегат, техническая подсистема защиты объекта или его технического обслуживания (восстановления), а также экологическая или экономическая подсистема.

Во всех рассматриваемых системах и их математических моделях, независимо от предметной области и физического смысла объектов, их общими свойствами являются:

а) связность (наличие попарных или более сложных взаимодействий акторов, которые могут иметь характер как положительных, так и отрицательных обратных связей);

б) гладкость (позволяет использовать для описания модели системы дифференциальных уравнений);

в) замкнутость (одно из основных свойств системы, которое обычно обеспечивается путем включения подсистемы «окружающая среда»);

г) нелинейность, определяющая сложную динамику систем даже для небольшого количества акторов (линеаризация – решение систем в вариациях – позволяет лишь немного упростить ситуацию).

1.2 Анализ технических систем с конкурентным взаимодействием

Модель кооперации и конкуренции обладает вышеописанными общими свойствами. Приведем краткое описание технических объектов, динамика которых описывается общей моделью и её частными случаями.

1.2.1 В транспортной сети (водоснабжения, газо- и нефтепроводов) рассматриваются насосные станции как системы с сосредоточенными параметрами. Распределенные процессы внутри транспортной сети между

такими узлами предполагаются линейными, что справедливо для сетей низкого давления или для несжимаемого носителя (вода, нефть) и ламинарного потока. Эти процессы могут быть учтены введением передаточных матриц на входах или выходах узла (станции).

В большинстве современных публикаций [110] рассматриваются линеаризованные квазистационарные модели таких систем. Для них математической моделью является уравнения, отражающие закон сохранения энергии, который для таких диссипативных систем верен лишь в стационарных точках, и при условии усреднения по времени. Отметим, что при таком подходе, поведение переходного процесса между двумя стационарными точками вообще не рассматривалось. В работе предлагаются как линейные, так и нелинейные динамические модели – системы дифференциальных уравнений, описывающие весь процесс. Процессы во внутренних объемах насосов описываются уравнениями турбулентности и здесь не рассматриваются. Предлагаемая здесь феноменологическая модель может быть получена из общих уравнений в частных производных первого порядка для удельного массового расхода, давления и температуры целевого продукта [107, 110] путем учета только сосредоточенных параметров, поскольку характерные линейные размеры насосных агрегатов и станции в целом на порядки меньше характерных длин в транспортной сети.

Не нарушая общности, рассмотрим динамические модели взаимодействия двух (или более) насосных агрегатов, при их параллельном включении в составе насосной станции [116], представленных на рисунке 1.1.

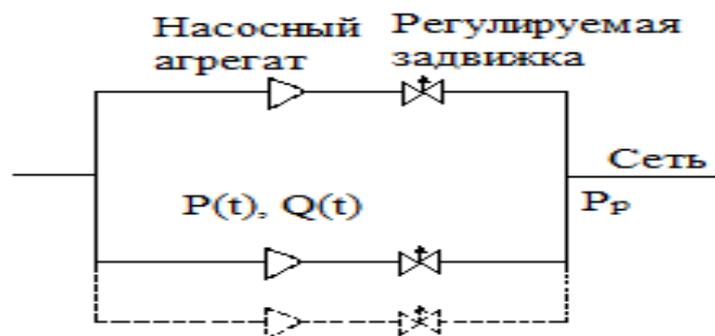


Рисунок 1.1 – Схема включения параллельно работающих насосных агрегатов

1.2.2 Аналогичной моделью описываются процессы в технических сетях (газ, нефть, водопровод, и т.д.) с несколькими источниками – станциями, подающими носитель в систему с давлением P_i и расходом Q_i . При учете нелинейностей система "конкуренции" с двумя источниками и сетью (рисунок 1.2) описывается моделью II с двумя "производителями" и одним "посредником", динамика которой исследована в разделе 2.

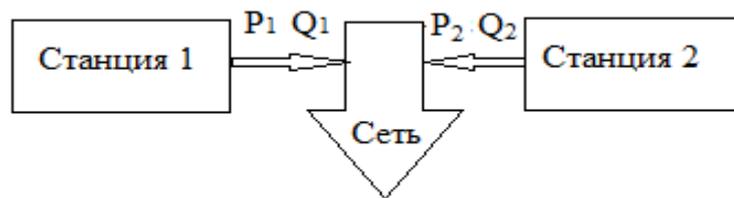


Рисунок 1.2 – Два "конкурирующих" источника в сети

1.2.3 Ниже показано, что динамика системы из объекта и его подсистемы обслуживания (например, защиты и восстановления при авариях) описывается аналогично. Такими объектами, в частности, являются системы с защитой и восстановлением, исследованные в работах [87, 88, 90], и системы ЖКХ, состоящие из владельцев жилищного фонда и монопольной обслуживающей компании [71], модели которых исследованы в разделе 2 настоящей работы.

1.2.4 В часто встречающихся случаях скорость изменения состояний технического объекта, претерпевает периодические изменения внешних условий, имеющие сезонный характер, например, сезонные изменения спроса на продукцию, обменный курс валют, налоги и квартальные плановые проверки со стороны государственных органов и др. Тогда периодическую вынуждающую функцию в правой части уравнений модели можно разложить в ряд Фурье и ограничиться исследованием гармонических внешних воздействий. Если система структурно неустойчива, то интерес представляет случай малых амплитуд и частот, близких к собственным колебаниям системы.

При этом, как выяснилось [96], описанные выше технические системы приобретают квази-хаотическую динамику [82, 84]. Этот процесс приводит к катастрофам [99] и поэтому, должен быть исключен. Для моделей динамики таких объектов в разделе 4 проведены численные эксперименты, позволяющие определить значения бифуркационных параметров, приводящие к катастрофам.

1.3 Анализ проблемы устойчивого развития динамических систем с конкурентным взаимодействием

Одним из технических объектов, описываемых моделью I рисунка 1.3 в рамках данной работы являются технологические процессы в электроэнергетических системах (ЭЭС), а в частности диспетчерское управление режимом совместной работы нескольких генераторов, сосредоточенных на участке ЭЭС. Эти процессы в участке сети изображаются графами, аналогичными приведенным выше на рисунке 1.2 для газотранспортных сетей. Здесь роль состояний системы (вместо давления и расхода) играют мощность и частота генерации. Существуют следующие виды режимов функционирования ЭЭС [31]:

– нормальный – все значения параметров режима (частоты напряжений в узлах, потоков мощности по линиям электропередачи и трансформаторам) находятся в пределах, длительной работы, как по критериям исправности отдельных элементов энергосистемы (термической стойкости линий электропередачи, трансформаторов и т. д.), так и по критериям надежности (устойчивости) работы отдельных узлов или ЭЭС в целом (устойчивость нагрузочных узлов, устойчивость параллельной работы электростанций, частей ЭЭС);

– нормальный оптимальный режим, наряду с соблюдением упомянутых ограничений по надежности, характеризуется также соблюдением требований

оптимальности (минимум затрат или расхода топлива на производство и передачу электроэнергии, минимум потерь электроэнергии в сети и т. д.);

– «утяжеленный» (вынужденный) режим, в котором один или несколько параметров режима достигают значений, допустимых лишь в течение ограниченного времени (неустойчивый режим роста или колебаний);

– аварийный режим, в котором одна или несколько фазовых переменных изменяются хаотически, – недопустимый даже кратковременно.

1.4 Моделирование процессов конкуренции за ресурс в электроэнергетических системах

1.4.1 Структура системы

В зависимости от вида режима, в котором находится ЭЭС, диспетчеру могут потребоваться различные виды управления по оптимизации этого режима, предотвращению возникновения и развития аварийных ситуаций. В нормальном режиме, когда выполнены требования по качеству электроэнергии и надежности работы ЭЭС, необходимо обеспечить оптимизацию режима – переход ЭЭС в нормальный оптимальный режим. В нормальном оптимальном режиме диспетчера может интересовать лишь обеспечение надежности нормального перспективного или возможного послеаварийного режимов.

В утяжеленном режиме необходимо не допустить перехода ЭЭС в аварийный режим, и поэтому решающее значение будут иметь параметры, обеспечивающие стабильность текущего режима.

Внешние объекты непосредственно влияют на процессы, протекающие в ЭЭС. Более подробно характеры связей внешних объектов с подразделениями ЭЭС отображены на информационной и функциональной моделях, где описаны характеры связей: управление, входы, выходы, механизмы.

Наличие большого числа связей с внешними объектами обуславливает сложность объекта исследования и управления им [43], так как многие внешние объекты существенно влияют на режим функционирования, но не поддаются

управлению ими (например, потребители электроэнергии). На рисунке 1.3 представлен верхний уровень модели потоков данных электроэнергетической системы.

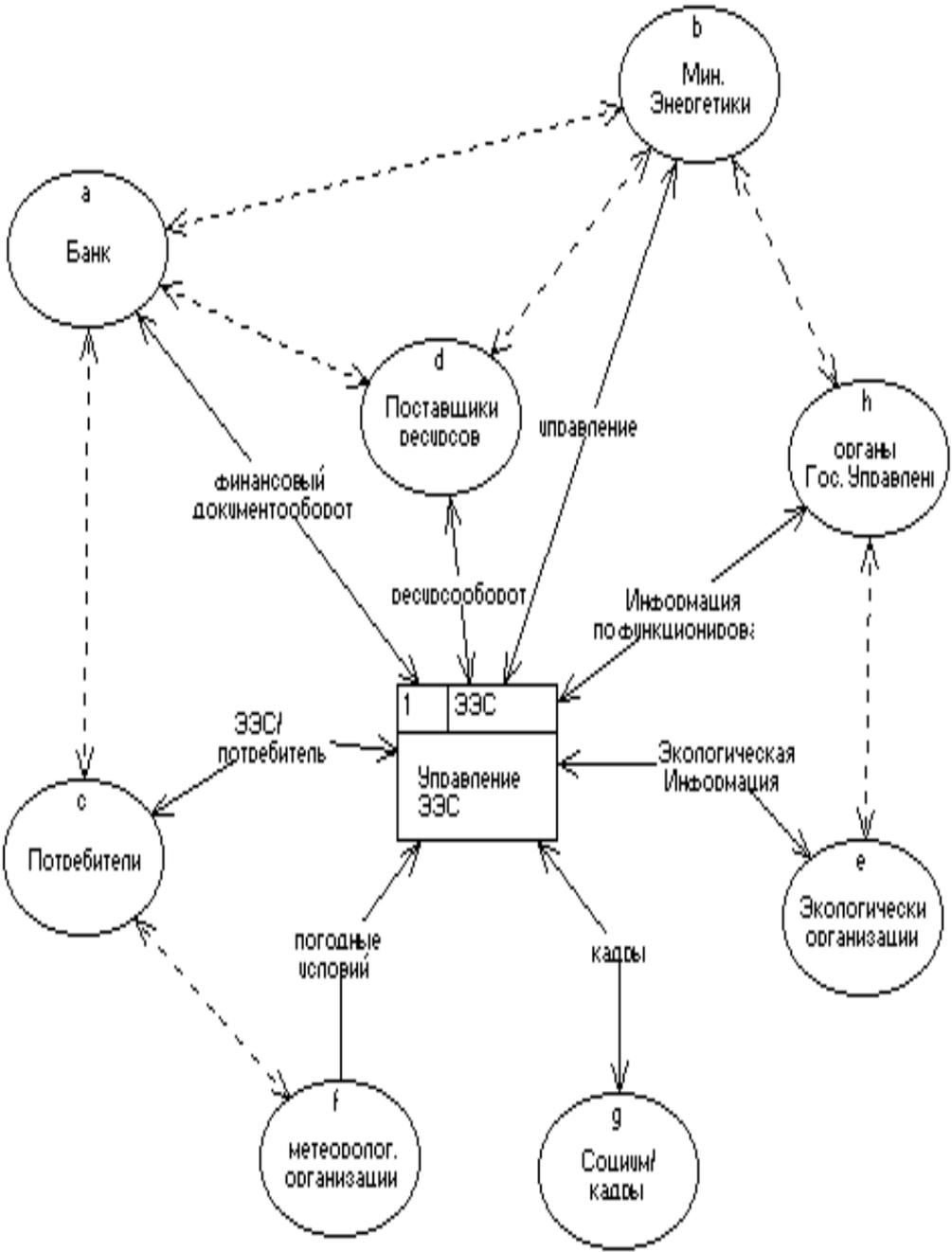


Рисунок 1.3 – Модель потоков данных электроэнергетической системы

1.4.2 Вербальная модель системы

Основной целью системного анализа здесь является построение

обобщенной модели конкуренции за ресурс для двух типов объектов:

- техническая система и ее защитная подсистема;
- объект городского хозяйства и монопольная система его технического обслуживания.

Задача в конкретной ситуации ставится для выработки рекомендаций по достижению этим объектом определенной цели – стабильного роста – путем исключения из пространства параметров тех множеств значений, которые приводят к стагнации или к стохастической (нерегулярной) динамике [102].

Основной чертой системного анализа является то, что для адекватного представления о любой сложной системе необходимо рассмотрение нескольких форм ее описания и исследования.

Обобщенная вербальная модель включает в себя следующие формы описания системы:

- предметную (морфологическую);
- функциональную;
- информационную.

1.4.3 Морфологическое описание системы

В качестве объекта исследования рассматривается система, одна из составляющих которой не производит продукцию, а обеспечивает технологическую безопасность или обслуживание, конкурируя при этом за ресурс с основным объектом.

Главной функцией системы является обеспечение действий по устранению нестабильностей и катастроф в системе.

Посредством персонала (инженеры, техники, управленцы), используя входные данные, заказчик получает алгоритм функционирования (распределения ресурса). Заказ осуществляется согласно внутренним (технологические возможности) и внешним (государственные и отраслевые стандарты, новые технологии) управлениям системы.

1.4.4 Формальное описание системы

Морфологическая модель системы представляет собой совокупность следующих моделей второго иерархического уровня:

- модель типа “черный ящик”;
- модель внешней среды;
- модель состава системы.

Первая из них отображает границы системы, внешнюю среду, входы и выходы системы, элементный состав (подсистемы разных уровней и элементы уровней), межэлементные связи.

Внешняя среда – это совокупность всех объектов границы системы, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства меняются в результате поведения системы.

На рисунке 1.4 предоставлена модель взаимоотношений объекта с внешней средой.

1.5 Современное состояние методов математического моделирования конкурентных процессов в нелинейных системах

1.5.1 Выбор и обоснование класса объектов и математических моделей динамических систем с конкурентным взаимодействием

В качестве альтернативы для решения задачи по устранению неустойчивости необходимо выбрать метод решения задачи по совокупности критериев, характеризующих основные свойства процесса составления систем уравнений динамики и их решения.

В качестве альтернатив рассматриваются следующие методы решения:

- а) аналитический;
- б) численно–аналитический;
- в) численный.

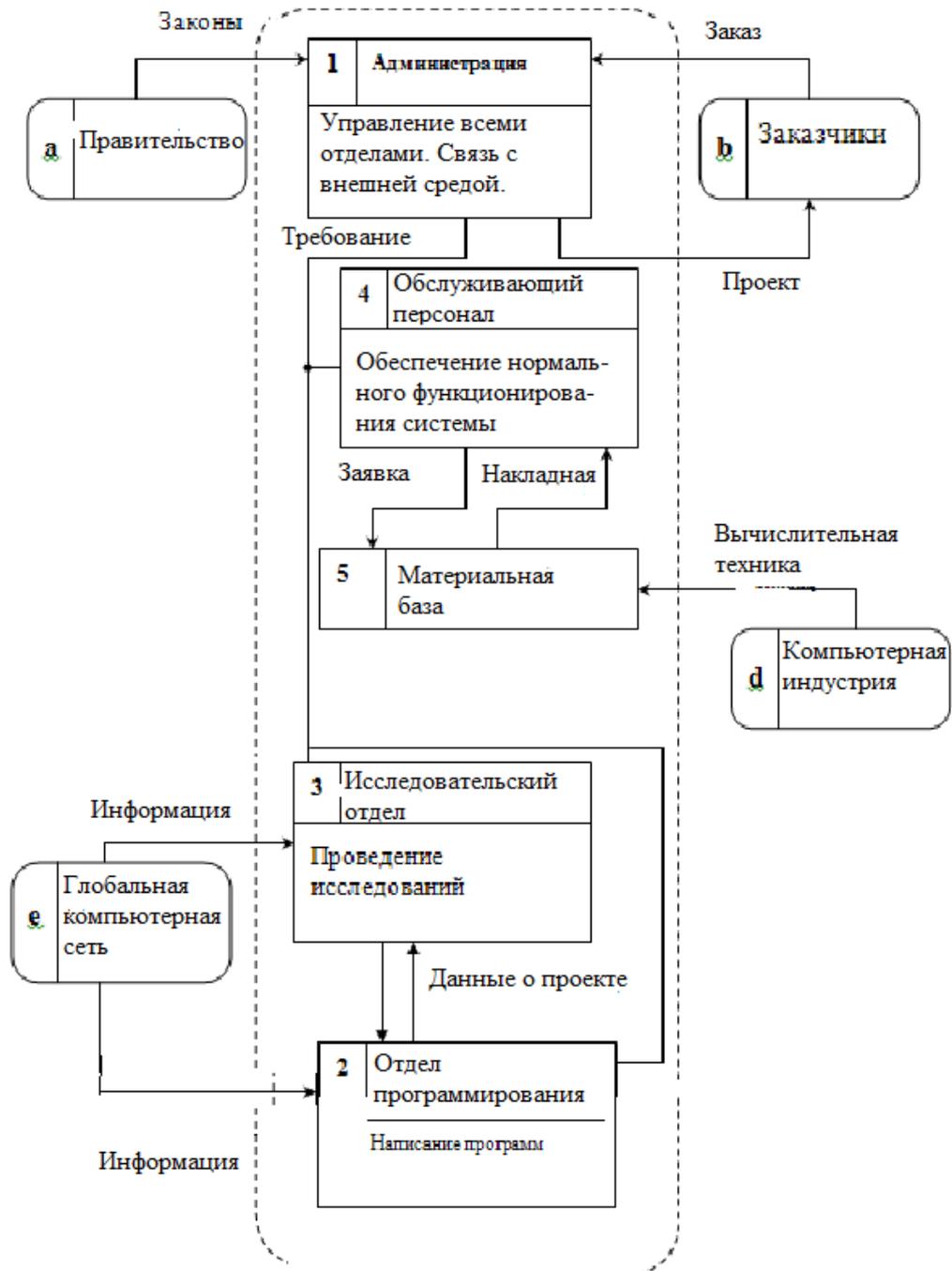


Рисунок 1.4 – Модель типа внешней среды

Качество процесса решения задачи характеризуется такими свойствами:

- а) время расчета (необходимое методу для нахождения решения);
- б) точность решения (погрешности результата);
- в) сложность алгоритма (построение математической модели, зависимость от начальных условий);

г) форма представления результата (по фазовому пространству и нахождению критических точек), выраженная возможностью наглядного изображения результата решения задачи;

д) вычислительные ресурсы (затраты памяти в процессе получения решения алгоритмом).

Для данной задачи построим иерархическую модель проблемы выбора метода решения, которая имеет следующий вид (рисунок 1.5).

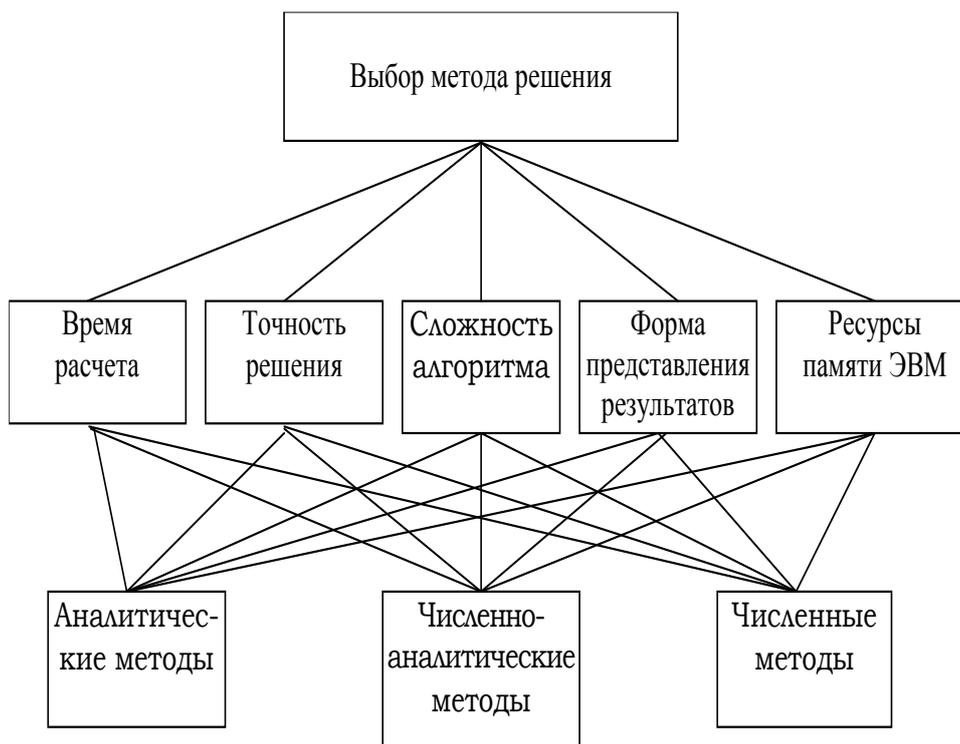
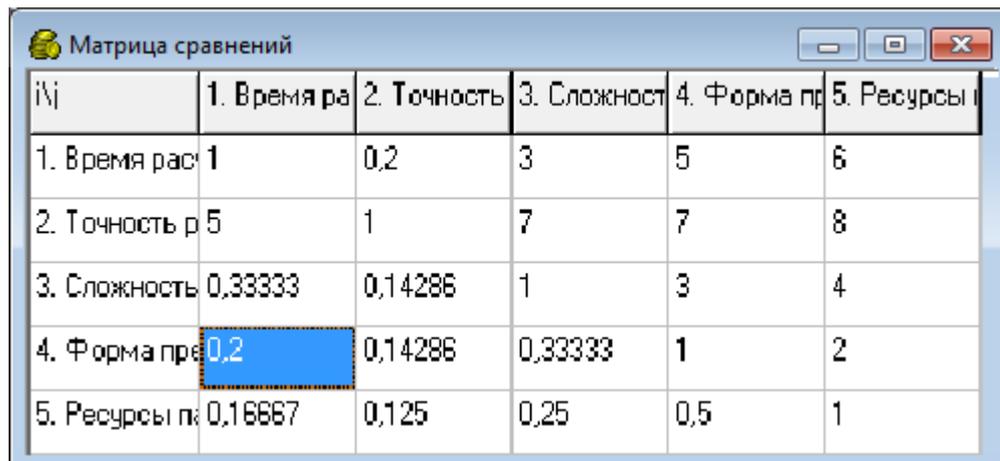


Рисунок 1.5 – Иерархическая модель проблемы выбора метода

Далее проводим этап анализа, который состоит в исследовании степени влияния показателей свойств процесса решения задачи на выбор соответствующего метода. На рисунке 1.6 представлена матрица парных сравнений для пяти факторов, заполненная суждениями, по шкале Саати [103].

Исходя из вектора приоритетов, можно сделать вывод, что наибольшее значение придается такому свойству решения как “точность”.

Таким образом, с учетом всех рассматриваемых методов анализа, предпочтение естественным образом отдается численно-аналитическому.



i\j	1. Время ра	2. Точность	3. Сложность	4. Форма пр	5. Ресурсы
1. Время рас	1	0,2	3	5	6
2. Точность р	5	1	7	7	8
3. Сложность	0,33333	0,14286	1	3	4
4. Форма пр	0,2	0,14286	0,33333	1	2
5. Ресурсы п	0,16667	0,125	0,25	0,5	1

Рисунок 1.6 – Матрица парных сравнений свойств процесса

1.5.2 Выбор методов математического моделирования систем в критических точках фазового пространства

Динамика перечисленных выше технических объектов описывается общей и тремя наиболее характерными частными моделями, изображенными деревом моделей на рисунке 1.7. Основное внимание здесь сосредоточено на изучении локальной и глобальной асимптотической устойчивости позитивных ограниченных решений и бифуркаций положений равновесия. Динамика модели определяется численно и, где возможно, аналитически – в частности, для оценки адекватности численного метода.

Первая из них (в дальнейшем – модель I) описывает, в частности, один из выше рассмотренных объектов – работу нескольких насосных агрегатов на станции в магистральной сети. Для объектов, описываемых данной моделью – например, электро-энергетической сети, фазовые координаты Y и R модели I имеют физический смысл мощности и частоты; для газо-транспортной сети (рисунок 1.2) – давление и расход. Ниже приведен системный анализ проблемы построения такой модели, основные методы и результаты которого могут быть

без существенного изменения перенесены на остальные две (соответственно, модель II и модель III).

Обобщенный класс динамических моделей с взаимодействием и его подклассы

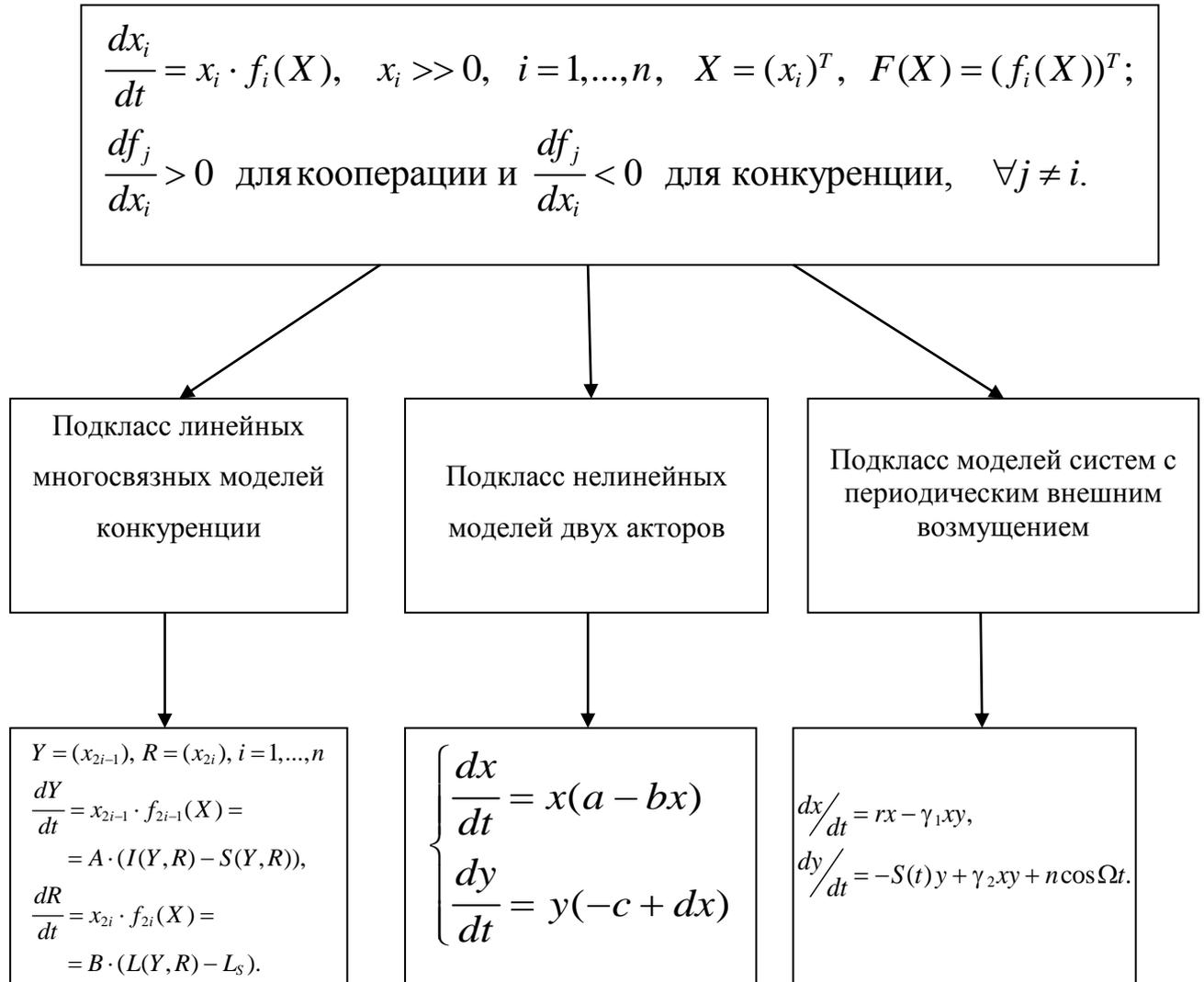


Рисунок 1.7 – Структуризация класса моделей

1.6 Постановки задачи исследования

В рамках класса моделей, представленного на рисунке 1.7 необходимо предложить и исследовать динамику математических моделей, применив результат для описания конкурентных процессов в многоагрегатных насосных станциях, которые являются частным случаем технических систем с

несколькими источниками и потребителем. Также из данного класса «мягких» моделей предложить и исследовать модель систем обслуживания в ЖКХ для выявления условий устойчивого роста и исключения условий хаоса.

Для определения условий устойчивого роста выше описанных объектов необходимо исследовать устойчивость динамики для их моделей типа I, II и III, которые отличаются многосвязностью, и включают два множества акторов разных типов.

"Устойчивый рост" вовсе не предполагает удовлетворения классическим определениям устойчивости (по Ляпунову [79, 83]). Тому есть ряд причин, а именно:

– конечность временного интервала моделирования. При $t \rightarrow \infty$ модели I, II, III выходят за рамки адекватности, как и абсолютное большинство всех нелинейных математических моделей, например, все модели процессов "с обострением" [77, 84];

– недопустимость колебаний, а значит, для линейных систем исключаются из рассмотрения все центры и фокусы, а для нелинейных – все устойчивые стационарные точки, циклы и странные аттракторы.

Интерес представляют неустойчивые узлы и седла, для линейных систем с медленным ростом фазовых переменных во времени, и неустойчивые фокусы для систем нелинейных – там возможно полное прекращение колебаний вдали от стационара. Особенно недопустимо наличие хаоса и странных аттракторов, в частности, динамика системы вблизи устойчивого нерезонансного тора в фазовом пространстве.

Целью численно-аналитического исследования моделей типа I, II и III является выявление областей в многомерном пространстве параметров соответствующих систем дифференциальных уравнений, значения которых обеспечивают либо:

– устойчивый рост, то есть монотонный рост во времени всех или большинства переменных состояния системы на достаточно длительном, однако конечном интервале;

– либо, наоборот, квази-хаотическую динамику, что дает возможность ее исключить в дальнейшем, при конструировании системы.

1.7 Выводы к разделу

В разделе проведен системный анализ проблемы для моделей типа I на примере изолированных сетевых систем газо-, водо- и энергообеспечения с точки зрения экспертов для повышения стабильности и эффективности управления, и моделей для технических систем с подсистемой защиты или обслуживания. Общей задачей является исследование связей акторов в моделях всех типов с целью идентификации условий устойчивого роста системы, либо наоборот – значений параметров, приводящих к хаотической динамике, которую в дальнейшем необходимо исключить.

По результатам анализа делаем вывод, что:

- каждая из рассматриваемых систем действительно является примером динамической системы с конкурентными взаимодействиями;
- поставленная общая задача исследования условий устойчивого развития для технических систем является актуальной.

Таким образом, целью последующих разделов работы является определение условий устойчивого развития объектов в рамках следующих моделей:

- модели конкурентного и солидарного взаимодействия "производитель–посредник", описывающие, в частности, и функционирование систем с защитой, и техническое обслуживание, например, коммунальных объектов (ЖКХ);
- модель насосной станции типа I для одного актора;
- модель насосной станции взаимодействия двух агрегатов-акторов;
- модель взаимодействия трех и более акторов;
- модели типа III с периодическим внешним воздействием.

Основное внимание уделяется условиям устойчивого развития таких систем и определению условий возникновения хаотической динамики с целью их исключения как нежелательных.

Результаты раздела опубликованы в работах автора [56, 88, 90, 92, 93].

2 АНАЛИЗ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

2.1 Анализ условий устойчивого развития и конкуренции в нелинейных системах

2.1.1 Современное состояние математического моделирования конкурентных процессов в нелинейных системах

Сложность многосвязных конкурентных систем ранее иногда рассматривалась как обоснование невозможности их моделирования, изучения средствами математики. Их динамика обладает всеми признаками очень сложной системы, которая объединяет огромное число элементов, отличается многообразием внутренних связей и связей с другими системами [86, 117, 119].

Конкуренция является краеугольным камнем не только экономики и подвергается тщательному анализу и разносторонним научным исследованиям [117]. Конкуренция (от лат. *conspicentia* – сталкиваться) – соперничество между производителями товаров и услуг за "среду обитания" (рынок сбыта), завоевание определенного сегмента рынка. Каждый актер использует свою стратегию и тактику для достижения этих целей.

Конкурентные процессы являются важной областью исследования динамики сложных систем. Поэтому, создание, тестирование и применение математических моделей необходимо для изучения и дальнейшего исследования конкурентных процессов [119].

Существенным фактом является то, что идеально воссоздающих текущую ситуацию моделей не существует, но их применение просто необходимо для того, чтобы осуществить максимально точный анализ необходимой области рынка и заложить основы для последующего синтеза новаций и решений, ведущих к развитию и дальнейшей стабилизации систем в той или иной отрасли [103].

Таким образом, конкуренция в общем смысле может быть определена, как соперничество между отдельными акторами (генерирующими подстанциями, видами, лицами или хозяйствующими единицами), заинтересованными в достижении одной и той же цели [103].

А в тех случаях, когда спрос практически неограничен, отношения между акторами часто бывают больше похожими на сотрудничество, чем на конкуренцию [98].

Например, различные виды конкуренции приведены ниже в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Типы взаимодействия акторов

Актеры-акцепторы	Актеры-производители (генераторы продукта)		
	Много	Несколько	Один
Много	Двухсторонняя полиполия	Олигополия	Монополия
Несколько	Олигопсония	Двухсторонняя олигополия	Монополия, ограниченная олигопсонией
Один	Монопсония	Монопсония, ограниченная олигополией	Двухсторонняя монополия

Сложность конкурентных систем часто превышает порог, до которого строится точная математическая теория. Поэтому неудивительно, что сколь угодно универсальных методов построения математических моделей многосвязных нелинейных систем не существует. Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Наиболее основные из них [111, 113]:

- адекватность (соответствие модели своему оригиналу);
- объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);
- простота (не засоренность модели второстепенными факторами);
- чувствительность (способность модели реагировать на изменение на-

чальных параметров);

– устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);

– универсальность (широта области применения).

Математическая модель нетождественна самому объекту, а является его приближенным отражением. Говоря об объективности, следует иметь в виду, что никакая отдельно взятая модель не может вполне правильно отразить все свойства сложной действительности. Поэтому формализация задачи проводится наряду с принятием некоторых предварительных условий, предположений, ограничений. Стремление к простоте модели продиктовано ограниченными возможностями вычислительной техники и экономии временных ресурсов при исследовании модели. Практическое значение модель приобретает тогда, когда ее изучение имеющимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. Требования чувствительности и устойчивости являются отражением объективных характеристик динамических систем. Одна и та же математическая модель может применяться для исследования задач различного содержания. Это свойство и называется универсальностью [80, 84].

Моделирование – циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития [80, 84, 106].

Математических моделей, описывающих конкурентные процессы, не так уж и много, но т. к. большинство моделей универсальны, то имеется достаточный их набор, со своими преимуществами и своими недостатками. Данные модели не были разработаны непосредственно для решения технических задач, но могут применяться и достаточно успешно

использоваться в этой области, равно как и в тех, для которых они были созданы изначально.

Отметим одну из простейших конкурентных моделей – модель Питера Ланкастера, которая первоначально была создана для описания процесса противоборства двух армий [97, 119]. Данная модель является максимально упрощенной моделью борьбы двух противников (двух армий, двух конкурентов).

Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y – это численности противостоящих армий. Модель имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -by, \\ y' = -ax. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь a – мощность оружия армии x , b – мощность оружия армии y . В данной модели предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). x' – производная по времени t , т. е. скорость изменения количества x солдат первой армии, y' – аналогично для другой армии.

Это – жесткая модель, которая допускает точное решение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad axdx = bydy, \quad ax^2 - by^2 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рисунок 2.1).

По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

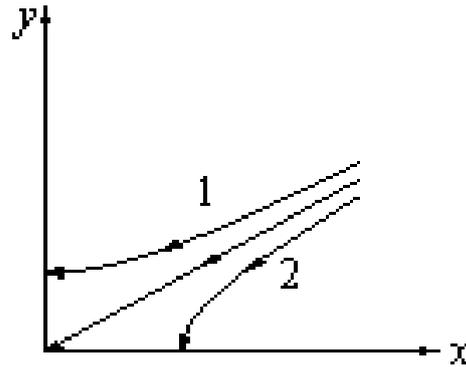


Рисунок 2.1 – Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$.

Из этой модели можно сделать следующий вывод: для борьбы с вдвое более многочисленным противником необходимо в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным – в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Ясно, однако, что данная модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять ее к реальной ситуации. Исследуем, что изменится в выводе, если модель будет несколько иной, и точный вид этой зависимости может быть неизвестен. В этом случае речь идет о системе:

$$\begin{cases} x' = -b(x, y)y, \\ y' = -a(x, y)x, \end{cases} \quad (2.3)$$

которая уже не решается явно.

Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, не зная точно явного вида функций a и b . В этой ситуации принято говорить о мягкой модели – модели, которую возможно модифицировать (за счет выбора функций a и b в данном примере).

Общим выводом в данном случае является утверждение о структурной устойчивости исходной модели [40] : изменение функций a и b изменит описывающие кривые на плоскости (x, y) (которые уже не будут гиперболами и

разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Эту модель, тем не менее, опасно применять к конкретной ситуации, т. к. она не учитывает многих дополнительных факторов, присущих реальным военным действиям, но в целом она имеет предпосылки, из которых вытекают другие математические модели конкурентных процессов, более реалистичные и учитывающие большее количество параметров.

Простейшая модель роста (популяции вида, экономической прибыли) была предложена в XVIII веке и часто называется по имени создателя моделью Мальтуса или мальтузианской моделью [102, 113].

Модель состоит всего из одного уравнения и обычно записывается следующим образом:

$$x' = ax, \quad (2.4)$$

где $a > 0$ – коэффициент прироста;

x – численность вида или величина дохода.

Данная модель ведет к экспоненциальному (очень быстрому) росту x с течением времени. Естественно, что эта модель является весьма упрощенной. Рост фазовых координат технической системы, также как численности популяции или прибыли, всегда ограничен различными факторами: ресурсами, политикой, эпидемиями болезней и т. д. Тем не менее, в некоторых случаях модель оказывается вполне приемлемой. В таких обстоятельствах естественной структурой становится монополия.

Так например, на рынке операционных систем некоторое время наблюдалась монополия. Данную ситуацию можно на конечном отрезке времени промоделировать с помощью вышеописанной модели Мальтуса, т. к. количество компьютеров постоянно растет, равно как и количество пользователей, а конкуренции практически не было.

Тем не менее, в любой отрасли и сфере процесс, в конечном итоге,

приходит к насыщению. Модель Мальтуса уже будет не применима к данной ситуации, поэтому в нее внесены нелинейные поправки. Жесткая модель Мальтуса заменена мягкой [63] моделью:

$$x' = k(x)x. \quad (2.5)$$

Простейшим примером является выбор $k(x) = a - bx$, что приводит к логистической модели (рисунок 2.2):

$$x' = ax - bx^2. \quad (2.6)$$

Данное уравнение называется уравнением Ферхюльста или логистическим уравнением. Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Тогда:

$$x = \frac{x_0 a e^{at}}{a - bx_0 + bx_0 e^{at}}. \quad (2.7)$$

Выбором системы единиц x и t можно превратить коэффициенты a и b в 1. Однако, выводы остаются справедливыми (с точностью до числовых значений констант) и при любых значениях коэффициентов a и b и даже для более широкого класса моделей с различными (убывающими с x) функциями $k(x)$. Иными словами, дальнейшие выводы относятся ко всей мягкой модели, а не к специальной жесткой логистической модели [71, 84].

На рисунке 2.2 слева изображен график функции $k(x)x$, положительной между точками A и B . В центре изображено векторное поле на изображающей всевозможные состояния системы оси x . Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках A и B скорость равна нулю: это стационарные состояния. Между A и B скорость положительна (количество продаж растет), а за точкой B

– отрицательна (количество продаж убывает). Справа изображена результирующая зависимость продаж от времени при разных начальных условиях [71, 79].

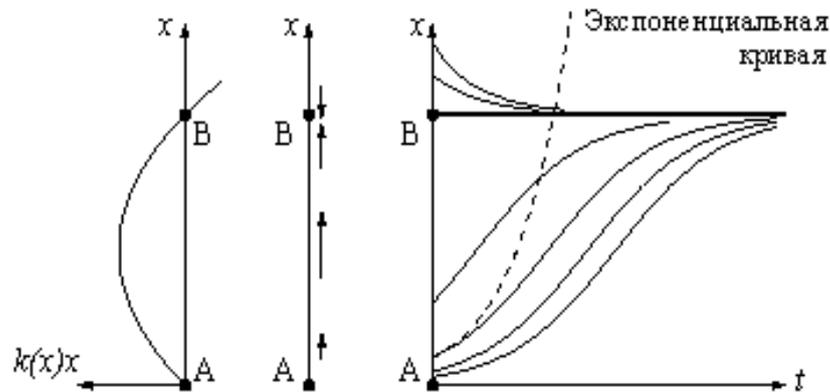


Рисунок 2.2. – Логистическая модель

Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим B .

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи A она очень близка к модели Мальтуса (мальтузианской модели). Но, при достаточно больших x (порядка $1/2$ при данном выборе коэффициентов), наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рисунке 2.2 пунктиром): вместо ухода x на бесконечность он приближается к стационарному значению B .

Следовательно, еще раз подтверждается универсальность математических моделей, которые можно использовать как в технике и биологии, так и в демографии и экономике [22].

В 1925 году Альфред Лотка и затем в 1926 г. Вито Вольтерра предложили, независимо друг от друга модель «хищник – жертва». Основываясь на базе этой модели, были созданы многочисленные ее модификации, в частности модель межвидовой конкуренции, когда два или более вида борются за один и тот же ресурс [12, 13, 16, 23, 29].

Стандартный анализ конкуренции между двумя видами, проводившийся

изначально в работах Гаузе, Лотки и Вольтерра [67] начинается с записывания двумерной динамической модели конкурентных взаимодействий в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - bx - cy), \\ \frac{dy}{dt} &= y(e - fx - gy).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Если динамическая система имеет нетривиальное равновесие, то возможны два случая, при которых это равновесие будет устойчивым, либо неустойчивым [41].

Необходимое и достаточное условие для устойчивости конкурентного равновесия состоит в том, чтобы произведение, характеризующее внутривидовые взаимодействия, было больше произведения аналогичных величин для межвидовых взаимодействий: $bg > cf$.

В противоположность моделям межвидовой конкуренции в популяционной динамике большую роль играют модели мутуализма (симбиоза). В мутуализме между двумя видами взаимоотношения выгодны для развития обоих видов. В математическом отношении мутуализм между двумя видами описывается тем же выражением, что и межвидовая конкуренция $a_{ij}x_i x_j$, но при $a_{ij} > 0$, $i = j$ [19].

Рассмотрим наиболее общую динамическую систему:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\tag{2.9}$$

где функция F_i имеет непрерывные производные по x_j и $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (см. также обобщенную модель на рисунке 1.7).

Применяя разложение Тейлора для каждой из функций F_i , запишем

систему в виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*). \quad (2.10)$$

Введя обозначения $a_{ij} = \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j}$, приходим к следующей системе:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - x_j^*), \quad i = 1 \dots n. \quad (2.11)$$

Выделим теперь в системе член, отвечающий за внутривидовую конкуренцию. Рассмотрим это на примере трехмерной динамической системы:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 [a_{11}(x_1 - x_1^*) - a_{12}(x_2 - x_2^*) + a_{13}(x_3 - x_3^*)], \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 [a_{21}(x_1 - x_1^*) - a_{22}(x_2 - x_2^*) + a_{23}(x_3 - x_3^*)], \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3 [a_{31}(x_1 - x_1^*) - a_{32}(x_2 - x_2^*) + a_{33}(x_3 - x_3^*)]. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из этой системы видно, что классические логистические члены возникают при $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$.

Известны различные модификации модели Лотки-Вольтерра, учитывающие в ней действие дополнительных регуляторных механизмов [49]. Например, модели системы «хищник – жертва» с эффектом насыщения, когда с ростом численности жертв, скорость их потребления хищниками и скорость прироста числа хищников стремились к некоторой конечной величине.

Рассмотрим, например, модификацию модели, связанную с наличием третьего конкурирующего вида, который условно назовем «суперхищниками». Она является прототипом для предлагаемой модели вида II (рисунок 1.3). По условию, будем считать, что суперхищники могут питаться двумя другими видами [30, 34, 35].

Пусть x , y и z – число жертв, хищников и суперхищников, соответственно. Динамика сосуществования этих трех популяций будет описываться системой нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x' = (a - by - cz)x, \\ y' = (dx - e - fz)y, \\ z' = (gx + hy - m)z, \end{cases} \quad (2.13)$$

где a – скорость естественного прироста жертв;
 b – коэффициент потерь жертв от хищников;
 c – коэффициент потерь жертв от суперхищников;
 d – коэффициент зависимости скорости размножения хищников от количества пищи (численности жертв);
 e – естественное вымирание хищников, лишенных пищи;
 f – коэффициент потерь хищников от суперхищников;
 g – коэффициент зависимости скорости размножения суперхищников от количества пищи (численности жертв);
 h – коэффициент зависимости скорости размножения суперхищников от количества пищи (численности хищников);
 m – естественное вымирание суперхищников, лишенных пищи ($a, b, c, d, e, f, g, h, m > 0$).

В рассматриваемой модифицированной модели в результате численного моделирования выявлены несколько вариантов динамики популяций [57].

2.1.2 Особенности исследования конкуренции акторов в рамках нелинейной модели

Основной целью данной части работы является исследование и моделирование конкурентных процессов с помощью математических моделей. Для того, чтобы анализ был достоверным, а исследования – позитивными,

модель была наполнена соответствующими данными. Для сбора статистики и учета вероятности был написан программный продукт, в результате работы которого были получены параметры модели.

При выполнении анализа предметной области было выяснено, что моделей, описывающих конкурентные процессы, не много, и они не всегда отвечают необходимым требованиям. Однако, проведенные исследования показали, что математические модели являются зачастую универсальными, пригодными для применения в различных областях: технике, биологии, демографии и экономике.

Для выполнения поставленных задач была подробно исследована математическая модель Лотки-Вольтерра, принятая в качестве базовой, и создана новая модель, непосредственно соответствующая описанию конкурентных процессов в терминологии "производитель-потребитель(или посредник)". Некоторые технические объекты, описываемые такой моделью приведены в подразделе 1.1, в частности на рисунке 1.2 и 1.3.

В процессе анализа конкурентных процессов были проведены:

- анализ современного состояния проблемы конкурентных отношений в экономике, технике, экологии;
- анализ используемых математических моделей для описания конкурентных процессов.

Последующие разделы данной главы посвящены:

- исследованию модели Лотки-Вольтерра как базовой;
- разработке расширенной модифицированной модели Лотки-Вольтерра;
- исследованию модели «производитель – посредник» и ее модификации;
- анализу полученных результатов.

2.2 Расширение нелинейной модели Вольтерра на множество акторов и схем их взаимодействия

2.2.1 Анализ базовой модели конкуренции

Рассмотрим подробнее базовую модель в исторически устоявшихся терминах, независимо от природы описываемого объекта.

Пусть на некоторой замкнутой территории обитают два вида:

вегетарианцы-жертвы x , питающиеся подножным кормом, имеющимся в избытке, и хищники y , охотящиеся на жертв [22].

Проанализируем полученную нелинейную систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x). \end{cases} \quad (2.14)$$

Рассмотрим стационарные, т. е. не зависящие от времени, состояния системы. Если численность популяции постоянна, ее производная по времени равна 0:

$$\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y), \\ 0 = -y(\gamma - \delta x), \end{cases} \quad (2.15)$$

откуда:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.16)$$

Доказано, что начало координат является особой точкой типа седло. Фазовые траектории вблизи этой особой точки ведут себя как гиперболы и направлены против часовой стрелки [28].

Рассмотрим стационарную точку (x_2, y_2) . Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

вблизи нее имеет корни $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha\chi}$.

Корни характеристического уравнения чисто мнимые, следовательно, особая точка – центр. Вблизи особой точки фазовые траектории представляют собой эллипсы. Численности популяций испытывают не совпадающие по фазе колебания [75].

Полученная зависимость согласуется с экспериментальными данными. Однако модель не является асимптотически устойчивой: при скачкообразном изменении числа особей в одной из популяций (например, из-за миграции животных, деятельности человека или иных причин, не учтенных в модели) колебания навсегда изменят свой характер, система перейдет с одной фазовой траектории на другую. Кроме того, особая точка типа центр не является грубой, т. е. при введении в структуру модели даже малых поправок, она может изменить свой характер.

2.2.2 Модификация базовой модели конкуренции

Рассмотрим теперь ситуацию, когда два вида потребляют один и тот же ресурс, что вполне применимо для моделирования ситуации, при борьбе акторов – конкурентов за ресурс технической системы [29], или увеличение спроса у пользователей на производимый продукт или сырье. Динамика "спроса" определяется следующей системой:

$$\begin{cases} N_1' = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ N_2' = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1). \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь N_i – численность i -го вида;

r_i – коэффициент увеличения спроса i -го конкурента;

β_i – коэффициент, характеризующий производственные факторы

конкурента;

α_i – коэффициент, описывающий влияние со стороны другого конкурента.

Все коэффициенты положительны.

Из вышеприведенной системы уравнений следует, что система имеет следующие особые точки:

– точка 1: $N_1 = 0$, $N_2 = 0$;

– точка 2: $N_1 = 0$, $N_2 = \frac{r_2}{\beta_2}$;

– точка 3: $N_1 = \frac{r_1}{\beta_1}$, $N_2 = 0$;

– точка 4: $N_1 = \frac{r_2\alpha_2 - \beta_2r_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$, $N_2 = \frac{r_1\alpha_1 - \beta_1r_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$.

Если бы второй конкурент отсутствовал (последнее слагаемое первого уравнения системы), то динамика первого конкурента описывалась бы обыкновенным логистическим уравнением. Это значит, что при большой начальной численности состояние N (размер популяции) убывает, а при малой возрастает, пока не достигнет величины r_1/β_1 . На координатной плоскости такая вырожденная система соответствует оси N_1 ($N_2 = 0$). Фазовые траектории направлены к особой точке 3. Следовательно, в случае отсутствия первого конкурента, фазовые траектории направлены по оси N_2 к точке 2. По смыслу задачи величины $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$. Поэтому особая точка 4 должна находиться в первой четверти координатной плоскости. Возможны две ситуации:

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 > 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2r_1 > 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1r_2 > 0;$$

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2r_1 < 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1r_2 < 0.$$

В противном случае особая точка лежит за пределами первой четверти и не представляет интереса.

В работе [106] проведен анализ данных особых точек, который является достаточно громоздким. Поэтому проведем анализ поведения фазовых траекторий следующим способом: найдем особые направления, т. е. линии, на которых производные обращаются в ноль

$$\begin{cases} N_2 = \frac{r_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1, \\ N_2 = \frac{r_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Теперь определим знаки производных в различных частях первой четверти координатной плоскости.

$$N_1' > 0: N_2 < \frac{r_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1, \quad (2.20)$$

$$N_2' > 0: N_2 < \frac{r_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_2. \quad (2.21)$$

В [67] рассмотрен случай, когда в системе имеется только три особые точки. Возможны две ситуации:

$$\frac{r_1}{\alpha_2} > \frac{r_2}{\beta_2} \text{ и } \frac{r_1}{\beta_1} > \frac{r_2}{\alpha_1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{r_1}{\alpha_2} < \frac{r_2}{\beta_2} \text{ и } \frac{r_1}{\beta_1} < \frac{r_2}{\alpha_1}. \quad (2.23)$$

Можно сделать вывод, что особая точка 2 является седлом, т. к. по

некоторым направлениям фазовые траектории направлены к этой точке, а по некоторым направлениям – от нее. Особая точка 3 является устойчивым узлом, т. к. по всем направлениям фазовые траектории входят в нее. Особая точка 1 – неустойчивый узел, т. к. все фазовые траектории выходят из этой точки. При определенном соотношении параметров узлы могут стать вырожденными.

Характер поведения фазовых траекторий соответствует результатам качественного анализа. Если в системе в начальный момент времени существовали оба конкурента, то при любом соотношении их численностей с течением времени конкурент 2 исчезнет, и останется только конкурент 1 со стационарной численностью r_1/β_1 . Эта же численность установится и в том случае, если в начальный момент времени в системе был только второй конкурент.

Если в начальный момент времени существовал только второй конкурент, то спрос будет меняться по логистическому закону, пока не достигнет величины r_2/β_2 . Однако, полученный спрос не является устойчивым.

Теперь особая точка 3 является седлом, а особая точка 2 – устойчивым узлом. Особая точка 1, как и прежде – неустойчивый узел. При данном соотношении параметров устойчивым является состояние, когда в системе имеется только второй конкурент.

Теперь рассмотрим случай, когда особая точка 4 лежит в первой четверти. Вновь возможны две ситуации при различных соотношениях параметров. Можно сделать вывод, что особые точки 2, 3 – устойчивые узлы, особая точка 1 – неустойчивый узел, особая точка 4 – седло.

В зависимости от соотношения начальных численностей в системе выживает один из конкурентов. Ситуация, когда в системе сосуществуют оба конкурента с постоянным спросом, является теоретически возможной, но практически крайне маловероятной. Дело в том, что, во-первых, это состояние (седло) является крайне неустойчивым, т. е. сколько угодно малое изменение

спроса на продукцию одного конкурента по причинам, которые не учитываются в данной модели, приведет с течением времени к переходу системы в одну из узловых точек. Во-вторых, в данное состояние система придет только в том случае, когда ее начальному состоянию соответствовала точка фазовой плоскости, лежащая на одном единственном особом направлении, ведущем к седловой особой точке. Вероятность таких начальных состояний фактически равна нулю.

В последней из возможных ситуаций точка 4 – устойчивый узел, особые точки 2, 3 – седла. При данном соотношении параметров в системе устанавливается устойчивое стационарное состояние, при котором оба вида сосуществуют. Рассмотренная простейшая модель конкуренции проявляет большое разнообразие возможных решений.

2.3.2 Инструментарий, использованный для исследования динамики математических моделей

Результатом вышеприведенного анализа было использование базовой модели Лотки-Вольтерра, ее теоретическое исследование и переход от изначальной модели к ее расширенной модификации, более соответствующей динамике конкурентных процессов.

Модель «производитель – посредник» так же, как и базовая модель Лотки-Вольтерра, представляет собой систему дифференциальных уравнений. Для ее исследования был выполнен анализ ее решений с различными коэффициентами и начальными значениями переменных, построены графики, характеризующие ее поведение.

Не составляет проблемы разработать приложение, позволяющее анализировать систему, строить графики зависимостей и делать соответствующие выводы. Однако, данное решение не является оптимальным, т. к. гораздо рациональнее использовать уже существующее математическое

программное обеспечение. Для упрощения и увеличения темпов исследований может быть использован любой современный математический пакет, например, Mathcad, обладающий всеми необходимыми для этого функциями, зарекомендовавший себя на рынке математических пакетов для инженерных расчетов, и способный позволить провести визуализацию и необходимый анализ системы. В данной работе использован его свободно распространяемый аналог – SMath Studio.

Как уже отмечалось выше, полноценное исследование моделей невозможно без наполнения их соответствующими информационными данными. Поэтому для решения этой важной задачи был разработан программный продукт, обрабатывающий исходную информацию с помощью методов теории вероятности и математической статистики и преобразовывающий данные в виде, необходимом для их помещения в модель в качестве параметров a , b , c , d .

2.3 Численный анализ модифицированной нелинейной модели Вольтерра

2.3.1 Численный анализ устойчивого развития при солидарных отношениях двух акторов

Возьмем за основу исходную модель Лотки-Вольтерра. Рассмотрим первое уравнение, которое отображает изменение численности "жертв" (в терминах экологии это особи, которые питаются подножным кормом и подвергаются истреблению "хищниками"):

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by). \quad (2.24)$$

Для данного уравнения x – количество жертв, a – коэффициент прироста, b – коэффициент убыли жертв при встрече с хищниками, dx/dt – изменение

численности жертв на единицу времени.

Рассмотрим второе уравнение, отображающее изменение количества хищников (которые питаются только лишь жертвами, и количество которых зависит от частоты встреч с ними):

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - dx). \quad (2.25)$$

Для данного уравнения y – количество хищников, c – коэффициент убыли хищников (от бескормицы), d – коэффициент, отображающий, как часто встреча хищника с жертвой заканчивается трапезой.

Изначальная система Лотки-Вольтерра выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = -y(c - dx). \end{cases} \quad (2.26)$$

Взяв за основу базовую модель конкуренции двух видов, изменим ее. В результате получим расширенную модифицированную модель, которая будет характеризовать конкурентные процессы в широком классе систем.

Классической ситуацией является наличие двух качественно различных классов акторов. В экономических приложениях это – «производители» и «посредники» или «потребители». Аналогичной моделью для технических систем, в первом приближении, описывается конкуренция за ресурс между генерирующей подсистемой и подсистемой защиты и восстановления в аварийной ситуации. Не нарушая общности, для начального формирования модели пусть имеется один «производитель» и один «посредник». Опишем производителя, подобрав все характерные параметры, и составив уравнение динамики. Изменение состояния производителя в единицу времени dx/dt находится в левой части. Исторически терминология при описании данной модели заимствована из экологии или экономики, поэтому состояние x будем

называть "изначальное количество прибыли, полученное от определенного количества продаж", a – коэффициент "прироста прибыли". Естественно, учитываются издержки на производство, которые прямо пропорциональны объему произведенного товара (ограничимся классической ситуацией, не описывающей производство интеллектуальных продуктов, которые создаются один раз и продаются много раз). Они отражаются в произведении коэффициента b на количество прибыли от произведенного товара, которая является следствием количества проданного товара. Таким образом, производитель моделируется с помощью логистического уравнения (оно же уравнение Ферхюльста, рассматриваемое в первом подразделе), что лишний раз доказывает универсальность математических моделей для разных областей науки:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx). \quad (2.27)$$

Опишем уравнение динамики второго актора – "посредника/потребителя" с помощью следующих рассуждений. Его прибыль в единицу времени dy/dt находится в левой части. Естественно, что если значение будет отрицательным, то вместо прибыли актор будет иметь убытки, аналогично с хищниками, которые питаются жертвами и вымирают от бескормицы в системе Лотки-Вольтерра. d – коэффициент, отображающий прибыль на перекупке или оказании услуг. В любом случае прибыль посредника-потребителя зависит от количества товара, выпущенного производителем, поэтому в данном уравнении также присутствует переменная x – отражающая эту зависимость. Таким образом, уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \quad (2.28)$$

Как видим, это уравнение полностью совпадает с уравнением, описывающим хищников из модели Лотки-Вольтерра, тем не менее, оно приобретает другой смысл, формально не меняясь, и отображает ситуацию на рынке товаров и услуг, а также взаимодействие подсистемы-генератора с подсистемой защиты и восстановления.

Таким образом, получили модифицированную расширенную математическую модель, отличающуюся от базовой (Лотки–Вольтерра) и описывающую конкурентные процессы, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x(a - bx), \\ y' = y(-c + dx). \end{cases} \quad (2.29)$$

Полученную модификацию модели Лотки-Вольтерра будем называть моделью «производитель – посредник/потребитель» [52]. Она является лишь начальной отправной точкой для дальнейших исследований и может быть модифицирована и доработана, по аналогии с моделью Лотки-Вольтерра. В работе далее исследуется текущая модель, а также ее модификация, в которой добавляется еще один производитель – z :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx), \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx + gz), \\ \frac{dz}{dt} = z(e - fz). \end{cases} \quad (2.30)$$

2.3.2 Численный анализ устойчивого развития системы при конкурентных отношениях нескольких акторов

Изначально запишем систему уравнений данной модели (2.29). Исследования проводились в среде SMath Studio. Зададим исходные значения: t – время наблюдения, n – количество точек на графике, a , b , c , d –

соответствующие коэффициенты уравнений. Ее решением будет функция от данных параметров. Переменные задаются в виде x_0 – это x , и x_1 – это y . Решения и их графики сделаны для начальных условий, которые задаются в виде матрицы – совокупности векторов $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$.

Правая часть системы уравнений (2.29) задается в виде:

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot (a - b \cdot x_0) \\ x_1 \cdot (-c + d \cdot x_0) \end{bmatrix}.$$

Решаем систему с помощью функции, реализующую метод Рунге-Кутты четвертого порядка [91].

Таким образом, на графике (рисунок 2.3) получены 10 кривых, характеризующих поведение модели при данных начальных условиях и значениях параметров.

На этом графике по оси абсцисс будет показано изменение прибыли актора–производителя, а по оси ординат – изменение прибыли актора–посредника.

Исследуя график, получаем следующие выводы: при $x = 0,6$ прибыль актора–посредника практически неограниченно растет, а график прибыли производителя достаточно быстро выходит на стационар.

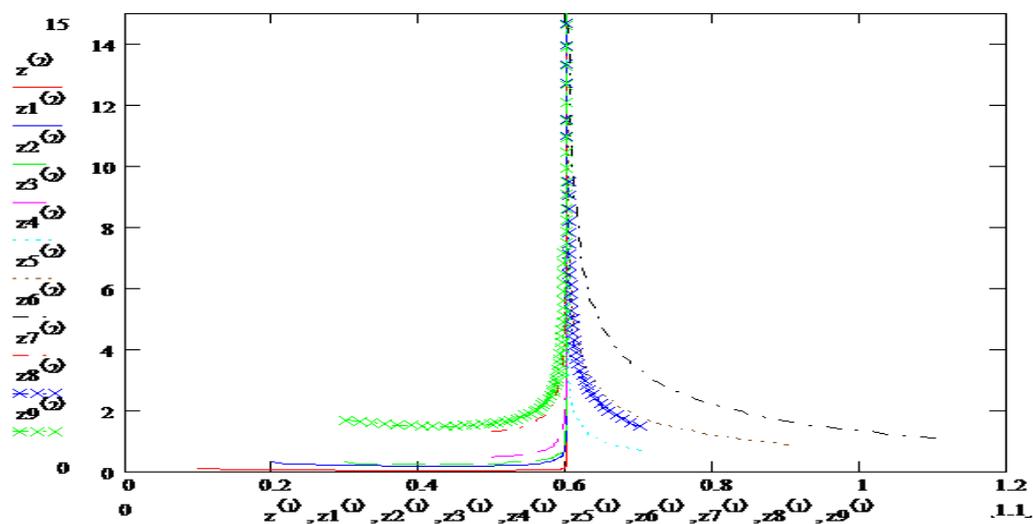


Рисунок 2.3 – Зависимость прибыли актора–посредника от прибыли производителя для параметров $a = 0,3$; $b = 0,5$; $c = 0,3$; $d = 0,7$

Исследуем теперь прибыль актора–посредника во времени $y(t) = z^{(2)}$ ($z^{(0)}$) для параметров $a = 0,3$; $b = 0,5$; $c = 0,3$; $d = 0,7$. Прибыль актора–посредника очень быстро увеличивается за достаточно короткий интервал времени. Прибыль производителя остается постоянной на всем временном интервале.

Рассмотрим теперь график зависимости прибыли актора–посредника от производителя (рисунок 2.4). На данном графике при данных начальных условиях прибыль посредника равна нулю в точке с абсциссой 0,35. Данная точка является стационарной и представляет собой устойчивый узел.

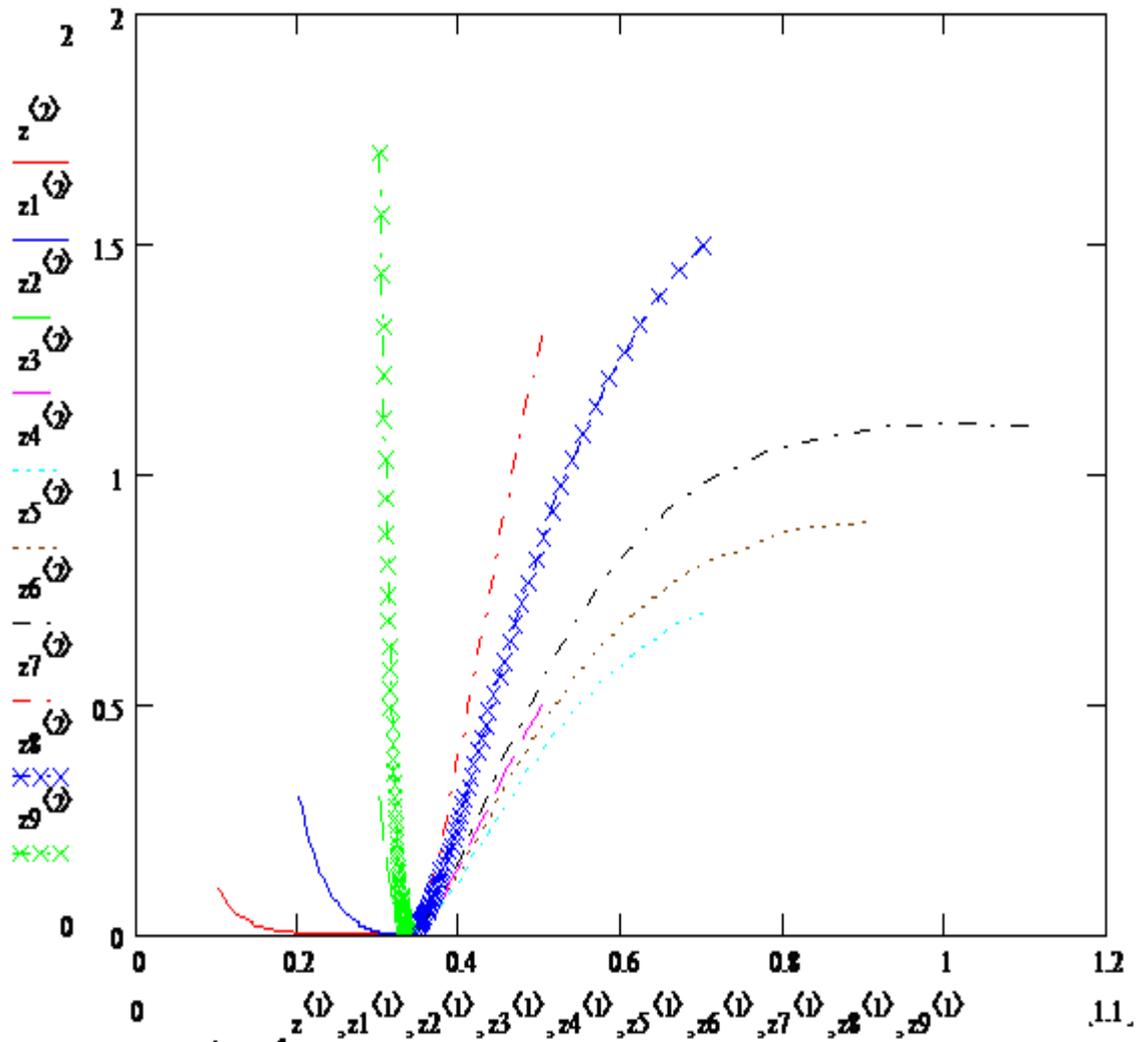


Рисунок 2.4 – Зависимость прибыли актора–посредника от прибыли производителя для параметров $a = 0,1$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,3$

Рассмотрим график зависимости прибыли актора–посредника от времени $z^{<2>}$ ($z^{<0>}$) (рисунок 2.5).

Видно, что в данной области параметров конкуренции процесс выходит на стационар. Прибыль актора–посредника мала и мало зависит от начальных условий.

Остальные результаты для двух и трех акторов при различных значениях параметров приведены в приложении Б.

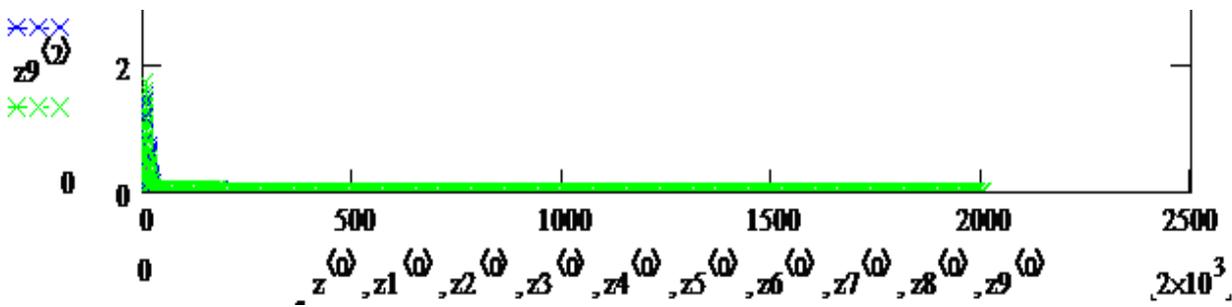


Рисунок 2.5 – Зависимость прибыли актора–посредника от времени $z^{<2>}$ ($z^{<0>}$) для параметров $a = 0,1$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,3$.

2.4 Выводы по разделу

Математические модели конкуренции являются универсальными, применимыми в различных отраслях техники, а также таких науках как демография, биология, экономика. В разделе были получены данные, необходимые для дальнейшей работы по исследованию и модификации математических моделей конкурентных процессов.

Базовая модель конкуренции на основе уравнений типа Вольтерра является структурно неустойчивой, т. е. неадекватно себя ведет при некоторых определенных наборах начальных условий и правых частей. Существует значительное количество модификаций модели типа Вольтерра, не имеющих этого недостатка [40].

На основании имеющейся базовой модели и ее модификации были проведены исследования и получены следующие результаты:

- показана параметрическая устойчивость и структурная неустойчивость базовой модели Лотки-Вольтерра;

- исследования модифицированной модели, описывающей "межвидовую" конкуренцию, показывает невозможность устойчивого развития в рамках базовой модели;

- модифицированная и расширенная базовая модель «производитель – посредник» лучше отображает конкурентные отношения технических систем с защитой или обслуживанием, а также между субъектами экономического рынка. Она описывает устойчивое развитие, по крайней мере, одной из подсистем на большом, однако конечном промежутке времени;

- с использованием открытого математического пакета "SMath Studio" получены графики, наглядно отражающие поведение модели, которые позволяют выполнить полный анализ поведения исследуемых моделей.

Результаты раздела опубликованы в работах автора [52, 91, 93].

3 ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ В МНОГОСВЯЗНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

3.1 Структуризация задачи устойчивого развития для многосвязной линейной модели с конкурентным взаимодействием

Здесь исследуется динамика еще одного варианта общей конкурентной модели (рисунок 1.7) – модели I, которая описывает взаимодействие акторов, описанное в разделе 1.2.

Уравнения общей модели I для i -го актора ($i = 1, 2, \dots, n$) выглядят как (3.1); здесь и в дальнейшем исследованы случаи $n \leq 3$.

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = A_i(I_i - S_i) + Ex_i - Im_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = B_i \left(L_i - \frac{M_i}{P_i} \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

где A_i, B_i – константы;

Y_i и R_i – фазовые переменные;

I_i – функция для i -го актора может быть записана как:

$$I_i = DY_i \cdot Y_i + DL_i \cdot (RR_i - R_i),$$

где DY_i, DL_i, RR_i – константы;

S_i, L_i, Im_i и Ex_i – линейные функции для i -го актора могут быть записаны как:

$$S_i = SY_i \cdot Y_i + SL_i \cdot R_i - CA_i,$$

$$L_i = LY_i \cdot Y_i + LI_i \cdot (R_{\max,i} - R_i),$$

$$Ex_i = E_{0i} + U_i \cdot Y_j + V_i \cdot Y_k,$$

$$Im_i = Z_{0i} + Z_i \cdot Y_i,$$

где $SY_i, SL_i, CA_i, LY_i, LI_i, R_{\max,i}, M_i, P_i, E_{0i}, U_i, V_i, Z_i$ – константы, смысл которых для i -го актора определяется предметной областью.

Отметим, что в настоящее время, для описания взаимоотношений акторов в информационных сообществах [111], в моделях рисунка 1.1 типа (3.1) и их производных, которые рассматриваются в этой главе, Y и R интерпретируются, соответственно как "знания/информация" и "деньги". Здесь все параметры и переменные положительны и согласованы по обозначениям с общей моделью.

Модель для уединенного актора имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A(I - S) + Ex - Im, \\ \frac{dR}{dt} = B \left(L - \frac{M}{P} \right). \end{cases}$$

Для нее функции связей будут, соответственно, равны $Ex = 0$; $Im = 0$.

Введение в изолированную систему фактора связей с помощью функций

$$Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k), Im_i = Im_i(Y_i), i \neq j, k$$

приводит к системе $2n$ уравнений для n акторов:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= A_i [I_i(Y_i, R_i) - S_i(Y_i, R_i) + Ex_i(Y_j, Y_k) - Im_i(Y_i)], \\ \frac{dR_i}{dt} &= B_i \left[L_i(Y_i, R_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right], i, j, k = 1, 2, 3, j, k \neq i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $i, j, k = 1, \dots, n$ – их индексы;

n – общее количество акторов.

Все параметры в правой части (3.2) имеют содержательный смысл, аналогичный описанному для системы (3.1).

В качестве первого приближения рассматриваем линейную модель: функции I, S, L для каждого актора и их связи E, I, m – линейны по всем своим аргументам. После переобозначений система (3.2) приобретает вид:

$$X' = AX + F, \quad (3.3)$$

где вектор $X = (Y_1, r_1, \dots, Y_n, r_n)$;

A – $(2n \times 2n)$ матрица;

F – $2n$ вектор констант.

Матрица A не вырождена. При переносе начала координат в стационарную точку $X^* = -A^{-1}F$ система (3.3) имеет вид:

$$X' = AX, \quad (3.4)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} & r_{i1} & 0 & r_{1n} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{i1} & 0 & \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} & r_{in} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{n1} & 0 & r_{ni} & 0 & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 \\ 0 \\ m_i \\ 0 \\ m_n \end{pmatrix}, \quad a_i, b_i, c_i, d_i, m_i - \text{const},$$

$i = 1, \dots, n$.

Известно, что траектория $X(t)$ устойчива по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое что для любой точки старта из δ -окрестности точки X_0 , т. е. при $\|X_0 - Y_0\| < \delta$, имеем $\forall t > 0 \|X(t) - Y(t)\| < \varepsilon$. Для линейной системы (3.4) задача анализа устойчивости сводится к проверке знака показателя Ляпунова $\text{Re}(\lambda)$, где $\lambda(A)$ – вектор собственных значений (спектр матрицы A): $Au = \lambda u$, $u \neq 0$.

$\exists \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ – система неустойчива; $\forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ – система устойчива; $\exists \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ – возможны циклы и хаос.

Согласно поставленной выше задаче, необходимо выяснить:

- параметры взаимодействий для исследования устойчивой и неустойчивой динамики;
- параметры, при которых отношение частот колебаний ω_1/ω_2 – иррационально, что приводит к появлению аттрактора типа тора.

Исходя из вышеизложенного, модель является системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Отметим, что к классическим аттракторам относятся устойчивые стационарные точки и предельные циклы. Неустойчивость стационара в системе может играть положительную роль (стабильный рост показателей).

Этот случай также рассматривается ниже. К «странным» аттракторам в широком смысле относятся ограниченные притягивающие множества фазового пространства, отличные от точек и циклов. Резонансные торы занимают промежуточное положение в этой иерархии. Но, согласно теории, это – единственный из возможных источников динамического хаоса в линейных системах.

При определенном сочетании констант этой системы дифференциальных уравнений модель демонстрирует хаотическое поведение на отдельных отрезках времени, а в некоторых случаях фазовые траектории выходят на странный аттрактор. Целью настоящего раздела и является исследование фазового портрета данной системы на хаотичность.

Для данных моделей проведен следующий анализ:

- найдены стационарные состояния;
- проведен анализ устойчивости – определены показатели Ляпунова для дальнейшей оценки устойчивости полученных траекторий развития рассматриваемой системы и идентификации типа динамики;
- проведен численный анализ исследуемой системы при различных исходных параметрах, описывающих разнообразные типы взаимодействия

систем (например, когда два актора автономны).

3.2 Выбор и обоснование методов анализа устойчивости многосвязной линейной модели

3.2.1 Аттракторы и качественный анализ линейной динамической модели

А. Пуанкаре [106] предложил сосредоточить внимание не на переходных процессах, а на установившихся режимах, т. е. на асимптотическом поведении решений при $t \rightarrow \infty$. Математическим образом установившихся режимов является притягивающее множество в фазовом пространстве или аттрактор (от английского *to attract* – притягивать). При этом наиболее важными, по мнению А. Пуанкаре, являются качественные особенности аттракторов. В частности, важно, описывает ли аттрактор не меняющиеся во времени переменные, периодические или более сложные режимы. Существенным является число и тип аттракторов, а также множество начальных данных, с которых происходит выход на данный аттрактор. Эти множества называют областями притяжения аттрактора. Они показывают, что огромное количество нелинейных диссипативных систем ведут себя качественно одинаково.

Фазовые траектории в этом случае являются спиралями.

Пусть дано автономное уравнение с одной переменной:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

и известно, что решение $x(t)$ существует и ограничено при $0 < t < \infty$. Тогда, какую бы функцию f не взяли, функция $x(t)$ стремится к состоянию равновесия.

В случае системы двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y)$$

аттрактором также может быть устойчивая особая точка. Однако существует и вторая возможность. Аттрактор в диссипативной системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений может описывать установившееся периодическое движение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = X(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y(t),$$

$$X(t+T) = X(t), \quad Y(t+T) = Y(t).$$

Величина T в этих формулах называется периодом решения. Аттрактор в этом случае называют устойчивым циклом. В фазовом пространстве ему соответствует замкнутая кривая. Других вариантов нет, какие бы функции g и h не использовали.

Отсюда понятно, насколько важным является качественный анализ для моделирования нелинейных явлений. Например, если наблюдается установившийся колебательный процесс в диссипативной системе и периодическое внешнее воздействие отсутствует, то для ее моделирования понадобятся, как минимум, два автономных обыкновенных дифференциальных уравнения. Если наблюдается двухчастотный (при котором, например, одна из переменных может меняться по закону $x(t) = \sin w_1 t \sin w_2 t$) или хаотический режим, то система должна включать не меньше трех уравнений, или быть неавтономной.

Отметим, что с точки зрения устойчивого роста системы, её динамика должна быть неустойчива по Ляпунову, и не колебательной, хотя бы на достаточно длительном временном интервале (в рамках адекватности модели).

3.2.2 Локальный анализ динамической модели

При решении алгебраических уравнений принципиальную роль часто играет удачная замена переменных. Поэтому было бы естественно найти такие замены переменных в дифференциальных уравнениях, которые позволяют представить их в наиболее простом виде. Можно ожидать, что найти одну такую замену во всем фазовом пространстве (глобально) не удастся. Однако, если рассмотреть эту задачу локально, в небольшой окрестности фазового пространства, то можно рассчитывать на успех.

И действительно справедлива теорема о выпрямлении векторного поля. Она утверждает, что есть функция h , осуществляющая отображение некоторой окрестности G точки \tilde{X} в N -мерном фазовом пространстве V' системы, переводящее ее в окрестность точки $\tilde{Y} = h(\tilde{X})$ в фазовом пространстве V системы:

$$\dot{y}_1 = c, \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_N = 0.$$

При этом отображение h и обратное отображение h^{-1} осуществляются дифференцируемыми функциями и являются взаимно однозначными. Такие отображения называются диффеоморфизмами. При этом предполагается, что точка \tilde{X} не является особой. Таким образом, вдали от особых точек все динамические системы локально эквивалентны простейшему уравнению. С помощью замены переменных локально векторное поле может быть «выпрямлено».

Устойчивость особых точек уравнения $\dot{x} = f(x)$ определяется линейным членом, когда соответствующая производная не равна нулю. Это позволяет надеяться на возможность приведения к каноническому виду и в этом случае, что означает возможность классификации. В самом деле, естественно отнести к

одному классу все динамические системы, которые локально можно привести к одному и тому же каноническому виду.

Кроме того, представляет большой интерес анализировать не одно уравнение, а систему уравнений для целого семейства динамических систем:

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

и привести это семейство к каноническому виду в некоторой окрестности обобщенного фазового пространства (переменных и параметров).

При этом очень важной оказывается идея типичности, грубости, или структурной устойчивости. Эта идея родилась в связи с анализом математических моделей радиотехнических систем А. А. Андроном [66] и Л. С. Понтрягиным и получила большое развитие в последующие годы. Смысл этой идеи в том, что при математическом моделировании различных явлений параметры уравнений известны с конечной точностью, а сами уравнения являются приближенными. Поэтому естественно потребовать, чтобы математические модели описывались уравнениями, качественные свойства которых не меняются при небольших возмущениях («шевелении») параметров.

Реализация идеи локального анализа привела к возникновению и развитию таких разделов математики как теория нормальных форм, теория бифуркаций, теория катастроф, играющих важную роль в моделировании динамики технических, экологических и экономических систем.

3.3 Устойчивость стационаров многосвязной линейной модели

3.3.1 Исследование линеаризованной модели делового цикла Кейнса

Для уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удастся провести детальное качественное исследование, – определить все аттракторы, доказать,

что именно к ним траектории сходятся при $t \rightarrow \infty$ и указать, при каких именно начальных данных на какой аттрактор происходит выход. Кратко перечислим необходимые в дальнейшем основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений и рассмотрим несколько моделей, приводящих к уравнению обсуждаемого типа.

Рассмотрим общую модель:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 [64]. Пусть в области G существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка положительно определенная функция $L(\vec{x})$, называемая функцией Ляпунова. Пусть скалярное произведение $W(\vec{x}, t) \equiv (\text{grad}L, \vec{f}(t, \vec{x}))$ удовлетворяет неравенству:

$$W(\vec{x}, t) \leq 0, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in G.$$

Пусть $f(t, 0) = 0$. Используя теорему оценим устойчивость состояния равновесия точки $\vec{x} = 0$. Если дополнительно к этим условиям выполнено неравенство $W(\vec{x}, t) \leq -\vec{W}(\vec{x})$, где $\vec{W}(\vec{x})$ – положительно определенная в G функция, то эта особая точка асимптотически устойчива:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = 0.$$

3.3.2 Условия возникновения хаотической динамики линеаризованной модели Кейнса

Рассмотрим динамическую систему, которая предложена Кейнсом.

Упрощенная модель делового цикла описывается уравнениями (3.1).

Экономическая интерпретация этой модели рассмотрена в Приложении А, и отражает тот простой факт, что превышение спроса на инвестиции над сбережениями приводит к возрастанию дохода, и наоборот; и что, если спрос на деньги выше, чем их предложение, то ставка процента прибыли растет.

Условия, налагаемые на входящие в систему функции и их производные ($I_Y > 0$, $I_R < 0$, $S_Y > 0$, $S_R > 0$, $L_Y > 0$, $L_R < 0$), означают, что инвестиции находятся в прямой зависимости от объема выпуска продукции и в обратной от процентной ставки. Это означает также, что рост национального дохода или процентной ставки будет побуждать население к большим сбережениям, а при условии роста производства продукции или уменьшения процентной ставки спрос на деньги возрастает.

В такой модели предполагается существование положительного равновесия (Y_0, R_0) , которое определяется пересечением кривых $L(Y, R) = L_s$ и $F(Y, R) = 0$. Рассмотрение системы достаточно ограничить локальной областью пространства вблизи равновесия.

Наличие циклов в этой модели первым предположил Торре [72].

Чтобы воспользоваться бифуркационной теоремой Хопфа определим условия существования пары чисто мнимых собственных значений и выяснить, когда равновесие теряет устойчивость. Торре показал, что эти условия выполняются, если в точке равновесия имеет место:

$$\alpha_0 = -\frac{\beta L_R}{F_Y}, \quad F_Y L_R - F_R L_Y > 0, \quad F_Y > 0. \quad (3.5)$$

Поскольку α может принимать любые значения из R_+ , найдется и такое значение, при котором выполняется равенство (3.5). А поскольку $F_Y = I_Y - S_Y$, условие $F_Y > 0$ выполняется.

Известна **Теорема 3.2.** [72] Пусть условия (3.5) выполняются. Тогда в системе (3.1) существуют предельные циклы с центром в точке (Y_0, R_0) (бифуркация Хопфа). Критическое значение бифуркационного параметра α равно α_0 .

Рожденные в результате бифуркации циклы периода $2\pi/\omega(\varepsilon)$ приближенно описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} Y(\varepsilon, t) &= Y_0 + 2\varepsilon\alpha_0 F_R \cos[\omega(\varepsilon)t] + O(\varepsilon^2), \\ R(\varepsilon, t) &= R_0 - 2\varepsilon \{ z_0 \sin[\omega(\varepsilon)t] + \alpha_0 F_Y \cos[\omega(\varepsilon)t] \} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $z_0 = \{ \alpha_0 \beta (F_Y L_R - F_R L_Y) \}^{1/2}$,

ε – параметр разложения по амплитуде, и

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^4), \\ \omega(\varepsilon) &= z_0 + \varepsilon^2 \omega_2 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

где x_2 и ω_2 – константы.

Более того, если x_2 положительно, то периодическое решение будет устойчивым, в случае отрицательного x_2 – неустойчивым.

Рисунок 3.2 иллюстрирует поведение системы. Радиус цикла зависит от параметра бифуркации: при удалении параметра от критического значения радиус растет.

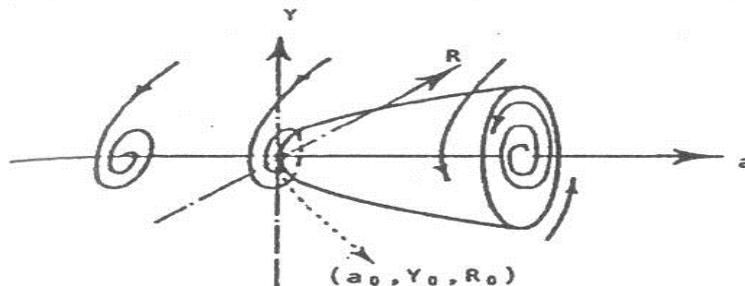


Рисунок 3.2 – Бифуркации циклов в модели Кейнса

Из (3.6) имеем:

$$\delta R(t) = -\alpha \sin[\omega(\varepsilon)t] - \frac{F_Y}{F_R} \delta Y(t) + O(\varepsilon),$$

где
$$\delta R(t) = \frac{\{R(t) - R_0\}}{2\varepsilon}, \quad \delta Y(t) = \frac{\{Y(t) - Y_0\}}{2\varepsilon}.$$

Далее, следуя методике [95], покажем, что взаимодействие между акторами, в которых наблюдаются предельные циклы, может привести к появлению странного аттрактора и, следовательно, возникновению хаоса.

Рассмотрим линейную модель для трех акторов, каждый из которых описывается упрощенными детерминированными уравнениями (3.7):

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = \alpha_i [I_i(Y_i, R_i) - S_i(Y_i, R_i)], \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta_i \left[L_i(Y_i, R_i) - \frac{M_i}{p_i} \right]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Множество точек $\{(Y_i, R_i) | I_i(Y_i, R_i) = S_i(Y_i, R_i)\}$ образуют *IS*-кривую *i*-й экономики; множество точек $\{(Y_i, R_i) | L_i(Y_i, R_i) = \frac{M_i}{p_i}\}$ образуют *LM*-кривую *i*-й экономики.

Уравнения (3.7) представляют собой систему дифференциальных уравнений шестого порядка, которая может быть записана как объединение трех независимых двухмерных систем, обладающих предельными циклами (при соответствующих условиях). Если все три актора являются осциллирующими, общее движение системы (3.7) состоит из движения по трехмерному тору T^3 , который погружен в пространство R^6 .

Введение в изолированные системы фактора связи с помощью функций: $Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k)$, ($i \neq j, k$), $Im_i = Im_i(Y_i)$ приводит к уравнениям (3.8):

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = \alpha_i(I_i(Y_i, R_i) - S_i(Y_i, R_i)) + Ex_i(Y_j, Y_k) - Im_i(Y_i), \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta_i \left(L_i(Y_i, R_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right), \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j, k \neq i. \quad (3.8)$$

Расширенная система (3.8) состоит из трех связанных ограниченных осцилляторов. Как показано Ньюхаусом, Рюэлем и Такенсом, возмущение движения по трехмерным торах может привести к странному аттрактору [108, 114].

Очевидно, что существование странного аттрактора подразумевает хаотичность траекторий. Система (3.8) удовлетворяет условиям теоремы Ньюхауса-Рюэля-Такенса [82]. Таким образом, в модели I было установлено существование странных аттракторов.

Все ранее описанное относится к нелинейным системам уравнения, для которых характерны предельные циклы и странный аттрактор. Но, т. к. система (3.8) линейна с постоянными коэффициентами, то решение для неё ищется в виде $e^{\lambda t} U_t$. Если отношение периодов иррационально, то движение – хаотическое, при этом легко видеть, что две точки в начальный момент времени, лежащие рядом с течением времени, могут оказаться сколь угодно далеко [19]. Выполняется следующее утверждение.

Если все три автономные экономики принадлежат к осцилляторному типу, введение международной торговли может привести к существованию странного аттрактора в объединенной многосвязной системе. Имеем непериодические движения в ограниченной области. Это странный аттрактор,

т. к. не является точкой или циклом.

Лоренц показал [41], что существование хаотических траекторий в соответствующих моделях можно установить численным моделированием.

3.4 Численный анализ линейных многосвязных моделей конкуренции

3.4.1 Численный анализ линеаризованной модели для двух акторов

Исследования проводились в пакете Maxima. В тексте, где это полезно для пояснения рисунков, приводятся фрагменты программ на языке Maxima.

3.4.1.1 Собственные значения описанной выше системы из четырех ОДУ: $\lambda = (-0.54, 0.08+0.31i, 0.08-0.31i, -0.14)$. Стационарная точка системы: $(10.23, 2.28, 0.14, 0.74)^T$. Первая и четвертая λ – характерны для устойчивого узла, вторая и третья λ дают неустойчивый фокус. Фазовый портрет динамических переменных $Y_1 = x_1$ и $Y_2 = x_3$ представлен на рисунке 3.3.

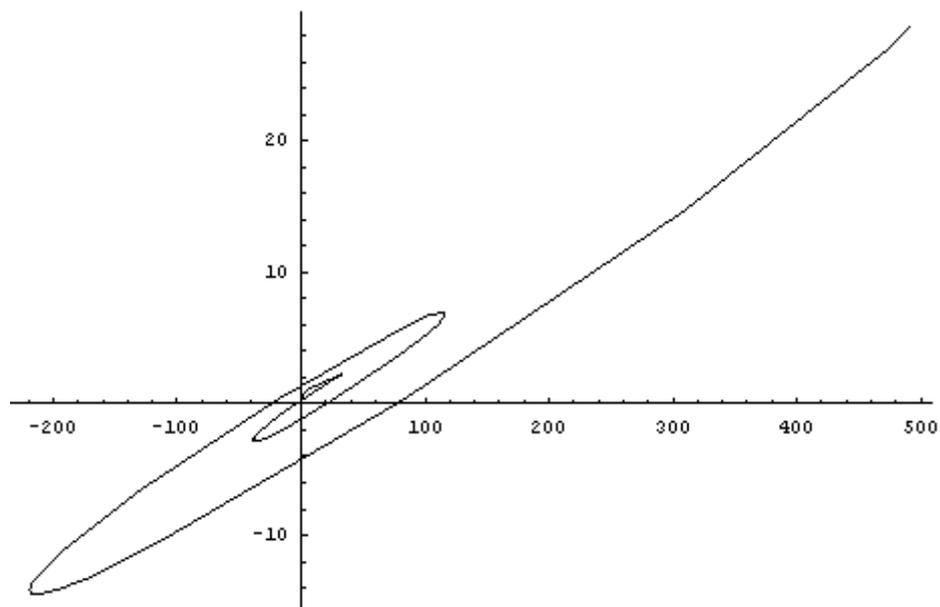


Рисунок 3.3 – Проекция фазового портрета

3.4.1.2 Рассмотрим случай, когда два актора автономны.

$$Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k) = 0,$$

$$Im_i = Im_i(Y_i) = 0.$$

Получили матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} -0.582333 & -0.620756 & 0 & 0 \\ 0.362681 & -0.0514122 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0473676 & -1.28149 \\ 0 & 0 & 0.060808 & -0.00922818 \end{pmatrix}.$$

Рисунок 3.4 – Параметры матрицы для системы без взаимодействия

Вектор свободных членов правой части: $F^T = (0.64, -0.43, 0.33, -0.07)$.

Собственные числа матрицы A (рисунок 3.4): $(-0.32+0.39i, -0.32-0.39i, -0.03+0.28i, -0.03+0.28i)$. Стационарная точка: $(1.17, -0.07, 1.12, 0.22)$.

Первый актор: $\text{Re } \lambda_i < 0$, следовательно, имеем устойчивый фокус (рисунок 3.5), что не желательно с точки зрения устойчивого роста.

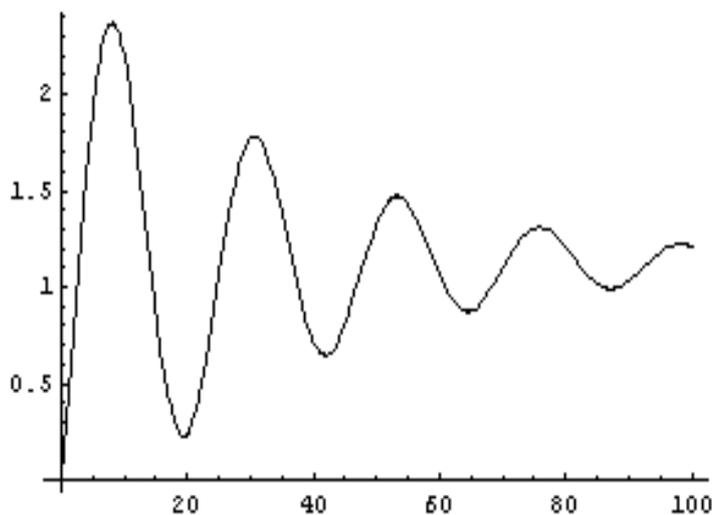


Рисунок 3.5 – Фазовая координата второго актора во времени $Y_2(t)$

Задаем значения λ_i , которые были бы найдены в случае, если бы решались два не связанных уравнения, т. е. это λ_i – собственные значения отдельно взятого актора. Решаем систему, устанавливая связи между акторами.

3.4.1.3 Пусть $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = 1,4123i$ и коэффициенты связи: $\varepsilon = \delta = 0,1$.

Матрица A системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_1) & -\operatorname{Im}(\lambda_1) & \varepsilon & 0 \\ \operatorname{Im}(\lambda_1) & \operatorname{Re}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \operatorname{Re}(\lambda_2) & -\operatorname{Im}(\lambda_2) \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Вектор λ_i для связанной системы получен численно:

$$(-1.0+1.0i, -1.0-1.0i, 0+1.41i, 0+1.41i).$$

На рисунке 3.6–3.8 показаны проекции фазовых пространств, а на рисунках 3.9, 3.10 – временная зависимость решений:

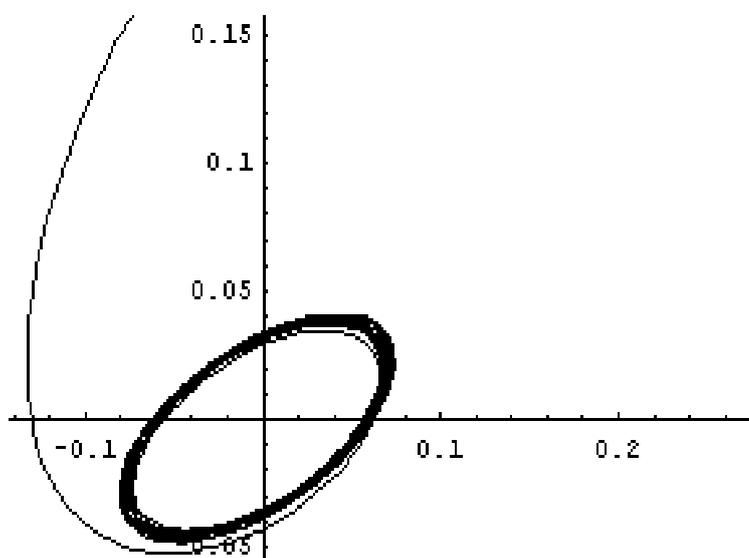


Рисунок 3.6 – Проекция $y_1[t]$, $r_1[t]$ фазового портрета

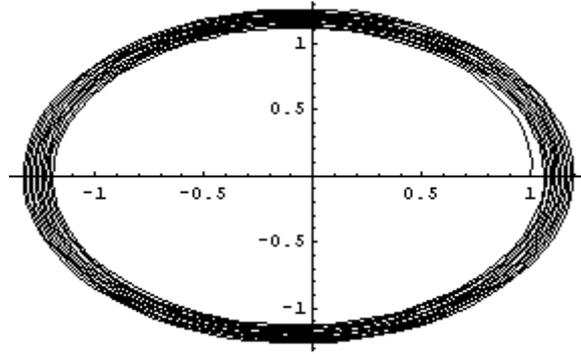


Рисунок 3.7 – Проекция $u_2[t], r_2[t]$ фазового портрета

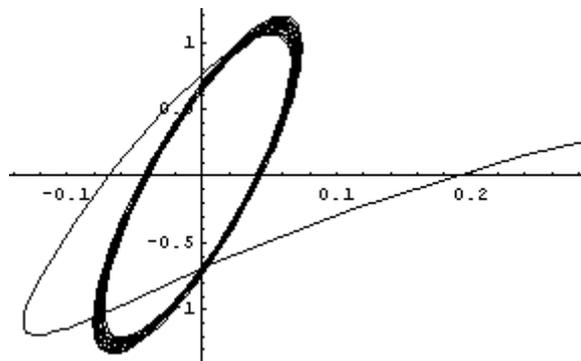


Рисунок 3.8 – Проекция $u_1[t], u_2[t]$ фазового портрета

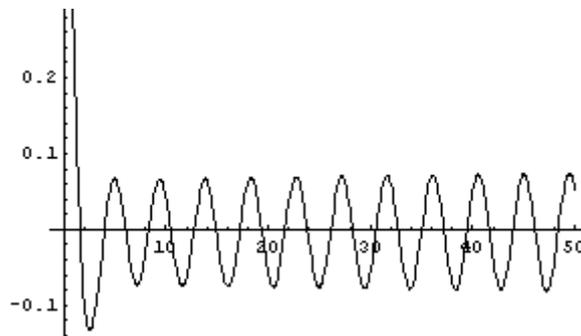


Рисунок 3.9 – Решение $u_1[t]$

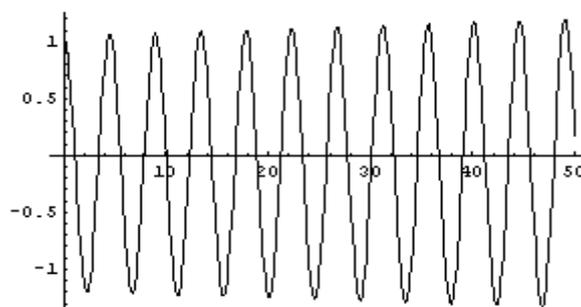


Рисунок 3.10 – Решение $u_2[t]$

3.4.1.4 Пусть теперь $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = \sqrt{2}i$ и коэффициенты связи: $\varepsilon = \delta = 0,1$. Тогда отношение периодов $\frac{\text{Im}\lambda_1}{\text{Im}\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707107$.

Собственные значения данной системы приближенно равны:

$$\lambda \approx (-1-1i, -1+1i, 0-1.41i, 0+1.41i).$$

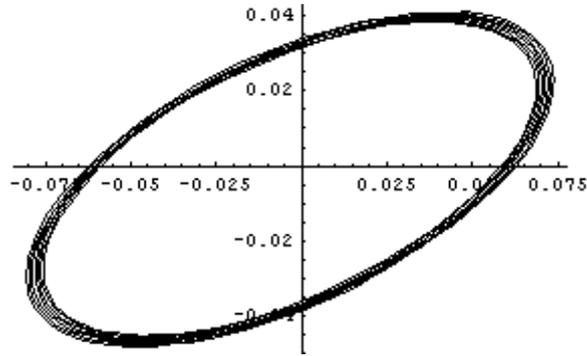


Рисунок 3.11 – Проекция $y_1[t]$, $r_1[t]$ фазового портрета

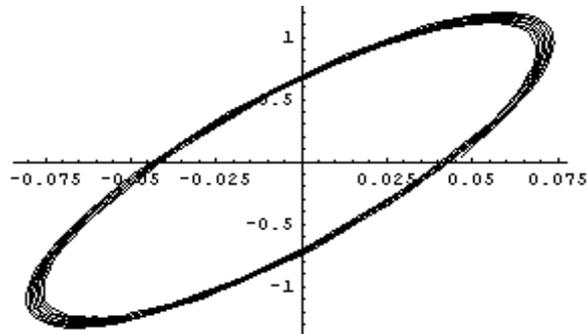


Рисунок 3.12 – Проекция $y_1[t]$, $y_2[t]$ фазового портрета

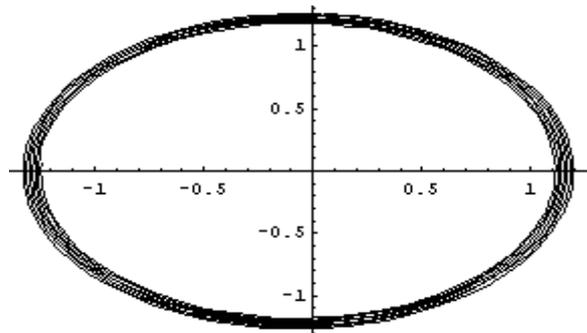


Рисунок 3.13 – Проекция $y_2[t]$, $r_2[t]$ фазового портрета

Анализ собственных значений и графиков на рисунках 3.11 – 3.13 позволяет утверждать наличие тора, который быстро «вырождается» в слабо неустойчивый фокус (почти цикл).

3.4.1.5 Рассмотрим фазовый портрет в случае появления тора из двух «центров», т. е. циклические колебания для двух акторов (проекция фазовых пространств на рисунках 1.14 – 1.16).

Собственные значения: $\lambda = (-1i, +1i, -1.41i, +1.41i)$.

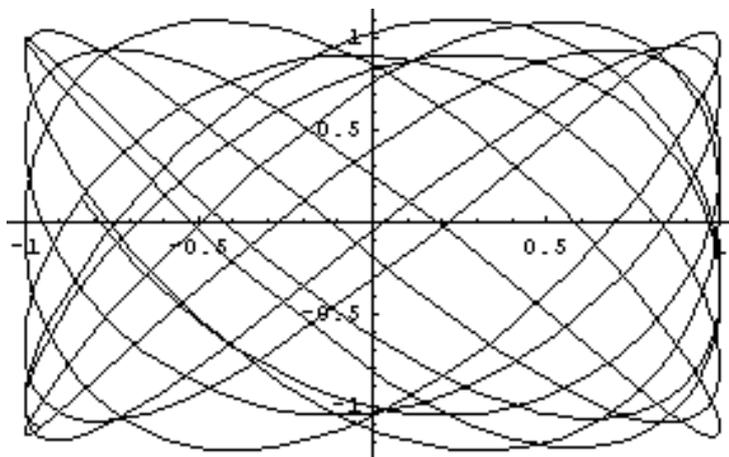


Рисунок 3.14 – Проекция $y1[t], y2[t]$ фазового портрета

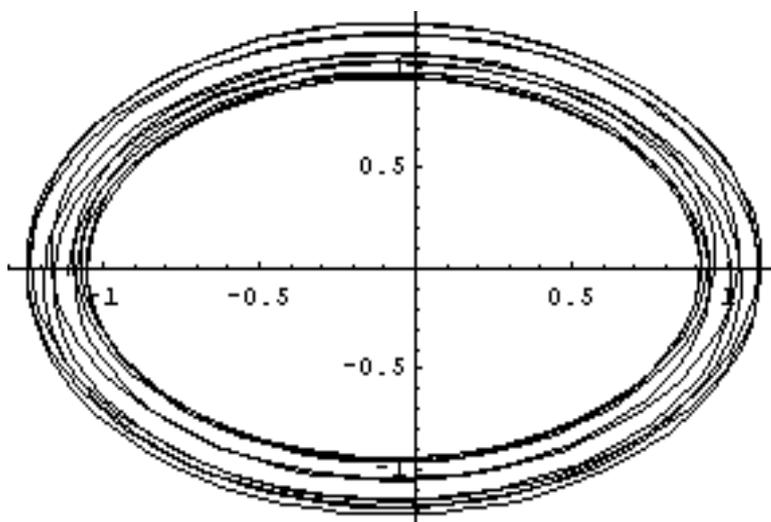


Рисунок 3.15 – Проекция $y1[t], r2[t]$ фазового портрета

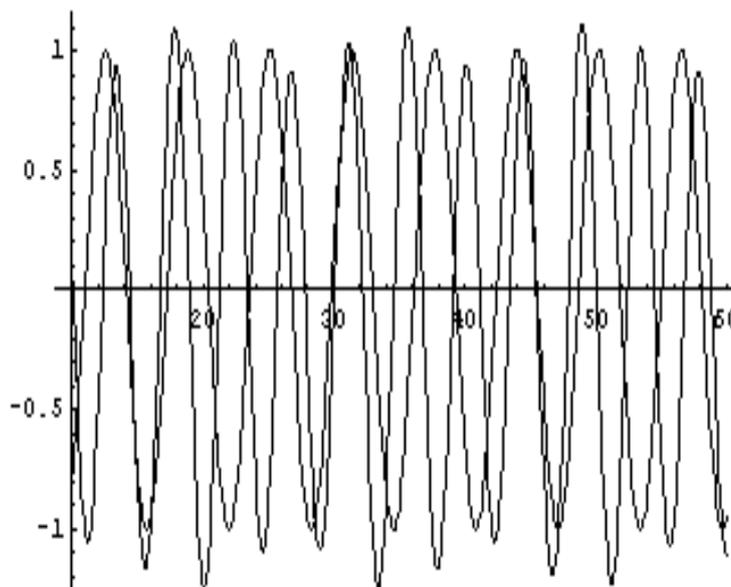


Рисунок 3.16 – Решения $y_1[t]$ $y_2[t]$

3.4.2 Численный анализ линеаризованной модели для трех акторов

В нотации пакета Maxima правая часть системы показана на рисунке 3.17.

$$\alpha_k[t_] = a_k (ii_k[t] - s_k[t]) + ex_k[t] - im_k[t];$$

$$\beta_k[t_] = b_k \left(l_k[t] - \frac{m_k}{p_k} \right);$$

Рисунок 3.17 – Вид правой части системы уравнений

3.4.2.1 Все коэффициенты, входящие в систему уравнений, были сгенерированы датчиком случайных чисел, не выходя за рамки их физического смысла, но коэффициенты связи (те, которые в функции экспорта и импорта были сгенерированы на порядок ниже остальных). Стационарная точка: (1.69, 1.43, 0.81, 0.30, 1.71, 0.79).

Полученные матрица A системы, векторы F свободных членов и собственных значений λ системы представлены на рисунке 3.18:

$$\begin{pmatrix} -0.0970024 & -0.0140419 & 0.0605841 & 0 & 0.0578086 & 0 \\ 0.0354891 & -0.0397093 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0611837 & 0 & -0.520757 & -1.21009 & 0.048955 & 0 \\ 0 & 0 & 0.118397 & -0.236095 & 0 & 0 \\ 0.0870477 & 0 & 0.0193217 & 0 & -0.156785 & -0.264122 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.430907 & -0.739964 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.0356396 \\ -0.00304424 \\ 0.604586 \\ -0.0242716 \\ 0.315214 \\ -0.151528 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.380811 + 0.345078 i \\ -0.380811 - 0.345078 i \\ -0.457784 + 0.177161 i \\ -0.457784 - 0.177161 i \\ -0.0565613 + 0.0138772 i \\ -0.0565613 - 0.0138772 i \end{pmatrix}.$$

Рисунок 3.18 – Значения матрицы A и векторов F и λ

Имеем устойчивый фокус, который тоже не соответствует условиям устойчивого роста.

3.4.2.2 Рассмотрим модельный случай, когда три актора независимы, т. е. $Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k) = 0$, $Im_i = Im_i Y_i \neq 0$ (Стационарная точка: (57.6, 13.6, 7.94, 1.70, -0.1, 0.53)).

Матрица системы и векторы свободных членов и собственных чисел приведены на рисунке 3.19:

$$A = \begin{pmatrix} 0.201949 & -0.864968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.100738 & -0.0941421 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0257931 & -0.799275 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.217335 & -0.121259 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.426356 & -0.519224 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.257745 & -0.306633 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.171998 \\ -4.51778 \\ 1.15601 \\ -1.51868 \\ 0.232244 \\ 0.187509 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i = \begin{pmatrix} -0.366495 + 0.360893 i \\ -0.366495 - 0.360893 i \\ -0.0477328 + 0.410249 i \\ -0.0477328 - 0.410249 i \\ 0.0539034 + 0.255378 i \\ 0.0539034 - 0.255378 i \end{pmatrix}.$$

Рисунок 3.19 – Параметры A , F , и λ для автономных подсистем

При введении даже слабого взаимодействия, (на рисунке 3.20 в проекциях) имеем устойчивый и неустойчивый фокус. Следовательно, третий актор выводит из устойчивости два других. Однако, динамика приобретает колебательный характер, что также не желательно, поскольку не обеспечивает устойчивый рост. Заметим, что в рамках линейной модели, колебания не могут прекратиться при $t \rightarrow \infty$, чего нельзя сказать о моделях нелинейных, рассмотренных в разделе 2.

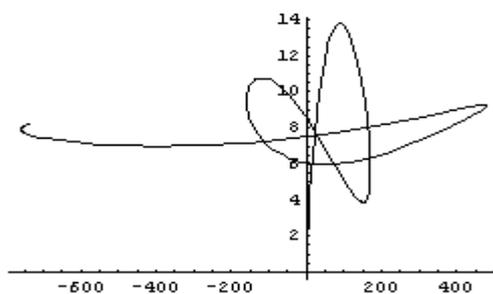


Рисунок 3.20 – Проекция $y_1[t]$, $y_3[t]$ фазового портрета

3.4.2.3 Зададим теперь значения λ_i , которые были бы найдены для случая, когда решались три не связанные уравнения, т. е. эти λ_i – собственные значения модели отдельно взятого актора. Для таких λ_i решаем систему уравнений, устанавливая связи между ними. Пусть $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{3}i$ и коэффициенты связи: $\alpha = \delta = \beta = 0,1$.

Матрица системы имеет общий вид:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_1) & -\operatorname{Im}(\lambda_1) & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \operatorname{Im}(\lambda_1) & \operatorname{Re}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \operatorname{Re}(\lambda_2) & -\operatorname{Im}(\lambda_2) & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \delta & 0 & \operatorname{Re}(\lambda_3) & -\operatorname{Im}(\lambda_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Im}(\lambda_3) & \operatorname{Re}(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

Получены такие λ_i для системы взаимодействия:

$$\begin{pmatrix} -0.00159582 + 1.71892 i \\ -0.00159582 - 1.71892 i \\ 0.00212753 + 1.41421 i \\ 0.00212753 - 1.41421 i \\ -0.000531717 + 1.00764 i \\ -0.000531717 - 1.00764 i \end{pmatrix}.$$

Зависимость переменных Y и R представлена на рисунках 3.21–3.25, 3.30, а их временные графики – на рисунках 3.26 – 3.29.

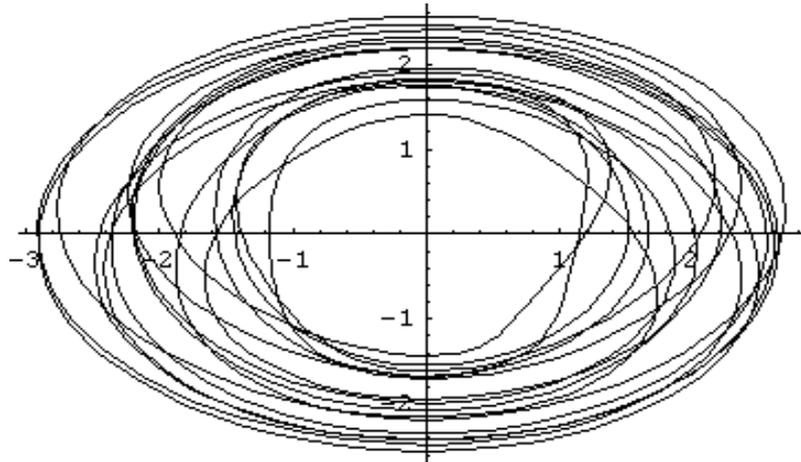


Рисунок 3.21 – Проекция $u_1[t]$, $r_1[t]$ фазового портрета

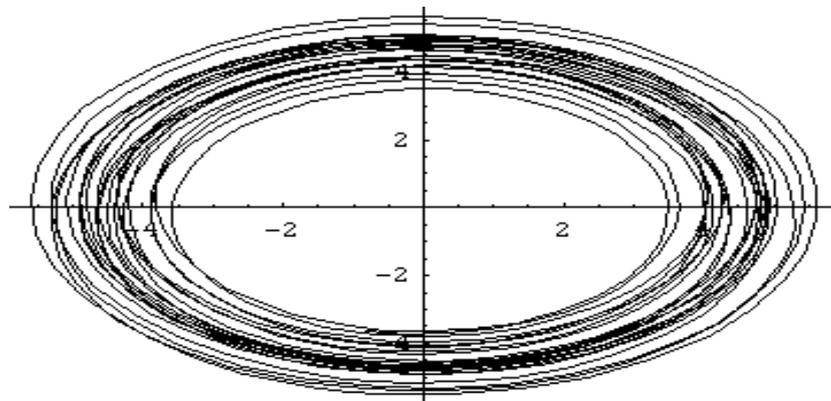


Рисунок 3.22 – Проекция $u_2[t]$, $r_2[t]$ фазового портрета

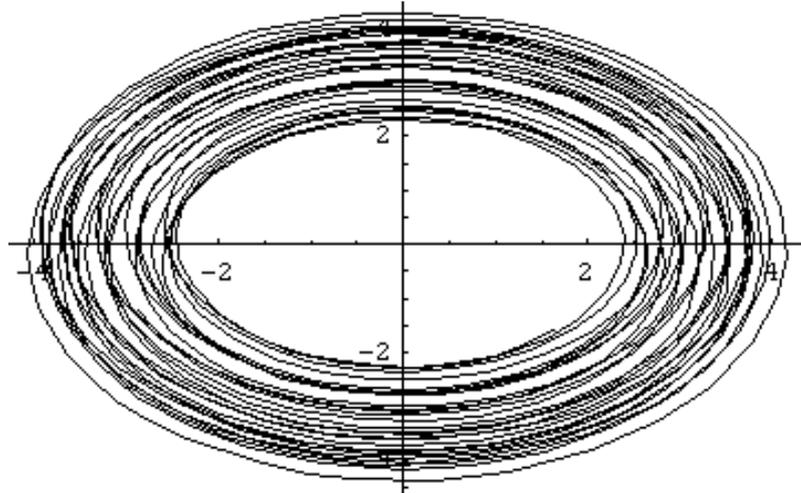


Рисунок 3.23 – Проекция $u_3[t]$, $r_3[t]$ фазового портрета

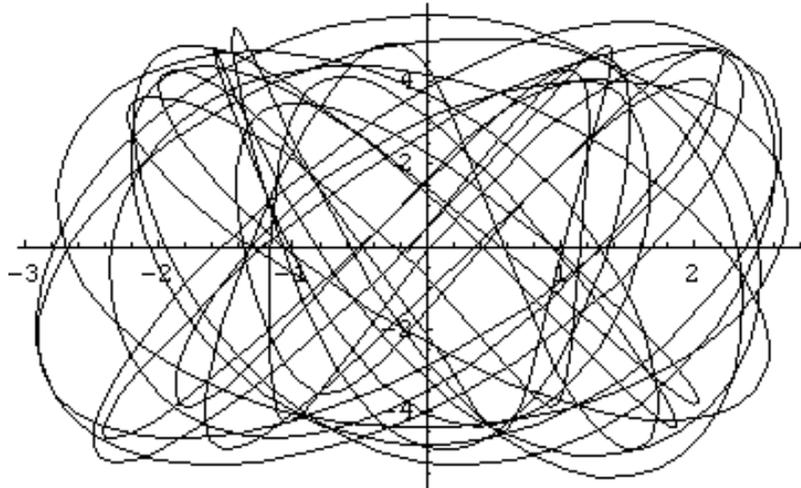


Рисунок 3.24 – Проекция $u_1[t]$, $u_2[t]$ фазового портрета

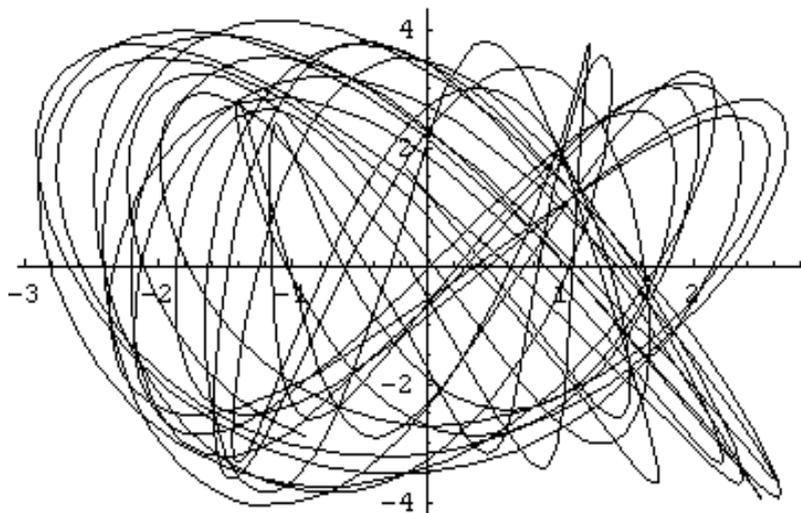


Рисунок 3.25 – Проекция $u_1[t]$, $u_3[t]$ фазового портрета

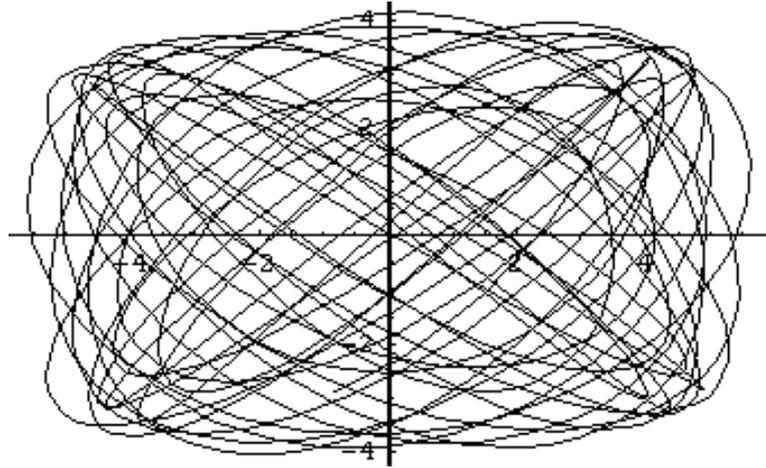


Рисунок 3.26 – Проекция $y_2[t]$, $y_3[t]$ фазового портрета

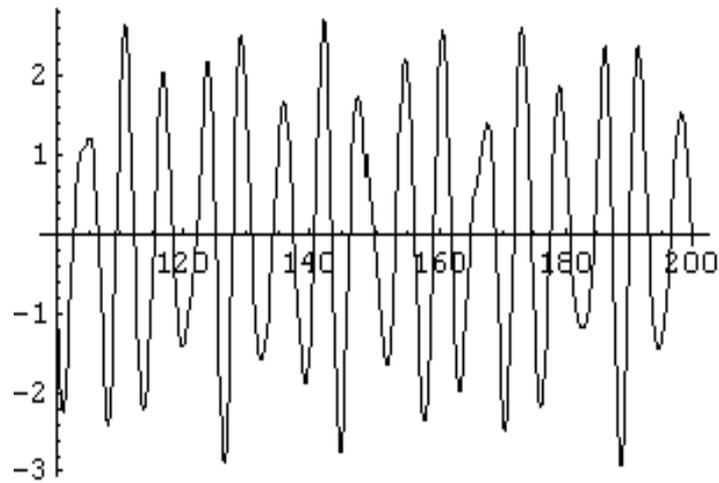


Рисунок 3.27 – Решение $y_1[t]$

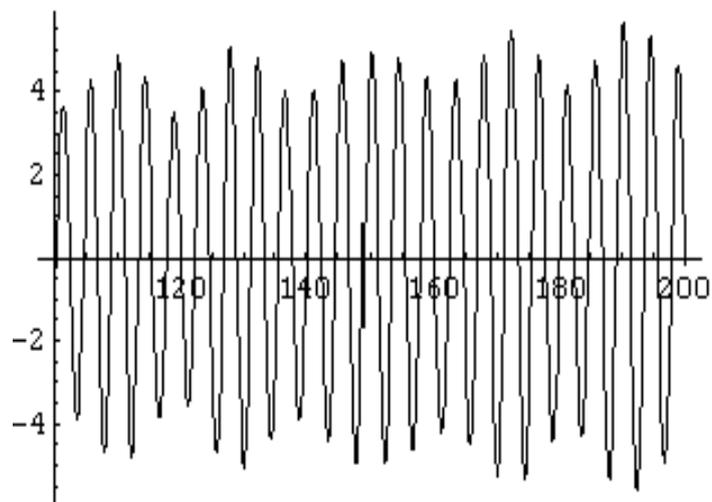


Рисунок 3.28 – Решение $y_2[t]$

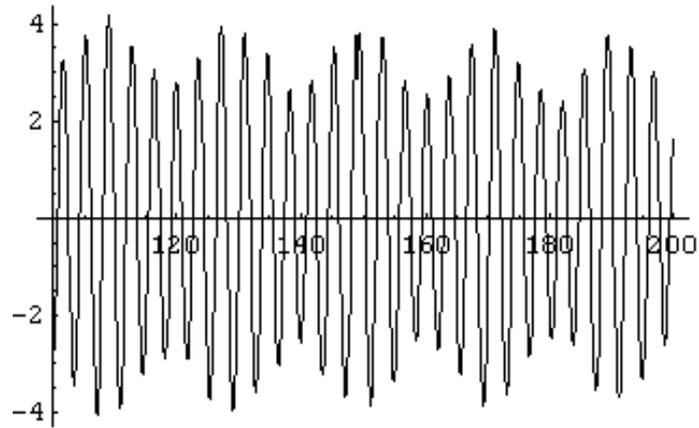


Рисунок 3.29 – Решение $y_3[t]$

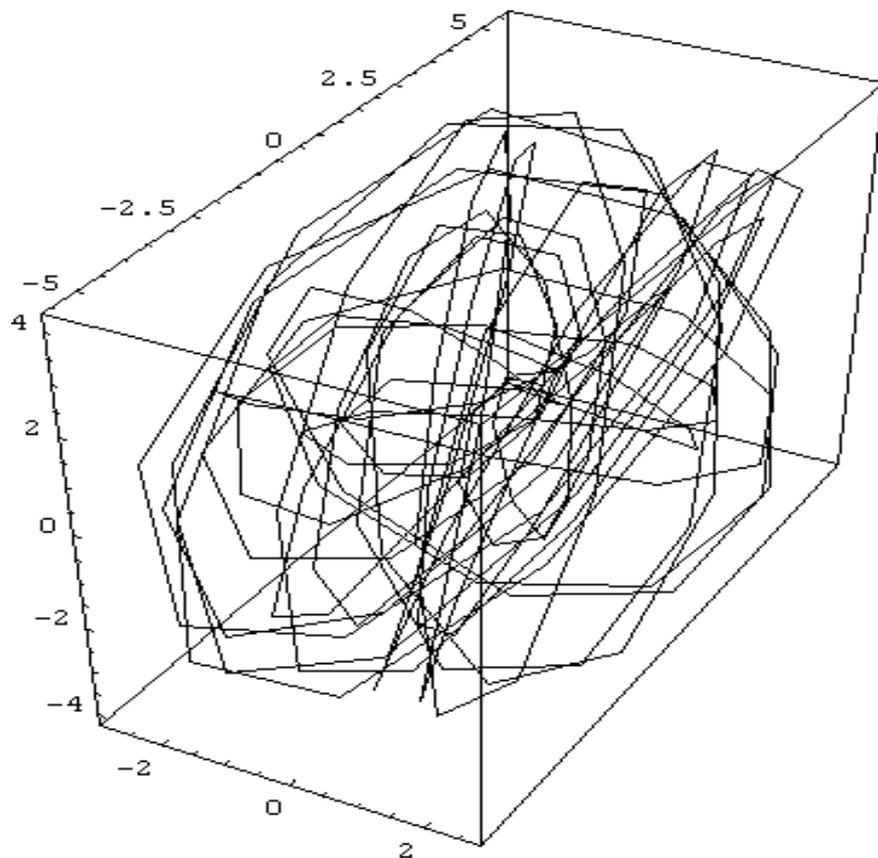


Рисунок 3.30 – Проекция $y_1[t]$, $y_2[t]$, $y_3[t]$ шестимерного фазового портрета

3.4.2.4 Рассмотрим тот же пример с коэффициентами связи, равными нулю. Это – случай, когда три актора автономны.

Получены такие λ_i для этой модели: $(1.7i, -1.7i, 1.41i, -1.41i, 1i, -1i)$.

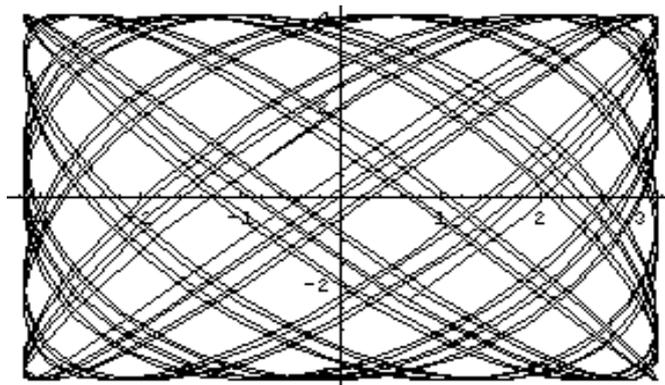


Рисунок 3.31 – Проекция $y_2[t]$, $y_3[t]$ фазового портрета – кратный цикл

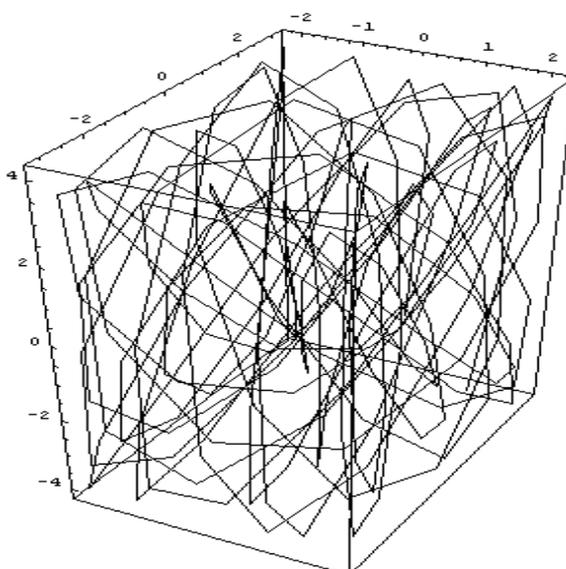


Рисунок 3.32 – Проекция $y_1[t]$, $y_2[t]$, $y_3[t]$ шестимерного фазового портрета

Из приведенных выше результатов счета следует, что похожие на хаос явления наблюдались в шести- и в четырехмерной модели динамики трех и двух государств. Таким образом, искомое сочетание параметров было определено, и гипотеза о хаотичности подтвердилась. Кроме того, выявлено сочетание параметров, приводящее к различным сложным стационарам в шестимерном пространстве, таким как двойное седло-фокус и седло-узел. При неустойчивости стационара выявлены начальные условия устойчивого роста акторов.

3.5 Использование линейной модели конкуренции для описания динамики взаимодействия насосных агрегатов при их параллельном включении на насосной станции

3.5.1 Технологические особенности взаимодействия насосных агрегатов насосной станции

При параллельной работе двух ($i=1, 2$) или несколько насосных агрегатов, каждый i -й обеспечивает на своем выходе подачу целевого продукта с давлением $P_i(t)$ и расходом $Q_i(t)$. Далее везде эти величины зависят от времени. Можно показать [105, 107], что динамическую модель каждого i -го насосного агрегата можно представить в виде взаимосвязанной системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(P, Q), \quad (3.9)$$

$$\frac{dQ}{dt} = Q \cdot g(P, Q), \quad (3.10)$$

где функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ определяются техническими характеристиками насосных агрегатов и, в свою очередь, определяют динамические свойства объекта [105, 116]. Поэтому они имеют следующие характеристики, которые далее, в виду их общего характера, будем называть аксиомами конкурентного взаимодействия динамических систем.

В общем виде, введя единые обозначения x_i вместо P_i и Q_i , систему (3.9), (3.10) со связями состояний через функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ в правой части представим в стандартном виде:

$$A1. \quad \frac{dx_i}{dt} = x_i \cdot f_i(X), \quad x_i \gg 0, \quad i=1, \dots, n,$$

$$X = (x_i)^T, \quad F(X) = (f_i(X))^T;$$

$$\text{A2. } \frac{df_j}{dx_i} > 0 \text{ для кооперации, и}$$

$$\frac{df_j}{dx_i} < 0 \text{ для конкуренции, } \forall j \neq i.$$

А3. Если $X^{(i)}$ – вектор системных переменных X без x_i , то $f_i(X^{(i)}=0)=\text{const}>0$.

А4. $f_i(X^{(i)})$ – линейная функция по всем своим переменным.

Отметим, что анализ конкуренции между двумя акторами, проводившийся изначально в работах Гаузе, Лотки и Вольтерра [67] начинался с рассмотрения двумерной динамической модели. Тогда как объект из двух насосных агрегатов на рисунке 1.1 описывается системой из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= P_1(a_1 + b_1Q_1 + c_1P_2 + d_1Q_2), \\ \frac{dQ_1}{dt} &= Q_1(a_2P_1 + b_2 + c_2P_2 + d_2Q_2), \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2(a_3P_1 + b_3Q_1 + c_3 + d_3Q_2), \\ \frac{dQ_2}{dt} &= Q_2(a_4P_1 + b_4Q_1 + c_4P_2 + d_4). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из физических свойств взаимодействия двух насосных агрегатов следует, что возрастание давления на выходе второго насосного агрегата противодействует работе первого, что приводит к уменьшению скорости изменения давления и уменьшению расхода на его выходе. Для адекватного описания такого взаимодействия – «конкуренции» насосных агрегатов необходимо выполнение $a_i > 0$, $c_i < 0$, согласно аксиоме А2. Поскольку при увеличении расхода через насосный агрегат давление на его выходе падает, то коэффициенты $b_{1,2}$ в уравнениях первого насоса, и $d_{3,4}$ для второго – отрицательны.

Согласно технологии, процесс включения насосной станции происходит в три этапа.

Этап 1. При закрытых задвижках всех насосных агрегатов (рисунок 1.1) включается первый агрегат. При расходе, равном нулю, давление на выходе этого агрегата возрастает до максимальной величины P_0 . С этого момента времени начинается открытие задвижки первого агрегата, что приводит к возрастанию расхода до величины Q_p^1 и снижению давления до величины P_p^1 , где P_p^1 и Q_p^1 – рабочая точка насосного агрегата и сети. Это – первая стационарная точка;

Этап 2. Если давление в рабочей точке не достаточно, аналогично включаются остальные агрегаты;

Этап 3. По достижении требуемого давления на выходе насосной станции получаем вторую (последнюю) стационарную точку с параметрами P_p^2 и Q_p^2 .

Таким образом, процессы включения агрегатов описываются двумя различными моделями. Первая, при $Q=0$, модель одного насосного агрегата представляет собой известное логистическое уравнение $dP/dt = k \cdot P \cdot (1-P)$, при начальных условиях $P(0) \approx 0$, параметре роста $k > 0$ и условиях нормировки $P(t) < P_p < 1$. Это – частный случай уравнения (3.9) при $f(P, Q) = k(1-P)$, и отсутствии уравнения (3.10).

Эта модель хорошо исследована [1, 2, 3, 4]. Логистическое уравнение разрешимо аналитически.

Предположение $P_p > 1$ выводило бы модель за рамки адекватности, однако, некоторые авторы [107, 116] считают, что она годится для описания режима "помпажа" в насосе.

Модель насосного агрегата на втором этапе. После открытия задвижки на выходе включенного насосного агрегата его модель будет описываться полной системой уравнений (3.9), (3.10). Итоговая модель включения всех агрегатов насосной станции описывается взаимосвязанной системой нелинейных уравнений (3.11). Её модификация пригодна также для описания систем с защитой и техническим обслуживанием [88]. Такими же моделями

описываются и процессы взаимодействия в системах ЖКХ [71], состоящих из владельцев жилищного фонда и монопольной обслуживающей компании. В данной работе основное внимание уделено изучению локальной и глобальной асимптотической устойчивости позитивных ограниченных решений и бифуркаций положений равновесия. Динамика модели определяется численно и, где возможно, аналитически – для оценки точности численного метода.

Для разработки эффективных методов анализа системы, и не нарушая общности, проведем линеаризацию модели (3.11) в окрестности двух её стационарных рабочих точек путем разложения ее правой части в ряд Тейлора до первого члена. Первая из них, согласно этапу 2, даёт начальные условия для системы (3.11). Из физики процесса следует ее неустойчивость, что подтверждается результатами моделирования (см. рисунок 3.33).

После линеаризации введем обозначения: вектор $X = (P_i, Q_i)$ – состояния системы, A – $(2n \times 2n)$ матрица первых частных производных в стационарах, F – $2n$ вектор констант.

После переобозначений система приобретает вид $X' = AX + F$. Для линейной $2n$ -мерной системы задача анализа устойчивости сводится к проверке знака показателя Ляпунова $\text{Re}(\lambda)$, где $Au = \lambda u$, $u \neq 0$ в стационарной точке $X_0 = -A^{-1}F$. В ситуации общего положения матрица A не вырождена. Структура матрицы отражает взаимовлияние r_{ij} через давление i -го и j -го насосных агрегатов в модели на рисунке 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & r_1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 \\ 0 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Анализ такой модели в окрестности стационаров позволяет выяснить:

– параметры связей для исследования устойчивой и неустойчивой динамики;

– параметры точки бифуркации, при которых отношение частот колебаний ω_1 / ω_2 – иррационально, что приводит к появлению аттрактора типа тора.

Начало координат на рисунках, следуя традиции, перенесено в соответствующую стационарную точку, где проведена линеаризация.

3.5.2 Результаты расчета динамики взаимодействия и их анализ

Целью расчетов является анализ динамики в окрестности начального и конечного стационаров для параллельно включаемых насосных агрегатов с целью выявления характера переходного процесса между ними.

3.5.2.1 Модель насосной станции (рисунок 1.1) – система из 4-х уравнений на втором этапе процесса подключения – первая стационарная точка.

Вектор собственных значений λ матрицы уравнения (3.11):

$(-0.039, 0.3+0.436i, 0.3-0.436i, -0.012)$.

Координаты нетривиальной стационарной точки в фазовом пространстве $X^* = (10.23, 2.28, 0.14, 0.74)$.

На рисунке 3.33 изображена двумерная проекция на $P_{1,2}$ фазового пространства $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ в окрестности стационара:

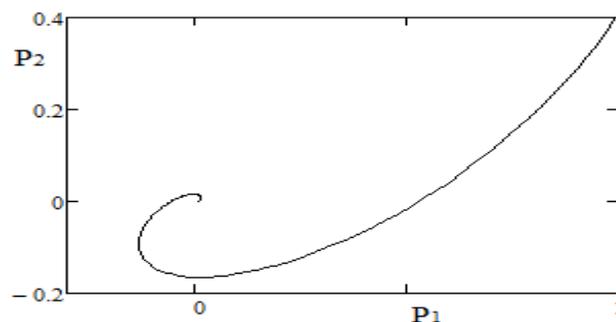


Рисунок 3.33 – Динамика давлений в окрестности первого стационара

При этом характеристика второго агрегата на рисунке 3.34 слабо отличается от классической, полученной экспериментальным путем:

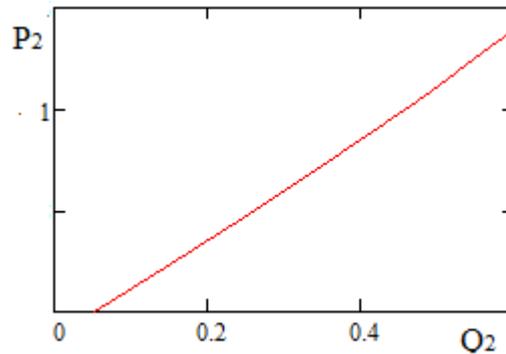


Рисунок 3.34 – Характеристика "расход-давление"

Проверка на тип собственных значений и рисунок проекции показали наличие неустойчивого узло-фокуса. Налицо устойчивое возрастание параметров давления P_i вдали от стационара на конечном отрезке времени. Графики, полученные численным и численно-аналитическим методами неотличимы.

3.5.2.2 Модель насосной станции на третьем этапе процесса подключения – в окрестности последней стационарной точки. Начальные условия везде $(P_1, Q_1, P_2, Q_2)_0 = (1, 0, 1, 0)$, поскольку в начале задвижки закрыты.

Для исследуемых типов насосных агрегатов параметры матрицы A после нормализации имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0.01 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0.5 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.65 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа подтверждают устойчивость процесса:

$(-0.45+i0.44, -0.45-i0.44, -0.05-i0.47, -0.05+i0.47)$, однако переходный процесс, как видно из графиков проекций фазовых траекторий – рисунки 3.35 и 3.36, колебательный. То есть при данных параметрах устойчивый рост расхода и давления не наблюдается.

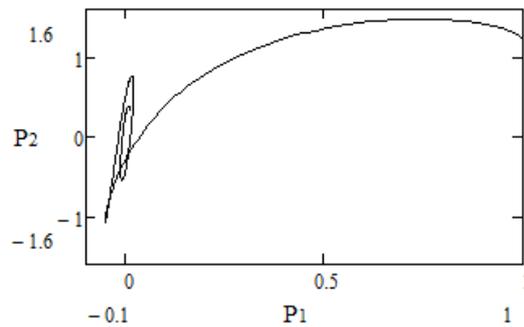


Рисунок 3.35 – Динамика давлений в окрестности устойчивого стационара

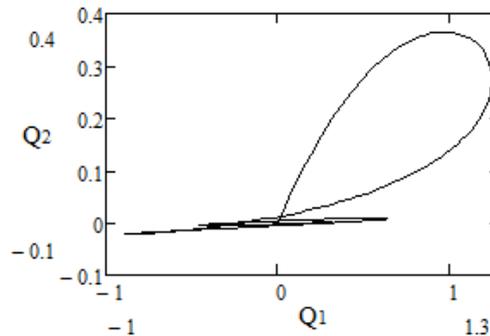


Рисунок 3.36 – Динамика расхода в окрестности устойчивого стационара

3.5.2.3 Малая вариация параметров может перевести систему в окрестность нерезонансного тора, что легко видеть из мнимых частей собственных чисел $(-0.05-i0.55, -0.05+i0.55, -0.026-i0.57, -0.026+i0.57)$ слабо проварьированной матрицы параметров A :

Кавзи-хаотическая динамика системы видна на рисунках 3.37 и 3.38 проекций фазового пространства.

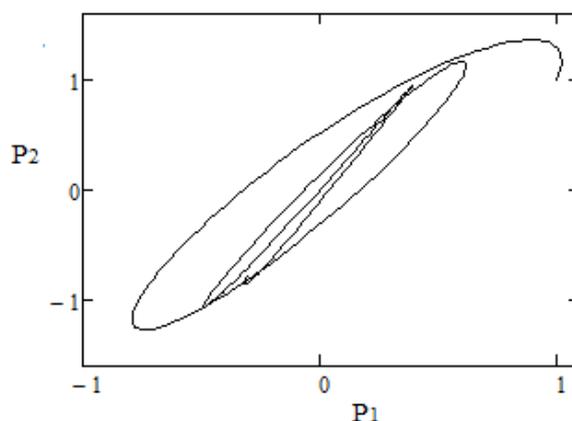


Рисунок 3.37 – Динамика давлений после слабого изменения параметров

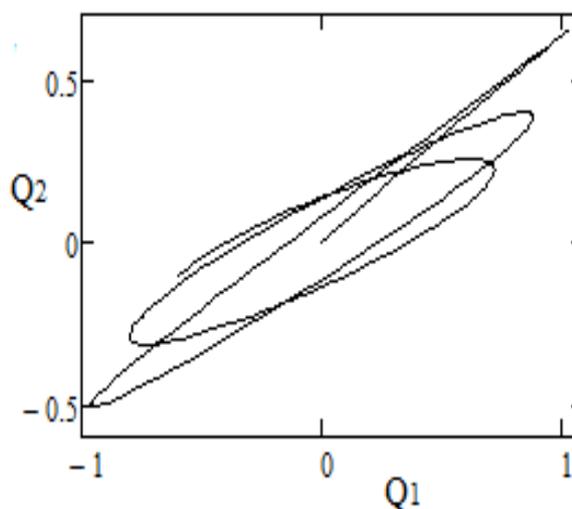


Рисунок 3.38 – Динамика расхода после слабого изменения параметров

3.6 Анализ возможного применения многосвязной линейной модели устойчивого развития с конкурентным взаимодействием

Данная модель может применяться для анализа и прогнозирования поведения не только макроэкономических систем – государств, как это показано в Приложении А. Результаты исследования модели I могут быть эффективно использованы:

- для внутреннего и внешнего управления и развития страны, включая

моделирование динамики электроэнергетической и газотранспортной систем;

– крупными частными и государственными организациями (юридическими лицами) страны, которым необходима экспертная оценка будущего.

– экспертами для дальнейших открытий и корректировок в экономической науке.

Разработанные методики были использованы в целях обучения студентов моделированию и математической экономике: на примерах, в рамках лабораторных работ познакомиться с началами макро-экономического анализа и прогнозирования.

3.7 Выводы по разделу

В разделе получены решения систем уравнений модели I двумя методами – численно-аналитическим (т. е. собственные числа матрицы 6-го порядка получены численно, а затем выписана известная формула для решения линейной системы с постоянными коэффициентами) и численным – методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Сравнение решений показало, что дискретизация правомерна, и не является причиной хаотического поведения системы. Это поведение, в полном соответствии с теорией, проявляется для такого сочетания параметров, когда вещественные части, по крайней мере, двух собственных чисел равны 0, а мнимые, отвечающие за период колебаний – не сравнимы, т. е. их отношение не рационально. Элементы матрицы выбраны так, чтобы эти соотношения выполнялись, но параметры модели находились в пределах физического смысла, например, большинство из них должно лежать в интервале (0, 1).

Рисунки проекций и сечений фазовых портретов средствами пакета Mathematica представлены в приложении. Они позволяют представить торообразное по двум переменным многообразие в шестимерном пространстве. Из фазовых портретов ясно, что притягивающее множество ограничено, и траектории на нем расходятся, т. е. выполнен основной критерий «странности» аттрактора.

Похожие явления наблюдались и в четырехмерной модели двух акторов.

Таким образом, искомое сочетание параметров было определено, и гипотеза о возможности хаоса в многосвязной линейной системе подтвердилась даже для простейшей модели.

В разделе впервые предложены феноменологические модели динамики взаимодействия системы параллельно включаемых насосных агрегатов насосных станций, отличающиеся от известных учетом их нелинейных связей, что позволяет адекватно описать их взаимодействие при переходе между двумя стационарными состояниями. Анализ переходных процессов, возникающих в динамической модели системы включения двух и более насосных агрегатов показывает, что переходные процессы при некоторых значениях параметров могут устанавливаться медленно, демонстрируя квази-хаотическую динамику, что может привести к авариям системы. Посредством предложенного подхода "конкуренции" агрегатов получены практически важные результаты о возможности и условиях возникновения нежелательных квази-хаотических переходных режимов.

Результаты раздела опубликованы в работах автора [6, 53, 55, 56, 89].

4 КОНКУРЕНТНЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

4.1 Устойчивость решений дифференциальных систем по линейному приближению

4.1.1 Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы

Перечислим кратко основные термины и понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Пусть динамическая система задана автономными уравнениями:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1)$$

в которых правые части f_i – в общем случае нелинейные дифференцируемые функции, зависящие от параметров μ_k . В векторной форме:

$$\dot{x} = F(x, \mu). \quad (4.2)$$

Будем считать, что система (4.1) не обладает какими-либо специальными свойствами симметрии, являясь системой общего положения.

Пусть $x^0(t)$ – частное решение системы, устойчивость которого нужно исследовать. Введем в рассмотрение переменные $y_i(t)$, характеризующие малое отклонение от частного решения:

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^0(t). \quad (4.3)$$

Подставив (4.3) в (4.1), получим

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^N (\partial f_i / \partial x_j) y_j + O(y_i), \quad (4.4)$$

где производные f_i' взяты в точках частного решения $x_i = x_i^0$. Совокупность нелинейных относительно y_i членов $O(y_i)$ стремится к нулю с уменьшением возмущений y_i быстрее суммы линейных слагаемых.

Устойчивость частного решения нелинейной системы $x^0(t)$ определяется устойчивостью линеаризованной системы (4.4):

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^N (\partial f_i / \partial x_j) y_j. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) называют уравнениями в вариациях [64, 118]. Их можно записывать в матричной форме:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (4.6)$$

где $A(t)$ – квадратная матрица, элементы которой определяются производными

$$a_{i,j}(t) = \partial f_i / \partial x_j \Big|_{x_i = x_i^0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Фундаментальная матрица решений $Y(t)$, составленная из N линейно независимых решений системы (4.6), удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t). \quad (4.8)$$

Произвольное решение системы (4.6) может быть записано в виде

$$y(t) = Y(t)y(t_0), \quad (4.9)$$

если $Y(t)$ нормирована при $t = t_0$, т. е. $Y(t_0) = E$.

Автономная линейная система (4.6) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда любое решение (4.9) ограничено. Следовательно, коэффициенты фундаментальной матрицы $Y(t)$ устойчивой системы должны быть ограничены.

Характеристическим показателем Ляпунова (ЛХП), или просто характеристическим показателем функции $\Phi(t)$, называется действительное число, определяемое соотношением

$$L[\Phi(t)] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln |\Phi(t)|], \quad (4.10)$$

где черта сверху означает верхний предел. Для экспоненты $\Phi(t) = \exp \alpha t$, $L = \alpha$.

Понятие характеристического показателя дает способ оценки степени роста функции в сравнении с экспонентой.

Для линейной системы (4.6) с произвольной матрицей $A(t)$ характеристические показатели нетривиальных решений можно ввести аналогичным образом [64, 115]:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln \|y^i(t)\|], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.11)$$

где $y^i(t)$ – i -е фундаментальное решение системы (4.6);

$\| \ \|$ – обозначение нормы.

В силу определения характеристические показатели действительны, а

если матрица $A(t)$ ограничена, то и конечны. Числа λ_i называются обобщенными характеристическими показателями произвольной системы типа (4.6). Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений $y(t)$ вблизи частного решения $x^0(t)$ нелинейной системы (4.2), совокупность λ_i называют ляпуновскими характеристическими показателями частного решения (или фазовой траектории) $x^0(t)$ нелинейной системы. Упорядоченная по убыванию совокупность чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ образует так называемый спектр ляпуновских характеристических показателей (спектр ЛХП) фазовой траектории $x^0(t)$, являющийся одной из важнейших характеристик решения нелинейной системы, определяющей, в частности, ее устойчивость.

В зависимости от вида матрицы $A(t)$, определяющей тип решения системы в вариациях, сигнатура спектра ЛХП будет различна. По-разному трактуется и устойчивость частного решения.

Для линейной автономной динамической системы сумма характеристических показателей спектра ее решений не меньше верхнего предела от среднего значения следа матрицы [104]:

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_{t_0}^t Sp A(\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

Знак равенства справедлив для правильных по Ляпунову систем.

Определитель матрицы как определитель линейного оператора не зависит от выбора базиса и представляет собой объем N -мерного параллелепипеда, построенного в фазовом пространстве системы на векторах, координаты которых задаются столбцами матрицы. $V(t) = \det Y(t)$ – фазовый объем.

Рассмотрим дивергенцию вектора фазовой скорости нелинейной системы уравнений (4.1):

$$\operatorname{div}F = \sum_{i=1}^N \partial \dot{x}_i / \partial x_i = \sum_{i=1}^N \partial f_i / \partial x_i. \quad (4.13)$$

Локально, вблизи частного решения фазовый объем системы во времени изменяется в соответствии с выражением

$$V(t) = V(t_0) \exp \left[t \overline{(\operatorname{div}F)} \right] = V(t_0) \exp \left[t \sum_{i=1}^N \lambda_i \right], \quad (4.14)$$

где чертой обозначено усреднение по времени.

Рассматривая относительную скорость изменения малого элемента фазового объема, получаем

$$\frac{d}{dt} [V(t)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i. \quad (4.15)$$

Следовательно, сумма показателей спектра ЛХП траектории $x^0(t)$ характеризует скорость изменения фазового объема в ее окрестности.

4.1.2 Устойчивость периодических решений. Мультипликаторы предельного цикла

Если частное решение $x^0(t)$ характеризует состояние равновесия, т. е. не зависит от времени, то правые части (4.1) обращаются в нуль:

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0, \mu) = 0. \quad (4.16)$$

Корни алгебраических уравнений (4.16) определяют координаты возможных состояний равновесия, отвечающих особым точкам в фазовом пространстве системы. В особой точке матрица A системы в вариациях от

времени не зависит и общее решение системы имеет вид

$$y(t) = \exp(At)y(t_0). \quad (4.17)$$

Решение устойчиво по Ляпунову, если собственные числа матрицы линеаризации, определяемые корнями уравнения

$$\det[A - sE] = 0, \quad (4.18)$$

характеризуются действительными частями $\operatorname{Re} s_i \leq 0$. Если все s_i удовлетворяют строгому неравенству $\operatorname{Re} s_i < 0$, то решение $y(t)$ асимптотически устойчиво. Это означает, что произвольные малые возмущения положения равновесия x^0 затухают и при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремятся к нулю.

Спектр ЛХП устойчивого стационарного решения, как это видно из определения (4.11), состоит из упорядоченных по убыванию отрицательных чисел $\lambda_i = \operatorname{Re} s_i(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Условием асимптотической устойчивости решения будет отрицательность старшего показателя спектра ЛХП. Если хотя бы одно из собственных значений положительно в своей действительной части, то равновесие неустойчиво. Условие $\operatorname{Re} s_i(\mu) \neq 0$ выделяет случай грубых состояний равновесия, которые либо устойчивы, либо неустойчивы в некоторой конечной области вариации параметров μ .

Любое периодическое частное решение системы (4.1) выделяется условием

$$x^0(t) = x^0(t + T), \quad (4.19)$$

где T – период решения.

Устойчивость периодического решения определяется исследованием соответствующей системы в вариациях, которая также является периодической:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad A(t) \equiv A(t+T). \quad (4.20)$$

Нетрудно убедиться в том, что если $Y(t)$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (4.20), то матрица $Y(t+T)$ также является фундаментальной и справедливо соотношение:

$$Y(t+T) = Y(t)Y(T). \quad (4.21)$$

Матрица $Y(t)$ носит название матрицы или оператора монодромии. Решение уравнений в вариациях в силу (4.21) определяет линейное отображение, ставящее в соответствие произвольному значению возмущения $y(t)$ значение возмущения $y(t+T)$ через период:

$$y(t+T) = Y(T)y(t). \quad (4.22)$$

Матрица монодромии не зависит от времени. Собственные значения ρ_i матрицы монодромии $Y(T)$, т. е. корни характеристического уравнения

$$\det[Y(T) - \rho E] = 0 \quad (4.23)$$

называются мультипликаторами периодического решения $x^0(t)$ и определяют его устойчивость [64]. Действительно, действие оператора монодромии (4.22) заключается в том, что первоначальное возмущение периодического решения,

рассматриваемое в проекциях на собственные векторы, через период T умножается на соответствующий мультипликатор ρ_i . Значит, затуханию возмущений должно отвечать требование $|\rho_i| < 1$.

Любому мультипликатору ρ_i соответствует нетривиальное решение $\xi(t+T) = \rho_i \xi(t)$ системы (4.20), и наоборот, выполнение указанного равенства служит определением мультипликатора. Отсюда следует важный вывод: периодическое решение $x^0(t)$ имеет, по крайней мере, один из мультипликаторов, равный +1 [64, 96].

Мультипликаторы, как собственные значения матрицы монодромии, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^N \rho_i = SpY(t), \quad \prod_{i=1}^N \rho_i = \det Y(T) > 0, \quad (4.24)$$

которые весьма полезны при анализе численных результатов.

Спектр ЛХП периодического решения определяется в соответствии с (4.11) через мультипликаторы

$$\lambda_i = \ln |\rho_i| / T. \quad (4.25)$$

Один из показателей спектра всегда равен нулю и отвечает единичному мультипликатору. Если все оставшиеся на комплексной плоскости значений мультипликаторы принадлежат внутренности единичного круга, т. е. $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, то периодическое решение устойчиво. Сигнатура спектра ЛХП устойчивого предельного цикла такова: «0», «-», «-», ..., «-».

Если по одному или нескольким собственным направлениям возмущения

нарастают, то соответствующие мультипликаторы $|\rho| > 1$ и в спектре ЛХП периодического решения появятся положительные показатели. Периодическое решение, часть мультипликаторов которого лежит внутри единичного круга, а часть – вне его, является неустойчивым и называется седловым.

4.2 Бифуркации динамических систем

4.2.1 Структурная устойчивость и бифуркации

Исследование условий сохранения структуры притягивающих предельных множеств при возмущениях – задача, связанная с введением понятий грубости, структурной устойчивости и топологической эквивалентности диссипативных динамических систем.

Структурно устойчивыми называют такие дифференциальные динамические системы, для которых малые возмущения оператора эволюции, дифференцируемые хотя бы один раз, приводят к топологически эквивалентным решениям.

Примером бифуркации коразмерности 1 является двукратное равновесие [42,64]. Рассмотрим динамическую систему, описываемую одним дифференциальным уравнением 1-го порядка на прямой x :

$$\dot{x} = F(x, \mu). \quad (4.26)$$

Пусть $x^0(\mu)$ есть грубое состояние равновесия, т. е. $s(\mu) \neq 0$, где $s(\mu) = F_x(x^0, \mu)$.

Модельным уравнением, описывающим динамику вблизи особой точки, в данном случае будет линеаризованное уравнение (4.26).

Из решения $y = y_0 \exp(st)$ видно, что устойчивость x^0 определяется знаком собственного числа s , т. е. знаком производной $F'_x(\mu)$. При некоторых значениях параметров собственное число s в положении равновесия может обратиться в нуль:

$$s(\mu) = F'_x(x^0, \mu) = 0. \quad (4.27)$$

Предположим, что вторая производная при этом отлична от нуля:

$$a(\mu) = F''_{xx}(x^0, \mu)/2 \neq 0. \quad (4.28)$$

Тогда x^0 есть двукратный корень исходного уравнения (4.26). Модельная система для данной бифуркации будет

$$\dot{y} = b_1(\mu) + a(\mu)y^2, \quad (4.29)$$

где b_1 – некоторый параметр.

Пусть, для определенности, $a > 0$. Тогда при $b_1 < 0$ в системе (3.5) существуют два положения равновесия (устойчивое и неустойчивое). При $b_1 = 0$ они сливаются в одно, и при $b_1 > 0$ равновесия исчезают. Если изобразить многообразие $F(x, \mu) = 0$ в комбинированном пространстве параметров и фазовой координаты (рисунок 4.1), то при его проецировании на пространство параметров имеется одна особенность типа складка [63], [99]. Бифуркация «двукратное равновесие» имеет коразмерность 1, т. к. выделяется единственным бифуркационным условием (4.28). В приложениях эта бифуркация встречается довольно часто и называется также бифуркацией срыва равновесия или седло-узловой бифуркацией.

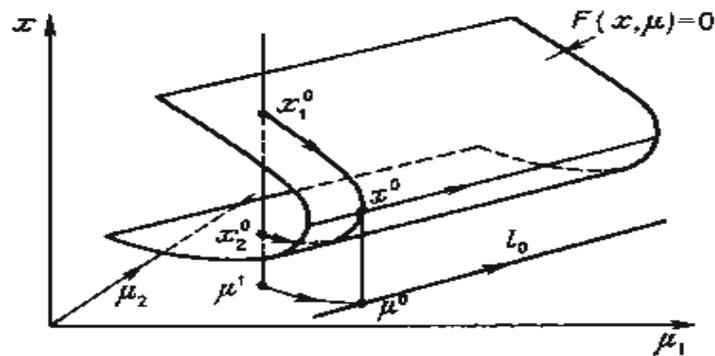


Рисунок 4.1 – Особенность типа складки при седло-узловой бифуркации состояния равновесия

Бифуркация коразмерности 2 – трехкратное равновесие. Изменим значения параметров системы (4.26), двигаясь в пространстве параметров вдоль линии l_0 (см. рисунок 4.1), отвечающей бифуркационному условию (4.28). При некоторых значениях параметров возможно обращение в нуль величины $a(\mu)$:

$$a(\mu) = F''_{xx}(x^0, \mu)/2 = 0, \quad s(\mu) = F'_x(x^0, \mu) = 0. \quad (4.30)$$

При этом третья производная $F'''_{xxx}(x^0, \mu) \neq 0$. В этом случае одновременно выполняются два бифуркационных условия (4.30). Реализуется бифуркация коразмерности 2; x^0 – трехкратный корень уравнения (4.26). Модельная система для данной бифуркации представляется в виде

$$\dot{y} = b_1 + b_2 y + b(\mu) y^3, \quad b(\mu) \neq 0. \quad (4.31)$$

В системе (4.22) могут существовать либо одно, либо три грубых стационарных решения. На рисунке 4.2 изображено многообразие бифуркации «трехкратное равновесие». Для значений параметров, лежащих в заштрихованной области внутри характерного треугольника (точка, к примеру, A), система

имеет три стационарных решения. Одно из них x_2^0 , всегда неустойчиво, два других x_1^0 и x_3^0 – устойчивы. Вне этой области значений параметров существует только одно состояние равновесия. В точке B три состояния равновесия сливаются в одно устойчивое равновесие.

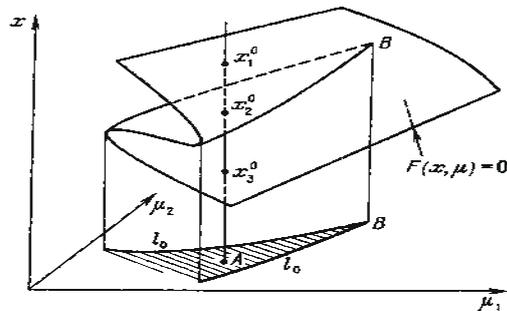


Рисунок 4.2 – Многообразие бифуркации «трехкратное равновесие».
Особенность типа сборки

Слева от точки B движение по параметрам трансверсально к бифуркационным линиям l_0 характеризуется гистерезисом: в одном направлении осуществляется срыв равновесия за счет слияния и исчезновения состояний равновесия x_1^0 и x_2^0 , в обратном направлении – за счет слияния и исчезновения другой пары состояний равновесия x_2^0 и x_3^0 .

Особенность, возникающая при проецировании многообразия бифуркации «трехкратное равновесие» на пространство параметров, называется сборкой [63], [99]. Сборке, как это видно из рисунка 4.2, отвечает пересечение двух бифуркационных линий складок l_0 в точке сборки B .

Бифуркация рождения предельного цикла. В динамических системах размерности $N \geq 2$ может реализоваться бифуркация коразмерности 1, когда в нуль обращаются действительные части комплексно-сопряженной пары собственных чисел матрицы линеаризации стационарного решения. Этой бифуркации отвечает возбуждение автоколебаний, и она носит название «бифуркация Андронова-Хопфа» [64, 118].

Пусть при некоторых значениях параметров пара комплексно-

сопряженных значений $s_{1,2}$ положения равновесия динамической системы на плоскости становится чисто мнимой, т. е.

$$\operatorname{Re} s_{1,2}(\mu_0) = 0, \operatorname{Im} s_{1,2}(\mu_0) \neq 0. \quad (4.32)$$

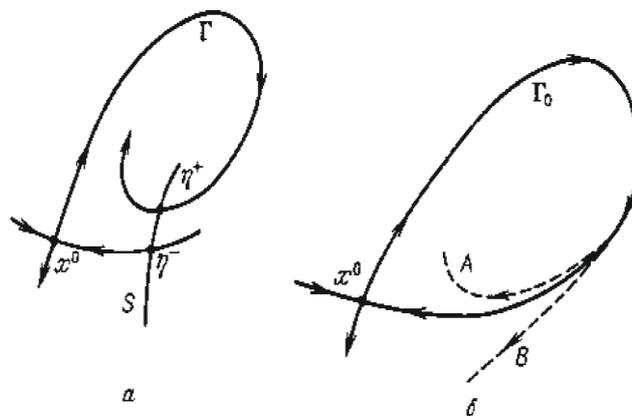
Модельная система, локально описывающая данную бифуркацию, зависит от одного параметра и в комплексной форме записывается в виде [63, 112]

$$\dot{z} = (b_1 + j\omega)z + L_1 z |z|^2, \quad (4.33)$$

где $\omega(\mu_0) \neq 0$, $L_1(\mu_0) \neq 0$.

Величина $L_1(\mu)$ называется первой ляпуновской величиной состояния равновесия и определяет устойчивость периодического режима, рождающегося в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

Рассмотрим бифуркационные диаграммы модельной системы на плоскости (рисунок 4.3). Независимо от знака первой ляпуновской величины положение равновесия $z = 0$ системы (4.33) при переходе b_1 через нуль теряет устойчивость.



a – к определению функции расщепления сепаратрис $H(\mu)$;

б – возможные случаи разрушения петли сепаратрисы Γ_0

Рисунок 4.3 – Рождение сепаратрисы на фазовой плоскости

Выполнению этого чисто геометрического условия в пространстве параметров системы отвечает бифуркационное многообразие коразмерности один.

Перестройки фазовых портретов системы вблизи петли сепаратрисы при вариации параметров относительно бифуркационного многообразия характеризуются функцией расщепления сепаратрис.

4.2.2 Бифуркации периодических решений

Вопрос об устойчивости и бифуркациях периодических траекторий может быть рассмотрен как непосредственно в отношении дифференциальных уравнений, когда частному решению отвечает предельный цикл, так и путем анализа устойчивости неподвижных точек соответствующего отображения Пуанкаре [28, 101]. Наиболее наглядным и удобным для численного исследования является метод анализа отображения [35].

Рассмотрим задачу о типичных локальных бифуркациях периодических движений, которую решим в терминах отображения Пуанкаре. Пусть Γ – фазовая траектория в N -мерном пространстве, соответствующая периодическому решению автономной системы дифференциальных уравнений (2.1), зависящих от совокупности параметров μ . Введем в рассмотрение секущую S . Пусть точка x^0 пересечения Γ с S является неподвижной точкой отображения Пуанкаре.

Устойчивость неподвижной точки x^0 , как было показано, полностью описывается собственными значениями матрицы линеаризации отображения, т. е. мультипликаторами цикла $\rho_i(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Цикл Γ устойчив (асимптотически устойчив), если при фиксированных значениях параметров все мультипликаторы $|\rho_i| \leq (\rho_i < 1)$. При изменении параметров системы мультипликаторы меняются по величине и при достижении

некоторого критического значения $\mu = \mu^*$ один или несколько мультипликаторов могут обратиться по модулю в единицу. Выход на единичную окружность хотя бы одного из мультипликаторов отвечает бифуркационной ситуации, приводящей в итоге к топологической перестройке структуры фазовых траекторий в окрестности цикла Γ .

Рассмотрим случаи потери устойчивости циклом, когда при изменении параметра на единичную окружность выходят один или пара комплексно-сопряженных мультипликаторов. Напомним, что один из мультипликаторов матрицы монодромии равен единице: $\rho_N = 1$. Систему базисных векторов на секущей всегда можно выбрать так, что собственный вектор мультипликатора ρ_N будет касательным к траектории Γ в неподвижной точке отображения x^0 . В этом случае устойчивость цикла определяется мультипликаторами отображения, из которых анализируется наибольший по модулю (для комплексно-сопряженных их, естественно, два). Предположим, для упрощения, что меняется один из параметров системы $\mu_i = \mu$, который является управляющим [11].

4.3 Численные методы исследования условий возникновения хаоса

4.3.1 Экспериментальный подход к исследованиям динамики нелинейных систем

В общем случае эволюционная задача применительно к нелинейной динамической системе

$$\dot{x} = F(x, \vec{\mu}), \quad (4.34)$$

аналитически не разрешима. Решение уравнений (4.34) может быть найдено либо численными методами, либо асимптотически. При численном

исследовании конкретных нелинейных систем с математической точки зрения возникают разнообразные задачи, требующие применения специальных алгоритмов и программ вычислений. Но первоочередной задачей является численное интегрирование (4.34) для нахождения зависимости $x(t, \vec{\mu})$ при заданных начальных условиях, т. е. решение задачи Коши.

Численными методами находятся координаты неподвижных точек (4.34) как решение нелинейных алгебраических уравнений $F(x, \vec{\mu}) = 0$ и их зависимость от параметров.

Алгоритмы расчета, базирующиеся на методах линейной алгебры с использованием результатов численного интегрирования, позволяют решать вопрос об устойчивости решений, их бифуркациях и тем самым исследовать процесс перестройки структуры разбиения фазового пространства на траектории с изменением параметров.

В физическом эксперименте трудно, а подчас и практически невозможно проконтролировать начальные условия исследуемого процесса. Кроме того, при вариации параметров одно решение (один конкретный динамический режим) может потерять устойчивость и смениться другим, область притяжения которого близка к области первого режима. Это явление может ускользнуть от наблюдателя и в итоге приводить к необоснованным выводам [81].

4.3.2 Расчет отображений Пуанкаре

В фазовом пространстве R^N системы (4.34) зададим $N - 1$ -мерную поверхность S , удовлетворяющую требованиям, предъявляемым к секущей Пуанкаре, уравнение которой имеет вид

$$S(x_1, \dots, x_N, \mu_1, \dots, \mu_k) = 0. \quad (4.35)$$

Отображение Пуанкаре P преобразует точки, принадлежащие

поверхности S , в точки этой же поверхности, т. е. отображает секущую S в себя: для любой точки $x_n \in S$ преобразованная точка $P(x_n) = x_{n+1} \in S$. Для нахождения отображения P необходимо решать систему уравнений (4.34) при фиксированных значениях параметров μ_i , задав начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x^0 \in S,$$

и последовательно находить точки пересечения полученного решения (т. е. траектории Γ , выходящей из x^0) с поверхностью S .

Возникают две самостоятельные задачи.

Первая – это расчет траектории $x(t)$ системы (4.34) при заданных значениях параметров и начальных условиях.

Вторая – определение координат точек пересечения траектории с секущей поверхностью, т. е. построение отображения (сечения) Пуанкаре.

Вычислить траекторию можно с помощью любого из известных методов численного интегрирования.

Например, при исследовании хаотических систем широко применяются методы Рунге-Кутты, в частности, 4-го порядка. Для определения координат точек пересечения Γ с S на каждом временном шаге интегрирования системы (4.34) вычислялось значение функции $S(x, \vec{\mu})$ до тех пор, пока не был зарегистрирован момент смены знака $S(x)$.

Пусть, например, на интервале времени от t_k до $t_k + \Delta t = t_{k+1}$ (где Δt – шаг численного интегрирования) произошла смена знака функции $S(x)$, как показано на рисунке 4.4. Необходимо уточнить точку x_S пересечения траектории с секущей.

Эту задачу можно решать с заданной степенью точности, применяя методы интерполяции.

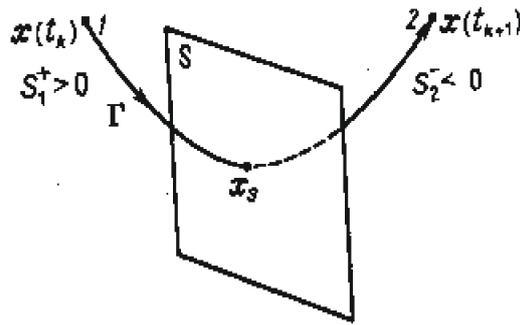


Рисунок 4.4 – К иллюстрации метода расчета точки пересечения траектории с секущей поверхностью S

В дальнейших расчетах используем простой и экономичный метод, предложенный Хеномом, который заключается в следующем [28]. Введем в рассмотрение переменную $x_{N+1} = S(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Тогда с учетом (4.34) запишем

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i. \quad (4.36)$$

Теперь секущую поверхность определяет уравнение

$$x_{N+1} = 0. \quad (4.37)$$

Рассмотрим новую систему, полученную добавлением к (4.34) уравнения

$$\dot{x}_{N+1} = f_{N+1}(x_1, \dots, x_N), \quad f_{N+1} = \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (4.38)$$

Преобразуем найденную систему из $N + 1$ уравнений так, чтобы введенная в рассмотрение новая переменная x_{N+1} стала, формально, эквивалентной переменной t в (4.34). Для этого поделим первые N уравнений на

шаг. Предпочтительнее при этом использовать какой-либо один метод интегрирования как при расчете траектории (при решении системы (4.34)), так и при нахождении отображения Пуанкаре (при решении системы (4.38)). При составлении программы, реализующей описанный алгоритм Хенона [28], нет необходимости в отдельной записи уравнений (4.34) и (4.38), которые можно вводить в общей форме ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$dx_i / d\tau = qf_i(x_1, \dots, x_N), \quad dt / d\tau = q, \quad \tau = x_{N+1}. \quad (4.42)$$

Из уравнений (4.42) система (4.34) получается при $q = 1$, а система (4.38) при $q = (f_{N+1})^{-1}$. Таким образом, применение алгоритма Хенона в совокупности с одним из численных методов интегрирования позволяет в принципе просто получить множество точек пересечения траектории Γ с секущей S .

Метод секущей Пуанкаре используется и при анализе динамики неавтономных систем. Введем периодическое воздействие в первое уравнение системы (4.34):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, \bar{\mu}) + B \sin pt, \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_N, \bar{\mu}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Здесь B – амплитуда гармонического воздействия, p – нормированная частота вынуждающей силы, t – безразмерное время. Число фазовых координат системы (4.43) осталось равным N . Однако в силу неавтономности системы размерность фазового пространства (4.43) стала равной $N + 1$.

Один из способов заключается в следующем. Как видно из (4.43), N -мерное пространство фазовых координат x_i , $i = 1, \dots, N$, отображается в себя (т. е. точка $x_i^{n-1} \in R^N$ переходит в точку $x_i^n \in R^N$) спустя время, равное периоду внешней силы, $t_0 = 2\pi / p$. Для случая $p = 1$ это время $t_0 = 2\pi$. Если

выбрать шаг интегрирования $\Delta t = t_0 / k$, где k – целое число, то можно запоминать значения $\{x_i^n\}$, соответствующие моментам времени nt_0 , где $n = 1, 2, 3, \dots$

Например, для $p = 1$ при шаге счета $\Delta t = 2\pi/10$ необходимо запоминать каждую десятую точку, полученную при интегрировании (4.14). Набранный таким образом массив данных представляет собой дискретное (стробоскопическое) описание динамического процесса в системе в моменты времени, кратные периоду внешнего воздействия. В качестве секущей в данном методе выступает каждый раз новая поверхность, определяемая условием

$$t_n = nt_0 = 2\pi n / p, \quad (4.44)$$

а отображение Пуанкаре представляется в виде дискретного набора значений фазовых координат $\{x_i^n\}$ в указанные моменты времени и имеет размерность N .

Далее рассмотрим общую двумерную регулярную модель с параметром. В отличие от предлагаемой ниже, в ней возмущение правой части от бифуркационного параметра μ не зависит. Система (4.34) представляет собой двухмерное ($N = 2$) неавтономное уравнение

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \vec{\mu}) + B \sin pt, \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \vec{\mu}). \quad (4.45)$$

Для простоты здесь примем $p = 1$.

Подобными уравнениями можно описать явление синхронизации генератора Ван дер Поля. В памяти компьютера в этом случае имеем набор из n пар точек $\{x_1^n, x_2^n\}$, характеризующих состояние системы (4.45) в дискретные моменты времени $nt_0 = n \cdot 2\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Если изобразить это множество точек на плоскости переменных x_1, x_2 , то получим отображение двумерного

фазового пространства на себя через период внешней силы, представляющее собой проекцию множества точек пересечения траектории Γ с секущими плоскостями на интересующую нас плоскость координат. На рисунке 4.5 показан случай синхронизации на частоте внешней силы, когда начальная точка (x_1^0, x_2^0) отображается в себя же через интервалы времени $\Delta t = 2\pi$.

Регулярным (периодическим) режимам, как и в автономном случае, соответствует конечное при сколь угодно больших n число точек в отображении Пуанкаре [39, 101]. В режиме странного аттрактора множество точек $\{x_1^n, x_2^n\}$ на плоскости выглядит случайным. Их число всегда равно n , т. к. фазовая траектория не замыкается. Это стохастическое множество эволюционирует с изменением параметров системы μ . Наглядность отображения Пуанкаре при $N > 2$ утрачивается, и в этих случаях прибегают к построению его двухмерных проекций.

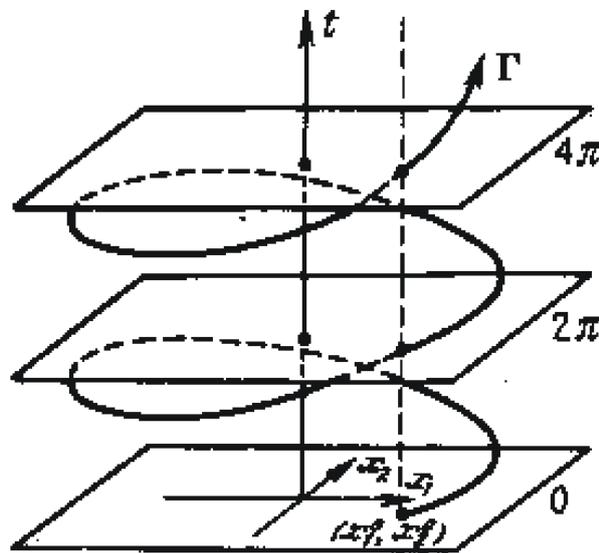


Рисунок 4.5 – Отображение фазовой плоскости неавтономной системы (4.45) на себя через период внешней силы в режиме синхронизации

Рассмотрим один из примеров, в котором указанным методом анализируется динамика неавтономной трехмерной системы [114]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \quad \dot{y} = -0,125(x^2 + 3z^2)x - k_1 y + B \cos t, \\ \dot{z} &= -k_2 \cdot 0,125(3x^2 + z^2)z + B_0.\end{aligned}\tag{4.46}$$

В уравнениях (4.46) k_1 , k_2 и B_0 – параметры системы. Для значений $k_1 = k_2 = 0,5$ и $B_0 = 0,03$ система интегрировалась для различных амплитуд B и вычислялись предельные множества в трехмерном отображении фазового пространства на себя через период внешней силы $t_0 = 2\pi$.

Авторами [85] обнаружено при этом интересное явление бифуркаций двух-периодических решений.

4.4 Неавтономная модель конкуренции с возмущением правой части

В работах [51, 53, 85] рассматриваются предельные циклы в нелинейных системах, на отдельных участках которых наблюдается неустойчивость. Малые по амплитуде периодические возмущения в таких нелинейных системах могут вызвать хаотические колебания.

4.4.1 Невозмущенная модель Лотки-Вольтерра

Рассмотрим известную задачу совместного существования двух видов (задача Лотки-Вольтерра) (3.24)–(3.25). В разделе 3 она была использована для конструирования модели «производитель – посредник». Современный анализ результатов по проблемам популяционной экологии вместе с оригинальными исследованиями можно найти в [106, 109]. Далее будем придерживаться исторически сложившейся терминологии, называя переменные x или ξ – численностью жертв, или просто "жертвами", а переменные y или η – "хищниками". Там, где это не вызывает недоразумения, кавычки будем опускать.

Нетривиальное состояние равновесия имеет координаты

$$x_* = s/\gamma_2, \quad y_* = s/\gamma_1. \quad (4.47)$$

С помощью замены переменных – сдвиг нуля в стационар (x_*, y_*) система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta), \\ d\eta/dt &= \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ее интеграл:

$$\frac{e^{\xi/\gamma_1} e^{\eta/\gamma_2}}{[\gamma_1(\xi + x_*)]^{x_*/\gamma_1} [\gamma_2(\eta + y_*)]^{y_*/\gamma_2}} = C,$$

где

$$C = \frac{e^{\xi_0/\gamma_1} e^{\eta_0/\gamma_2}}{[\gamma_1(\xi_0 + x_*)]^{x_*/\gamma_1} [\gamma_2(\eta_0 + y_*)]^{y_*/\gamma_2}}.$$

При начальных условиях $\xi_0 > -x_*$, $\eta_0 > -y_*$ интегральные кривые системы (4.48) замкнуты (кроме одной точки $\xi = 0$, $\eta = 0$).

4.4.2 Преобразования периодически возмущенной системы

Рассмотрим модель Лотки-Вольтерра с частотой возмущения Ω , близкой к частоте предельного цикла системы без возмущений. Пусть абсолютная скорость размножения жертв имеет периодическую составляющую $m \sin \psi$, где $\dot{\psi} = \Omega$, $\Omega = \text{const}$, $m = \text{const}$ и при $t = 0$, $\psi_0 = 0$.

Уравнения (2.26) и (4.48) запишутся так:

$$\begin{cases} dx/dt = rx - \gamma_1 xy + m \sin \Omega t, \\ dy/dt = -sy + \gamma_2 xy; \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} d\xi/dt = -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta) + m \sin \Omega t, \\ d\eta/dt = \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta). \end{cases}$$

В переменных ρ , θ система (4.49) примет вид:

$$\begin{aligned} d\rho/dt &= -2\gamma_1\rho^2 \sin\theta \cos\theta(\omega \cos\theta - s \sin\theta) + m \cos\theta \sin\Omega t/2, \\ d\theta/dt &= \omega + 2\gamma_1\rho \sin\theta \cos\theta(s \cos\theta + \omega \sin\theta) - m \sin\theta \sin\Omega t/(2\rho). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Рассмотрим поведение системы (4.50), характеризующееся равенством или близостью периода (частоты) предельного цикла невозмущенной системы и возмущения. Уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} d\rho/dt &= -2\rho^2 \sin\psi \cos\psi(\cos\psi - \sin\psi) + m \cos\psi \sin\psi/2, \\ d\theta/dt &= 1 + 2\rho \sin\psi \cos\psi(\cos\psi + \sin\psi) - m \sin\psi \sin\psi/(2\rho). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Здесь параметры s , r , γ_1 , γ_2 систем (4.49) равны единице.

4.4.3 Построение области существования периодических траекторий

Следуя методике работы [96], из второго уравнения системы (4.51), согласно условию $d\theta/dt \geq 0$ для периодических траекторий, находим значения положительных решений на границе области.

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16m \sin^3 \psi \cos \psi (\cos \psi + \sin \psi)}}{8 \sin \psi \cos \psi (\cos \psi + \sin \psi)}. \quad (4.52)$$

На плоскости ρ, ψ область периодических траекторий определяется в виде односвязной области D , для которой $d\theta/dt > 0$, и на границе – $d\theta/dt = 0$. Положительное частное решение:

$$\rho_{**} = \sqrt{m} / (2\sqrt{\cos \psi - \sin \psi}),$$

найденное из первого уравнения системы (4.51), существует на субинтервалах по ψ

$$(0, \pi/4), (5\pi/4, 6\pi/4), (6\pi/4, 7\pi/4), (7\pi/4, 2\pi).$$

Здесь и далее субинтервалы не включают граничных точек.

Авторами [85] доказано: если период предельного цикла невозмущенной системы (4.48) равен периоду внешнего возмущения, то траектория системы (4.49) не замыкается и колебания нарастают.

Сигнатура характеристических показателей на участке $(5\pi/4, \psi_*)$ имеет вид «-», «0», «+», что служит строгим критерием «странности» квазиаттрактора. Возмущающий аperiodический участок нарушает замыкание траектории.

На субинтервале $(\pi, 5\pi/4)$ нет положительных решений, и, траектория отходит от нуля. С помощью данной методики выявить на этом интервале бифуркацию не удалось.

Несмотря на то, что предельный цикл неустойчив, колебания могут стабилизироваться за счет выхода из синхронного движения. Рассмотрим перестройку синхронного движения. Решение системы растет и попадает на границу синхронного поведения. В момент разрушения синхронного движения система стремится вернуться в устойчивое состояние; доходя до него, захватывается опять в синхронное движение, и процесс повторяется.

Как видно из уравнения (4.51), величина ψ_* зависит от m , при малых m (малых ψ_*) большие участки апериодических траекторий вызывают слабо наблюдаемую хаотизацию колебаний.

Результаты, полученные в разделе 4 работы при исследовании системы Лотки-Вольтера с различными возмущениями, приведены в Приложении В.

4.4.4 Хаотическая потеря устойчивости

Рассмотрим известную задачу совместного существования двух видов (задача Лотки-Вольтера). Обозначения и физический смысл переменных и параметров взяты из работы [96]. Пусть физические, биологические или экономические (для моделей конкуренции) факторы вызывают периодическое изменение абсолютной и относительной скорости вымирания «хищников».

$$\begin{aligned} dx/dt &= rx - \gamma_1 xy, \\ dy/dt &= -S(t)y + \gamma_2 xy + n \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Здесь $S(t) = s \left(1 + \frac{n}{s} \cos \Omega t \right)$; Ω – частота периодических возмущений, близка к частоте предельного цикла без возмущений. Автономная система, соответствующая (4.53), при $n = 0$ имеет нетривиальное состояние равновесия [85].

С помощью замены переменных система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta), \\ d\eta/dt &= \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta) + (n - ny_*) \cos \Omega t - m\eta \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Пусть параметры таковы, что $s = r = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, тогда уравнения (4.54)

примут следующий вид:

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= -(\eta + \xi\eta), \\ d\eta/dt &= \xi + \xi\eta - n\eta \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.55)$$

В переменных ρ, θ система (4.55) запишется так:

$$\begin{aligned} d\rho/dt &= -2\rho^2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) - n\rho \sin^2 \theta \cos \Omega t, \\ d\theta/dt &= 1 + 2\rho \sin \theta \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta) - n \sin \theta \cos \theta \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Граница области периодических траекторий, как и ранее, определится из условия $d\theta/dt = 0$ и для движения, близкого к синхронному, имеет вид:

$$\rho^*(\psi) = \frac{-1 + n \sin \psi \cos^2 \psi}{2 \sin \psi \cos \psi (\cos \psi + \sin \psi)},$$

где $\theta = \psi$, $\psi = \Omega t$.

В системе (4.56) имеет место тривиальное решение и решение (квазистатическое) на субинтервалах $(\pi/4, \pi)$, $(5\pi/4, 2\pi)$ для движения, близкого к синхронному:

$$\rho^0(\psi) = \frac{n \sin \psi}{2(\sin \psi - \cos \psi)}. \quad (4.57)$$

Характеристические показатели решений (4.57) имеют вид:

$$\lambda_1 = n \sin^2 \psi \cos \psi, \quad \psi \in (\pi/4, \pi), (5\pi/4, 2\pi). \quad (4.58)$$

Решение (4.57) является симметричным на полупериодах вместе с точками разрыва ($\psi = \pi/4$, $\psi = 5\pi/4$).

Таблица 4.1 – Характеристические показатели решений, близких к синхронным

ψ	$(0, \pi/4)$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi, 5\pi/4)$	$(5\pi/4, 3\pi/2)$	$(3\pi/2, 2\pi)$
λ_1	0 (-)	0 (-)	0 (+)	0 (+)	0 (+)	0 (-)
λ_2, λ_3	0	0	0	0	0	0

Здесь 0 (-), 0 (+) означает притяжение и отталкивание от нуля в выражении (4.58) на соответствующем субинтервале.

На субинтервалах $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ частота несимметрична. Для малых значений параметра n изображающая точка не попадает в область апериодических траекторий и имеет на полупериодах на решениях (4.57) частоту

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\rho=\rho^0} = 1 + \frac{n \sin \psi}{(\sin \psi - \cos \psi)}. \quad (4.59)$$

С физической точки зрения эта особенность движения не допускает существования синхронности в системе. Движение устойчиво в силу симметричности решений и преходящее в силу несимметричности частоты.

4.4.5 Характеристические показатели решений при бифуркации для движений, близких к синхронным

В момент бифуркации ($\psi = \psi^*$), характеризующей исчезновение колебаний, появляются апериодические переменные ρ^* , $-\rho^*$. Отклонения или вариации величин ρ^* , $-\rho^*$ обозначим через $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_2$ соответственно. Внесем значения $\rho^* + \delta\rho_1$, $-\rho^* + \delta\rho_2$ в дифференциальное уравнение. Система возмущенных уравнений в момент бифуркации запишется так:

$$d\delta\rho_1/dt = -2(2\rho^*\delta\rho_1 + \delta\rho_1^2)\sin\psi^*\cos\psi^*(\cos\psi^* - \sin\psi^*) - n\delta\rho_1\sin^2\psi^*\cos\psi^*,$$

$$d\delta\rho_2/dt = -2(-2\rho^*\delta\rho_2 + \delta\rho_2^2)\sin\psi^*\cos\psi^*(\cos\psi^* - \sin\psi^*) - n\delta\rho_2\sin^2\psi^*\cos\psi^*.$$

Здесь ρ^* , ψ^* – бифуркационные значения переменных; $\psi^* \in (\pi, 3\pi/4)$.

Характеристические показатели апериодических решений имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= -4\rho^*\sin\psi^*\cos\psi^*(\cos\psi^* - \sin\psi^*) - n\sin^2\psi^*\cos\psi^*, \\ \lambda_2^* &= 4\rho^*\sin\psi^*\cos\psi^*(\cos\psi^* - \sin\psi^*) - n\sin^2\psi^*\cos\psi^*.\end{aligned}\tag{4.60}$$

Согласно выражениям (4.60) λ_1^* , λ_2^* могут иметь противоположные знаки и тогда сигнатура характеристических показателей решений имеет вид «-», «0», «+». Таким образом, бифуркация вносит, в силу нарушения симметрии характеристических показателей на полупериодах, несимметричность в структуру характеристических показателей, а с ней неустойчивость и «уход» траектории на бесконечность. На рисунке 4.5 приведена потеря устойчивости предельного цикла ($n = 0,15$; $\xi_0 = \eta_0 = 0,1$). Здесь начальные возмущения ξ_0, η_0 выбраны так, чтобы при $n = 0$ траектория находилась в области притяжения к особой точке (x^*, y^*) в системе координат XOY .

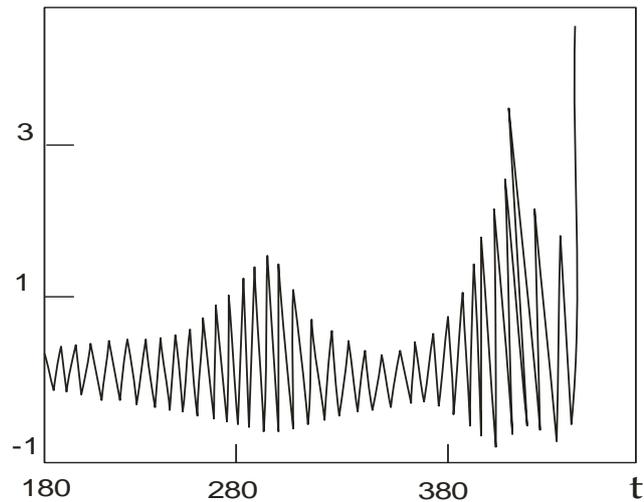


Рисунок 4.5 – Потеря устойчивости предельного цикла

4.5 Результаты расчетов периодически возмущенных систем в математическом пакете

4.5.1 Синусоидальное возмущение численности пассивного актора

Результаты численного моделирования приведены в виде графика решения для «жертв» в программе SMath Studio (рисунок 4.6):

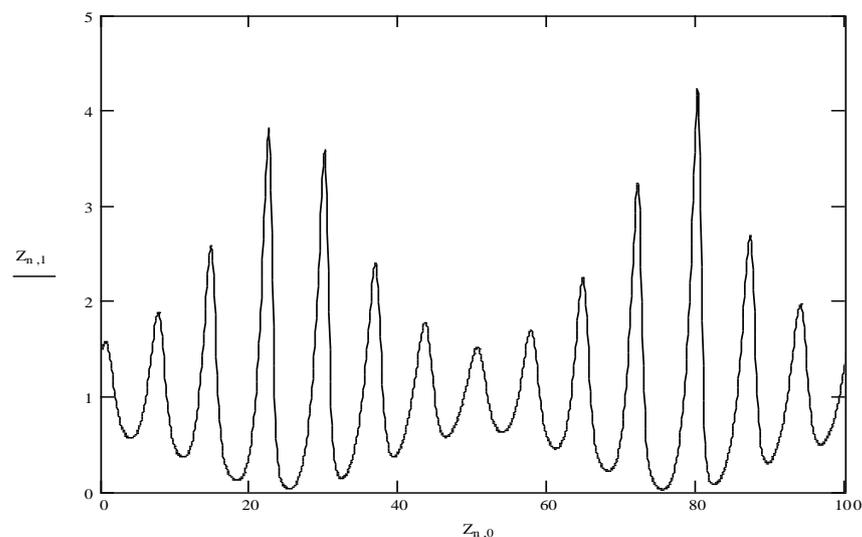


Рисунок 4.6 – Периодические несинусоидальные изменения численности «жертв» при малой амплитуде ($m = 0,1$) внешнего воздействия

4.5.2 Периодическое возмущение численности типа $(\sin(\Omega \cdot t))^2$

Результаты численного моделирования в программе SMath Studio представлены на рисунках 4.7 – 4.10:

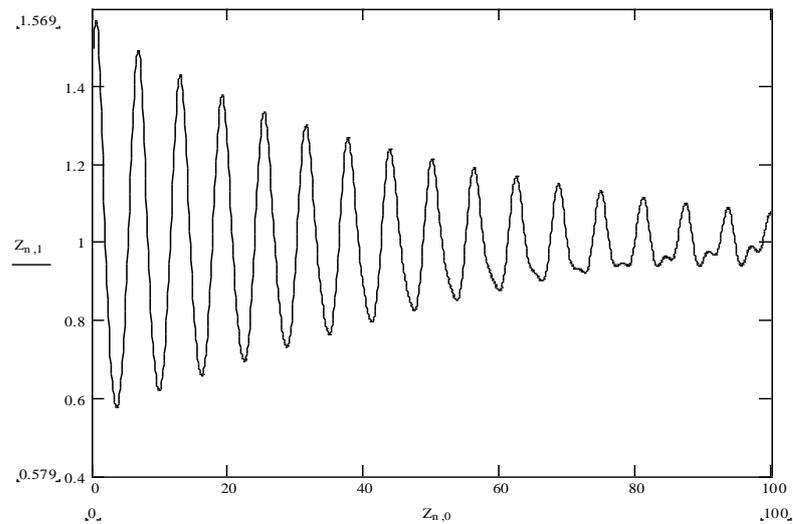


Рисунок 4.7 – Асимптотически устойчивые колебания численности «жертв»

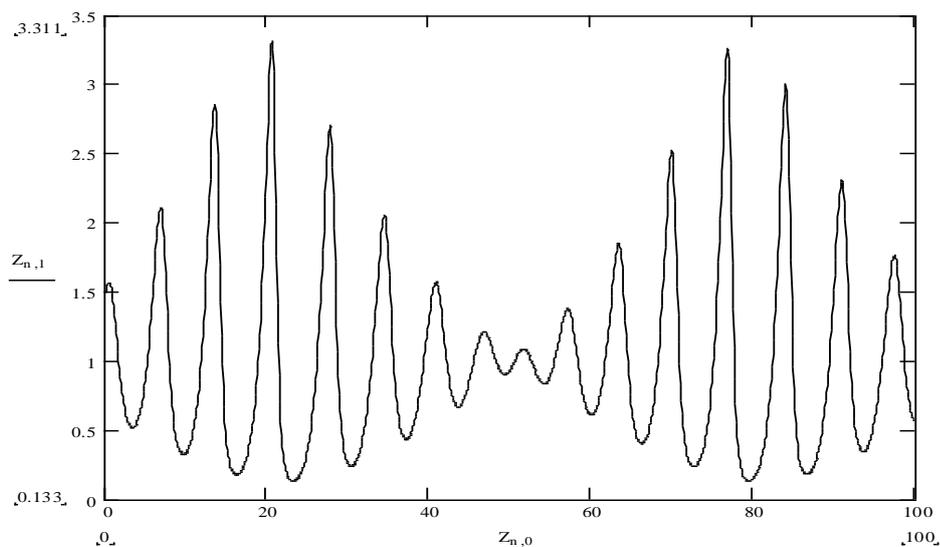


Рисунок 4.8 – Периодические несинусоидальные изменения численности «жертв» при малой амплитуде ($m = 0,1$) внешнего воздействия на «хищников»

4.5.3 Синусоидальное возмущение численности активного актора

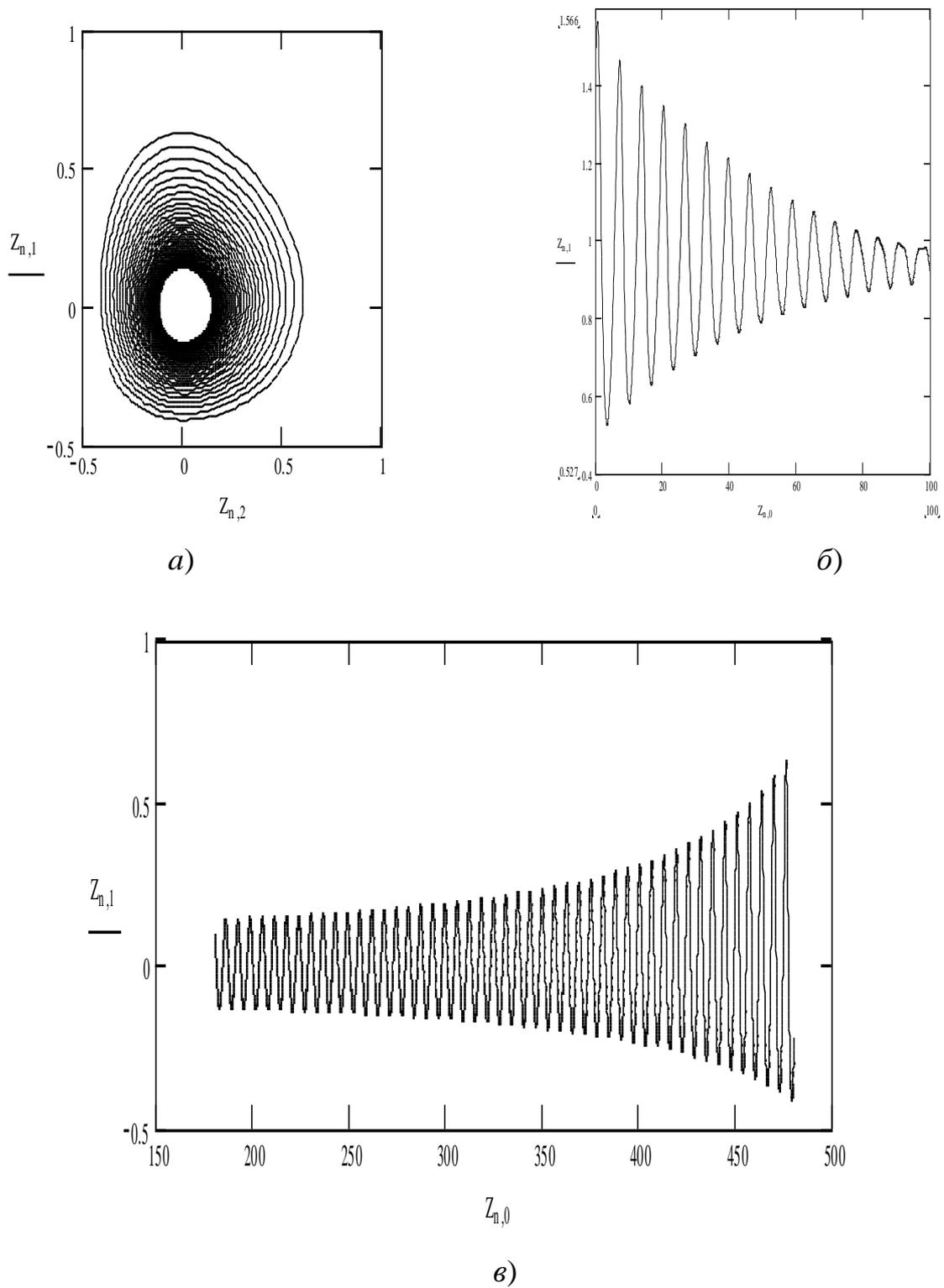


Рисунок 4.9 – Численность «жертв»: а) устойчивый фокус и б) его фазовый портрет; в) неустойчивый фокус

4.5.4 Появление хаоса в результате внешнего, близкого к резонансному, воздействия

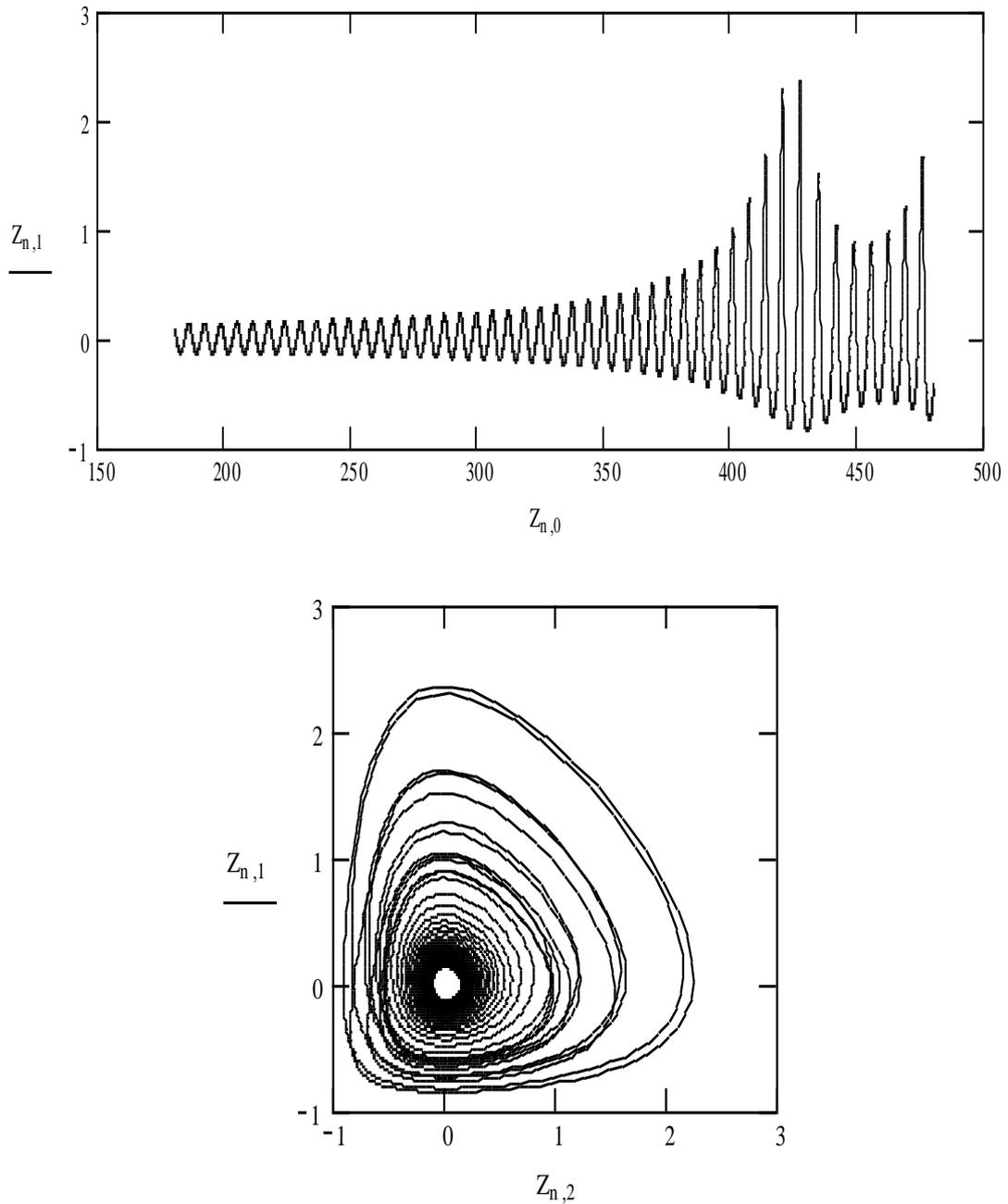


Рисунок 4.10 – График хаотического изменения численности «жертв» и фазовый портрет системы

Аналогичные расчеты для других типов возмущений и параметров приведены в приложении В.

4.6 Выводы по разделу

Численные эксперименты показывают, что синусоидальное воздействие на систему могут привести к её хаотической динамике. Изменения динамики очевидны в фазовом пространстве, если сравнить рисунок 4.9 и рисунок 4.10. Причина появления хаоса здесь та же, что и для появления нерезонансного тора при размерности задач $n > 2$, – неавтономность системы в результате явно зависящего от времени периодического возмущения с периодом, несоразмерным с периодом собственного движения. Заметим, что хаотические движения появляются не только в окрестности странных аттракторов, которых в данной задаче быть не может, учитывая ее малую размерность ($n = 2$). Прикладное значение исследований раздела 4 определяется тем, что полученные здесь результаты позволяют рассмотреть внешнее влияние на технические системы природных и антропогенных факторов, а также периодическое воздействие государственных регуляторов на конкурентные экономические системы.

Результаты раздела опубликованы в работах автора [51, 54, 94].

ВЫВОДЫ

В результате проведенного исследования сформулирована и решена важная научно-техническая проблема математического моделирования и численного анализа нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием.

На основе анализа литературных источников и характерных признаков нелинейных динамических систем, выбран и обоснован универсальный класс математических моделей с конкурентным взаимодействием, который позволил выделить три характерных класса объектов и их динамические модели для дальнейшего исследования. Такие модели относятся к типу «мягких». Они сохраняют все качественные особенности данного класса объектов.

Проведенные в работе исследования дали следующие результаты.

1. Для многоакторной динамической модели с конкурентным взаимодействием, отличающейся от известных многомерностью и структурой матрицы линейных взаимодействий акторов определены условия существования стационарных множеств тороидального типа в расширенном фазовом пространстве, учет которых позволяет избегать появления квази-хаотических режимов функционирования систем, приводящих к катастрофам. Для линейной модели взаимосвязанной системы из трех акторов, получены решения системы двумя методами – численно-аналитическим и чисто численным. Сравнение полученных решений показало, что временная дискретизация модели, независимо от шага, вполне допустима, и не является причиной возникновения хаотического поведения системы. Показано, что причиной возникновения хаоса является сама структура модели и критические значения ее параметров.

Полученные графики проекций и сечений фазовых портретов при критических значениях параметров подтверждают наличие торообразного по двум переменным подмножества в шестимерном пространстве. Полученное подмножество является притягивающим, ограниченным, а траектории на нем

бесконечны, и не являются ни точками, ни циклами, т. е. выполнен основной критерий «странности» аттракторов. Похожие явления наблюдаются и в четырехмерной модели двух акторов. Таким образом, искомое критическое подмножество в пространстве параметров было определено, а гипотеза о возможности возникновения хаоса в результате линейного взаимодействия акторов подтвердилась даже для простейшей модели.

2. Впервые показано, что математическая модель динамического взаимодействия системы параллельно включаемых насосных агрегатов насосных станций, отличающиеся от известных учетом их нелинейных связей, позволяет адекватно описать их взаимодействие при переходе между двумя стационарными состояниями. Анализ переходных процессов, возникающих в динамической модели системы включения двух и более насосных агрегатов показывает, что переходные процессы при некоторых значениях параметров могут устанавливаться медленно, демонстрируя квази-хаотическую динамику, что может привести к авариям системы. Посредством предложенного подхода "конкуренции" агрегатов получены практически важные результаты о возможности и условиях возникновения нежелательных квази-хаотических переходных режимов.

3. На базе модели Вольтерра разработана математическая модель, описывающая конкуренцию за ресурс в отношениях между подсистемами. Модификация модели включает дополнительного производителя. Получили дальнейшее развитие математические модели конкурирующих систем с множеством акторов, которые отличаются от известных тем, что включают два типа (солидарных и антагонистических) акторов. Исследована динамика их состояний, что позволило определить степень устойчивости системы при различных типах и параметрах интенсивности конкуренции акторов

4. Для класса моделей систем с возмущением, в качестве первого приближения, выбраны синусоидальные возмущения скорости роста фазовых переменных. Это обусловлено тем, что линеаризация невозмущенной модели имеет синусоидальное решение. Было подтверждено выдвинутое

предположение о бифуркации в случае сближения периодов этих движений.

В результате численных экспериментов на исследуемой модели при разных типах возмущений впервые были обнаружены бифуркации при изменении как амплитуды, так и периода возмущения, которые не наблюдались в базовой модели Вольтерра.

С использованием предложенного метода численного анализа показано, что для исследованного множества моделей с возмущенной правой частью при критических значениях параметров, даже незначительное изменение амплитуды (в пределах 5%) приводит к переходу этих систем от устойчивых периодических движений к устойчивому росту, и далее – к хаотическим колебаниям.

Обоснованность и достоверность научных результатов и выводов диссертационной работы обеспечивается и подтверждается корректным использованием основных положений известного и апробированного математического аппарата, который ранее неоднократно был проверен сравнением с экспериментальными исследованиями, и применением его результатов.

В результате практического применения предлагаемых в работе моделей и методов обнаружено квази-хаотическое поведение объектов различной природы – от экологических и экономических до технических систем электро-, газо- и водоснабжения. Показано, что эти явления явились следствием конкурентного или солидарного нелинейного взаимодействия элементов многосвязных систем.

Предложены рекомендации и методы определения областей расширенных фазовых пространств для избегания хаотической динамики рассмотренных систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Aiello W. G. A time-delay model of Single Species Growth with Stage Structure / W. G. Aiello, H. I. Freedman // *Math Biosci.* – 1990. – № 101. – P. 139–153.
2. Aiello W. G. Analysis of a model representing stage – Structure Population Growth with State – Dependent time Delay / W. G. Aiello, H. I. Freedman, J. Wu // *SIAM J. Appl. Math.* – 1992. – № 52. – P. 855–869.
3. Al-Omari J. F. M. A nonlocal reaction – diffusion model for a single species with stage structure and distributed maturation delay / J. F. M. Al-Omari, S. A. Gourley // *Euro Jornal of Applied mathematics.* – 2005. – № 16. – P. 37–51.
4. Al-Omari J. F. M. Stability and Traveling Fronts in Lotka-Volterra Competition Models with Stage Structure / J. F. M. Al-Omari, S. A. Gourley // *SIAM. J. Appl. Math.* – 2003. – № 63(6). – P. 2063–2086.
5. Al-Omari J. F. M. Modeling and analysis of Stage – Structured Population Model with State – Dependent Maturation Delay and Harvesting / J. F. M. Al-Omari, A. Tallafha // *Int. Journal of Math. Analysis.* – 2007. – № 1(8). – P. 391–407.
6. AlRefai W. A. Mathematical model of chaos, caused by international trade / W. A. AlRefai // *Технологический аудит и резервы производства.* – 2013. – № 5/4 (13). – С. 6–7.
7. Alrefai W. A. Schrödinger equation for propagation in photonic crystal fibers / Waleed Ahmed Mahmoud Alrefai // *EUREKA: Physical Sciences and Engineering,* – 2016, No. 1. – P. 13–20.
8. Alexeev I. Formation of Compensation Mechanism of Regional Enterprises' Human Resources Regeneration in the Labor Potential Development System. / I. Alexeev, O. Voloshyn // *ECONTECHMOD. An International Quaterly Journal.* Vol. 2. 2013. No. 3. – P. 3–8.
9. Anishchenko V.S. *Dynamical Chaos – Basic Concepts.* – Leipzig: Teubner-Texte zur Physik, Bd 14, 1987. – 128 p.
10. Arditi R. *How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic*

Ecology / R. Arditi, L. R. Ginzburg // Oxford University Press. – 2012. – 112 p.

11. Benchetrit G. Concepts and Formalizations in the Control of Breathing / G. Benchetrit, P. Baconnier, J. Demongeot // Manchester: Manchester University Press. – 1987. – 112 p.

12. Beretta E. Convergence results in a well – known Delayed Predator-Prey System / E. Beretta, Y. Kuang // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – № 204. – P. 840–853.

13. Brauer F. Stability regions and transition Phenomena for Harvesting Predator-Prey Systems / F. Brauer, A. C. Soudack // J. Math. Biol. – 1979. – № 7(1979a). – P. 319–337.

14. Brauer F. Stability regions in Predator-Prey Systems with Constant – Rate Pray Harvesting / F. Brauer, A. C. Soudack // J. Math. Biol. – 1979. – № 8(1979b). – P. 55–71.

15. Brauer F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. – Heidelberg: Springer Verlag, 2000. – 201 p.

16. Cushing J. M. Integrodifferential Equation and Delay models in Population Dynamics / J. M. Cushing. – Heidelberg: Springer Verlag, 1977. – 215 p.

17. Dai G. Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvesting Predator-Prey Systems / G. Dai, M. Tang // SIAM J. Appl. Math. – 1998. – № 58. – P. 193–210.

18. Dolinskii A. Nonequilibrium state of engineering systems / A. Dolinskii, B. Draganov, V. Kozirskii // ECONTechMOD. An International Quaterly Journal. Vol. 1. –2012, No. 1, P. 33-35.

19. Farkas M. Periodic Motions / M. Farkas. – New-York: Springer-Verlag, 1994. – 577 p.

20. Gause G.F. The struggle for existence / G.F. Gause. – Baltimore, 1934.– 229 p.

21. Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems / L. Glass, M. C. Mackey // Science. – 1977. – Vol. 197. – P. 287–289.

22. Glass L. Pathological conditions resulting from instabilities in Physiological control systems / L. Glass, M. C. Mackey // Ann. N. Y. Acad. Sci. –

1979. – Vol. 316. – P. 214–235.

23. Goel N. S. On the Volterra and other nonlinear models of interacting population / N. S. Goel, S. C. Maitra, E. W. Montroll // *Rev. Modern Phys.* – 1971. – Vol. 43. – P. 231–276.

24. Gopalsamy K. Stability of Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics / K. Gopalsamy. – Dordrechtb: Kluwer, 1992. – P. 212.

25. Gourley S. A. A predator-prey reaction-diffusion system with nonlocal effects / S. A. Gourley, N. F. Britton // *J. Math. Biol.* – 1996. – № 34. – P. 297–333.

26. Gourley S. A. Dynamics of the diffusion Nicholson's blowflies equation with distributed delay / S. A. Gourley, S. Ruan // *proc. Roy. Soc. Edin. A.* – 2000. – Vol. 130. – P. 1275–1299.

27. Haken H. Synergetics: introduction and advanced topics / H. Haken. – Springer-Verlag, 2004. – 250 p.

28. Henon M. On the Numerical Computation of Poincare Maps / M Henon // *Physica D.* 1982. V.5, №2, 3. – P. 412-414.

29. Hoppensteadt F. Predator-prey model / F. Hoppensteadt // *Scholarpedia.* – 2006. – № 1(10). – P. 1563.

30. Hutchinson G. E. Circular Causal Systems in ecology / G. E. Hutchinson // *Annals of the New York Academy of Science.* – 1948. – Vol. 50. – P. 221–246.

31. Inozemtsev G. Scientific and technical preconditions of electric field application at plants protection / G. Inozemtsev // *ECONTECHMOD. An International Quaterly Journal.* Vol. 1. – 2012, No. 1, – P. 47–50.

32. Jost C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // *J. Anim. Ecol.* – 2005. – № 74(5). – P. 809–816.

33. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics / Y. Kuang . – New York: Academic Press, 1993. – 324 p.

34. Luding D. Qualitative analysis of insect Outbreak Systems: the spruce budworm and forest / D. Luding, D. D. Jones, C. S. Holling // *J. Anim. Ecol.* – 1978. – Vol. 47. – P. 315–332.

35. MacArthur R. Graphical analysis of ecological systems / R. MacArthur // Division of biology report Perinceton University, 1971. – 31 p.
36. MacDonald N. Time lags in Biological models / N. MacDonald. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1978. – 215 p.
37. Martin A. Predator-Prey models with Delay and Prey Harvesting / A. Martin, S. Ruan // J. Math. Biol. – 2001. – № 43. – P. 247–267.
38. Myerscough M. R. An analysis of an Ordinary Differential Equation model for a Two – Species Predator-Prey System with Harvesting and Stocking / M. R. Myerscough, B. F. Gray, W. L. Hogarth, J. Norbury // J. Math. Biol. – 1992. – Vol. 30. – P. 389–411.
39. Nasritdinov G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction / G. Nasritdinov, R. T. Dalimov // Current Research J. of Economic Theory. – 2010. – № 2(2). – P. 32–40.
40. Nunney L. Absolute stability in predator-prey models / L. Nunney // Theoret. Pop. Biol. – 1985. – № 28. – P. 109–132.
41. Rössler O.E. An Equation for Continuous Chaos / O.E. Rössler // Phys. Lett. 1976. V. 57A, №5. P. 397-398.
42. Ruan S. Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays / S. Ruan // Quart. Appl. Math. – 2001. – № 59. – P. 159–173.
43. Sahal D. System Complexity : Its Conception and measurement in the Design of Engineering systems / D. Sahal // IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., SMC – 6, 1976 – 152 p.
44. Song X. Modeling and Analysis of A single Species System with Stage Structure and Harvesting / X. Song, L. Chen // Mathematical and Computer Modeling. – 2002. – № 36. – P. 67–82.
45. Stolen R. H. Nonlinearity in fiber transmission / R. H. Stolen // Proceedings of IEEE. – 1986, vol. 68, № 10. – P. 1232–1236.
46. Verhulst P. J. Notice Sur la lois Que la Population Suit Dans Sons Croissement / P. J. Verhulst // Correspondence Mathematique et Physique. – 1838. –

№ 10. – P. 113–121.

47. Wangersky P. J. Absolute stability, Time lag in prey-predator Population models / P. J. Wangersky, W. J. Cunningham // *Ecology*. – 1957. – № 38. – P. 136–139.

48. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. – New York: Springer, 1996. – 316 p.

49. Xiao D. Bogdanov-Takens bifurcations in predator-prey systems with constant rate harvesting / D. Xiao, S. Ruan // *Fields Institute Communications*. – 1999. – № 21. – P. 493–506.

50. Zou X. Delay induced Travelling Wave Fronts in Reaction Diffusion Equations Equations of KPP-Fisher Type / X. Zou // *J. Compt. Appl. Math.* – 2002. – Vol. 146. – P. 309–321.

51. Альрефай В. А. Разработка методов определения устойчивых движений в системах Лотки-Вольтерра с периодическими возмущениями / В. А. Альрефай, М. А. Альджаафрах // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2015. – № 1/4 (73). – С. 58–62.

52. Альрефай В. А. Моделирование и численный анализ динамических систем с конкурентным взаимодействием / В. А. Альрефай // *Технологический аудит и резервы производства*. – 2015. – № 2/5 (22). – С. 36–41.

53. Альрефай В. А. Анализ моделей типа Лотки-Вольтерра для экономических циклов Кейнса / В. А. Альрефай // *Материалы 17-го международного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», 22–24 апреля 2013*. – Т. 7. – С. 94–95.

54. Альрефай В. А. Численный анализ устойчивости в линейной модели конкурентного взаимодействия / В. А. Альрефай // *Aktualne problemy Nowoczesnych nauk* – 2014, Пшемишль, 07–15 июня 2014 г. – С. 10–13.

55. Альрефай В. А. Численный метод анализа устойчивости кейнсианских моделей экономики / В. А. Альрефай // *Материалы XVIII международного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», 14–16 апреля 2014*. – Т. 12 – С. 214–216.

56. Альрефаи В. А. Об одном классе технических систем с конкурентным взаимодействием / В. А. Альрефаи // Радиоэлектроника и информатика, – 2015. – №4 – С. 12–17.

57. Амироков С. Р. Численные методы и вычислительный эксперимент в исследовании динамики и структуры взаимодействующих сообществ : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18. – Ставрополь, 2006. – 187 с.

58. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин – М.: Наука, 1981. – 352 с.

59. Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 1. Физико-математические основы описания и исследования динамической стохастичности / В.С. Анищенко. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. – 125 с.

60. Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 2. Типичные бифуркации и квазиаттракторы в нелинейных системах с малым числом степеней свободы / В.С. Анищенко. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. – 119 с.

61. Анищенко В. С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы / В.С. Анищенко // Соросовский образовательный журнал. Т. 6, №6, 2000. – С. 105 – 109

62. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / В.С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

63. Арнольд В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. – М.: Знание, 1983. – 128 с.

64. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

65. Базыкин А. Д. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости / А. Д. Базыкин, Ю. А. Кузнецов, А. И. Хибник – Пушино: НЦБИ АН СССР, 1985. – 125 с.

66. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 368 с.

67. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.

68. Гусятников П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях «хищник – жертва» и популяции леммингов : дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. П. Гусятников – Москва, 2006. – 101 с. – РГБ ОД, 61: 06-1/528

69. Динамическая теория биологических популяций / (под ред. Р.А.Полуэктова). – М.: Наука, 1974. – 380 с.

70. Дэмбэрэл С. К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов / С. Дэмбэрэл, Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов // Математическое моделирование. – М., 2003. – 108 с.

71. Егорова Н. Е. Имитационная модель предприятия ЖКХ как инструмент анализа тарифно-ценового механизма / Егорова Н. Е., Митрофанова И. Н., Шеин А. М // Аудит и финансовый анализ. – 2007. – №6, – С. 37–42.

72. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В. Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

73. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем / А. В. Запорожцев // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8–6. – С. 1288–1294.

74. Зырянов Г.В. Системы управления многосвязными объектами: / Г.В. Зырянов. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010 – 210 с.

75. Ильичев В. Г. Механизмы стабилизации и адаптации в моделях экологии : Дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.01, 05.13.18 : Ростов н/Д, 2003. – 279 с.

76. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика / Составитель В.М. Тихомиров. Ответ. ред. С.М. Никольский. – М.: Наука, 1985. – С. 357–363.

77. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное

естествознание. – М.: Наука, 1988. – 192 с.

78. Короновский А. А. Синхронное поведение, сложная динамика и переходные процессы в автоколебательных системах и эталонных моделях нелинейной теории колебаний : диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.04.03; [Место защиты: Сарат. гос. ун-т].- Саратов, 2007. – 462 с.

79. Кочкаров А. А., Малинецкий Г. Г. Обеспечение стойкости сложных систем. Структурные аспекты [Электронный ресурс] / А. А. Кочкаров, Г. Г. Малинецкий // ИПМ им. М.В.Келдыша РАН Москва. – 2005. – Режим доступа: <http://www.ukrstat.gov.ua/>. – Название с экрана. – Дата обращения: 14.04.2016.

80. Краснощеков П. С. Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – [2-е изд.]. – М.: Изд-во Фазис, 2000. – 411 с.

81. Латыпов В. Н. Математические модели возмущенного движения высокого порядка точности : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 / В. Н. Латыпов; [Место защиты: С.-Петерб. гос. ун-т].- Санкт-Петербург, 2010. – 133 с.

82. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Мир, 1984. – 324 с.

83. Ляпунов А. М. Собр. соч. / А. М. Ляпунов, Т.1,2. – М.: Изд-во АН СССР, 1954 – 1956. – 526 с.

84. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику / Г. Г. Малинецкий. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 256 с.

85. Мартынюк А. А. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Докл. НАН Украины. – 1996. – № 4. – С. 1–7.

86. Мееров М. В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления / М. В. Мееров. – М.: Наука, 1986. – 236 с.

87. Наумейко И. В. Модели систем «Человек-Машина-Среда» с восстановлением при неклассических потоках событий / И. В. Наумейко,

Р. Дж. Аль-Азави // Восточно-Европейского журнала передовых технологий. – 2013. – № 2/10 (62). – С. 55–58.

88. Наумейко И. В. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий / И. В. Наумейко, В. А. Альрефай // Международный научный конгресс «Энергосбережение и информационные технологии ИСТ-2013», 16–22 сентября 2013. – С. 12.

89. Наумейко И. В. Анализ псевдохаотического поведения кейнсианских моделей экономики / И. В. Наумейко, Р. Дж. Аль-Азави, В. А. Альрефай // Вестник национального технического университета «ХПИ». – 2013. – № 26. – С. 59–64.

90. Наумейко И. В. Марковская модель ликвидации нестационарного потока аварий при ограничениях на работоспособность оператора / И. В. Наумейко, Р. Дж. Аль-Азави, В. А. Альрефай // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 3/4 (63). – С. 20–23.

91. Наумейко И. В. Модель конкуренции в системах типа «производитель – перекупщик» / И. В. Наумейко, В. А. Альрефай // ScienceRise. – 2014. – № 3/2(3). – С. 15–19.

92. Наумейко И. В. Разработка математической модели конкурентных процессов / И. В. Наумейко, В. А. Альрефай // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 5/3 (71). – С. 55–60.

93. Наумейко И. В. Математическое моделирование и численный анализ нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием / И. В. Наумейко, В. А. Альрефай // Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии ИСТ-2014», 15–21 сентября 2014. – С. 125–126.

94. Наумейко И. В. Математическое моделирование и численный анализ устойчивого развития нелинейных динамических систем с конкурентным взаимодействием / И. В. Наумейко, В. А. Альрефай // Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии ИСТ-2015», 15–21 сентября 2015. – С. 120–121.

95. Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М.: Наука, 1987. – 269 с.
96. Никитина Н. В. О хаотической потере устойчивости / Н. В. Никитина // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 11. – С. 61–65.
97. Петров А. А. Математическое моделирование: процессы в сложных экономических и экологических системах / А. А. Петров; под. ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова. – М.: Наука, 1986. – 208 с.
98. Портер М. Международная конкуренция / М. Портер. – М.: Мир, 1994. – 428 с.
99. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюард. – М.: Знание, 1983. – 607 с.
100. Прасолов А. В. Математические модели динамики в экономике / А. В. Прасолов. – СПб.: Изд-во Университета Экономики и Финансов, 2000. – 270 с.
101. Пуанкаре А. Избр. труды / А. Пуанкаре, Т. П. – М.: Наука, 1972. – 531 с.
102. Рабинович М.И. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах / М.И. Рабинович, А.Л. Фабрикант // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, вып. 2 (8). С. 617-629.
103. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий – М.: Радио и связь, 1993. – 282 с.
104. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения / А. М. Самойленко. – М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.
105. Сарданашвили С. А. Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа) / С.А. Сарданашвили. – М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2005. – 577 с.
106. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М. Свирежев – М: Наука 1987. – 368 с.
107. Селезнев В. Е., Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы / В. Е. Селезнев,

В. В. Алешин, С. Н. Прялов. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.

108. Сидоров С. В. Математическое моделирование и численное исследование динамического хаоса в диссипативных системах нелинейных дифференциальных уравнений : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 / Сидоров С. В.; [Место защиты: Моск. гос. гор. ун-т]. – Москва, 2009. – 283 с.

109. Сорокин П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты : дис ... канд. физ.-мат. наук / П. А. Сорокин. – Долгопрудный, 2004. – 153 с. – РГБ ОД, 61:04-1/1264.

110. Трубопроводные системы энергетики. Управление развитием и функционированием / под ред А.Д. Тевяшева. – Новосибирск: Наука, 2004 – 461 с.

111. Тухвебер С. М., Редько В. Г. Модели эволюции многоагентных экономических систем в информационном сообществе [Электронный ресурс] / Тухвебер С. М., Редько В. Г. // ИПМ им. М. В. Келдыша – М.:РАН, 2005. – Режим доступа: http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep22/prep2005_22.html. – Название с экрана. – Дата обращения: 14.04.2016.

112. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М.: Мир, 1985. – 321 с.

113. Хакен Г. Информация и самоорганизация / Г. Хакен. – М.: КомКнига, 2005. – 248 с.

114. Холодниок М. Методы анализа нелинейных математических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

115. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики / А. И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2003. – 296 с.

116. Шерстюк А.М. Насосы, вентиляторы и компрессоры / А.М. Шерстюк – М.: Высшая школа, 1972.– 344 с.

117. Щербаковский Г. З. Внутренний механизм конкуренции и конкурентные силы / Г. З. Щербаковский. – М.: Экономика, 1997. – 178 с.

118. Эрроусмит Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. К. Эрроусмит, К. М. Плейс. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

119. Юданов А. Ю. Конкуренция: теория и практика / А. Ю. Юданов. – М.: Прогресс, 1996. – 224 с.

Приложение А

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТРАН С
ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

В качестве примера детального исследования модели здесь выбрана одна из моделей, описывающая взаимодействие n стран в рамках изолированного торгово-экономического союза. Модель представлена на рисунке А.1 в виде графа ($n=3$).

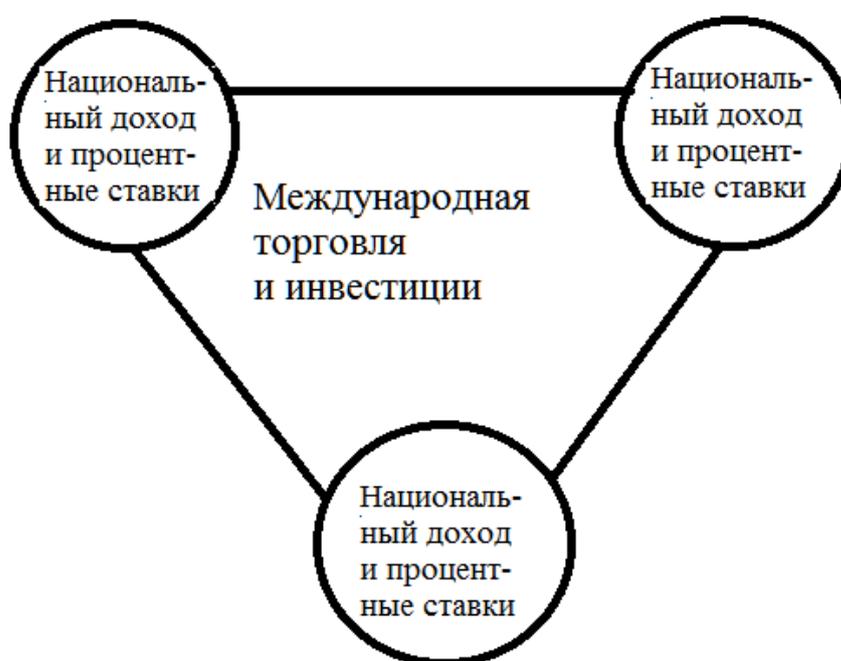


Рисунок А.1 – Граф модели I на примере торгово-экономического союза
трех стран

А.1 Вербальное описание объекта моделирования

В качестве одного из возможных моделируемых объектов представлен союз трех государств, образованный для ведения международной торговли. Такие союзы существуют во множестве в рамках мировой экономики как на Западе, так и на Востоке. В работе рассматривается поведение модели, а не

конкретный союз, но реальные данные для расчетов моделей взяты из общедоступных источников США о международной торговле между США, Канадой и Мексикой.

Проводим системный анализ с целью построения адекватной модели для последующего повышения эффективности управления развитием союза, т. е. эволюции дохода каждой страны, входящей в союз. Однако, решение задач выработки управлений экономикой в рамки данной работы не входит.

А.2 Информационное описание

Задачи деятельности – нахождение состояний равновесия для трех стран и стабилизирующих связей в этих странах, с целью приведения в стационарное состояние, либо к устойчивому росту экономики государств.

Назначение системы – обеспечить более эффективное функционирование союза стран с точки зрения ведения международной торговли.

Другие страны – конкуренты также работают на международном рынке. Они опосредованно влияют на ценовую политику союза, на экспорт и импорт, а также стимулируют союз к дальнейшему эффективному развитию. Их суммарное воздействие представляет подсистему "окружающая среда". Такой подход позволяет рассматривать всю систему как замкнутую.

А.3 Формальное описание модели

Ниже описана функциональная и математическая модели. Для этого (на рисунке А.2) проведена декомпозиция системы верхнего уровня детализации. Математическая формулировка модели предложенной Кейнсом [89] для n стран

состоит из $2n$ дифференциальных уравнений и описывает их внутреннюю динамику и международную торговлю.

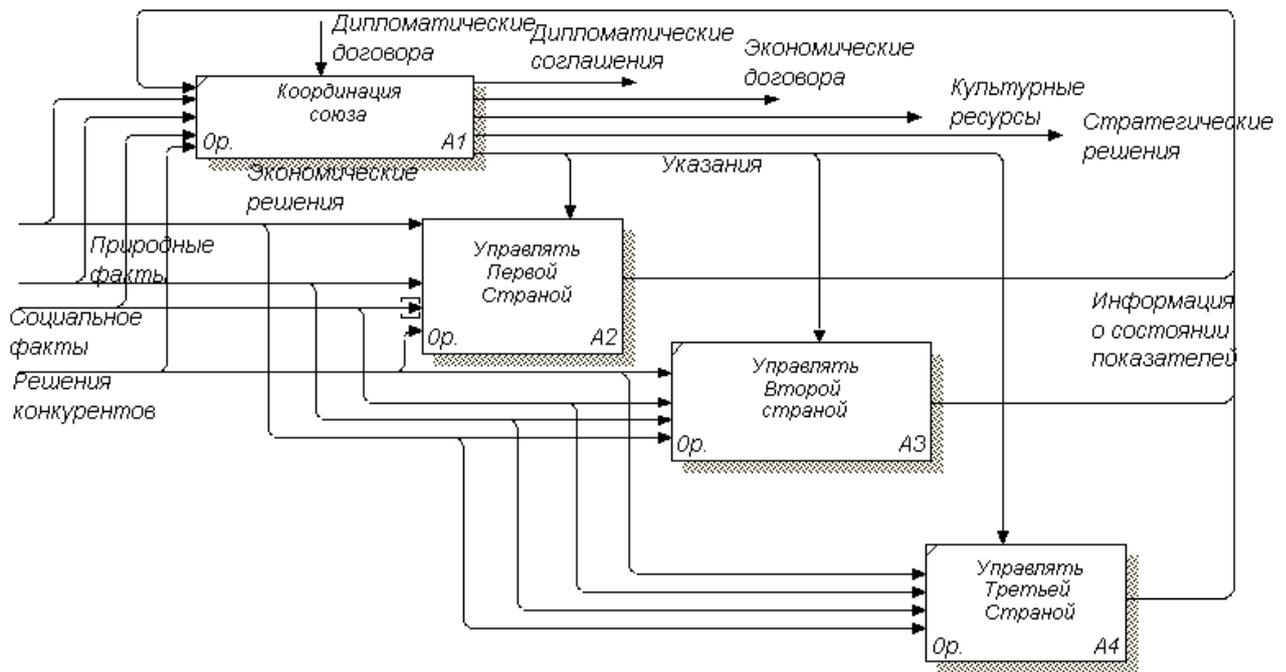


Рисунок А.2 – Декомпозиция 1-го уровня

Экономика каждой страны описывается двумя уравнениями, отражающими динамику национального дохода и ставки процента.

А.3.1 Уравнения общей модели

Согласно Кейнсу [79], уравнения общей модели для i -й страны ($i = 1, 2, \dots, n$) выглядят как (А.1); здесь в дальнейшем исследованы случаи $n \leq 3$.

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = A_i(I_i - S_i) + Ex_i - Im_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = B_i \left(L_i - \frac{M_i}{P_i} \right), \end{cases} \quad (\text{А.1})$$

где A_i, B_i – константы;

Y_i – национальный доход i -й страны (фазовая переменная);

R_i – текущая ставка процента в i -й стране (фазовая переменная);

I_i – функция спроса на инвестиции i -й страны, может быть записана как:

$$I_i = DY_i \cdot Y_i + DL_i \cdot (RR_i - R_i),$$

где DY_i – константа, означающая предельную склонность к инвестированию в зависимости от уровня национального дохода в i -й стране;

DL_i – константа, означающая предельную склонность к инвестированию в зависимости от разницы между предельной эффективностью капитала и текущей ставкой процента в i -й стране;

RR_i – константа, означающая предельную эффективность капитала в i -й стране;

S_i – функция сбережений i -й страны, может быть записана как:

$$S_i = SY_i \cdot Y_i + SL_i \cdot R_i - CA_i,$$

где SY_i – константа, означающая предельную склонность к сбережению в зависимости от уровня дохода в i -й стране;

SL_i – константа, показывающая склонность к сбережению в зависимости от ставки процента в i -й стране;

CA_i – константа, означающая автономное потребление, т. е. уровень потребления, не зависящий от уровня дохода, в i -й стране;

L_i – функция спроса на деньги i -й страны, может быть записана следующим образом:

$$L_i = LY_i \cdot Y_i + LI_i \cdot (R_{\max,i} - R_i),$$

где LY_i – константа, означающая предпочтение ликвидности по доходу (для осуществления сделок и по мотиву предосторожности) в i -й стране;

LI_i – константа, означающая предельную склонность к предпочтению ликвидности в качестве имущества (спекулятивный мотив), в i -й стране;

$R_{\max,i}$ – константа, означающая максимальное значение ставки процента, при котором облигации становятся настолько привлекательными, что никто не захочет в составе имущества иметь деньги, в i -й стране;

M_i – объем денежной массы i -й страны, константа;

P_i – уровень цен i -й страны, константа (таким образом, константа $\frac{M_i}{P_i}$ представляет собой предложение денег в i -й стране);

Ex_i – функция экспорта i -й страны, может быть записана, например, так:

$$Ex_i = E_{0i} + U_i \cdot Y_j + V_i \cdot Y_k,$$

где Y_j и Y_k – значения национального дохода в двух других странах (j -й стране и k -й стране);

E_{0i}, U_i, V_i – константы;

Im_i – функция импорта i -й страны, может быть записана так:

$$Im_i = Z_{0i} + Z_i \cdot Y_i,$$

где Y_i – национальный доход i -й страны;

Z_{0i} – константа;

Z_i – константа, предельная склонность к потреблению импортных благ в i -й стране.

Отметим, что в настоящее время, для описания взаимоотношений акторов в информационных сообществах, а также в моделях типа (3.1) и их производных, которые рассматриваются в этой главе, Y и R интерпретируются,

соответственно как "знания/информация" и "деньги". Здесь все параметры и переменные положительны и согласованы по обозначениям с общей моделью.

А.3.2 Модель для уединенного актора

Уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A(I - S) + Ex - Im, \\ \frac{dR}{dt} = B \left(L - \frac{M}{P} \right). \end{cases}$$

Смысл и сущность параметров аналогичны случаю, описанному в А.3.1.

Для данной модели функция экспорта и импорта будут соответственно равны $Ex = 0$; $Im = 0$.

А.4 Результаты моделирования

Результаты, приведенные на рисунках А.3–А.12, получены с помощью пакета Maxima. Размерность задачи $n = 6$. Собственные числа матрицы A :

($-0.002+1.719i$, $-0.002-1.719i$, $0.002+1.414i$, $0.002-1.414i$, $-0.001+1.008i$, $-0.001-1.008i$)

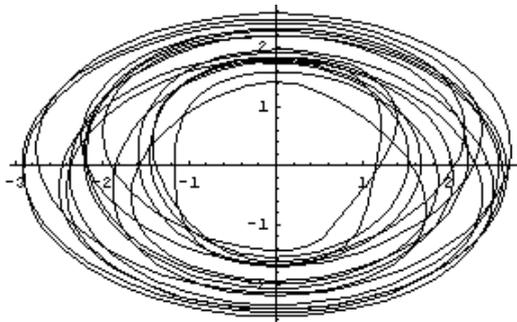


Рисунок А.3 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_1, R_1)

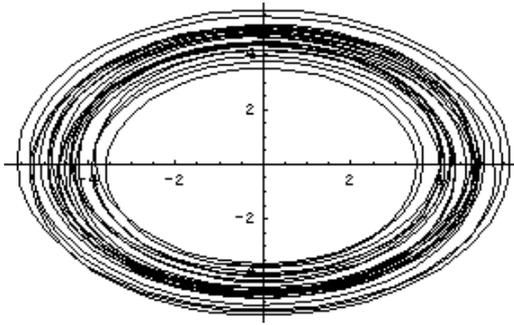


Рисунок А.4 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_2, R_2)

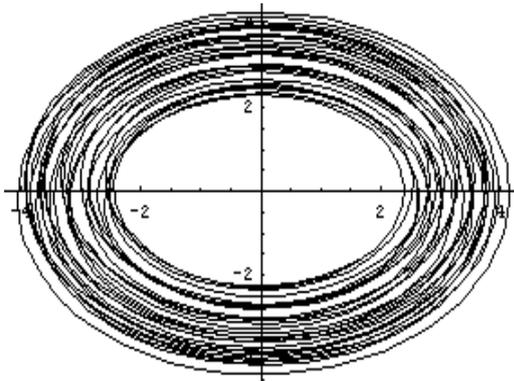


Рисунок А.5 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_3, R_3)

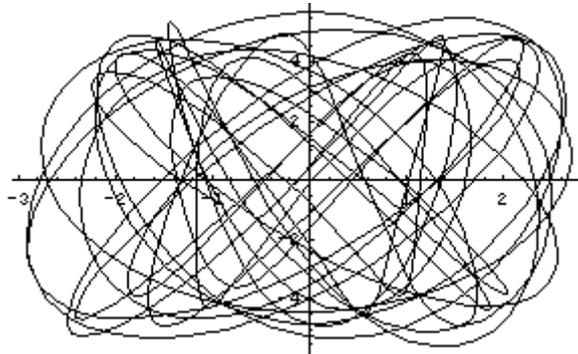


Рисунок А.6 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_1, Y_2)

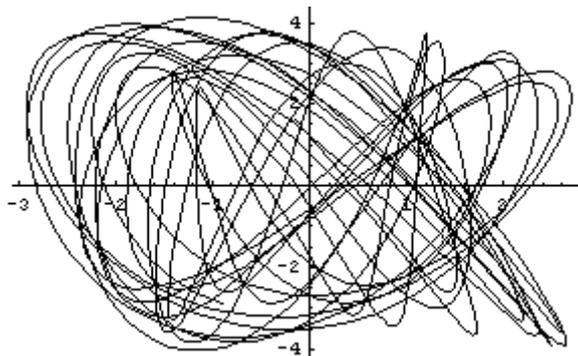


Рисунок А.7 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_1, Y_3)

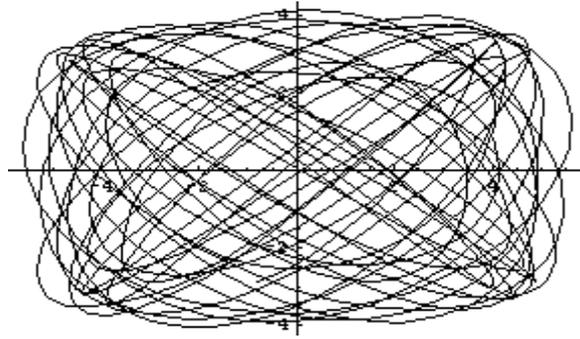


Рисунок А.8 – Проекция фазового портрета на плоскость (Y_2, Y_3)

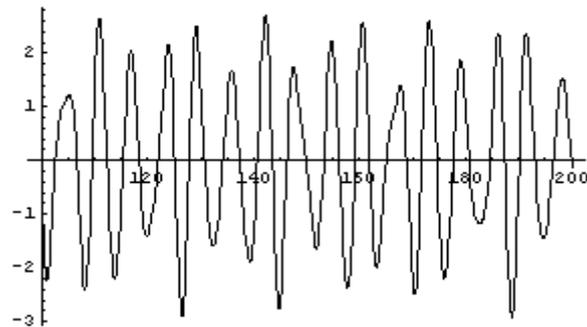


Рисунок А.9 – Временная зависимость $Y_1(t)$ демонстрирует хаотические колебания

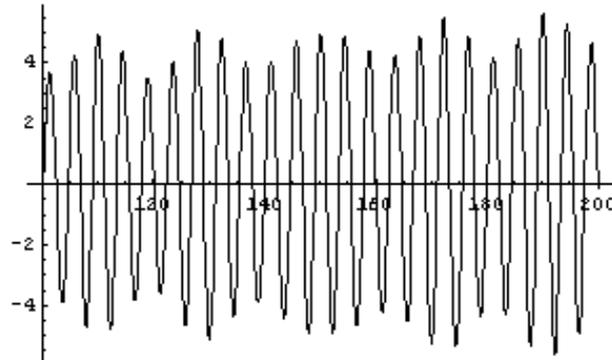


Рисунок А.10 – Временная зависимость $Y_2(t)$

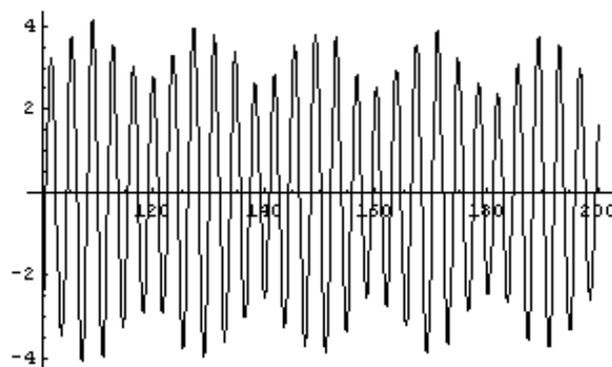


Рисунок А.11 – Временная зависимость $Y_3(t)$

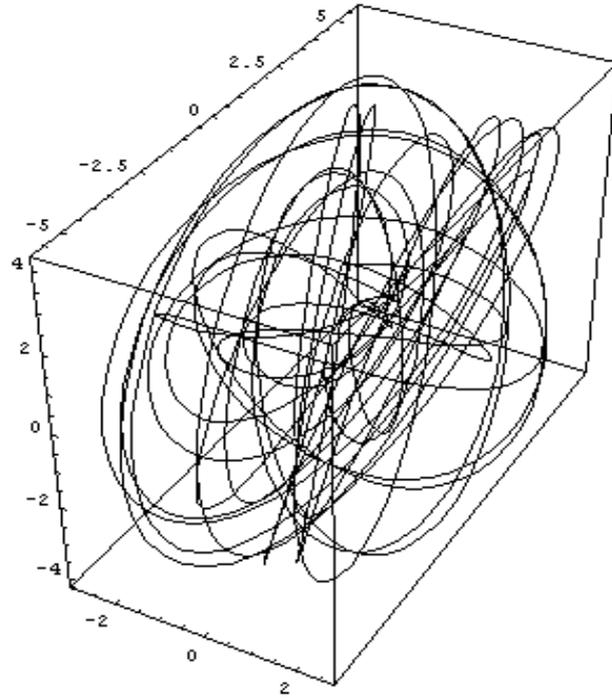


Рисунок А.12 – Проекция фазового портрета на пространство $(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t))$

Приложение Б
 ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДИНАМИКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ
 КОНКУРЕНТНОЙ СИСТЕМЕ

Графики получены с помощью пакета SMath Studio.

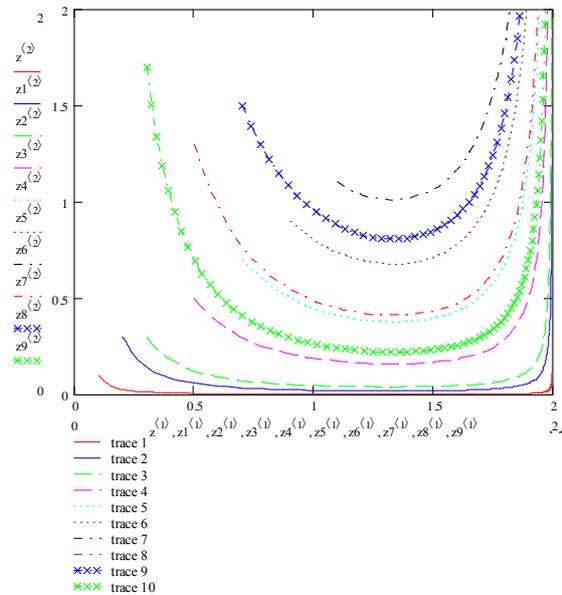


Рисунок Б.1 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли производителя для параметров $a = 0,2$; $b = 0,1$; $c = 0,4$; $d = 0,3$

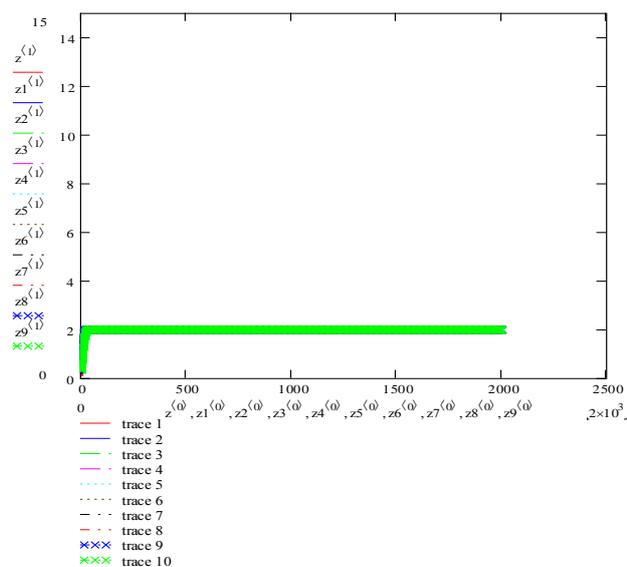


Рисунок Б.2 – Зависимость прибыли производителя от времени для параметров $a = 0,2$; $b = 0,1$; $c = 0,4$; $d = 0,3$

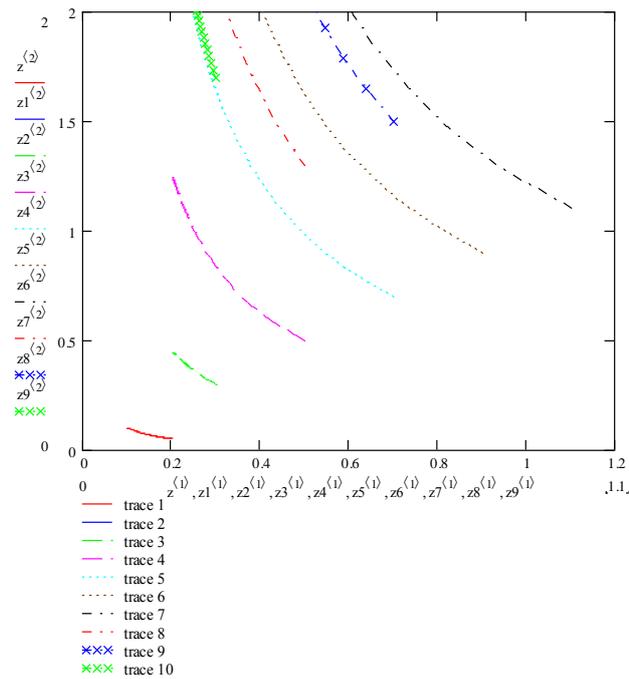


Рисунок Б.3 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли производителя для параметров $a = 0,1$; $b = 0,5$; $c = 0,1$; $d = 0,5$

При увеличении прибыли и объема производства прибыль потребителя значительно падает на коротком временном интервале.

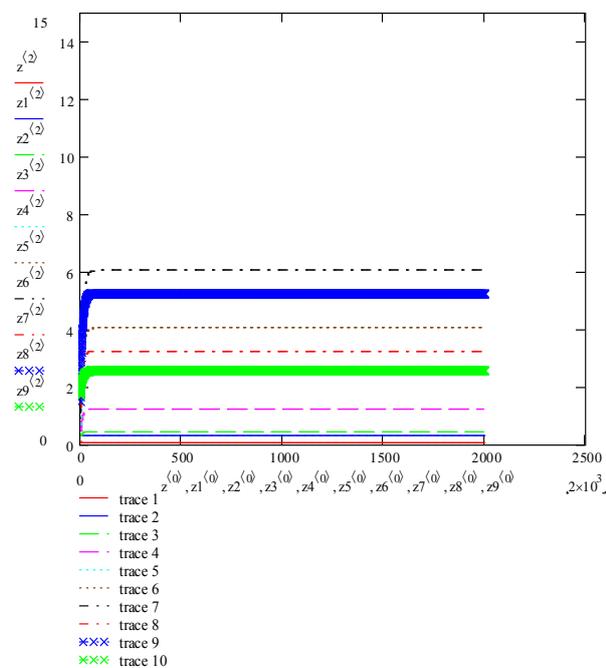


Рисунок Б.4 – Зависимость прибыли потребителя от времени для параметров $a = 0,1$; $b = 0,5$; $c = 0,1$; $d = 0,5$

График выходит на стационар. Прибыль потребителя постоянна и зависит только от начальных условий. Для нахождения точки бифуркации продолжим варьировать значения для параметров : $a=0.98$, $b=0.3$, $c=0.3$, $d=0.2$.

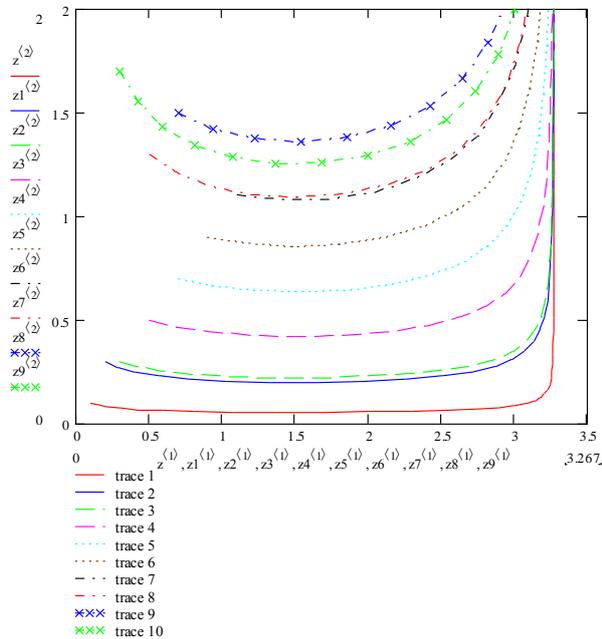


Рисунок Б.5 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли производителя для параметров $a = 0,98$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,2$

Прибыль потребителя при малых объемах производства остается практически на одном и том же уровне, но при увеличении объемов производства неуклонно растет.

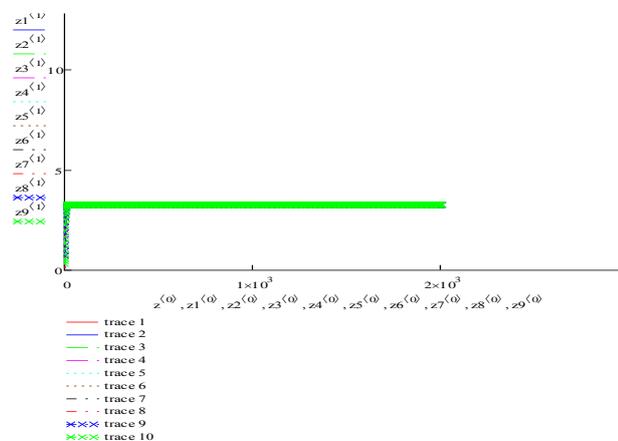


Рисунок Б.6 – Зависимость прибыли производителя от времени для параметров $a = 0,98$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,2$

Прибыль производителя достаточно быстро стабилизируется и остается постоянной. Система выходит на стационар.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из трех дифференциальных уравнений. Модифицируем исходную модель, добавив в нее еще одного производителя, описываемого третьим уравнением. Соответственно в уравнение потребителя добавится новый параметр, характеризующий коэффициент прибыли на покупке товара нового производителя.

Начальные значения выбраны произвольным образом.

Построены графики поведения модифицированной системы при появлении второго производителя.

На графике рисунка Б.7 отображена зависимость потребителя (ордината) от первого производителя (абсцисса).

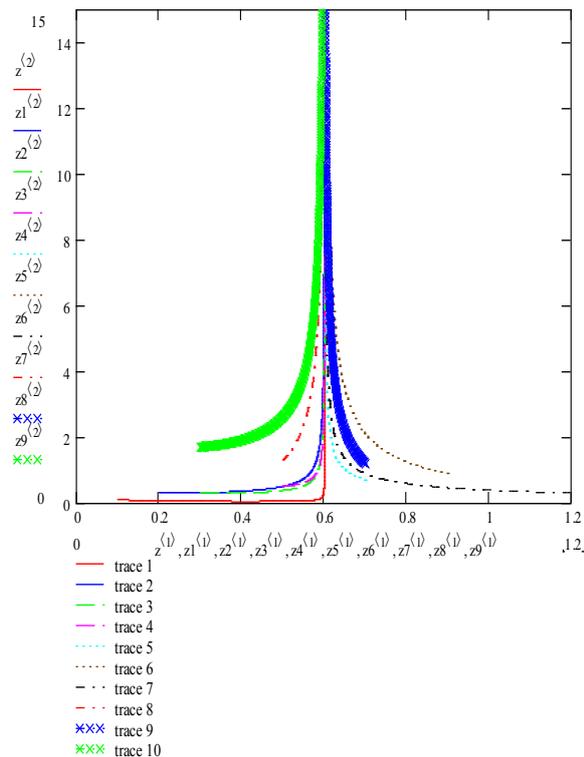


Рисунок Б.7 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли первого производителя для параметров $a = 0,3$; $b = 0,5$; $c = 0,3$; $d = 0,4$; $e = 0,2$; $f = 0,4$; $g = 0,5$

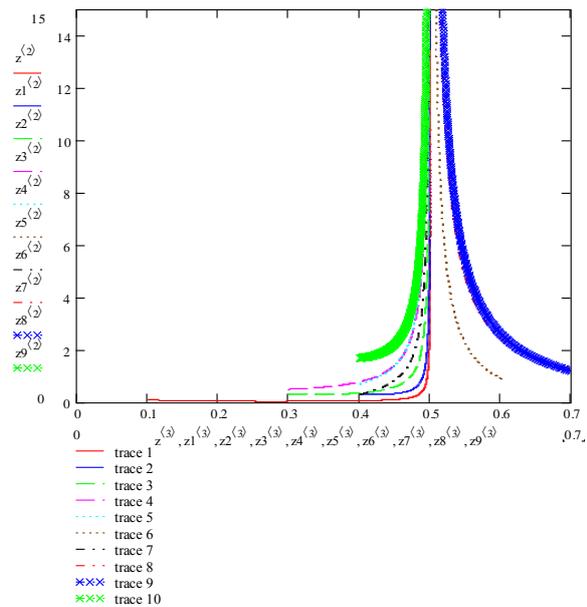


Рисунок Б.8 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли второго производителя для параметров $a = 0,3$; $b = 0,5$; $c = 0,3$; $d = 0,4$; $e = 0,2$; $f = 0,4$;
 $g = 0,5$

При росте объемов производства прибыль потребителя стремительно растет.

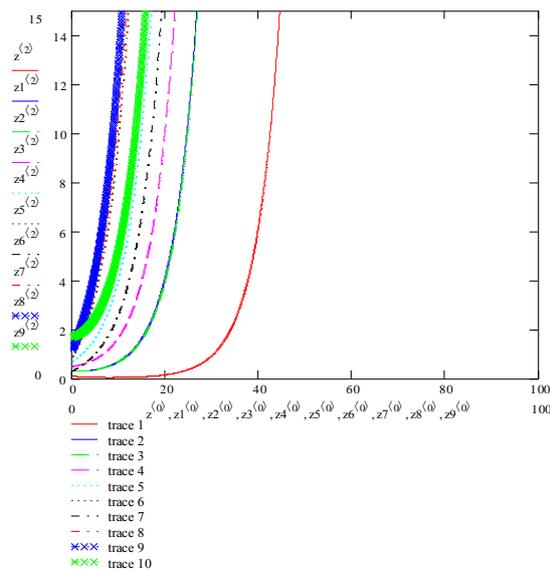


Рисунок Б.9 – Зависимость прибыли потребителя от времени производителя для параметров $a = 0,3$; $b = 0,5$; $c = 0,3$; $d = 0,4$; $e = 0,2$; $f = 0,4$;
 $g = 0,5$

Исходя из графиков рисунках Б.9 – Б.11, можем сделать вывод, что на временном интервале прибыль потребителя стремительно растет в очень короткие сроки.

График быстро выходит на стационар, прибыль первого производителя держится на одном уровне.

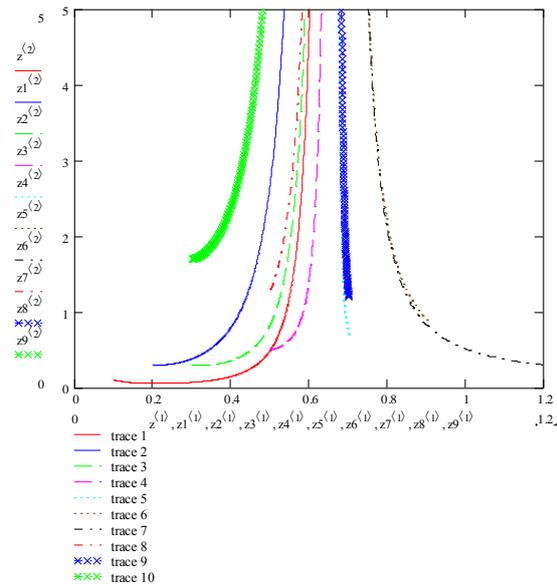


Рисунок Б.10 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли первого производителя для параметров $a = 0,2$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,4$; $e = 0,4$; $f = 0,4$; $g = 0,5$

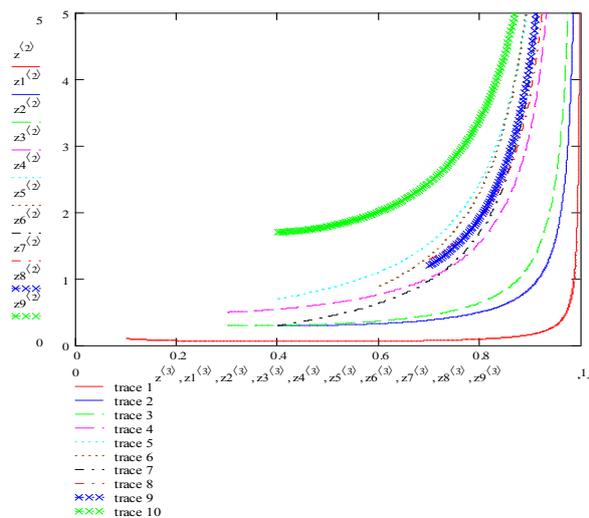


Рисунок Б.11 – Зависимость прибыли потребителя от прибыли второго производителя при различных начальных условиях для параметров $a = 0,2$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $d = 0,4$; $e = 0,4$; $f = 0,4$; $g = 0,5$

Прибыль потребителя быстро растет практически при любых начальных условиях. Система достаточно быстро выходит на стационар, прибыль потребителя практически неограниченно растет. То есть разницы между одним производителем и двумя практически не наблюдается. Графики качественно подобны. Характер поведения прибыли потребителя не зависит от количества производителей.

Приложение В
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ
СИСТЕМ

Результаты численного моделирования приведены в виде графиков на рис. В.1–В.3. Фрагменты программ в математическом пакете SMath Studio иллюстрируют процесс моделирования. Амплитуда $n = 0.15$.

Исходная, невозмущенная система

$$s \equiv 1 \quad r \equiv 1 \quad \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad m := 0.1 \quad y \equiv \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$y'_0 := r y_0 - \gamma_0 y_0 y_1$$

$$y'_1 := -s y_1 + \gamma_1 y_0 y_1$$

$$xz := \frac{s}{\gamma_1} \quad yz := \frac{r}{\gamma_0}$$

$$\xi_0 := y_0 - xz \quad \xi_1 := y_1 - yz$$

$$\xi'_0 := -\gamma_0 (xz \cdot \xi_1 + \xi_0 \xi_1)$$

$$\xi'_1 := \gamma_1 (yz \cdot \xi_0 + \xi_0 \xi_1)$$

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

$$D(t, \xi) := \begin{bmatrix} -\gamma_0 (xz \cdot \xi_1 + \xi_0 \xi_1) \\ \gamma_1 (yz \cdot \xi_0 + \xi_0 \xi_1) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(\xi, 0, 20, 400, D) \quad n := 0..400$$

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad Y := \text{rkfixed}(\xi, 0, 20, 400, D)$$

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} \quad X := \text{rkfixed}(\xi, 0, 20, 400, D)$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} r \cdot y_0 - \gamma_0 \cdot y_0 \cdot y_1 \\ -s \cdot y_1 + \gamma_1 \cdot y_0 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 50, 300, D) \quad n := 0..199$$

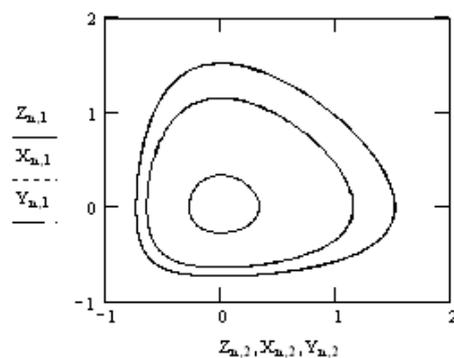
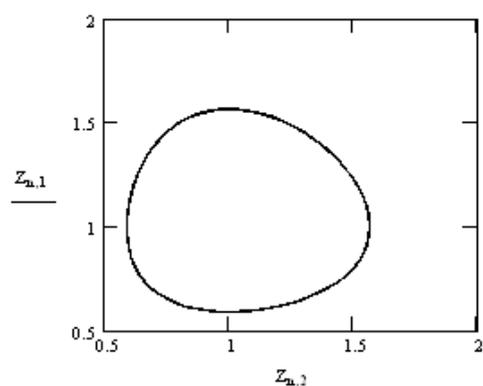
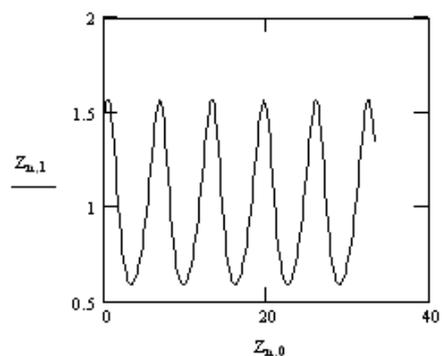
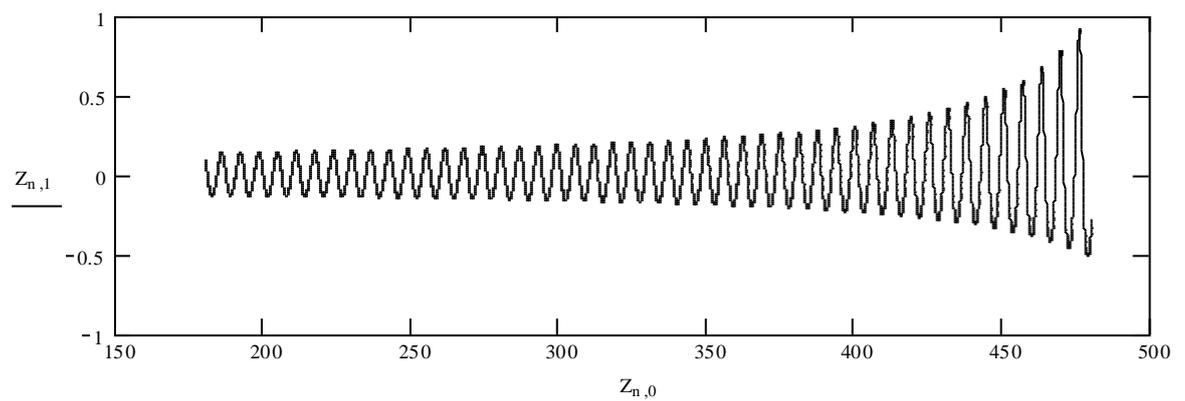


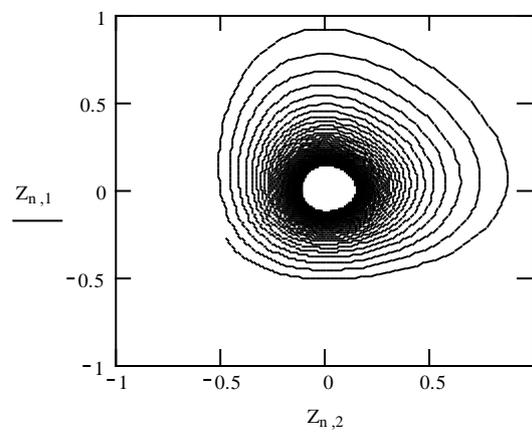
Рисунок В.1 – Фрагменты программ и результаты расчетов

$$D1(t, x) := \begin{bmatrix} -x_1 - x_0 \cdot x_1 \\ x_0 + x_0 \cdot x_1 - (n \cdot x_1 + 0.001) \cdot \cos(t) \end{bmatrix}$$

Рисунок В.2 – Характер возмущения правой части (фрагмент программы в SMath Studio)



а) Решение $x(t)$



б) Фазовый портрет (x, y)

Рисунок В.3 – Резонанс

Неограниченному росту амплитуды колебаний численности $x(t)$ соответствует неустойчивый фокус в фазовом пространстве (x, y) .

Приложение Г
ДОКУМЕНТЫ О ВНЕДРЕНИИ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ
РАБОТЫ

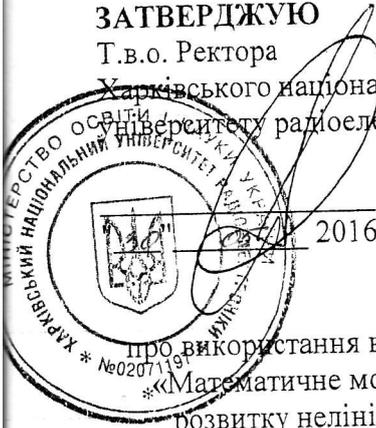
ЗАТВЕРДЖУЮ

Т.в.о. Ректора

Харківського національного
університету радіоелектроніки,

Рубін Е.Ю.

2016



АКТ

про використання в навчальному процесі ХНУРЕ результатів дисертаційної роботи
«Математичне моделювання та обчислювальні методи аналізу процесів сталого
розвитку нелінійних динамічних систем з конкурентною взаємодією»
аспіранта кафедри Прикладної математики

Харківського національного університету радіоелектроніки
Валіда Ахмеда Махмуда Альрефаї

У період з 23.05.2016 по 27.05.2016 р. комісія у складі:

голова комісії – декан факультету Прикладної математики та менеджменту,
докт.физ-мат. наук, проф. Дорошенко В. О.;

члени комісії: зав.кафедрою прикладної математики, докт.техн.наук, проф. Тевяшев
А.Д., канд.техн.наук, доц. Наумейко І.В.

провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що
підтверджує використання результатів дисертації аспіранта кафедри ПМ 2012-2015 років
Альрефаї В.А.М. в рамках навчального процесу при підготовці бакалаврів, спеціалістів та
магістрів за спеціальностями "Прикладна математика" та "Системний аналіз". Комісія
визначає, що при проведенні лекційних, практичних та лабораторних занять з дисциплін
"Імітаційне моделювання", "Теорія катастроф" та "Синергетичні методи в економіці"
використано наступні результати дисертаційних досліджень:

– методика та математичні моделі головних механізмів и умов виникнення
нестійкості та хаосу в моделі співіснування двох або більшого числа достатньо численних
акторів в замкненій або відкритій системах, і алгоритми їх чисельного аналізу, що необхідні
для розв'язання задач;

– моделі систем конкурентної взаємодії акторів.

Методика та програмне забезпечення моделювання підготовлені як частина
методичних вказівок до лабораторних робіт.

Комісія визначає, що застосування матеріалів дисертаційної роботи Альрефаї В.А.М.
покрощує глибину та якість викладання і засвоєння змісту дисциплін. Вони також
використані при підготовці курсових та дипломних робіт.

Голова комісії

В. Дорошенко

Дорошенко В.О.

Члени комісії

А.Д. Тевяшев
І.В. Наумейко

Тевяшев А.Д.

Наумейко І.В.

З оригіналом згідно.

Вчений секретар спецради

Д 64.052.02



А.К.Р.

А.В. Голубинський

"ЗАТВЕРДЖУЮ"



Зав. Ректора Харківського національного
університету радіоелектроніки.

Рубін Е.Ю.

30 05 2016

про впровадження результатів кандидатської дисертації аспіранта кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки

Валіда Ахмеда Махмуда Альрефаї

" Математичне моделювання та обчислювальні методи аналізу процесів сталого розвитку нелінійних динамічних систем з конкурентною взаємодією "

У період з 25 травня по 29 травня 2016 р. комісія у складі: голови комісії Тевяшева А.Д., зав.каф. прикладної математики (ПМ), д.т.н., проф., членів комісії: Долгоброд О.Г. – відповідального виконавця д/б теми №293-4, с.н.с, та Матвієнко О.І., м.н.с. провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що підтверджує використання наступних результатів дисертації В.А.М. Альрефаї у практичній роботі НДЧ ХНУРЕ за д/б темою №293-4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста»

Оскільки НДЧ каф. ПМ ХНУРЕ веде роботи по розробці методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку, великий інтерес представляє розділ дисертаційної роботи, де запропоновано моделі та аналіз стійкості станів об'єкту управління стійким розвитком ЖКГ міста. Такий конкурентний підхід до динаміки об'єктів, що моделюються, підвищив швидкість, якість та достовірність прийняття рішень по уникненню хаотичної динаміки об'єкту.

Впроваджено:

- динамічну конкурентну модель стійкого розвитку систем, що дозволило оцінити необхідні значення параметрів об'єктів надання послуг в нелінійній системі ЖКГ;
- метод лінеаризації математичної моделі конкурентних систем надання послуг типу «постачальник-споживач», що дозволило уникнути періодичної та стохастичної непрогнозованої динаміки взаємодії акторів в багатомірних соціально-економічних системах.

Акт складено для пред'явлення до Спеціалізованої Вченої Ради із захисту дисертацій. Акт не може бути підставою для фінансових розрахунків, премій та інших винагород.

Голова комісії:

Зав.каф. Прикладної математики, професор, д.т.н.

А.Д. Тевяшев

Члени комісії:

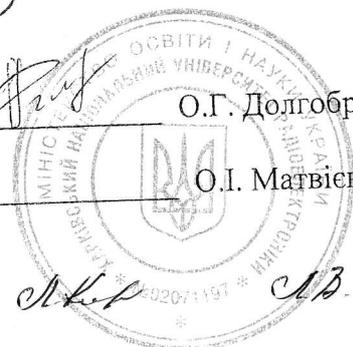
Відповідальний виконавець д/б теми №293-4, с.н.с,

О.Г. Долгоброд

М.н.с.

О.І. Матвієнко

*З оригіналом згідно
Вченої секретар спецради
Д. 64. 052. 02*



М.В. Кошарнік