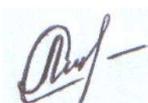


Министерство образования и науки Украины  
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

На правах рукописи

ЛАМТЮГОВА СВЕТЛАНА НИКОЛАЕВНА



УДК 517.95 : 519.63

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ  
ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
Сидоров Максим Викторович,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Цей примірник дисертаційної роботи  
ідентичний за змістом з іншими, поданими  
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02  
Вчений секретар спецради Д 64.052.02



Л.В. Колесник

Харьков – 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
РАЗДЕЛ 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ .....	12
1.1 Математические модели стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости .....	12
1.2 Методы численного анализа задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью .....	24
1.3 Метод $R$ -функций и его применение в вычислительной гидродинамике .....	34
1.4 Постановка задач исследования .....	39
РАЗДЕЛ 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ (ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОЗЕЕНА) .....	41
2.1 Постановка линеаризованной по Озеену задачи обтекания цилиндрических тел и приближенный метод ее расчета .....	41
2.2 Результаты моделирования процесса медленного обтекания цилиндрических тел .....	55
2.2.1 Численные результаты расчета задачи обтекания кругового цилиндра .....	55
2.2.2 Вычислительный эксперимент моделирования процесса обтекания эллиптического цилиндра .....	60
2.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе .....	64
Выводы по разделу 2 .....	67
РАЗДЕЛ 3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА) .....	68
3.1 Постановка нелинейной задачи обтекания цилиндрических тел и приближенный метод ее расчета .....	68
3.2 Численные результаты расчета нелинейной задачи обтекания цилиндрических тел .....	81
3.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания кру-	

	3
гового цилиндра .....	81
3.2.2 Моделирование процесса обтекания эллиптического цилиндра .....	84
3.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе .....	85
Выводы по разделу 3 .....	90
РАЗДЕЛ 4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ (ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТОКСА) .....	91
4.1 Постановка линеаризованной по Стоксу задачи обтекания тел вращения и приближенный метод ее расчета .....	91
4.2 Моделирование процесса медленного обтекания тел вращения .....	104
4.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания эллипсоида вращения .....	104
4.2.2 Результаты вычислительного эксперимента моделирования обтекания двух сочлененных эллипсоидов .....	112
Выводы по разделу 4 .....	116
РАЗДЕЛ 5 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА) .....	117
5.1 Постановка нелинейной задачи обтекания тел вращения и приближенный метод ее расчета .....	117
5.2 Численные результаты расчета нелинейной задачи обтекания тел вращения .....	134
5.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания сферы ...	134
5.2.2 Моделирование процесса обтекания эллипсоида вращения .....	138
5.2.3 Результаты моделирования обтекания двух сочлененных эллипсоидов .....	141
Выводы по разделу 5 .....	144
РАЗДЕЛ 6 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ С УЧЕТОМ МАССОПЕРЕНОСА .....	146
6.1 Постановка задачи обтекания цилиндрических тел с учетом	

массопереноса и приближенный метод ее расчета .....	146
6.2 Численные результаты расчета задачи обтекания цилиндрических тел с учетом массопереноса .....	158
6.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания кругового цилиндра с учетом массопереноса .....	158
6.2.2 Моделирование процесса обтекания эллиптического цилиндра с учетом массопереноса .....	161
6.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе, с учетом массопереноса .....	164
6.3 Постановка задачи обтекания тел вращения с учетом массопереноса и приближенный метод ее расчета .....	167
6.4 Результаты моделирования процесса обтекания тел вращения с учетом массопереноса .....	176
6.4.1 Численные результаты расчета задачи обтекания сферы с учетом массопереноса .....	176
6.4.2 Результаты моделирования обтекания эллипсоида вращения с учетом массопереноса .....	180
6.4.3 Моделирование процесса обтекания двух сочлененных эллипсоидов с учетом массопереноса .....	184
Выводы по разделу 6 .....	187
ВЫВОДЫ .....	188
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	190
Приложение А Акт внедрения.....	214
Приложение Б Линеаризованная по Озеену задача обтекания цилиндрических тел .....	215
Приложение В Нелинейная задача обтекания цилиндрических тел ....	224
Приложение Г Линеаризованная по Стоксу задача обтекания тел вращения .....	237
Приложение Д Нелинейная задача обтекания тел вращения .....	243
Приложение Е Задачи обтекания цилиндрических тел и тел вращения с учетом массопереноса .....	256

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Исследование явлений, наблюдаемых в атмосфере и гидросфере, а также изучение проблем гидро-, аэродинамики, теплоэнергетики, химической кинетики, биомедицины можно проводить в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости. Таким образом, исследование вязких течений представляет собой важный класс прикладных задач. Многие задачи, представляющие практический интерес, как правило, описываются уравнениями Навье–Стокса [1 – 6], существенной особенностью которых является нелинейность, а также наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, задачи для уравнений Навье–Стокса часто приходится решать в областях сложной геометрии, в т.ч. область может быть и бесконечной (задачи обтекания тел, течения жидкости в трубах, каналах и пр.). Важный класс составляют течения, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [6 – 8]. Однако для задачи обтекания цилиндрического тела безграничной вязкой несжимаемой жидкостью не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [5, 6, 8]. В этом случае пользуются приближением Озеена [5, 6, 9]. Основные результаты по теоретическому обоснованию корректности начально-краевых и краевых задач для уравнений Навье–Стокса и линеаризаций этих уравнений получены Дж. Серриним [10], О.А. Ладыженской [11, 12], Ж.-Л. Лионсом [13], В. Гиро [14], Р. Темамом [15], Н.Д. Копачевским, С.Г. Крейном [16, 17] и др.

Также для приложений важными являются задачи гидродинамики, усложненные массообменом. Такие задачи находят применение в теплоэнергетике, химической и пищевой технологиях, гео- и астрофизических исследованиях, охране окружающей среды [6, 18]. В общем случае задача о стационарном массообмене тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения гидродинамического обтекания поверхности и уравнения для концентрации с соответствующими краевыми условиями на поверхности тела и вдали от него [6].

В настоящее время при исследовании задач гидродинамики все активнее используется математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Существует множество численных методов, применяемых при расчете вязких течений [18 – 48]. Наиболее употребимыми являются метод конечных разностей и метод конечных элементов [18, 21, 23, 25, 27 – 33, 49]. Основным преимуществом этих методов является простота реализации, однако они имеют существенный недостаток – отсутствие свойства универсальности. Это приводит к тому, что при переходе к новой области (особенно сложной геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы геометрически простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Кроме того, в большинстве случаев при численном решении задач обтекания условия на бесконечности сносятся на некоторый контур, расположенный на некотором расстоянии от обтекаемого тела, что приводит к дополнительным погрешностям в приближенном решении.

Для решения прикладных задач сейчас широко используются универсальные коммерческие пакеты, такие как FLUENT, CFX, StarCD и др. Главным их недостатком является относительно невысокая скорость расчетов. Кроме того, их использование затруднительно из-за закрытости программного кода.

Точно учесть геометрическую и аналитическую информацию, входящую в постановку краевой задачи, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории  $R$ -функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева [50 – 52]. Метод  $R$ -функций в задачах гидродинамики использовался Колосовой С.В. [53 – 56], Максименко-Шейко К.В. [57 – 61], Сидоровым М.В. [56, 62 – 65], Слесаренко А.П. [66], Суворовой И.Г. [67 – 70], Цукановым И., Шапиро В. и Чжаном С. [71], Шейко Т.И. [72, 73], но, в основном, рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [53 – 55], вязкой в ограниченных областях [56, 62 – 65, 67 – 71] или при наличии винтовой симметрии [57 – 61], магнито-гидродинамических течений [72, 73], задачи теплообмена в трубах сложного сечения [66]. Задачи обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода  $R$ -функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых и совершенствование существ-

вующих методов математического моделирования стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью на основе метода  $R$ -функций является актуальной научной задачей.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Диссертационная работа отвечает основным направлениям научных исследований кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники и выполнена в период с 2010 по 2015 гг. в рамках научно-исследовательских работ по теме "Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витоками" (ДР № 0111U002624, 2011 – 2013 рр.), в разработке которой автор принимал участие как исполнитель.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследований диссертационной работы является разработка методов математического моделирования и численного анализа стационарного обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью на основе метода  $R$ -функций.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

- разработка метода расчета медленного обтекания цилиндрических тел (линеаризация Озеена) и тел вращения (линеаризация Стокса) на основе метода  $R$ -функций;
- дальнейшее развитие итерационного метода численного анализа стационарных течений, которые описываются нелинейными уравнениями, в части его применения к задачам обтекания цилиндрических тел и тел вращения;
- разработка метода расчета массообмена цилиндрических тел и тел вращения с равномерным поступательным потоком на основе метода  $R$ -функций;
- применение разработанных численных методов к решению тестовых задач расчета обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью при различных числах Рейнольдса и Пекле.

Причем эти методы должны точно учитывать геометрическую и аналитическую информацию, входящую в постановки задач.

*Объектом исследования* являются стационарные гидродинамические процессы обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью, описываемые ли-

нейными (линеаризация Озеена или Стокса) или нелинейными уравнениями относительно функции тока и системой уравнений относительно функции тока и концентрации.

*Предметом исследования* являются математические модели стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью и методы их численного анализа.

*Методы исследования.* В работе используются методы функционального анализа и математической физики для теоретического исследования предложенных методов; математический аппарат теории  $R$ -функций для построения нормализованных уравнений границ областей, в которых рассматриваются течения, и для построения структур решения краевых задач обтекания тел; проекционный метод Бубнова-Галеркина и метод последовательных приближений для аппроксимации компонент структуры; квадратурные формулы Гаусса для численного интегрирования; численные методы для решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

**Научная новизна полученных результатов.** Проведенные в диссертационной работе исследования позволили получить новые научные результаты:

- впервые разработан метод расчета медленного обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью (приближения Озеена и Стокса), основанный на совместном применении структурного метода (метода  $R$ -функций) и проекционного метода Бубнова-Галеркина, что позволяет точно учитывать как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условия на бесконечности; этот метод легко модифицируется при переходе к областям другой формы и представляет приближенное решение в аналитическом виде, что упрощает его использование в дальнейших расчетах;

- получил дальнейшее развитие итерационный численный метод расчета задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью: исходная нелинейная задача заменена последовательностью линейных краевых задач, для решения которых на каждом шаге итерационного процесса разработан численный алгоритм на основе методов  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина; этот метод отличается от известных тем, что позволяет свести рассмотрение задачи обтекания к задаче в конечной области, прилегающей к обтекаемому телу, причем условия на бес-

конечности учитываются точно; для построенного итерационного процесса получены условия сходимости;

– впервые разработан численный метод расчета массообмена цилиндрических тел и тел вращения с равномерным поступательным потоком, основанный на совместном применении методов  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина, при этом алгоритм решения не изменяется при изменении геометрии области, а структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела и с поверхности которого происходит массообмен, так и условия на бесконечности.

**Практическая значимость полученных результатов.** Разработанные в диссертационной работе методы решения задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью позволяют осуществлять эффективное численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с учетом массообмена. Предложенные методы являются более универсальными по сравнению с многими известными, поскольку при переходе от одной области к другой в модели требуется лишь изменить уравнение границы. Кроме того, предложенные методы точно учитывают как геометрию области, так и все краевые условия, входящие в математические модели, в том числе и условия на бесконечности. Полученные результаты позволяют проводить вычислительные эксперименты при математическом моделировании различных физико-механических, биологических, химико-технологических течений. Разработанные средства математического моделирования внедрены в учебный процесс в Харьковском национальном университете радиотехники в курсовом и дипломном проектировании, в дисциплинах “Избранные главы математической физики”, “Конструктивные средства математики”, “Теория  $R$ -функций и ее приложения” и “Численные методы” при проведении лабораторных работ и практических занятий. Акт о применении результатов исследований диссертационной работы приводится в Приложении А.

**Личный вклад соискателя.** Основное содержание диссертационной работы опубликовано в работах [74 – 103], а все её основные результаты получены лично автором. В работах, опубликованных в соавторстве, автору принадлежат следующие результаты. В работах [75, 77, 84, 101] автором на основе

метода  $R$ -функций построен метод решения линеаризованной (по Стоксу) задачи обтекания осесимметричных тел и выполнен вычислительный эксперимент для задачи обтекания эллипсоида вращения. В статье [87] автором предложен и обоснован итерационный метод решения нелинейной стационарной задачи обтекания осесимметричных тел. В работах [94, 98, 100] автором на основе метода  $R$ -функций построен метод решения линеаризованной (по Озеену) и нелинейной задач обтекания цилиндрических тел и выполнен вычислительный эксперимент для задачи обтекания кругового, эллиптического цилиндров и цилиндра с образующей  $x^s + y^s = 1$  при различных числах Рейнольдса. В работах [88, 99] автором предложен метод решения задачи массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости и проведены вычислительные эксперименты для сферы и эллипсоида вращения при разных числах Рейнольдса и Пекле.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: Международной молодежной научной конференции “Гагаринские чтения” (Москва, 2010 г.; 2012 – 2014 гг.); Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010 г.; 2012 г.); IV научной конференции для студентов и аспирантов “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” (Харьков, 2010 г.); XXII-й відкритій науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України “КМН-2011” (Львов, 2011 г.); Международном молодежном форуме “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке” (Харьков, 2012 – 2015 гг.); XXXVI научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковской национальной академии городского хозяйства (Харьков, 2012 г.); Міжнародній студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики “СНКПМІ” (Львов, 2012 г.; 2013 г.); 2nd international scientific conference of students and young scientists “Theoretical and applied aspects of cybernetics” (Київ, 2012 г.); Одинадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції “Математичне моделювання та інформаційні технології” “ММІТ-2012” (Одеса, 2012 г.); VII Международной

научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов “Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем” (Пенза, 2013 г.); XVI Международном симпозиуме “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” “МДОЗМФ-2013” (Херсон, 2013 г.); Международной научно-технической конференции “Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях” (Харьков, 2014 г.); XXXV научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковского национального университета городского хозяйства имени А.Н. Бекетова (Харьков, 2014 г.); научных семинарах кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники (Харьков, 2012, 2014 гг.), кафедры высшей математики Харьковского национального университета городского хозяйства имени А.Н. Бекетова (Харьков, 2013 г.), кафедры высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии (Харьков, 2015 г.).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертационной работы опубликованы в 30 печатных работах, из которых: 6 статей – в научных профильных изданиях по физико-математическим наукам, 2 статьи – в иностранных научных изданиях, 1 статья – в других изданиях; 21 тезис докладов, опубликованных в материалах научных конференций, 16 из которых являются международными.

**РАЗДЕЛ 1**  
**АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДОВ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ**  
**СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

**1.1 Математические модели стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости**

В декартовой системе координат стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\partial\Omega$  описывается системой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности [1 – 6]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $x, y, z$  – соответствующие координаты рассматриваемой точки физического пространства;

$F_x, F_y, F_z$  – компоненты вектора плотности массовых сил;

$\rho$  – плотность жидкости;

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кинематическая вязкость жидкости;

$\mu$  – динамический коэффициент вязкости;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Искомыми величинами являются три компоненты скорости жидкости  $V_x, V_y, V_z$  и давление  $P$ .

Впервые на основании соображений о взаимодействии молекул эти уравнения были получены Навье в 1822 г. и Пуассоном в 1829 г., а затем Сен-Венаном в 1843 г. и Стоксом в 1845 г.

Если ввести вектор скорости жидкости  $\mathbf{V} = \vec{i}_x V_x + \vec{i}_y V_y + \vec{i}_z V_z$ , то системе уравнений (1.1), (1.2) можно записать в векторной форме:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\text{где } \nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Для получения конкретных решений к уравнениям движения (1.1) и уравнению неразрывности (1.2) необходимо добавить краевые условия [1 – 6].

На поверхности твердого тела задается условие прилипания – равенство нулю скорости жидкости на неподвижной обтекаемой поверхности [2, 5, 6]

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.5)$$

или совпадение скоростей частиц жидкости со скоростями точек движущейся твердой поверхности, с которыми жидкие частицы соприкасаются

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{V}_{\partial\Omega}.$$

Для решения внешней гидродинамической задачи необходимо задать еще условие на бесконечности [5, 6], которое в случае потока, сонаправленного с осью  $Ox$ , имеет вид

$$\mathbf{V} \rightarrow U_\infty \vec{i} \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

$$\text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В случае свободной поверхности жидкости, граничащей, например, с

пустотой (давление  $P_0 = 0$ ) или с воздухом (давление  $P_0 = \text{const}$ ), должны быть выполнены условия [3, 5]:

а) кинематическое – нормальная к свободной поверхности составляющая скорости должна совпадать со скоростью перемещения поверхности разрыва;

б) динамическое – вектор напряжения для площадок, касательных к свободной поверхности, должен быть направлен по нормали к этим площадкам и по численной величине должен быть равен  $P_0$ .

В случае частично ограниченной твердыми поверхностями области, например, в канале, кроме условий прилипания к твердым поверхностям необходимо задавать еще условия на входе в канал и на выходе из канала. При этом если канал большой длины, в качестве условия вниз по потоку можно использовать асимптотическое решение при  $x \rightarrow \infty$  [5].

При моделировании течений вязкой жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности и диффузии, часто используют систему уравнений для конвекции, тепло- и массообмена в приближении Буссинеска-Обербека [2, 104 – 106]:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{g} (\beta_T T + \beta_c c), \quad (1.6)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (1.7)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \lambda \Delta T, \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) c = D \Delta c, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости;

$P$ ,  $T$  и  $c$  – отклонение давления, температуры и концентрации примеси от их статических значений;

$\rho$  – плотность жидкости;

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$D$  – коэффициент диффузии;

$g$  – ускорение свободного падения;

$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$  – коэффициент теплового изменения плотности;

$\beta_c = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)$  – коэффициент концентрационного изменения плотности.

Эта система выводится из общих уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости в предположении, что жидкость динамически и статистически несжимаема, то есть плотность её не зависит от давления, но может зависеть от температуры и концентрации примеси. При выводе этой системы коэффициенты вязкости, теплопроводности, удельной теплоемкости и диффузии предполагаются постоянными. Изменение плотности  $\rho(c, T)$  учитывается лишь в члене с конвективной силой.

Решение системы (1.6) – (1.9) зависит от граничных условий. Граничные условия для скорости ставятся в виде (1.4), (1.5). Граничные условия для температуры и концентрации могут быть трех типов [104]:

а) на  $\partial\Omega$  задана температура  $T_{\partial\Omega}$  (концентрация примеси  $c_{\partial\Omega}$ );

б) на  $\partial\Omega$  задан тепловой поток  $q_{\partial\Omega} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$  (диффузионный поток

$$j_{\partial\Omega} = -D \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}});$$

в) на  $\partial\Omega$  задан закон теплообмена в виде  $q_{\partial\Omega} = \alpha_T (T_\Gamma - T_c)$ , где  $\alpha_T$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_\Gamma$  – температура стенки;  $T_c$  – температура среды (закон массообмена  $q_{\partial\Omega} = \alpha_c (c_\Gamma - c_c)$ , где  $\alpha_c$  – коэффициент массообмена).

В дальнейшем для упрощения записей будем считать, что в системе (1.1) массовые силы отсутствуют.

Во многих случаях бывает удобно использовать уравнения Навье-Стокса в криволинейных, чаще всего ортогональных, координатах, например, в сферических или цилиндрических.

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки устанавливается формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  система уравнений для вязкой несжимаемой жидкости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla V_r - \frac{V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \mathbf{V} \cdot \nabla V_\varphi + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0. \quad (1.11)$$

Связь между декартовыми и сферическими координатами точки устанавливается формулами

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Уравнения стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla V_r - \frac{1}{r} (V_\theta^2 + V_\varphi^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \\ + \nu \left[ \Delta V_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ \mathbf{V} \cdot \nabla V_\theta + \frac{1}{r} (V_r V_\theta - \text{ctg} \theta V_\varphi^2) &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \end{aligned}$$

$$+\nu \left[ \Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right], \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla V_\varphi + \frac{1}{r} (V_r V_\varphi + \operatorname{ctg} \theta V_\theta V_\varphi) &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\ +\nu \left[ \Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Если рассматриваемая задача обладает свойствами симметрии и может быть сведена к двумерной, то вместо компонент скоростей жидкости удобно ввести функцию тока  $\psi$ . В этом случае уравнение неразрывности, на основании которого она вводится, удовлетворяется автоматически.

Рассмотрим основные классы течений, которые допускают описание с помощью функции тока [6].

1. В плоских (плоскопараллельных) задачах в прямоугольной системе координат все величины не зависят от координаты  $z$ , уравнение неразрывности (1.2) принимает вид  $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$  и функция тока  $\psi(x, y)$  вводится с

помощью соотношений

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Исключая из оставшихся двух первых уравнений (1.1) перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi = \psi(x, y)$  получаем нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi,$$

$$\text{где } \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

В плоских задачах в цилиндрической системе координат все величины не зависят от координаты  $z$ , уравнение неразрывности (1.11) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \text{ и функция тока } \psi(r, \varphi) \text{ вводится с помощью соотношений}$$

ношений

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.15)$$

Исключая из оставшихся двух первых уравнений (1.10) перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi(r, \varphi)$  получаем нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \varphi} = \nu \Delta^2 \psi,$$

$$\text{где } \Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \quad \Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

2. В осесимметричных задачах в цилиндрической системе координат все величины не зависят от координаты  $\varphi$ , уравнение неразрывности (1.11) принимает вид  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$  и функция тока  $\psi(r, \varphi)$  вводится следующим образом

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.16)$$

Исключая из оставшихся двух первых уравнений (1.10) перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi(r, \varphi)$  получаем нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial z} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} E \psi = \nu E^2 \psi,$$

где  $E\psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ ,  $E^2\psi = E(E\psi)$ .

3. В осесимметричных задачах в сферической системе координат все величины не зависят от координаты  $\varphi$ , уравнение неразрывности (1.13) принимает вид  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) = 0$ , а функция тока  $\psi(r, \theta)$  вводится с помощью формул

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.17)$$

Исключая из оставшихся двух первых уравнений (1.12) перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi(r, \theta)$  получаем нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E\psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E\psi = \nu E^2\psi,$$

где  $E\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$ ,  $E^2\psi = E(E\psi)$ .

Рассмотрим краевые условия для функции тока [108].

Согласно физическому смыслу функции тока, на непроницаемом участке границы ее значение не изменяется, т.е.  $\psi = \text{const}$ . Если вся граница  $\partial\Omega$ , ограничивающая односвязную область  $\Omega$ , непроницаема, то можно принять  $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ . На участке границы  $\partial\Omega_1$  ( $\partial\Omega_1 \subseteq \partial\Omega$ ), через который жидкость вытекает из области (или поступает в нее) можно вычислить изменение функции тока следующим образом

$$\psi(P) = \psi(A) + \int_0^{s(P)} \mathbf{V}^0(P') \cdot \mathbf{n}(P') ds(P'),$$

где  $\mathbf{V}^0(P)$  – заданная скорость течения,  $P \in \partial\Omega_1$ ;

$\psi(A)$  – значение функции тока в точке  $A \in \partial\Omega_1$ , от которой отсчитывают длину  $s(P')$  дуги до текущей точки  $P' \in \partial\Omega_1$  с единичным вектором  $\mathbf{n}(P')$  внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Если в области есть линия  $l_0$  симметрии течения, то она будет совпадать с одной из линий тока, на которой  $\psi = C_0 = \text{const}$ , а в точках  $P \in l_0$  частицы жидкости не будут вращаться. В этом случае в качестве граничного условия можно взять  $\frac{\partial^2\psi(P)}{\partial\mathbf{n}^2(P)} = 0$ . Аналогичные условия выполняются для

свободной поверхности жидкости при пренебрежении трением жидкости с воздухом (или другим газом).

На участке  $\partial\Omega_2$  ( $\partial\Omega_2 \subseteq \partial\Omega$ ), который соответствует твердой стенке, происходит прилипание частиц жидкости и в точках  $P \in \partial\Omega_2$  вектор скорости  $\mathbf{V}(P)$  жидкости равен заданному вектору  $\mathbf{V}_0(P)$  скорости стенки. Поэтому на такой стенке

$$\frac{\partial\psi(P)}{\partial\mathbf{n}(P)} = \mathbf{V}_0(P) \boldsymbol{\tau}(P) = V_{0\tau}(P), P \in \partial\Omega_2,$$

где  $\boldsymbol{\tau}(P)$  – единичный вектор в направлении касательной к контуру в точке  $P \in \partial\Omega_2$ , повернутый относительно единичного вектора  $\mathbf{n}(P)$  внешней нормали к  $\partial\Omega$  против часовой стрелки.

Если стенка неподвижна, то  $V_{0\tau}(P) = 0$ .

Для решения внешней гидродинамической задачи необходимо задать еще условие на бесконечности. Для задач обтекания твердого тела – это условие равномерности потока на бесконечности, для задач движения твердого тела в жидкости – условие затухания возмущений скорости.

Например, при обтекании сферы равномерным на бесконечности потоком используется следующее условие [5, 19, 109, 110]:

$$\psi(r, \theta) \sim \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta, \quad r \rightarrow +\infty,$$

где  $U_{\infty}$  – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Для плоской задачи обтекания цилиндра условие на бесконечности приобретает следующий вид [5, 110]:

$$\psi(r, \varphi) \sim U_{\infty} r \sin \varphi, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Уравнения Навье-Стокса (1.1) нелинейные, что существенно затрудняет их решение. Точные решения удается получить только в очень редких частных случаях. Каждая конкретная стационарная гидродинамическая задача помимо уравнений Навье-Стокса включает также дополнительные граничные условия, которым, как правило, нельзя удовлетворить точными частными решениями уравнений. Вследствие этого естественно использовать приближенные методы, основанные на том, что отбрасываются полностью или частично некоторые члены в уравнениях и граничных условиях.

Существует обширный класс течений, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Сюда относятся течения с малыми скоростями, в которых конвективные члены малы во всем потоке [5].

Один из основных подходов для анализа и упрощения уравнений Навье-Стокса заключается в модификации или пренебрежении нелинейными инерционными членами  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$  по сравнению с линейными вязкими членами  $\nu \Delta \mathbf{V}$  в уравнении (1.3). Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [7]:

$$\nu \Delta \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Уравнения Стокса (1.18) являются линейными и существенно проще

нелинейных уравнений Навье-Стокса. Они могут быть применены в случаях, когда инерционные члены малы по сравнению с вязкими в каждой точке жидкости. Отношение инерционных сил к вязким описывается безразмерным параметром, который называется числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu},$$

где  $L$  – характерный линейный размер;

$V$  – характерная скорость.

Чем меньше число Рейнольдса, тем лучше приближенное решение уравнений Навье-Стокса, полученное при учете только вязких членов. Малые числа Рейнольдса характерны для медленных (ползущих) течений, сильно вязких жидкостей, частиц малых размеров.

Если ввести функцию тока по формулам (1.14) – (1.17), то система (1.18) сводится к одному уравнению для функции тока [5, 6, 8]  $\Delta^2\psi = 0$  для плоских задач и  $E^2\psi = 0$  для осесимметричных задач.

Эффекты, проявляющиеся в случаях, когда число Рейнольдса мало, но не настолько, чтобы его влиянием можно было пренебречь, можно выявить, применяя методы, аппроксимирующие инерционные члены в уравнениях Навье-Стокса.

Например, Карл Вильгельм Озеен предположил, что в системе (1.1) – (1.2) инерционный член  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  должен равномерно приближаться членом  $(U_\infty \cdot \nabla) \mathbf{V}$ , так как на больших расстояниях локальная скорость  $\mathbf{V}$  весьма незначительно отличается от скорости набегающего потока  $U_\infty$ . На основе этих утверждений он предположил, что равномерно справедливые решения задачи установившегося обтекания тел при малых числах Рейнольдса можно получить, решая линейные уравнения [8]

$$\nu \Delta \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla P = (U_\infty \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Они известны как уравнения Озеена.

Подход Озеена дает разрешить парадокс Стокса, согласно которому не существует решения уравнений Стокса для задачи двумерного поперечного обтекания цилиндра потоком неограниченной жидкости [5, 8]. Для цилиндра произвольного сечения этот парадокс был получен Одквистом [111].

Если ввести функцию тока вида (1.14) – (1.15), то система (1.19) сводится к одному уравнению для функции тока [19, 20]:

$$\nu \Delta^2 \psi + U_\infty A(\Delta \psi) = 0,$$

где оператор  $A = -\frac{\partial}{\partial x}$  в прямоугольной системе координат и

$$A = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

в цилиндрической системе координат.

Уравнение четвертого порядка для функции тока при решении часто заменяют эквивалентной  $(\psi, \zeta)$ -системой (система в переменных «функция тока-завихренность»), где  $\zeta = -\Delta \psi$  – завихренность вектора скорости. Отметим, что в этом случае не удастся поставить точные краевые условия для  $\zeta$  и используются различные приближенные формулы (условие Тома, условие Вудса и др.) [21 – 23, 104], в то время как при моделировании течений вязкой жидкости с помощью уравнения для функции тока  $\psi$  краевые условия задаются точно. При решении уравнения относительно функции тока удовлетворять уравнению неразрывности нет необходимости, в отличие от  $(V_x, V_y, P)$ -системы (система в переменных «скорость-давление»), в которой, кроме того, отсутствуют дополнительные условия для давления. Функция тока вводится всегда таким образом, чтобы уравнение неразрывности удовлетворялось автоматически. Эти же замечания относятся и к моделированию конвективных течений вязкой жидкости.

## 1.2 Методы численного анализа задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью

Различные задачи, возникающие при изучении внешних течений вязкой жидкости, могут быть исследованы теоретическим путем или с помощью физического эксперимента. Однако в настоящее время при исследовании задач гидродинамики все активнее используется математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Большой выбор существующих на сегодняшний день численных методов позволяет решать широкий спектр прикладных задач в короткие сроки и с минимальными финансовыми затратами.

Численным методам решения задач гидромеханики посвящены работы [18, 21 – 26]. Наиболее часто используются метод конечных разностей и метод конечных элементов [18, 21, 23, 25, 27 – 33, 49]. Эти методы просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых.

Также при моделировании гидродинамических задач часто используются такие методы, как метод гидродинамических потенциалов [34], методы возмущений (асимптотических разложений) [19, 20], метод расщепления по физическим факторам [35 – 38], метод фиктивных областей [39], метод погруженной границы [40], метод решёточных уравнений Больцмана [41 – 44] и многие другие. Кроме того, в настоящее время для решения прикладных задач широко используются универсальные коммерческие пакеты программ вычислительной гидродинамики, например, такие как FlowVision, Flower, FLUENT, CFX, StarCD [45 – 48].

Задачи обтекания различных тел потоком вязкой несжимаемой жидкости находят применение в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Работы, посвященные обтеканию тел, можно разделить на несколько направлений. Одним из них является исследование медлен-

ного (ползущего) обтекания тел при малых числах Рейнольдса. Вопросами существования и единственности таких задач занимались В.А. Солонников [112], Р. Темам [15], О.А. Ладыженская [11, 12], Сазонов Л.И. [113, 114]. Численному исследованию таких задач обтекания посвящены работы [113, 115 – 119].

В работе [115] рассматривается медленное обтекание тонкой прямоугольной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью. Решение осуществляется с помощью теории гармонических потенциалов, что сводит соответствующую граничную задачу для системы уравнений Стокса к двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода, для решения которого используется разложение неизвестной плотности по ортогональной системе тригонометрических функций.

В статье [116] рассматривается плоская симметричная задача обтекания пластинки вязкой несжимаемой жидкостью в приближении Озеена. Решение строится в виде рядов по степеням малого параметра, а также исследуется вопрос сходимости данных рядов к решению задачи.

В [117] разработан модифицированный метод конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента для задачи Стокса со свободной границей.

В работе [113] строится и обосновывается полное асимптотическое разложение решения двумерной задачи обтекания ограниченного тела потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Авторы работы [118] рассматривают ползущее обтекание вращающегося бесконечного кругового цилиндра микрополярной жидкостью. Вначале решается задача обтекания стационарного кругового цилиндра с помощью метода согласованных асимптотических разложений. Затем исследуется вращение кругового цилиндра в микрополярной жидкости. Далее с помощью принципа суперпозиции строится нужное поле потока.

В работе [119] приводятся примеры решения бигармонического уравнения, являющиеся решением задачи Стокса для обтекания пластинки конечной длины и полубесконечной пластинки. Полученные в работе решения содержат особые точки, но являются аналитическими в конечной окрестности носиков пластинок.

Не меньший интерес вызывает численное исследование задач обтекания тел на основе полных уравнений Навье-Стокса. Теоретическим обоснованием корректности начально-краевых и краевых задач для уравнений Навье-Стокса занимались Дж. Серрин [10], О.А. Ладыженская [11, 12], Ж.-Л. Лионс [13], В. Гиро [14], Р. Темам [15], Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн [16, 17], В.А. Галкин [120].

Среди внешних задач обтекания особое внимание многих исследователей привлекает задача обтекания бесконечного цилиндра вязкой жидкостью, что объясняет огромное количество работ для этой задачи [9, 37, 38, 41 – 44, 47, 121 – 160]. Большинство из них посвящено обтеканию кругового цилиндра [37, 38, 126 – 142]. Разнообразны как методы решения этой задачи, так и исследуемые режимы обтекания. Не менее интересны и задачи обтекания эллиптических цилиндров [43, 44, 47, 141, 143, 144], прямоугольных цилиндров [42, 141, 145 – 150, 158], сфер [36, 38, 134, 156, 157], эллипсоидов [161 – 163] и тандемов из различного количества тел [125, 142, 152, 154, 156, 157, 164].

В работе [165] исследуется вопрос существования, характер поведения решения на больших расстояниях от обтекаемого тела и строится асимптотика, т.е. исследуется вопрос о структуре стационарных решений задачи обтекания.

В [128] обсуждаются вопросы обоснования и применения матричных методов, в частности, метода Ньютона-Крылова, для решения уравнений Навье-Стокса. Рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости, вязкой слабо сжимаемой жидкости и вязкой несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности. В частности, решена задача обтекания кругового цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью при  $Re = 0, 10, 20, 40$ .

В статье [39] обсуждаются вопросы обоснования метода фиктивных областей для стационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-завихренность».

В [127] обсуждаются условия эквивалентности решения уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-завихренность» и исходных уравнений в переменных «скорость-давление». Решение задачи обтекания твердого

тела плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости ищется с помощью метода конечных разностей. Приводятся результаты расчетов для задач обтекания профиля Жуковского и кругового цилиндра.

В работе [9] рассматривается плоская задача об обтекании бесконечно-го цилиндра вязкой жидкостью. Решение ищется в некоторой ограниченной области, при этом условие на бесконечности сносится на некоторый контур, достаточно удаленный от тела. Исследуется влияние граничных условий, заданных на появившейся дополнительной границе.

В работах [37, 38, 126] для численного моделирования обтекания кругового цилиндра используется метод расщепления по физическим факторам. В [126] приводятся картины линий тока при  $Re = 1, 10, 20, 40$ , в [37] – при  $Re = 100$ , в [38] – при  $200 < Re < 400$ . Кроме того, в работе [38] приводятся картины формирования вихревых структур за сферой в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $270 < Re < 10^3$ ).

Метод расщепления по физическим факторам использовался и в работах [36, 166]. В работе [36] проводится численное моделирование пространственных отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости вокруг сферы. Для визуализации пространственных отрывных течений использовались мгновенные линии тока, позволяющие судить о топологической структуре течения, благодаря чему была уточнена классификация режимов обтекания сферы. В работе [166] численно исследуется задача обтекания препятствия на плоскости равномерным на бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Применение метода конечных разностей для внешних задач обтекания рассматривалось в [130, 131, 137, 155]. В [130] рассматривается нестационарная задача обтекания кругового цилиндра при числах Рейнольдса  $Re = 40, 200, 500$ . В [131] рассматривается двумерная стационарная задача обтекания кругового цилиндра при числах Рейнольдса  $Re = 1, 2, 4, 10, 15, 30, 50, 100$ . В [137] описывается метод для моделирования двумерных стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости, который сочетает в себе обычные конечные разности и бессеточный метод

наименьших квадратов на основе конечных разностей. Проводится численное моделирование обтекания кругового цилиндра для  $Re = 10, 20, 40, 100, 200$ . В [155] реализованы два подхода численного решения уравнений Навье–Стокса. Первый подход основан на методе конечных разностей на структурированных сетках для течений вязких жидкостей. Предложена модификация этого метода для расчета дальнего следа, основанная на многократном продолжении решения вниз по потоку. Во втором подходе применяется противопоточный метод конечных элементов на неструктурированных адаптивных сетках для течений вязких газов. Проведено детальное исследование процессов зарождения и развития вихревого следа при отрывном обтекании цилиндрических тел потоком вязкой жидкости (газа) в диапазоне  $0 < Re < 500$ . Исследованы течения в усложненных условиях, связанных с созданием дополнительных возмущений в потоке, а также обтекания цилиндрических тел не круговой формы (крыловых профилей Чаплыгина и эллиптических цилиндров).

Не менее интересно применение метода конечных элементов для внешних задач обтекания [134, 141, 144, 152, 161, 167]. В [161] решается стационарная задача обтекания жидкой сферы при числах Рейнольдса от 0,5 до 50. В [144] исследованы вихревые структуры за эллиптическим цилиндром при числах Рейнольдса от 75 до 175 и разном соотношении осей. Используется метод конечных элементов Галеркина с полиномами Лагранжа высокого порядка в качестве координатных функций. В [141] рассматривается обтекание кругового, эллиптического и квадратного цилиндров. Приведены картины течения для квадратного цилиндра при  $Re = 1,5; 5; 24; 40$ . В [134] описывается простое сдвиговое течение вокруг тел при конечных числах Рейнольдса. Исследованы свободно вращающиеся и неподвижные круговой цилиндр при  $Re = 0 \div 500$  и сфера при  $Re = 0 \div 100$ . В [152] моделируется обтекание двух круговых цилиндров разных диаметров вязкой жидкостью. В [167] рассматривается применение метода конечных элементов к трехмерным течениям вязкой несжимаемой жидкости. Схема основана на слабой формулировке Петрова-Галеркина с показательной функцией взвешивания.

Работы [139, 142, 146, 148, 150, 153, 156] используют методы конечного объема. Работа [156] посвящена характеристикам неограниченного течения вокруг тандема квадратных цилиндров в стационарном и в нестационарном случае ( $Re = 1 \div 200$ ). Приведены картины линий тока и завихренности, зависимости давления, коэффициентов подъемной силы и сопротивления, длины рециркуляции и фазового сдвига от чисел Рейнольдса. В [146] рассматривается обтекание цилиндра квадратного сечения при  $Re = 200 \div 500$ . Используется метод конечных объемов, который основан на методе дробных шагов, с неявной по времени второго порядка точности разностной схемой. В [148] проводится численное моделирование нестационарного обтекания прямоугольного цилиндра при  $Re = 50 \div 250$ . Используется метод конечных объемов с шахматной сеткой. Найдены общий коэффициент лобового сопротивления, коэффициент аэродинамического сопротивления, коэффициент подъемной силы и т.д. Приведены линии уровня функции тока и завихренности для  $Re = 75$  и  $Re = 175$ . В [139] исследованы динамические характеристики полей давления и скорости нестационарных ламинарных и турбулентных следов за круговым цилиндром при числах Рейнольдса  $Re = 100, 1000, 3900$ . В [153] моделируется нестационарное вязкое обтекание затупленных тел (круговой цилиндр, квадратный цилиндр, цилиндр с круговой передней частью и прямой задней, цилиндр с прямой передней частью и круговой задней) при  $Re = 100, 200, 300, 400$ . Исследовано влияние формы тела и числа Рейнольдса на физику нестационарных потоков. В [142] для моделирования двумерных нестационарных вязких несжимаемых течений используется метод конечных объемов, основанный на центрально-разностной схеме второго порядка точности, в сочетании с двухступенчатой процедурой дробного шага. Показаны линии уровня и завихренности для обтекания кругового цилиндра для  $Re = 20, 40, 80, 300$ . Рассмотрено также обтекание цилиндра, расположенного в канале. Смоделирован поток через массив 95 случайно расположенных цилиндров и через каскад аэродинамических поверхностей. В [150] рассматриваются нестационарные несжимаемые течения вокруг прямоугольных цилиндров с отношением сторон от 1 до 10. Построены картины течения при

$Re = 300, 1000, 5000, 22000$ .

В последние годы для решения задач обтекания успешно применяется метод решёточных уравнений Больцмана [41 – 44, 136, 157]. В [41] рассматривается двумерное обтекание кругового цилиндра в канале вязкой несжимаемой жидкостью, в [42] – обтекание прямоугольного цилиндра в канале, в [136] – задача обтекания кругового цилиндра в канале, в [43, 44] – обтекание эллиптического цилиндра в канале, в [157] – обтекание двух квадратных цилиндров, расположенных бок о бок, при числе Рейнольдса, равном 73.

Применение универсальных коммерческих пакетов программ вычислительной гидродинамики исследуется в работах [47, 48, 138, 140, 159, 160, 163]. В [138] исследуется обтекание кругового цилиндра в неограниченной области с помощью пакета Abaqus/CFD. Представлены линии уровня для  $Re = 0,038; 0,1; 1,1; 20; 26; 50; 100; 195$ . В [47, 48, 140, 159, 163] для численного моделирования используется пакет FLUENT. В [47] проведено численное моделирование двумерного ламинарного течения степенной жидкости вокруг эллиптического цилиндра с разными отношениями осей. В [48] исследуется обтекание различных цилиндров при числах Рейнольдса от 0,01 до 40. В [140] рассматривается нестационарное обтекание кругового цилиндра при  $Re = 150$ . В [163] рассматривается обтекание эллипсоида вязкой несжимаемой жидкостью при  $Re$  от 20 до 200 и разных отношениях осей от 0,5 до 2. В [159] численно исследуется обтекание цилиндра в присутствии свободной поверхности. В [160] проводится обратное численное моделирование течения вокруг осциллирующего треугольного цилиндра в пакете OpenFOAM. Рассматриваются двухмерные модели течения в области низких чисел Рейнольдса  $60 < Re < 170$ .

Работы [40, 151] для численного моделирования равномерного обтекания цилиндра используют метод погруженной границы, заключающийся в том, что система уравнений, описывающих течение жидкости, численно решается на декартовой расчетной сетке без учета границы. В общем случае узлы построенной сетки не лежат на границе. Соответственно, необходим специальный способ аппроксимации краевых условий [168].

В [135] рассматривается обтекание кругового цилиндра. Используется метод вариационного вложения (Method of Variational Imbedding), в котором уравнения Навье-Стокса заменяются уравнениями Эйлера-Лагранжа, решение которых ищется минимизацией квадратичного функционала, составленного из исходных уравнений. Для итерационного решения задачи погружения используется разностная схема расщепления как на регулярных, так и на неравномерных сетках. Вычисляются различные характеристики, такие как коэффициент лобового сопротивления, длина следа, перепад давления между передней и задней частями цилиндра. Приведены линии уровня и завихренности для  $Re = 10, 20, 40, 50, 100, 200$ .

В [149] исследуется обтекание квадратного цилиндра наклоненного под углом к набегающему потоку. Для решения нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса используется узловый спектральный элементный метод для пространственной дискретизации и схема интегрирования по времени третьего порядка.

В [143] решается задача обтекания эллиптического цилиндра под углом атаки потоком вязкой жидкости. Для этого в эллиптических координатах расчетная область разбивается на подобласти, в каждой из которых краевая задача решается методом матричной прогонки.

В [164] рассматривается обтекание двух сферических частиц нестационарным потоком вязкой жидкости. Исследуется влияние гидродинамического взаимодействия на асимптотику возмущений вдали от частиц и на динамику самих частиц. Решение представлено в виде разложения по малому параметру. Предложено решение задачи обтекания конечного числа частиц нестационарным потоком вязкой жидкости.

В [169] изучается нестационарное осесимметричное обтекание эллипсоидов вязкой несжимаемой жидкостью с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений и гибридного метода вихрей. Представлены картины линий уровня для сферы и эллипсоида с отношением осей 2:1 при числах Рейнольдса от 100 до 3000.

В [170] исследуется обтекание прямоугольной пластины, расположенной поперек потока, вязкой несжимаемой жидкостью с помощью итеративного метода релаксации. Приведены значения силы давления, скорости, завихренности и функции тока для  $Re = 0,5; 1; 10; 20; 100; 200; 300$ .

Теоретический и практический интерес представляет задача о вращении цилиндра в потоке вязкой несжимаемой жидкости с постоянной скоростью на бесконечности. Вращение цилиндра изменяет структуру внешнего течения и приводит к возникновению поперечной силы, известной как сила Магнуса [121 – 125]. В [121] исследуется структура течения при числах Рейнольдса от 1 до 10 и угловых скоростях от 0 до 5, в [122] – для чисел Рейнольдса от 10 до 80 и скоростей вращения от 0 до 3, в [123] – для чисел Рейнольдса до 47 и скоростей вращения от 0 до 3. В [124] исследуется нестационарное обтекание вращающегося кругового цилиндра с помощью метода искусственной сжимаемости, неявной трехслойной схемы второго порядка с подитерациями при интегрировании по времени, разностной схемы третьего порядка с расщеплением векторов потоков для конвективных членов и центрально-разностной схемы при интегрировании вязких членов. В [125] исследовано нестационарное обтекание системы вращающихся круговых цилиндров в канале с помощью конечных элементов при числах Рейнольдса  $Re = 10^2$  и скоростях вращения от 0 до 3.

Обзоры исследований уравнений Навье-Стокса и их аналитических и приближенных решений можно найти в работах [171 – 173].

Практический интерес представляют задачи расчета вязких течений, усложненных теплообменом [6, 35, 46, 104 – 106, 174 – 189]. Процессы тепло- и массообмена являются одними из основных в энергетике, а также в целом ряде технологических процессов металлургической и других отраслей промышленности. Кроме того, задачи массообмена тел с равномерным вязким потоком лежат в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, осаждением коллоидов и т.д.

Исследованиям естественной конвекции с поверхности сферы посвящены работы [174 – 176], вынужденной и смешанной конвекции – работы [177 –

182]. Исследования осесимметричного обтекания тел вращения, отличных от сферы, проводились в основном для малых чисел Рейнольдса [183 – 185].

В [35] исследуется обтекание тел квадратного сечения набегающим с постоянной скоростью потоком вязкой несжимаемой жидкости с учетом притока тепла с помощью метода расщепления по физическим факторам. Построены изолинии давления, линии тока и изотермы для чисел Рейнольдса  $Re = 2, 100, 400$ .

В работе [46] исследуется влияние числа Рейнольдса на характеристики теплопередачи длинного (подогретого) равностороннего треугольного цилиндра в диапазоне  $Re = 50 \div 100$  (с шагом 10) и числом Прандтля 0,71 (воздух) в неограниченном нестационарном поперечном потоке. Для моделирования расчетная сетка создавалась с помощью коммерческого генератора сеток GAMBIT, а расчетные вычисления – с помощью FLUENT. Использовался метод SIMPLE. Представлены мгновенные профили температуры.

В [186] с помощью коммерческого пакета FLUENT исследуется явление теплопередачи сфероидальных частиц в неограниченной ньютоновской жидкости при числах Рейнольдса от 1 до 200, числах Прандтля от 1 до 1000 и отношением осей от 0,25 до 2,5. При фиксированных значениях числа Рейнольдса и отношения осей, большинство изотермических контуров сосредоточено вблизи вытянутых сфероидальных частиц и противоположные тенденции характерны для сплюснутых сфероидальных частиц.

В [187] рассматривается процесс массообмена группы сферических твердых частиц с потоком при числах Пекле  $Pe < 102$ .

В [188] рассматривается двумерная нестационарная ламинарная свободная конвекция при течении в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости вдоль эллиптического цилиндра в предположении, что температура поверхности цилиндра совершает колебания малой амплитуды с примерно постоянной средней температурой. Используется метод конечных разностей совместно с методом Келлера. Получены картины распределения температуры при  $Pr = 0,1$  для различных отношений осей цилиндра.

В [189] изучается вынужденная конвекция вдоль нагреваемых сплюснутых сфероидов с отношением осей от  $\frac{1}{2}$  до 1 с помощью метода обрывания рядов. Приводятся линии уровня, изотермы при числах Рейнольдса от 10 до 500.

### **1.3 Метод $R$ -функций и его применение в вычислительной гидродинамике**

Метод  $R$ -функций был предложен академиком НАН Украины В.Л. Рвачевым [50 – 52, 190]. Применительно к решению краевых задач математической физики этот метод позволяет построить так называемую структуру решения краевой задачи, т.е. пучок функций, который точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи и зависит от некоторых неопределенных компонент. Выбор этих неопределенных компонент подчиняется требованию удовлетворить (в некотором смысле) уравнению задачи. Для этого можно использовать стандартные численные методы математической физики (метод Рунге, метод Галеркина, метод наименьших квадратов, коллокаций и др.).

Следует отметить, что геометрия области при этом учитывается точно, т.е., в частности, не происходит замены криволинейных участков границы на вписанные в них ломанные, как это делается, например, в методе конечных элементов.

Обычно применение метода  $R$ -функций в задачах численного расчета физико-механических полей состоит из следующих этапов:

а) точное аналитическое описание геометрии расчетной области, т.е. построение такой функции, которая обнуляется в точках границы, положительна внутри области и нормальная производная (в направлении внешней нормали) от которой на границе равна  $-1$ ;

б) продолжение краевых условий внутрь области, т.е. доопределение функций и операторов, заданных на границе, во внутренних точках области;

в) построение общей структуры решения, т.е. такой формулы, которая зависит от некоторых неопределенных функций и при любом их выборе точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи;

г) построение приближенного решения, т.е. аппроксимация неопределенных функций, входящих в структуру, выбранным численным методом.

Рассмотрим общие положения теории метода  $R$ -функций [50 – 52, 191].

Определение 1.1.  $R$ -функцией (функцией В.Л. Рвачева), соответствующей разбиению числовой оси на интервалы  $(-\infty, 0)$  и  $[0, +\infty)$ , называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов, т.е. функция  $z = f(x, y)$  называется  $R$ -функцией, если существует такая булева функция  $F$ ,

что  $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$ , где двузначный предикат  $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$  В

этом случае булева функция  $F$  называется сопровождающей.

Наиболее часто используется система  $R$ -функций  $\mathfrak{R}_\alpha$ :

$$\bar{x} \equiv -x,$$

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1 + \alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}),$$

$$x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1 + \alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}),$$

где  $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$ ,  $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$ .

Сопровождающими булевыми функциями для них есть соответственно отрицание, конъюнкция и дизъюнкция.

Сформулируем обратную задачу аналитической геометрии. Пусть в  $\mathbb{R}^2$  задан геометрический объект  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  и требуется построить функцию  $\omega(x, y)$ , положительную внутри  $\Omega$ , отрицательную вне  $\Omega$  и равную нулю на  $\partial\Omega$ . Уравнение  $\omega(x, y) = 0$  будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ .

Пусть область  $\Omega$  может быть сконструирована из более простых (опорных) областей  $\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}$ , ...,  $\Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\}$  с помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения. Тогда области  $\Omega$  можно поставить в соответствие предикат

$$\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m), \quad (1.20)$$

который принимает значение 1, если  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ , и значение 0, если  $(x, y) \notin \bar{\Omega}$ .

Переход от предикатной формы задания области (1.20) к обычному, принятому в аналитической геометрии, уравнению для границы области осуществляется с помощью формальной замены  $\Omega$  на  $\omega(x, y)$ ,  $\Omega_i$  на  $\omega_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а символы  $\{\cap, \cup, \neg\}$  – на символы  $R$ -операций  $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, -\}$  соответственно. В итоге получается аналитическое выражение  $\omega(x, y)$ , которое определяет в элементарных функциях уравнение  $\omega(x, y) = 0$  границы  $\partial\Omega$ . При этом для внутренних точек области  $\omega(x, y) > 0$ , а для внешних  $\omega(x, y) < 0$ .

**Определение 1.2.** Уравнение  $\omega(x, y) = 0$  границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  называется нормализованным на границе  $\partial\Omega$  до  $n$ -го порядка, если функция  $\omega(x, y)$  удовлетворяет условиям  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1$ ,  $\frac{\partial^l\omega}{\partial\mathbf{n}^l}\Big|_{\partial\Omega} = 0$  ( $l = 2, 3, \dots, n$ ), где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ , определенный в её регулярных точках.

Нормализованное до первого порядка уравнение  $\omega(x, y) = 0$  может быть получено из уравнения  $\omega_1(x, y) = 0$  следующим образом.

**Теорема 1.1** [52]. Если  $\omega_1(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$  удовлетворяет условиям  $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$  и  $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} > 0$ , то функция  $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\nabla\omega_1|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяет условиям  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1$  во всех регулярных точках границы  $\partial\Omega$ .

Если  $|\nabla\omega_1| \neq 0$  в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , то для построения нормализованного до первого порядка уравнения можно воспользоваться более простой формулой

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}.$$

В ряде случаев нормализация достигается введением постоянных множителей. Например,

а)  $\frac{y - kx - b}{\sqrt{1 + k^2}} = 0$  – нормализованное уравнение прямой  $y = kx + b$ ;

б)  $\frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0$  – нормализованное уравнение окружности радиуса  $R$  с центром  $(x_0, y_0)$ ;

в)  $\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) = 0$  – нормализованное уравнение полосы, лежащей между прямыми  $x = -a$  и  $x = a$ .

Рассмотрим схему применения аппарата теории  $R$ -функций для решения краевых задач [52]. Задача расчета физико-механического поля сводится к нахождению в некоторой области  $\Omega$  решения  $u$  уравнения  $Au = f$  при заданных условиях на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ :  $L_i u = \varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $A$  и  $L_i$  – некоторые дифференциальные операторы ( $L_i$  в частном случае могут представлять собой тождественный оператор);  $f$  и  $\varphi_i$  – функции, определенные внутри области  $\Omega$  и на участках  $\partial\Omega$  ее границы соответственно. Участки  $\partial\Omega_i$  не обязательно все различные и могут совпадать со всей границей  $\partial\Omega$ . Приведенные в постановках краевых задач функции  $u$ ,  $f$ ,  $\varphi_i$  и операторы  $A$  и  $L_i$  называются аналитическими компонентами краевой задачи; область  $\Omega$ , ее граница  $\partial\Omega$ , участки границы  $\partial\Omega_i$  – геометрическими компонентами. Существование двух разнородных видов информации (аналитической и геометрической) серьезно препятствует нахождению решения краевой задачи. При исследовании и решении краевых задач нужно не только учитывать вид формул, входящих в постановку задачи, но и уметь переводить геометрическую информацию в аналитическую форму, что позволит включить ее в численный алгоритм. Осуществить эту процедуру и позволяет метод  $R$ -функций.

С помощью нормализованного уравнения можно строить пучки функций, нормальная производная которых, либо произвольная линейная комбинация нормальной производной и самой функции на границе области прини-

мают заданные значения. Для этого введем сначала следующий оператор  $D_1 \equiv (\nabla\omega, \nabla)$ , где  $\omega(x, y)$  – нормализованное уравнение границы области.

При этом  $D_1 f|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $\partial\Omega$ ,

для произвольной достаточно гладкой функции  $f$ .

Рассмотрим понятие структуры решения краевой задачи [52].

Определение 1.3. Общей структурой решения краевой задачи называется выражение  $u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m)$ , которое точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи при любом выборе неопределенной компоненты  $\Phi$ . Здесь  $B$  – оператор, который зависит от геометрии области  $\Omega$  и участков  $\partial\Omega_i$  ее границы, а также операторов краевых условий, но не зависит от вида оператора  $A$  и функции  $f$ .

Таким образом, структура решения осуществляет продолжение граничных условий внутрь области.

Практически все приближенные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных основаны на сведении бесконечномерной задачи к конечномерной. В методе  $R$ -функций это достигается представлением неопределённой компоненты  $\Phi$  структуры решения в виде суммы

$$\Phi(x, y) \approx \Phi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y),$$

где  $\varphi_k(x, y)$  – известные элементы полной

функциональной последовательности, а  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – неизвестные коэффициенты разложения. Неопределённые функции, входящие в структурные формулы, должны выбираться так, чтобы наилучшим образом (в том или ином смысле) удовлетворить основному дифференциальному уравнению задачи. Методы поиска приближений к неопределённым функциям могут быть самыми различными, например, можно воспользоваться вариационными (Ритца, наименьших квадратов и т.д.), проекционными (Галёркина, коллокаций и т.д.), сеточными и другими методами. Среди методов аппроксимации неопределённых компонент отметим также оптимальный метод конечных элементов О.Н. Лит-

вина, в котором координатные функции, параметры в узлах и координаты узлов находятся из условия минимума функционала Ритца [192, 193].

Метод  $R$ -функций в задачах гидродинамики использовался Колосовой С.В. [53 – 56], Максименко-Шейко К.В. [57 – 61], Сидоровым М.В. [56, 62 – 65], Слесаренко А.П. [66], Суворовой И.Г. [67 – 70], Цукановым И., Шапиро В. и Чжаном С. [71], Шейко Т.И. [72, 73], но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [53 – 55], вязкой в ограниченных областях [56, 62 – 65, 67 – 71] или при наличии винтовой симметрии [57 – 61], магнито-гидродинамических течений [72, 73], задачи теплообмена в трубах сложного сечения [66].

Задачи обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью с использованием метода  $R$ -функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач.

#### **1.4 Постановка задач исследования**

Как показывает проведенный выше анализ проблемы, методы решения задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью с использованием уравнения для функции тока разработаны недостаточно, что объясняется высоким порядком этого уравнения, его нелинейностью и неограниченностью области, в которой уравнение рассматривается. На наш взгляд привлекательным является использование для решения этого класса задач проекционных методов, поскольку они дают приближенное решение в аналитическом виде, что облегчает дальнейшее использование функции тока  $\psi$  для нахождения поля скоростей и давления. При этом точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, позволит использование конструктивного аппарата теории  $R$ -функций.

Исходя из вышеизложенного, в данной диссертационной работе необходимо решить следующие задачи.

1. Рассмотреть постановку линеаризованной по Озеену задачи расчета обтекания цилиндрических тел, построить структуру решения, точно удовлетворяю-

щую как краевым условиям на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на аппроксимации неопределенных компонент структуры проекционными методами.

2. Рассмотреть постановку линеаризованной по Стоксу задачи расчета обтекания тел вращения, построить структуру решения, точно удовлетворяющую как краевым условиям на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на аппроксимации неопределенных компонент структуры проекционными методами.

3. Рассмотреть постановку нелинейной задачи расчета обтекания цилиндрических тел, построить структуру решения, точно удовлетворяющую как краевым условиям на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на применении метода последовательных приближений и проекционных методов.

4. Рассмотреть постановку нелинейной задачи расчета обтекания тел вращения, построить структуру решения, точно удовлетворяющую как краевым условиям на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на применении метода последовательных приближений и проекционных методов.

5. Рассмотреть постановку задачи массообмена цилиндрических тел с равномерным поступательным потоком, построить структуру решения, точно удовлетворяющую как краевому условию на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на аппроксимации неопределенных компонент структуры проекционными методами.

6. Рассмотреть постановку задачи массообмена тел вращения с равномерным поступательным потоком, построить структуру решения, точно удовлетворяющую как краевому условию на границе обтекаемого тела, так и условию на бесконечности, разработать и обосновать метод численного анализа, основанный на аппроксимации неопределенных компонент структуры проекционными методами.

7. Выполнить программную реализацию разработанных методов и алгоритмов и провести численное моделирование для различных цилиндрических тел и тел вращения.

## РАЗДЕЛ 2

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ (ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОЗЕЕНА)

#### 2.1 Постановка линейризованной по Озеену задачи обтекания цилиндрических тел и приближенный метод ее расчета

Рассмотрим медленное стационарное обтекание равномерным на бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью  $U_\infty$  цилиндрического тела. Сечением, перпендикулярным оси этого цилиндра, является ограниченная область  $\Xi$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Xi$ . Обозначим через  $\Omega$  дополнение к  $\bar{\Xi}$ ,  $\partial\Omega = \partial\Xi$ .

Пусть все величины, характеризующие течение, не зависят от координаты  $z$  и третья компонента скорости жидкости равна нулю:  $V_z = 0$ . Тогда в линейном приближении для описания течения используется линейризация Озеена [5, 7, 8, 109]:

$$\begin{aligned} \nu \Delta V_x - U_\infty \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \nu \Delta V_y - U_\infty \frac{\partial V_y}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $V_x, V_y$  – компоненты скорости жидкости;

$P$  – давление;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\rho$  – плотность жидкости;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока  $\psi$  по формулам [8]:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.2)$$

После исключения из системы Озеена (2.1) членов, содержащих давление, приходим к следующему уравнению для функции тока [9, 20]:

$$\nu \Delta^2 \psi + U_\infty A(\Delta \psi) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad A = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , вводимой соотношениями  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$  ( $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$ ),

дифференциальные операторы, входящие в уравнение (2.3), имеют вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad A\zeta = -\cos \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi},$$

а функция тока  $\psi = \psi(r, \varphi)$  связана с компонентами вектора скорости соотношениями [8]

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.4)$$

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то для функции тока можно поставить такие краевые условия [5, 8]:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается предельным соотношением [2, 5, 20]:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi \cdot r^{-1} = U_{\infty} \sin \varphi, \quad (2.6)$$

где  $U_{\infty}$  – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Паничем О.И. в работах [194 - 196] с помощью методов теории потенциалов была доказана разрешимость задачи Озеена.

В данной работе для решения задачи (2.3), (2.5), (2.6) используем метод  $R$ -функций [50].

Пусть в  $\Omega$  известна функция  $\omega(r, \varphi)$  с необходимой гладкостью, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \omega(r, \varphi) > 0 \text{ в } \Omega; \\ \text{б) } & \omega(r, \varphi)|_{\partial\Omega} = 0; \\ \text{в) } & \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию  $y = f_M(x)$ , которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } & f_M(0) = 0; \\ \text{б) } & f'_M(0) = 1; \\ \text{в) } & f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0; \\ \text{г) } & f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M \quad (M = \text{const} > 0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Легко проверить [54], что условиям (2.8) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{Mx}{x - M}, & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases} \quad (2.9)$$

Очевидно, такая  $f_M(x) \in C^\infty[0, \infty)$ .

Графики функции (2.9) для некоторых  $0 < M < 2$  и  $M \geq 2$  (рис. 2.1) показывают характерное поведение функции (2.9) при разных значениях  $M$ . Значение  $M = 2$  соответствует изменению характера поведения функции, а именно, при  $0 < M < 2$  в точке  $x = \frac{M(2-M)}{2} \in (0, M)$  есть точка перегиба, а при  $M \geq 2$  функция сохраняет направление выпуклости на всем промежутке  $(0, M)$ .

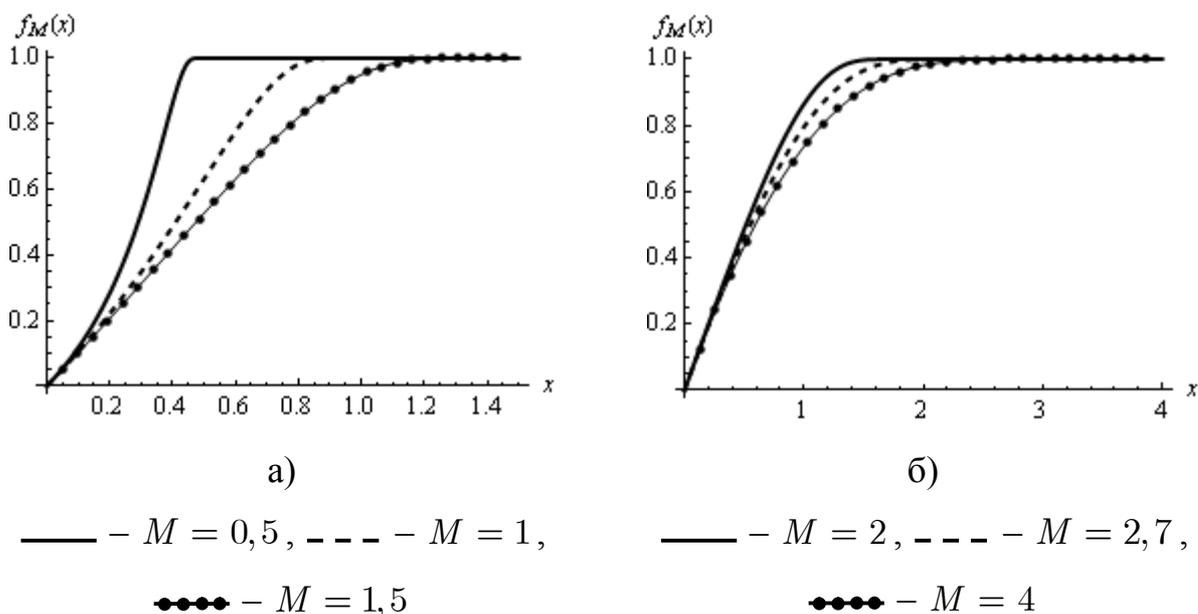


Рисунок 2.1 – Графики функции (2.9) при различных  $M$

Обозначим  $\omega_M(r, \varphi) = f_M[\omega(r, \varphi)]$ . Имеет место утверждение [54].

**Лемма 2.1.** Функция  $\omega_M = f_M(\omega)$  удовлетворяет условиям:

а)  $\omega_M(r, \varphi) > 0$  в  $\Omega$ ;

б)  $\omega_M(r, \varphi)|_{\partial\Omega} = 0$ ;

в)  $\frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = -1$ ,

г)  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \varphi) \geq M$ , (2.10)

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

**Доказательство.** В самом деле, из свойств а) и б) из (2.7) и из условий а)

и в) из (2.8) следует, что  $\omega_M > 0$  в  $\Omega$ ,  $\omega_M = 0$  на  $\partial\Omega$ . Далее,  $\frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}} = \frac{df_M}{d\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}$ .

Используя свойства в) из (2.7) и б) из (2.8) на  $\partial\Omega$ , получаем:

$$\left. \frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{df_M}{d\omega} \right|_{\omega=0} \cdot \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Кроме того, очевидно, что функция  $\omega_M = f_M(\omega)$  удовлетворяет условию (2.10).

Это означает следующее: если функция  $\omega(r, \varphi)$  монотонно возрастает при удалении от контура  $\partial\Omega$ , то функция  $\omega_M(r, \varphi) = f_M[\omega(r, \varphi)]$  отлична от единицы лишь в некоторой конечной кольцеобразной области  $\{0 \leq \omega(r, \varphi) < M\}$ , лежащей в  $\Omega$  и прилегающей к контуру  $\partial\Omega$ .

В задаче (2.3), (2.5), (2.6) сделаем замену

$$\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u,$$

где  $\psi_0 = U_\infty \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi$  – решение задачи об обтекании идеальной

жидкостью кругового цилиндра радиуса  $R$  (считаем, что цилиндр радиуса  $R$  целиком лежит внутри обтекаемого тела);

$u$  – новая неизвестная функция.

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция  $\omega_M^2 \psi_0$  удовлетворяет краевым условиям (2.5) и условию на бесконечности (2.6).

Действительно, из леммы 2.1 имеем  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , поэтому  $\omega_M^2 \psi_0|_{\partial\Omega} = 0$ , т.е. функция  $\omega_M^2 \psi_0$  удовлетворяет первому из краевых условий (2.5).

Найдем производную по нормали

$$\frac{\partial(\omega_M^2 \psi_0)}{\partial\mathbf{n}} = 2\omega_M \frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}} \psi_0 + \omega_M^2 \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}.$$

Поскольку  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , то  $\frac{\partial(\omega_M^2\psi_0)}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ , т.е. функция  $\omega_M^2\psi_0$  удовлетворяет и второму из краевых условий (2.5).

Проверим выполнение условия на бесконечности (2.6). Заметим, что согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \varphi) \geq M$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\omega_M^2\psi_0) \cdot r^{-1} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_0 \cdot r^{-1} = U_\infty \sin \varphi.$$

Кроме того, в области  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$  функция  $\omega_M^2\psi_0$  точно удовлетворяет уравнению (2.3).

После подстановки функции  $\psi = \omega_M^2\psi_0 + u$  в задачу (2.3), (2.5), (2.6) получим, что функция  $u$  является решением следующей задачи

$$\nu \Delta^2 u + U_\infty A(\Delta u) = f \text{ в } \Omega, \quad (2.11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} u = 0, \quad (2.13)$$

где  $f = -\nu \Delta^2(\omega_M^2\psi_0) - U_\infty A(\Delta(\omega_M^2\psi_0))$ .

Заметим, что  $f \equiv 0$  в области  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$ .

Для введения определения обобщенного решения воспользуемся второй формулой Грина [197], которая имеет вид

$$\int_{\Omega} (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}} \right) dS. \quad (2.14)$$

Если в (2.14) заменить  $u$  на  $\Delta u$ , то

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial \Delta u}{\partial\mathbf{n}} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}} \right) dS. \quad (2.15)$$

Кроме того, если функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют условиям  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ , то (2.15) примет вид

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, d\Omega. \quad (2.16)$$

Решение задачи (2.11) – (2.13) будем искать в классе  $F$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $x, y$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$  удовлетворяют условиям (2.12) [198]. Искомое обобщенное решение  $u$  должно принадлежать классу  $F$  и удовлетворять интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left( \nu \Delta u \Delta v + U_{\infty} \Delta u \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \Delta v + U_{\infty} \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

для любой  $v \in F$ .

Интегральное тождество (2.17) получено применением к равенству

$$\int_{\Omega} (\nu \Delta^2 u + U_{\infty} A(\Delta u)) \cdot v \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\nu \Delta^2(\omega_M^2 \psi_0) + U_{\infty} A(\Delta(\omega_M^2 \psi_0))) \cdot v \, d\Omega$$

формулы (2.16) и формулы интегрирования по частям.

Заметим, что из (2.17) следует, что для нахождения обобщенного решения достаточно потребовать, чтобы функция  $\omega$ , построенная на основе средств теории  $R$ -функций, была дважды непрерывно дифференцируемой в  $\bar{\Omega}$ .

Обобщенное решение  $u$  найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнения (2.11), рассматриваемого в  $\Omega_n$ , где  $\Omega_n$  – часть  $\Omega$  вида

$$\Omega_n = \{(x, y) \in \Omega \mid 0 < \omega(x, y) < M_n\},$$

где  $\{M_n\}$  – любая возрастающая неограниченная сверху числовая последовательность.

Можно взять, например,  $M_n = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, последовательность областей  $\{\Omega_n\}$  является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  рассмотрим краевые задачи

$$\nu \Delta^2 u_n + U_\infty A(\Delta u_n) = f \text{ в } \Omega_n, \quad (2.18)$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.19)$$

где  $f = -\nu \Delta^2(\omega_M^2 \psi_0) - U_\infty A(\Delta(\omega_M^2 \psi_0))$ .

Функции  $u_n$ , следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], продолжим нулем вне  $\Omega_n$ .

Для решения задач применим метод Бубнова-Галеркина [197, 200].

Обозначим операторы:  $A_0 = \Delta^2$ ,  $K = A(\Delta)$ . Тогда оператор  $B = \nu \Delta^2 + U_\infty A(\Delta)$  краевых задач (2.18) – (2.19) запишется в виде

$$B = \nu A_0 + U_\infty K.$$

Оператор  $A_0$  будем рассматривать на множестве  $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$  функций  $u \in C^4(\Omega_n) \cap C^1(\bar{\Omega}_n)$ , удовлетворяющих краевым условиям (2.19) задач (2.18) – (2.19).

Как следует из результатов работы [197] оператор  $A_0$  является симметричным, положительно-определенным и  $(\Delta^2 u, v) = \int_{\Omega_n} \Delta u \Delta v d\Omega$  для любых

$u, v \in D_0$ . На  $D_0$  введем скалярное произведение  $[u, v] = \int_{\Omega_n} \Delta u \Delta v d\Omega$ . По-

полнив  $D_0$  в метрике, порожденной этим скалярным произведением, полу-

чим энергетическое пространство  $H_0$  с нормой  $\|u\|^2 = \int_{\Omega_n} (\Delta u)^2 d\Omega$ .

Выберем координатную систему  $\{\phi_k\}$ , подчинив ее следующим условиям:

- а)  $\phi_k \in H_0$  для любого  $k$ ;
- б) элементы  $\phi_1, \dots, \phi_N$  – линейно независимы при любом  $N$ ;
- в) координатная система  $\{\phi_k\}$  полна в  $H_0$ .

Приближенное решение задач (2.18) – (2.19) при каждом  $n = 1, 2, \dots$  согласно методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде

$$u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j, \quad (2.20)$$

где  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{\nu[\phi_j, \phi_i] + U_\infty(K\phi_j, \phi_i)\} = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.21)$$

$$\text{где } (f, \phi_i) = -\nu \int_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \Delta \phi_i d\Omega - U_\infty \int_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega.$$

Согласно достаточному признаку сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] метод будет сходиться, если оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ . В [197] было доказано, что оператор  $A_0$  имеет дискретный спектр. Следовательно, по теореме 5 [197] оператор  $A_0^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_2(\Omega_n)$ . Кроме того, из результатов статьи С.Г. Михлина [201] следует, что оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ .

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  галеркинские приближения сходятся при каждом  $n$  к обобщенному решению задачи (2.18) – (2.19), которое определяется интегральным тождеством

$$\int_{\Omega_n} \left( \nu \Delta u_n \Delta v + U_\infty \Delta u_n \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \Delta v + U_\infty \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = 0. \quad (2.22)$$

Оценим обобщенное решение в норме  $|\cdot|$ . Умножив (2.18) в  $L_2(\Omega_n)$  на  $v$  из  $F$ , получим  $\nu (\Delta^2 u_n, v)_{L_2(\Omega_n)} - U_\infty \left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, v \right)_{L_2(\Omega_n)} = (f, v)_{L_2(\Omega_n)}$  или

$$\nu [u_n, v]_{L_2(\Omega_n)} = U_\infty \left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, v \right)_{L_2(\Omega_n)} + (f, v)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (2.23)$$

В (2.23) вместо  $v$  подставим решение  $u_n$ :

$$\nu |u_n|^2 = U_\infty \left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)} + (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим скалярное произведение  $\left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)}$ . Применяя первую формулу Грина и учитывая краевые условия (2.19), получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)} &= \left( \Delta \frac{\partial u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)} = \int_{\Omega_n} \Delta \frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot u_n d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega_n} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) d\Omega = - \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Последний интеграл обнуляется в силу формулы Остроградского-Гаусса и краевых условий (2.19). Тогда  $\left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)} = 0$  и равенство (2.24) приобретает вид

$$\nu |u_n|^2 = (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (2.25)$$

Применив неравенство Коши-Буняковского [11, 197] и неравенство [11]

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega_n)} \leq c_1 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)} \quad (2.26)$$

к правой части (2.25), получим оценку

$$\begin{aligned} |(f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|_{W_2^2(\Omega_n)} \leq \\ &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|\Delta u_n\|_{L_2(\Omega_n)} = c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга [11]

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \quad (2.27)$$

при  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ ,  $a = \|u_n\|$ ,  $b = c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}$  получим, что

$$|(f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}| \leq \frac{\nu}{2} \|u_n\|^2 + \frac{1}{2\nu} c_1^2 \|f\|_{L_2(\Omega_n)}^2.$$

Подставляя последнюю оценку в (2.25), получим

$$\|u_n\| \leq \frac{c_1}{\nu} \|f\|_{L_2(\Omega_n)}. \quad (2.28)$$

Для применения метода Бубнова-Галеркина необходимо построить координатную последовательность, для чего воспользуемся полной системой частных решений уравнения  $\Delta^2 u = 0$  [202] и структурным методом (методом  $R$ -функций) [50].

Общее решение бигармонического уравнения  $\Delta^2 u = 0$  имеет вид [202]:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & A_0 r^2 \ln r + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^{2+n} \cos n\varphi + \tilde{A}_n r^{2+n} \sin n\varphi + B_n r^{2-n} \cos n\varphi + \right. \\ & \left. + \tilde{B}_n r^{2-n} \sin n\varphi + C_n r^n \cos n\varphi + \tilde{C}_n r^n \sin n\varphi + D_n r^{-n} \cos n\varphi + \tilde{D}_n r^{-n} \sin n\varphi \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$  – произвольные постоянные.

Из (2.29) видно, что для уравнения  $\Delta^2 u = 0$  полная система частных решений относительно внешности цилиндра конечного радиуса имеет вид:

$$\{\varphi_k(r, \varphi)\} = \left\{ r^{-k} \begin{array}{l} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{array}, k = 1, 2, \dots; r^{2-k} \begin{array}{l} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{array}, k = 3, 4, \dots \right\}, \quad (2.30)$$

а полная система частных решений относительно области  $\{\omega(r, \varphi) < M\}$  имеет вид

$$\{\tau_j(r, \varphi)\} = \left\{ \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, r^j \begin{array}{l} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{array}, r^{j+2} \begin{array}{l} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{array}, j = 1, 2, \dots \right\}. \quad (2.31)$$

**Теорема 2.1.** При любом выборе достаточно гладких функций  $\Phi_1, \Phi_2$  и требовании, что  $\Phi_1 \cdot r^{-1} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  функция вида

$$u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2 \quad (2.32)$$

точно удовлетворяет краевым условиям (2.12) и условию на бесконечности (2.13).

**Доказательство.** Проверим, что функция (2.32) удовлетворяет краевым условиям (2.12). Из леммы 2.1 имеем  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , поэтому  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Следовательно, функция вида (2.32) удовлетворяет первое из краевых условий (2.12).

Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 2\omega_M \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} \Phi_1 + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi_1 + \\ &+ 2\omega_M \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} (1 - \omega_M) \Phi_2 + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ((1 - \omega_M) \Phi_2). \end{aligned}$$

Поскольку  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , то  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ , т.е. функция (2.32) удовлетворяет

и второму из краевых условий (2.12).

Проверим условие на бесконечности. Согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \varphi) \geq M$ . Следовательно, в точках области  $\omega(r, \varphi) \geq M$  функция  $u$  вида (2.32) приобретает вид  $u = \Phi_1$ .

Тогда  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u \cdot r^{-1} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 \cdot r^{-1} = 0$ , так как  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 \cdot r^{-1} = 0$  по предположению теоремы.

Таким образом, функция  $u$  вида (2.32) точно удовлетворяет краевым условиям (2.12), (2.13), т.е. является структурой решения задачи (2.11) – (2.13).

Замечание. Из теоремы 2.1 следует, что решение задачи (2.3), (2.5), (2.6) может быть представлено в виде  $\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2$ .

Аппроксимации функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в области  $\Omega_n$  будем искать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j,$$

где  $\{\varphi_k\}$  имеет вид (2.30);

$\{\tau_j\}$  имеет вид (2.31);

$\alpha_k$  и  $\beta_j$  – неизвестные (пока) коэффициенты.

Таким образом, приближенное решение задачи (2.18) – (2.19) будем искать в виде

$$u_{n,N} = \omega_M^2 \cdot \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k + \omega_M^2(1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{\phi_i(r, \varphi)\} = \left\{ \omega_M^2(r, \varphi) r^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k = 3, 4, \dots; \omega_M^2(r, \varphi) r^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k = 1, 2, \dots; \right. \\ \left. \omega_M^2(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}, \omega_M^2(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) r^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, \right. \\ \left. \omega_M^2(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) r^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j = 1, 2, \dots \right\}. \quad (2.33)$$

Значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) в соответствии с методом Бубнова-Галеркина найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  ( $N = m_1 + m_2$ ) элементам последовательности (2.33), которое приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида (2.21).

**Теорема 2.2.** При каждом  $n$  галеркинские приближения  $u_{n, N}$  вида (2.20) при  $N \rightarrow \infty$  сходятся в энергетической норме к обобщенному решению задачи (2.18) – (2.19), при этом имеет место оценка (2.28).

Из работы Ладыженской [11] вытекает, что последовательность  $\{u_n\}$  является слабо компактной в  $H_0$ , значит, из неё можно выделить сходящуюся к некоторой функции  $u^* \in H_0$  подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$ . Переходя по подпоследовательности  $\{u_{n_k}\}$  к пределу при  $M_{n_k} \rightarrow \infty$  в интегральном тождестве (2.22), получим, что функция  $u^*$  является обобщенным решением задачи (2.11) – (2.13). Кроме того, из результатов работы [11] следует единственность решения линейной задачи (2.11) – (2.13), а значит, вся последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u^*$ .

**Теорема 2.3.** Последовательность функций  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  сходится в энергетической норме к единственному обобщенному решению задачи (2.11) – (2.13).

Замечание. Функции  $\psi_n = \omega_M^2 \psi_0 + u_n$  сходятся к обобщенному решению задачи (2.3), (2.5), (2.6). Кроме того, заметим, что при любом  $n$  функции  $\psi_n$  определены и вне  $\Omega_n$ , т.е. в области  $\Omega \setminus \Omega_n$ . При этом, поскольку

$\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$  в области  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$ , то

$$\psi_n = \psi_0 + \Phi_1 = U_\infty \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi + \sum_k \alpha_k \cdot \varphi_k,$$

а значит,  $\nu \Delta^2 \psi_n + U_\infty A(\Delta \psi_n) = 0$  в  $\Omega \setminus \Omega_n$  и  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_n \cdot r^{-1} = U_\infty \sin \varphi$ . Таким образом, при любом  $n$  функции  $\psi_n$  в области  $\Omega \setminus \Omega_n$  точно удовлетворяют как дифференциальному уравнению задачи (2.3), так и условию на бесконечности (2.6).

## 2.2 Результаты моделирования процесса медленного обтекания цилиндрических тел

### 2.2.1 Численные результаты расчета задачи обтекания кругового цилиндра

Рассмотрим краевую задачу (2.3), (2.5), (2.6), где обтекаемое тело – круговой цилиндр  $x^2 + y^2 = R^2$ , представленный на рис. 2.2, при  $R = 1$ ,  $U_\infty = 1$ ,  $Re = 0,01$ . Решение задачи сводится к решению системы (2.21). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие косинусы кратных дуг, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) с нечётными индексами равны нулю. Двойные интегралы в системе (2.21) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

В таблице 2.1 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значениям  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 14$  и различным значениям параметра  $M$ .

В таблице 2.2 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значению параметра

$M = 2$  и различным значениям  $m_1$  и  $m_2$ .

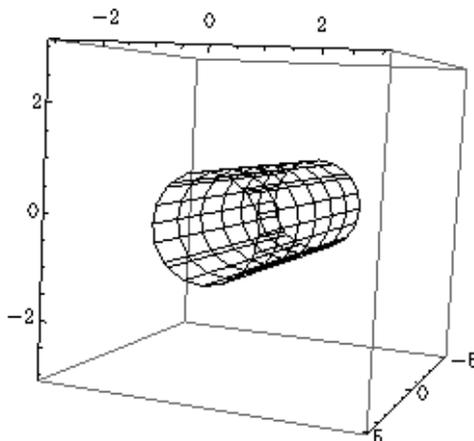


Рисунок 2.2 – Круговой цилиндр

Таблица 2.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 14$  и различных  $M$

$m_1$	8		
$m_2$	14		
$M$	1	2	5
$\alpha_2$	-0,38437	-0,60266	-0,96934
$\alpha_4$	-0,00017	-0,00049	-0,00172
$\alpha_6$	0	0	0
$\alpha_8$	0	0	0
$\beta_2$	1,05980	1,01812	1,21539
$\beta_4$	-0,33674	-0,14927	-0,06875
$\beta_6$	-0,00027	0,00019	0,00056
$\beta_8$	-0,00141	-0,00004	0,00183
$\beta_{10}$	0,00122	-0,00033	-0,00144
$\beta_{12}$	0	0	0
$\beta_{14}$	0	0	0

Линии уровня функции тока для  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 14$  и различных значений параметра  $M$  представлены на рис. 2.3.

Линии уровня функции тока для значения параметра  $M = 2$  и разного

числа координатных функций  $m_1, m_2$  представлены на рис. 2.4.

Поверхности уровня функции тока для значения параметра  $M = 2$  и разного числа координатных функций  $m_1, m_2$  представлены на рис. Б.1.

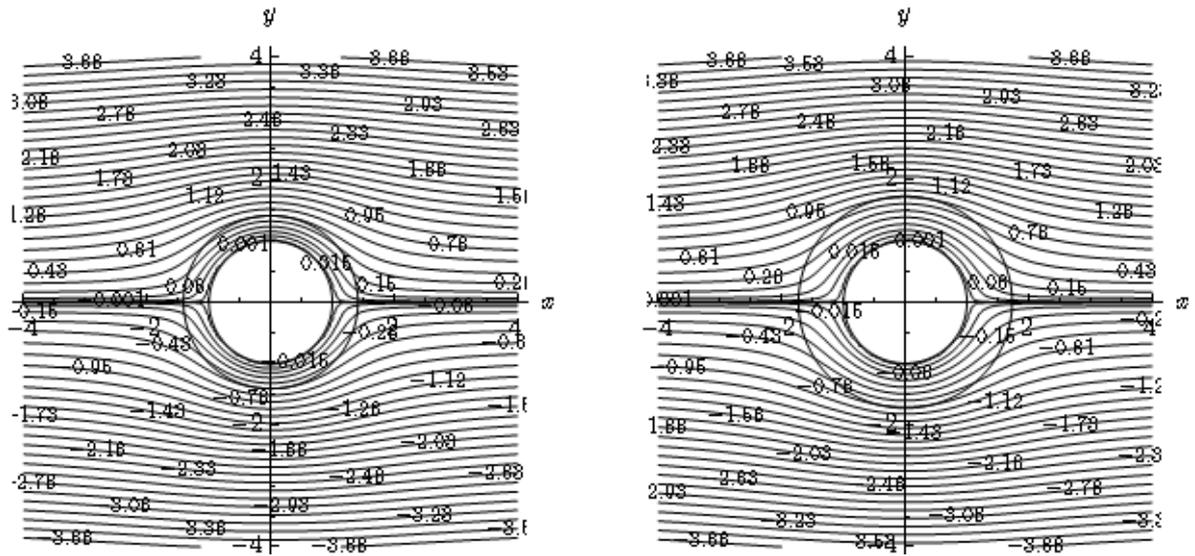
Таблица 2.2 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

$M$	2		
$m_1$	4	8	12
$m_2$	10	14	18
$\alpha_2$	- 0,60266	- 0,60266	- 0,60266
$\alpha_4$	- 0,00049	- 0,00049	- 0,00049
$\alpha_6$	-	0	0
$\alpha_8$	-	0	0
$\alpha_{10}$	-	-	0
$\alpha_{12}$	-	-	0
$\beta_2$	1,01812	1,01812	1,01812
$\beta_4$	- 0,14927	- 0,14927	- 0,14927
$\beta_6$	0,00019	0,00019	0,00019
$\beta_8$	-0,00004	- 0,00004	- 0,00004
$\beta_{10}$	- 0,00033	- 0,00033	- 0,00033
$\beta_{12}$	-	0	0
$\beta_{14}$	-	0	0
$\beta_{16}$	-	-	0
$\beta_{18}$	-	-	0

На рис. Б.2 представлены векторные поля скоростей  $\mathbf{V} = (V_r, V_\varphi) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$  для значения параметра  $M = 2$  и различного числа координатных функций  $m_1$  и  $m_2$ .

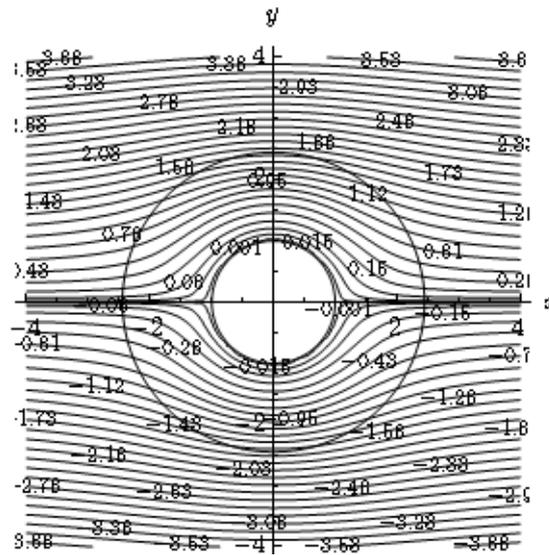
Полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами физических экспериментов (см. стр. 660 [109], см. стр. 13 [205]) и ре-

зультатами, полученными другими авторами (см. стр. 61 [28], см. стр. 5 [128]).



а)  $M = 1$

б)  $M = 2$



в)  $M = 5$

Рисунок 2.3 – Линии уровня функции тока

для  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 14$  и различных  $M$

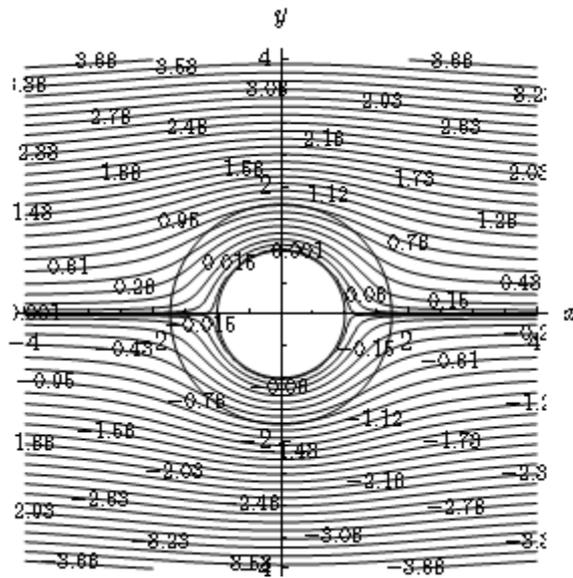
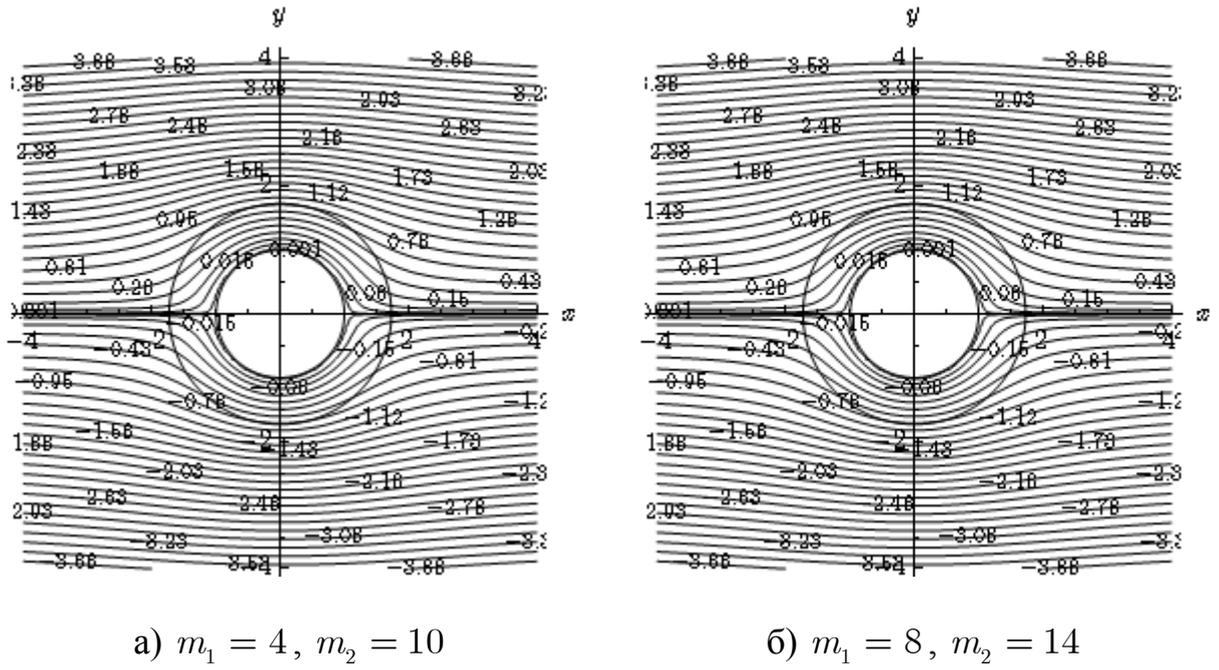


Рисунок 2.4 – Линии уровня функции тока  
для  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

### 2.2.2 Вычислительный эксперимент моделирования процесса обтекания эллиптического цилиндра

Рассмотрим краевую задачу (2.3), (2.5), (2.6), где обтекаемое тело – эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , представленный на рис. 2.5, при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $U_\infty = 1$ ,  $Re = 0,01$ . Решение задачи сводится к решению системы (2.21). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие косинусы кратных дуг, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) с нечётными индексами равны нулю. Двойные интегралы в системе (2.21) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

В таблице 2.3 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значениям  $m_1 = 12$ ,  $m_2 = 18$  и различным значениям параметра  $M$ .

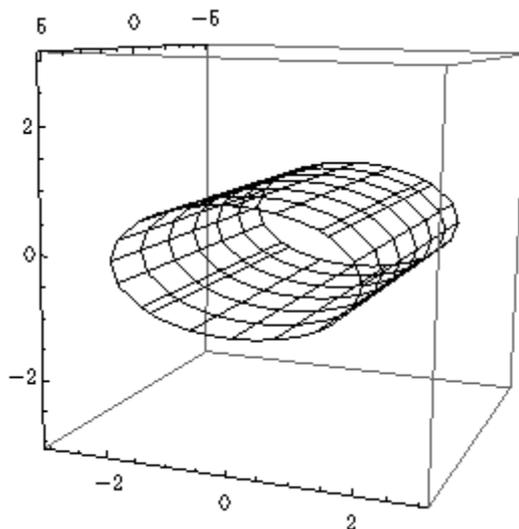


Рисунок 2.5 – Эллиптический цилиндр

В таблице Б.1 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значению параметра  $M = 2$  и различным значениям  $m_1$  и  $m_2$ .

Линии уровня функции тока для  $m_1 = 12$ ,  $m_2 = 18$  и различных значений параметра  $M$  представлены на рис. 2.6.

Линии уровня функции тока для значения параметра  $M = 2$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$  представлены на рис. 2.7.

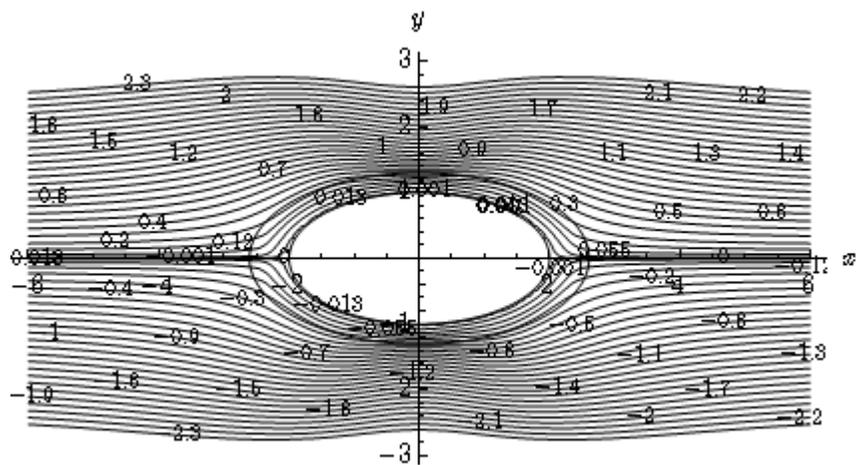
Поверхности уровня функции тока для значения параметра  $M = 2$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$  представлены на рис. Б.3.

На рис. Б.4 представлены векторные поля скоростей  $\mathbf{V} = (V_r, V_\varphi) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$  для значения параметра  $M = 2$  и различного числа координатных функций  $m_1$  и  $m_2$ .

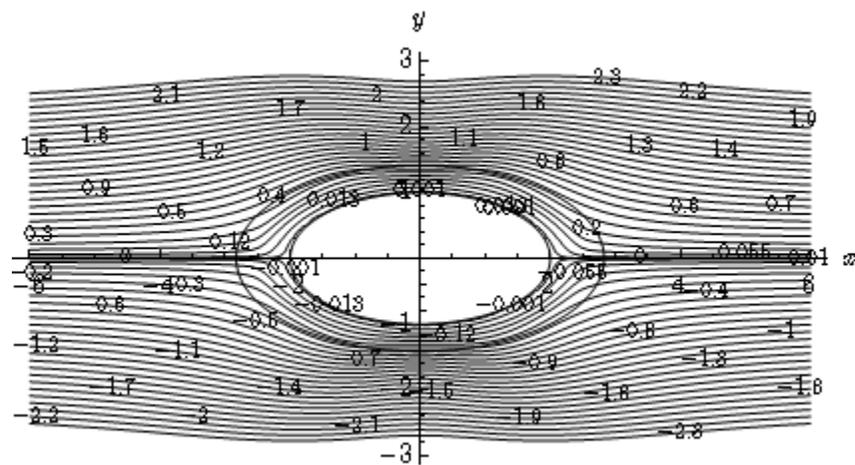
Полученные результаты сравнивались с результатами из (см. стр. 132 [43], см. стр. 6656 [47]). Результаты очень хорошо согласуются.

Таблица 2.3 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $m_1 = 12$ ,  $m_2 = 18$  и различных  $M$

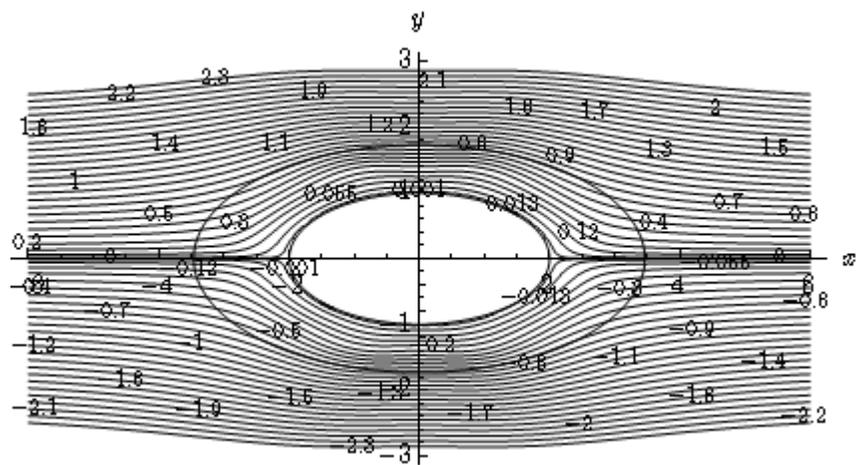
$m_1$	12			
$m_2$	18			
$M$	0,7	1	2	5
$\alpha_2$	-0,59031	-0,74157	-1,10474	-1,58701
$\alpha_4$	-0,00082	-0,00022	0,00007	-0,00221
$\alpha_6$	-0,93591	-0,77371	-0,51432	-0,50003
$\alpha_8$	0,93057	0,62522	-0,00112	-0,06576
$\alpha_{10}$	0,00375	0,00001	-0,00430	-0,00428
$\alpha_{12}$	-0,00745	-0,00030	0,00995	0,00873
$\beta_2$	1,38251	1,18559	1,00630	1,20403
$\beta_4$	-0,51355	-0,32895	-0,12515	-0,05607
$\beta_6$	-0,00011	0,00013	0,00058	0,00050
$\beta_8$	-0,00141	0,00048	0,00593	0,00606
$\beta_{10}$	0,00069	-0,00056	-0,00354	-0,00297
$\beta_{12}$	0,01407	0,00935	0,00082	0,00188
$\beta_{14}$	0,05764	0,03512	0,02578	-0,01470
$\beta_{16}$	0	0	0	0
$\beta_{18}$	0,00008	-0,00001	-0,00006	-0,00006

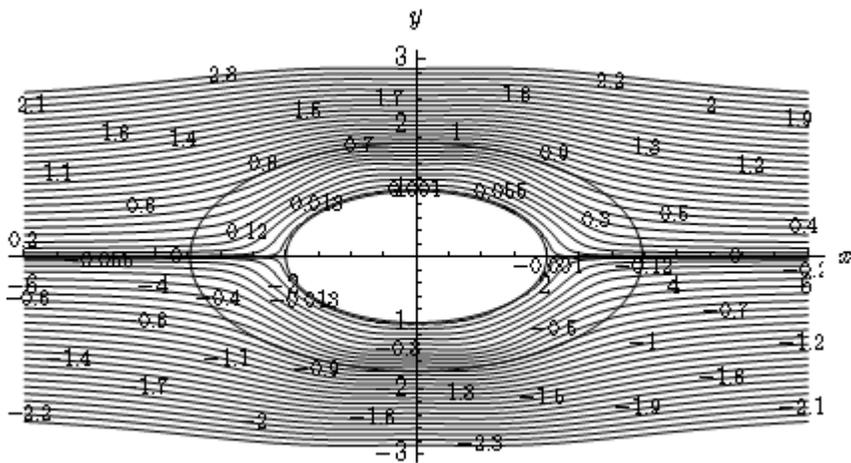


а)  $M = 0,7$

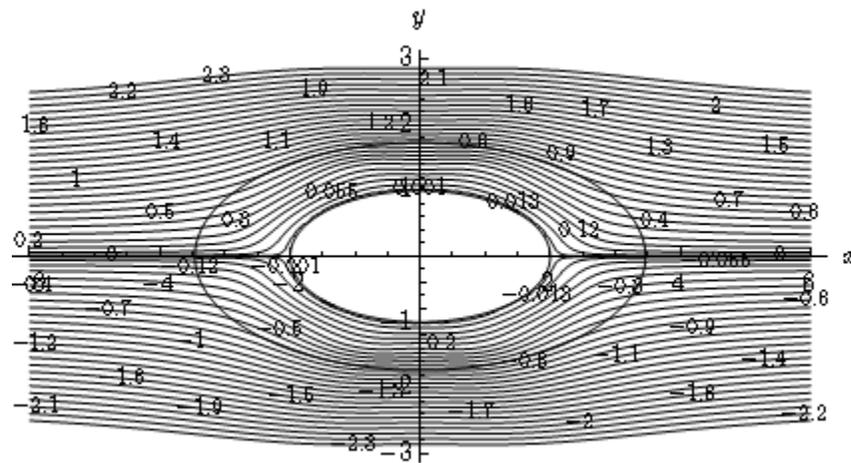


б)  $M = 1$

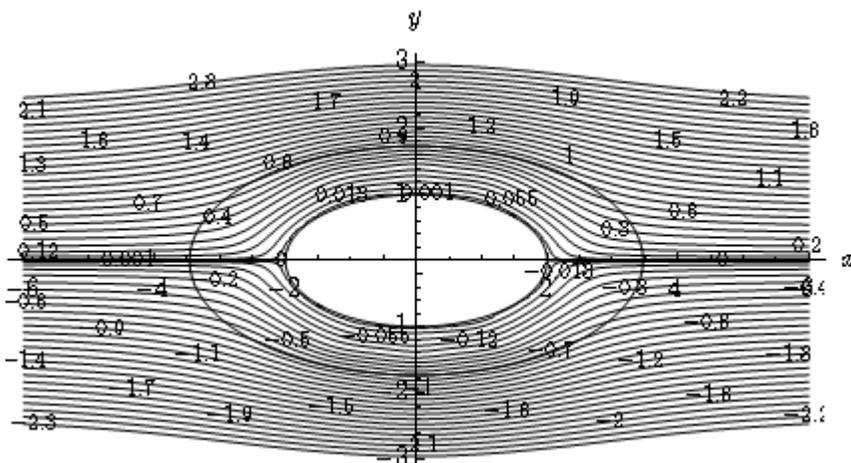




а)  $m_1 = 8, m_2 = 14$



б)  $m_1 = 12, m_2 = 18$



### 2.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе

Рассмотрим краевую задачу (2.3), (2.5), (2.6), где обтекаемое тело – цилиндрическое тело, представленное на рис. 2.8, уравнение образующей которого имеет вид  $x^8 + y^8 = 1$  (кривая Ламе при  $a = b = 1$ ,  $n = 8$ ), при  $U_\infty = 1$ ,  $Re = 0,01$ . Решение задачи сводится к решению системы (2.21). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие косинусы, и слагаемые, содержащие синусы кратных дуг, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым, равны нулю. Двойные интегралы в системе (2.21) считались приближенно по формуле Гаусса со 100 узлами по каждой переменной.

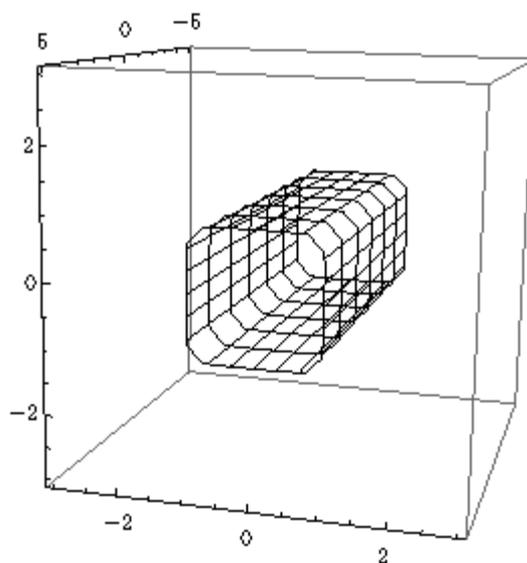


Рисунок 2.8 – Цилиндрическое тело, сечением которого является кривая Ламе

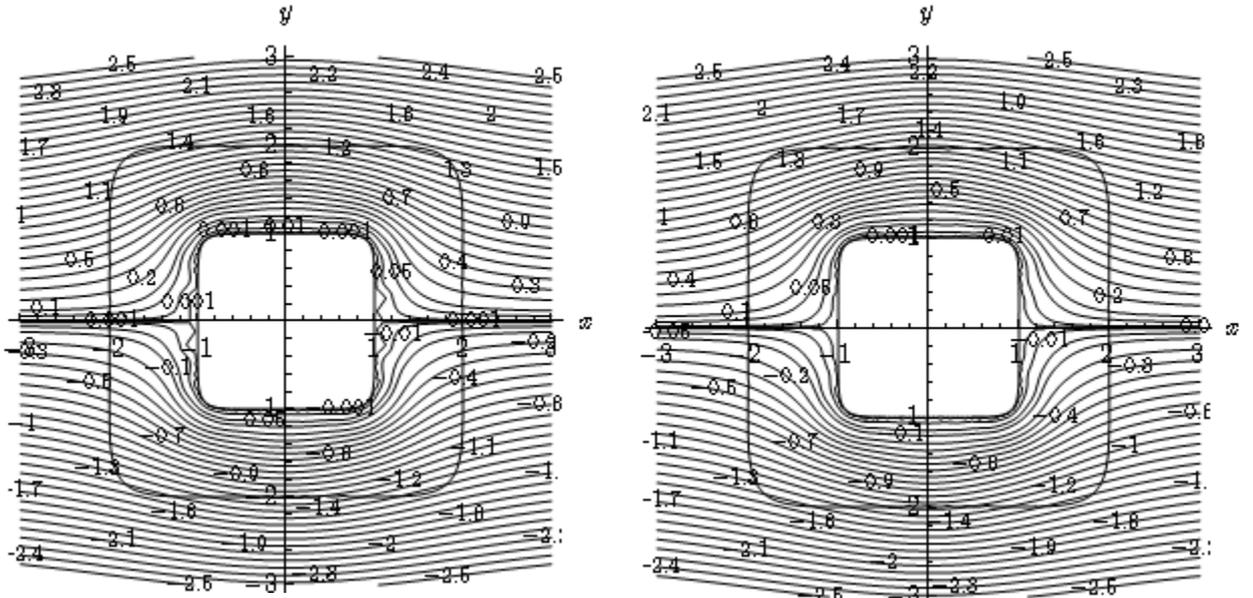
В таблице Б.2 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значениям  $m_1 = 80$  (ненулевых 21),  $m_2 = 46$  (ненулевых 12) и различным значениям параметра  $M$ .

В таблице Б.3 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значению параметра



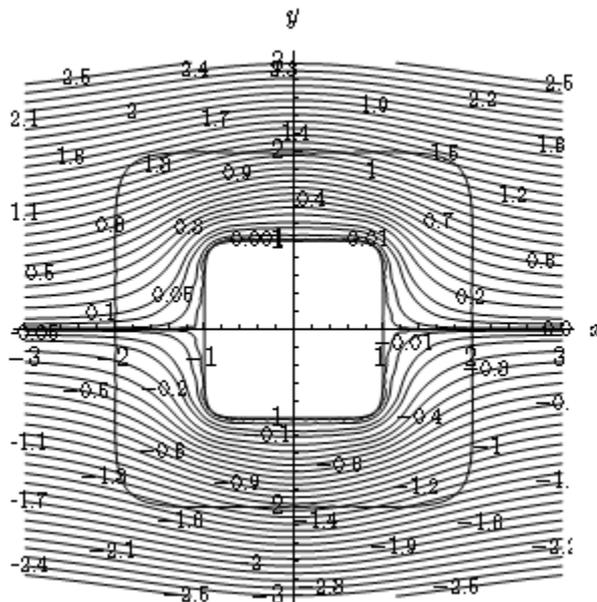
Поверхности уровня функции тока для значения параметра  $M = 255$  и разного числа координатных функций  $m_1, m_2$  представлены на рис. Б.5.

На рис. Б.6 представлены векторные поля скоростей  $\mathbf{V} = (V_x, V_y) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$  для значения параметра  $M = 255$  и различного числа координатных функций  $m_1$  и  $m_2$ .



а)  $m_1 = 56, m_2 = 30$

б)  $m_1 = 64, m_2 = 38$



в)  $m_1 = 80, m_2 = 46$

Рисунок 2.10 – Линии уровня функции тока для  $M = 255$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

## Выводы по разделу 2

1. Для функции тока рассмотрена постановка линеаризованной по Озеену задачи, являющейся математической моделью процесса медленного обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

2. Построена структура решения задачи медленного обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью в соответствии с методом  $R$ -функций, точно удовлетворяющая краевым условиям на границе обтекаемого тела и условию на бесконечности, что позволило свести задачу в бесконечной области к задаче в конечной области.

3. Разработан и обоснован численный метод расчета внешних медленных течений вязкой несжимаемой жидкости вне цилиндрического тела (приближение Озеена), основанный на аппроксимации неопределенных компонент в структуре решения краевой задачи методом Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственному обобщенному решению задачи, рассматриваемой в ограниченной области, получена оценка решения в энергетической норме.

4. Проведены вычислительные эксперименты для некоторых цилиндрических тел, таких как круговой, эллиптический цилиндры и цилиндрическое тело, сечением которого является кривая Ламе. Полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами физических экспериментов и результатами, полученными другими авторами, что говорит об эффективности разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в работах [78 – 81, 85, 94, 98, 100, 103].

### РАЗДЕЛ 3

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

### 3.1 Постановка нелинейной задачи обтекания цилиндрических тел и приближенный метод ее расчета

Рассмотрим стационарное обтекание равномерным на бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью  $U_\infty$  цилиндрического тела, сечением которого является конечная область  $\Xi$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Xi$ . Обозначим через  $\Omega$  дополнение к  $\Xi$ . Очевидно,  $\partial\Omega = \partial\Xi$ . Такие течения удобно рассматривать в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Пусть все величины, характеризующие течение, не зависят от координаты  $z$  и третья компонента скорости жидкости равна нулю:  $V_z = 0$ . Тогда стационарные уравнения Навье-Стокса имеют вид [2]:

$$\begin{aligned}
 V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\
 V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \\
 \frac{\partial(r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $V_r, V_\varphi$  – компоненты скорости жидкости;

$P$  – давление;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\rho$  – плотность жидкости;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Совокупность уравнений (3.1) представляет собой систему нелинейных

уравнений в частных производных относительно неизвестных функций  $V_r, V_\varphi, P$ .

Уравнение неразрывности (третье уравнение в (3.1)) интегрируется введением функции тока  $\psi$  по формулам (2.2). Исключая из оставшихся двух уравнений перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi = \psi(r, \varphi)$  получим нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\nu \Delta^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial \varphi} \quad \text{в } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\text{где } \Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2};$$

$$\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

В прямоугольной системе координат функции тока  $\psi$  вводится по формулам (2.4). Уравнение (3.2) в этом случае имеет вид

$$\nu \Delta^2 \psi = J(\Delta \psi, \psi) \quad \text{в } \Omega, \quad (3.3)$$

$$\text{где } \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi);$$

$$J(\Delta \psi, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial y}.$$

Уравнения (3.2) и (3.3) следует дополнить краевыми условиями на  $\partial\Omega$  и условием на бесконечности (при  $r \rightarrow +\infty$ ).

Если граница обтекаемого тела неподвижна и непроницаема, то из условий прилипания следуют такие краевые условия [5, 8]:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Условие на бесконечности имеет вид [2, 5, 20]:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \psi = U_{\infty} \sin \varphi, \quad (3.5)$$

и означает, что при неограниченном удалении от обтекаемого тела поток становится равномерным.

Для решения задачи (3.3) – (3.5) воспользуемся методом последовательных приближений и методами  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина.

Пусть  $u_0(x, y)$  – решение следующей вспомогательной линейной задачи:

$$\nu \Delta^2 u_0 - U_{\infty} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.6)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} u_0 = U_{\infty} \sin \varphi. \quad (3.8)$$

Задача (3.6) – (3.8) может быть решена с помощью метода, описанного в разделе 2.

В задаче (3.3) – (3.5) сделаем замену

$$\psi = u_0 + u,$$

где  $u$  – новая неизвестная функция.

Тогда для функции  $u$  получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\nu \Delta^2 u = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u) - U_{\infty} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (3.9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} u = 0. \quad (3.11)$$

Решение задачи (3.9) – (3.11) будем искать в классе  $F$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и

квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $x, y$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$  удовлетворяют условиям (3.10) [198]. Умножим (3.9) скалярно на  $v$  из  $F$  в  $L_2(\Omega)$ , получим

$$\nu(\Delta^2 u, v)_{L_2(\Omega)} = (J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), v)_{L_2(\Omega)} - U_\infty \left( \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x}, v \right)_{L_2(\Omega)}$$

или

$$\nu[u, v] = (J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), v)_{L_2(\Omega)} - U_\infty \left( \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x}, v \right)_{L_2(\Omega)}, \quad (3.12)$$

$$\text{где } [u, v] = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\Omega.$$

Используя свойство якобиана [203]

$$\int_{\Omega} J(u, v) w dx dy = \int_{\Omega} J(v, w) u dx dy, \quad u, v \in W_2^2(\Omega), w \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad (3.13)$$

и вторую формулу Грина (2.14) для последнего слагаемого в (3.12), получим

$$\nu[u, v] = (J(u_0 + u, v), \Delta(u_0 + u))_{L_2(\Omega)} - U_\infty \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta v \right)_{L_2(\Omega)}$$

или

$$\nu \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\Omega = \int_{\Omega} J(u_0 + u, v) \Delta(u_0 + u) d\Omega - U_\infty \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial x} \Delta v d\Omega. \quad (3.14)$$

Обобщенным решением задачи (3.9) – (3.11) назовем функцию  $u$ , которая принадлежит классу  $F$  и удовлетворяет интегральному тождеству (3.14).

Следуя разделу 2, обобщенное решение  $u$  задачи (3.9) – (3.11) найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнения (3.9), рассматриваемого в по-

следовательности областей  $\{\Omega_n\}$ , которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

Для решения задачи (3.9) – (3.11) в области  $\Omega_n$  построим итерационный процесс следующим образом. Пусть начальное приближение  $u_n^{(0)}$  задано. Если  $k$ -е приближение  $u_n^{(k)}$  построено, то новое  $(k+1)$ -е приближение  $u_n^{(k+1)}$  находим как решение линейной задачи

$$\nu \Delta^2 u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - U_\infty \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} \text{ в } \Omega_n, \quad (3.15)$$

$$u_n^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.16)$$

продолженное, следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], нулем вне  $\Omega_n$ .

Умножив уравнение (3.15) скалярно на произвольную функцию  $v$  из класса  $F$  и используя свойство якобиана (3.13) и вторую формулу Грина (2.14) для последнего слагаемого, получим:

$$\nu [u_n^{(k+1)}, v] = \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, v), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} - U_\infty \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta v \right)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (3.17)$$

В (3.17) вместо  $v$  подставим решение  $u_n^{(k+1)}$ , получим

$$\begin{aligned} \nu |u_n^{(k+1)}|^2 &= \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} - \\ &\quad - U_\infty \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)}, \end{aligned}$$

где  $|u|^2 = \int_{\Omega_n} (\Delta u)^2 d\Omega$ .

Тогда

$$\nu |u_n^{(k+1)}|^2 \leq \left| \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| +$$

$$+U_\infty \left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right|. \quad (3.18)$$

Оценим  $\left| \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} \right|$ , используя неравенство [203, 204]

$$\left| (J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq c \|v\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_n)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)}, \quad u, v \in \mathring{W}_2^2(\Omega_n), \quad (3.19)$$

и неравенство (2.26).

Получим

$$\begin{aligned} & \left| \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\ & \leq c \|u_n^{(k+1)}\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|\nabla(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|\Delta(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\ & \leq cc_1 \|\Delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|u_0 + u_n^{(k)}\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|\Delta(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\ & \leq cc_1^2 \|u_n^{(k+1)}\| \|\Delta(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)}^2 = cc_1^2 \|u_n^{(k+1)}\| \cdot \|u_0 + u_n^{(k)}\|^2. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ ,  $a = \|u_n^{(k+1)}\|$ ,

$b = cc_1^2 \|u_0 + u_n^{(k)}\|^2$  получим, что

$$\begin{aligned} & \left| \left( J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\ & \leq \frac{\nu}{2} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{c^2 c_1^4}{2\nu} \|u_0 + u_n^{(k)}\|^4 \leq \frac{\nu}{2} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{c^2 c_1^4}{\nu} (\|u_0\|^2 + \|u_n^{(k)}\|^2)^2 \leq \\ & \leq \frac{\nu}{2} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{2c^2 c_1^4}{\nu} (\|u_0\|^4 + \|u_n^{(k)}\|^4). \end{aligned}$$

Оценим  $\left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right|$ :

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| &\leq \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \left\| \Delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \|u_0\|_{W_2^1(\Omega_n)} \cdot \|u_n^{(k+1)}\| \leq \\ &\leq \|u_0\|_{W_2^2(\Omega_n)} \cdot \|u_n^{(k+1)}\| \leq c_1 \|\Delta u_0\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n^{(k+1)}\| = c_1 \|u_0\| \cdot \|u_n^{(k+1)}\|. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{4U_\infty}$ ,  $a = \|u_n^{(k+1)}\|$ ,  $b = c_1 \|u_0\|$

получим, что

$$\left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \frac{\nu}{4U_\infty} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{U_\infty c_1^2}{\nu} \|u_0\|^2.$$

Подставив полученные оценки в правую часть (3.18), получим

$$\begin{aligned} \nu \|u_n^{(k+1)}\|^2 &\leq \frac{\nu}{2} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{2c^2 c_1^4}{\nu} (\|u_0\|^4 + \|u_n^{(k)}\|^4) + \\ &+ U_\infty \left( \frac{\nu}{4U_\infty} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{U_\infty c_1^2}{\nu} \|u_0\|^2 \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\|u_n^{(k+1)}\|^2 \leq \frac{8c^2 c_1^4}{\nu^2} (\|u_0\|^4 + \|u_n^{(k)}\|^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} \|u_0\|^2.$$

Предположим, что  $\|u_0\| \leq L_0$ ,  $\|u_n^{(k)}\| \leq L$ , тогда

$$\|u_n^{(k+1)}\|^2 \leq \frac{8c^2 c_1^4}{\nu^2} (L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2.$$

Значит, условие ограниченности  $\|u_n^{(k+1)}\| \leq L$  будет выполнено, если

$$\frac{8c^2 c_1^4}{\nu^2} (L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2 \leq L^2,$$

откуда

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{L}{2c_1 \sqrt{2c^2 c_1^2 (L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}}. \quad (3.20)$$

Поскольку число Рейнольдса  $Re$  пропорционально  $\frac{1}{\nu}$ , то условие (3.20) можно трактовать как условие малости числа Рейнольдса.

Таким образом, при соответствующем выборе начального приближения  $u_n^{(0)}$  и при выполнении условия (3.20) решение  $u_n^{(k+1)}$  на каждом шаге итерационного процесса (3.15) – (3.16) ограничено в норме  $|\cdot|$ .

Докажем сходимость последовательности  $u_n^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для этого рассмотрим разности  $\delta u_n^{(k+1)} = u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}$ . Из уравнения (3.9) следует, что  $\delta u_n^{(k+1)}$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \nu \Delta^2 \delta u_n^{(k+1)} &= \\ &= J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) \text{ в } \Omega_n, \end{aligned} \quad (3.21)$$

краевым условиям

$$\delta u_n^{(k+1)} \Big|_{\partial \Omega_n} = 0, \quad \frac{\partial \delta u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega_n} = 0.$$

Умножим обе части уравнения (3.21) скалярно на  $v$ :

$$\begin{aligned} \nu [\delta u_n^{(k+1)}, v] &= \\ &= \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) \right), v \Big|_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В (3.22) вместо  $v$  подставим  $\delta u_n^{(k+1)}$ , получим

$$\begin{aligned} & \nu \|\delta u_n^{(k+1)}\|^2 = \\ & = \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя легко проверяемое свойство якобиана

$$J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_1, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2), \quad (3.24)$$

представим разность якобианов в (3.23) в виде суммы

$$\begin{aligned} & J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) = \\ & = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k)} - u_n^{(k-1)}) + J(\Delta(u_n^{(k)} - u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) = \\ & = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k)}) + J(\Delta(\delta u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k-1)}). \end{aligned}$$

Тогда с учетом свойства (3.13)

$$\begin{aligned} & \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} = \\ & = \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k)}) + J(\Delta(\delta u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} = \\ & = \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} + \left( J(\Delta(\delta u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} = \\ & = \left( J(\delta u_n^{(k)}, \delta u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} + \left( J(u_0 + u_n^{(k-1)}, \delta u_n^{(k+1)}), \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned}$$

Используя неравенство [204]

$$\left| (J(u, v), w)_{L_2(\Omega)} \right| \leq c_0 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.25)$$

$$u, v \in \mathring{W}_2^2(\Omega), \quad w \in L_2(\Omega),$$

получим

$$\left| \left( J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left( J(\delta u_n^{(k)}, \delta u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} + \left( J(u_0 + u_n^{(k-1)}, \delta u_n^{(k+1)}), \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\
&\leq c_0 \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
&+ c_0 \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} = \\
&= c_0 \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \cdot \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| \right) \leq \\
&\leq 2c_0 (L_0 + L) \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|.
\end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ ,  $a = \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|$ ,

$b = 2c_0 (L_0 + L) \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|$  получим, что

$$\begin{aligned}
&\left| \left( J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\
&\leq \frac{\nu}{2} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|^2 + \frac{2c_0^2}{\nu} (L_0 + L)^2 \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Подставив полученное неравенство в правую часть (3.23) при выполнении условия (3.20), получим

$$\left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \leq \frac{2c_0}{\nu} (L_0 + L) \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|.$$

Пусть  $\frac{2c_0(L_0 + L)}{\nu} \leq \alpha < 1$ , то есть

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{\alpha}{2c_0(L_0 + L)}. \quad (3.26)$$

Тогда

$$\left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \leq \alpha \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \leq \dots \leq \alpha^k \left\| \delta u_n^{(1)} \right\|.$$

Используя последнее неравенство, оценим  $\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\|$ :

$$\begin{aligned}
& \|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\| \leq \\
& \leq \|u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}\| + \|u_n^{(k+2)} - u_n^{(k+1)}\| + \dots + \|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k+p-1)}\| = \\
& = \|\delta u_n^{(k+1)}\| + \|\delta u_n^{(k+2)}\| + \dots + \|\delta u_n^{(k+p)}\| \leq \\
& \leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{k+p-1}) \|\delta u_n^{(1)}\| = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} \gamma < \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

где обозначено  $\gamma = \|\delta u_n^{(1)}\|$ .

Поскольку  $\alpha < 1$ , то  $\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то есть последовательность  $\{u_n^{(k)}\}$  является фундаментальной. В силу полноты пространства  $\dot{W}_2^2(\Omega_n)$  это означает, что последовательность  $\{u_n^{(k)}\}$  сходится (с геометрической скоростью), то есть существует функция  $u_n^* \in \dot{W}_2^2(\Omega_n)$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_n^{(k)} = u_n^*$ .

Устремив в неравенстве (3.27)  $p$  к  $\infty$ , получим оценку для  $k$ -го приближения:

$$\|u_n^* - u_n^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma. \quad (3.28)$$

Покажем, что предельная функция  $u_n^*$  является обобщенным решением задачи (3.9) – (3.11) в ограниченной области  $\Omega_n$  и выясним, при каком условии эта задача имеет единственное ограниченное решение.

Перейдем в (3.17) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$\nu[u_n^*, v] = (J(u_0 + u_n^*, v), \Delta(u_0 + u_n^*))_{L_2(\Omega_n)} - U_\infty \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta v \right)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (3.29)$$

Следовательно, предел  $u_n^*$  является обобщенным решением задачи

(3.9) – (3.11) в ограниченной области  $\Omega_n$  и имеет место равенство

$$\nu \|u_n^*\|^2 = (J(u_0 + u_n^*, u_n^*), \Delta(u_0 + u_n^*))_{L_2(\Omega_n)} - U_\infty \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \Delta u_n^* \right)_{L_2(\Omega_n)}$$

и, соответственно, оценка

$$\|u_n^*\|^2 \leq \frac{8c^2 c_1^4}{\nu^2} (L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2. \quad (3.30)$$

Предположим, что кроме решения  $u_n^*$  задача (3.9) – (3.11) в ограниченной области  $\Omega_n$  имеет еще ограниченное решение  $u_n^{**}$ . Рассмотрим разность  $\delta u_n = u_n^* - u_n^{**}$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\nu \Delta^2 \delta u_n = J(\Delta(u_0 + u_n^*), u_0 + u_n^*) - J(\Delta(u_0 + u_n^{**}), u_0 + u_n^{**}).$$

Тогда используя (3.25), получим

$$\|\delta u_n\| \leq \frac{2c_0(L_0 + L)}{\nu} \|\delta u_n\|. \quad (3.31)$$

Неравенство (3.31) будет выполнено лишь при  $\|\delta u_n\| = 0$ , если выполняется неравенство (3.26).

Объединяя условия (3.20) и (3.26) для  $\frac{1}{\nu}$  получим оценку

$$\frac{1}{\nu} < \min \left\{ \frac{L}{2c_1 \sqrt{2c^2 c_1^2 (L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}}, \frac{\alpha}{2c_0(L_0 + L)} \right\}. \quad (3.32)$$

Таким образом доказали следующую теорему.

**Теорема 3.1.** Последовательные приближения, формируемые по схеме (3.15) – (3.16), при малых числах Рейнольдса при каждом  $n$  сходятся в энергетической норме к единственному обобщенному решению  $u_n^* \in F$  задачи

(3.9) – (3.11), рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega_n$ , причем для  $k$ -го приближения оценка погрешности имеет вид (3.28). Условие малости числа Рейнольдса формулируется в виде неравенства (3.32).

На каждой итерации в области  $\Omega_n$  приближенное решение задачи (3.15) – (3.16) будем искать в виде

$$u_{n,N}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^N c_{n,j}^{(k+1)} \phi_j, \quad (3.33)$$

где  $c_{n,j}^{(k+1)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j}^{(k+1)} \nu[\phi_j, \phi_i] = (f^{(k+1)}, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.34)$$

$$\text{где } (f^{(k+1)}, \phi_i) = \int_{\Omega_n} \left[ J(u_0 + u_n^{(k)}, \phi_i) \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) - U_\infty \frac{\partial u_0}{\partial x} \Delta \phi_i \right] d\Omega;$$

$\{\phi_i\}$  – система координатных функций, которая выбирается, как и в п. 2.1.

Отметим, что матрица системы (3.34) не изменяется от итерации к итерации, вычисляется лишь один раз на первой итерации, а затем на каждой итерации пересчитывается лишь правая часть  $(f^{(k+1)}, \phi_i)$ .

Из теорем сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] и результатов раздела 2 следует, что при  $N \rightarrow \infty$  последовательность  $u_{n,N}^{(k)}$  сходится к  $u_n^{(k)}$ , а  $u_n^{(k)}$  при числах Рейнольдса, удовлетворяющих (3.32), сходится к  $u_n^*$ , причем функция  $u_n^*$  удовлетворяет интегральному тождеству (3.29) и имеет место оценка (3.30). Следуя Ладыженской, из последовательности  $\{u_n^*\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{u_{n_j}^*\}$ . Переходя к пределу при  $n_j \rightarrow \infty$  в интегральном тождестве (3.29) получим, что предельная функция  $u^*$  удовлетворяет тождеству (3.14) при любой  $v \in F$ , т.е. является обобщен-

ным решением задачи (3.9) – (3.11), а  $\psi^* = u_0 + u^*$  – обобщенным решением задачи (3.3) – (3.5).

В случае расходимости последовательных приближений для нахождения приближенного решения в конечной области можно предложить подход, основанный на использовании нелинейного метода Галеркина. Приближенное решение  $u_{n,N}$  задачи (3.9) – (3.11), рассматриваемой в конечной области  $\Omega_n$ , ищем в виде (3.33), где координатные функции выбираются как в п. 2.1. Коэффициенты  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$  найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  элементам проекционной последовательности (2.33). В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно  $c_{n,j}$ . Полученная система может быть решена методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор  $c_{n,j}$ , соответствующий решению задачи Озеена, или, при больших числах Рейнольдса, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

## 3.2 Численные результаты расчета нелинейной задачи обтекания цилиндрических тел

### 3.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания кругового цилиндра

Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания кругового цилиндра  $x^2 + y^2 = R^2$ , представленного на рис. 2.2, при  $R = 1$ ,  $U_\infty = 1$ ,  $M = 1; 2; 5; 10$ ,  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 14$  и числах Рейнольдса  $Re = \frac{1}{\nu} = 2; 5; 7; 10; 15$ . Математическая модель задачи имеет вид (3.3) – (3.5). Решение задачи сводится к решению системы (3.34). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие косинусы кратных дуг, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) с нечётными индексами равны нулю. Вычисления прекращались при  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Двойные интегралы в системе (3.34) считались приближенно по формуле Гаус-

са с 50 узлами по каждой переменной.

В таблицах В.1 – В.4 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) на каждой из итераций при  $M = 5$ , соответствующие числам Рейнольдса  $Re = 2; 5; 7; 10$ .

Для  $M = 5$  и чисел Рейнольдса  $Re = 2; 5; 7; 10$  на рис. 3.1 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения, на рис. В.1 представлены поверхности уровня функции тока, на рис. В.2 – векторные поля скоростей жидкости, на рис. 3.2 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

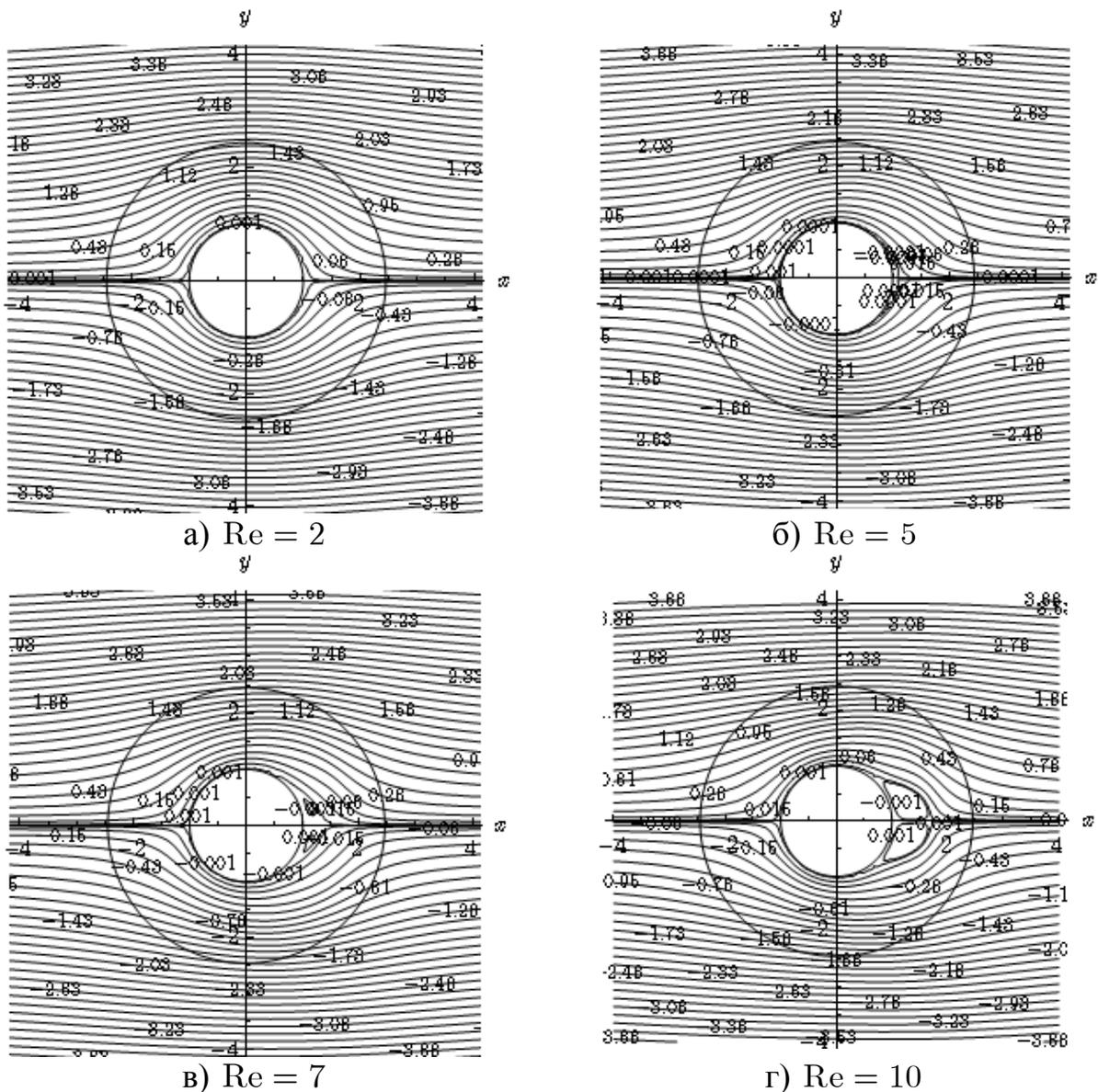


Рисунок 3.1 – Линии уровня функции тока

при  $M = 5$  и  $Re = 2; 5; 7; 10$





$Re = \frac{1}{\nu} = 5; 10; 15; 20; 25; 30$ . Решение задачи сводится к решению системы (3.34). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие косинусы кратных дуг, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) с нечётными индексами равны нулю. Двойные интегралы в системе (3.34) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

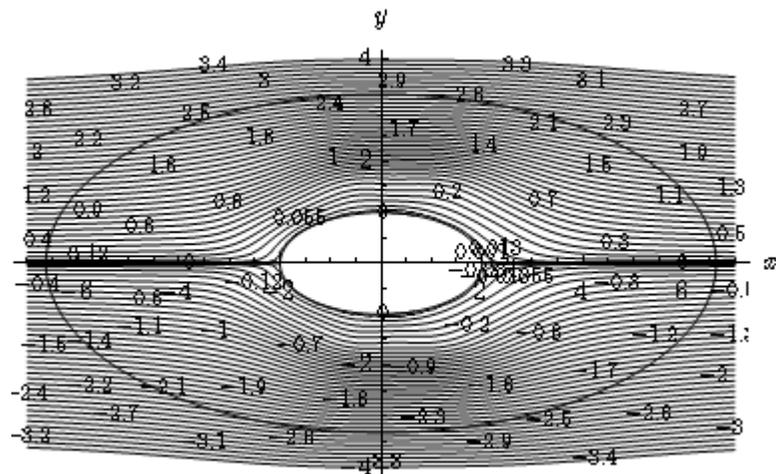
В таблице В.6 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие числам Рейнольдса  $Re = 5; 15; 25; 30$ .

Для чисел Рейнольдса  $Re = 5; 15; 25; 30$  на рис. 3.5 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения, на рис. В.6 – поверхности уровня функции тока, на рис. В.7 – векторные поля скоростей, на рис. 3.6 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

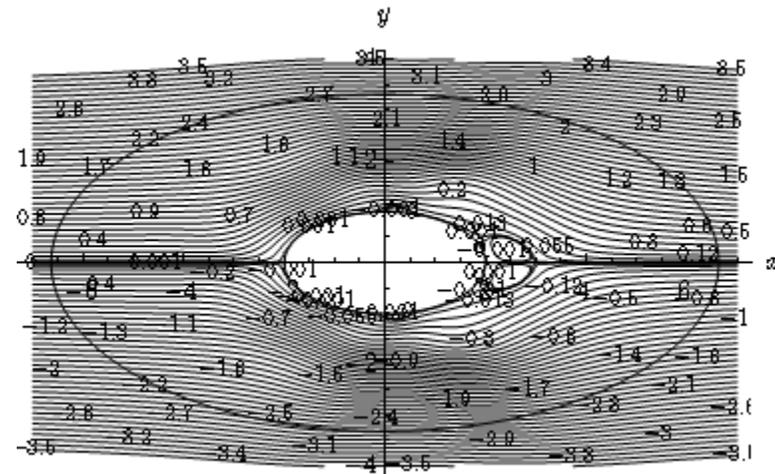
При увеличении числа Рейнольдса до  $\approx 15$  за телом появляются вторичные вихри, увеличивается их размер и интенсивность. Полученные результаты хорошо согласуются с численными результатами из (см. стр. 132 [43], см. стр. 96 [206]).

### 3.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе

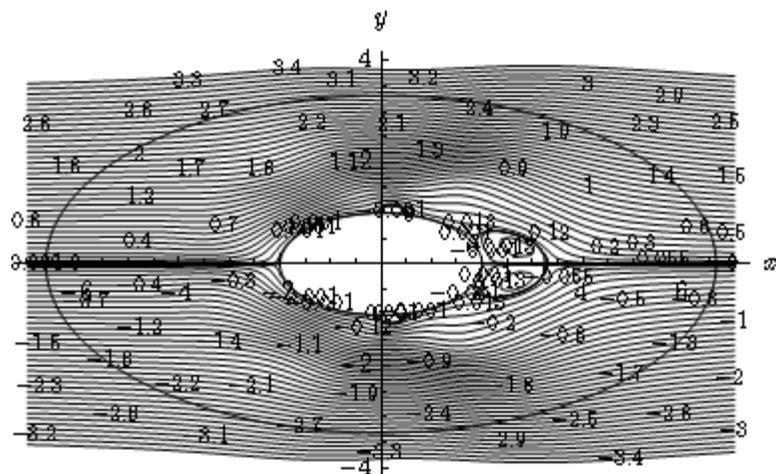
Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания цилиндрического тела, представленного на рис. 2.8, уравнение образующей которого имеет вид  $x^8 + y^8 = 1$  (кривая Ламе при  $a = b = 1$ ,  $n = 8$ ), при  $U_\infty = 1$ ,  $M = 10$ ,  $m_1 = 48$ ,  $m_2 = 35$  и числах Рейнольдса  $Re = \frac{1}{\nu} = 5; 10; 15; 20$ . Математическая модель задачи имеет вид (3.3) – (3.5). Решение задачи сводится к решению системы (3.34), двойные интегралы в которой считались приближенно по формуле Гаусса со 100 узлами по каждой переменной.



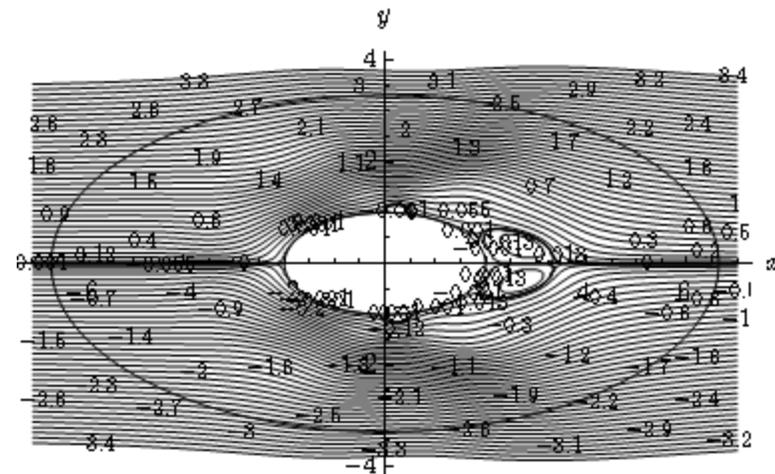
а)  $Re = 5$



б)  $Re = 15$



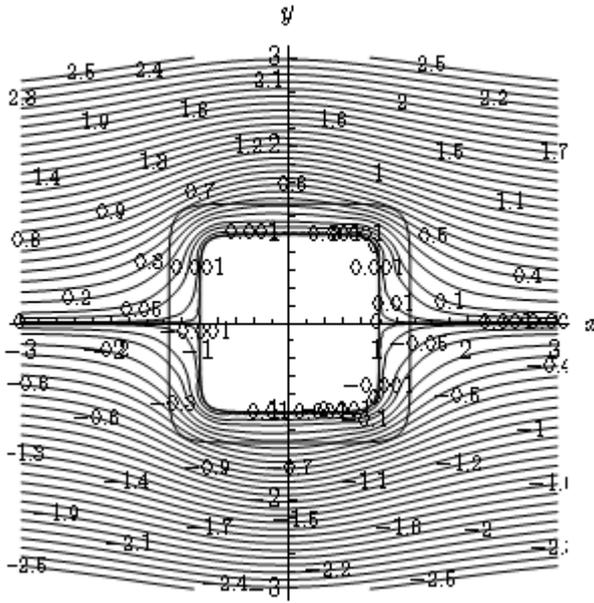
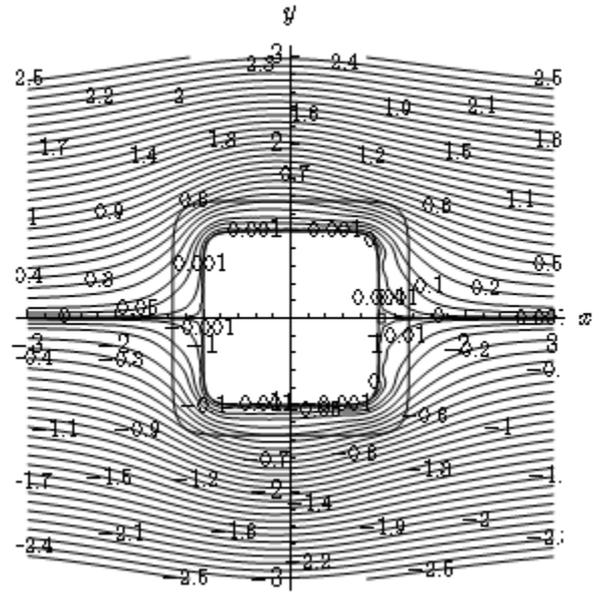
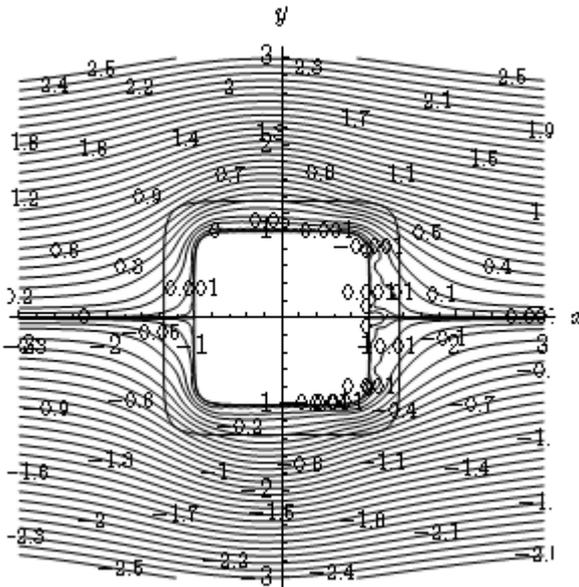
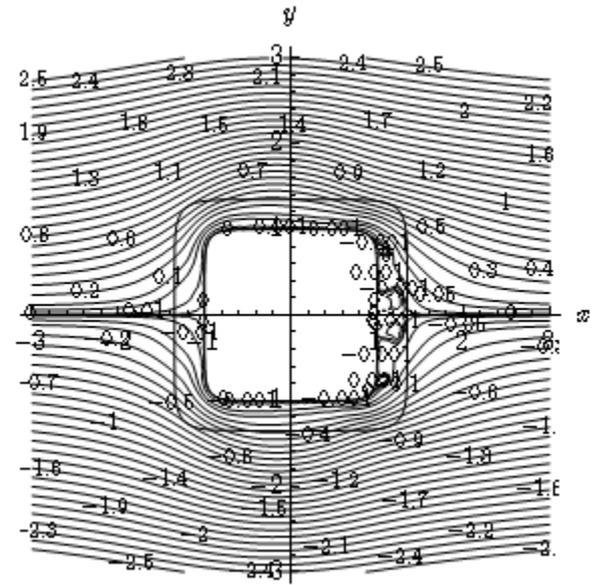
в)  $Re = 25$



г)  $Re = 30$

Рисунок 3.5 – Линии уровня функции тока при  $Re = 5; 15; 25; 30$



а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 15$ г)  $Re = 20$ Рисунок 3.7 – Линии уровня функции тока при  $Re = 5; 10; 15; 20$ 

Вычислительный эксперимент показал появление вторичных вихрей за телом при увеличении числа Рейнольдса до  $\approx 15$ .

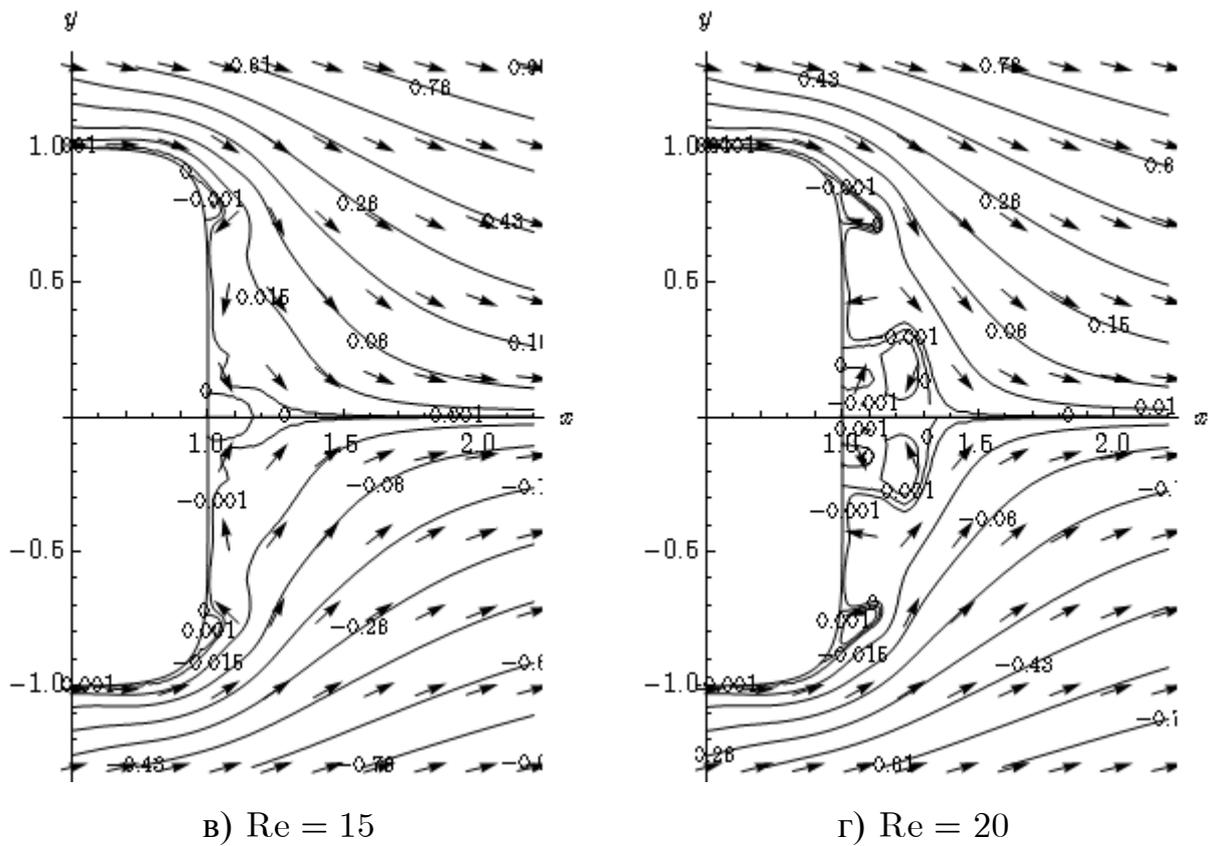
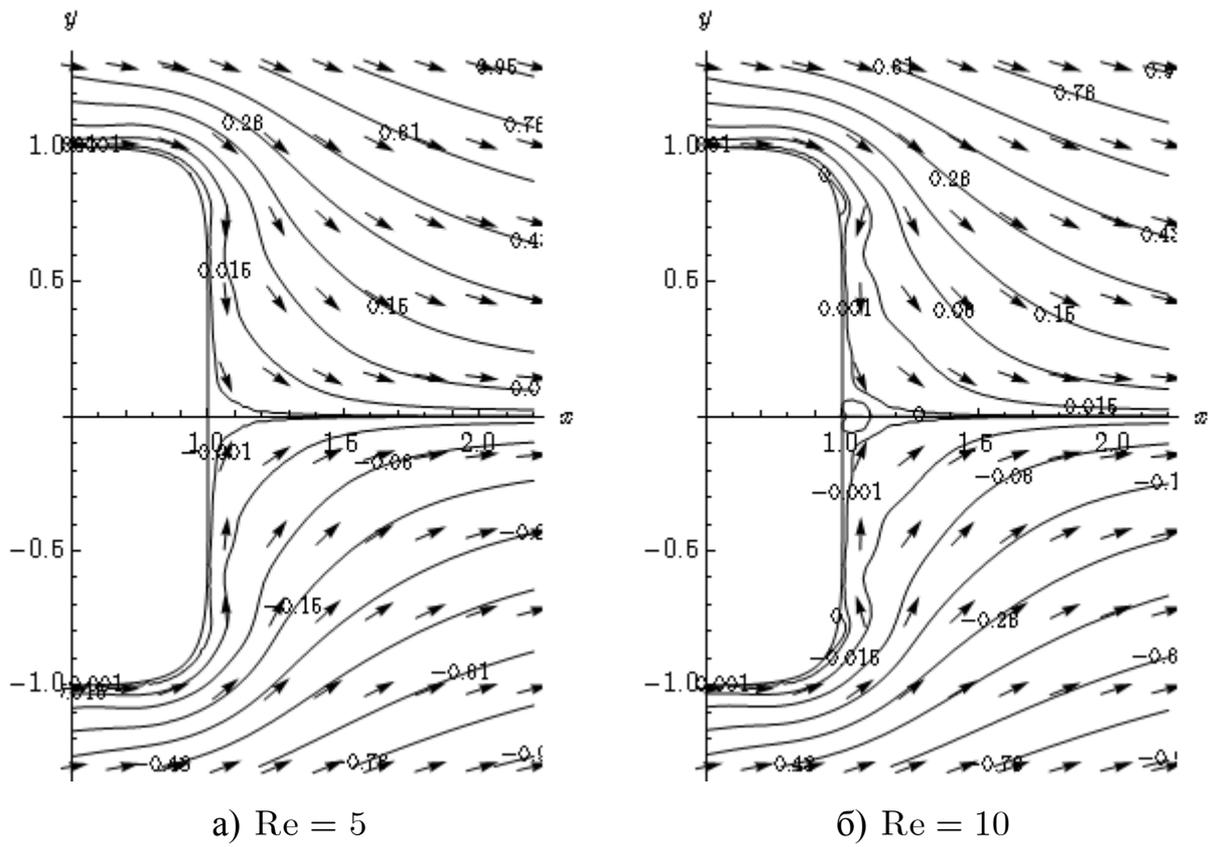


Рисунок 3.8 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $Re = 5; 10; 15; 20$

### Выводы по разделу 3

1. Рассмотрена постановка нелинейной стационарной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

2. Разработан и обоснован численный метод решения нелинейной стационарной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью, основанный на совместном применении для аппроксимации неопределенных компонент структуры метода последовательных приближений и проекционного метода Бубнова-Галеркина: решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности линейных краевых задач, для решения которых на каждом шаге итерационного процесса разработан численный алгоритм на основании метода Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость построенного итерационного процесса при малых числах Рейнольдса, получены оценки скорости сходимости в энергетической норме.

3. В случае расходимости последовательных приближений для аппроксимации неопределенных компонент структуры решения нелинейной стационарной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью в цилиндрической системе координат, предложено применение нелинейного метода Галеркина: решение нелинейной задачи сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

4. Проведены вычислительные эксперименты для некоторых цилиндрических тел, таких как круговой, эллиптический цилиндры и цилиндрическое тело, сечением которого является кривая Ламе. Экспериментально установлены условия применимости каждого из предложенных численных методов. Для каждого тела определены числа Рейнольдса, при которых за телом возникают вторичные вихри. При увеличении числа Рейнольдса увеличивается их размер и интенсивность. Полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами физических экспериментов и результатами, полученными другими авторами, что говорит об эффективности разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в работах [86, 89 – 92, 94, 98, 100, 103].

**РАЗДЕЛ 4**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ**  
**ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ (ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТОКСА)**

**4.1 Постановка линейризованной по Стоксу задачи обтекания тел вращения и приближенный метод ее расчета**

Рассмотрим медленное стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости. Пусть в пространстве введена декартова система координат  $(x, y, z)$ , а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры  $\Xi$ , лежащей в плоскости  $Oxz$ . Тело неподвижно и обтекается равномерным на бесконечности со скоростью  $U_\infty$  потоком, направленным вдоль оси  $Ox$ . Будем считать, что фигура  $\Xi$  односвязная с кусочно-гладкой границей  $\partial\Xi$ . Обозначим через  $\Omega$  дополнение к  $\Xi$ . Очевидно,  $\partial\Omega = \partial\Xi$ .

В осесимметричных задачах в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , вводимой соотношениями  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta \cos \varphi$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ), все величины не зависят от координаты  $\varphi$  и третья компонента скорости жидкости равна нулю:  $V_\varphi = 0$ .

Уравнения Стокса в сферической системе координат имеют вид [2, 6]:

$$\begin{aligned} \mu \left( \Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right) &= \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \mu \left( \Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $V_r, V_\theta$  – компоненты скорости жидкости;

$P$  – давление;

$\mu$  – динамический коэффициент вязкости;

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока  $\psi$  по формулам [1, 2, 5, 6, 8]:

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.2)$$

После исключения из системы Стокса (4.1) членов, содержащих давления, приходим к следующему уравнению для функции тока [2, 6, 8]:

$$E^2 \psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad (4.3)$$

где  $E \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$  – оператор Стокса в сферической системе координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то для функции тока можно поставить такие краевые условия [5, 8]:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается предельным соотношением [5, 19, 109, 110]

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta, \quad (4.5)$$

где  $U_\infty$  – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Для решения задачи (4.3) – (4.5) используем метод  $R$ -функций [50].

Пусть, как и ранее в разделе 2, функция  $\omega(r, \theta)$  удовлетворяет условиям

$$\text{а) } \omega(r, \theta) > 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\text{б) } \omega(r, \theta)|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$\text{в) } \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ;

$\omega_M = f_M(\omega)$ ,  $f_M(\omega)$  удовлетворяет условиям (2.8), имеет вид (2.9) и для функции  $\omega_M(r, \theta)$  имеют место все утверждения леммы 2.1.

В задаче (4.3) – (4.5) сделаем замену

$$\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u,$$

где  $\psi_0 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left( 2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta$  – решение Стокса для задачи про

обтекание сферы радиуса  $R$  (считаем, что сфера радиуса  $R$  целиком лежит внутри обтекаемого тела);

$u$  – новая неизвестная функция.

Линии уровня функции тока и векторное поле скоростей решения Стокса для задачи про обтекание сферы приведены на рис. 4.1 и 4.2 соответственно.

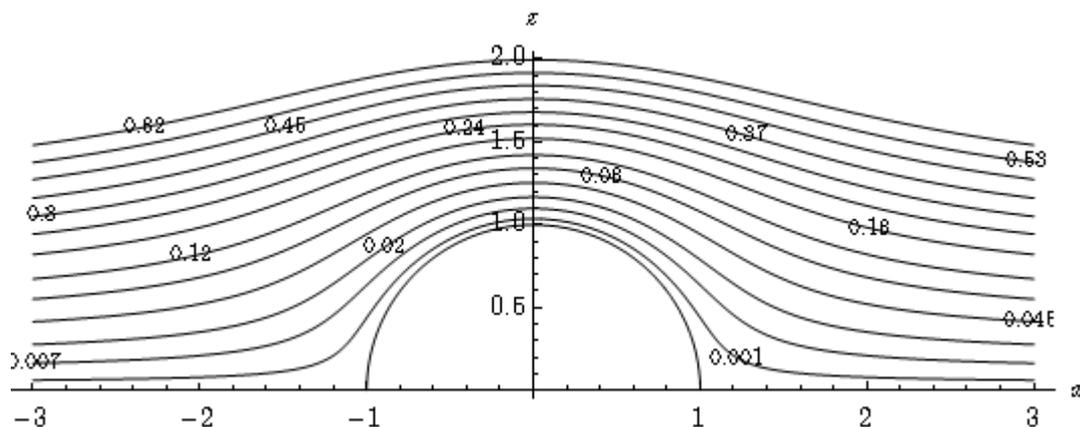


Рисунок 4.1 – Линии уровня функции тока решения Стокса для задачи про обтекание сферы

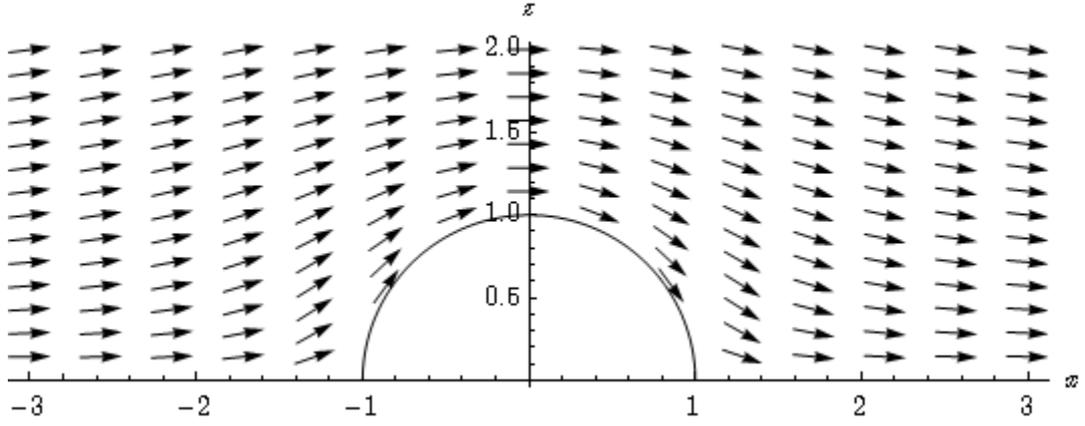


Рисунок 4.2 – Векторное поле скоростей решения Стокса для задачи про обтекание сферы

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция  $\omega_M^2 \psi_0$  удовлетворяет краевым условиям (4.4) (в силу свойств функции  $\omega_M$  (лемма 2.1)) и условию на бесконечности (4.5). Проверим выполнение условия на бесконечности. Заметим, что согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \theta) \geq M$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\omega_M^2 \psi_0) \cdot r^{-2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_0 \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta.$$

Кроме того, в области  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$  функция  $\omega_M^2 \psi_0$  точно удовлетворяет уравнению (4.3).

После подстановки функции  $\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u$  в задачу (4.3) – (4.5) получим, что функция  $u$  является решением следующей задачи

$$E^2 u = f \text{ в } \Omega, \quad (4.6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} u = 0, \quad (4.8)$$

где  $f = -E^2(\omega_M^2 \psi_0)$ .

Заметим, что  $f \equiv 0$  в области  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$ .

Получим интегральную формулу для оператора  $E$ , аналогичную формуле Грина для оператора Лапласа.

Учитывая связь оператора Лапласа из (4.1) с оператором Стокса из (4.3)

$$\Delta = E + \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

из второй формулы Грина (2.14) получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( v \cdot \left( Eu + \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - u \cdot \left( Ev + \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) d\Omega = \\ = \oint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \end{aligned}$$

откуда следует лемма.

**Лемма 4.1.** Пусть функции  $u$  и  $v$  регулярны на бесконечности,  $Eu = 0$ ,  $Ev = 0$  вне некоторой ограниченной области и  $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

Тогда имеет место формула

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \cdot Eu - u \cdot Ev) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial\theta} - v \frac{\partial u}{\partial\theta} \right) + \frac{2}{r} \left( u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) d\Omega + \\ + \oint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если в (4.9) заменить  $u$  на  $Eu$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \cdot E^2 u d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left( Eu \cdot Ev + \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial\theta} - v \frac{\partial Eu}{\partial\theta} \right) + \frac{2}{r} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial Eu}{\partial r} \right) \right) d\Omega + \\ + \oint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial Eu}{\partial \mathbf{n}} - Eu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Кроме того, если функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют условиям  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ , то (4.10) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \cdot E^2 u \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left( Eu \cdot Ev + \frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial Eu}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial Eu}{\partial r} \right) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Формулу (4.11) используем для введения определения обобщенного решения.

Решение задачи (4.6) – (4.8) будем искать в классе  $F$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $x, y$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$  удовлетворяют условиям (4.7) [198]. Искомое обобщенное решение  $u$  должно принадлежать классу  $F$  и удовлетворять интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ Eu \cdot Ev + E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot Ev + \frac{2\text{ctg}\theta + 2\text{ctg}^2\theta + 4r}{r^2} \cdot Eu \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{2\text{ctg}\theta + 2\text{ctg}^2\theta + 4r}{r^2} \cdot E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

для любой  $v \in F$ .

Интегральное тождество (4.12) получено применением к равенству

$$\int_{\Omega} E^2 u \cdot v \, d\Omega = - \int_{\Omega} E^2(\omega_M^2 \psi_0) \cdot v \, d\Omega$$

формулы (4.11) и формулы интегрирования по частям.

Заметим, что из (4.12) следует, что для нахождения обобщенного решения достаточно потребовать, чтобы функция  $\omega$ , построенная средствами

теории  $R$ -функций, была дважды непрерывно дифференцируемой в  $\bar{\Omega}$ .

Обобщенное решение  $u$  найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнения (4.6), рассматриваемого в  $\Omega_n$ , где  $\Omega_n$  – часть  $\Omega$  вида

$$\Omega_n = \{(r, \theta) \in \Omega \mid 0 < \omega(r, \theta) < M_n\},$$

где  $\{M_n\}$  – любая возрастающая неограниченная сверху последовательность.

Можно взять, например,  $M_n = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, последовательность областей  $\{\Omega_n\}$  является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  рассмотрим краевые задачи

$$E^2 u_n = f \text{ в } \Omega_n, \quad (4.13)$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.14)$$

где  $f = -E^2(\omega_M^2 \psi_0)$ .

Функции  $u_n$ , следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], продолжим нулем вне  $\Omega_n$ .

Для решения задач применим метод Бубнова-Галеркина [197, 200].

Оператор  $E^2$  краевых задач (4.13) – (4.14) представим в виде

$$E^2 = A_0 + K,$$

где  $A_0 = \Delta^2$  – бигармонический оператор;

$$K = -\Delta \left( \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \Delta - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Оператор  $A_0$  будем рассматривать на множестве  $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$  функций  $u \in C^4(\Omega_n) \cap C^1(\bar{\Omega}_n)$ , удовлетворяющих краевым условиям (4.14) задач

(4.13) – (4.14).

Как следует из результатов работы [197] оператор  $A_0$  является симметричным, положительно-определенным и  $(\Delta^2 u, v) = \int_{\Omega_n} \Delta u \Delta v d\Omega$  для любых  $u, v \in D_0$ . На  $D_0$  введем скалярное произведение  $[u, v] = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\Omega$ . Дополнив  $D_0$  в метрике, порожденной этим скалярным произведением, получим энергетическое пространство  $H_0$  с нормой  $|u|^2 = \int_{\Omega_n} (\Delta u)^2 d\Omega$ .

Выберем координатную систему  $\{\phi_k\}$ , подчинив ее следующим условиям:

- а)  $\phi_k \in H_0$  для любого  $k$ ;
- б) элементы  $\phi_1, \dots, \phi_N$  – линейно независимы при любом  $N$ ;
- в) координатная система  $\{\phi_k\}$  полна в  $H_0$ .

Приближенное решение задач (4.13) – (4.14) при каждом  $n = 1, 2, \dots$  согласно методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде:

$$u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j, \quad (4.15)$$

где  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (K\phi_j, \phi_i)\} = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.16)$$

где

$$(f, \phi_i) = - \int_{\Omega_n} \left( E(\omega_M^2 \psi_0) E\phi_i + \frac{4 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} E(\omega_M^2 \psi_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} + \frac{4}{r} E(\omega_M^2 \psi_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) d\Omega.$$

Согласно достаточному признаку сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] метод будет сходиться, если оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непре-

рывает в  $H_0$ . В [197] было доказано, что оператор  $A_0$  имеет дискретный спектр, следовательно, по теореме 5 [197] оператор  $A_0^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_2(\Omega_n)$ . Кроме того, из результатов статьи С.Г. Михлина [201] следует, что оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ .

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  галеркинские приближения сходятся при каждом  $n$  к обобщенному решению задачи (4.13) – (4.14), которое определяется интегральным тождеством

$$\int_{\Omega_n} \left[ Eu_n \cdot Ev + E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot Ev + \frac{2ctg\theta + 2ctg^2\theta + 4r}{r^2} \cdot Eu_n \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2ctg\theta + 2ctg^2\theta + 4r}{r^2} \cdot E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right] d\Omega = 0. \quad (4.17)$$

Оценим решение в норме  $|\cdot|$ .

Оператор Стокса в прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$ , где  $y$  и  $z$  связаны соотношением  $q = \sin \varphi \cdot y + \cos \varphi \cdot z$ , имеет вид

$$Eu_n = \Delta_{xq} u_n - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u_n}{\partial q},$$

где  $\tilde{r} = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Умножим (4.13) в  $L_2(\Omega_n)$  на  $v$  из  $F$ , получим

$$(E^2 u_n, v)_{L_2(\Omega_n)} = (f, v)_{L_2(\Omega_n)},$$

$$\left( \left( \Delta - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial q} \right) \left( \Delta u_n - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u_n}{\partial q} \right), v \right)_{L_2(\Omega_n)} = (f, v)_{L_2(\Omega_n)}$$

или

$$(\Delta^2 u_n - Ku_n, v)_{L_2(\Omega_n)} = (f, v)_{L_2(\Omega_n)}, \quad (4.18)$$

где оператор  $Ku_n$  имеет вид  $Ku_n = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \Delta u_n}{\partial q} + \Delta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u_n}{\partial q} \right) - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u_n}{\partial q} \right)$ .

В (4.18) вместо  $v$  подставим решение  $u_n$ :

$$(\Delta^2 u_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} - (Ku_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} = (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}$$

или

$$\|u_n\|^2 = (Ku_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} + (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}.$$

Аналогично тому, как в разделе 2 было оценено скалярное произведение  $\left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)}$ , оценим  $(Ku_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)}$ . Применяя первую формулу Грина, формулу Остроградского-Гаусса и учитывая краевые условия, получим, что  $(Ku_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} = 0$ . Тогда

$$\|u_n\|^2 = (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (4.19)$$

Применив неравенство Коши-Буняковского [11, 197] и неравенство (2.26) к правой части (4.19), получим оценку

$$\begin{aligned} |(f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|_{W_2^2(\Omega_n)} \leq \\ &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|\Delta u_n\|_{L_2(\Omega_n)} = c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_n\|. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $a = \|u_n\|$ ,  $b = c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}$  полу-

чим, что

$$|(f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}| \leq \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \frac{1}{2} c_1^2 \|f\|_{L_2(\Omega_n)}^2.$$

Подставляя последнюю оценку в (4.19), получим

$$\|u_n\| \leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)}. \quad (4.20)$$

Для применения метода Бубнова-Галеркина необходимо построить координатную последовательность, для чего воспользуемся полной системой частных решений уравнения  $E^2 u = 0$  [6, 8] и структурным методом (методом  $R$ -функций) [50].

Общее решение уравнения  $E^2 u = 0$  имеет вид [6, 8]:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}) J_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} (\tilde{A}_n r^n + \tilde{B}_n r^{1-n} + \tilde{C}_n r^{n+2} + \tilde{D}_n r^{3-n}) H_n(\cos \theta), \quad (4.21)$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$  – произвольные постоянные;

$J_n(\zeta)$  и  $H_n(\zeta)$  – функции Гегенбауэра первого и второго рода, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весовой функцией  $\frac{1}{\sin \theta}$ , которые линейно связаны с функциями Лежандра  $P_n(\zeta)$  и  $Q_n(\zeta)$ :

$$J_n(\zeta) = \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1}, \quad H_n(\zeta) = \frac{Q_{n-2}(\zeta) - Q_n(\zeta)}{2n-1} \quad (n \geq 2).$$

В частных случаях имеем

$$J_0(\zeta) = 1, \quad J_1(\zeta) = -\zeta, \quad J_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad J_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta^2),$$

$$J_4(\zeta) = \frac{1}{8}(1 - \zeta^2)(5\zeta^2 - 1).$$

При  $n \geq 2$  функции Гегенбауэра второго рода бесконечны в точках  $\zeta = \pm 1$ , что отвечает  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Поэтому, если в физической постановке задачи отсутствуют сингулярные особенности, то помеченные «тильдой» в формуле (4.21) постоянные равны нулю. Кроме того, при  $n = 0$  и  $n = 1$  ос-

тавшие постоянные приводят к бесконечным тангенциальным скоростям  $v_\theta$  на оси потока. Потому в большинстве задач об обтекании частиц, пузырей и капель стоксовым потоком решение уравнения  $E^2 u = 0$  можно представить в виде [6, 8]

$$u(r, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}) J_n(\cos \theta). \quad (4.22)$$

Из (4.22) видно, что для уравнения (4.3) полная система частных решений относительно внешности сферы конечного радиуса имеет вид:

$$\{\varphi_k(r, \theta)\} = \{r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots\}, \quad (4.23)$$

а полная система частных решений относительно области  $\{\omega(r, \theta) < M\}$  имеет вид

$$\{\tau_j(r, \theta)\} = \{r J_2(\cos \theta), J_3(\cos \theta), r^j J_j(\cos \theta), r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}. \quad (4.24)$$

**Теорема 4.1.** При любом выборе достаточно гладких функций  $\Phi_1, \Phi_2$  и требовании, что  $\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  функция вида

$$u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2 \quad (4.25)$$

точно удовлетворяет краевым условиям (4.7) и условию на бесконечности (4.8).

**Доказательство.** Тот факт, что функция (4.25) удовлетворяет краевым условиям (4.7) доказывается аналогично соответствующему утверждению теоремы 2.1. Проверим выполнение условия на бесконечности. Заметим, что согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \theta) \geq M$ . Следовательно, в точках области  $\omega(r, \theta) \geq M$  функция  $u$  вида (4.25) приобретает вид  $u = \Phi_1$ .

Тогда  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u \cdot r^{-2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = 0$ , т.к.  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = 0$  по предположению теоремы.

Таким образом, функция  $u$  вида (4.25) точно удовлетворяет краевым условиям (4.7), (4.8), т.е. является структурой решения задачи (4.6) – (4.8).

Замечание. Из теоремы 4.1 следует, что решение задачи (4.3) – (4.5) может быть представлено в виде  $\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2$ .

Аппроксимации функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в области  $\Omega_n$  будем искать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j,$$

где  $\{\varphi_k\}$  имеет вид (4.23);

$\{\tau_j\}$  имеет вид (4.24);

$\alpha_k$  и  $\beta_j$  – неизвестные (пока) коэффициенты.

Таким образом, приближенное решение задачи (4.6) – (4.8) будем искать в виде

$$u_{n,N} = \omega_M^2 \cdot \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k + \omega_M^2(1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\begin{aligned} \{\phi_i(r, \theta)\} = \{ & \omega_M^2(r, \theta)r^{1-k}J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; \omega_M^2(r, \theta)r^{3-k}J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots; \\ & \omega_M^2(r, \theta)(1 - \omega_M(r, \theta))rJ_2(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta)(1 - \omega_M(r, \theta))J_3(\cos \theta), \\ & \omega_M^2(r, \theta)(1 - \omega_M(r, \theta))r^jJ_j(\cos \theta); \omega_M^2(r, \theta)(1 - \omega_M(r, \theta))r^{j+2}J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) в соответствии с методом Бубнова-Галеркина найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  ( $N = m_1 + m_2$ ) элементам последовательности (4.26), которое приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида (4.16).

**Теорема 4.2.** При каждом  $n$  галеркинские приближения  $u_{n,N}$  ви-

да (4.15) при  $N \rightarrow \infty$  сходятся в энергетической норме к обобщенному решению задачи (4.13) – (4.14), при этом имеет место оценка (4.20).

Из работы Ладыженской [11] вытекает, что последовательность  $\{u_n\}$  является слабо компактной в  $H_0$ , значит, из неё можно выделить сходящуюся к некоторой функции  $u^* \in H_0$  подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$ . Переходя по этой подпоследовательности  $\{u_{n_k}\}$  к пределу при  $M_{n_k} \rightarrow \infty$  в интегральном тождестве (4.17), получим, что функция  $u^*$  является обобщенным решением задачи (4.6) – (4.8). Кроме того, из результатов работы [11] следует единственность решения линейной задачи (4.6) – (4.8), а значит, вся последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u^*$ .

**Теорема 4.3.** Последовательность функций  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  сходится в энергетической норме к единственному обобщенному решению задачи (4.6) – (4.8).

Замечание. Функции  $\psi_n = \omega_M^2 \psi_0 + u_n$  сходятся к обобщенному решению задачи (4.3) – (4.5). Кроме того, заметим, что при любом  $n$  функции  $\psi_n$  определены и вне  $\Omega_n$ , т.е. в области  $\Omega \setminus \Omega_n$ . При этом, поскольку  $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$  в области  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$ , то

$$\psi_n = \psi_0 + \Phi_1 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left( 2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta + \sum_k \alpha_{n,k} \cdot \varphi_k,$$

а значит,  $E^2 \psi_n = 0$  и  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_n \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta$ . Таким образом, при любом  $n$  функции  $\psi_n$  в области  $\Omega \setminus \Omega_n$  точно удовлетворяют как дифференциальному уравнению задачи (4.3), так и условию на бесконечности (4.5).

## 4.2 Моделирование процесса медленного обтекания тел вращения

### 4.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания эллипсоида

вращения

Рассмотрим краевую задачу (4.3) – (4.5), где обтекаемое тело – эллипсоид вращения  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , представленный на рис. 4.3, при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $U_\infty = 1$ . Решение задачи сводится к решению системы (4.16). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие функции Гегенбауэра с нечетными индексами, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым, равны нулю. Двойные интегралы, входящие в систему (4.16), считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

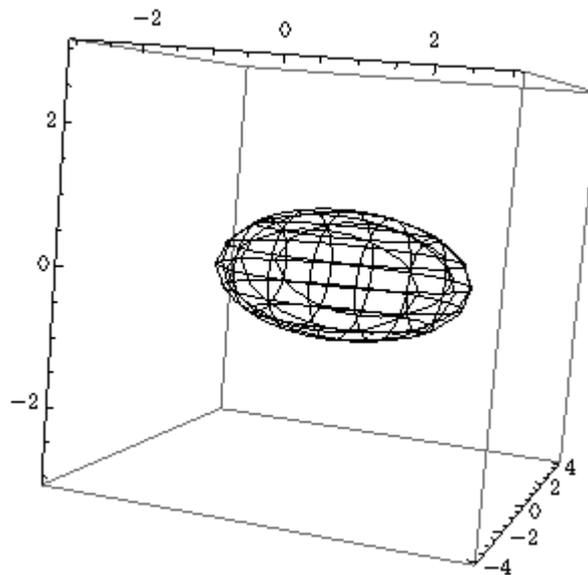


Рисунок 4.3 – Эллипсоид вращения

В таблице 4.1 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значениям  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различным значениям параметра  $M$ .

В таблице 4.2 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значению параметра

$M = 5$  и различным значениям  $m_1$  и  $m_2$ .

Таблица 4.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различных  $M$

$m_1$	10			
$m_2$	14			
$M$	0,7	1	2	5
$\alpha_1$	- 0,07502	- 0,11485	- 0,22634	- 0,41106
$\alpha_3$	2,53342	2,29798	1,46422	3,19551
$\alpha_4$	- 2,03105	- 1,97193	- 1,72798	- 2,26607
$\alpha_7$	3,56139	3,35480	0	3,64672
$\alpha_8$	- 2,12028	- 2,21641	- 1,00143	- 1,92532
$\beta_1$	- 4,89441	- 3,66139	- 1,99827	- 1,33026
$\beta_2$	0,90610	0,66257	0,38753	0,30851
$\beta_3$	4,63568	3,65385	2,24743	1,81173
$\beta_7$	0,72717	0,52197	0,29488	0,10916
$\beta_8$	- 0,32207	- 0,21505	- 0,10964	- 0,05961
$\beta_{11}$	0,08308	0,05932	0,03277	0,02183
$\beta_{12}$	0,012407	0,00723	0,00310	0,00141

Линии уровня функции тока для  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различных значений параметра  $M$  представлены на рис. 4.4.

Линии уровня функции тока для значения параметра  $M = 5$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$  представлены на рис. 4.5.

Поверхности уровня функции тока для значения параметра  $M = 5$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$  представлены на рис. Г.1.

На рис. Г.2 приведены векторные поля скоростей  $\mathbf{V} = (V_r, V_\theta) = \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$  для значения параметра  $M = 5$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$ .

Полученное приближенное решение данной задачи при  $M = 5$  и  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  сравнивалось с точным [6]:

$$\psi = \frac{1}{2} c^2 U_\infty (1 - \tau^2) \left[ \sigma^2 - 1 - \frac{(\sigma_0^2 + 1)(\sigma^2 - 1) \operatorname{arcth} \sigma - (\sigma_0^2 - 1) \sigma}{(\sigma_0^2 + 1) \operatorname{arcth} \sigma_0 - \sigma_0} \right],$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ;

$$\sigma_0 = \left(1 - (b/a)^2\right)^{-1/2};$$

$$\operatorname{arcth}\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1};$$

$\sigma, \tau, \varphi$  – переменные эллипсоидальной системы координат:

$$x = c \sigma \tau, \quad y^2 = c^2 (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi,$$

$$z^2 = c^2 (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi, \quad \sigma \geq 1 \geq \tau \geq -1.$$

Таблица 4.2 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

$M$	5			
	6	10	14	18
$m_1$	6	10	14	18
$m_2$	10	14	18	22
$\alpha_1$	-0,38262	-0,41106	-0,40732	-0,48170
$\alpha_3$	2,51584	3,19551	3,79369	2,64403
$\alpha_4$	-2,09109	-2,26607	-2,43113	-2,30350
$\alpha_7$	–	3,64672	6,54829	5,56394
$\alpha_8$	–	-1,92532	-2,90426	-3,81579
$\alpha_{11}$	–	–	4,60971	8,08721
$\alpha_{12}$	–	–	-1,77203	-5,34094
$\alpha_{15}$	–	–	–	5,95135
$\alpha_{16}$	–	–	–	-3,96409
$\beta_1$	-0,54571	-1,33026	-1,39143	-1,54517
$\beta_2$	0,16654	0,30851	0,31822	0,35344
$\beta_3$	1,05281	1,81173	1,88268	2,00404
$\beta_7$	0,05145	0,10916	0,10522	0,13515
$\beta_8$	-0,01963	-0,05961	-0,06179	-0,07252
$\beta_{11}$	–	0,02183	0,02412	0,02116
$\beta_{12}$	–	0,00141	0,00190	0,00377
$\beta_{15}$	–	–	-0,00061	-0,00204
$\beta_{16}$	–	–	0	0
$\beta_{19}$	–	–	–	0,00015
$\beta_{20}$	–	–	–	-0,00001

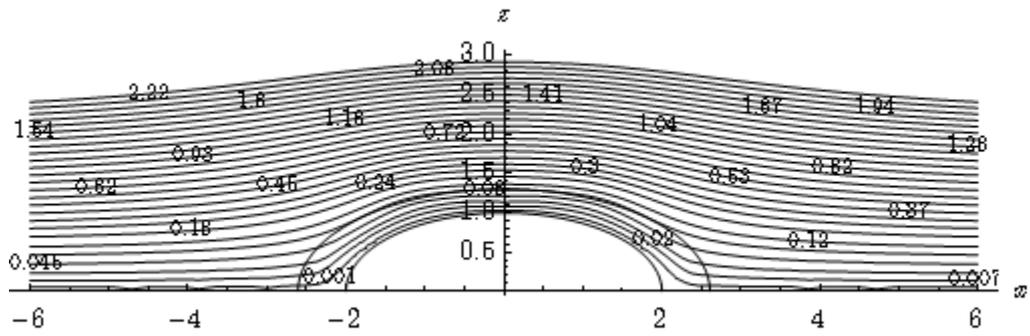
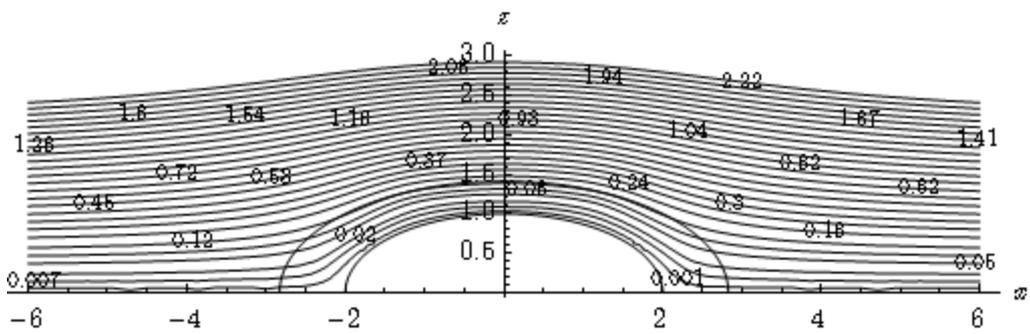
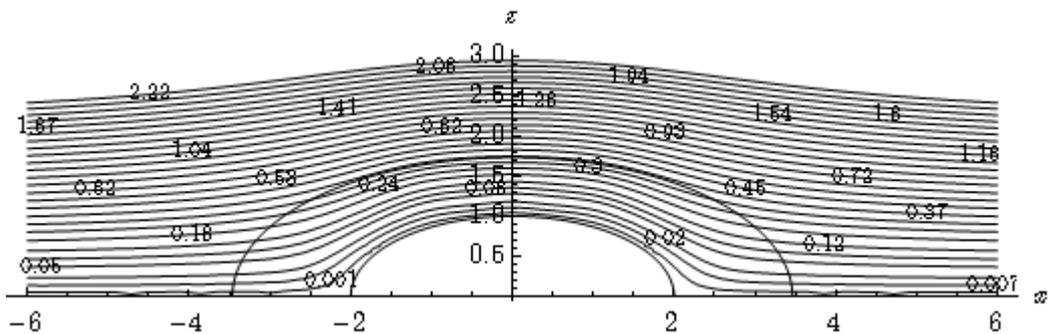
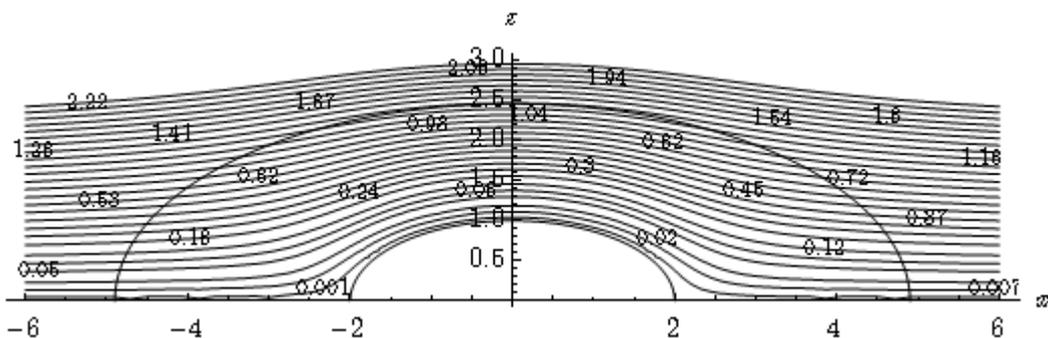
а)  $M = 0,7$ б)  $M = 1$ в)  $M = 2$ г)  $M = 5$ 

Рисунок 4.4 – Линии уровня функции тока  
для  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различных  $M$

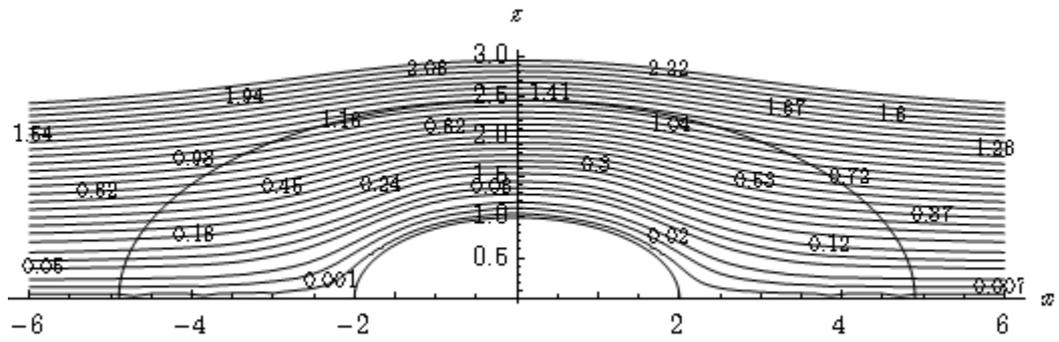
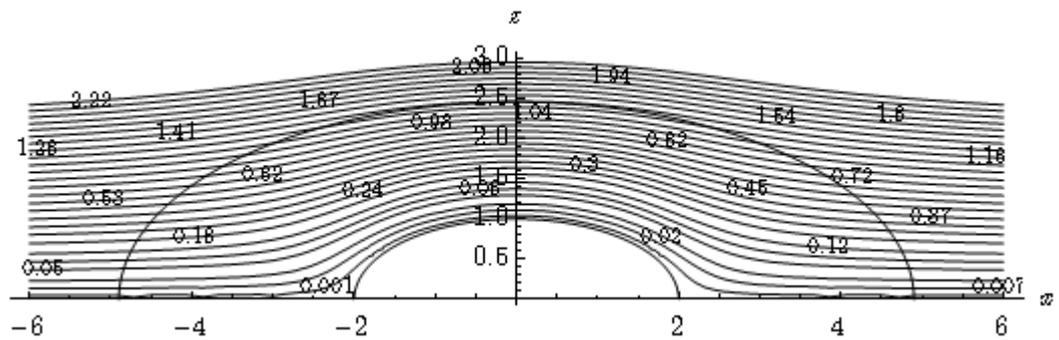
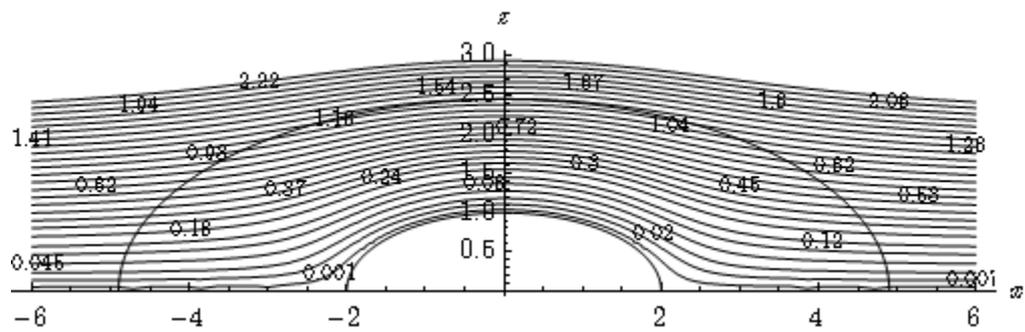
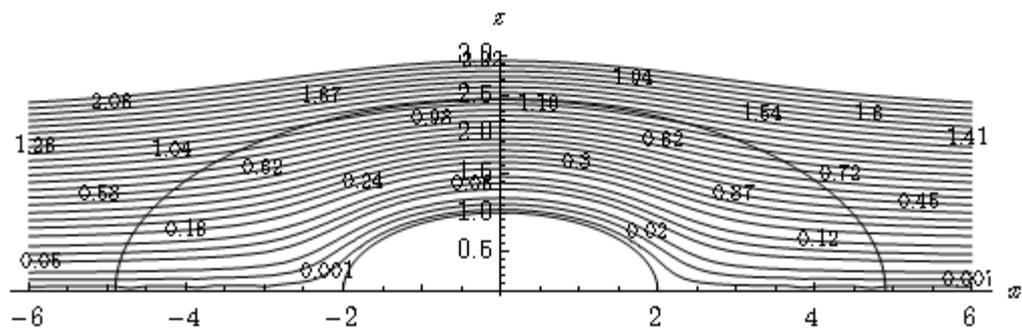
а)  $m_1 = 6, m_2 = 10$ б)  $m_1 = 10, m_2 = 14$ в)  $m_1 = 14, m_2 = 18$ г)  $m_1 = 18, m_2 = 22$ 

Рисунок 4.5 – Линии уровня функции тока

для  $M = 5$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

При сравнении рассматривались 18026 точек, лежащие в первой четверти (учтена симметрия), достаточно равномерно расположенные внутри кольца  $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$  и вне  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$  (рис. 4.6).

В таблице Г.1 приведены некоторые значения точного и приближенного решений.

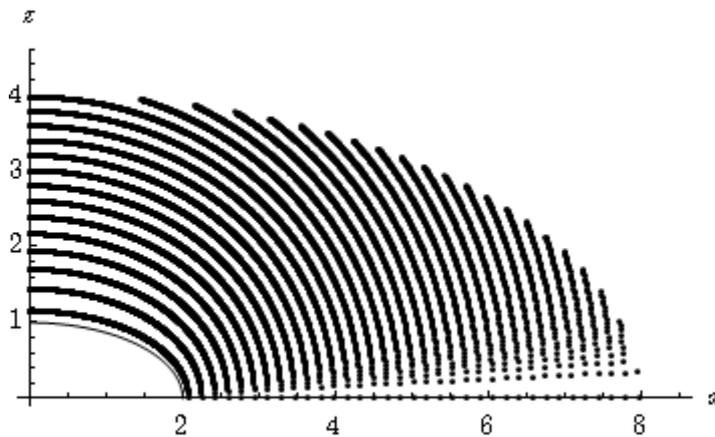


Рисунок 4.6 – Расположение точек, в которых выполнялось сравнение приближенного решения с точным

Были вычислены следующие погрешности вычислений:

– абсолютное отклонение приближенного решения от точного

$$\Delta_k = \max_{(x_i, z_i)} |\psi - \psi_n|;$$

– среднее квадратичное отклонение

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi(x_i, z_i) - \psi_n(x_i, z_i))^2};$$

– относительная погрешность

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\psi(x_i, z_i) - \psi_n(x_i, z_i))^2}{\sum_{i=1}^N (\psi(x_i, z_i))^2}} \cdot 100\%.$$

В таблице 4.3 представлены погрешности вычислений при  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и разных значениях  $M$ .

В таблице 4.4 представлены погрешности вычислений при  $M = 5$  и разных  $m_1$  и  $m_2$ .

Линии уровня точного и приближенного решений приведены на рис. 4.7.

Таблица 4.3 – Погрешности вычислений при  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и разных значениях  $M$

$M$	0,7	1	2	5
$\Delta_k$	$0,19 \times 10^{-2}$	$0,18 \times 10^{-2}$	$0,17 \times 10^{-2}$	$0,15 \times 10^{-3}$
$\Delta$	$0,98 \times 10^{-2}$	$0,95 \times 10^{-2}$	$0,81 \times 10^{-2}$	$0,72 \times 10^{-2}$
$\delta$	0,92 %	0,89 %	0,85 %	0,60 %

Таблица 4.4 – Погрешности вычислений при  $M = 5$  и разных  $m_1$  и  $m_2$

$m_1$	6	10	14	18
$m_2$	10	14	18	22
$\Delta_k$	$0,21 \times 10^{-2}$	$0,15 \times 10^{-2}$	$0,12 \times 10^{-2}$	$0,84 \times 10^{-3}$
$\Delta$	$0,93 \times 10^{-2}$	$0,72 \times 10^{-2}$	$0,51 \times 10^{-2}$	$0,47 \times 10^{-2}$
$\delta$	0,82 %	0,60 %	0,40 %	0,38 %

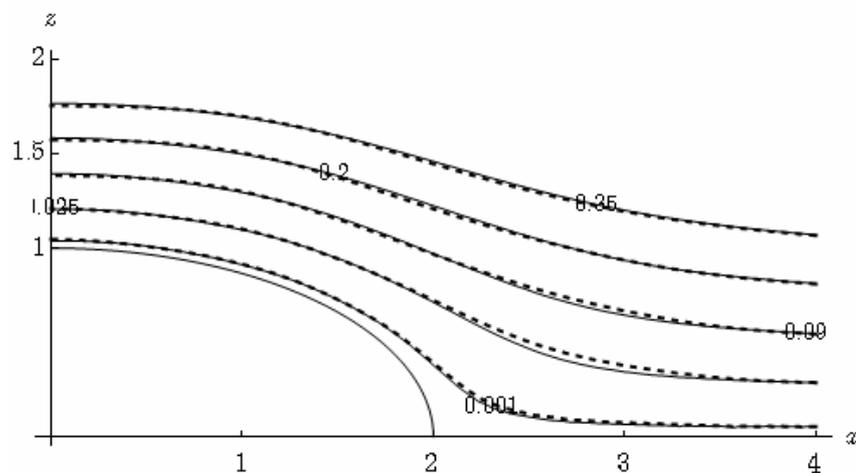


Рисунок 4.7 – Линии уровня точного (пунктиром) и приближенного (сплошной линией) решений

#### 4.2.2 Результаты вычислительного эксперимента моделирования обтекания двух сочлененных эллипсоидов

Рассмотрим краевую задачу (4.3) – (4.5), где обтекаемое тело ограничено поверхностями  $\frac{(x-1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{(x+1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , представлено на рис. 4.8, при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $U_\infty = 1$ . Решение задачи сводится к решению системы (4.16). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие функции Гегенбауэра с нечетными индексами, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым равны нулю. Двойные интегралы, входящие в систему (4.16), считались приближенно по формуле Гаусса со 100 узлами по каждой переменной.

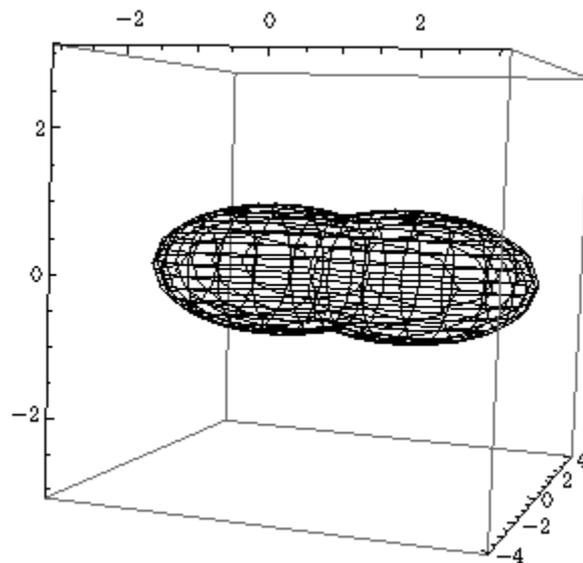


Рисунок 4.8 – Два сочлененных эллипсоида

В таблице 4.5 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значениям  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 12$  и различным значениям параметра  $M$ .

В таблице 4.6 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие значению параметра

$M = 4$  и различным значениям  $m_1$  и  $m_2$ .

Таблица 4.5 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 12$  и различных  $M$

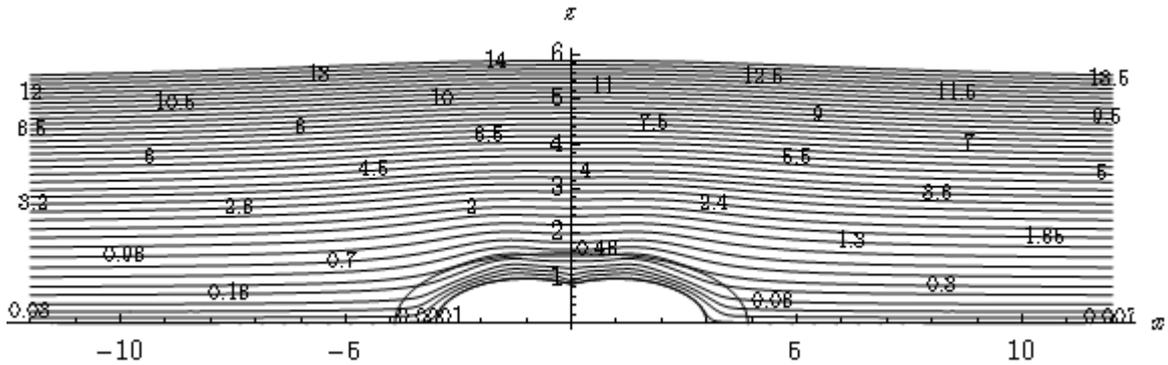
$m_1$	8		
$m_2$	12		
$M$	1	4	10
$\alpha_1$	- 0,78943	- 2,59301	- 4,40825
$\alpha_3$	9,18484	5,79721	4,15405
$\alpha_4$	- 7,15881	- 6,86905	- 7,29689
$\alpha_7$	21,08708	15,61948	15,75068
$\alpha_8$	- 12,12657	- 11,34079	- 12,00276
$\beta_1$	- 4,14876	- 3,56469	- 3,95485
$\beta_2$	0,63547	0,51758	0,58579
$\beta_3$	4,89444	5,72494	7,47098
$\beta_7$	0,22457	- 0,03174	- 0,21171
$\beta_8$	- 0,11742	- 0,05139	- 0,03995
$\beta_{11}$	0,06583	0,02055	0,02207
$\beta_{12}$	0,00071	0,00092	0,00048

Таблица 4.6 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 4$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

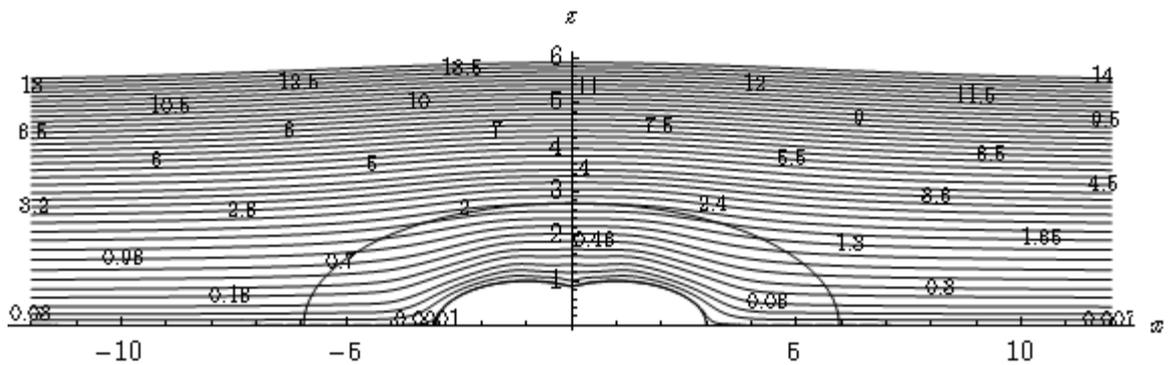
$M$	4		
$m_1$	6	6	10
$m_2$	6	10	14
$\alpha_1$	- 2,11290	- 2,37234	- 2,59301
$\alpha_3$	2,64342	5,20448	5,79721
$\alpha_4$	- 4,88302	- 5,90401	- 6,86905
$\alpha_7$	-	-	15,61948
$\alpha_8$	-	-	- 11,34079
$\beta_1$	0,22102	- 1,48956	- 3,56469
$\beta_2$	- 0,00785	0,22795	0,51758
$\beta_3$	1,43409	3,46269	5,72494
$\beta_7$	-	- 0,12505	- 0,03174
$\beta_8$	-	- 0,00476	- 0,05139
$\beta_{11}$	-	-	0,02055
$\beta_{12}$	-	-	0,00092

Линии уровня функции тока для  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различных значений параметра  $M$  представлены на рис. 4.9.

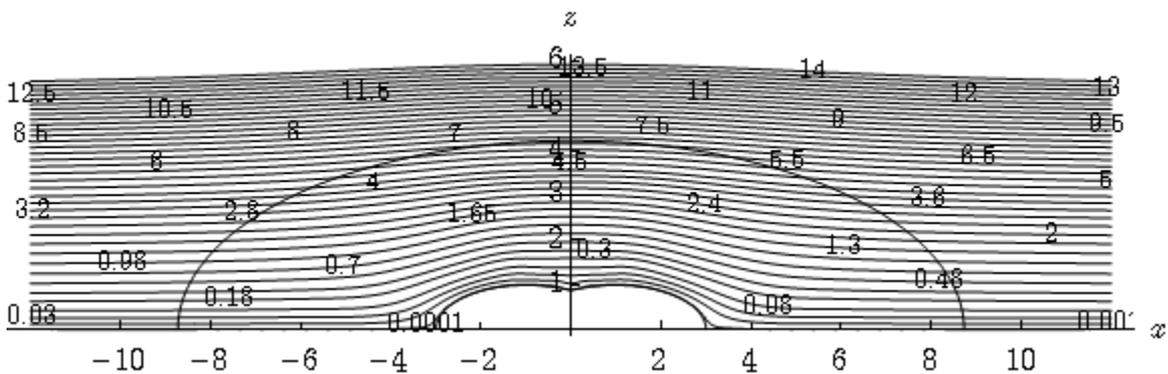
Линии уровня функции тока для значения параметра  $M = 4$  и разного числа координатных функций  $m_1$ ,  $m_2$  представлены на рис. 4.10.



а)  $M = 1$



б)  $M = 4$



в)  $M = 10$

Рисунок 4.9 – Линии уровня функции тока  
для  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и различных  $M$

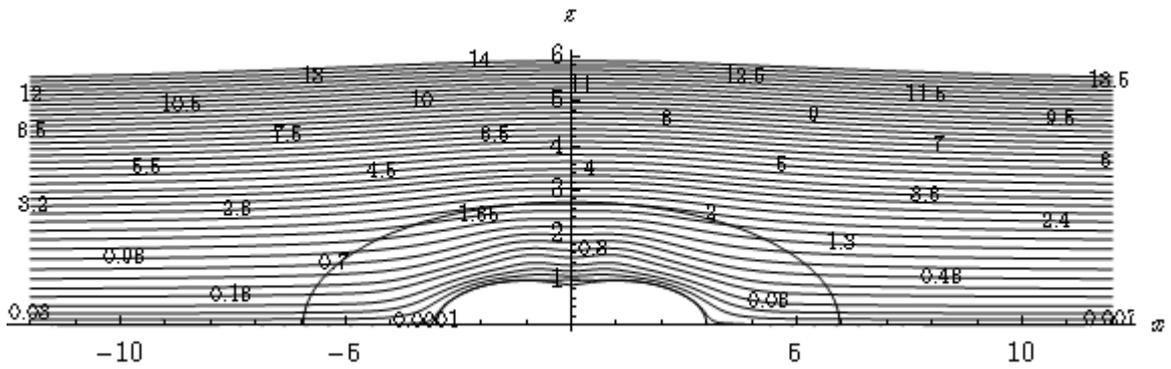
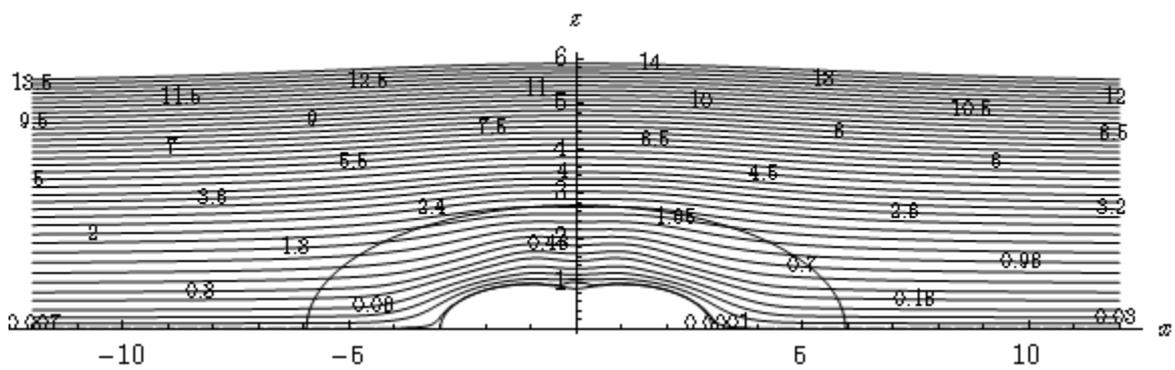
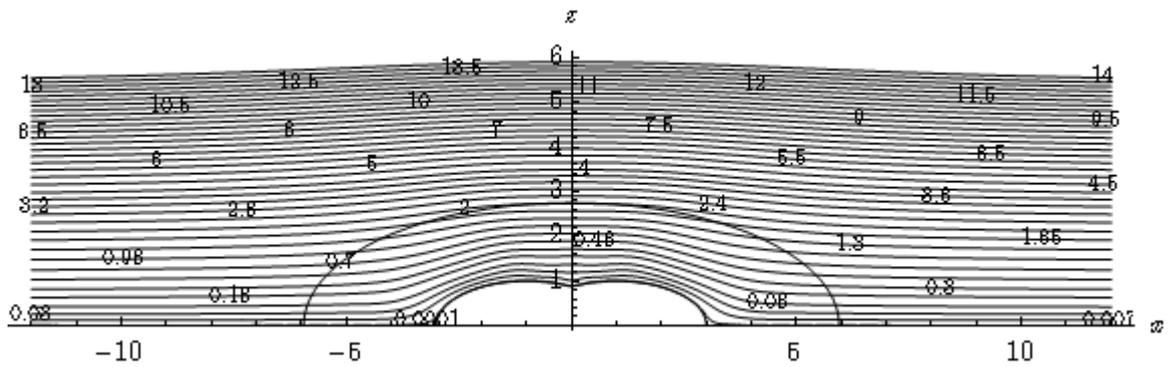
а)  $m_1 = 6, m_2 = 6$ б)  $m_1 = 6, m_2 = 10$ в)  $m_1 = 10, m_2 = 14$ 

Рисунок 4.10 – Линии уровня функции тока

для  $M = 4$  и различных  $m_1$  и  $m_2$ Поверхности уровня функции тока для значения параметра  $M = 4$  и

разного числа координатных функций  $m_1, m_2$  представлены на рис. Г.3.

На рис. Г.4 приведены векторные поля скоростей  $\mathbf{V} = (V_r, V_\theta) = \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$  для значения параметра  $M = 4$  и разного числа координатных функций  $m_1, m_2$ .

#### Выводы по разделу 4

1. Для функции тока рассмотрена постановка линеаризованной по Стоксу задачи, являющейся математической моделью процесса медленного обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью.

2. Построена структура решения задачи медленного обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью в соответствии с методом  $R$ -функций, точно удовлетворяющая краевым условиям на границе обтекаемого тела и условию на бесконечности, что позволило свести задачу в бесконечной области к задаче в конечной области.

3. Разработан и обоснован численный метод расчета медленного обтекания тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью (приближение Стокса), основанный на аппроксимации неопределенных компонент в структуре решения краевой задачи методом Бубнова-Галеркина. Доказана сходимости галеркинских приближений в энергетической норме к единственному обобщенному решению задачи, рассматриваемой в ограниченной области, получена оценка решения в энергетической норме.

4. Проведены вычислительные эксперименты для некоторых тел вращения. Для задачи обтекания эллипсоида вращения проведено сравнение полученного приближенного решения с точным. Результаты сравнения показывают эффективность разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в работах [74 – 77, 84, 85, 101, 103].

**РАЗДЕЛ 5**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ**  
**ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)**

**5.1 Постановка нелинейной задачи обтекания тел вращения и приближенный метод ее расчета**

Рассмотрим стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости. Относительно обтекаемого тела сделаем те же предположения, что и в разделе 4. Течение будем рассматривать в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Пусть все величины, характеризующие течение, не зависят от координаты  $\varphi$  и третья компонента скорости жидкости равна нулю:  $V_\varphi = 0$ . Тогда стационарные уравнения Навье-Стокса имеют вид [2]:

$$\begin{aligned}
 V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right), \\
 V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (5.1) \\
 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r V_\theta \sin \theta) &= 0,
 \end{aligned}$$

где  $V_r, V_\theta$  – компоненты скорости жидкости;

$P$  – давление;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\rho$  – плотность жидкости;

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Совокупность уравнений (5.1) представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций  $V_r, V_\theta, P$ .

Уравнение неразрывности (третье уравнение в (5.1)) интегрируется введением функции тока  $\psi$  по формулам (4.2). Исключая из оставшихся двух

уравнений перекрестным дифференцированием давление, для функции тока  $\psi = \psi(r, \theta)$  получим нелинейное уравнение четвертого порядка [107]

$$\begin{aligned} \nu E^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E \psi \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\text{где } E \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right).$$

Уравнение (5.2) следует дополнить краевыми условиями на  $\partial \Omega$  и условием на бесконечности (при  $r \rightarrow +\infty$ ).

Если граница обтекаемого тела неподвижна и непроницаема, то из условий прилипания следуют такие краевые условия [5, 8]:

$$\psi|_{\partial \Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial \Omega$  нормаль.

Условие на бесконечности имеет вид [5, 19, 109, 110]:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta \quad (5.4)$$

и означает, что при неограниченном удалении от обтекаемого тела поток становится равномерным.

Для решения задачи (5.2) – (5.4) воспользуемся методом последовательных приближений и методами  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина.

Пусть  $u_0(r, \theta)$  – решение следующей вспомогательной линейной задачи:

$$E^2 u_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.5)$$

$$u_0|_{\partial \Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} u_0 = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta. \quad (5.7)$$

Задача (5.5) – (5.7) может быть решена с помощью метода, описанного в разделе 4.

В задаче (5.2) – (5.4) сделаем замену

$$\psi = u_0 + u,$$

где  $u$  – новая неизвестная функция.

Тогда для функции  $u$  получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \nu E^2 u = & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} u = 0. \quad (5.10)$$

Решение задачи (5.8) – (5.10) будем искать в классе  $F$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $x, y$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$  удовлетворяют условиям (5.9) [198]. Умножим (5.8) скалярно на  $v$  из  $F$  в  $L_2(\Omega)$ , получим

$$\begin{aligned} & \nu (E^2 u, v)_{L_2(\Omega)} = \\ & = \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial \theta} \right), v \right)_{L_2(\Omega)} + \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u), v \right)_{L_2(\Omega)}$$

или

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} E^2 u \cdot v \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( E(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( E(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \right) \right) v \, dr d\theta + \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u) v \, dr d\theta . \end{aligned}$$

Используя результат леммы 4.1 и интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \left( Eu \cdot Ev + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial Eu}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial Eu}{\partial r} \right) \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} E(u_0 + u) \left( \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr d\theta + \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u) v \, dr d\theta . \quad (5.11) \end{aligned}$$

Обобщенным решением задачи (5.8) – (5.10) назовем функцию  $u$ , которая принадлежит классу  $F$  и удовлетворяет интегральному тождеству (5.11).

Следуя разделу 4, обобщенное решение  $u$  задачи (5.8) – (5.10) найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнения (5.8), рассматриваемого в последовательности областей  $\{\Omega_n\}$ , которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

Для решения задачи (5.8) – (5.10) в области  $\Omega_n$  построим итерационный процесс следующим образом. Пусть начальное приближение  $u_n^{(0)}$  задано. Если  $k$ -е приближение  $u_n^{(k)}$  построено, то новое  $(k+1)$ -е приближение  $u_n^{(k+1)}$

находим как решение линейной задачи

$$\begin{aligned} \nu E^2 u_n^{(k+1)} = & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \frac{\partial E(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} - \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} \frac{\partial E(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u_n^{(k)}) \text{ в } \Omega_n, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$u_n^{(k+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.13)$$

продолженное, следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], нулем вне  $\Omega_n$ .

Для оценки решения в норме  $|\cdot|$ , перейдем к прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$ , причем  $y$  и  $z$  связаны соотношением  $q = \sin \varphi \cdot y + \cos \varphi \cdot z$ . Уравнение (5.12) примет вид

$$\nu E^2 u_n^{(k+1)} = J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), \quad (5.14)$$

где  $\tilde{r} = \sqrt{y^2 + z^2}$ ;

$$Eu = \Delta_{xq} u - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u}{\partial q};$$

$$E^2 u = \Delta^2 u - Ku;$$

$$Ku = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \Delta u}{\partial q} + \Delta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u}{\partial q} \right) - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u}{\partial q} \right);$$

$$J(Eu, u) = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial (Eu)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial (Eu)}{\partial q}.$$

Умножим (5.14) скалярно на  $v$  из  $F$  в  $L_2(\Omega_n)$ , получим

$$\begin{aligned} \nu (E^2 u_n^{(k+1)}, v)_{L_2(\Omega_n)} = & (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}), v)_{L_2(\Omega_n)} + \\ & + \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), v \right)_{L_2(\Omega_n)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nu[u_n^{(k+1)}, v] - \nu(Ku_n^{(k+1)}, v)_{L_2(\Omega_n)} &= (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}), v)_{L_2(\Omega_n)} + \\ &+ \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), v \right)_{L_2(\Omega_n)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $[u, v] = \int_{\Omega_n} \Delta u \Delta v d\Omega$ .

В (5.15) вместо  $v$  подставим решение  $u_n^{(k+1)}$ :

$$\begin{aligned} \nu[u_n^{(k+1)}, u_n^{(k+1)}] - \nu(Ku_n^{(k+1)}, u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} &= (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} + \\ &+ \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $(Ku_n^{(k+1)}, u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} = 0$  (см. в раздел 4), и используя свойство якобиана (3.13), получим

$$\begin{aligned} \nu |u_n^{(k+1)}|^2 &= (J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} + \\ &+ \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)}, \end{aligned}$$

где  $|u|^2 = \int_{\Omega_n} (\Delta u)^2 d\Omega$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \nu |u_n^{(k+1)}|^2 &\leq \left| (J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} \right| + \\ &+ \left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right|. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Оценим  $\left| (J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} \right|$ , используя неравенства

(3.19), (3.25) и (2.26).

Получим

$$\begin{aligned}
& \left| (J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\
& \leq c_0 \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| E(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
& \leq c_0 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \tilde{c} \left\| \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial q} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq c_0 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c} \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq c_0 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c} c_1 \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq c_0 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c} c_1 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \right) = \\
& = c_0 (1 + \tilde{c} c_1) \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\|^2 \cdot \left\| u_n^{(k+1)} \right\|.
\end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ ,  $a = \left\| u_n^{(k+1)} \right\|$ ,

$b = c_0 (1 + \tilde{c} c_1) \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\|^2$  получим, что

$$\begin{aligned}
& \left| (J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\
& \leq \frac{\nu}{2} \left\| u_n^{(k+1)} \right\|^2 + \frac{c_0^2 (1 + \tilde{c} c_1)^2}{2\nu} \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\|^4 \leq \\
& \leq \frac{\nu}{2} \left\| u_n^{(k+1)} \right\|^2 + \frac{c_0^2 (1 + \tilde{c} c_1)^2}{\nu} \left( \left\| u_0 \right\|^2 + \left\| u_n^{(k)} \right\|^2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Оценим  $\left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right|$ :

$$\left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{c}_1 \left\| \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \|E(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
&\leq \tilde{c}_1 \left\| \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_4(\Omega_n)} \|E(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_4(\Omega_n)} \|u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
&\leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 \sqrt{\left\| \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)}} \times \\
&\quad \times \sqrt{\|u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|\nabla(u_n^{(k+1)})\|_{L_2(\Omega_n)}} \|E(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
&\leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 \|u_0 + u_n^{(k)}\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|u_n^{(k+1)}\|_{W_2^2(\Omega_n)} (\|u_0 + u_n^{(k)}\| + \tilde{c}c_1 \|u_0 + u_n^{(k)}\|) \leq \\
&\leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}c_1) \|\Delta(u_0 + u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|\Delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|u_0 + u_n^{(k)}\| \leq \\
&\leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}c_1) \|u_0 + u_n^{(k)}\|^2 \|u_n^{(k+1)}\|.
\end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ ,  $a = \|u_n^{(k+1)}\|$ ,

$b = \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}c_1) \|u_0 + u_n^{(k)}\|^2$  получим, что

$$\begin{aligned}
&\left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial x} E(u_0 + u_n^{(k)}), u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
&\leq \frac{\nu}{4} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{2\tilde{c}_1^2 c_1^4 (1 + \tilde{c}c_1)^2}{\nu} \|u_0 + u_n^{(k)}\|^4 \leq \\
&\leq \frac{\nu}{4} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{4\tilde{c}_1^2 c_1^4 (1 + \tilde{c}c_1)^2}{\nu} (\|u_0\|^2 + \|u_n^{(k)}\|^2)^2.
\end{aligned}$$

Подставив полученные оценки в правую часть (5.16), получим

$$\begin{aligned}
\nu \|u_n^{(k+1)}\|^2 &\leq \frac{\nu}{2} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{c_0^2 (1 + \tilde{c}c_1)^2}{\nu} (\|u_0\|^2 + \|u_n^{(k)}\|^2)^2 + \\
&+ \frac{\nu}{4} \|u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{4\tilde{c}_1^2 c_1^4 (1 + \tilde{c}c_1)^2}{\nu} (\|u_0\|^2 + \|u_n^{(k)}\|^2)^2, \\
\|u_n^{(k+1)}\| &\leq \frac{2(1 + \tilde{c}c_1) \sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2 c_1^4}}{\nu} (\|u_0\|^2 + \|u_n^{(k)}\|^2).
\end{aligned}$$

Предположим, что  $\|u_0\| \leq L_0$ ,  $\|u_n^{(k)}\| \leq L$ , тогда

$$\|u_n^{(k+1)}\| \leq \frac{2(1 + \tilde{c}c_1)\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2c_1^4}}{\nu}(L_0^2 + L^2).$$

Условие ограниченности  $\|u_n^{(k+1)}\| \leq L$  будет выполнено, если

$$\frac{2(1 + \tilde{c}c_1)\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2c_1^4}}{\nu}(L_0^2 + L^2) \leq L,$$

откуда

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{L}{2(1 + \tilde{c}c_1)(L_0^2 + L^2)\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2c_1^4}}. \quad (5.17)$$

Поскольку число Рейнольдса  $Re$  пропорционально  $\frac{1}{\nu}$ , то условие (5.17) можно трактовать как условие малости числа Рейнольдса.

Таким образом, при соответствующем выборе начального приближения  $u_n^{(0)}$  и при выполнении условия (5.17) решение  $u_n^{(k+1)}$  на каждом шаге итерационного процесса (5.12) – (5.13) ограничено в норме  $\|\cdot\|$ .

Докажем сходимость последовательности  $u_n^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для этого рассмотрим разности  $\delta u_n^{(k+1)} = u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}$ . Из уравнения (5.8) следует, что  $\delta u_n^{(k+1)}$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \nu E^2(\delta u_n^{(k+1)}) &= J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - \\ &\quad - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) + \\ &\quad + \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right] \text{ в } \Omega_n \end{aligned} \quad (5.18)$$

и краевым условиям

$$\delta u_n^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \delta u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Умножим обе части уравнения (5.18) скалярно на  $v$ :

$$\begin{aligned} & \nu (E^2(\delta u_n^{(k+1)}), v)_{L_2(\Omega_n)} = \\ & = (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), v)_{L_2(\Omega_n)} + \\ & + \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right], v \right)_{L_2(\Omega_n)} \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \nu[\delta u_n^{(k+1)}, v] - \nu(K(\delta u_n^{(k+1)}), v)_{L_2(\Omega_n)} = \tag{5.19} \\ & = (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), v)_{L_2(\Omega_n)} + \\ & + \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right], v \right)_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned}$$

В (5.19) вместо  $v$  подставим  $\delta u_n^{(k+1)}$ , получим

$$\begin{aligned} & \nu \|\delta u_n^{(k+1)}\|^2 = \tag{5.20} \\ & = (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} + \\ & + \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right], \delta u_n^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega_n)} \end{aligned}$$

Используя свойства якобиана (3.24) и (3.13), для первого слагаемого справа в (5.20) получим

$$\begin{aligned} & (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} = \\ & = (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k)}) + J(E(\delta u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} = \end{aligned}$$

$$= (J(\delta u_n^{(k)}, \delta u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} + (J(u_0 + u_n^{(k-1)}, \delta u_n^{(k+1)}), E(\delta u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)}.$$

Используя неравенство (3.25), получим

$$\begin{aligned} & \left| (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} \right| = \\ & = \left| (J(\delta u_n^{(k)}, \delta u_n^{(k+1)}), E(u_0 + u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} + (J(u_0 + u_n^{(k-1)}, \delta u_n^{(k+1)}), E(\delta u_n^{(k)}))_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\ & \leq c_0 \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| E(u_0 + u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \\ & + c_0 \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} = \\ & \leq c_0 \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \left\| \Delta(u_0 + u_n^{(k)}) - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial q} \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\ & \quad \left. + \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial q} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\ & \leq c_0 \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c}c_1 \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| \left( \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c}c_1 \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \right) \right) \leq \\ & \leq c_0 \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \left( \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c}c_1 \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \cdot \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| + \right. \\ & \quad \left. + \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| + \tilde{c}c_1 \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \right) \leq \\ & \leq c_0 \left( \left\| u_0 + u_n^{(k)} \right\| (1 + \tilde{c}c_1) + \left\| u_0 + u_n^{(k-1)} \right\| (1 + \tilde{c}c_1) \right) \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\| \leq \\ & \leq 2c_0(L_0 + L)(1 + \tilde{c}c_1) \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ ,  $a = \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|$ ,

$b = 2c_0(L_0 + L)(1 + \tilde{c}c_1) \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|$  получим, что

$$\begin{aligned} & \left| (J(E(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - J(E(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}), \delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)} \right| \leq \\ & \leq \frac{\nu}{2} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|^2 + \frac{4c_0^2}{\nu} (L_0 + L)^2 (1 + \tilde{c}c_1)^2 \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|^2. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое справа в (5.20):

$$\begin{aligned}
& \left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right], \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} \leq \\
& \leq \tilde{c}_1 \left( \left| \left( \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0, \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} + \left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& \left. + \left| \left( \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)}, \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} + \left| \left( \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}), \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq \tilde{c}_1 \left( \left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \|E u_0\|_{L_2(\Omega_n)} + \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& \left. + \left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \|E u_n^{(k)}\|_{L_2(\Omega_n)} + \left\| \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq \tilde{c}_1 \left( \left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_4(\Omega_n)} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_4(\Omega_n)} \|E u_0\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& \quad + \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L_4(\Omega_n)} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_4(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& \quad + \left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_4(\Omega_n)} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_4(\Omega_n)} \|E u_n^{(k)}\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& \quad \left. + \left\| \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \right\|_{L_4(\Omega_n)} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_4(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 \left( \sqrt{\left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)}} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|\nabla(\delta u_n^{(k+1)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|E u_0\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& \quad + \sqrt{\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)}} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|\nabla(\delta u_n^{(k+1)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& \quad \left. + \sqrt{\left\| \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)}} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|\nabla(\delta u_n^{(k+1)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|E u_n^{(k)}\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\left\| \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)}} \|\delta u_n^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega_n)} \|\nabla(\delta u_n^{(k+1)})\|_{L_2(\Omega_n)} \|E(\delta u_n^{(k)})\|_{L_2(\Omega_n)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\left\| \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \nabla(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right\|} \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 \left( \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| Eu_0 \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& + \left\| u_0 \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \left\| \delta u_n^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| Eu_n^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& \left. + \left\| u_n^{(k-1)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| \delta u_n^{(k+1)} \right\|_{W_2^2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 \left( \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| Eu_0 \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \right. \\
& + \left\| \Delta u_0 \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& + \left\| \Delta(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| Eu_n^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} + \\
& \left. + \left\| \Delta u_n^{(k-1)} \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| \Delta(\delta u_n^{(k+1)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \left\| E(\delta u_n^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega_n)} \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 \left( \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left( \left| u_0 \right| + \tilde{c}_1 \left| u_0 \right| \right) + \right. \\
& + \left| u_0 \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left( \left| \delta u_n^{(k)} \right| + \tilde{c}_1 \left| \delta u_n^{(k)} \right| \right) + \\
& + \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left( \left| u_n^{(k)} \right| + \tilde{c}_1 \left| u_n^{(k)} \right| \right) + \\
& + \left| u_n^{(k-1)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left( \left| \delta u_n^{(k)} \right| + \tilde{c}_1 \left| \delta u_n^{(k)} \right| \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left( \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot \left| u_0 \right| \cdot (1 + \tilde{c}_1) + \right. \\
& + \left| u_0 \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot (1 + \tilde{c}_1) + \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot \left| u_n^{(k)} \right| \cdot (1 + \tilde{c}_1) + \\
& \left. + \left| u_n^{(k-1)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot (1 + \tilde{c}_1) \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}_1) \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k)} \right| \cdot \left( 2 \left| u_0 \right| + \left| u_n^{(k)} \right| + \left| u_n^{(k-1)} \right| \right) \leq \\
& \leq 2\sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}_1) (L_0 + L) \cdot \left| \delta u_n^{(k+1)} \right| \cdot \left| \delta u_n^{(k)} \right|.
\end{aligned}$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ ,  $a = \left| \delta u_n^{(k+1)} \right|$ ,

$b = 2\sqrt{2} \tilde{c}_1 c_1^2 (1 + \tilde{c}_1) (L_0 + L) \cdot \left| \delta u_n^{(k)} \right|$  получим, что

$$\left| \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) + \frac{\partial(\delta u_n^{(k)})}{\partial x} E u_n^{(k)} + \frac{\partial u_n^{(k-1)}}{\partial x} E(\delta u_n^{(k)}) \right], \delta u_n^{(k+1)} \right) \right|_{L_2(\Omega_n)} \leq$$

$$\leq \frac{\nu}{4} \|\delta u_n^{(k+1)}\|^2 + \frac{8\tilde{c}_1^2 c_1^4 (1 + \tilde{c}c_1)^2}{\nu} (L_0 + L)^2 \|\delta u_n^{(k)}\|^2.$$

Подставив полученное неравенство в правую часть (5.20) при выполнении условия (5.17), получим

$$\|\delta u_n^{(k+1)}\| \leq \frac{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}}{\nu} \|\delta u_n^{(k)}\|.$$

Пусть  $\frac{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}}{\nu} \leq \alpha < 1$ , то есть

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{\alpha}{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}}. \quad (5.21)$$

Тогда  $\|\delta u_n^{(k+1)}\| \leq \alpha \|\delta u_n^{(k)}\| \leq \dots \leq \alpha^k \|\delta u_n^{(1)}\|$ .

Используя последнее неравенство, оценим  $\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\|$ :

$$\begin{aligned} \|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\| &\leq \|u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}\| + \|u_n^{(k+2)} - u_n^{(k+1)}\| + \dots + \|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k+p-1)}\| = \\ &= \|\delta u_n^{(k+1)}\| + \|\delta u_n^{(k+2)}\| + \dots + \|\delta u_n^{(k+p)}\| \leq \\ &\leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{k+p-1}) \|\delta u_n^{(1)}\| = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} \gamma < \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где обозначено  $\gamma = \|\delta u_n^{(1)}\|$ .

Поскольку  $\alpha < 1$ , то  $\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то есть последовательность  $\{u_n^{(k)}\}$  является фундаментальной. В силу полноты пространства  $\mathring{W}_2^2(\Omega_n)$  это означает, что последовательность  $\{u_n^{(k)}\}$  сходится (с геометрической скоростью), то есть существует функция  $u_n^* \in \mathring{W}_2^2(\Omega_n)$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_n^{(k)} = u_n^*.$$

Устремив в неравенстве (5.22)  $p$  к  $\infty$ , получим оценку для  $k$ -го приближения:

$$\|u_n^* - u_n^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma. \quad (5.23)$$

Покажем, что предельная функция  $u_n^*$  является обобщенным решением задачи (5.8) – (5.10) в ограниченной области  $\Omega_n$  и выясним, при каком условии эта задача имеет единственное ограниченное решение.

Перейдем в (5.15) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} \nu[u_n^*, v] - \nu(Ku_n^*, v)_{L_2(\Omega_n)} &= (J(u_0 + u_n^*, v), E(u_0 + u_n^*))_{L_2(\Omega_n)} + \\ &+ \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^*)}{\partial x} E(u_0 + u_n^*), v \right)_{L_2(\Omega_n)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Следовательно, предел  $u_n^*$  является обобщенным решением задачи (5.8) – (5.10) в ограниченной области  $\Omega_n$  и имеет место равенство

$$\nu \|u_n^*\|^2 = (J(u_0 + u_n^*, u_n^*), E(u_0 + u_n^*))_{L_2(\Omega_n)} + \left( \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial(u_0 + u_n^*)}{\partial x} E(u_0 + u_n^*), u_n^* \right)_{L_2(\Omega_n)}$$

и, соответственно, оценка

$$\|u_n^*\| \leq \frac{2(1 + \tilde{c}c_1)\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2c_1^4}}{\nu} (L_0^2 + L^2). \quad (5.25)$$

Предположим, что кроме решения  $u_n^*$  задача (5.8) – (5.10) в ограниченной области  $\Omega_n$  имеет еще ограниченное решение  $u_n^{**}$ . Рассмотрим разность  $\delta u_n = u_n^* - u_n^{**}$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nu E^2(\delta u_n) = & J(E(u_0 + u_n^*), u_0 + u_n^*) - J(E(u_0 + u_n^{**}), u_0 + u_n^{**}) + \\ & + \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{\partial(\delta u_n)}{\partial x} E u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} E(\delta u_n) + \frac{\partial(\delta u_n)}{\partial x} E u_n^* + \frac{\partial u_n^{**}}{\partial x} E(\delta u_n) \right]. \end{aligned}$$

Тогда используя (3.25), получим

$$|\delta u_n| \leq \frac{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}}{\nu} |\delta u_n|. \quad (5.26)$$

Неравенство (5.26) будет выполнено лишь при  $|\delta u_n| = 0$ , если выполняется неравенство (5.21).

Объединяя условия (5.17) и (5.21) для  $\frac{1}{\nu}$  получим оценку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} < & (5.27) \\ & < \min \left\{ \frac{L}{2(1 + \tilde{c}c_1)(L_0^2 + L^2)\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2 c_1^4}}, \frac{\alpha}{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом доказали следующую теорему.

**Теорема 5.1.** Последовательные приближения, формируемые по схеме (5.12) – (5.13), при малых числах Рейнольдса при каждом  $n$  сходятся в энергетической норме к единственному обобщенному решению  $u_n^* \in F$  задачи (5.8) – (5.10), рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega_n$ , причем для  $k$ -го приближения оценка погрешности имеет вид (5.23). Условие малости числа Рейнольдса формулируется в виде неравенства (5.27).

На каждой итерации в области  $\Omega_n$  приближенное решение задачи (5.12) – (5.13) будем искать в виде

$$u_{n,N}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^N c_{n,j}^{(k+1)} \phi_j, \quad (5.28)$$

где  $c_{n,j}^{(k+1)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j}^{(k+1)} \nu([\phi_j, \phi_i] + (K\phi_j, \phi_i)) = (f^{(k+1)}, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.29)$$

где

$$K = -\Delta \left( \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \Delta - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right);$$

$$(f^{(k+1)}, \phi_i) = \int_{\Omega_n} E(u_0 + u_n^{(k)}) \left( \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} - \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) dr d\theta +$$

$$+ \int_{\Omega_n} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u_n^{(k)}) \phi_i dr d\theta;$$

$\{\phi_i\}$  – система координатных функций, которая выбирается, как и в п. 4.1.

Отметим, что матрица системы (5.29) не изменяется от итерации к итерации, вычисляется лишь один раз на первой итерации, а затем на каждой итерации пересчитывается лишь правая часть  $(f^{(k+1)}, \phi_i)$ .

Из теорем сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] и результатов раздела 4 следует, что при  $N \rightarrow \infty$  последовательность  $u_{n,N}^{(k)}$  сходится к  $u_n^{(k)}$ , а  $u_n^{(k)}$  при числах Рейнольдса, удовлетворяющих (5.27), сходится к  $u_n^*$ , причем функция  $u_n^*$  удовлетворяет интегральному тождеству (5.24) и имеет место оценка (5.25). Следуя Ладыженской, из последовательности  $\{u_n^*\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{u_{n_j}^*\}$ . Переходя к пределу при  $n_j \rightarrow \infty$  в интегральном тождестве (5.24) получим, что предельная функция  $u^*$  удовлетворяет тождеству (5.11) при любой  $v \in F$ , т.е. является обобщенным решением задачи (5.8) – (5.10), а  $\psi^* = u_0 + u^*$  – обобщенным решением задачи (5.2) – (5.4).

В случае расходимости последовательных приближений для нахождения приближенного решения в конечной области можно предложить подход,

основанный на использовании нелинейного метода Галеркина. Приближенное решение  $u_{n,N}$  задачи (5.8) – (5.10), рассматриваемой в конечной области  $\Omega_n$ , ищем в виде (5.28), где координатные функции выбираются как в п. 4.1. Коэффициенты  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$  найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  элементам проекционной последовательности (4.26). В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно  $c_{n,j}$ . Полученная система может быть решена методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор  $c_{n,j}$ , соответствующий решению задачи Стокса, или, при больших числах Рейнольдса, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

## 5.2 Численные результаты расчета нелинейной задачи обтекания тел вращения

### 5.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания сферы

Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , представленной на рис. 5.1, при  $R = 1$ ,  $U_\infty = 1$ ,  $M = 0,7; 1; 2; 5; 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и числах Рейнольдса  $Re = \frac{1}{\nu} = 5; 10; 15; 20; 25$ . Математическая модель задачи имеет вид (5.2) – (5.4). Решение задачи сводится к решению системы (5.29). Двойные интегралы в системе (5.29) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной. Для метода последовательных приближений вычисления прекращались при  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Было замечено, что при  $Re > 10$  ( $M > 5$ ) последовательные приближения расходятся. Поэтому, начиная с  $Re = 10$  и  $M = 5$  для получения приближенного решения использовался нелинейный метод Галеркина.

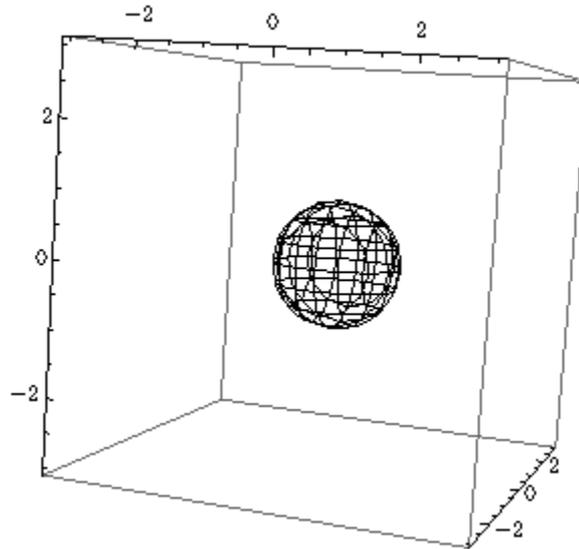


Рисунок 5.1 – Сфера

В таблицах Д.1, Д.2 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) на каждой из итераций при  $M = 5$ , соответствующие числам Рейнольдса  $Re = 5; 10$ .

Для  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$  на рис. 5.2 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения, на рис. Д.1 – поверхности уровня функции тока, на рис. Д.2 – векторные поля скоростей жидкости, на рис. 5.3 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

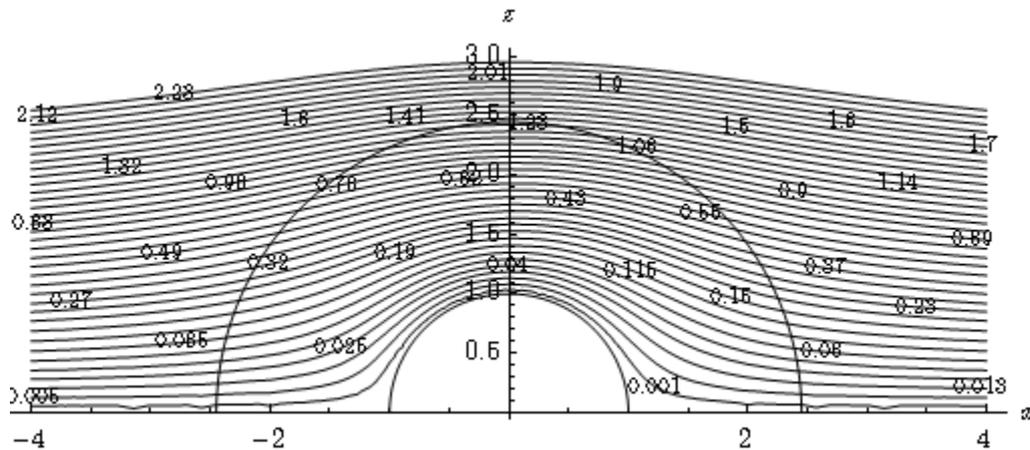
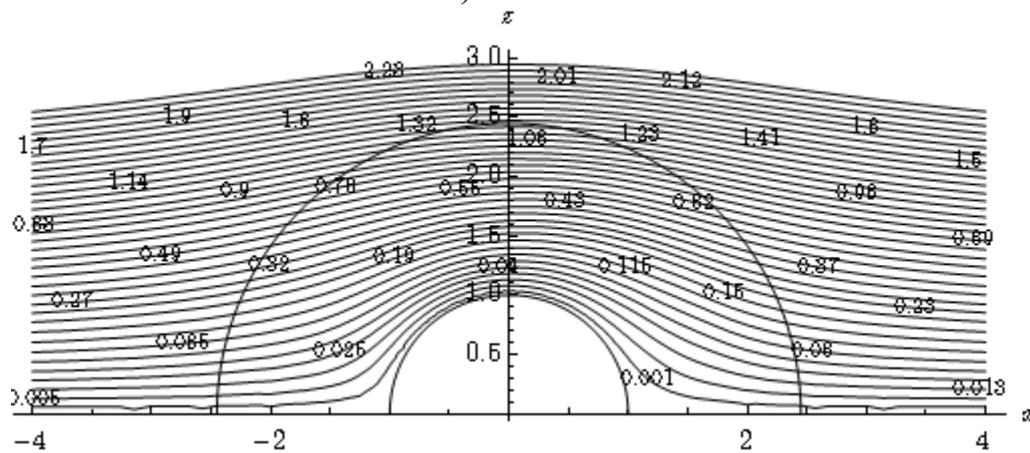
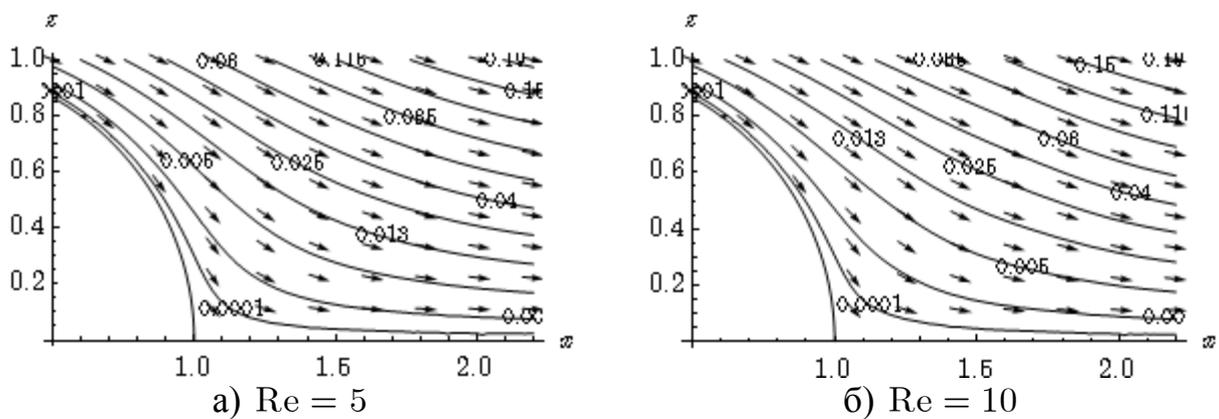
При  $M = 5$  и  $Re = 5$  итерационный процесс сходится за восемь итераций, при  $Re = 10$  – за двадцать пять. На рис. Д.3 показаны графики сходимости нормы разности двух последовательных приближений итерационного процесса  $\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}$  к нулю при  $M = 5$  и числах Рейнольдса  $Re = 5; 10$ .

При  $M = 10$  для чисел Рейнольдса  $Re = 15; 20; 25$  были проведены вычисления с помощью нелинейного метода Галеркина.

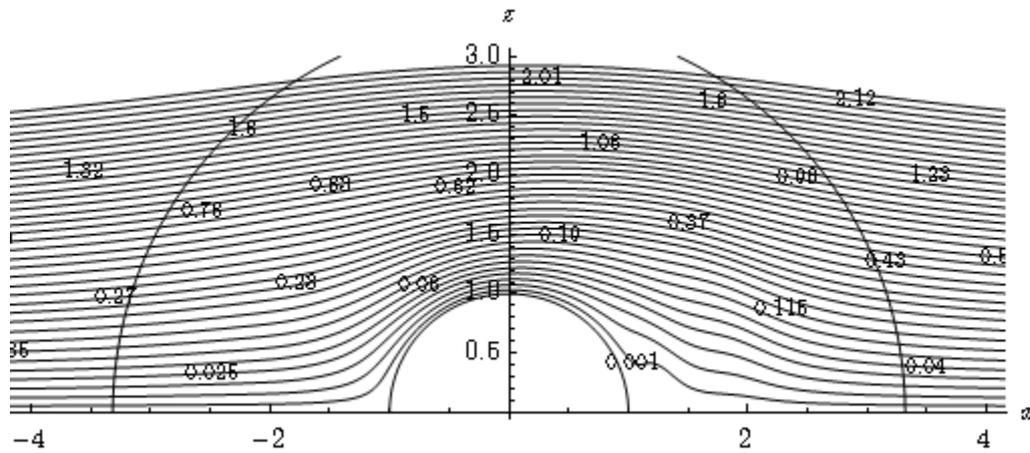
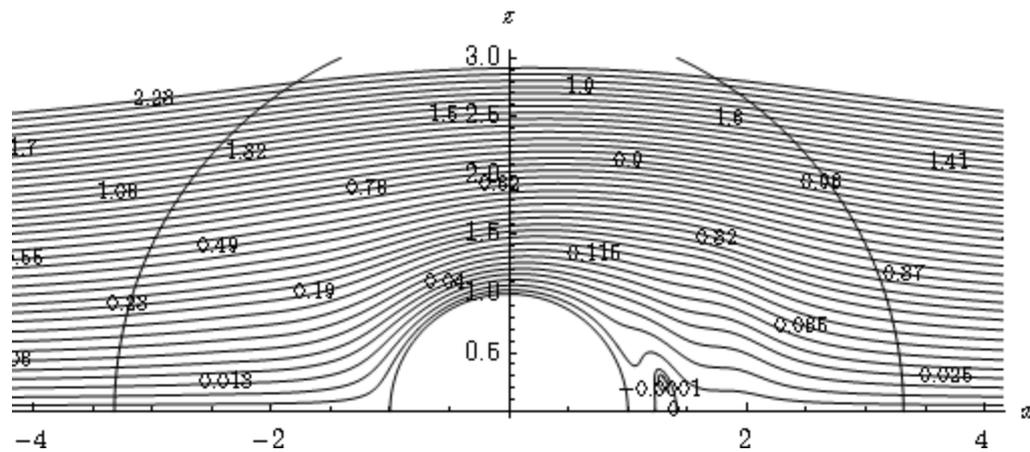
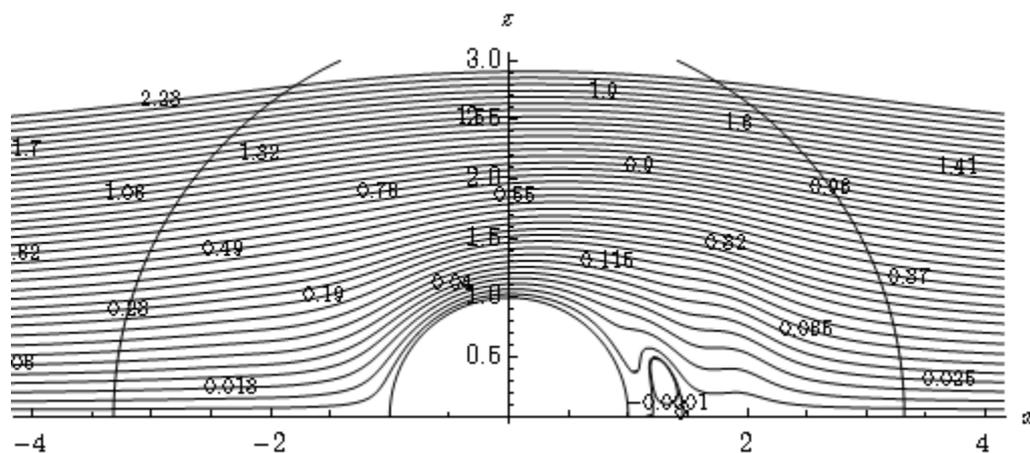
В таблице Д.3 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) при  $M = 10$ , соответствующие числам Рейнольдса  $Re = 15; 20; 25$ .

Для  $M = 10$  и  $Re = 15; 20; 25$  на рис. 5.4 представлены линии уровня

функции тока полученного приближенного решения, на рис. Д.4 – поверхности уровня функции тока, на рис. Д.5 – векторные поля скоростей жидкости, на рис. 5.5 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ Рисунок 5.2 – Линии уровня функции тока при  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$ а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ Рисунок 5.3 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$

При увеличении числа Рейнольдса до  $\approx 20 - 25$  за телом появляются вторичные вихри, увеличивается их размер и интенсивность, что совпадает с известными результатами физических экспериментов (см. стр. 22 [205], см. стр. 749 [207]).

а)  $Re = 15$ б)  $Re = 20$ в)  $Re = 25$ Рисунок 5.4 – Линии уровня функции тока при  $M = 10$  и  $Re = 15; 20; 25$

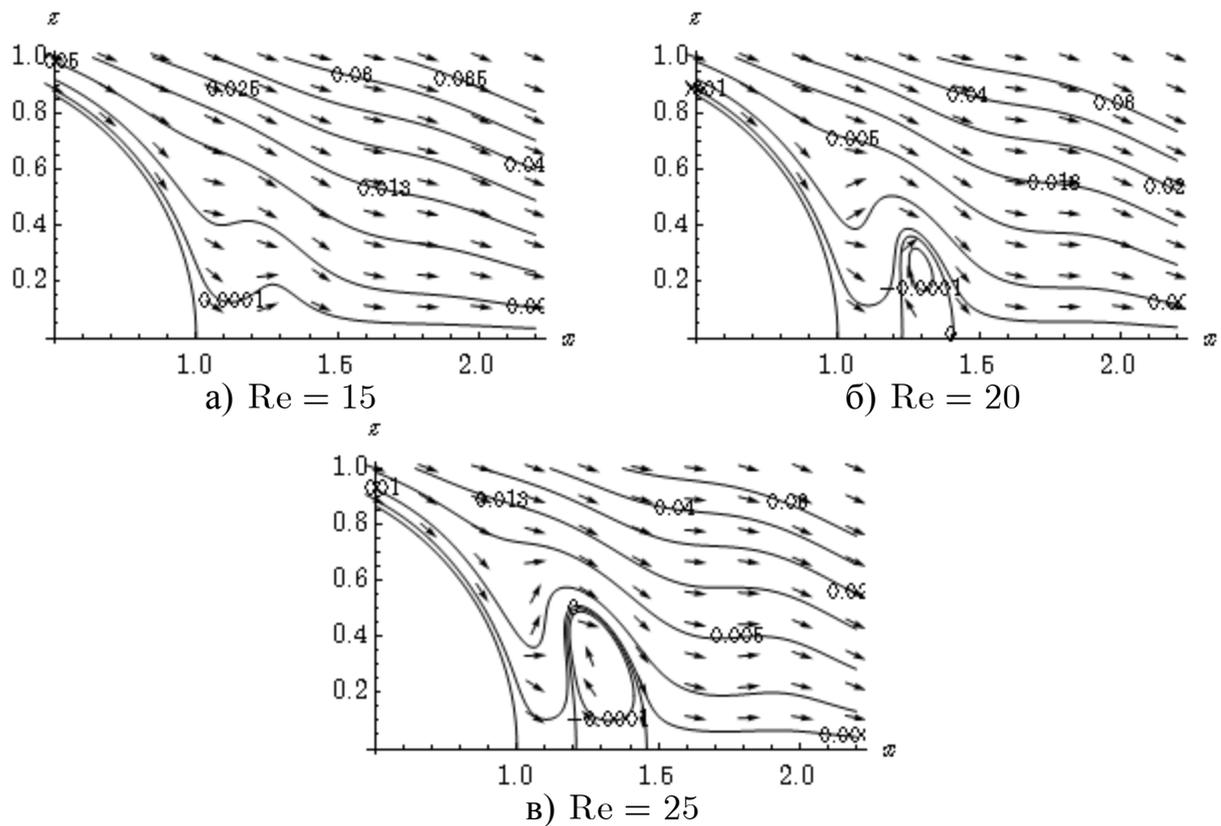


Рисунок 5.5 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $M = 10$  и  $Re = 15; 20; 25$

### 5.2.2 Моделирование процесса обтекания эллипсоида вращения

Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания эллипсоидов вращения  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  с различными полуосями, при  $U_\infty = 1$ ,

$M = 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 14$  и числах Рейнольдса  $Re = \frac{1}{\nu} = 10; 20; 30; 40; 50$ .

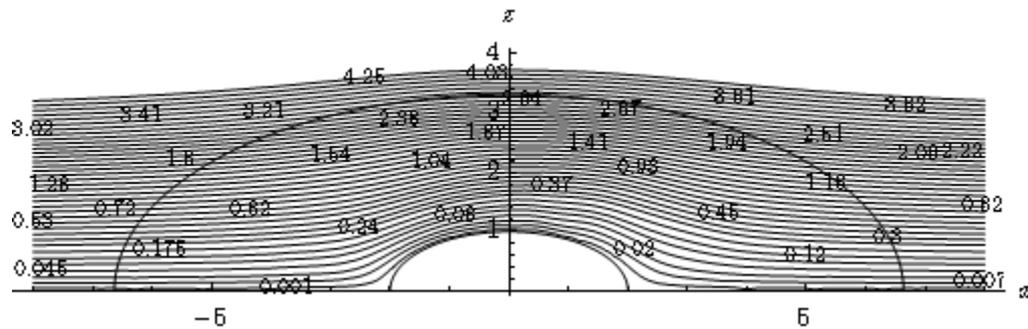
Математическая модель задачи имеет вид (5.2) – (5.4). Решение задачи сводится к решению системы (5.29). Двойные интегралы, входящие в систему (5.29), считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

Случай 1. Эллипсоид вращения с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1$ .

В таблице Д.4 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для чисел Рейнольдса  $Re = 10; 30; 50$ .

Для чисел Рейнольдса  $Re = 10; 30; 50$  на рис. 5.6 представлены линии

уровня функции тока, на рис. Д.6 – поверхности уровня функции тока, на рис. Д.7 – векторные поля скоростей, на рис. 5.7 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.



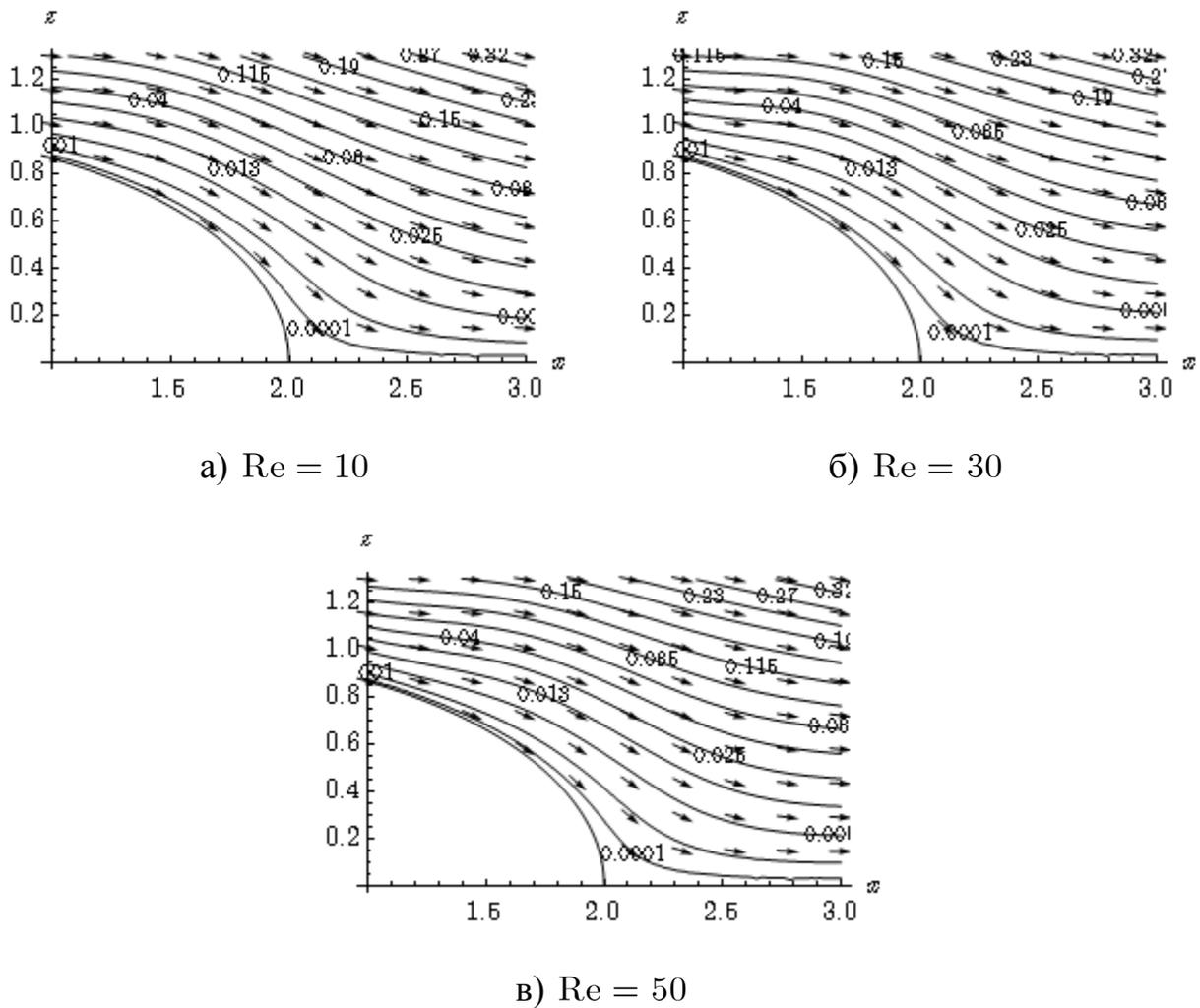


Рисунок 5.7 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $Re = 10; 30; 50$

Для чисел Рейнольдса  $Re = 10; 30; 50$  на рис. 5.8 представлены линии уровня функции тока, на рис. Д.8 – поверхности уровня функции тока, на рис. Д.9 – векторные поля скоростей, на рис. 5.9 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

При соотношении полуосей эллипсоида  $\chi = \frac{a}{b} \geq 2$  за телом могут не появляться вторичные вихри независимо от числа Рейнольдса [163], что и показал численный эксперимент для случая 1. При уменьшении соотношения полуосей за телом появляются вторичные вихри.



$Re = \frac{1}{\nu} = 5; 10; 15; 20$ . Математическая модель задачи имеет вид (5.2) – (5.4).

Решение задачи сводится к решению системы (5.29). Двойные интегралы, входящие в систему (5.29), считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

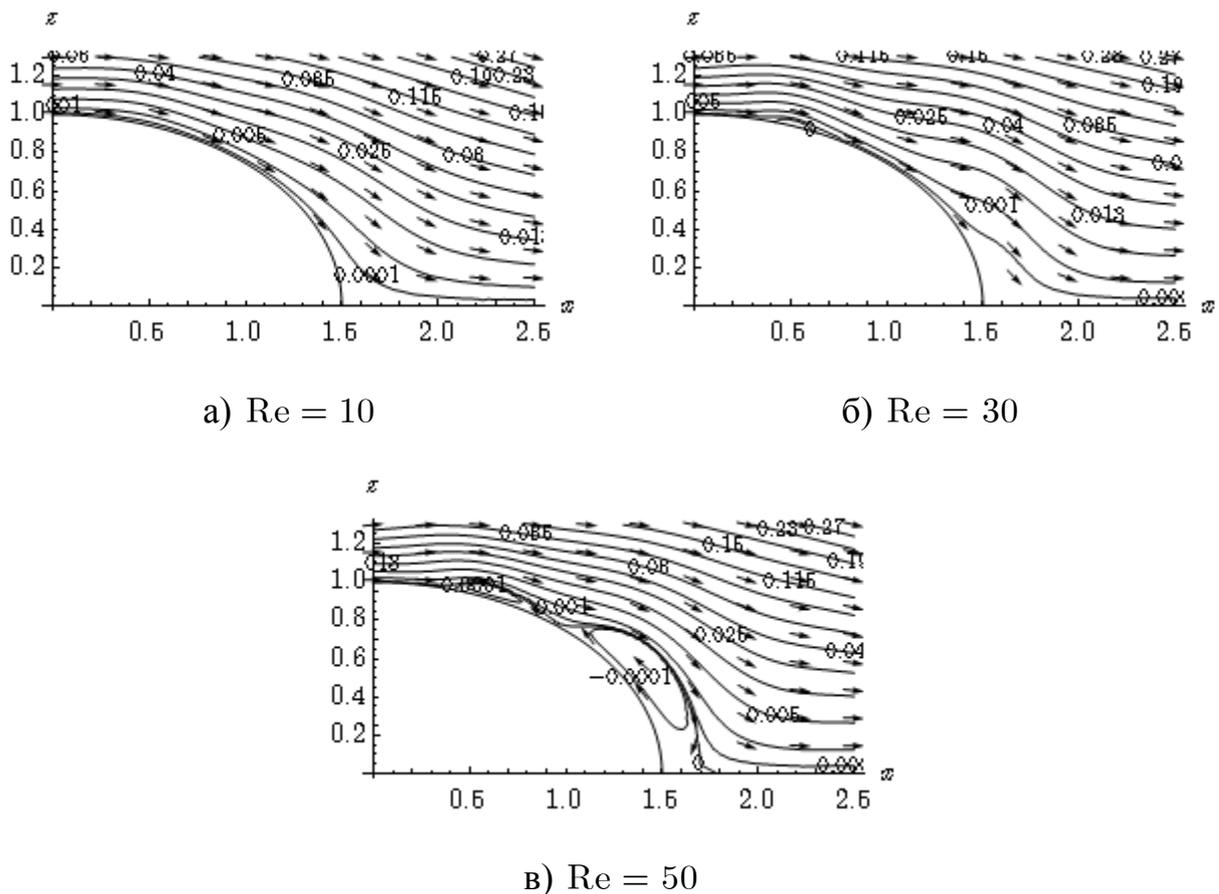


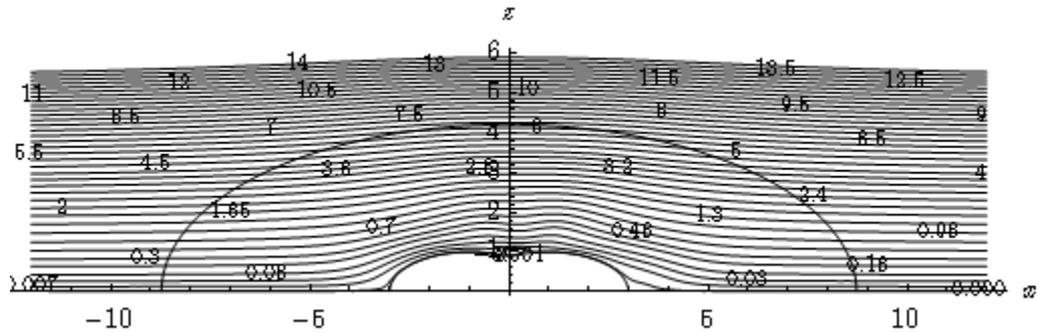
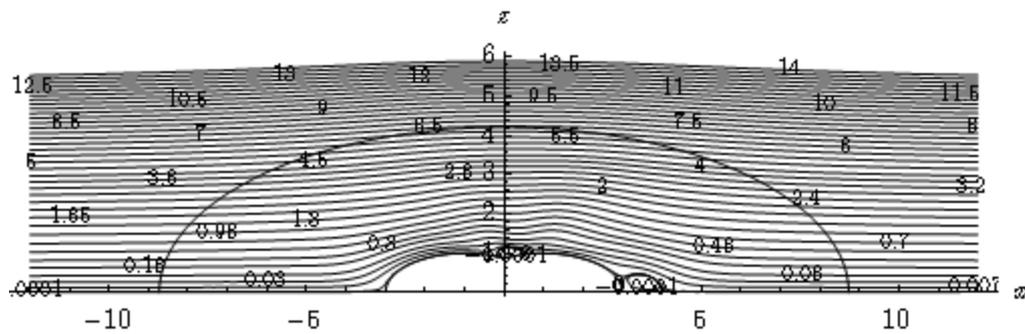
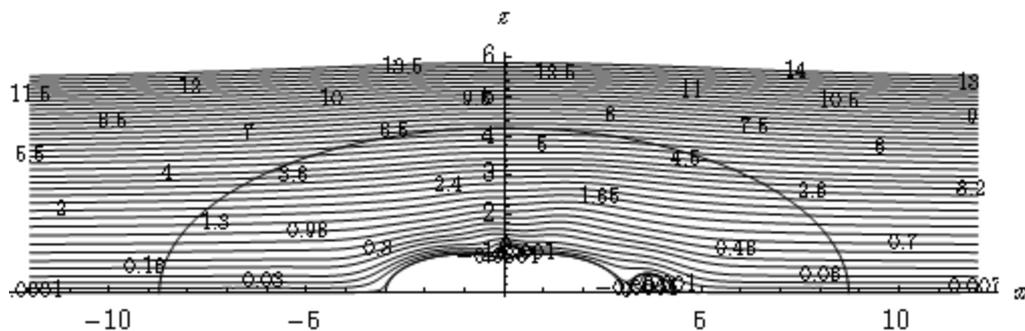
Рисунок 5.9 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $Re = 10; 30; 50$

В таблице Д.6 приведены полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для чисел Рейнольдса  $Re = 5; 10; 20$ .

Для чисел Рейнольдса  $Re = 5; 10; 20$  на рис. 5.10 представлены линии уровня функции тока, на рис. Д.10 – поверхности уровня функции тока, на рис. Д.11 – векторные поля скоростей, на рис. 5.11 – детализированные картины векторных полей скоростей за обтекаемым телом.

Для данной задачи неизвестны результаты из литературы. Вычисли-

тельный эксперимент показал, что при увеличении числа Рейнольдса до  $\approx 10$  появляются вторичные вихри за телом и в ложбинке на стыке эллипсоидов. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса растет размер и интенсивность этих вихрей.

а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 20$ Рисунок 5.10 – Линии уровня функции тока при  $Re = 5; 10; 20$

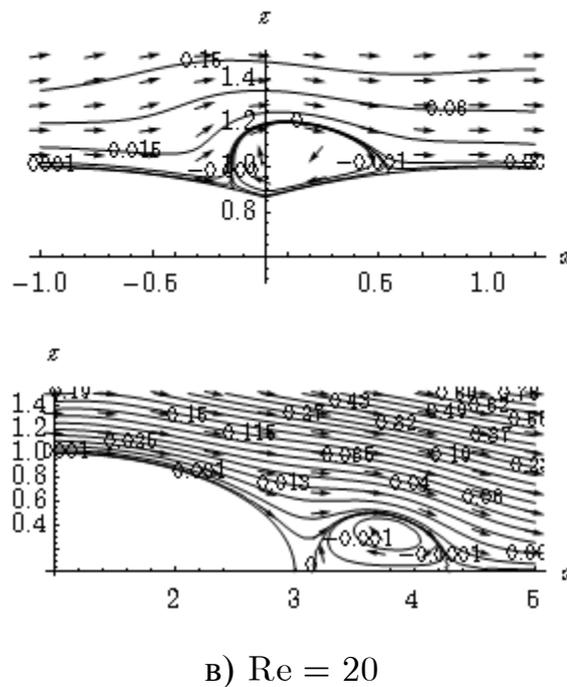
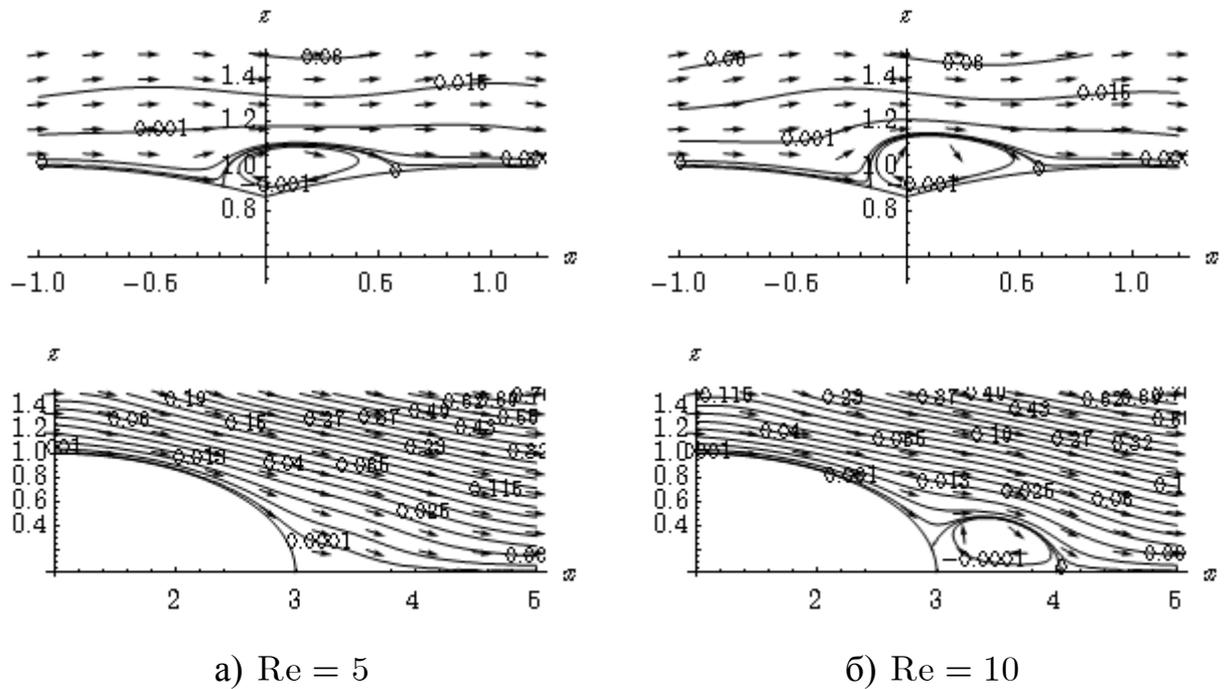


Рисунок 5.11 – Детализированные картины векторных полей скоростей при  $Re = 5; 10; 20$

## Выводы по разделу 5

1. Рассмотрена постановка нелинейной стационарной задачи обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью.

2. Разработан и обоснован численный метод решения нелинейной стационарной задачи обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью, основанный на совместном применении для аппроксимации неопределенных компонент структуры метода последовательных приближений и проекционного метода Бубнова-Галеркина: решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности линейных краевых задач, для решения которых на каждом шаге итерационного процесса разработан численный алгоритм на основании метода Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость построенного итерационного процесса при малых числах Рейнольдса, получены оценки скорости сходимости в энергетической норме.

3. В случае расходимости последовательных приближений для аппроксимации неопределенных компонент структуры решения нелинейной стационарной задачи обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью в сферической системе координат, предложено применение нелинейного метода Галеркина: решение нелинейной задачи сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

4. Проведены вычислительные эксперименты для некоторых тел вращения, таких как сфера, эллипсоиды вращения с разным соотношением полуосей, два соединенных эллипсоида. Экспериментально установлены условия применимости каждого из предложенных численных методов. Для каждого тела определены числа Рейнольдса, при которых за телом возникают вторичные вихри. При увеличении числа Рейнольдса увеличивается их размер и интенсивность. Полученные результаты хорошо согласуются с известными результатами физических экспериментов и результатами, полученными другими авторами, что говорит об эффективности разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в работах [82, 87, 95, 96, 103].

**РАЗДЕЛ 6**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ**  
**С УЧЕТОМ МАССОПЕРЕНОСА**

**6.1 Постановка задачи обтекания цилиндрических тел с учетом массопереноса и приближенный метод ее расчета**

Рассмотрим массообмен цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Относительно обтекаемого тела сделаем те же предположения, что и в разделе 2. Течение будем рассматривать в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Компоненты скорости жидкости в этом случае представляются в виде [8]

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6.1)$$

где  $\psi = \psi(r, \varphi)$  – функция тока.

При малых числах Пекле для описания процесса массопереноса используется приближение Озеена (уравнение 1) [6]:

$$\Delta c = \text{Pe} U_\infty \left( \cos \varphi \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ в } \Omega. \quad (6.2)$$

В общем случае процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации вида [6, 208]

$$\Delta c = \text{Pe}(\mathbf{V} \cdot \nabla)c \text{ в } \Omega. \quad (6.3)$$

В уравнениях (6.2) и (6.3)  $c = c(r, \varphi)$  – концентрация,  $\text{Pe}$  – число Пекле – безразмерный параметр, характеризующий меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к

диффузионному переносу,  $U_\infty$  – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности,  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)c = V_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi}$ .

Подставив (6.1) в (6.3), для концентрации  $c = c(r, \varphi)$  получим следующее уравнение (уравнение 2)

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ в } \Omega. \quad (6.4)$$

В прямоугольной системе координат функция тока  $\psi(x, y)$  вводится по формулам

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Уравнения (6.2) и (6.4) в этом случае имеют вид

$$\Delta c = \text{Pe} U_\infty \frac{\partial c}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (6.5)$$

$$\Delta c = \text{Pe} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \text{ в } \Omega. \quad (6.6)$$

где  $\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ .

Уравнения (6.2) и (6.4) следует дополнить краевым условием на  $\partial\Omega$  и условием на бесконечности [6]:

$$c|_{\partial\Omega} = c_0, \quad (6.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} c = 0, \quad (6.8)$$

где  $c_0$  – заданная постоянная концентрация на границе  $\partial\Omega$  обтекаемого тела.

Задача (6.2), (6.7), (6.8) от функции тока  $\psi(r, \varphi)$  не зависит, а решение

задачи (6.4), (6.7), (6.8) состоит из двух этапов:

- а) нахождение функции тока;
- б) решение задачи для концентрации.

Функцию тока  $\psi(r, \varphi)$  можно найти, например, как решение описанной в разделе 2 линейной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью либо как решение описанной в разделе 3 нелинейной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Пусть функция тока  $\psi(r, \varphi)$  известна. Подставив найденную функцию тока в уравнение (6.4), решим задачи (6.2), (6.7), (6.8) и (6.4), (6.7), (6.8) также методом  $R$ -функций [50]. Для этого с помощью конструктивных средств теории  $R$ -функций построим структуру решения краевой задачи, т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям и условию на бесконечности.

Пусть функция  $\omega(r, \varphi)$  удовлетворяет условиям

$$\text{а) } \omega(r, \varphi) > 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\text{б) } \omega(r, \varphi)|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$\text{в) } \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ;

$\omega_M = f_M(\omega)$ ,  $f_M(\omega)$  удовлетворяет условиям (2.8), имеет вид (2.9) и для функции  $\omega_M(r, \varphi)$  имеют место все утверждения леммы 2.1.

В задачах (6.5), (6.7), (6.8) и (6.6) – (6.8) сделаем замену

$$c = c_0(1 - \omega_M) + u_l,$$

где  $u_l$  – новые неизвестные функции;

$l = 1, 2$  – номер уравнения.

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция  $c_0(1 - \omega_M)$

удовлетворяет краевому условию (6.7) и условию на бесконечности (6.8).

Действительно, из леммы 2.1 имеем  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , поэтому  $c_0(1 - \omega_M)|_{\partial\Omega} = c_0$ , т.е. функция  $c_0(1 - \omega_M)$  удовлетворяет краевому условию (6.7). Проверим выполнение условия на бесконечности. Заметим, что согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \varphi) \geq M$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} c_0(1 - \omega_M) = \lim_{r \rightarrow +\infty} c_0 \cdot 0 = 0.$$

Кроме того, в области  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$  функция  $c_0(1 - \omega_M)$  точно удовлетворяет уравнениям (6.2), (6.4).

Тогда для  $u_l$ ,  $l = 1, 2$ , получим задачи

$$-\Delta u_l + B_l u_l = F_l \text{ в } \Omega, \quad (6.9)$$

$$u_l|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_l = 0, \quad (6.11)$$

где  $B_1 = \text{Pe} U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x}$ ;

$$B_2 = \text{Pe} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right);$$

$$F_1 = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \text{Pe} U_\infty \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial x};$$

$$F_2 = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \text{Pe} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial y} \right).$$

Заметим, что  $F_l \equiv 0$ ,  $l = 1, 2$ , в области  $\{\omega(x, y) \geq M\}$ .

Решение задач (6.9) – (6.11) будем искать в классе  $S$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до первого порядка включительно и квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $x$ ,  $y$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$

удовлетворяют условиям (6.10). Искомое обобщенное решение  $u$  должно принадлежать классу  $S$  и удовлетворять интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \nabla u \cdot \nabla v - \text{Pe} U_{\infty} \cdot u \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} c_0 \left( \nabla (1 - \omega_M) \cdot \nabla v - \text{Pe} U_{\infty} \cdot (1 - \omega_M) \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega \text{ для } l = 1, \\ & \int_{\Omega} \left( \nabla u \cdot \nabla v - \text{Pe} \cdot u \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} c_0 \left( \nabla (1 - \omega_M) \cdot \nabla v - \text{Pe} \cdot (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) d\Omega \text{ для } l = 2 \end{aligned}$$

для любой  $v \in F$ .

Следуя разделу 2 обобщенное решение  $u$  задач (6.9) – (6.11) найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнений (6.9), рассматриваемых в последовательности областей  $\{\Omega_n\}$ , которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  рассмотрим краевые задачи

$$-\Delta u_{n,l} + B_l u_{n,l} = F_l \text{ в } \Omega_n, \quad (6.12)$$

$$u_{n,l} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.13)$$

Функции  $u_{n,l}$ , следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], продолжим нулем вне  $\Omega_n$ .

Для решения задач применим метод Бубнова-Галеркина [197, 200].

Обозначим операторы:  $A_0 = -\Delta$ ,  $K_l = B_l$ ,  $l = 1, 2$ . Тогда оператор  $D = -\Delta + B_l$  краевых задач (6.12) – (6.13) запишется в виде

$$D = A_0 + K_l.$$

Оператор  $A_0$  будем рассматривать на множестве  $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$  функций  $u \in C^2(\Omega_n) \cap C(\bar{\Omega}_n)$ , удовлетворяющих краевым условиям (6.13) задач (6.12) – (6.13).

Как следует из результатов работы [197] оператор  $A_0$  является симметричным, положительно-определенным и  $(-\Delta u, v) = \int_{\Omega_n} \nabla u \nabla v \, d\Omega$  для

любых  $u, v \in D_0$ . На  $D_0$  введем скалярное произведение  $[u, v] = \int_{\Omega_n} \nabla u \nabla v \, d\Omega$ .

Пополнив  $D_0$  в метрике, порожденной этим скалярным произведением, получим энергетическое пространство  $H_0$  с нормой  $\|u\|^2 = \int_{\Omega_n} (\nabla u)^2 \, d\Omega$ .

Выберем координатную систему  $\{\phi_k\}$ , подчинив ее следующим условиям:

- а)  $\phi_k \in H_0$  для любого  $k$ ;
- б) элементы  $\phi_1, \dots, \phi_N$  – линейно независимы при любом  $N$ ;
- в) координатная система  $\{\phi_k\}$  полна в  $H_0$ .

Приближенное решение задач (6.12) – (6.13) при каждом  $n = 1, 2, \dots$  согласно методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде:

$$u_{n,l,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,l,j} \phi_j, \quad (6.14)$$

где  $c_{n,l,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,l,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (K_l \phi_j, \phi_i)\} = (F_l, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad l = 1, 2, \quad (6.15)$$

$$\text{где } (F_l, \phi_i) = - \int_{\Omega_n} c_0 \left( \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla \phi_i - \text{Re} U_\infty \cdot (1 - \omega_M) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) d\Omega;$$

$$(F_2, \phi_i) = - \int_{\Omega_n} c_0 \left( \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla \phi_i - \text{Pe} \cdot (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right) d\Omega.$$

Согласно достаточному признаку сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] метод будет сходиться, если оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ . В [197] было доказано, что оператор  $A_0$  имеет дискретный спектр, следовательно, по теореме 5 [197] оператор  $A_0^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_2(\Omega_n)$ . Из результатов статьи С.Г. Михлина [201] следует, что оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ .

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  галеркинские приближения сходятся при каждом  $n$  к обобщенному решению задач (6.12) – (6.13), которое определяется интегральным тождеством

$$\int_{\Omega_n} \left( \nabla u_{n,1} \cdot \nabla v - \text{Pe} U_\infty \cdot u_{n,1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = \quad (6.16)$$

$$= - \int_{\Omega_n} c_0 \left( \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla v - \text{Pe} U_\infty \cdot (1 - \omega_M) \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega \text{ для } l = 1,$$

$$\int_{\Omega_n} \left( \nabla u_{n,2} \cdot \nabla v - \text{Pe} \cdot u_{n,2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) d\Omega = \quad (6.17)$$

$$= - \int_{\Omega_n} c_0 \left( \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla v - \text{Pe} \cdot (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) d\Omega \text{ для } l = 2.$$

Оценим решение в норме  $|\cdot|$ . Умножим (6.12) в  $L_2(\Omega_n)$  на  $v$  из  $F$ , получим

$$(-\Delta u_{n,l}, v)_{L_2(\Omega_n)} + (B_l u_{n,l}, v)_{L_2(\Omega_n)} = (F_l, v)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (6.18)$$

Аналогично тому, как в разделе 2 было оценено скалярное произведение  $\left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)}$ , оценим  $(B_1 u_{n,1}, u_{n,1})_{L_2(\Omega_n)}$ . Применяя формулу

Остроградского-Гаусса и учитывая краевые условия, получим, что

$$(B_1 u_{n,1}, u_{n,1})_{L_2(\Omega_n)} = 0.$$

Преобразуем  $(B_2 u_{n,2}, v)_{L_2(\Omega_n)}$ :

$$(B_2 u_{n,2}, v)_{L_2(\Omega_n)} = \left( \text{Re} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u_{n,2}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_{n,2}}{\partial y} \right), v \right)_{L_2(\Omega_n)} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad} u_{n,2}, v)_{L_2(\Omega_n)},$$

$$\text{где } \mathbf{v} = \left( \text{Re} \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\text{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Учитывая связь вектора скорости и функции тока, получаем, что из уравнения неразрывности следует, что  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} (B_2 u_{n,2}, v)_{L_2(\Omega_n)} &= \int_{\Omega_n} \mathbf{v} \cdot \text{grad} u_{n,2} \cdot v \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_n} (\mathbf{v} \cdot \text{grad} u_{n,2} + u_{n,2} \cdot \text{div} \mathbf{v}) \cdot v \, d\Omega = \quad (6.19) \\ &= \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot v \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot v \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot v \, d\Omega. \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое в (6.19), используя формулу интегрирования по частям и тот факт, что  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot v \, d\Omega &= - \int_{\Omega_n} \mathbf{v} u_{n,2} \cdot \text{grad} v \, d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega_n} (\mathbf{v} \cdot \text{grad} v + v \cdot \text{div} \mathbf{v}) u_{n,2} \, d\Omega = - \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} \cdot v) \cdot u_{n,2} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Тогда (6.19) примет вид

$$(B_2 u_{n,2}, v)_{L_2(\Omega_n)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot v \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{v} \cdot v) \cdot u_{n,2} \, d\Omega. \quad (6.20)$$

Если в (6.20) вместо  $v$  подставить решение  $u_{n,2}$ , то

$$(B_2 u_{n,2}, u_{n,2})_{L_2(\Omega_n)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot u_{n,2} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\mathbf{v} u_{n,2}) \cdot u_{n,2} d\Omega = 0.$$

Тогда, если в (6.18) вместо  $v$  подставим решение  $u_{n,l}$ , получим

$$\|u_{n,l}\|^2 = (F_l, u_{n,l})_{L_2(\Omega_n)}. \quad (6.21)$$

Применив неравенство Коши-Буняковского [11, 197] и учитывая, что

$$\|u\| \geq \gamma \|u\|_{L_2(\Omega_n)},$$

получим оценку

$$|(F_l, u_{n,l})_{L_2(\Omega_n)}| \leq \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_{n,l}\|_{L_2(\Omega_n)} \leq \frac{1}{\gamma} \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)} \cdot \|u_{n,l}\|.$$

Из неравенства Юнга (2.27) при  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $a = \|u_{n,l}\|$ ,  $b = \frac{1}{\gamma} \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)}$ ,

получим, что

$$|(F_l, u_{n,l})_{L_2(\Omega_n)}| \leq \frac{1}{2} \|u_{n,l}\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)}^2.$$

Подставляя последнюю оценку в (6.21), получим

$$\|u_{n,l}\| \leq \frac{1}{\gamma} \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)}. \quad (6.22)$$

Для применения метода Бубнова-Галеркина необходимо построить координатную последовательность, для чего воспользуемся полной системой частных решений уравнения Лапласа [202] и методом  $R$ -функций [50].

Общее решение уравнения Лапласа в полярной системе координат

имеет вид [202]:

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n \cos n\varphi + \tilde{A}_n r^n \sin n\varphi + B_n r^{-n} \cos n\varphi + \tilde{B}_n r^{-n} \sin n\varphi \right), \quad (6.23)$$

где  $A_n, \tilde{A}_n, B_n, \tilde{B}_n$  – произвольные постоянные.

Из (6.23) видно, что для уравнения  $\Delta u = 0$  полная система частных решений относительно внешности цилиндра конечного радиуса имеет вид:

$$\{\varphi_k(r, \varphi)\} = \left\{ r^{-n} \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array}, n = 1, 2, \dots \right\}, \quad (6.24)$$

а полная система частных решений относительно области  $\{\omega(r, \varphi) < M\}$  имеет вид

$$\{\tau_j(r, \varphi)\} = \left\{ 1, r^k \begin{array}{l} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{array}, k = 1, 2, \dots \right\}. \quad (6.25)$$

**Теорема 6.1.** При любом выборе достаточно гладких функций  $\Phi_1, \Phi_2$  и требовании, что  $\Phi_1 \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  функция вида

$$u = \omega_M \Phi_1 + \omega_M (1 - \omega_M) \Phi_2 \quad (6.26)$$

точно удовлетворяет краевым условиям (6.10) и (6.11)

**Доказательство.** Тот факт, что функция (6.26) удовлетворяет краевому условию (6.10) следует из леммы 2.1: т.к.  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ , поэтому  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

Проверим выполнение условия на бесконечности. Заметим, что согласно лемме 2.1  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \varphi) \geq M$ . Следовательно, в точках области  $\omega(r, \varphi) \geq M$  функция  $u$  вида (6.26) приобретает вид  $u = \Phi_1$ . Тогда

$\lim_{r \rightarrow +\infty} u = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 = 0$ , так как  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_1 = 0$  по предположению теоремы.

Таким образом, функция  $u(r, \varphi)$  из (6.26) точно удовлетворяет краевым условиям (6.10), (6.11), т.е. является структурой решения задач (6.9) - (6.11).

Замечание. Из теоремы 6.1 следует, что решение задач (6.5), (6.7), (6.8) и (6.6) – (6.8) может быть представлено в виде

$$c = c_0(1 - \omega_M) + \omega_M \Phi_1 + \omega_M(1 - \omega_M) \Phi_2. \quad (6.27)$$

Аппроксимации функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в области  $\Omega_n$  будем искать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j,$$

где  $\{\varphi_k\}$  имеет вид (6.24);

$\{\tau_j\}$  имеет вид (6.25);

$\alpha_k$  и  $\beta_j$  – неизвестные (пока) коэффициенты.

Таким образом, приближенное решение задачи (6.9) – (6.11) ищем в виде

$$u_{n,l,N} = \omega_M \cdot \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k + \omega_M(1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\left\{ \phi_i(r, \varphi) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_M(r, \varphi) r^{-k} \cos k\varphi \\ \omega_M(r, \varphi) r^{-k} \sin k\varphi, \quad \omega_M(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)), \\ \omega_M(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) r^k \cos k\varphi \\ \omega_M(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) r^k \sin k\varphi, \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right\}. \quad (6.28)$$

Значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) в соответствии с методом Бубнова-Галеркина найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  ( $N = m_1 + m_2$ ) элементам последовательности (6.28), которое приводит к системе линейных

алгебраических уравнений вида (6.15).

**Теорема 6.2.** При каждом  $n$  галеркинские приближения  $u_{n,l,N}$  вида (6.14) при  $N \rightarrow \infty$  сходятся в энергетической норме к обобщенному решению задач (6.12) – (6.13), при этом имеет место оценка (6.22).

Из работы Ладыженской [11] вытекает, что последовательности  $\{u_{n,l}\}$  являются слабо компактными в  $H_0$ , значит, из них можно выделить сходящиеся к некоторым функциям  $u_l^* \in H_0$  подпоследовательности. Переходя по этим подпоследовательностям к пределу при  $M_n \rightarrow \infty$  в интегральных тождествах (6.16) и (6.17), получим, что  $u_l^*$  являются обобщенными решениями задач (6.9) – (6.11). Кроме того, из результатов работы [11] следует единственность решения линейных задач (6.9) – (6.11), а значит, все последовательности  $\{u_{n,l}\}$  сходятся к  $u_l^*$ .

**Теорема 6.3.** Последовательности функций  $\{u_{n,l}\}$ ,  $l = 1, 2$ , при  $M_n \rightarrow \infty$  сходятся в энергетической норме к единственным обобщенным решениям задач (6.9) – (6.11).

Замечание. Функции  $c_{n,l} = c_0(1 - \omega_M) + u_{n,l}$  сходятся к обобщенным решениям задач (6.2), (6.7), (6.8) и (6.4), (6.7), (6.8). Кроме того, заметим, что при любом  $n$  функции  $c_{n,l}$  определены и вне  $\Omega_n$ , т.е. в области  $\Omega \setminus \Omega_n$ . При этом, поскольку  $\omega_M(r, \varphi) \equiv 1$  в области  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$ , то

$$c_{n,l} = \Phi_1 = \sum_k \alpha_k \cdot \varphi_k,$$

а значит,

$$\Delta c_{n,l} - \text{Pe} U_\infty \left( \cos \varphi \frac{\partial c_{n,l}}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial c_{n,l}}{\partial \varphi} \right) = 0$$

и

$$\Delta c_{n,l} - \frac{\text{Pe}}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c_{n,l}}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c_{n,l}}{\partial \varphi} \right) = 0$$

в  $\Omega \setminus \Omega_n$  и  $\lim_{r \rightarrow +\infty} c_{n,l} = c_0$ . Таким образом, при любом  $n$  функции  $c_{n,l}$  в области  $\Omega \setminus \Omega_n$  точно удовлетворяют как дифференциальным уравнениям задач (6.2), (6.4), так и условию на бесконечности (6.8).

## 6.2 Численные результаты расчета задачи обтекания цилиндрических тел с учетом массопереноса

### 6.2.1 Результаты моделирования процесса обтекания кругового цилиндра с учетом массопереноса

Рассмотрим краевые задачи (6.2), (6.7), (6.8) и (6.4), (6.7), (6.8), где обтекаемое тело – круговой цилиндр  $x^2 + y^2 = R^2$ , представленный на рис. 2.2, при  $R = 1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $M = 5; 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 11$  и разных числах Рейнольдса и Пекле. Решение задач сводится к решению системы (6.15). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие синусы, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым, равны нулю. Двойные интегралы в системе (6.15) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

При числе Пекле  $Pe = 0,01$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0,01$  при  $M = 5$  представлены на рис. 6.1.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0,01$  при  $M = 5$  приведены в таблице Е.1.

Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 5; 10; 15$  представлены на рис. 6.2, для  $Pe = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 5; 10; 15$  – на рис. 6.3, для  $Pe = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 5; 10; 15$  – на рис. 6.4.

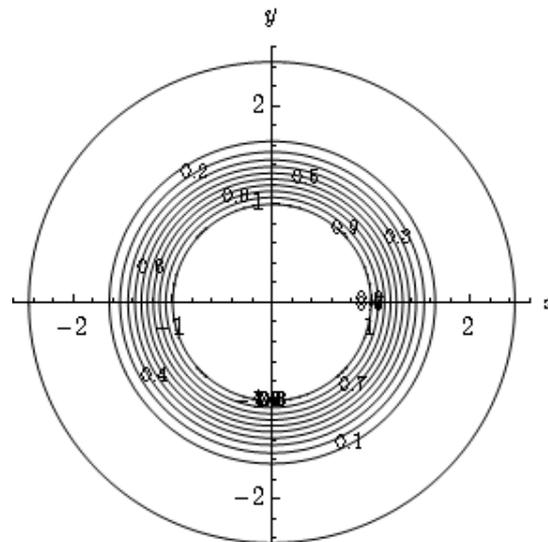


Рисунок 6.1 – Линии концентрации при  $M = 5$  и  $Re = 0,01$

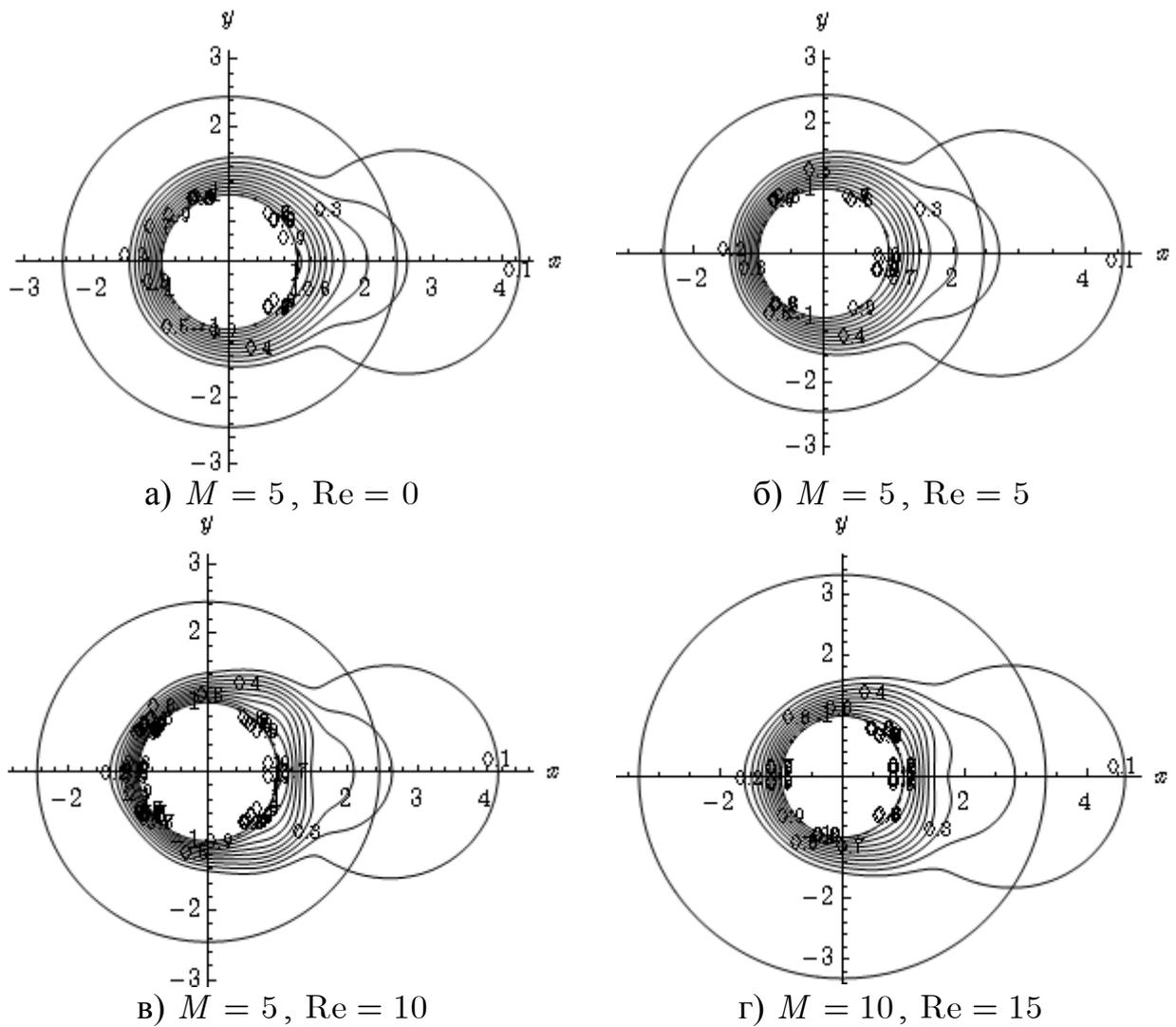


Рисунок 6.2 – Линии концентрации

для  $Re = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Re = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$  приведены в таблице Е.2, для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$  – в таблице Е.3, для  $Re = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$  – в таблице Е.4.

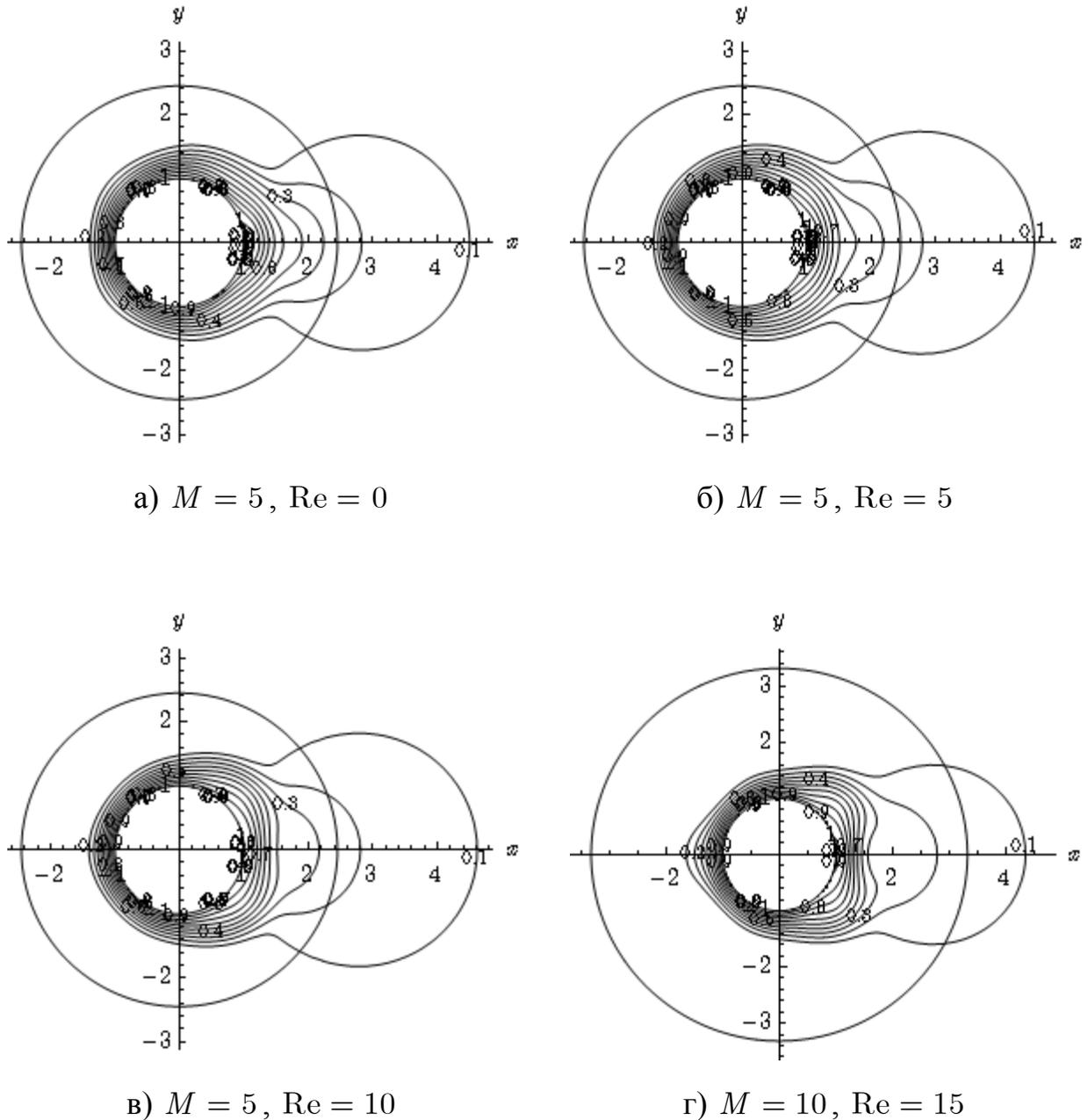


Рисунок 6.3 – Линии концентрации  
для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$

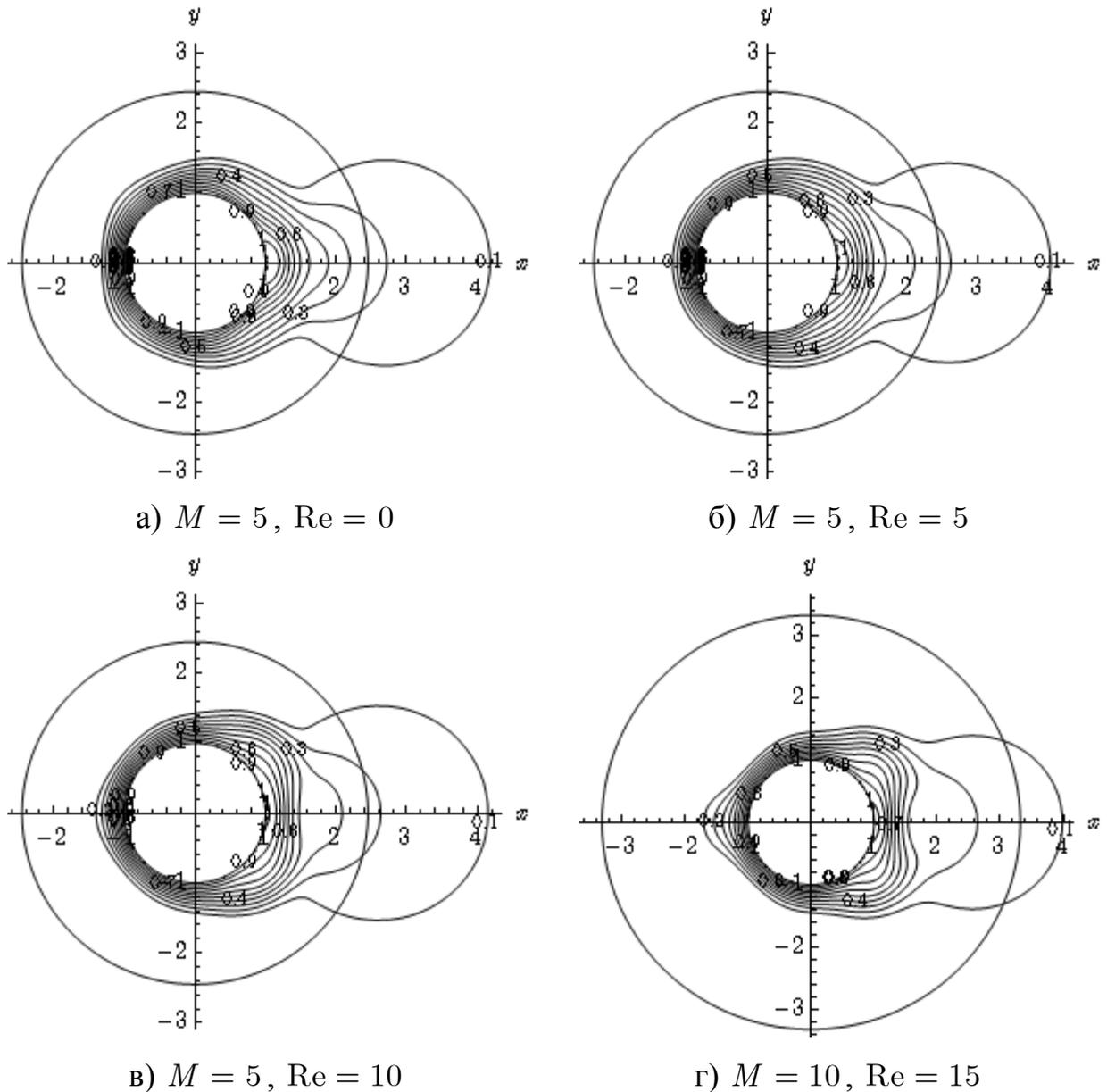


Рисунок 6.4 – Линии концентрации  
для  $Re = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 15$

### 6.2.2 Моделирование процесса обтекания эллиптического цилиндра с учетом массопереноса

Рассмотрим краевые задачи (6.2), (6.7), (6.8) и (6.4), (6.7), (6.8), где обтекаемое тело – эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , представленный на рис. 2.5, при  $a = 2, b = 1, c_0 = 1, M = 5; 10, m_1 = 10, m_2 = 11$  и разных

числах Рейнольдса и Пекле. Решение задач сводится к решению системы (6.15). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие синусы, в выражениях для  $\varphi_k$ ,  $\tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым, равны нулю. Двойные интегралы в системе (6.15) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

При числе Пекле  $Pe = 0,01$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0,01$  при  $M = 5$  представлены на рис. 6.5.

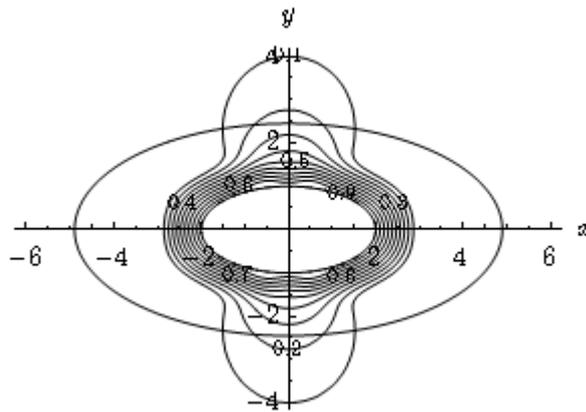


Рисунок 6.5 – Линии концентрации при  $M = 5$  и  $Pe = 0,01$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0,01$  при  $M = 5$  приведены в таблице Е.5.

Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  представлены на рис. 6.6, для  $Pe = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  – на рис. 6.7, для  $Pe = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  – на рис. 6.8.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  приведены в таблице Е.6, для  $Pe = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  – в таблице Е.7, для  $Pe = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$  – в таблице Е.8.

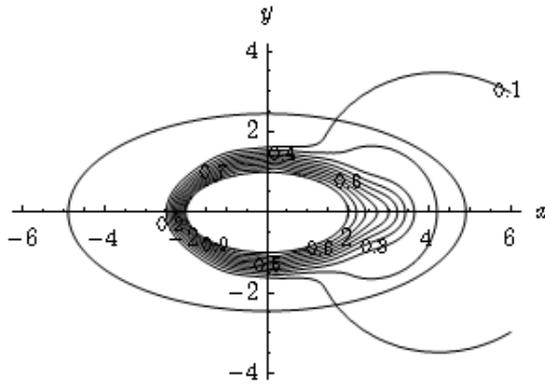
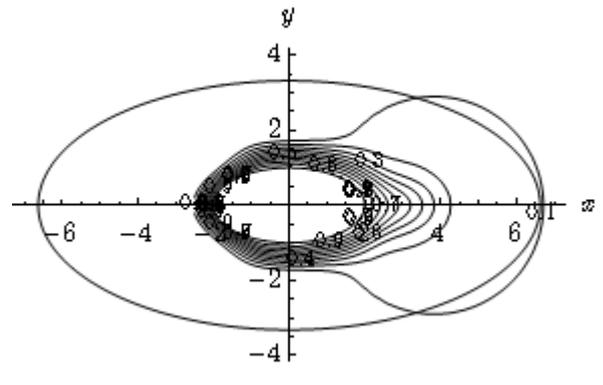
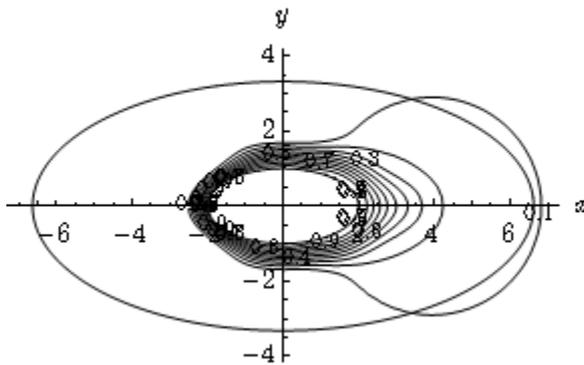
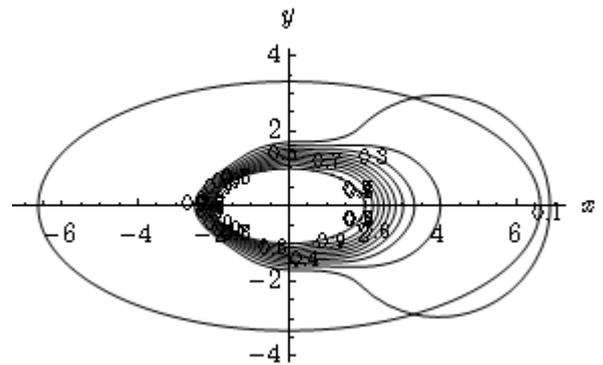
а)  $M = 5$ ,  $Re = 0$ б)  $M = 10$ ,  $Re = 5$ в)  $M = 10$ ,  $Re = 15$ г)  $M = 10$ ,  $Re = 30$ 

Рисунок 6.6 – Линии концентрации  
для  $Re = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$

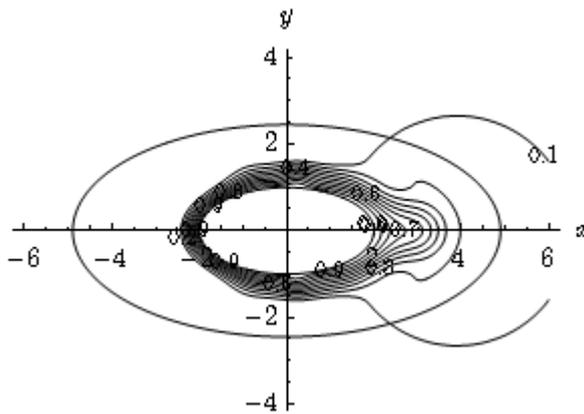
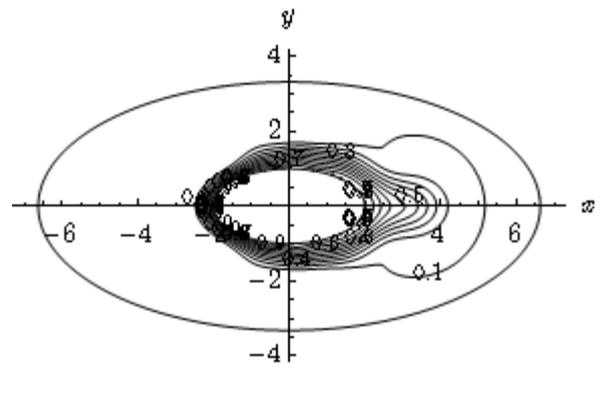
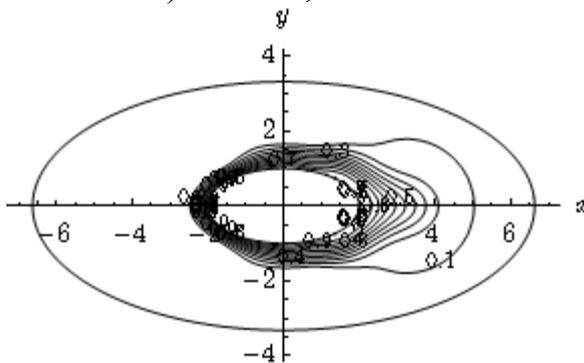
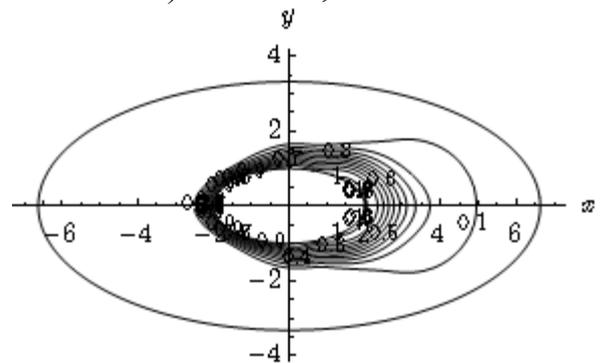
а)  $M = 5$ ,  $Re = 0$ б)  $M = 10$ ,  $Re = 5$ в)  $M = 10$ ,  $Re = 15$ г)  $M = 10$ ,  $Re = 30$ 

Рисунок 6.7 – Линии концентрации  
для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$

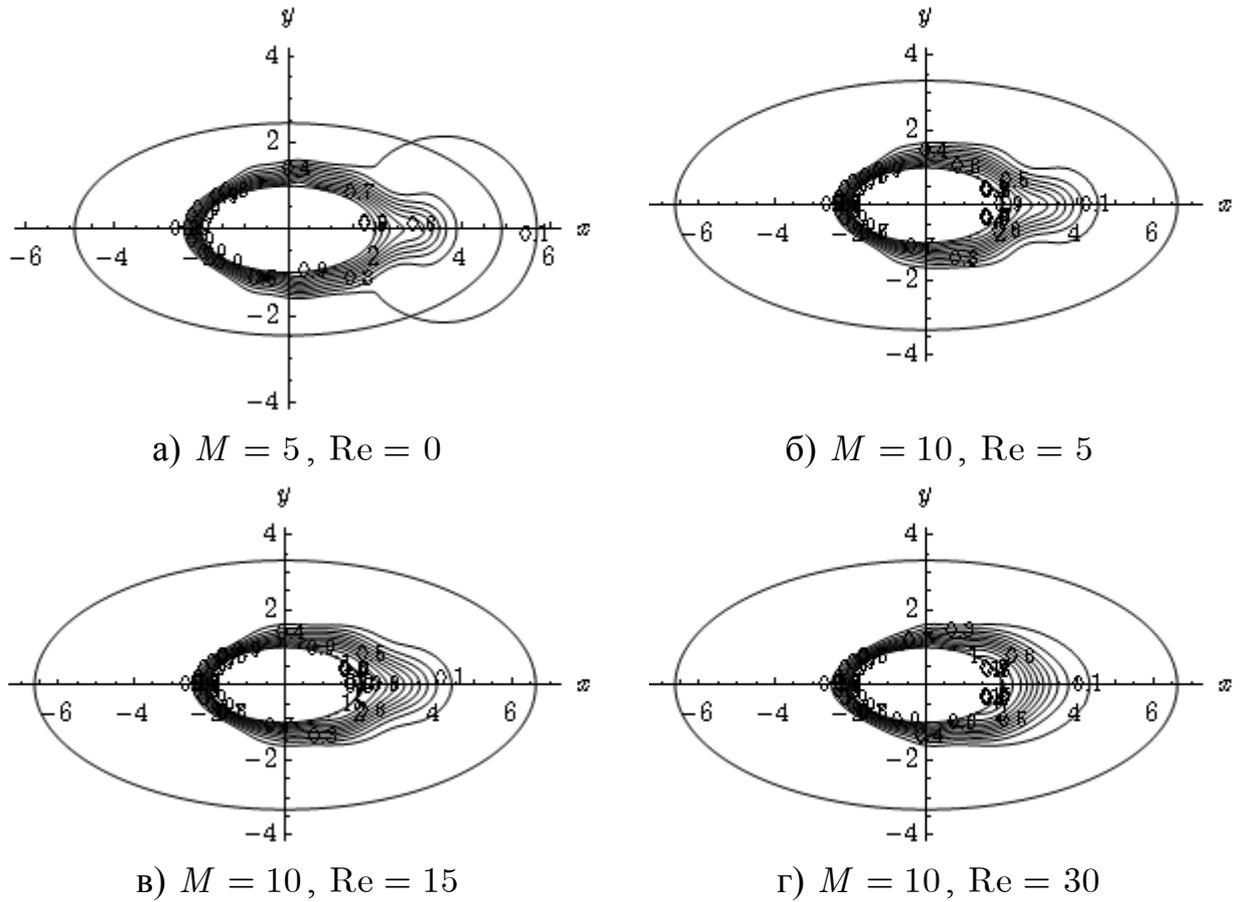


Рисунок 6.8 – Линии концентрации  
для  $\text{Re} = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 15; 30$

6.2.3 Результаты моделирования обтекания цилиндрического тела, сечением которого является кривая Ламе, с учетом массопереноса

Рассмотрим краевые задачи (6.2), (6.7), (6.8) и (6.4), (6.7), (6.8), где обтекаемое тело – цилиндрическое тело, представленное на рис. 2.8, уравнение образующей которого имеет вид  $x^8 + y^8 = 1$  (кривая Ламе при  $a = b = 1, n = 8$ ), при  $c_0 = 1, M = 10, m_1 = 10, m_2 = 11$  и разных числах Рейнольдса и Пекле. Решение задач сводится к решению системы (6.15). Вследствие симметрии задачи слагаемые, содержащие синусы, в выражениях для  $\varphi_k, \tau_j$  и  $f_i$  отсутствуют и, кроме того, из тех же соображений все  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), соответствующие этим слагаемым,

равны нулю. Двойные интегралы в системе (6.15) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

При числе Пекле  $Pe = 0,01$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0,01$  при  $M = 10$  представлены на рис. 6.9.

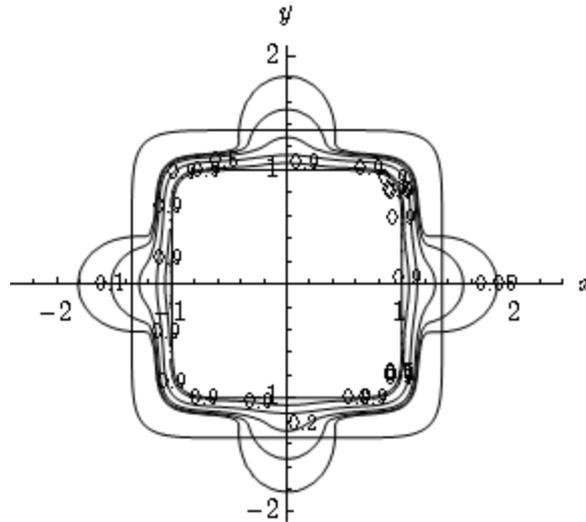
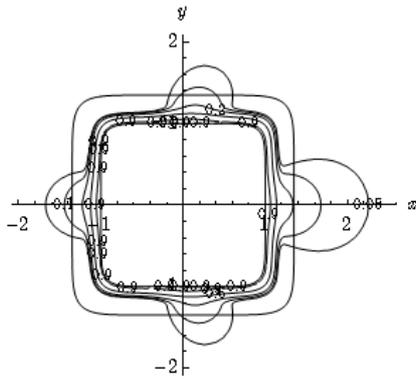
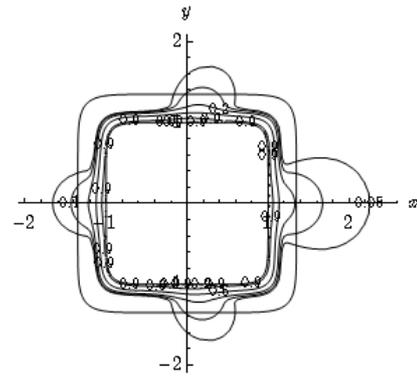
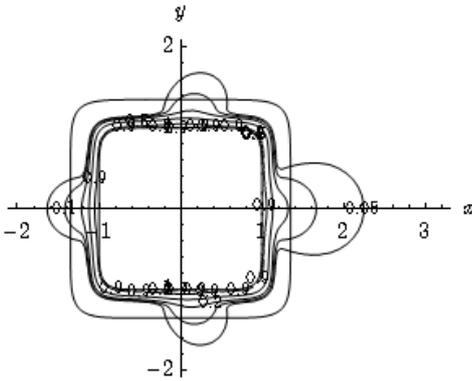
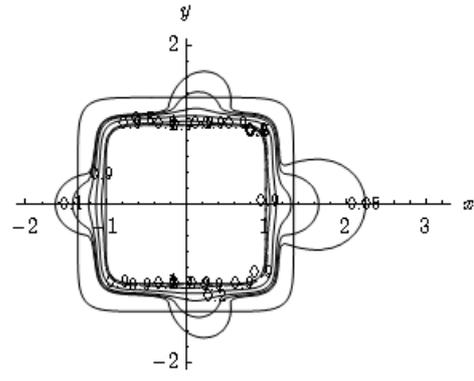
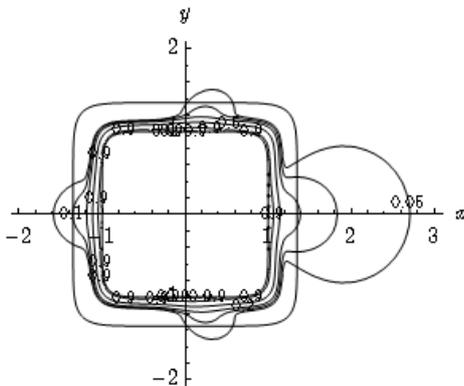
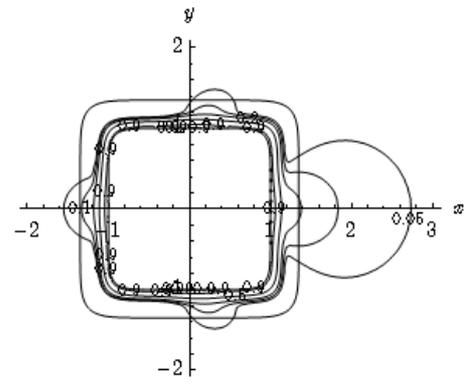
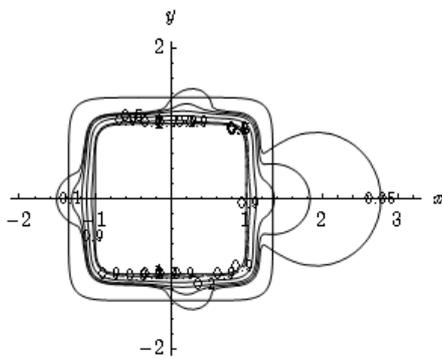
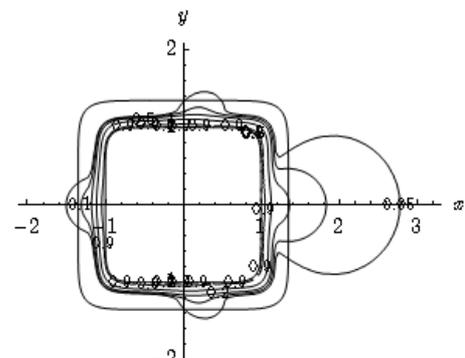


Рисунок 6.9 – Линии концентрации при  $M = 10$  и  $Pe = 0,01$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0,01$  при  $M = 10$  приведены в таблице Е.9.

Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  представлены на рис. 6.10, для  $Pe = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  – на рис. 6.11, для  $Pe = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  – на рис. 6.12.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  приведены в таблице Е.10, для  $Pe = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  – в таблице Е.11, для  $Pe = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$  – в таблице Е.12.

а)  $M = 10, \text{Re} = 0$ б)  $M = 10, \text{Re} = 5$ в)  $M = 10, \text{Re} = 15$ г)  $M = 10, \text{Re} = 20$ Рисунок 6.10 – Линии концентрации  
для  $\text{Re} = 10$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 15; 20$ а)  $M = 10, \text{Re} = 0$ б)  $M = 10, \text{Re} = 5$ в)  $M = 10, \text{Re} = 15$ г)  $M = 10, \text{Re} = 20$ Рисунок 6.11 – Линии концентрации  
для  $\text{Re} = 20$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 15; 20$

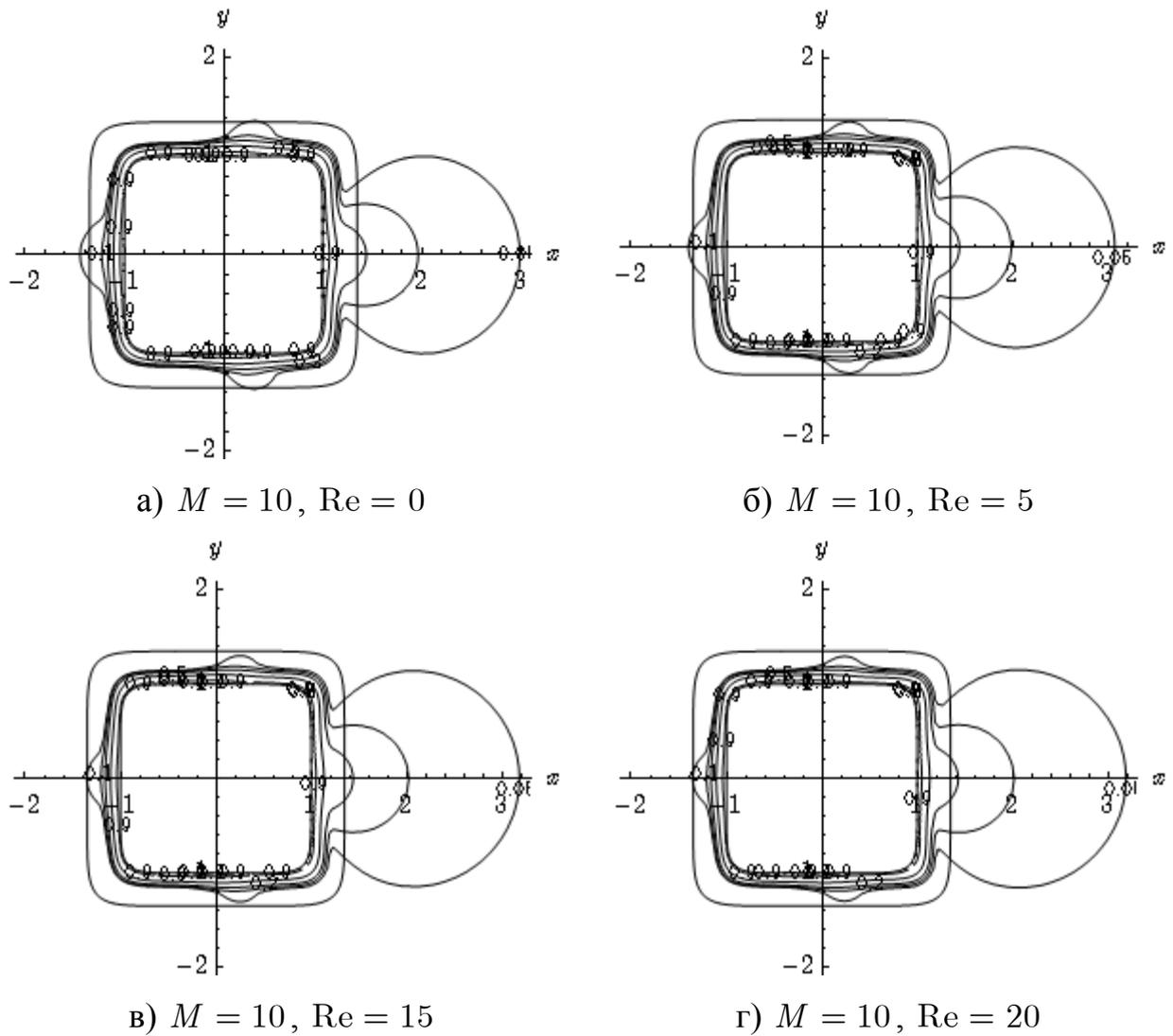


Рисунок 6.12 – Линии концентрации  
для  $Pe = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$

### 6.3 Постановка задачи обтекания тел вращения с учетом массопереноса и приближенный метод ее расчета

Рассмотрим массообмен тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Относительно обтекаемого тела сделаем те же предположения, что и в разделе 4. Течение будем рассматривать в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Компоненты скорости жидкости в этом случае представляются в виде [1, 2, 5, 6, 8]

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6.29)$$

где  $\psi = \psi(r, \theta)$  – функция тока.

Процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации вида [6, 208]

$$\Delta c = \text{Pe}(\mathbf{V} \cdot \nabla)c, \quad (6.30)$$

где  $c = c(r, \theta)$  – концентрация;

$\text{Pe}$  – число Пекле – безразмерный параметр, характеризующий меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к диффузионному переносу;

$$\Delta c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right);$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)c = V_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}.$$

Подставив (6.29) в (6.30), для концентрации  $c = c(r, \theta)$  получим следующую задачу [6, 208]

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \text{ в } \Omega, \quad (6.31)$$

$$c|_{\partial\Omega} = c_0, \quad (6.32)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} c = 0, \quad (6.33)$$

где  $c_0$  – заданная постоянная концентрация на границе  $\partial\Omega$  обтекаемого тела.

Функцию тока  $\psi(r, \theta)$  можно найти, например, как решение описанной в разделе 4 линейной задачи обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью либо как решение описанной в разделе 5 нелинейной задачи обтекания тела вращения вязкой несжимаемой жидкостью.

Итак, решение задачи (6.31) – (6.33) состоит из двух этапов:

- а) нахождение функции тока;
- б) решение задачи (6.31) – (6.33) для концентрации.

Пусть функция тока  $\psi(r, \theta)$  известна. Подставив найденную функцию тока в уравнение (6.31), решим задачу (6.31) – (6.33) также методом  $R$ -функций [50]. Для этого с помощью конструктивных средств теории  $R$ -функций построим структуру решения краевой задачи, т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевому условию и условию на бесконечности.

Пусть, как и ранее в разделе 2, функция  $\omega(r, \theta)$  удовлетворяет условиям

$$\text{а) } \omega(r, \theta) > 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\text{б) } \omega(r, \theta)|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$\text{в) } \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ;

$\omega_M = f_M(\omega)$ ,  $f_M(\omega)$  удовлетворяет условиям (2.8), имеет вид (2.9) и для функции  $\omega_M(r, \theta)$  имеют место все утверждения леммы 2.1.

В задаче (6.31) – (6.33) сделаем замену

$$c = c_0(1 - \omega_M) + u,$$

где  $u$  – новая неизвестная функция.

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция  $c_0(1 - \omega_M)$  удовлетворяет краевому условию (6.32) и условию на бесконечности (6.33) (см. п. 6.1). Кроме того, в области  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$  функция  $c_0(1 - \omega_M)$  точно удовлетворяет уравнению (6.31).

Тогда функция  $u$  является решением задачи

$$-\Delta u + \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = F \text{ в } \Omega, \quad (6.34)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.35)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u = 0, \quad (6.36)$$

$$\text{где } F = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial \theta} \right).$$

Заметим, что  $F \equiv 0$  в области  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$ .

Решение задачи (6.34) – (6.36) будем искать в классе  $S$  функций  $v$ , которые имеют обобщенные производные до первого порядка включительно и квадратично суммируемы в  $\tilde{\Omega}_1$  вместе с производными по переменным  $r$ ,  $\theta$ , где  $\tilde{\Omega}_1$  – любая конечная часть  $\Omega$ ; на границе  $\partial\Omega$  функции  $v$  удовлетворяют условиям (6.35). Искомое обобщенное решение  $u$  должно принадлежать классу  $S$  и удовлетворять интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \text{Pe} \int_{\Omega} u \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \\ & = -c_0 \int_{\Omega} \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla v d\Omega + \text{Pe} \cdot c_0 \int_{\Omega} (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr d\theta \end{aligned}$$

для любой  $v \in S$ .

Следуя разделу 4 обобщенное решение  $u$  задачи (6.34) – (6.36) найдем как предел при  $n \rightarrow \infty$  решений  $u_n$  уравнения (6.34), рассматриваемого в последовательности областей  $\{\Omega_n\}$ , которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области  $\Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  рассмотрим краевые задачи

$$-\Delta u_n + \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \right) = F \text{ в } \Omega_n, \quad (6.37)$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.38)$$

где  $F = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial \theta} \right)$ .

Функции  $u_n$ , следуя работам О.А. Ладыженской [11, 199], продолжим нулем вне  $\Omega_n$ .

Для решения задачи применим метод Бубнова-Галеркина [197, 200].

Оператор  $D = -\Delta + \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$  краевой задачи (6.37) –

(6.38) представим в виде

$$D = A_0 + K,$$

где  $A_0 = -\Delta$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа;

$$K = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Оператор  $A_0$  будем рассматривать на множестве  $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$  функций  $u \in C^2(\Omega_n) \cap C(\bar{\Omega}_n)$ , удовлетворяющих краевым условиям (6.38) задачи (6.37) – (6.38).

Как следует из результатов работы [197] оператор  $A_0$  является симметричным, положительно-определенным и  $(-\Delta u, v) = \int_{\Omega_n} \nabla u \nabla v d\Omega$  для любых  $u, v \in D_0$ . На  $D_0$  введем скалярное произведение  $[u, v] = \int_{\Omega_n} \nabla u \nabla v d\Omega$ .

Пополнив  $D_0$  в метрике, порожденной этим скалярным произведением, получим энергетическое пространство  $H_0$  с нормой  $\|u\|^2 = \int_{\Omega_n} (\nabla u)^2 d\Omega$ .

Выберем координатную систему  $\{\phi_k\}$ , подчинив ее следующим условиям:

- а)  $\phi_k \in H_0$  для любого  $k$ ;
- б) элементы  $\phi_1, \dots, \phi_N$  – линейно независимы при любом  $N$ ;
- в) координатная система  $\{\phi_k\}$  полна в  $H_0$ .

Приближенное решение задачи (6.37) – (6.38) при каждом  $n = 1, 2, \dots$

согласно методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде:

$$u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j, \quad (6.39)$$

где  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (K\phi_j, \phi_i)\} = (F, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.40)$$

где

$$(F, \phi_i) = -c_0 \int_{\Omega_n} \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega + \text{Pe} \, c_0 \int_{\Omega_n} (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right) dr d\theta.$$

Согласно достаточному признаку сходимости метода Бубнова-Галеркина [197] метод будет сходиться, если оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ . В [197] было доказано, что оператор  $A_0$  имеет дискретный спектр, следовательно, по теореме 5 [197] оператор  $A_0^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_2(\Omega_n)$ . Из результатов статьи С.Г. Михлина [201] следует, что оператор  $A_0^{-1}K$  вполне непрерывен в  $H_0$ .

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  галеркинские приближения сходятся при каждом  $n$  к обобщенному решению задачи (6.37) – (6.38), которое определяется интегральным тождеством

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \nabla u_n \cdot \nabla v \, d\Omega - \text{Pe} \int_{\Omega_n} u_n \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \quad (6.41) \\ & = -c_0 \int_{\Omega_n} \nabla(1 - \omega_M) \cdot \nabla v \, d\Omega + \text{Pe} \cdot c_0 \int_{\Omega_n} (1 - \omega_M) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr d\theta. \end{aligned}$$

Оценим решение в норме  $|\cdot|$ .

Операторы  $\Delta_{r\theta}$  и  $K_{r\theta}$  в прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$ , причем  $y$  и  $z$  связаны соотношением  $q = \sin \varphi \cdot y + \cos \varphi \cdot z$ , имеют вид

$$\Delta_{r\theta} u_n = \Delta_{xq} u_n + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial u_n}{\partial q}, \quad K_{r\theta} u_n = \frac{\text{Re}}{\tilde{r}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial q} \right),$$

где  $\tilde{r} = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Умножим (6.37) в  $L_2(\Omega_n)$  на  $v$  из  $F$ , получим

$$(-\Delta u_n, v)_{L_2(\Omega_n)} + (K u_n, v)_{L_2(\Omega_n)} = (F, v)_{L_2(\Omega_n)}. \quad (6.42)$$

Если в (6.42) вместо  $v$  подставить решение  $u_n$ , то

$$(-\Delta u_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} + (K u_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} = (F, u_n)_{L_2(\Omega_n)}.$$

Аналогично тому, как в разделе 2 было оценено скалярное произведение  $\left( \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega_n)}$ , оценим  $(K u_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)}$ . Применяя формулу

Остроградского-Гаусса и учитывая краевые условия, получим, что  $(K u_n, u_n)_{L_2(\Omega_n)} = 0$ .

Тогда  $\|u_n\|^2 = (F, u_n)_{L_2(\Omega_n)}$ .

В результате аналогично п. 6.1 получим оценку

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} \|F\|_{L_2(\Omega_n)}. \quad (6.43)$$

Для применения метода Бубнова-Галеркина необходимо построить координатную последовательность, для чего воспользуемся полной системой частных решений уравнения Лапласа [202] и методом  $R$ -функций [50].

Общее решение уравнения Лапласа в сферической системе координат, не зависящее от  $\varphi$ , имеет вид [202]:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta), \quad (6.44)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ;

$A_n, B_n$  – произвольные постоянные;

$P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра, которые определяются формулами:

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Из (6.44) видно, что для уравнения  $\Delta u = 0$  полная система частных решений относительно внешности сферы конечного радиуса имеет вид:

$$\{\varphi_k(r, \theta)\} = \{r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (6.45)$$

а полная система частных решений относительно области  $\{\omega(r, \theta) < M\}$  имеет вид

$$\{\tau_j(r, \theta)\} = \{r^j P_j^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, j, j = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (6.46)$$

Согласно теореме 6.1 функция  $u$  из (6.26) точно удовлетворяет краевым условиям (6.35), (6.36), т.е. является структурой решения краевой задачи (6.34) – (6.36), а функция  $s$  из (6.27) точно удовлетворяет краевым условиям (6.32), (6.33), т.е. является структурой решения краевой задачи (6.31) – (6.33).

Аппроксимации функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в области  $\Omega_n$  будем искать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j,$$

где  $\{\varphi_k\}$  имеет вид (6.45);

$\{\tau_j\}$  имеет вид (6.46);

$\alpha_k$  и  $\beta_j$  – неизвестные (пока) коэффициенты.

Таким образом, приближенное решение задачи (6.34) – (6.36) ищем в виде

$$u_{n,N} = \omega_M \cdot \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k + \omega_M(1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{\phi_i(r, \theta)\} = \left\{ \omega_M(r, \theta) r^{-k-1} P_k^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, k; \right. \quad (6.47)$$

$$\left. \omega_M(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) r^j P_j^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, j; k, j = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) в соответствии с методом Бубнова-Галеркина найдем из условия ортогональности невязки первым  $N$  ( $N = m_1 + m_2$ ) элементам последовательности (6.47), которое приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида (6.40).

**Теорема 6.4.** При каждом  $n$  галеркинские приближения  $u_{n,N}$  вида (6.39) при  $N \rightarrow \infty$  сходятся в энергетической норме к обобщенному решению задачи (6.37) – (6.38), при этом имеет место оценка (6.43).

Из работы Ладыженской [11] вытекает, что последовательность  $\{u_n\}$  является слабо компактной в  $H_0$ , значит, из неё можно выделить сходящуюся к некоторой функции  $u^* \in H_0$  подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$ . Переходя по подпоследовательности  $\{u_{n_k}\}$  к пределу при  $M_{n_k} \rightarrow \infty$  в интегральном тождестве (6.41), получим, что функция  $u^*$  является обобщенным решением задачи (6.34) – (6.36). Кроме того, из результатов работы [11] следует единственность решения линейной задачи (6.34) – (6.36), а значит, вся

последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u^*$ .

**Теорема 6.5.** Последовательность функций  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  сходится в энергетической норме к единственному обобщенному решению задачи (6.34) – (6.36).

Замечание. Функции  $c_n = c_0(1 - \omega_M) + u_n$  сходятся к обобщенному решению задачи (6.31) – (6.33). Кроме того, заметим, что при любом  $n$  функции  $c_n$  определены и вне  $\Omega_n$ , т.е. в области  $\Omega \setminus \Omega_n$  (показано в п. 6.1). Таким образом, при любом  $n$  функции  $c_n$  в области  $\Omega \setminus \Omega_n$  точно удовлетворяют как дифференциальному уравнению задачи (6.34), так и условию на бесконечности (6.36).

## 6.4 Результаты моделирования процесса обтекания тел вращения с учетом массопереноса

### 6.4.1 Численные результаты расчета задачи обтекания сферы с учетом массопереноса

Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , представленной на рис. 5.1, при  $c_0 = 1$ ,  $R = 1$ ,  $M = 5; 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 10$  и разных числах Рейнольдса и Пекле. Математическая модель задачи имеет вид (6.31) – (6.33). Решение задачи сводится к решению системы (6.40). Двойные интегралы в системе (6.40) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

При числе Пекле  $Pe = 0$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0$  при  $M = 5$  представлены на рис. 6.13.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0$  при  $M = 5$  приведены в таблице Е.13.

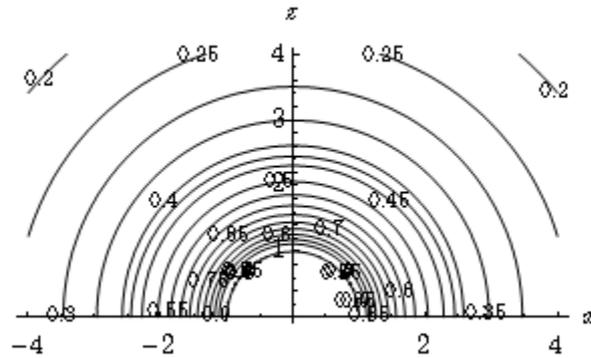


Рисунок 6.13 – Линии концентрации при  $M = 5$  и  $Re = 0$

Полученное приближенное решение данной задачи при  $M = 5$  и  $Re = 0$  сравнивалось с известным точным решением [202]  $c = \frac{1}{r}$ .

Линии концентрации точного и приближенного решений приведены на рис. 6.14.

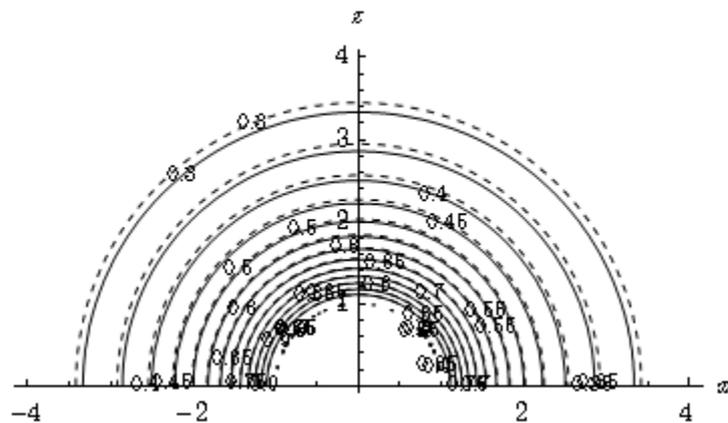


Рисунок 6.14 – Линии концентрации точного (пунктиром) и приближенного (сплошной линией) решений

Были вычислены следующие погрешности:

– среднее квадратичное отклонение

$$\Delta = \sqrt{\iint_{\Omega} (c(r, \theta) - c_n(r, \theta))^2 d\Omega} = 0,19 \cdot 10^{-1},$$

– относительная погрешность

$$\delta = \sqrt{\frac{\iint_{\Omega} (c(r, \theta) - c_n(r, \theta))^2 d\Omega}{\iint_{\Omega} (c(r, \theta))^2 d\Omega}} \cdot 100\% = 0,98\%.$$

Линии концентрации для  $Re = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  представлены на рис. 6.15, для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  – на рис. 6.16, для  $Re = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  – на рис. 6.17.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Re = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  приведены в таблице E.14, для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  – в таблице E.15, для  $Re = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$  – в таблице E.16.

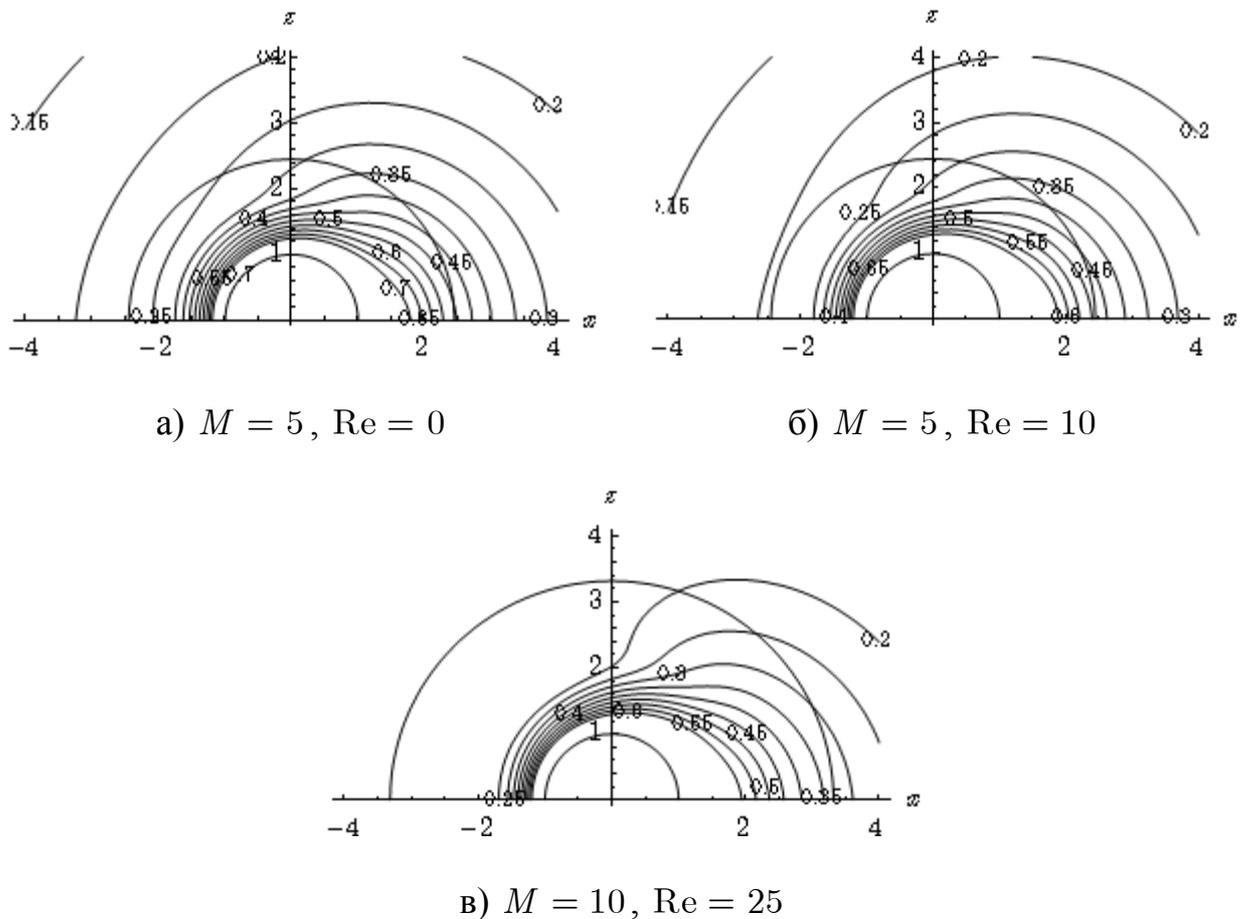


Рисунок 6.15 – Линии концентрации для  $Re = 10$   
при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$

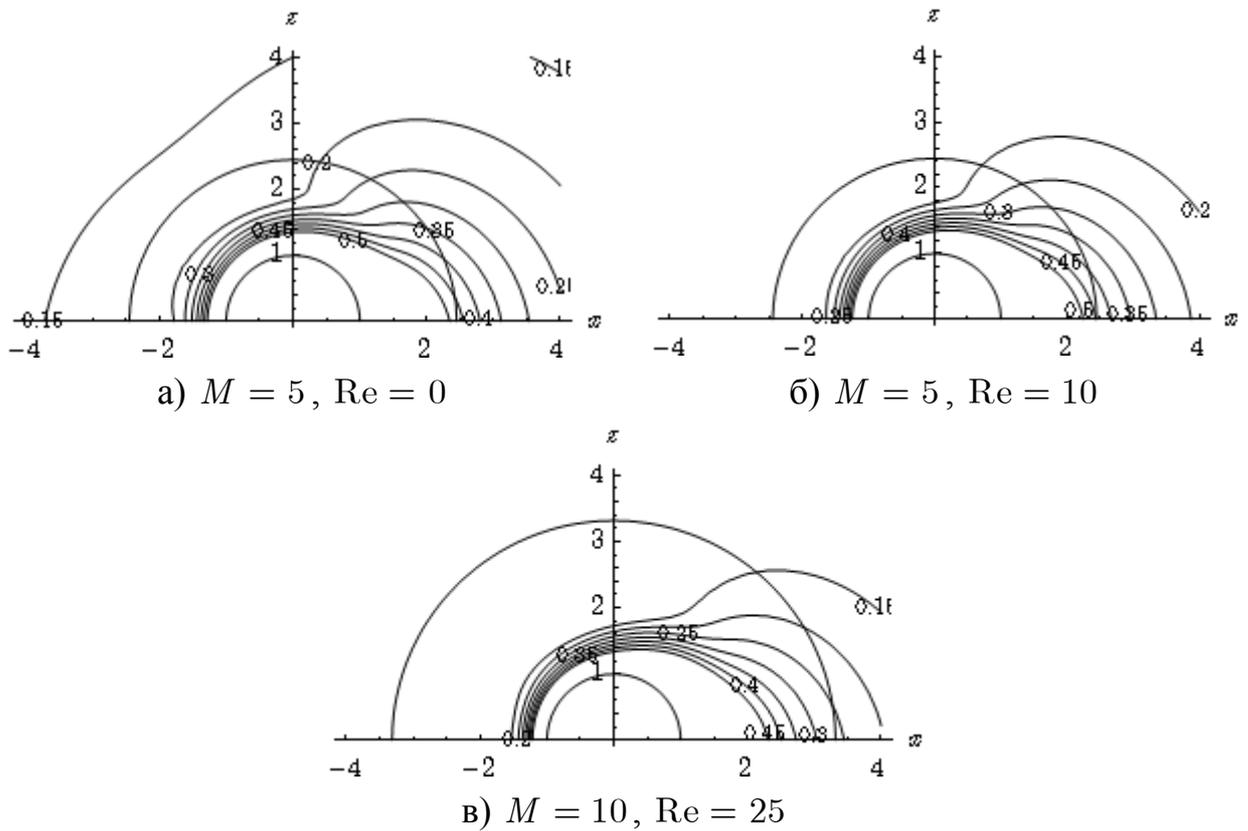


Рисунок 6.16 – Линии концентрации для  $Re = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$

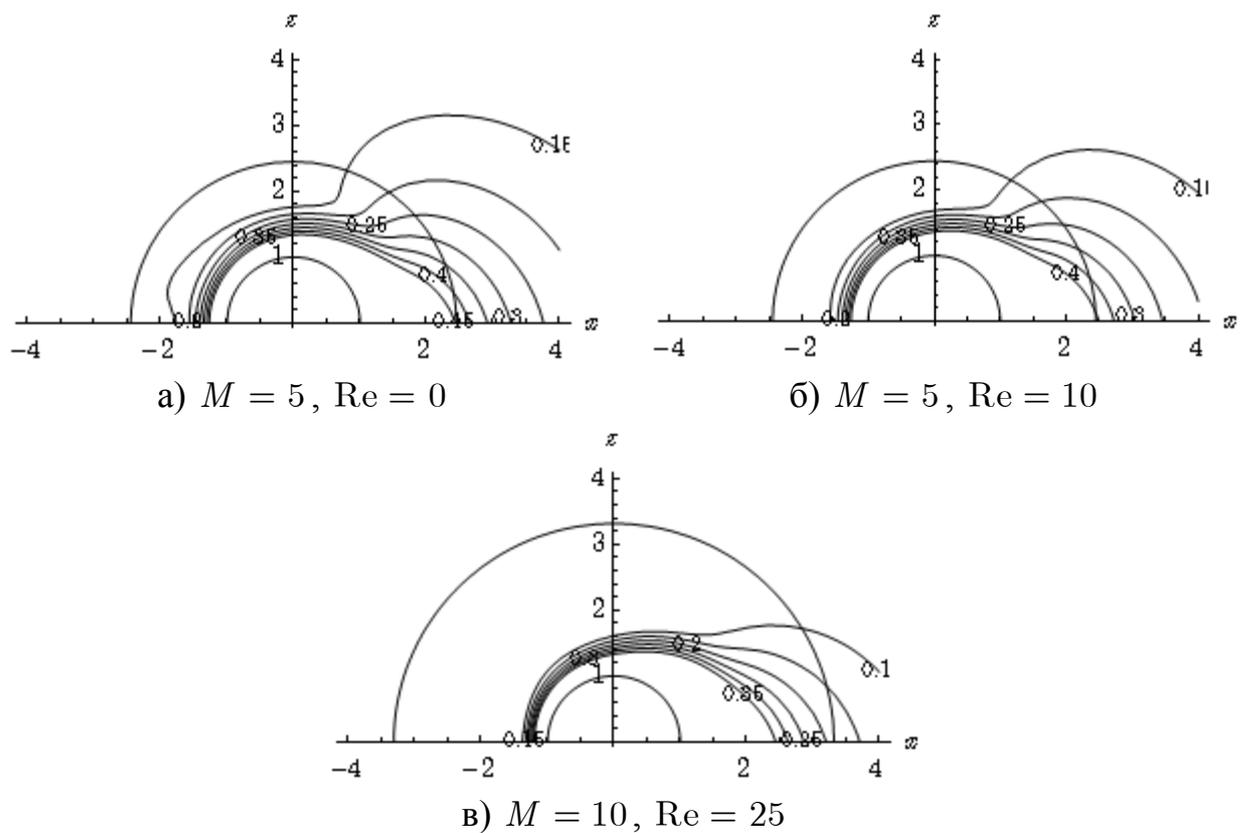


Рисунок 6.17 – Линии концентрации для  $Re = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$

### 6.4.2 Результаты моделирования обтекания эллипсоида вращения с учетом массопереноса

Рассмотрим вычислительный эксперимент для задачи обтекания эллипсоидов вращения  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  при  $c_0 = 1$ ,  $M = 5; 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 10$  и разных числах Рейнольдса и Пекле. Математическая модель задачи имеет вид (6.31) – (6.33). Решение задачи сводится к решению системы (6.40). Двойные интегралы в системе (6.40) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

Случай 1. Эллипсоид вращения с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1$ .

При числе Пекле  $Pe = 0$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0$  при  $M = 5$  представлены на рис. 6.18.

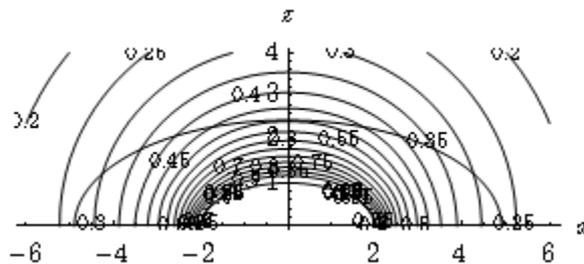


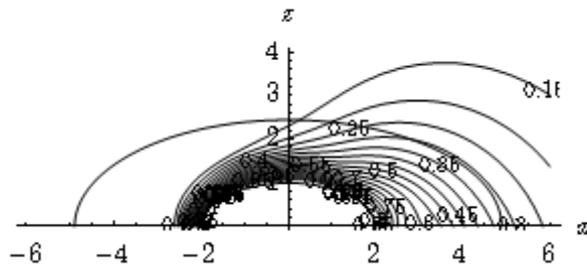
Рисунок 6.18 – Линии концентрации при  $M = 5$  и  $Pe = 0$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0$  при  $M = 5$  приведены в таблице Е.17.

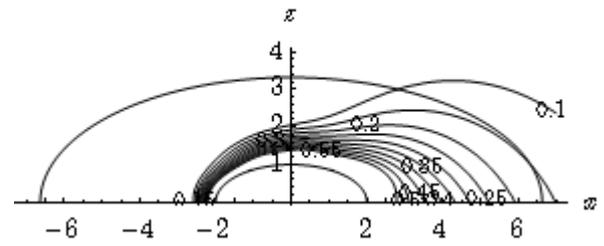
Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 10; 30; 50$  представлены на рис. 6.19, для  $Pe = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 10; 30; 50$  – на рис. 6.20, для  $Pe = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 10; 30; 50$  – на рис. 6.21.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 10$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 10; 30; 50$  приведены в таблице Е.18, для  $Pe = 20$  при  $M = 5; 10$  и  $Pe = 0; 10; 30; 50$  – в таблице

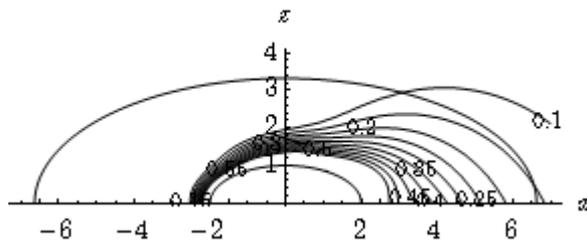
Е.19, для  $Pe = 30$  при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  – в таблице Е.20.



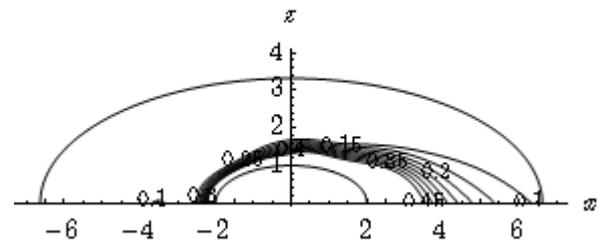
а)  $M = 5, Re = 0$



б)  $M = 10, Re = 10$

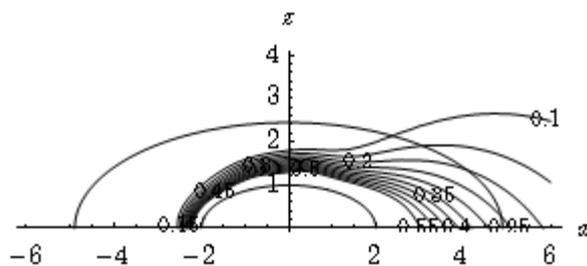


в)  $M = 10, Re = 30$

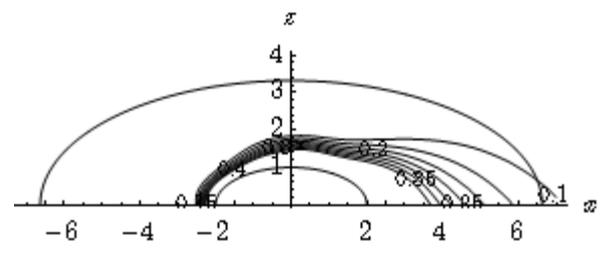


г)  $M = 10, Re = 50$

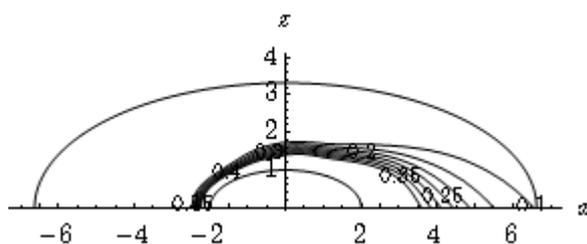
Рисунок 6.19 – Линии концентрации для  $Pe = 10$   
при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$



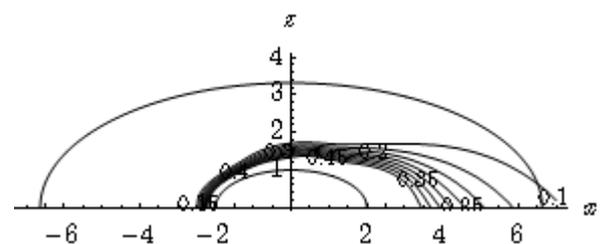
а)  $M = 5, Re = 0$



б)  $M = 10, Re = 10$

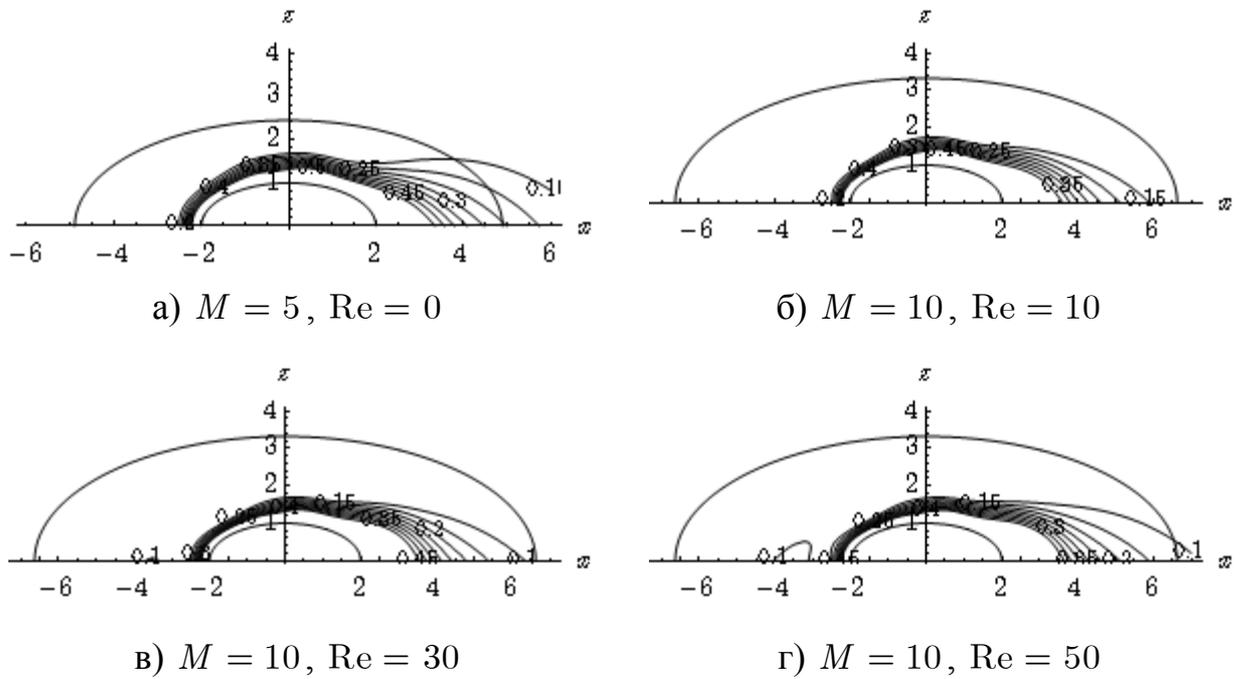


в)  $M = 10, Re = 30$



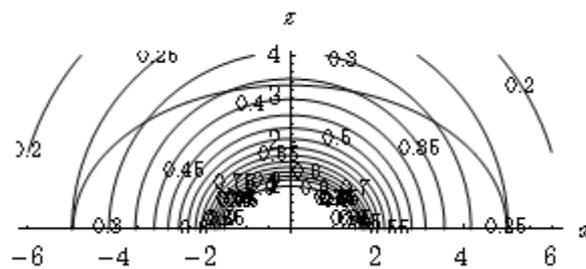
г)  $M = 10, Re = 50$

Рисунок 6.20 – Линии концентрации для  $Pe = 20$   
при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

Рисунок 6.21 – Линии концентрации для  $Re = 30$ при  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$ 

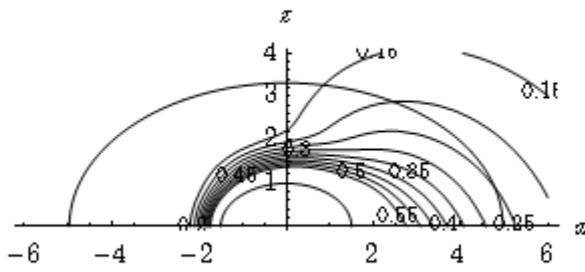
Случай 2. Эллипсоид вращения с полуосями  $a = 1,5, b = 1$ .

При числе Пекле  $Pe = 0$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0$  при  $M = 10$  представлены на рис. 6.22.

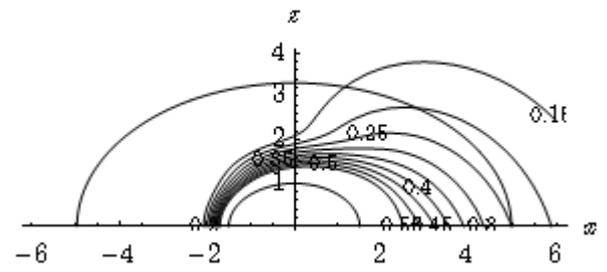
Рисунок 6.22 – Линии концентрации при  $M = 10$  и  $Pe = 0$ 

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0$  при  $M = 10$  приведены в таблице Е.21.

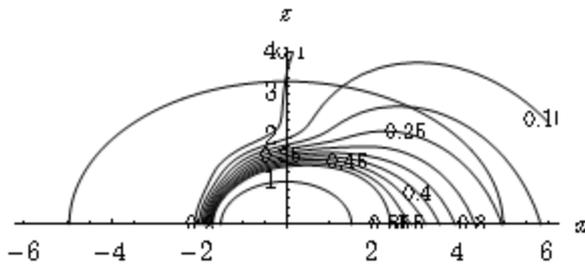
Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  представлены на рис. 6.23, для  $Pe = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  – на рис. 6.24, для  $Pe = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  – на рис. 6.25.



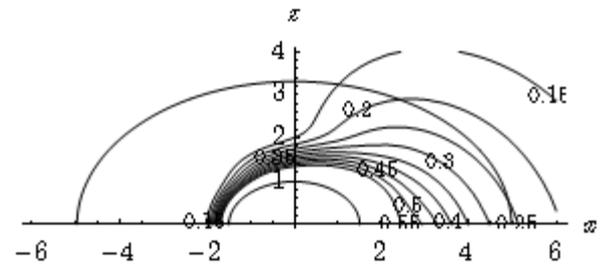
а)  $M = 10, Re = 0$



б)  $M = 10, Re = 10$

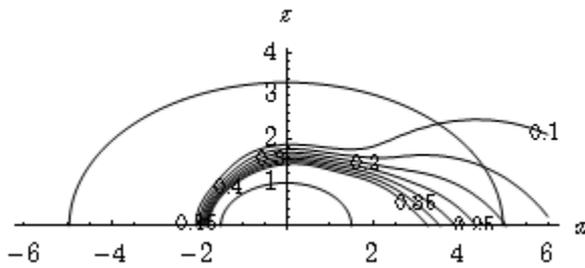


в)  $M = 10, Re = 30$

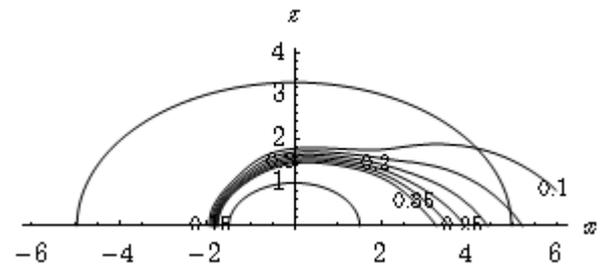


г)  $M = 10, Re = 50$

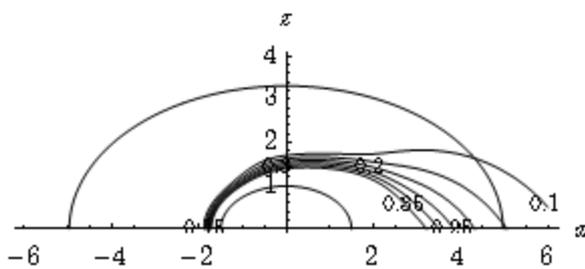
Рисунок 6.23 – Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$



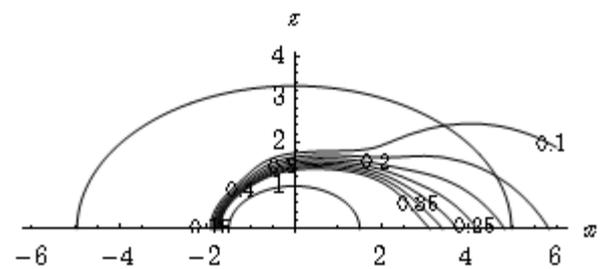
а)  $M = 10, Re = 0$



б)  $M = 10, Re = 10$



в)  $M = 10, Re = 30$



г)  $M = 10, Re = 50$

Рисунок 6.24 – Линии концентрации для  $Pe = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

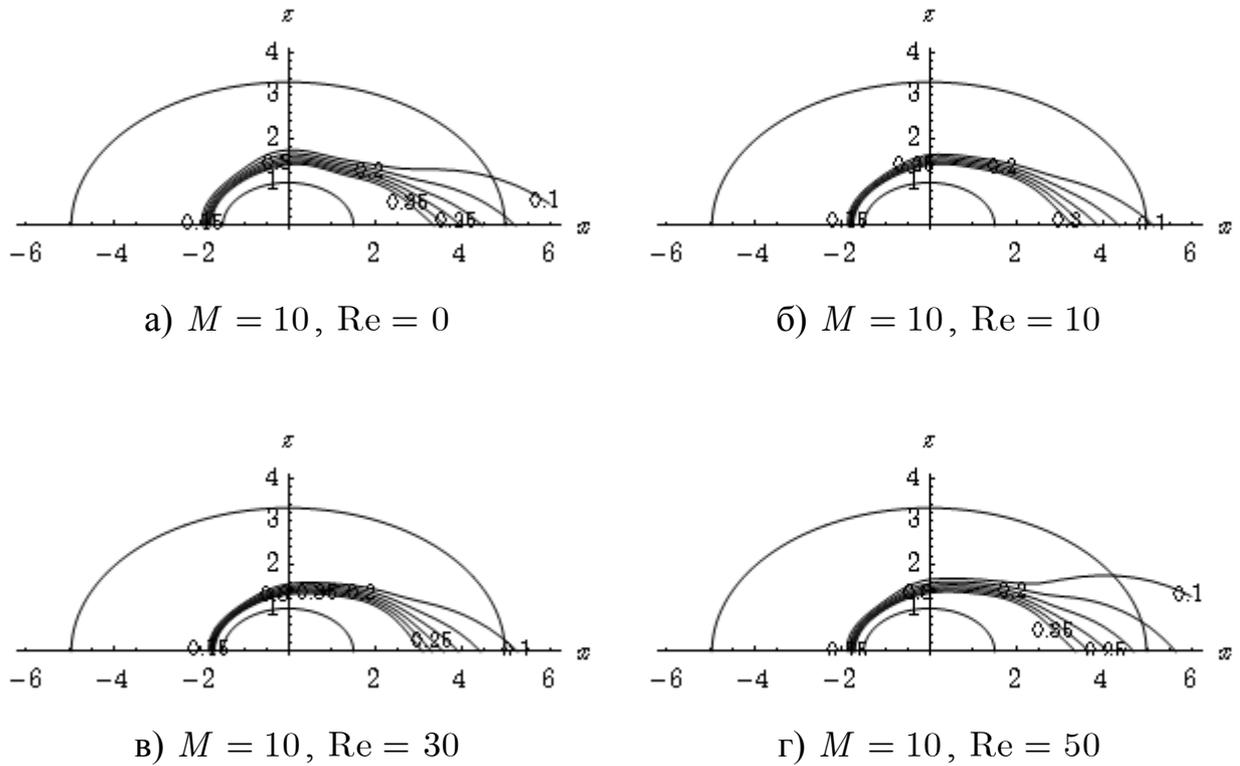


Рисунок 6.25 – Линии концентрации для  $Re = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Re = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  приведены в таблице E.22, для  $Re = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  – в таблице E.23, для  $Re = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$  – в таблице E.24.

#### 6.4.3 Моделирование процесса обтекания двух сочлененных эллипсоидов с учетом массопереноса

Рассмотрим краевую задачу (6.31) – (6.33), где обтекаемое тело ограничено поверхностями  $\frac{(x-1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{(x+1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , представлено на рис. 4.8, при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $M = 10$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 10$  и разных числах Рейнольдса и Пекле. Решение задачи сводится к решению системы (6.40). Двойные интегралы в системе (6.40) считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной.

При числе Пекле  $Pe = 0$  рассматриваемая задача не зависит от функции тока, а соответственно и от значения числа Рейнольдса. Линии концентрации для  $Pe = 0$  при  $M = 10$  представлены на рис. 6.26.

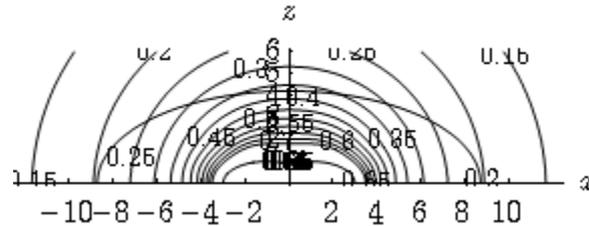


Рисунок 6.26 – Линии концентрации при  $M = 10$  и  $Pe = 0$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $Pe = 0$  при  $M = 10$  приведены в таблице E.25.

Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$  представлены на рис. 6.27, для  $Pe = 20$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$  – на рис. 6.28, для  $Pe = 30$  при  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$  – на рис. 6.29.

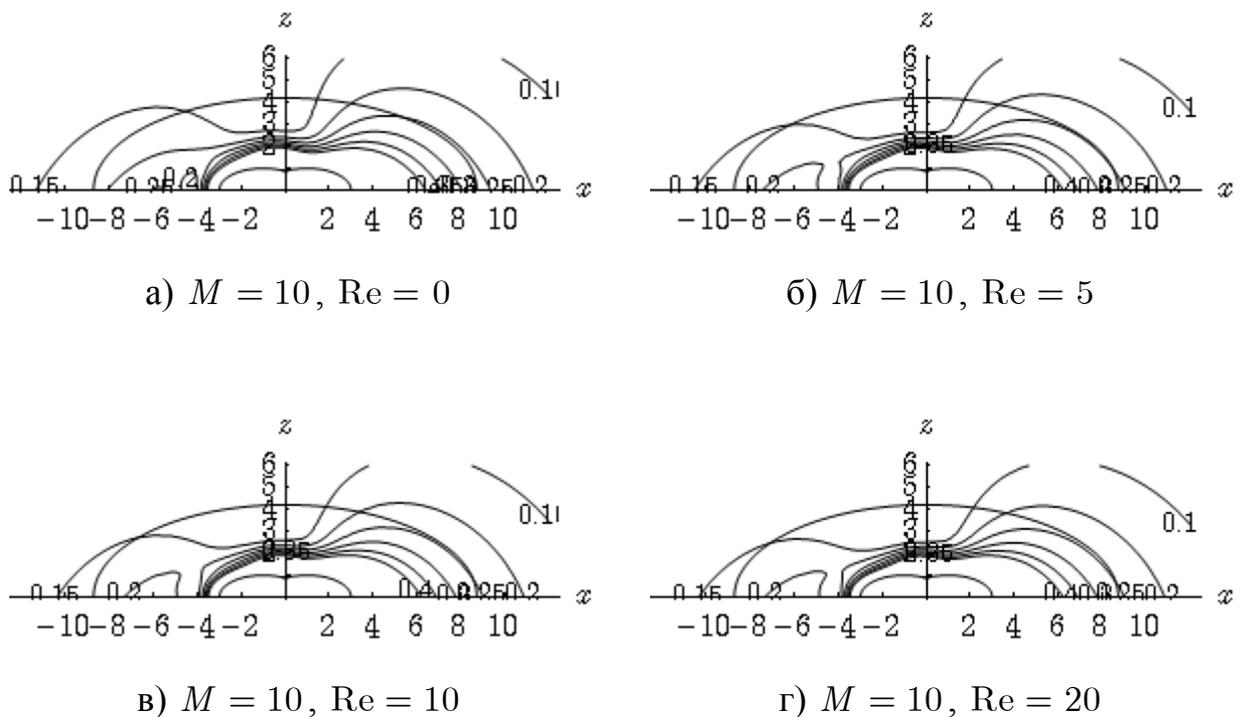


Рисунок 6.27 – Линии концентрации для  $Pe = 10$  при  $M = 10$  и

$Re = 0; 5; 10; 20$

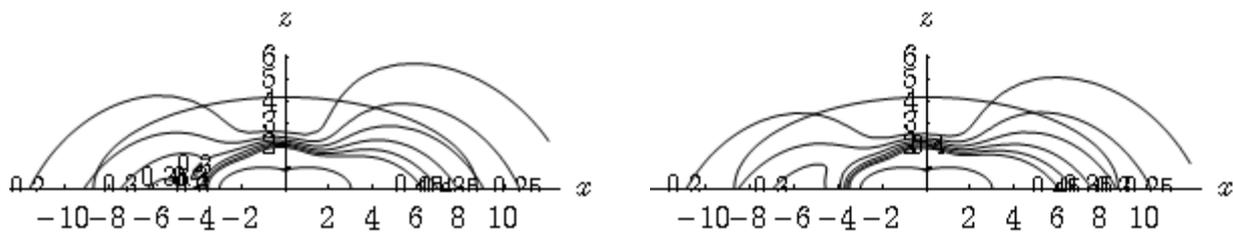
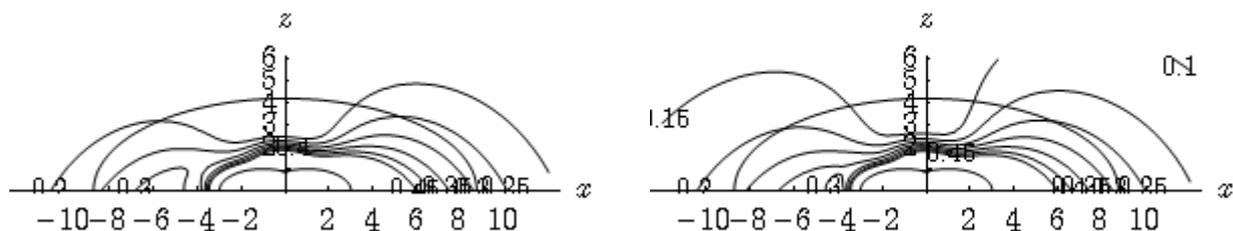
а)  $M = 10, \text{Re} = 0$ б)  $M = 10, \text{Re} = 5$ в)  $M = 10, \text{Re} = 10$ г)  $M = 10, \text{Re} = 20$ 

Рисунок 6.28 – Линии концентрации для  $\text{Re} = 20$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$

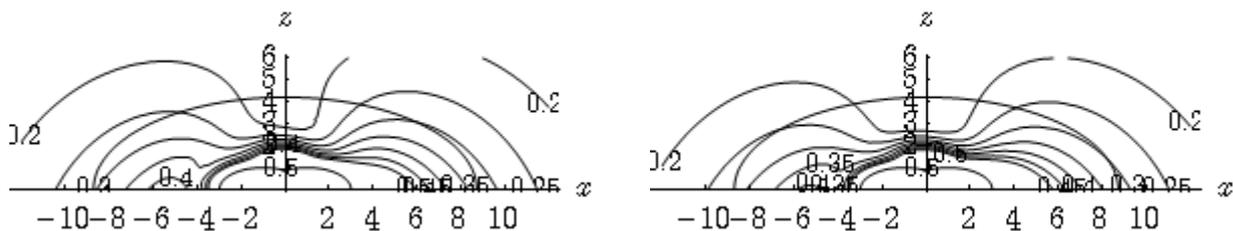
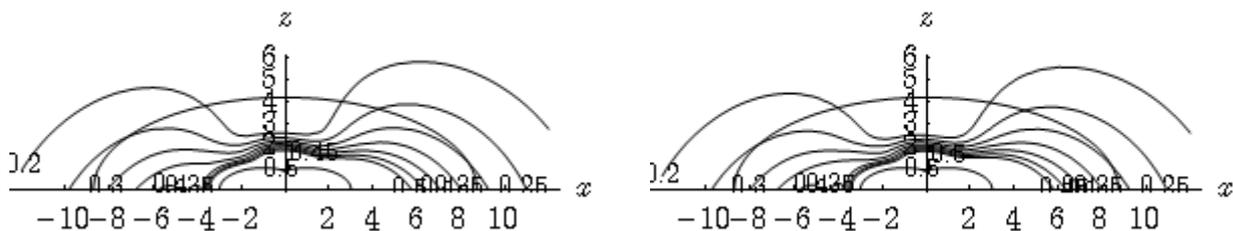
а)  $M = 10, \text{Re} = 0$ б)  $M = 10, \text{Re} = 5$ в)  $M = 10, \text{Re} = 10$ г)  $M = 10, \text{Re} = 20$ 

Рисунок 6.29 – Линии концентрации для  $\text{Re} = 30$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ) для  $\text{Re} = 10$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$  приведены в таблице Е.26, для  $\text{Re} = 20$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$  – в таблице Е.27, для  $\text{Re} = 30$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$  – в таблице Е.28.

## Выводы по разделу 6

1. Рассмотрены постановки стационарных задач обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью с учетом массопереноса.

2. Построена структура решения задач обтекания тел с учетом массопереноса в соответствии с методом  $R$ -функций, точно удовлетворяющая краевым условиям на границе и условиям на бесконечности, что позволило свести задачи в бесконечной области к задачам в конечной области.

3. Разработан и обоснован численный метод решения стационарных задач обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью с учетом массопереноса, основанный на аппроксимации неопределенных компонент в структуре решения краевых задач методом Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственным обобщенным решениям задач, рассматриваемых в ограниченных областях, получены оценки решений в энергетической норме.

5. Проведены вычислительные эксперименты для цилиндрических тел (кругового и эллиптического цилиндров и цилиндра, сечением которого является кривая Ламе) и тел вращения (сфера, эллипсоиды вращения с разным соотношением полуосей, два сочлененных эллипсоида). Для задачи обтекания сферы проведено сравнение полученного приближенного решения с точным. Результаты сравнения показывают эффективность разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в работах [83, 88, 93, 97, 99, 102].

## ВЫВОДЫ

В диссертационной работе получены результаты, которые в совокупности являются дальнейшим обобщением и развитием численных методов математического моделирования стационарного обтекания тел вязкой жидкостью. Результаты работы содержат теоретическое обоснование методов решения соответствующих линейных и нелинейных задач.

1. Предложенные в работе методы применены к задачам обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью, которые ранее с применением метода  $R$ -функций не решались.

2. Впервые разработан метод расчета медленного обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью, который базируется на применении методов  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина. Построены структуры решения краевых задач в соответствии со структурным методом (методом  $R$ -функций), точно удовлетворяющие краевым условиям на границе обтекаемого тела и условиям на бесконечности, что позволило свести задачи в бесконечной области к задачам в конечной области. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственным обобщенным решениям задач, рассматриваемых в ограниченных областях, получены оценки решений в энергетической норме.

3. На основании метода последовательных приближений построен итерационный численный метод расчета задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью: решение нелинейных задач сводится к решению последовательностей линейных краевых задач, для решения которых на каждом шаге итерационного процесса разработан численный алгоритм на основании методов  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость построенного итерационного процесса при малых числах Рейнольдса, получены оценки скорости сходимости в энергетической норме.

4. В случае расходимости последовательных приближений для аппроксимации неопределенных компонент структур решения нелинейных стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью разработаны методы

нарных задач обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью в цилиндрической и сферической системах координат, предложено применение нелинейного метода Галеркина: решение нелинейной задачи сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

5. Впервые разработан численный метод решения стационарных задач обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью с учетом массопереноса, основанный на аппроксимации неопределенных компонент в структуре решения краевых задач методом Бубнова-Галеркина. Построена структура решения задач в соответствии с методом  $R$ -функций, точно удовлетворяющая краевым условиям на границах обтекаемых тел и с поверхностей которых происходит массообмен, и условию на бесконечности, что позволило свести задачи в бесконечной области к задачам в конечной области. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственному обобщенным решениям задач, рассматриваемых в ограниченных областях, получены оценки решений в энергетической норме.

6. Достоверность полученных результатов обеспечивает строгость математических постановок задач с использованием основных положений математической физики. Корректность численных результатов подтверждается сравнением с известными из литературы точными решениями, результатами физических экспериментов и численными решениями.

7. Результаты исследований диссертационной работы внедрены в учебный процесс в Харьковском национальном университете радиоэлектроники.

8. Полученные результаты являются теоретической и практической основой для решения инженерных задач, которые сводятся к моделированию стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью. Также разработанные методы можно использовать как составные при реализации полудискретных и проекционных методов решения нестационарных задач.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – Ч. 2. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 728 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – М.: РХД, 2003. – Т. 1. – 452 с.; Т. 2. – 482 с.
5. Шкадов В.Я. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов. – М.: Изд-во Моск. у-та, 1984. – 200 с.
6. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов [и др.]. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
7. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие / С.В. Валландер. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 296 с.
8. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
9. Бабенко К.И. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью / К.И. Бабенко, Н.Д. Введенская, М.Г. Орлова // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 183–196.
10. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин. – М.: ИЛ, 1963. – 256 с.
11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
12. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость / О.А. Ладыженская // Успехи матем. наук. – 2003. – Т. 58, Вып. 2 (350). – С. 45–78.
13. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых за-

дач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

14. Girault V. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin: Springer, 1979. – 200 p.

15. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

16. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, З. К. Нго. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

17. Korachevsky N.D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / N.D. Korachevsky, S.G. Krein. – Vol. 1. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluids. – Basel: Birkhauser Verlag, 2001. – 384 p.; Vol. 2. Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. – Basel: Birkhauser Verlag, 2003. – 444 p.

18. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с; Т. 2. – 392 с.

19. Найфэ А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

20. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 311 с.

21. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

22. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т.Д. Тейлор. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 352 с.

23. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. –Т. 1. – 504 с.; Т. 2. – 552 с.

24. Ferziger J.H. Computational Methods for Fluid Dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002. – 423 p.

25. Chung T.J. Computational Fluid Dynamics / T.J. Chung. – United Kingdom: CUP, 2002. – 1022 p.

26. Wessiling P. Principles of computational Fluid Dynamics / P. Wessiling.

– Berlin: Springer, 2001. – 644 p.

27. Гуцин В.А. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости / В.А. Гуцин, П.В. Матюшин // *Мат. моделирование*. – 2006. – 18, № 5. – С. 5–20.

28. Приходько А.А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса / А.А. Приходько, Д.А. Редчиц // *Прикладна гідромеханіка*. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56–71.

29. Рябенский В.С. Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока / В.С. Рябенский, В.А. Торгашов // *Мат. моделирование*. – 1996. – 8, № 8. – С. 100–112.

30. Liu J.-G. Simple Finite Element Method in vorticity formulation for incompressible flow / J.-G. Liu, E. Wienan // *Math. of Computation*. – 2003. – 10, № 2. – P. 1130–1145.

31. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation / C. Pozrikidis. – USA: Kluwer academic publishers, 2001. – 557 p.

32. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление / Е.В. Бруяцкий, А.Г. Костин, Е.И. Никифорович, Н.В. Розумнюк // *Прикладна гідромеханіка*. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 13–23.

33. Рамоданов С.М. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости / С.М. Рамоданов, В.А. Тененев // *Нелинейная динамика*. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 635–647.

34. Васильев М.М. О применении метода гидродинамических потенциалов к задаче обтекания тела вязкой жидкостью / М.М. Васильев, К.Н. Ефимкин, В.Н. Иванова // *Математическое моделирование*. – 1994. – Т. 6, № 10. – С. 57–65.

35. Алексин В.А. Расчет течений несжимаемой жидкости с отрывом и учетом теплообмена / В.А. Алексин, Т.А. Манаенкова // *Известия МГИУ*. – 2011. – № 4 (24). – С. 28–38.

36. Гуцин В.А. Численное моделирование пространственных отрыв-

ных течений около сферы / В.А. Гуцин, П.В. Матюшин // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 9. – С. 1122–1137.

37. Гуцин В.А. Численное исследование обтекания тела конечного размера потоком несжимаемой вязкой жидкости / В.А. Гуцин // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1980. – Т. 20, № 5. – С. 1333–1341.

38. Гуцин В.А. Математическое моделирование течений несжимаемой жидкости / В.А. Гуцин, П.В. Матюшин // Труды МФТИ. – 2009. – Т. 1, № 4. – С. 18–33.

39. Орунханов М.К. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями / М.К. Орунханов, Ш. Смагулов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 46–53.

40. Lima E Silva A.L.F. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method / A.L.F. Lima E Silva, A. Silveira-Neto, J.J.R. Damasceno // Journal of Computational Physics. – 2003. – 189. – P. 351–370.

41. Perumal D.A. Lattice Boltzmann simulation of flow over a circular cylinder at moderate Reynolds numbers (Electronic resource) / D.A. Perumal, G.V.S. Kumar, A.K. Dass // Thermal Science. – 2012. – №. 00. – С. 93–93. Mode of access: <http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/0354-9836/2012%20OnLine-First/0354-98361200093A.pdf>

42. Perumal D.A. Numerical Simulation of Viscous Flow over a Square Cylinder Using Lattice Boltzmann Method (Electronic resource) / D.A. Perumal, G.V.S. Kumar, A.K. Dass // ISRN Mathematical Physics. – 2012. – 2012. – P. 1–16. Mode of access: <http://www.hindawi.com/journals/isrn/2012/630801/>

43. Perumal D.A. Lattice Boltzmann simulation of viscous flow past elliptical cylinder / D.A. Perumal, G.V.S. Kumar, A.K. Dass // CFD Letters. – 2012. – V. 4(3). – P. 127–139.

44. Taeibi-Rahni M. Investigation of Flow Around a Confined Elliptical Cylinder Using the Lattice Boltzmann Method / M. Taeibi-Rahni, V. Esfahanian,

M. Salari // Middle-East Journal of Scientific Research. – 2013. – 15 (1) – P. 8–13.

45. Еникеев Г.Г. Обтекание тел простой формы вязким потоком жидкости / Г.Г. Еникеев, М.А. Фатхлисламов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 8 (44). – С. 47–50.

46. Dhiman A. Unsteady Heat Transfer from an Equilateral Triangular Cylinder in the Unconfined Flow Regime / A. Dhiman, R. Shyam // ISRN Mechanical Engineering. – 2011. – 2011. – P. 1–13.

47. Rao P.K. Flow of Newtonian and Power-Law Fluids Past an Elliptical Cylinder: A Numerical Study / P.K. Rao, A.K. Sahu, R.P. Chhabra // Ind. Eng. Chem. Res. – 2010. – 49. – P. 6649–6661.

48. Sivakumar P. Steady flow of power-law fluids across an unconfined elliptical cylinder / P. Sivakumar, R.P. Bharti, R.P. Chhabra // Chemical Engineering Science. – 2007. – 62. – P. 1682–1702.

49. Литвин О.Н. Использование метода конечных элементов для решения уравнения переноса / О.Н. Литвин, А.М. Аникеев, И.А. Шеренков // Водные ресурсы / АН СССР. – 1981. – №3. – С. 80–84.

50. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

51. Rvachev V.L.  $R$ -functions in boundary value problems in mechanics / V.L. Rvachev, T.I. Sheiko // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48, N. 4. – P. 151–188.

52. Кравченко В.Ф. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. – 308 с.

53. Колосова С.В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе / С.В. Колосова // Прикл. мех. – 1971. – № 7, В. 10. – С. 100–105.

54. Стрельченко А.Й. Про один метод розв'язування крайових задач / А.Й. Стрельченко, С.В. Колосова, В.Л. Рвачов // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1972. – № 9. – С. 837–839.

55. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода

*R*-функций к решению краевых задач в бесконечных областях: дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.07 – Вычислительная математика / С.В. Колосова. – Харьков: ХИРЭ, 1972. – 85 с.

56. Колосова С.В. Применение метода *R*-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости / С.В. Колосова, М.В. Сидоров // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. – 2003. – № 602. – С. 61–67.

57. Максименко-Шейко К.В. Математичне моделювання фізико-математичних полів з гвинтовим типом симетрії методом *R*-функцій: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи / К.В. Максименко-Шейко. – Харків, 2003. – 18 с.

58. Максименко-Шейко К.В. *R*-функції в математичному моделюванні геометричних об'єктів та фізичних полів : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.05.02 / К.В. Максименко-Шейко; НАН України, Ін-т пробл. машинобуд. ім. А.М. Підгорного. – Х., 2012. – 40 с.

59. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом *R*-функций / К.В. Максименко-Шейко // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41–46.

60. Максименко-Шейко К.В. Метод *R*-функций в математическом моделировании теплообмена при движении жидкости по цилиндрическим каналам с пристеночными винтовыми вставками / К.В. Максименко-Шейко // Вісник Харківського національного університету. – 2009. – 863. – С. 180–190.

61. Максименко-Шейко К.В. *R*-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко – Х.: ИПМАШ НАН Украины, 2009. – 306 с.

62. Тевяшев А.Д. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях / А.Д. Тевяшев, Н.В. Гибкина, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2 (37). – С. 50–57.

63. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса /

М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 3 (20). – С. 52–54.

64. Колосова С.В. Применение метода  $R$ -функций к расчету плоских течений вязкой жидкости / С.В. Колосова, М.В. Сидоров // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. – 2003. – № 602, Вып. 53. – С. 61–67.

65. Артюх А.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных конвективных течений в конечных односвязных областях / А.В. Артюх, Н.В. Гибкина, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4 (39). – С. 40–49.

66. Слесаренко А.П.  $R$ -функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения / А.П. Слесаренко, Д.А. Котульский // Проблемы машиностроения, 2001. – Т. 4, № 3 – 4. – С. 72–78.

67. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы / И.Г. Суворова // Вестн. НТУ ХПИ. – 2004. – № 31. – С. 141–148.

68. Баранов И.А. Метод  $R$ -функций для расчета взаимосвязанных полей в гидротоках / И.А. Баранов, О.В. Кравченко, И.Г. Суворова // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер.: Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2007. – 780. – С. 9–18.

69. Баранов И.А. Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом  $R$ -функций / И.А. Баранов, О.В. Кравченко, И.Г. Суворова // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер.: Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2008. – 809. – С. 9–19.

70. Суворова И.Г. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода  $R$ -функций / И.Г. Суворова, О.В. Кравченко, И.А. Баранов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 139–149.

71. Tsukanov I. A meshfree method for incompressible fluid dynamics problems / I. Tsukanov, V. Shapiro, S. Zhang // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2003. – 58(1). – P. 127–158.

72. Рвачев В.Л. Метод  $R$ -функций в задаче о течении Гартмана / В.Л. Рвачев, А.Л. Корсунский, Т.И. Шейко // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 2. – С. 64–69.

73. Болтенкова Т.И.  $R$ -функции в математическом моделировании физических полей в решетках ТВЭЛов / Т.И. Болтенкова, Т.И. Шейко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 53–59.

74. Ламтюгова С.Н. Об одном методе решения внешних задач гидродинамики вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXVI Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2010 г. – Т. 5. – С. 110–111.

75. Колосова С.В. Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса / С.В. Колосова, С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Матеріали XIII міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – Київ: НТУУ «КПІ», 2010. – Т. 2. – С. 150.

76. Ламтюгова С.М. Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса / С.М. Ламтюгова // Тезиси докладов IV наукової конференції для студентів і аспірантів «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». – Х: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2010. – С. 27–29.

77. Ламтюгова С.М. Застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини / С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Матеріали XXII-ї відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України. – Львів, 2011. – С. 241–244.

78. Ламтюгова С.Н. Численный анализ внешних течений вязкой жидкости (приближение Озеена) методом  $R$ -функций / С.Н. Ламтюгова // Матеріали 16-го Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и

молодежь в XXI веке». – Харьков: Хнурэ, 2012. – Т. 10. – С. 155–156.

79. Ламтюгова С.М. Чисельний аналіз зовнішніх течій в'язкої рідини (наближення Озесна) методом  $R$ -функцій / С.М. Ламтюгова // Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – Київ: НТУУ «КПІ», 2012. – Т. 1. – С. 268.

80. Ламтюгова С.М. Про застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх течій в'язкої рідини в наближенні Озесна / С.М. Ламтюгова // Тезиси докладов XXXVI научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковской национальной академии городского хозяйства. – Харьков: ХНАГХ, 2012. – С. 231–232.

81. Ламтюгова С.Н. Об одной внешней задаче гидродинамики вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXVIII Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2012. – Т. 5. – С. 84–85.

82. Ламтюгова С.М. Застосування методів послідовних наближень та  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх вісесиметричних в'язких течій / С.М. Ламтюгова // Тези доповідей П'ятнадцятої Всеукраїнської (Десятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПІМІ-2012» – Львів: ЛНУ, 2012. – С. 229–231.

83. Lamtyugova S.N. The  $R$ -functions method application to solving mass transfer problems / S.N. Lamtyugova // Theoretical and applied aspects of cybernetics. Proceedings of the 2nd international scientific conference of students and young scientists. – Kyiv: Bukrek, 2012. – P. 108–111.

84. Ламтюгова С.М. Застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини / С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36(112). – С. 56–62.

85. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С. 112–122.

86. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 2. – С.57–65.

87. Колосова С.В. Применение итерационных методов к решению внешних задач гидродинамики / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2012. – №3. – С. 13–17.

88. Колосова С.В. Численный анализ задач массообмена методом  $R$ -функций / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова // Тези доповідей Одинадцятій Всеукраїнської науково-технічної конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (ММІТ-2012). – Одеса, 2012. – С. 100–101.

89. Ламтюгова С.Н. Применение методов последовательных приближений и  $R$ -функций к решению задачи обтекания цилиндрического тела / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXIX Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2013. – Т. 5. – С. 80–82.

90. Ламтюгова С.Н. Численный анализ нелинейной стационарной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Материалы 17-го Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.». – Харьков: Хнурэ, 2013. – Т. 7. – С. 138–139.

91. Ламтюгова С.М. Застосування методів послідовних наближень та  $R$ -функцій до чисельного аналізу обтікання еліптичного циліндра в'язкою рідиною / С.М. Ламтюгова // Тези доповідей Шістнадцятій всеукраїнської (Одинадцятій міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» – Львів, 2013. – С. 83–85.

92. Ламтюгова С.Н. Применение методов  $R$ -функций и последовательных приближений к расчету стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и сту-

дентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем». – Россия, г. Пенза, 2013. – С. 65–71.

93. Ламтюгова С.Н. Численный анализ вязких течений, усложненных массообменом, методом  $R$ -функций / С.Н. Ламтюгова // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013). – Херсон, 2013. – С. 226–229.

94. Ламтюгова С.Н. Применение метода  $R$ -функций к численному анализу задач обтекания в цилиндрической системе координат / С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Труды международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях». – Харьков, 2014. – С. 232–235.

95. Ламтюгова С.Н. Применение методов  $R$ -функций и Галеркина к решению нелинейной стационарной задачи обтекания в сферической системе координат / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «ХЛ Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2014. – Т. 5. – С. 130–132.

96. Ламтюгова С.Н. О нелинейной стационарной задаче обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Тезисы докладов XXXV научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковского национального университета городского хозяйства им. А.Н. Бекетова – Харьков, 2014. – С. 189–190.

97. Ламтюгова С.Н. Численный анализ задачи массообмена тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Материалы 18-ого Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.». – Харьков: Хнурэ, 2014. – Т. 7. – С.110–111.

98. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат / С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2014. – №1105, вип. 24. – С. 111–121.

99. Колосова С.В. Об одном методе численного анализа вязких течений, усложненных массообменом (задача обтекания) / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – №1 (64). – С. 25–30.
100. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the *R*-functions method and the Galerkin method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // Econtechmod. – 2014. – Vol. 3, No. 3. – P. 43-50.
101. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the *R*-function method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // Journal of Engineering Mathematics, 2015. – V. 91, No. 1. – P. 59–79. (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x).
102. Ламтюгова С.Н. Численный анализ задачи массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Материалы 19-ого Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.». – Харьков: ХНУРЭ, 2015. – Т. 7. – С.68–69.
103. Ламтюгова С.Н. Применение итерационных методов к расчету обтекания тел стационарным потоком вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Радиоэлектроника и информатика. – 2015. – №2. – С. 49 – 56.
104. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Везуб [и др.]. – М.: Наука, 1987. – 274 с.
105. Берковский Б.М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б.М. Берковский, В.К. Полевиков. – Минск: Университетское, 1988. – 167 с.
106. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.
107. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
108. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики:

Учеб. для вузов / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.

109. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон. – М.: Мир, 1964. – 660 с.

110. Гольдштик М.А. Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн, Н.И. Яворский. – Новосибирск: Наука, 1989. – 336 с.

111. Odquist F.K.G. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten / F.K.G. Odquist // Math. Zeitschrift. – 1930. – 32. – P. 329–375.

112. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса / В.А. Солонников // Тр. МИАН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 213–317.

113. Сазонов Л.И. Обоснование асимптотического разложения решения двумерной задачи обтекания при малых числах Рейнольда / Л.И. Сазонов // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – Т. 67, № 5. – С. 125–154.

114. Сазонов Л.И. Существование, устойчивость, пространственные и временные асимптотики решений системы Навье-Стокса во внешних областях: автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление / Л.И. Сазонов. – Ростов-на-Дону, 2013. – 33 с.

115. Гомилко А.М. Задача Стокса об обтекании прямоугольной пластинки / А.М. Гомилко, А.Н. Горовой // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – Т. 2 (74), № 2. – С. 35–42.

116. Пальцев Б.В. Метод малого параметра в граничной задаче для системы Озеена / Б.В. Пальцев // Журн. выч. мат. и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 5. – С. 1144–1166.

117. Пак В.В. Численное решение задачи Стокса со свободной границей модифицированным методом проекции градиента / В.В. Пак // Выч. механика сплошных сред. – 2008. – 1 (1). – С. 80–91.

118. Moosaie A. Slow motion of a rotating circular cylinder through a micropolar fluid / A. Moosaie, G. Atefi // Arch. Mech. – 2008. – 60, 3. – P. 199–220.
119. Шмыглевский Ю.Д. Два примера обтекания пластинок в приближении Стокса / Ю.Д. Шмыглевский // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т. 35. № 6. – С. 997–1000.
120. Галкин В.А. Сходимость приближенных методов для уравнений несжимаемой жидкости / В.А. Галкин, В.В. Русских // Мат. моделирование. – 1994. – Т. 6, № 3. – С. 101–113.
121. Люлька В.А. Численное решение задачи о вращении цилиндра в потоке вязкой несжимаемой жидкости / В.А. Люлька // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1977. – Т. 17, № 2. – С. 470–480.
122. Ingham D.B. A numerical investigation into the steady flow past a rotating circular cylinder at low and intermediate Reynolds numbers / D.B. Ingham, T. Tang // Comput. Fluids. – 1990. – 87. – P. 171–199.
123. Ingham D.B. Steady flow past a rotating cylinder / D.B. Ingham // J. Comput. Fluids. – 1983. – 11. – P. 351–378.
124. Редчиц Д.А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости / Д.А. Редчиц, А.А. Гуржий // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т. 14, № 1. – С. 63–71.
125. Калинин Е.И. Численное решение задач обтекания системы тел в переменных функция тока-завихренность / Е.И. Калинин, А.Б. Мазо // Уч. записки Казанского гос. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 144–153.
126. Волков К.Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости / К.Н. Волков // Выч. методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 269–282.
127. Захаренков М.Н. Проблемы моделирования отрывного обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью / М.Н. Захаренков // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 5. – С. 840–854.

128. Ермаков М.К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье-Стокса / М.К. Ермаков // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2010. – Т. 9. – С. 1–8.

129. Dennis S. C. R. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 / S.C.R. Dennis, G.-Z. Chang // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42, part 3. – P. 471–489.

130. Son J.S. Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynold numbers of 40, 200 and 500 / J.S. Son, T.J. Hanratty // J. Fluid Mech. – 1969. – V. 35, part 2. – P. 369–386.

131. Hamielec A.E. Numerical studies of viscous flow around circular cylinders / A.E. Hamielec, J.D. Raal // Phys. of Fluids. – 1969. – V. 12, № 1. – P.11–17.

132. Jain P.C. Numerical solution of unsteady viscous incompressible fluid flow past a circular cylinder / P.C. Jain, S.K. Rao // Phys. Fluids Suppl. II. – 1969. – 12. – P. 57–64.

133. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder / B. Fornberg // J. Fluid Mech. – 1980. – V. 98, part 4. – P. 819–855.

134. Mikulencak D.R. Stationary shear flow around fixed and free bodies at finite Reynolds number / D.R. Mikulencak, J.F. Morris // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 520. – P. 1–28.

135. Christov C.I. Does the stationary viscous flow around a circular cylinder exist for large Reynolds numbers? A numerical solution via variational imbedding / C.I. Christov, R.S. Marinova, T.T. Marinov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – V. 226. – P. 205–217.

136. Kumar G.V.S. Numerical simulation of viscous flow over a circular cylinder using Lattice Boltzmann method / G.V.S. Kumar, D.A. Perumal, A.K. Dass // Proceedings of the 37th National & 4th International Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power. December 16-18, 2010, IIT Madras, Chennai, India. – 2010. – P. 1–10.

137. Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by

hybrid FD scheme and meshless least square-based finite difference method / H. Ding, C. Shu, K.S. Yeo, D. Xu // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2004. – 193. – P. 727–744.

138. Sato M. A fundamental study of the flow past a circular cylinder using Abaqus/CFD / M. Sato, T. Kobayashi // *SIMULIA Community Conference.* – 2012. – P. 1–15.

139. Rahman M.M. Numerical investigation of unsteady flow past a circular cylinder using 2-D finite volume method / M.M. Rahman, M.M. Karim, M.A. Alim // *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering.* – 2007. – 4. – P. 27–42.

140. Numerical study of unsteady laminar flow around a circular cylinder / R.K. Farhoud, S. Amiralaie, G. Jabbari, S. Amiralaie // *Journal of Civil Engineering and Urbanism.* – 2012. – V. 2, I. 2. – P. 63–67.

141. Sen S. Effects of cross-section on steady flow past cylinders / S. Sen, S. Mittal, G. Biswas // *Proceedings of the 13th Asian Congress of Fluid Mechanics.* – 2010. – P. 11–14.

142. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries / T. Ye, R. Mittal, H.S. Udaykumar, W. Shyy // *Journal of Computational Physics.* – 1999. – 156. – P. 209–240.

143. Меллер Н.А. Обтекание эллиптического цилиндра потоком вязкой жидкости / Н.А. Меллер // *Журн. вычисл. мат. и мат. физики.* – 1978. – Т. 18, № 2. – С. 445–457.

144. Johnson S.A. Predicted low frequency structures in the wake of elliptical cylinders / S.A. Johnson, M.C. Thompson, K. Hourigan // *European Journal of Mechanics B/Fluids.* – 2004. – 23. – P. 229–239.

145. Захаров Ю.Н. Об одном методе решения стационарной задачи обтекания / Ю.Н. Захаров // *Выч. технологии.* – 2002. – Т. 7, № 3. – С. 11–17.

146. Sohankar A. Numerical simulation of flow past a square cylinder / A. Sohankar, C. Norberg, L. Davidson // *Proceedings of FEDSM99 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference July 18-23, 1999, San Fran-*

cisco, California, USA. – 1999. – P. 1–6.

147. Dutta S. Experimental investigation of flow past a square cylinder at an angle of incidence / S. Dutta, P. Panigrahi, K. Muralidhar // J. Eng. Mech. – 2008. – 134 (9). – P. 788–803.

148. Gera B. CFD analysis of 2D unsteady flow around a square cylinder / B. Gera, P.K. Sharma, R.K. Singh // International journal of applied engineering research. – 2010. – V. 1, N. 3. – P. 602–610.

149. Sheard G.J. Flow past a square cylinder at small incidence angles: characteristics of leading three-dimensional instabilities / G.J. Sheard // 2011 International conference on mechanical, industrial, and manufacturing engineering lecture notes in information technology vols. 1-2. – 2011. – P. 181–184.

150. Almeida O. On the flow past rectangular cylinders: physical aspects and numerical simulation / O. Almeida, S.S. Mansur, A. Silveira-Neto // Thermal Engineering. – 2008. – V. 7, N. 1. – P. 55–64.

151. Yoon D.-H. Flow past a square cylinder with an angle of incidence / D.-H. Yoon, K.-S. Yang, C.-B. Choi // Physics of fluids. – 2010. – V. 22. – P. 1–12.

152. Numerical simulation of viscous flow past two circular cylinders of different diameters / M. Zhao, L. Cheng, B. Teng, D. Liang // Applied Ocean Research. – 2005. – 27. – P. 39–55.

153. Kim M.-S. Unsteady viscous flows past blunt bodies at moderate Reynolds numbers / M.-S. Kim, H.-M. Jeon, Y.-T. Lim // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2008. – 22. – P. 2286–2298.

154. Numerical simulation of two dimensional unsteady flow past two square cylinders / C.K. Vikram, Y.T.K. Gowda, H.V. Ravindra [et al.] // International journal of technology and engineering system. – 2011. – V. 2, N. 3. – P. 355–360.

155. Алексюк А.И. Исследование отрывных обтеканий тел методом численного решения уравнений Навье-Стокса: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05 «Механика жидкости, га-

за и плазмы» / А.И. Алексюк. – Москва, 2013. – 19 с.

156. Etminan A. Determination of flow configurations and fluid forces acting on two tandem square cylinders in cross-flow and its wake patterns / A. Etminan, M. Moosavi, N. Ghaedsharafi // *International journal of mechanics*. – 2011. – V. 5, I. 2. – P. 63–74.

157. Agrawal A. Investigation of flow around a pair of side-by-side square cylinders using the lattice Boltzmann method / A. Agrawal, L. Djenidi, R.A. Antonia // *Computers & Fluids*. – 2006. – V. 35, N. 10. – P. 1093–1107.

158. Olawore A.S. 2D Flow around a Rectangular Cylinder: A Computational Study / A.S. Olawore, I.F. Odesola // *An International Journal of Science and Technology*, 2012. – V. 2, N. 1. – P. 1 – 26.

159. Tănase N.O. Flow around an immersed cylinder in the presence of free surface / N.O. Tănase, D. Broboană, C. Bălan // *UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering*, 2014. – V. 76, Iss. 2. – P. 259–266.

160. Малах Х.А. Обтекание осциллирующего треугольного цилиндра стационарным потоком вязкой жидкости: выпускная квалификационная работа: 010800.68 – механика и математическое моделирование / Х.А. Малах. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014. – 50 с.

161. Oliver D.L.R. Flow about a fluid sphere at low to moderate Reynolds numbers / D.L.R. Oliver, J.N. Chung // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 177. – P. 1–18.

162. Kumar N.N. 2-D Newtonian flow past ellipsoidal particles at moderate Reynolds numbers / N.N. Kumar, N. Kishore // *Seventh International Conference on CFD*. – 2009. – P. 1–6.

163. Taamneh Y. CFD Simulations of Drag and Separation Flow Around Ellipsoids / Y. Taamneh // *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. – 2011. – V. 5, N. 2. – P. 129–132.

164. Коновалова Н.И. Обтекание двух сфер нестационарным потоком вязкой жидкости / Н.И. Коновалова, С.И. Мартынов // *Нелинейная динамика*. – 2008. – Т. 4, № 4. – С. 467–481.

165. Бабенко К.И. О стационарных решениях задачи обтекания тела

вязкой несжимаемой жидкостью / К.И. Бабенко // Математический сборник. – 1973. – Т. 91 (133), № 1 (5). – С. 3–26.

166. Шевелев Ю.Д. Численное исследование пространственных отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости на примере плоскости с препятствием / Ю.Д. Шевелев, С.Г. Клековкин // Матем. моделирование. – 2003. – Т. 15, № 12. – С. 3–15.

167. Kakuda K. Incompressible viscous flow simulations using the Petrov-Galerkin finite element method / K. Kakuda, T. Aiso, S. Miura // ICCES (International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences). – 2007. – V. 4, N. 1. – P. 11–18.

168. Мортиков Е.В. Применение метода погруженной границы для решения системы уравнений Навье-Стокса в областях сложной конфигурации / Е.В. Мортиков // Вычисл. методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – С. 32–42.

169. Chung C.-C. An analytical and numerical study of axisymmetric flow around spheroids / C.-C. Chung, B.-H Liou., R.-L. Chern // J. Fluid Mech. – 1992. – V. 234. – P. 219–246.

170. Doma S.B. Two-Dimensional Fluid Flow Past a Rectangular Plate with Variable Initial Velocity / S.B. Doma, I.H. El-Sirafy, A.H. El-Sharif // Alexandria Journal of Mathematics. – 2010. – V. 1, N. 2. – P. 36–57.

171. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости / Ю.Д. Шмыглевский. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 231 с.

172. Котеров В.Н. Обзор аналитических исследований установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости (2000 – 2004 гг.) / В.Н. Котеров, Н.Д. Шмыглевский, А.В. Щепров // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 2005. – Т. 45, № 5. – С. 899–920.

173. Аристов С.Н. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // Теор. основы хим. технологии. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547–566.

174. Geoola F. Numerical Solution of Steady-State Free Convective Heat Transfer from a Solid Sphere / F. Geoola, A.R.H. Cornish // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1981. – 24 (8). – P. 1369–1379.
175. Riley N. The Heat Transfer from a Sphere in Free Convective Flow / N. Riley // *Comput. Fluids*. – 1982. – 14 (3). – P. 225–237.
176. Brown S.N. Collision Phenomena in Free-Convective Flow over a Sphere / S.N. Brown, C.J. Simpson // *J. Fluid Mech.* – 1982. – 124. – P. 123–137.
177. Dennis S.C.R. Forced Convection from Heated Spheres / S.C.R. Dennis, M.S. Walker // *Aero. Res. Counc.*. – 1964. – N. 26. – 105.
178. Whitaker S. Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres, and for flow in packed beds and tube bundles / S. Whitaker // *AIChE J.* – 1972. – V. 18, N. 2. – P. 361–371.
179. Dennis S.C.R. Heat transfer from a sphere at low Reynolds numbers / S.C.R. Dennis, D.A. Walker, J.D. Hudson // *J. Fluid Mech.* – 1977. – V. 60, N. 2. – P. 273–283.
180. Hieber C.A. Mixed convection from a sphere at small Reynolds and Grashof numbers / C.A. Hieber, B. Gebhart // *J. Fluid Mech.* – 1969. – V. 38. – P. 137–159.
181. Acrivos A. On the combined effect of forced and free convection heat transfer in laminar boundary layer flows / A. Acrivos // *Chem. Eng. Sci.* – 1966. – V. 21. – P. 343–352.
182. Nguyen H.D. Unsteady mixed convection heat transfer from a solid sphere: the conjugate problem / H.D. Nguyen, S. Paik, J.N. Chung // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1993. – V. 36, N. 18. – P. 4443–4453.
183. Lawrence C.J. The force on an axisymmetric body in linearized, time-dependent motion: a new memory term / C.J. Lawrence, S. Weinbaum // *J. Fluid Mech.* – 1986. – 71. – P. 209–218.
184. Payne L.E. The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies / L.E. Payne, W.H. Pell // *J. Fluid Mech.* – 1960. – 7. – P. 529–549.
185. Breach D.R. Slow flow past ellipsoids of revolution / D.R. Breach //

J. Fluid Mech. – 1961. – 10. – P. 306–314.

186. Kishore N. Momentum and heat transfer phenomena of spheroid particles at moderate Reynolds and Prandtl numbers / N. Kishore, S. Gu // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2011. – 54. – P. 2595–2601.

187. Coutelieiris F.A. Low Peclet mass transport in assemblages of spherical particles for two different adsorption mechanisms / F.A. Coutelieiris, M.E. Kainourgiakis, A.K. Stubos // Journal of Colloid and Interface Science. – 2003. – 264. – P. 20–29.

188. Jaman M.K. Effect of fluctuating surface temperature on natural convection flow over cylinders of elliptic cross section / M.K. Jaman, M.A. Hossain // The Open Transport Phenomena Journal. – 2010. – 2. – P. 35–47.

189. Alassar R.S. Forced convection past an oblate spheroid at low to moderate Reynolds numbers / R.S. Alassar // Journal of Heat Transfer. – 2005. – V. 127, N. 9. – P. 1062–1070.

190. Колодяжний В.М. Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач / В.М. Колодяжний, В.Л. Рвачев. – Х.: Ин-т пробл. машиностр., 1975. – 10. – 75 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т пробл. машиностр.; 1975-10).

191. Shapiro V. Semi-analytic geometry with *R*-functions / V. Shapiro // Acta Numerica. – 2007. – V. 16. – P. 239–303.

192. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / О.М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.

193. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми / І.В. Сергієнко. – К.: Нак. думка, 1999. – 354 с.

194. Панич О.И. Решение системы уравнений Озейна для установившегося обтекания плоского контура потоком вязкой несжимаемой жидкости методом потенциалов. I / О.И. Панич // Известия высших учебных заведений, математика. – 1962. - № 3 (28). – С. 98–110.

195. Панич О.И. Решение системы уравнений Озейна для установивше-

гося обтекания плоского контура потоком вязкой несжимаемой жидкости методом потенциалов. II / О.И. Панич // Известия высших учебных заведений, математика. – 1962. – № 4 (29). – С. 118–129.

196. Панич О.И. Решение системы уравнений Озейна для установившегося обтекания плоского контура потоком вязкой несжимаемой жидкости методом потенциалов. III / О.И. Панич // Известия высших учебных заведений, математика. – 1962. – № 6 (31). – С. 73–84.

197. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

198. Киселев А.А. О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости / А.А. Киселев, О.А. Ладыженская // ДАН СССР. – 1954. – Т. ХСV, № 6. – С. 1161–1164.

199. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. XIV, вып. 3 (87). – С. 75–97.

200. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

201. Михлин С.Г. Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина / С.Г. Михлин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. н. – 1950. – Вып. 21, № 135. – С. 3–23.

202. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

203. Bernier-Kazantsev C. The finiteness of determining degrees of freedom for the quasi-geostrophic multi-layer ocean model / C. Bernier-Kazantsev, I. Chueshov // Rapport de recherche. – 1996. – N. 3067. – P. 1–17.

204. Chueshov I. Probabilistic dynamics of two-layer geophysical flows / I. Chueshov, J. Duan, B. Schmalfuss // Stochastics and dynamics. – 2001. – Vol. 1, No. 4. – P. 451–475.

205. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк – М.: Мир, 1986. – 184 с.

206. Boubekri M. Some modes of the incompressible flow on an elliptic cylinder at low Reynolds number / M. Boubekri, M. Afrid // Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2008. – V. 3 (1). – P. 94–99.

207. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор – М.: Мир, 1973. – 778 с.

208. Гупало Ю.П. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком / Ю.П. Гупало, А.Д. Полянин, Ю.С. Рязанцев – М.: Наука, 1985. – 336 с.

**Приложение А**  
**Акт внедрения**

З оригіналом згідно  
Секретар вченої ради Д 64.052.02

 Л.В. Колесник

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор  
з навчально-педагогічної роботи  
Харківського національного  
університету радіоелектроніки

 проф. Н.С. Лесна



„ 20 ” 10 2015 р.

### АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи

Ламтюгової Світлани Миколаївни

„Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R-функцій  
задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною”

Ми, що нижче підписалися, начальник відділу організації навчального процесу ХНУРЕ Волошина Н.О., завідувач кафедри прикладної математики, професор Тевяшев А.Д., професор кафедри прикладної математики Колосова С.В. склали цей акт про те, що результати кандидатської дисертаційної роботи Ламтюгової Світлани Миколаївни впроваджені у навчальний процес на кафедрі прикладної математики в дисциплінах „Вибрані глави математичної фізики”, „Конструктивні засоби математики”, „Теорія R-функцій та її застосування” та „Чисельні методи”, а також у курсовому та дипломному проектуванні.

Начальник відділу організації  
навчального процесу



Н.О. Волошина

Завідувач кафедри  
прикладної математики



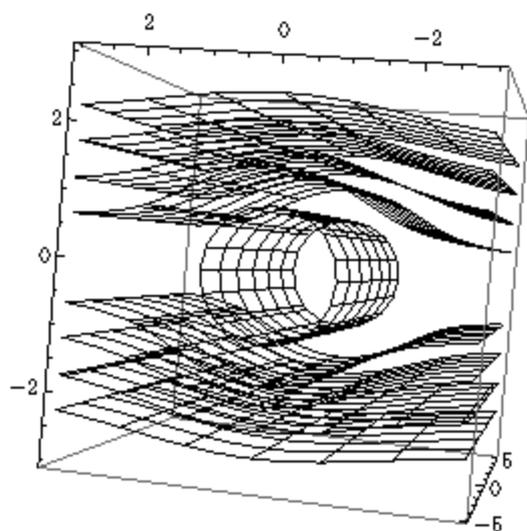
А.Д. Тевяшев

Професор кафедри  
прикладної математики

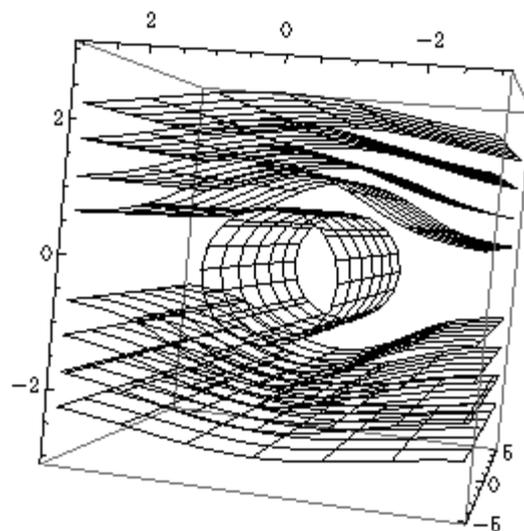


С.В. Колосова

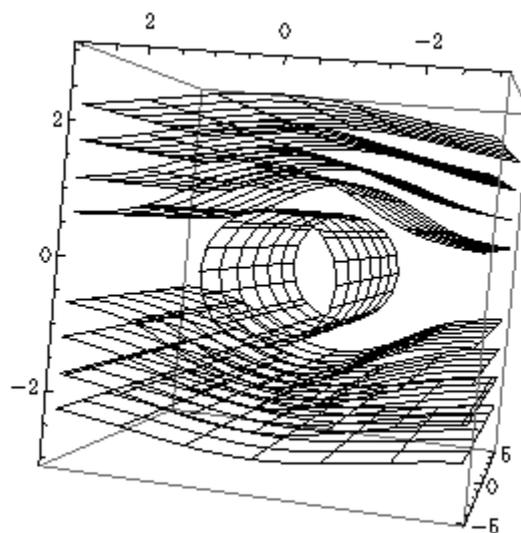
**Приложение Б**  
**Линеаризованная по Озеену**  
**задача обтекания цилиндрических тел**



а)  $m_1 = 4, m_2 = 10$



б)  $m_1 = 8, m_2 = 14$



в)  $m_1 = 12, m_2 = 18$

Рисунок Б.1 – Поверхности уровня функции тока  
при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

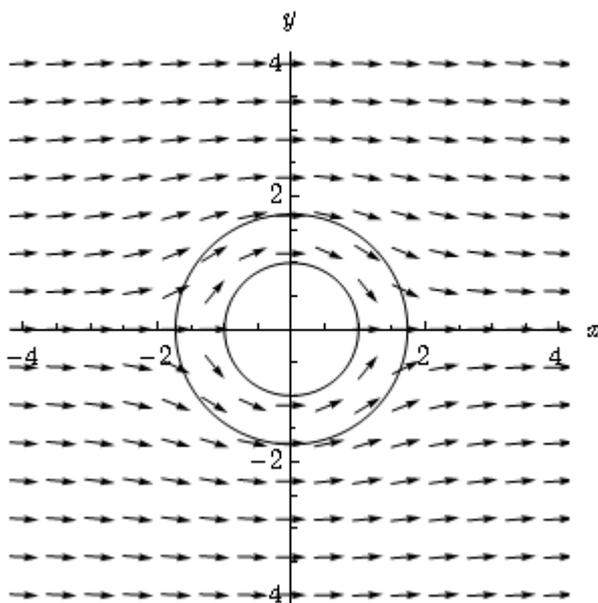
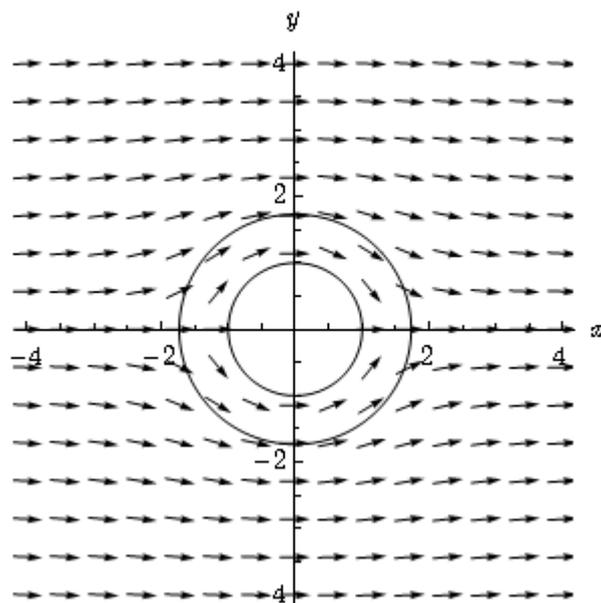
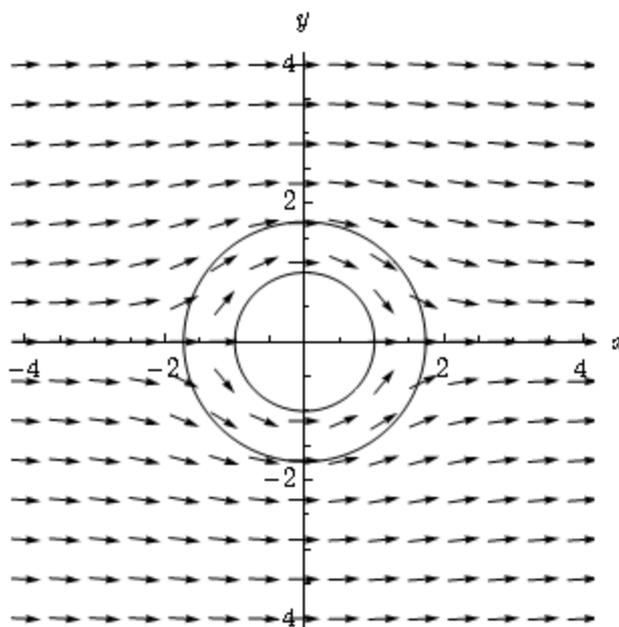
а)  $m_1 = 4, m_2 = 10$ б)  $m_1 = 8, m_2 = 14$ в)  $m_1 = 12, m_2 = 18$ 

Рисунок Б.2 – Векторное поле скоростей  
при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

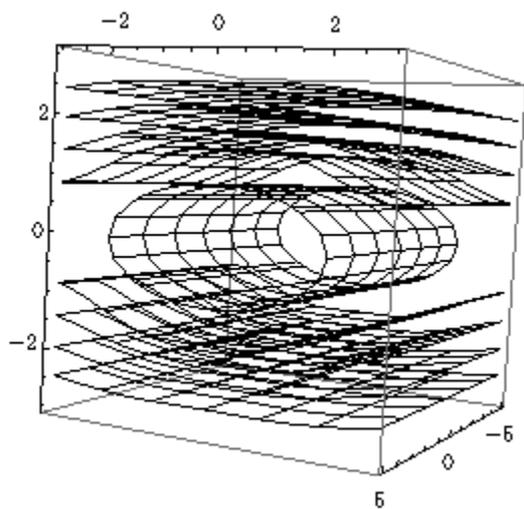
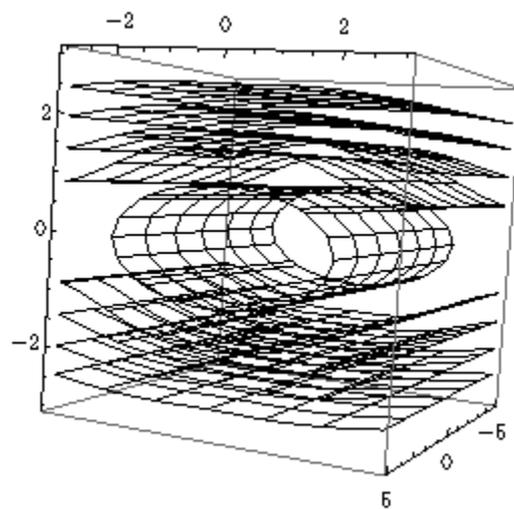
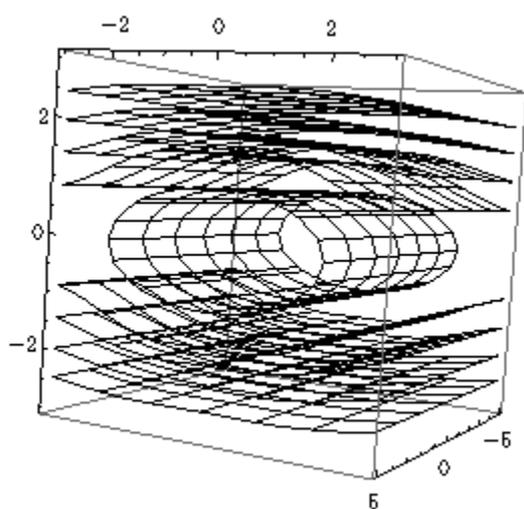
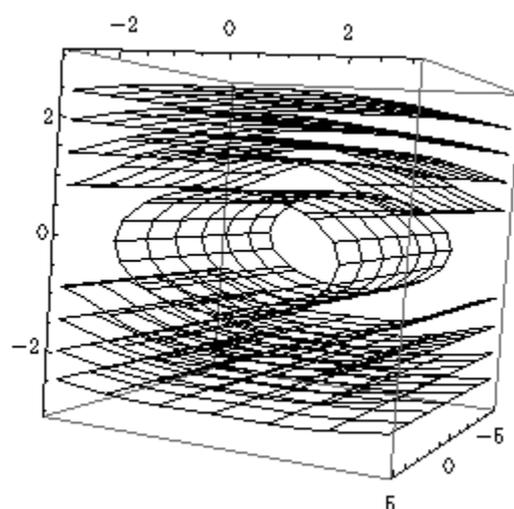
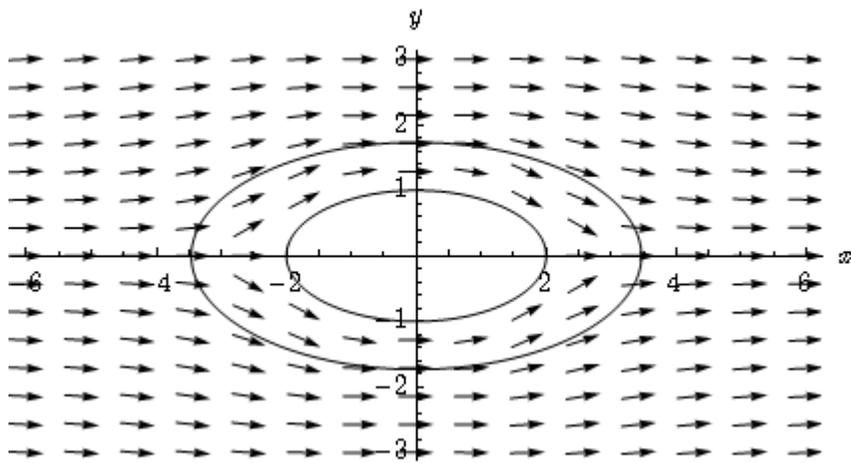
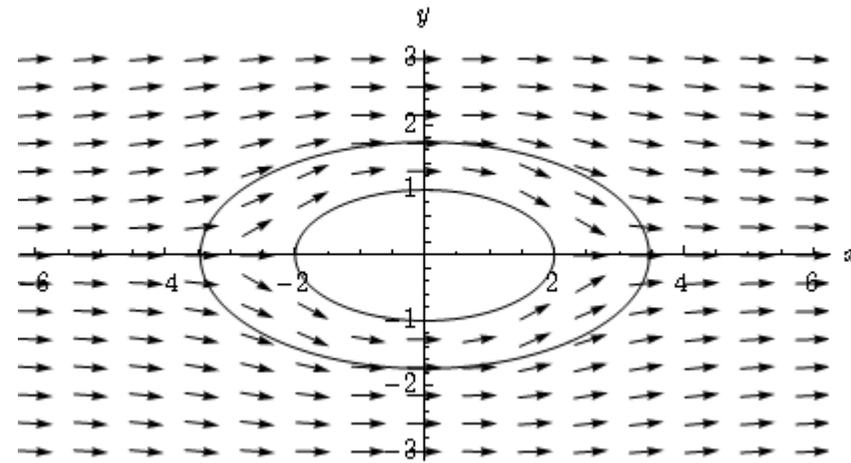
а)  $m_1 = 8, m_2 = 14$ б)  $m_1 = 12, m_2 = 18$ в)  $m_1 = 16, m_2 = 22$ г)  $m_1 = 24, m_2 = 30$ 

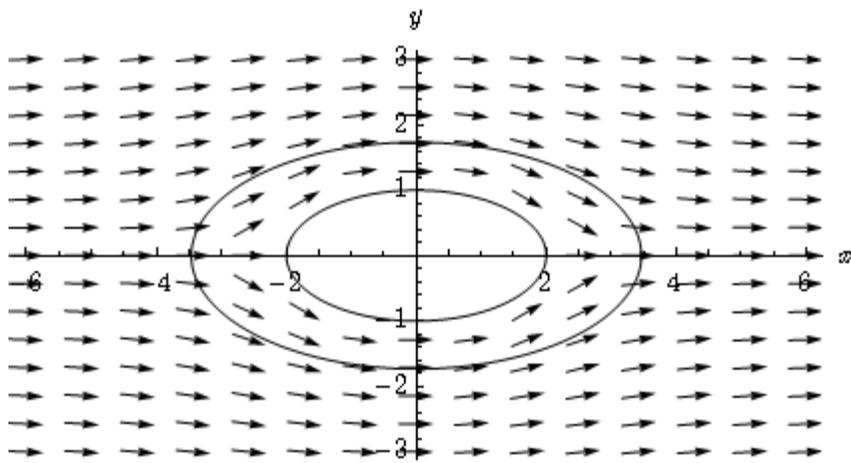
Рисунок Б.3 – Поверхности уровня функции тока  
при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$



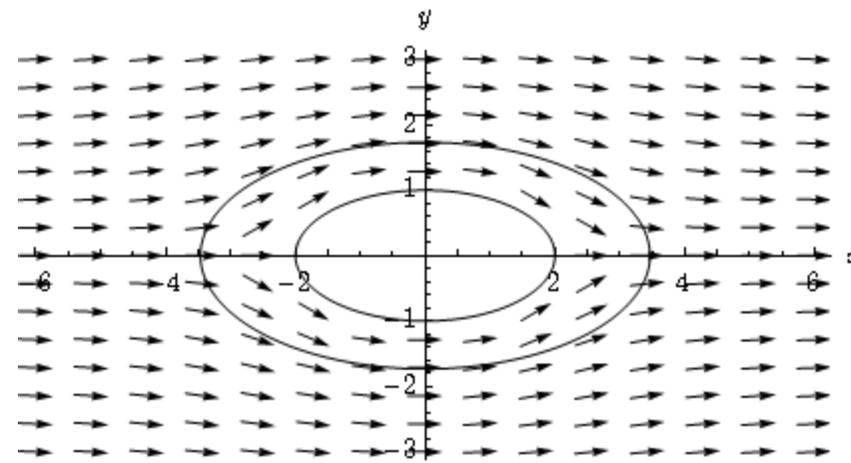
а)  $m_1 = 8, m_2 = 14$



б)  $m_1 = 12, m_2 = 18$



в)  $m_1 = 16, m_2 = 22$



г)  $m_1 = 24, m_2 = 30$

Рисунок Б.4 – Векторное поле скоростей при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

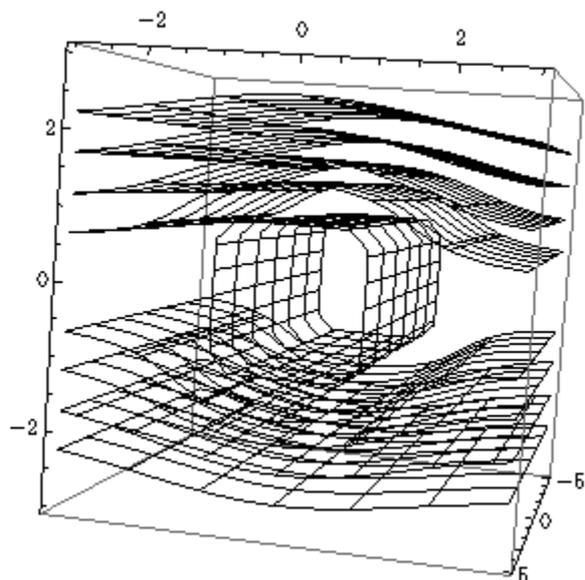
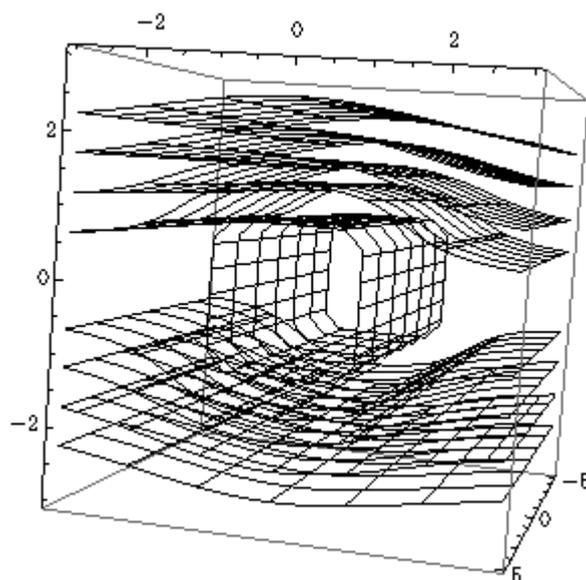
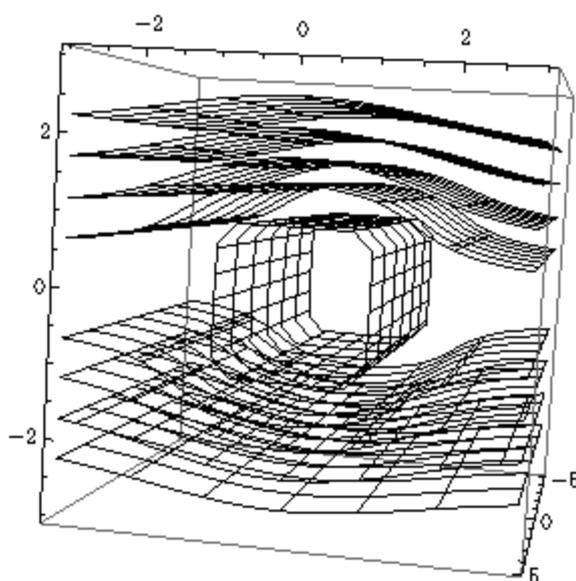
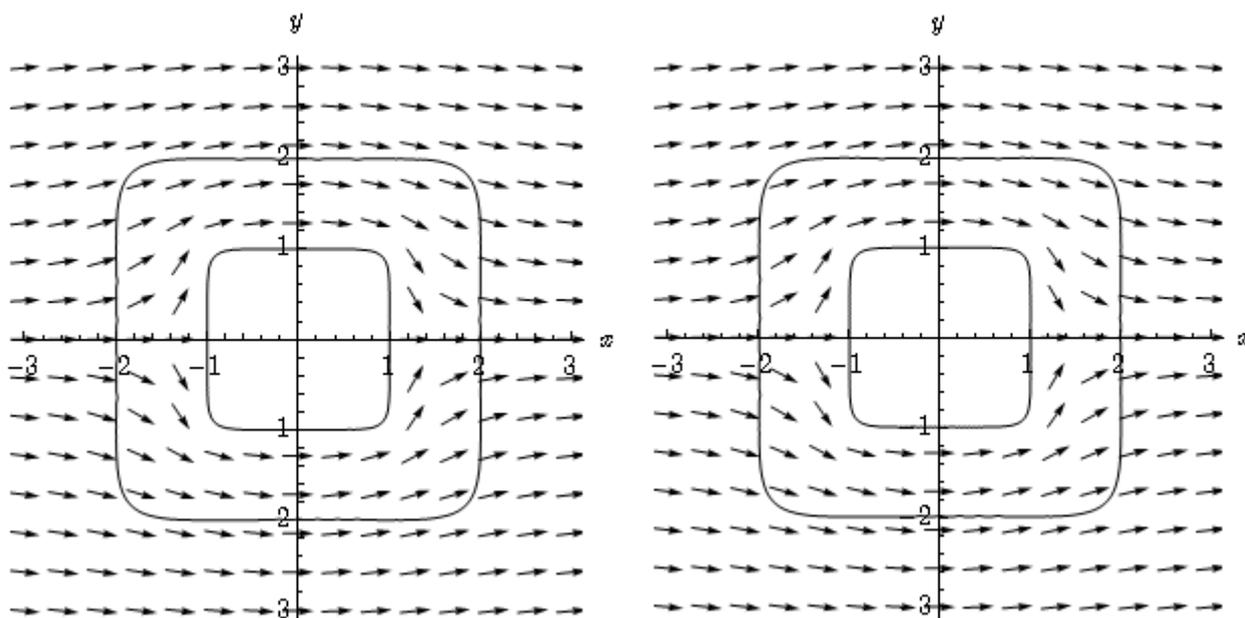
а)  $m_1 = 56, m_2 = 30$ б)  $m_1 = 64, m_2 = 38$ в)  $m_1 = 80, m_2 = 46$ 

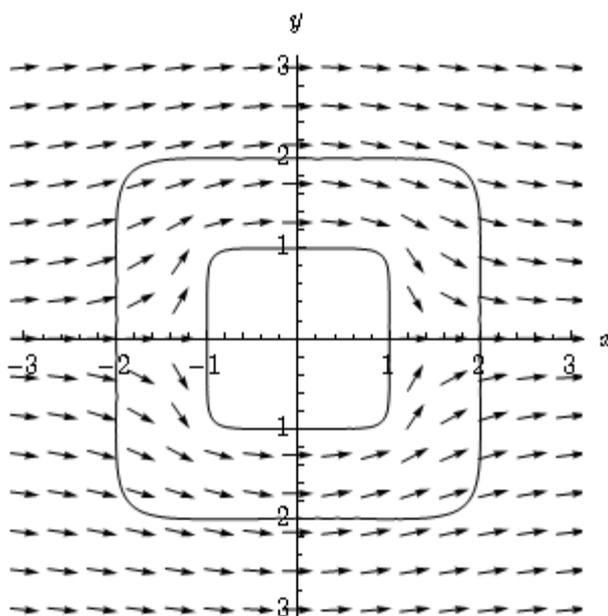
Рисунок Б.5 – Поверхности уровня функции тока

при  $M = 255$  и  $m_1 = 56, m_2 = 30$



а)  $m_1 = 56, m_2 = 30$

б)  $m_1 = 64, m_2 = 38$



в)  $m_1 = 80, m_2 = 46$

Рисунок Б.6 – Векторное поле скоростей  
при  $M = 255$  и разных  $m_1$  и  $m_2$

Таблица Б.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 2$  и различных  $m_1$  и  $m_2$ 

$M$	2			
$m_1$	8	12	16	24
$m_2$	14	18	22	30
$\alpha_2$	-1,10473	-1,10474	-1,24012	-1,33288
$\alpha_4$	-0,00035	0,00007	-0,00436	-0,00799
$\alpha_6$	-0,51436	-0,51432	-0,21903	-0,00060
$\alpha_8$	-0,00102	-0,00112	-1,09486	-1,99670
$\alpha_{10}$	-	-0,00430	0,01327	0,00934
$\alpha_{12}$	-	0,00995	-0,03965	-0,04753
$\alpha_{14}$	-	-	-0,54619	-0,56990
$\alpha_{16}$	-	-	0,15595	-0,84358
$\alpha_{18}$	-	-	-	-0,01648
$\alpha_{20}$	-	-	-	-0,06320
$\alpha_{22}$	-	-	-	-0,62496
$\alpha_{24}$	-	-	-	0,24676
$\beta_2$	1,00631	1,00630	0,76174	0,67202
$\beta_4$	-0,12551	-0,12515	-0,03355	-0,01225
$\beta_6$	-0,00003	0,00058	-0,00136	-0,00404
$\beta_8$	-0,00033	0,00593	-0,01726	-0,03635
$\beta_{10}$	0,00018	-0,00354	0,00920	0,02267
$\beta_{12}$	0,00082	0,00082	-0,02184	-0,02475
$\beta_{14}$	0,02578	0,02578	0,10604	0,12561
$\beta_{16}$	-	0	0,00002	0,00026
$\beta_{18}$	-	-0,00006	0,00011	-0,00030
$\beta_{20}$	-	-	0,00071	0,00069
$\beta_{22}$	-	-	0,00138	0,00144
$\beta_{24}$	-	-	-	0
$\beta_{26}$	-	-	-	-0,00006
$\beta_{28}$	-	-	-	-0,00002
$\beta_{30}$	-	-	-	0,00016

Таблица Б.2 –Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $m_1 = 80$ ,  $m_2 = 46$  и различных  $M$ 

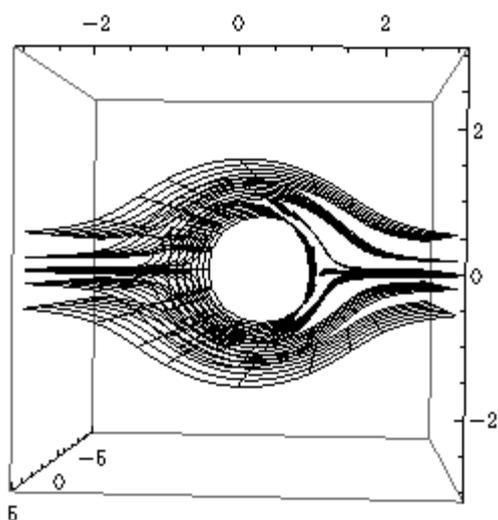
$m_1$	80		
$m_2$	46		
$M$	10	100	255
$\alpha_2$	-1,06215	-1,12455	-1,12946
$\alpha_6$	0,09621	0,11998	0,12015
$\alpha_8$	-0,47411	-0,54005	-0,54289
$\alpha_{14}$	-0,26590	-0,27863	-0,27844
$\alpha_{16}$	0,90810	0,99276	0,99851
$\alpha_{22}$	0,02082	0,06809	0,07231
$\alpha_{24}$	0,28832	0,25893	0,25503
$\alpha_{30}$	-0,16184	-0,30743	-0,31630
$\alpha_{32}$	-0,38068	-0,19911	-0,18806
$\alpha_{38}$	-0,32803	-0,36057	-0,36155
$\alpha_{40}$	0,13964	0,17770	0,17935
$\alpha_{46}$	0,63825	0,73478	0,73991
$\alpha_{48}$	-0,28397	-0,44748	-0,45694
$\alpha_{54}$	0,52064	0,51899	0,51707
$\alpha_{56}$	-0,46528	-0,46976	-0,46810
$\alpha_{62}$	-0,96602	-0,98012	-0,97940
$\alpha_{64}$	0,84331	0,90506	0,90738
$\alpha_{70}$	-0,38201	-0,36463	-0,36233
$\alpha_{72}$	0,39422	0,37754	0,37514
$\alpha_{78}$	0,68806	0,65845	0,65524
$\alpha_{80}$	-0,69796	-0,68272	-0,68037
$\beta_2$	0,32608	0,42738	0,43599
$\beta_4$	-0,23777	-0,34857	-0,35788
$\beta_{12}$	0,04462	0,05479	0,05563
$\beta_{14}$	-0,07511	-0,08765	-0,08876
$\beta_{20}$	0,00084	0,01276	0,01349
$\beta_{22}$	-0,02599	-0,05818	-0,06055
$\beta_{28}$	0,01340	0,01482	0,01486
$\beta_{30}$	-0,02462	-0,02628	-0,02619
$\beta_{36}$	-0,00923	-0,00379	-0,00336
$\beta_{38}$	0,01473	0,00158	0,00050
$\beta_{44}$	0,00021	0,00109	0,00114
$\beta_{46}$	-0,00083	-0,00301	-0,00314

Таблица Б.3 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 255$  и различных  $m_1$  и  $m_2$ 

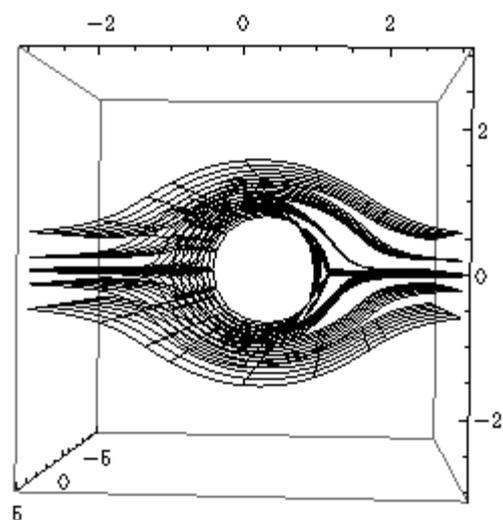
$M$	255			
	$m_1$	56	64	80
$m_2$	30	38	46	
$\alpha_2$	-1,09632	-1,11870	-1,12946	
$\alpha_6$	0,09050	0,09405	0,12015	
$\alpha_8$	-0,47333	-0,48506	-0,54289	
$\alpha_{14}$	-0,07041	-0,23447	-0,27844	
$\alpha_{16}$	0,57668	0,90474	0,99851	
$\alpha_{22}$	0,16081	0,15827	0,07231	
$\alpha_{24}$	0,04558	0,05913	0,25503	
$\alpha_{30}$	-0,39213	-0,38524	-0,31630	
$\alpha_{32}$	0,15493	0,00713	-0,18806	
$\alpha_{38}$	-0,32277	-0,33455	-0,36155	
$\alpha_{40}$	0,24233	0,24773	0,17935	
$\alpha_{46}$	0,44675	0,65624	0,73991	
$\alpha_{48}$	-0,39856	-0,51495	-0,45694	
$\alpha_{54}$	0,27957	0,29474	0,51707	
$\alpha_{56}$	-0,27458	-0,28853	-0,46810	
$\alpha_{62}$	-	-0,51790	-0,97940	
$\alpha_{64}$	-	0,51071	0,90738	
$\alpha_{70}$	-	-	-0,36233	
$\alpha_{72}$	-	-	0,37514	
$\alpha_{78}$	-	-	0,65524	
$\alpha_{80}$	-	-	-0,68037	
$\beta_2$	0,48451	0,44168	0,43599	
$\beta_4$	-0,37196	-0,35428	-0,35788	
$\beta_{12}$	0,05010	0,04820	0,05563	
$\beta_{14}$	-0,07359	-0,07095	-0,08876	
$\beta_{20}$	0,05307	0,02233	0,01349	
$\beta_{22}$	-0,08216	-0,07369	-0,06055	
$\beta_{28}$	0,00908	0,01074	0,01486	
$\beta_{30}$	-0,00815	-0,01090	-0,02619	
$\beta_{36}$	-	0,00012	-0,00336	
$\beta_{38}$	-	-0,00709	0,00050	
$\beta_{44}$	-	-	0,00114	
$\beta_{46}$	-	-	-0,00314	

## Приложение В

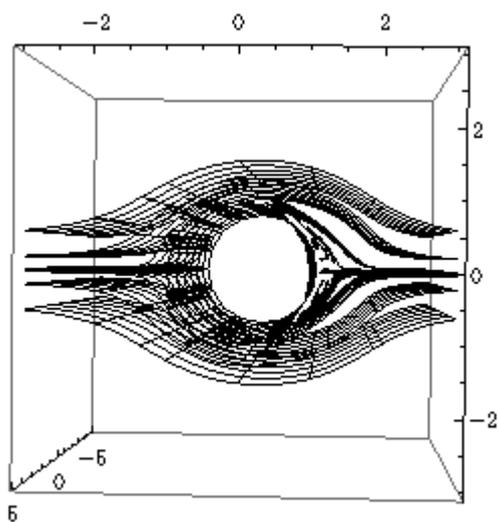
### Нелинейная задача обтекания цилиндрических тел



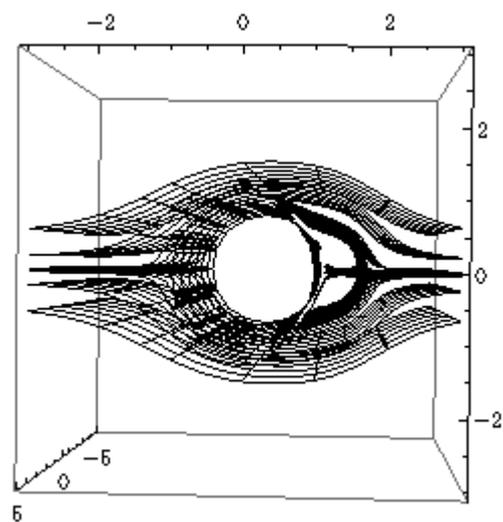
а)  $Re = 2$



б)  $Re = 5$



в)  $Re = 7$



г)  $Re = 10$

Рисунок В.1 – Поверхности уровня функции тока  
при  $M = 5$  и  $Re = 2; 5; 7; 10$

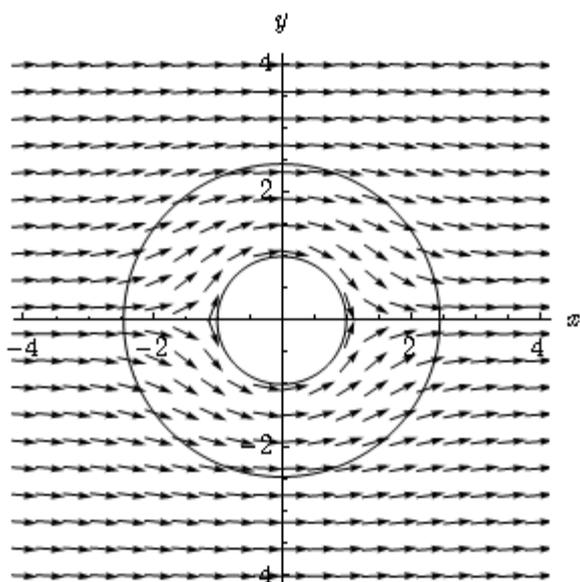
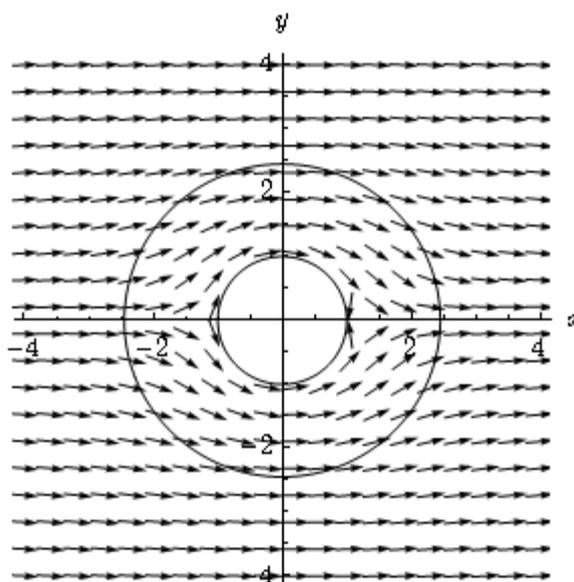
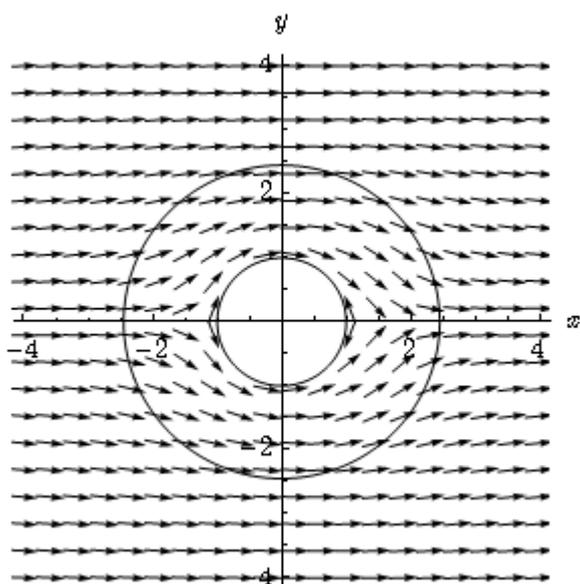
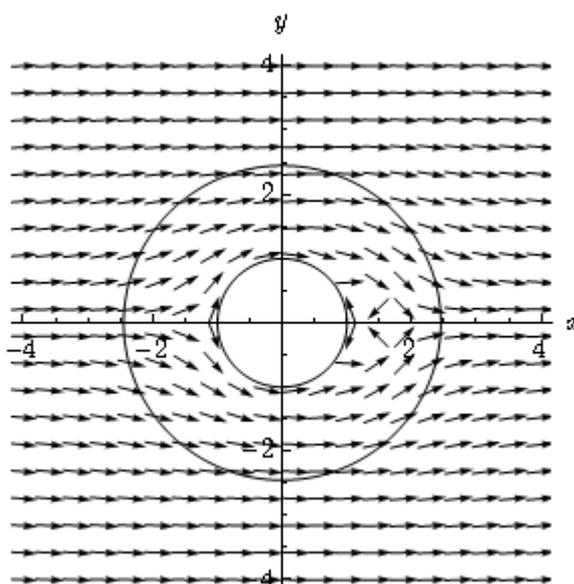
a)  $Re = 2$ б)  $Re = 5$ в)  $Re = 7$ г)  $Re = 10$ 

Рисунок В.2 – Векторные поля скоростей

при  $M = 5$  и  $Re = 2; 5; 7; 10$

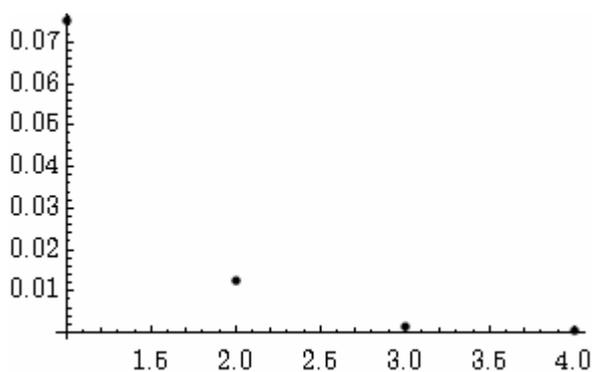
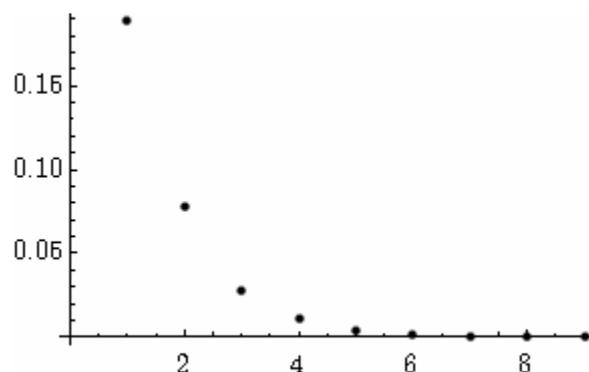
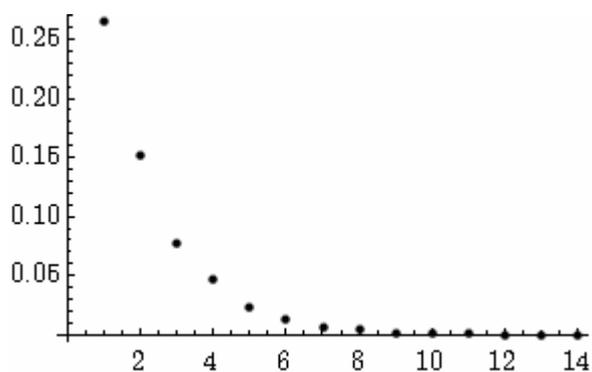
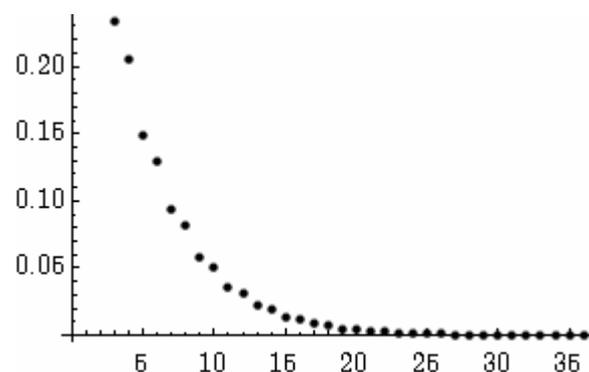
а)  $Re = 2$ б)  $Re = 5$ в)  $Re = 7$ г)  $Re = 10$ 

Рисунок В.3 – Графики сходимости  $\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}$  к нулю

при  $M = 5$  и  $Re = 2; 5; 7; 10$

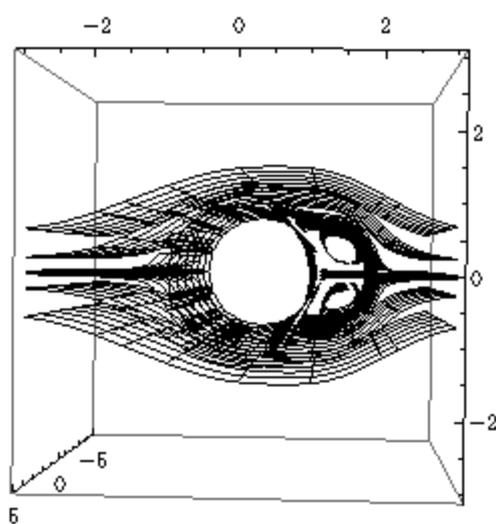


Рисунок В.4 – Поверхности уровня функции тока при  $M = 10$  и  $Re = 15$

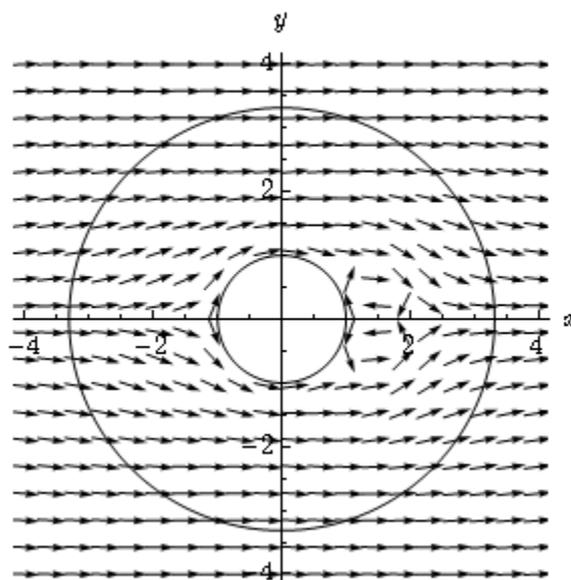


Рисунок В.5 – Векторное поле скоростей при  $M = 10$  и  $Re = 15$

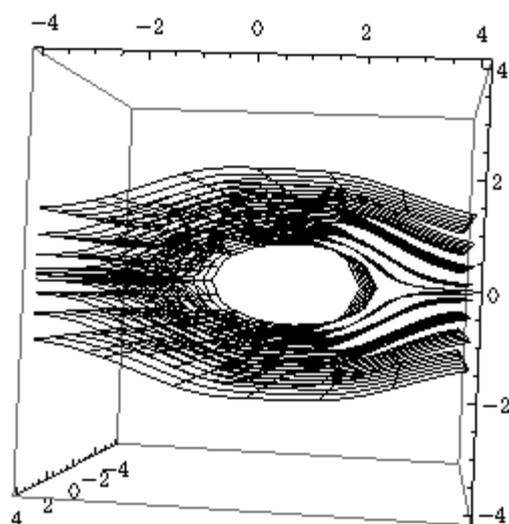
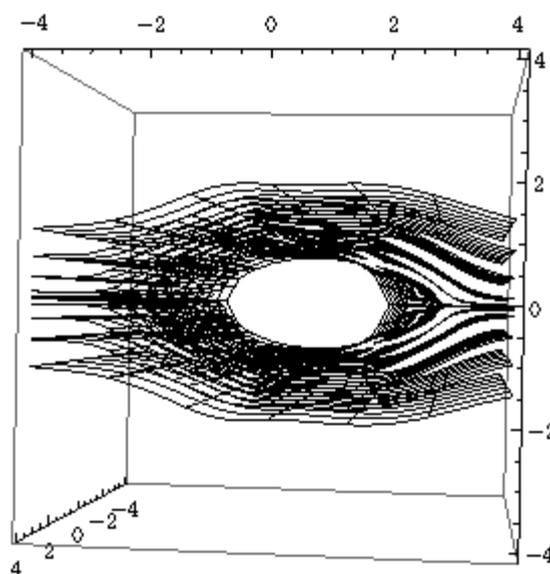
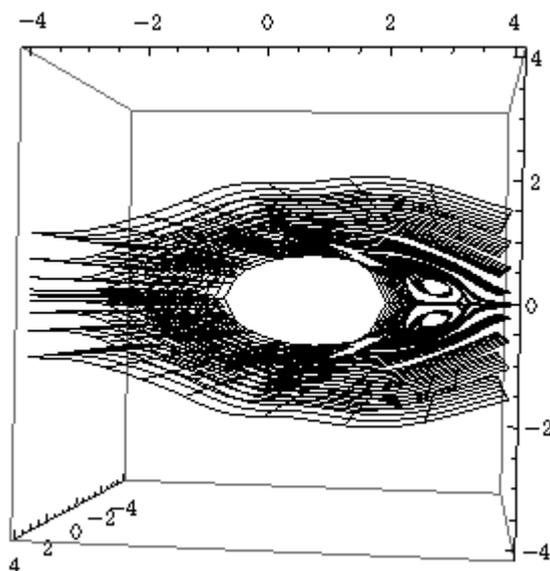
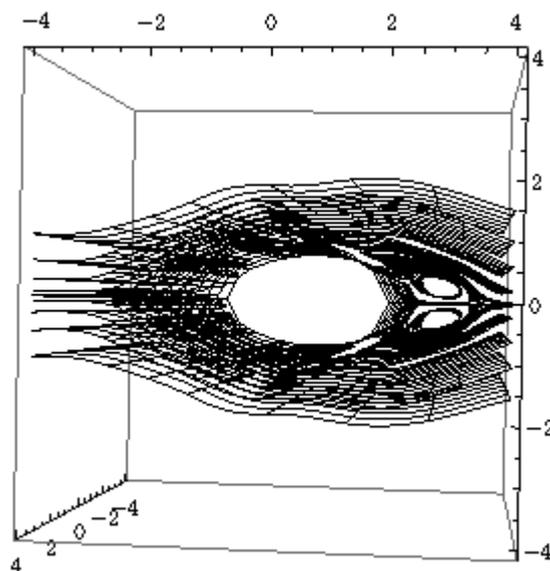
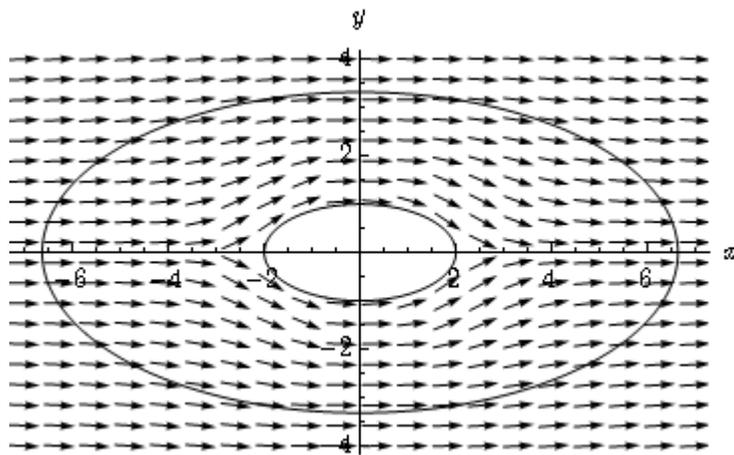
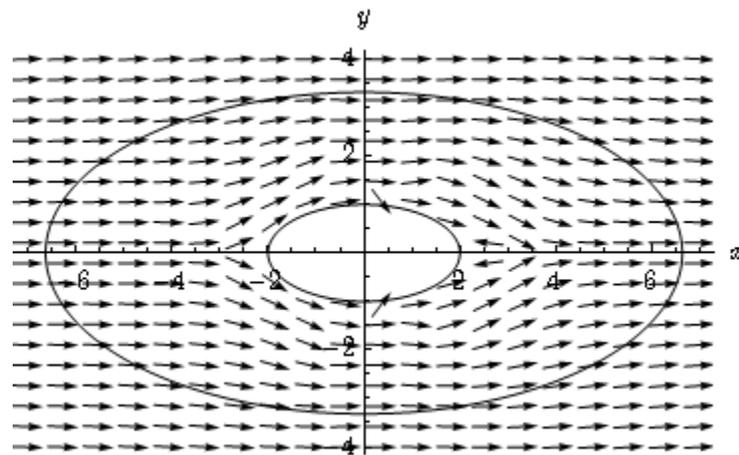
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 15$ в)  $Re = 25$ г)  $Re = 30$ 

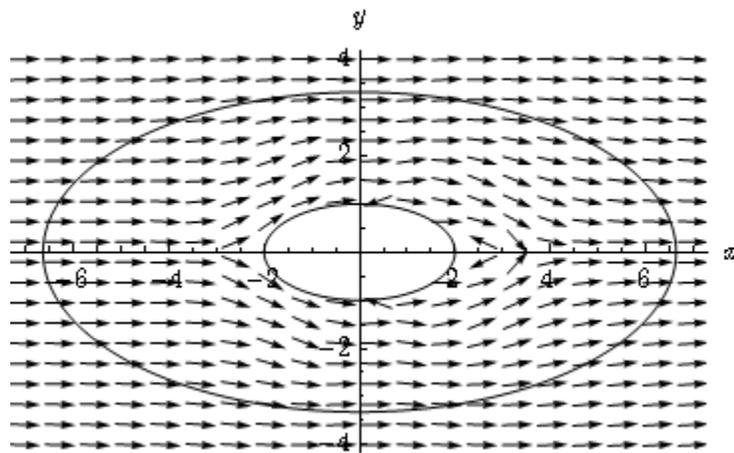
Рисунок В.6 – Поверхности уровня функции тока  
при  $Re = 5; 15; 25; 30$



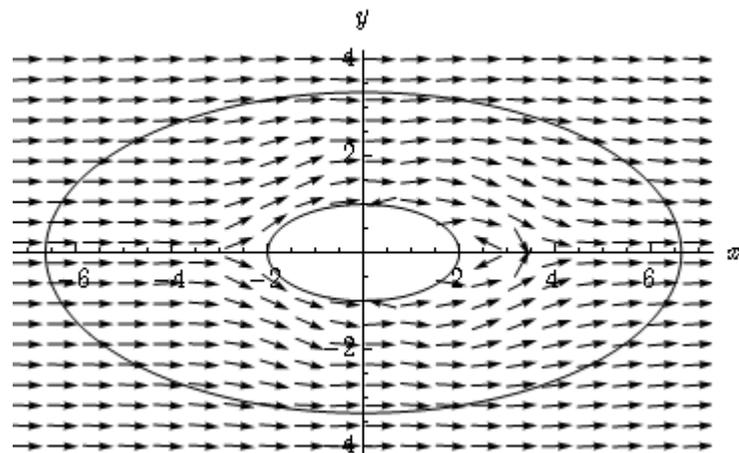
а)  $Re = 5$



б)  $Re = 15$



в)  $Re = 25$



г)  $Re = 30$

Рисунок В.7 – Векторные поля скоростей при  $Re = 5; 15; 25; 30$

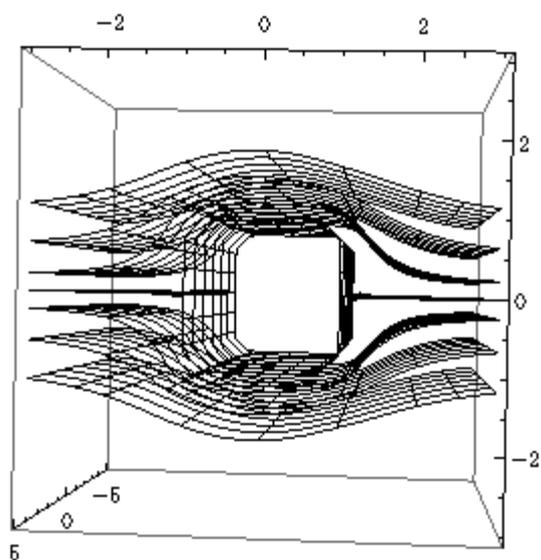
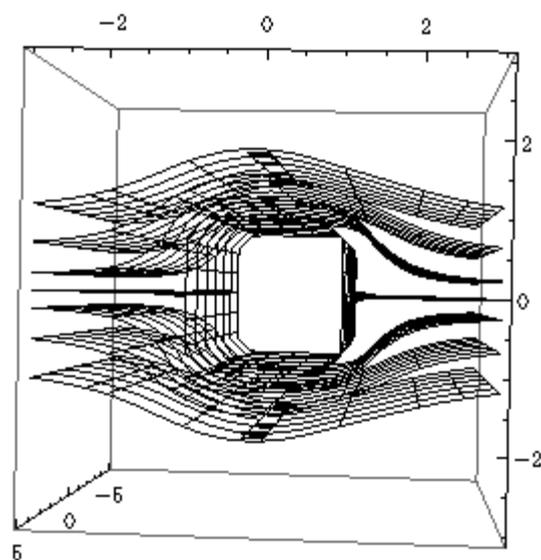
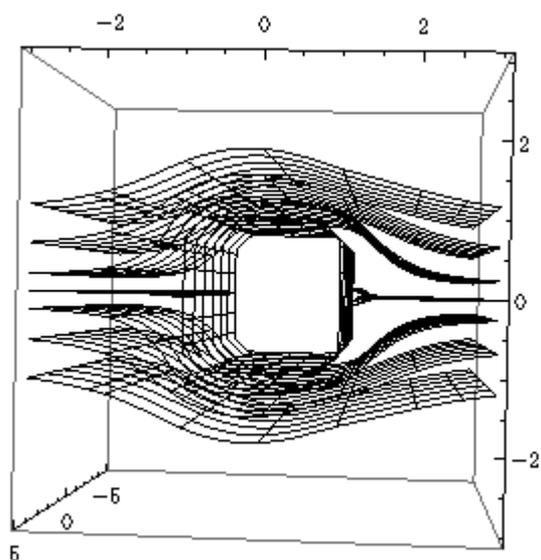
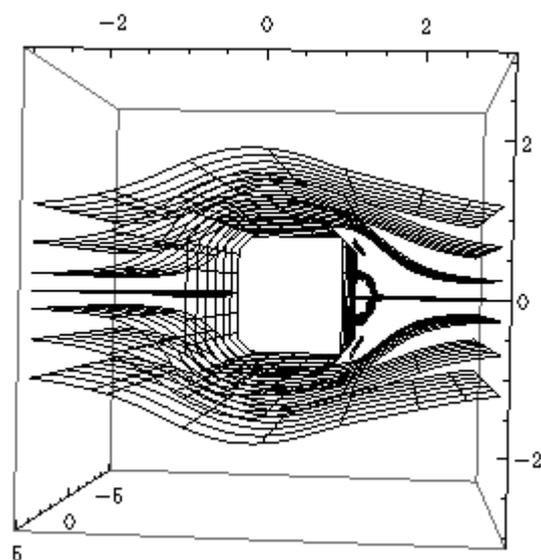
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 15$ г)  $Re = 20$ 

Рисунок В.8 – Поверхности уровня функции тока  
при  $Re = 5; 10; 15; 20$

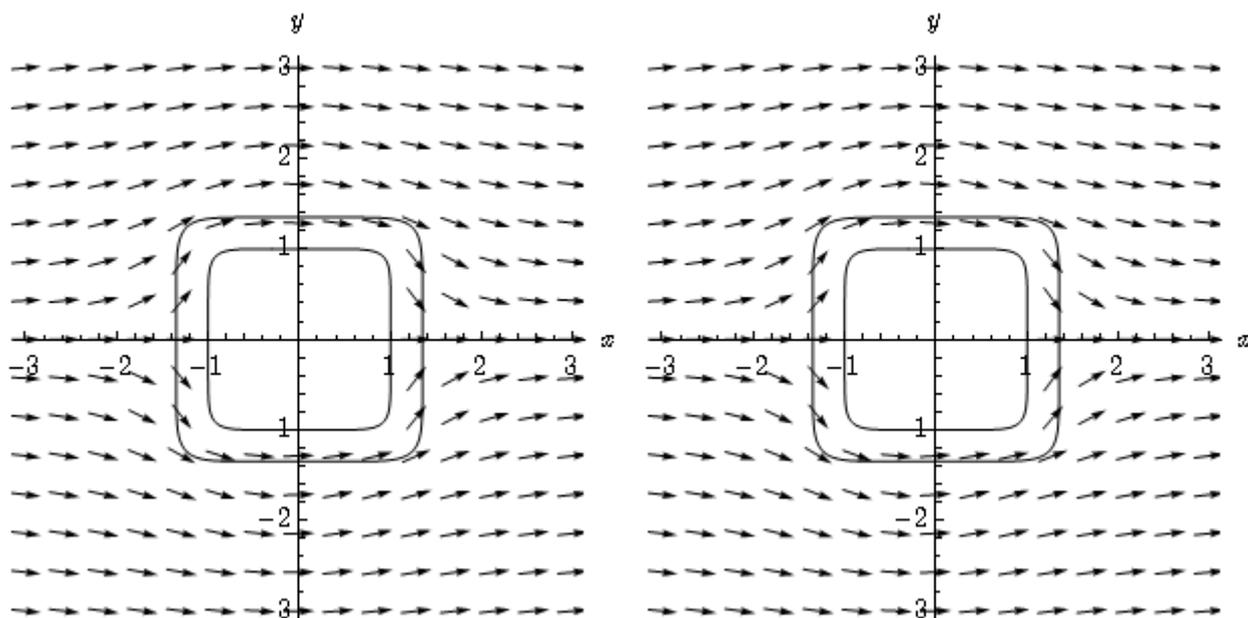
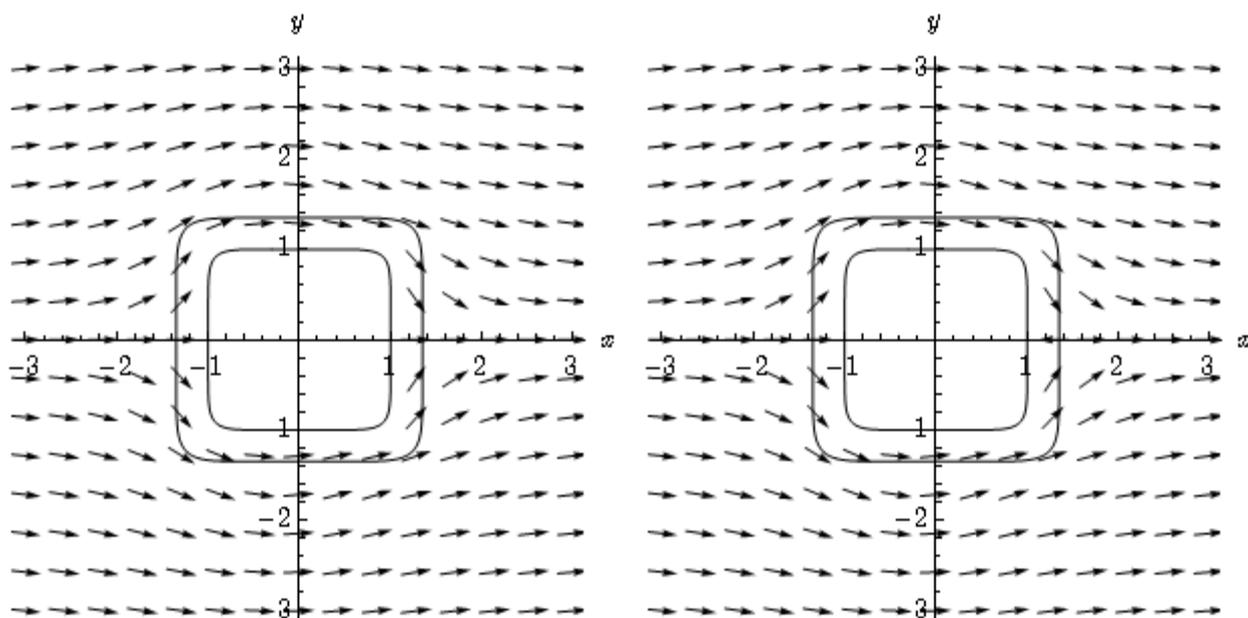
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 15$ г)  $Re = 20$ 

Рисунок В.9 – Векторные поля скоростей

при  $Re = 5; 10; 15; 20$

Таблица В.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 2$

$k$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
1	-0,96932	-0,18251	-0,00021	0,00024	1,21538	-0,06874	0,05775	0,20356	-0,15213	0,00004	-0,00006
2	-0,96757	-0,18247	-0,02210	0,02569	1,21440	-0,06679	0,05773	0,20352	-0,15210	0,00374	-0,00608
3	-0,96765	-0,17844	-0,02214	0,02573	1,21439	-0,06675	0,05677	0,19921	-0,14935	0,00374	-0,00608
4	-0,96768	-0,17844	-0,02164	0,02518	1,21441	-0,06681	0,05677	0,19922	-0,14936	0,00366	-0,00596

Таблица В.2 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 5$

$k$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
1	-0,96929	-0,45628	-0,00052	0,00060	1,21537	-0,06871	0,14437	0,50889	-0,38032	0,00009	-0,00015
2	-0,95831	-0,45605	-0,13813	0,16057	1,20923	-0,05651	0,14431	0,50864	-0,38016	0,02337	-0,03803
3	-0,96159	-0,39179	-0,13991	0,16228	1,20863	-0,05482	0,12897	0,44011	-0,33671	0,02337	-0,03783
4	-0,96208	-0,39154	-0,11952	0,13961	1,20948	-0,05715	0,12944	0,44121	-0,33792	0,02027	-0,03312
5	-0,96160	-0,40112	-0,11928	0,13956	1,20954	-0,05740	0,13143	0,45074	-0,34366	0,02031	-0,03324
6	-0,96158	-0,40116	-0,12231	0,14287	1,20943	-0,05704	0,13135	0,45056	-0,34346	0,02075	-0,03390
7	-0,96165	-0,39974	-0,12235	0,14287	1,20942	-0,05700	0,13107	0,44918	-0,34263	0,02075	-0,03390
8	-0,96165	-0,39973	-0,12190	0,14238	1,20944	-0,05705	0,13108	0,44921	-0,34267	0,02068	-0,03378
9	-0,96164	-0,39994	-0,12189	0,14238	1,20944	-0,05706	0,13112	0,44941	-0,34279	0,02068	-0,03379

Таблица В.3 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 7$

$k$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
1	- 0,96928	- 0,63879	- 0,00072	0,00085	1,21536	- 0,06869	0,20211	0,71245	- 0,53245	0,00012	- 0,00021
2	- 0,94774	- 0,63833	- 0,27075	0,31472	1,20332	- 0,04474	0,20200	0,71196	- 0,53213	0,04580	- 0,07454
3	- 0,96035	- 0,45900	- 0,27765	0,32138	1,20099	- 0,03827	0,15965	0,52123	- 0,41224	0,04580	- 0,07380
4	- 0,96011	- 0,45793	- 0,19636	0,23083	1,20444	- 0,04837	0,16251	0,52802	- 0,41957	0,03353	- 0,05527
5	- 0,95694	- 0,51189	- 0,19503	0,23116	1,20484	- 0,05000	0,17293	0,58002	- 0,44975	0,03394	- 0,05626
6	- 0,95732	- 0,51211	- 0,21929	0,25737	1,20404	- 0,04692	0,17207	0,57795	- 0,44762	0,03742	- 0,06138
7	- 0,95838	- 0,49609	- 0,21964	0,25714	1,20391	- 0,04638	0,16908	0,56281	- 0,43889	0,03726	- 0,06103
8	- 0,95817	- 0,49608	- 0,21240	0,24937	1,20412	- 0,04732	0,16939	0,56358	- 0,43965	0,03624	- 0,05953
9	- 0,95785	- 0,50084	- 0,21233	0,24951	1,20415	- 0,04748	0,17025	0,56800	- 0,44217	0,03630	- 0,05965
10	- 0,95792	- 0,50081	- 0,21448	0,25180	1,20410	- 0,04720	0,17015	0,56774	- 0,44193	0,03660	- 0,06009
11	- 0,95802	- 0,49940	- 0,21449	0,25175	1,20409	- 0,04715	0,16990	0,56644	- 0,44119	0,03658	- 0,06005
12	- 0,95800	- 0,49942	- 0,21385	0,25107	1,20410	- 0,04724	0,16993	0,56652	- 0,44126	0,03649	- 0,05992
13	- 0,95797	- 0,49984	- 0,21385	0,25109	1,20411	- 0,04725	0,17001	0,56691	- 0,44148	0,03650	- 0,05993
14	- 0,95797	- 0,49983	- 0,21404	0,25129	1,20410	- 0,04722	0,17000	0,56688	- 0,44146	0,03652	- 0,05997

Таблица В.4 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 10$

$k$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
1	-0,96925	-0,91256	-0,00103	0,00121	1,21534	-0,06867	0,28873	1,01779	-0,76064	0,00018	-0,00030
2	-0,92529	-0,91162	-0,55256	0,64231	1,19076	-0,01973	0,28850	1,01678	-0,75999	0,09348	-0,15211
3	-0,97782	-0,37107	-0,58157	0,67029	1,18104	0,00727	0,16363	0,44496	-0,40678	0,09350	-0,14912
4	-0,95689	-0,36801	-0,22097	0,26961	1,19774	-0,04628	0,18472	0,49669	-0,46144	0,04042	-0,07021
5	-0,94038	-0,71076	-0,21680	0,28126	1,19994	-0,05462	0,23957	0,80121	-0,62269	0,04459	-0,07943
6	-0,94961	-0,71063	-0,43904	0,51702	1,19372	-0,02449	0,23171	0,78160	-0,60365	0,07526	-0,12346
7	-0,96777	-0,49775	-0,44200	0,51009	1,19119	-0,01535	0,19567	0,58823	-0,49709	0,07221	-0,11695
8	-0,95489	-0,50129	-0,30131	0,36090	1,19471	-0,03678	0,20487	0,61278	-0,52028	0,05314	-0,08968
9	-0,94622	-0,63304	-0,30333	0,37096	1,19563	-0,04082	0,22376	0,72415	-0,57738	0,05578	-0,09496
10	-0,95312	-0,62880	-0,38974	0,46113	1,19388	-0,02820	0,21866	0,70950	-0,56463	0,06723	-0,11111
11	-0,95959	-0,54733	-0,38736	0,45377	1,19319	-0,02529	0,20643	0,63935	-0,52772	0,06539	-0,10754
12	-0,95428	-0,55166	-0,33360	0,39758	1,19427	-0,03351	0,21039	0,65127	-0,53783	0,05830	-0,09753
13	-0,95074	-0,60186	-0,33635	0,40369	1,19458	-0,03494	0,21743	0,69329	-0,55927	0,05963	-0,10003
14	-0,95386	-0,59821	-0,36940	0,43801	1,19395	-0,02995	0,21498	0,68545	-0,55298	0,06395	-0,10609
15	-0,95616	-0,56726	-0,36709	0,43362	1,19375	-0,02908	0,21057	0,65937	-0,53954	0,06304	-0,10442
16	-0,95406	-0,57018	-0,34667	0,41241	1,19414	-0,03223	0,21225	0,66497	-0,54392	0,06038	-0,10070
17	-0,95274	-0,58923	-0,34855	0,41563	1,19425	-0,03267	0,21489	0,68082	-0,55198	0,06100	-0,10182
18	-0,95402	-0,58703	-0,36111	0,42862	1,19401	-0,03073	0,21381	0,67708	-0,54916	0,06263	-0,10408
19	-0,95484	-0,57530	-0,35969	0,42637	1,19395	-0,03049	0,21219	0,66732	-0,54419	0,06221	-0,10334
20	-0,95401	-0,57692	-0,35196	0,41838	1,19410	-0,03170	0,21290	0,66987	-0,54607	0,06121	-0,10196
21	-0,95353	-0,58413	-0,35300	0,41995	1,19413	-0,03182	0,21388	0,67582	-0,54908	0,06149	-0,10244
22	-0,95405	-0,58298	-0,35776	0,42485	1,19404	-0,03107	0,21342	0,67413	-0,54786	0,06210	-0,10329
23	-0,95434	-0,57855	-0,35701	0,42378	1,19402	-0,03101	0,21282	0,67048	-0,54602	0,06192	-0,10297
24	-0,95401	-0,57935	-0,35409	0,42077	1,19407	-0,03148	0,21312	0,67161	-0,54681	0,06154	-0,10245
25	-0,95384	-0,58207	-0,35461	0,42150	1,19408	-0,03150	0,21348	0,67384	-0,54793	0,06167	-0,10266
26	-0,95405	-0,58152	-0,35641	0,42334	1,19405	-0,03122	0,21329	0,67310	-0,54742	0,06189	-0,10298
27	-0,95415	-0,57985	-0,35604	0,42285	1,19404	-0,03120	0,21307	0,67173	-0,54674	0,06181	-0,10284
28	-0,95402	-0,58023	-0,35494	0,42172	1,19407	-0,03138	0,21319	0,67222	-0,54707	0,06167	-0,10265

Продолжение таблицы В.4

$k$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
29	-0,95396	-0,58125	-0,35519	0,42205	1,19407	-0,03138	0,21333	0,67305	-0,54748	0,06173	-0,10274
30	-0,95404	-0,58099	-0,35587	0,42274	1,19405	-0,03128	0,21325	0,67273	-0,54727	0,06181	-0,10285
31	-0,95407	-0,58037	-0,35570	0,42252	1,19405	-0,03128	0,21317	0,67223	-0,54702	0,06178	-0,10280
32	-0,95402	-0,58054	-0,35529	0,42210	1,19406	-0,03134	0,21322	0,67244	-0,54716	0,06173	-0,10273
33	-0,95400	-0,58092	-0,35540	0,42224	1,19406	-0,03134	0,21328	0,67274	-0,54731	0,06175	-0,10276
34	-0,95403	-0,58081	-0,35565	0,42250	1,19406	-0,03130	0,21324	0,67261	-0,54722	0,06178	-0,10281
35	-0,95405	-0,58057	-0,35558	0,42241	1,19406	-0,03130	0,21321	0,67242	-0,54713	0,06176	-0,10278
36	-0,95403	-0,58065	-0,35542	0,42225	1,19406	-0,03133	0,21323	0,67251	-0,54718	0,06175	-0,10278

Таблица В.5 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $\text{Re} = 15$

$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	$\beta_{12}$	$\beta_{14}$
-0,94715	-0,60077	-0,54725	0,66802	1,17678	-0,01202	0,25541	0,72064	-0,64252	0,09992	-0,17187

Таблица В.6 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 5; 15; 25; 30$

Re	5	15	25	30
$\alpha_2$	-1,87567	-1,40114	-1,26857	-1,12990
$\alpha_4$	-1,04283	-1,48021	-3,00211	-3,06433
$\alpha_6$	-0,51910	-0,71559	-0,72618	-0,70774
$\alpha_8$	0,02341	0,78267	1,06906	1,07334
$\alpha_{10}$	-0,68107	-1,32711	-2,17829	-2,32022
$\alpha_{12}$	0,64045	1,66005	2,95198	3,33717
$\beta_2$	1,41298	1,28088	1,32077	1,28488
$\beta_4$	-0,03946	-0,06126	-0,05098	-0,06147

Продолжение таблицы В.6

Re	5	15	25	30
$\beta_6$	0,05592	0,14027	0,22603	0,25181
$\beta_8$	0,84299	1,60604	2,97820	3,25433
$\beta_{10}$	-0,25789	-0,70978	-1,10184	-1,27695
$\beta_{12}$	0,00351	0,00372	-0,00063	-0,00180
$\beta_{14}$	-0,04199	-0,02861	0,00214	0,01588
$\beta_{16}$	-0,00085	-0,00276	-0,00389	-0,00482
$\beta_{18}$	-0,01486	-0,02687	-0,04964	-0,04803

Таблица В.7 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 10$  и  $Re = 5, 10, 15, 20$

Re	5	10	15	20
$\alpha_1$	-1,04136	-1,04946	-1,06012	-1,07062
$\alpha_2$	-0,00483	-0,01028	-0,01644	-0,02270
$\alpha_3$	0,16045	0,16827	0,17269	0,16676
$\alpha_4$	-0,62147	-0,63058	-0,63341	-0,61986
$\alpha_5$	-0,13562	-0,24653	-0,31775	-0,34992
$\alpha_6$	0,19577	0,35451	0,45358	0,49358
$\alpha_7$	-0,43359	-0,51585	-0,62883	-0,74774
$\alpha_8$	1,25881	1,38707	1,56253	1,74626
$\alpha_9$	0,05825	0,09805	0,11166	0,10568
$\alpha_{10}$	-0,06811	-0,10820	-0,10837	-0,07837
$\alpha_{11}$	-0,11132	-0,11512	-0,12456	-0,13445
$\alpha_{12}$	0,63324	0,63771	0,64667	0,65056
$\alpha_{13}$	0,19100	0,36474	0,50070	0,58176
$\alpha_{14}$	-0,31811	-0,60186	-0,81563	-0,93550
$\alpha_{15}$	0,18372	0,29401	0,45882	0,64788
$\alpha_{16}$	-1,19593	-1,39130	-1,67808	-2,00150
$\alpha_{17}$	-0,09046	-0,16008	-0,19785	-0,20035
$\alpha_{18}$	0,11034	0,18621	0,20838	0,17343
$\alpha_{19}$	-0,27266	-0,28699	-0,29375	-0,28994
$\alpha_{20}$	-0,22822	-0,21096	-0,20107	-0,19885
$\alpha_{21}$	-0,23811	-0,47658	-0,69462	-0,86090
$\alpha_{22}$	0,42259	0,83000	1,18260	1,43531
$\alpha_{23}$	0,52685	0,41851	0,23889	0,01194
$\alpha_{24}$	0,44427	0,65627	0,99156	1,39960
$\alpha_{25}$	0,15373	0,28430	0,37805	0,42454
$\alpha_{26}$	-0,19208	-0,34763	-0,44322	-0,46482

Продолжение таблицы В.7

Re	5	10	15	20
$\alpha_{27}$	0,79021	0,83545	0,87555	0,89466
$\alpha_{28}$	-0,47373	-0,52721	-0,57566	-0,60318
$\alpha_{29}$	0,20406	0,43544	0,68067	0,89822
$\alpha_{30}$	-0,40116	-0,82077	-1,22767	-1,56235
$\alpha_{31}$	-1,42034	-1,35420	-1,21705	-1,01579
$\alpha_{32}$	0,75815	0,59525	0,30551	-0,08250
$\alpha_{33}$	-0,17440	-0,33077	-0,45665	-0,53813
$\alpha_{34}$	0,21913	0,41091	0,55498	0,63245
$\alpha_{35}$	-1,05905	-1,12940	-1,20282	-1,25272
$\alpha_{36}$	0,97268	1,05489	1,14121	1,20247
$\alpha_{37}$	-0,05616	-0,16048	-0,31584	-0,48844
$\alpha_{38}$	0,18877	0,42520	0,70171	0,96991
$\alpha_{39}$	1,89653	1,91658	1,90165	1,83483
$\alpha_{40}$	-1,66082	-1,62340	-1,51228	-1,32107
$\alpha_{41}$	0,10067	0,19535	0,27860	0,34190
$\alpha_{42}$	-0,12457	-0,23991	-0,33743	-0,40593
$\alpha_{43}$	0,65864	0,70734	0,76267	0,80596
$\alpha_{44}$	-0,67907	-0,73497	-0,79853	-0,84900
$\alpha_{45}$	-0,05077	-0,06793	-0,04145	0,01675
$\alpha_{46}$	0,01091	-0,01403	-0,08229	-0,17638
$\alpha_{47}$	-1,17932	-1,23439	-1,29246	-1,33354
$\alpha_{48}$	1,18247	1,22290	1,25379	1,25685
$\beta_1$	-0,18839	-0,16202	-0,12322	-0,07819
$\beta_2$	0,46791	0,42432	0,36127	0,28988
$\beta_3$	0,09445	0,17025	0,21946	0,25102
$\beta_4$	0,22873	0,41366	0,53707	0,62248

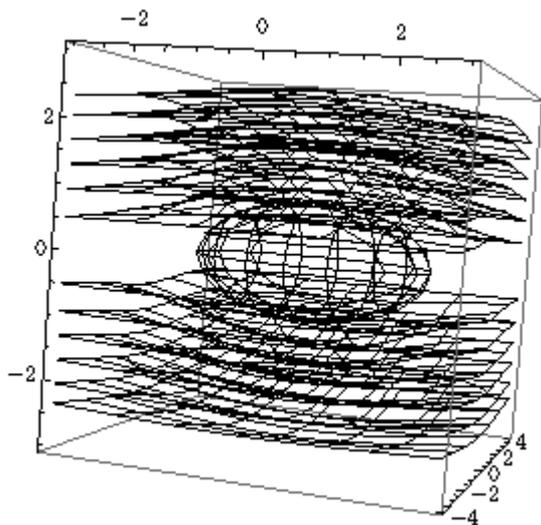
Продолжение таблицы В.7

Re	5	10	15	20
$\beta_5$	-0,28806	-0,52081	-0,67529	-0,77993
$\beta_6$	0,11009	0,10746	0,10500	0,10323
$\beta_7$	-0,12807	-0,12528	-0,12441	-0,12655
$\beta_8$	0,02216	0,04136	0,05646	0,06941
$\beta_9$	-0,04000	-0,07364	-0,09825	-0,11706
$\beta_{10}$	-0,03097	-0,03082	-0,03096	-0,03143
$\beta_{11}$	-0,01310	-0,01573	-0,01838	-0,02013
$\beta_{12}$	0,00797	0,01403	0,01733	0,01802
$\beta_{13}$	-0,00996	-0,01797	-0,02310	-0,02521
$\beta_{14}$	-0,00593	-0,00448	-0,00259	-0,00096
$\beta_{15}$	0,00224	0,00013	-0,00263	-0,00492
$\beta_{16}$	-0,00613	-0,01098	-0,01375	-0,01400
$\beta_{17}$	0,01193	0,02171	0,02790	0,02974
$\beta_{18}$	-0,01467	-0,01792	-0,02245	-0,02720
$\beta_{19}$	0,02699	0,03237	0,03998	0,04810
$\beta_{20}$	0,00157	0,00268	0,00314	0,00285

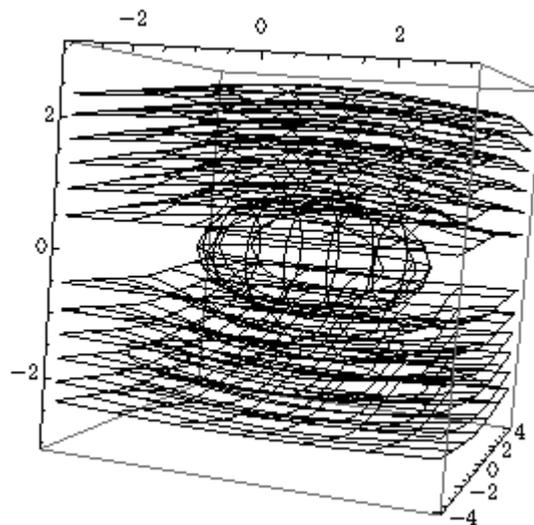
Продолжение таблицы В.7

Re	5	10	15	20
$\beta_{20}$	0,00157	0,00268	0,00314	0,00285
$\beta_{21}$	-0,00168	-0,00278	-0,00298	-0,00211
$\beta_{22}$	-0,00359	-0,00307	-0,00244	-0,00183
$\beta_{23}$	0,00502	0,00435	0,00353	0,00272
$\beta_{24}$	0,00050	0,00118	0,00207	0,00309
$\beta_{25}$	-0,00100	-0,00220	-0,00360	-0,00511
$\beta_{26}$	0,00053	0,00031	0,00007	-0,00007
$\beta_{27}$	-0,00083	-0,00053	-0,00018	0,00003
$\beta_{28}$	0,00010	0,00015	0,00014	0,00006
$\beta_{29}$	$6,54 \times 10^{-6}$	0,00007	0,00023	0,00050
$\beta_{30}$	-0,00049	-0,00045	-0,00041	-0,00035
$\beta_{31}$	0,00103	0,00099	0,00094	0,00087
$\beta_{32}$	0,00012	0,00024	0,00036	0,00046
$\beta_{33}$	-0,00019	-0,00037	-0,00052	-0,00063
$\beta_{34}$	0,00035	0,00036	0,00039	0,00043
$\beta_{35}$	-0,00073	-0,00076	-0,00081	-0,00087

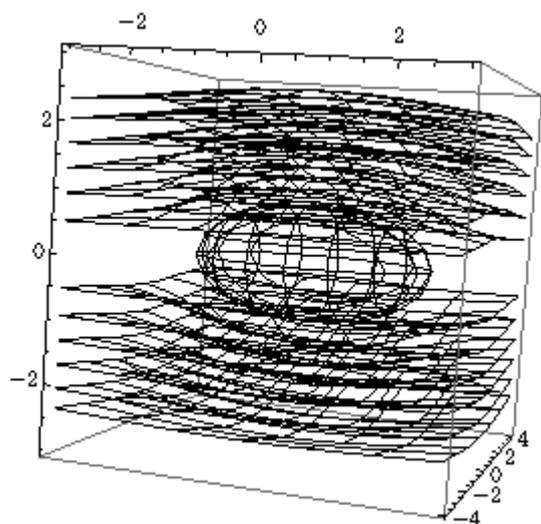
**Приложение Г**  
**Линеаризованная по Стоксу**  
**задача обтекания тел вращения**



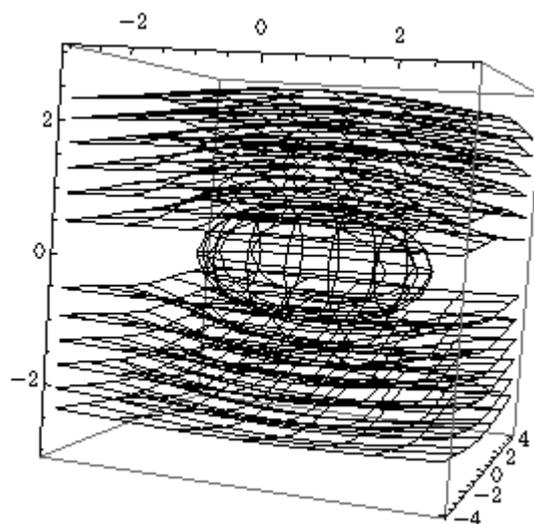
а)  $m_1 = 6, m_2 = 10$



б)  $m_1 = 10, m_2 = 14$



в)  $m_1 = 14, m_2 = 18$



г)  $m_1 = 18, m_2 = 22$

Рисунок Г.1 – Поверхности уровня функции тока  
для  $M = 5$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

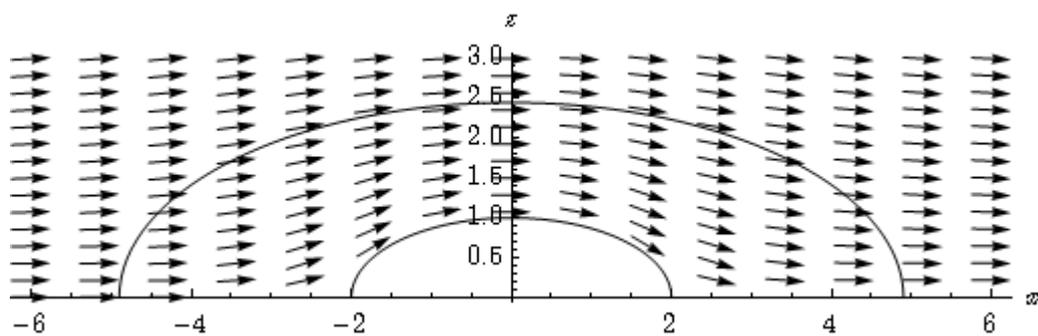
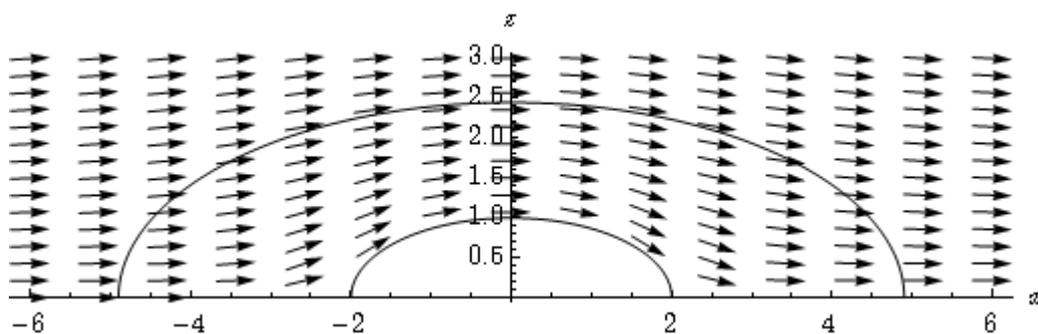
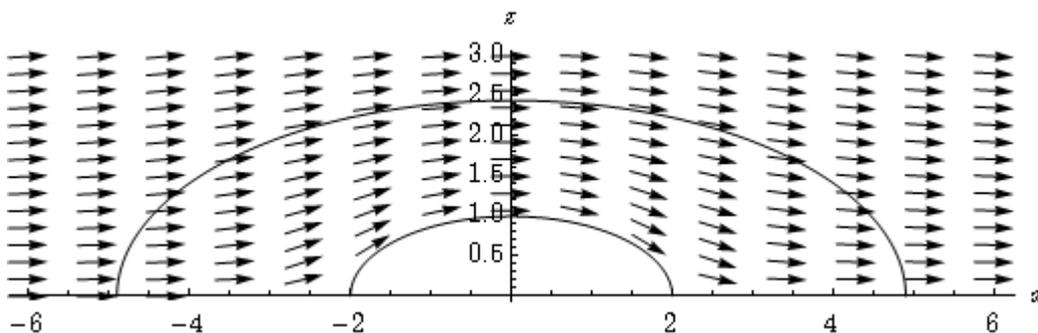
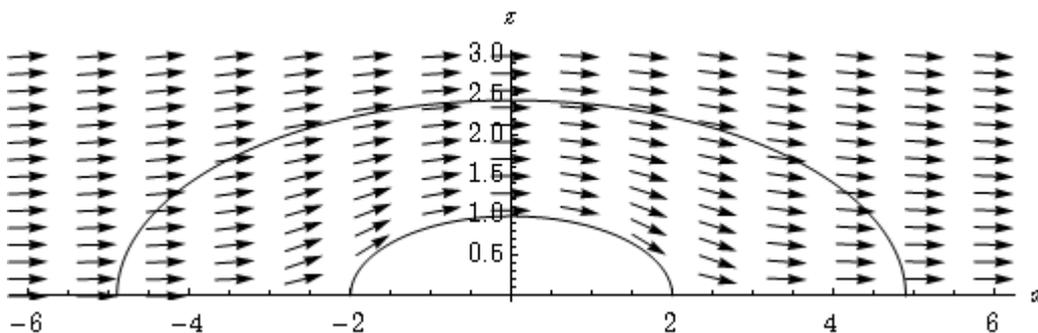
а)  $m_1 = 6, m_2 = 10$ б)  $m_1 = 10, m_2 = 14$ в)  $m_1 = 14, m_2 = 18$ г)  $m_1 = 18, m_2 = 22$ 

Рисунок Г.2 – Векторное поле скоростей

для  $M = 5$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

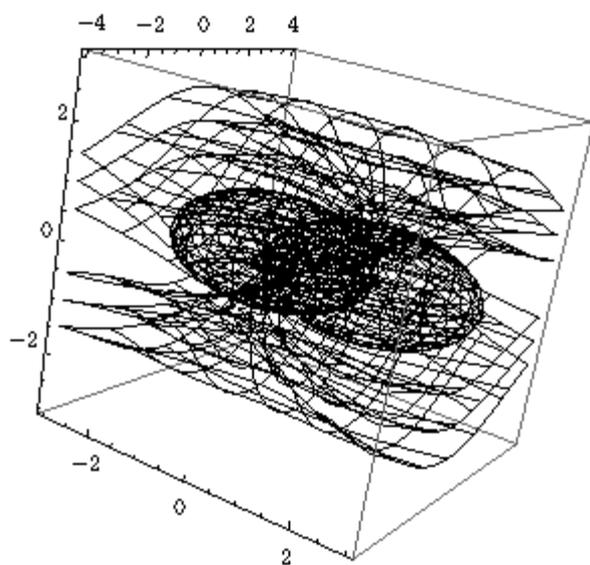
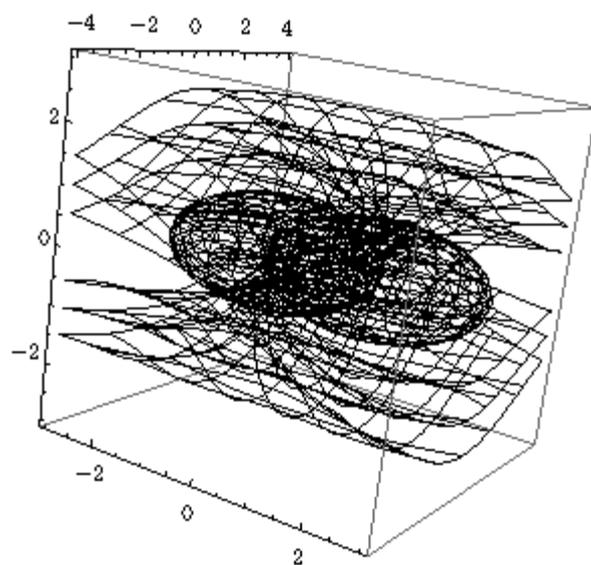
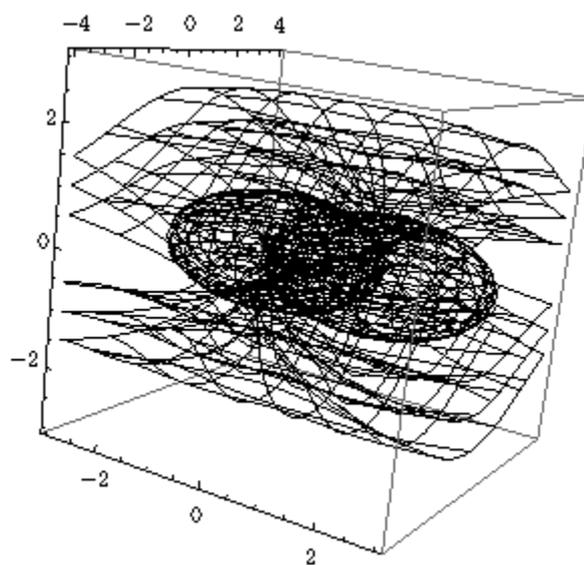
а)  $m_1 = 6, m_2 = 6$ б)  $m_1 = 6, m_2 = 10$ в)  $m_1 = 10, m_2 = 14$ 

Рисунок Г.3 – Поверхности уровня функции тока  
для  $M = 4$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

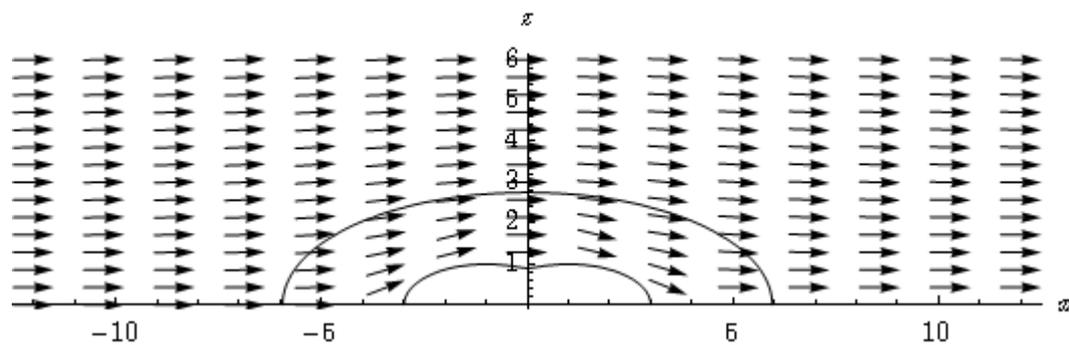
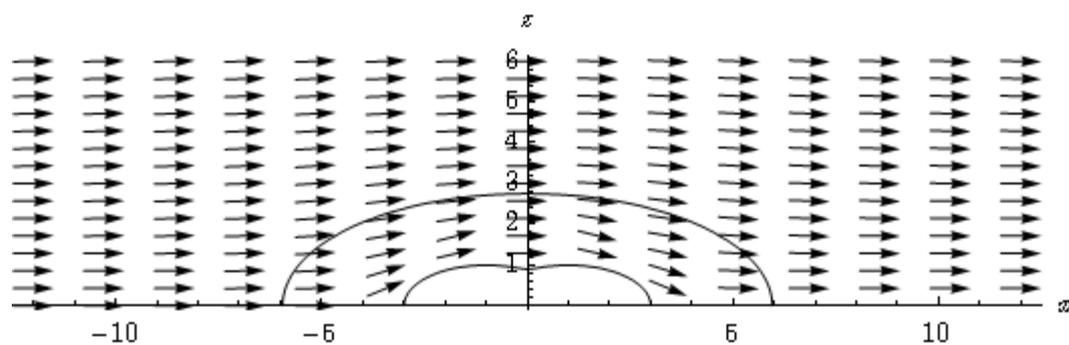
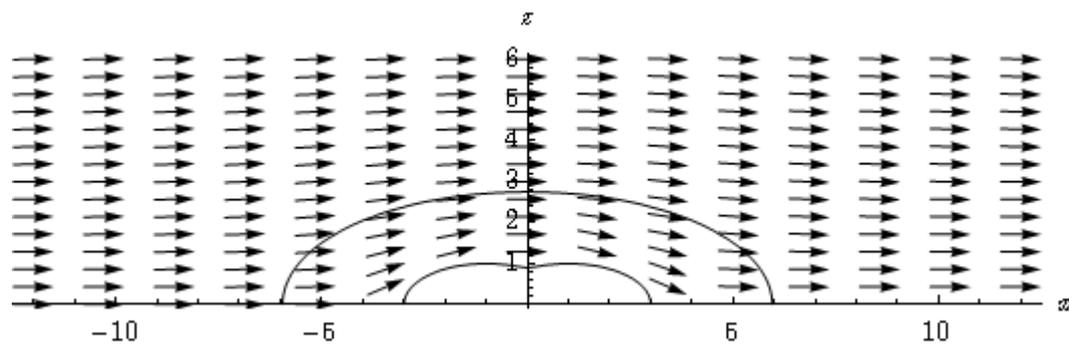
а)  $m_1 = 6, m_2 = 6$ б)  $m_1 = 6, m_2 = 10$ в)  $m_1 = 10, m_2 = 14$ 

Рисунок Г.4 – Векторное поле скоростей

для  $M = 4$  и различных  $m_1$  и  $m_2$

Таблица Г.1 – Значения точного и приближенного решений

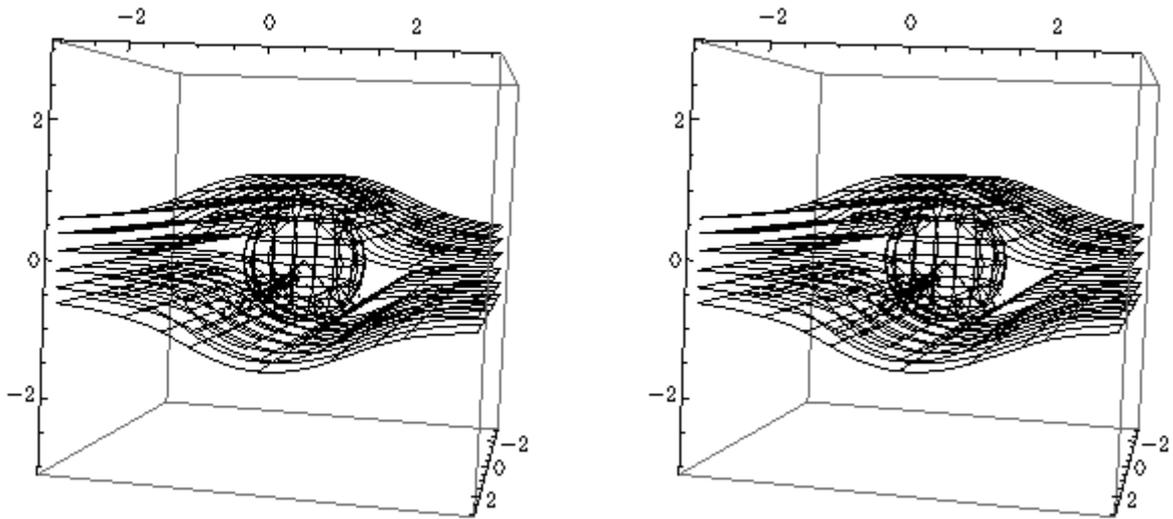
$x$	$z$	$\psi_n$	$\psi$	$ \psi_n - \psi $
0	1,05200	0,00177	0,00123	0,00054
0	1,14891	0,01333	0,01835	0,00502
0	1,24044	0,03352	0,02699	0,00653
0	1,69706	0,28891	0,23567	0,05324
0,20265	1,04672	0,00158	0,00122	0,00036
0,20785	1,14315	0,01269	0,01013	0,00256
0,21304	1,23423	0,03276	0,02672	0,00604
0,24249	1,68855	0,28569	0,23331	0,05238
0,40530	1,03074	0,00140	0,00118	0,00022
0,41569	1,12570	0,01190	0,00983	0,00207
0,42608	1,21538	0,03147	0,02591	0,00556
0,48497	1,66277	0,27585	0,22624	0,04961
0,60795	1,00354	0,00142	0,00112	0,00030
0,62354	1,09599	0,01154	0,00931	0,00223
0,63913	1,18331	0,03006	0,02456	0,00550
0,72746	1,61889	0,25924	0,21446	0,04478
0,81060	0,96417	0,00133	0,00103	0,00030
0,83138	1,05300	0,01057	0,00860	0,00197
0,85217	1,13689	0,02738	0,02267	0,00471
0,96995	1,55538	0,23652	0,19796	0,03856
1,01325	0,91106	0,00106	0,00092	0,00014
1,03923	0,99499	0,00878	0,00768	0,00110
1,06521	1,07426	0,02330	0,02024	0,00306
1,09119	1,14983	0,04412	0,03795	0,00617
1,21244	1,46969	0,20906	0,17675	0,03231
1,38564	1,87350	0,59833	0,50262	0,09571
1,21590	0,84160	0,00077	0,00079	0,00002
1,24708	0,91913	0,00677	0,00655	0,00022
1,27825	0,99236	0,01867	0,01727	0,00140
1,45492	1,35765	0,17767	0,15083	0,02684
1,66277	1,73066	0,50874	0,42890	0,07984
1,41855	0,75128	0,00052	0,00063	0,00011
1,45492	0,82049	0,00483	0,00522	0,00039
1,49130	0,88585	0,01381	0,01376	0,00005
1,69741	1,21194	0,14139	0,12019	0,02120
1,93990	1,54493	0,40498	0,34178	0,06320
1,62120	0,63120	0,00030	0,00044	0,00014
1,66277	0,68935	0,00290	0,00368	0,00078
1,70434	0,74427	0,00858	0,00972	0,00114
1,93990	1,01823	0,09796	0,08484	0,01311

Продолжение таблицы Г.1

$x$	$z$	$\psi_n$	$\psi$	$ \psi_n - \psi $
2,21703	1,29800	0,28378	0,24126	0,04252
2,49415	1,55538	0,53549	0,45686	0,07863
1,82385	0,45856	0,00011	0,00023	0,00012
1,87061	0,50080	0,00113	0,00194	0,00081
1,91738	0,54070	0,00347	0,00513	0,00166
2,18238	0,73973	0,04719	0,04478	0,00241
2,49415	0,94297	0,14676	0,12733	0,01943
2,80592	1,12996	0,28015	0,24112	0,03903
1,92517	0,32849	0,00004	0,00012	0,00008
1,97454	0,35875	0,00045	0,00100	0,00055
2,02390	0,38733	0,00141	0,00263	0,00122
2,07326	0,41458	0,00305	0,00493	0,00188
2,12263	0,44074	0,00547	0,00784	0,00237
1,30943	1,06216	0,03623	0,03239	0,00384
1,52767	0,94817	0,02750	0,02581	0,00169
1,56404	1,00800	0,04559	0,04102	0,00457
1,74591	0,79662	0,01757	0,01822	0,00065
1,78748	0,84689	0,02984	0,02895	0,00089
1,82905	0,89543	0,04515	0,04174	0,00341
1,96415	0,57873	0,00736	0,00961	0,00225
2,01091	0,61525	0,01292	0,01528	0,00236
2,05768	0,65051	0,02019	0,02203	0,00184
2,10444	0,68471	0,02909	0,02978	0,00069
2,17199	0,46560	0,00874	0,01130	0,00256
2,22136	0,49049	0,01286	0,01528	0,00242
2,27072	0,51433	0,01784	0,01975	0,00191
2,32008	0,53761	0,02362	0,02467	0,00105
2,63272	0,67550	0,07394	0,06534	0,00860
2,96181	0,80944	0,14251	0,12373	0,01878
1,99610	0,18153	0,00001	0,00004	0,00003
2,09847	0,21404	0,00034	0,00080	0,00046
2,04728	0,19825	0,00011	0,00030	0,00019
2,14965	0,22910	0,00075	0,00151	0,00076
2,20083	0,24356	0,00137	0,00239	0,00102
2,25201	0,25752	0,00223	0,00345	0,00122
2,30319	0,27105	0,00334	0,00467	0,00134
2,35438	0,28423	0,00471	0,00603	0,00132
2,40556	0,29709	0,00634	0,00753	0,00119
2,45674	0,30968	0,00824	0,00917	0,00093
2,72971	0,37329	0,02192	0,01995	0,00197
3,07093	0,04473	0,04392	0,03779	0,00613

## Приложение Д

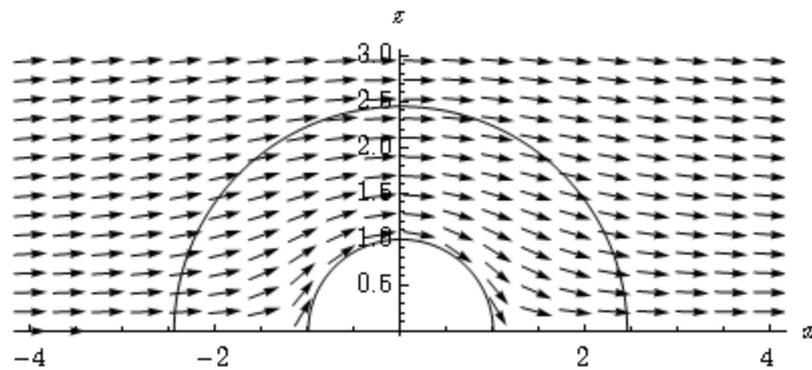
### Нелинейная задача обтекания тел вращения



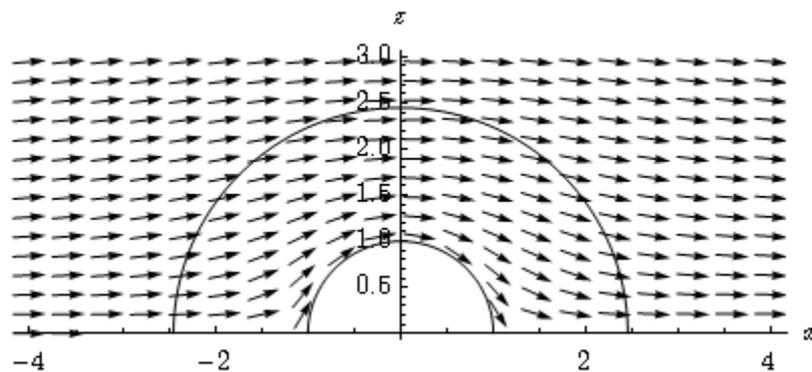
а)  $Re = 5$

б)  $Re = 10$

Рисунок Д.1 – Поверхности уровня функции тока при  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$



а)  $Re = 5$



б)  $Re = 10$

Рисунок Д.2 – Векторные поля скоростей при  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$

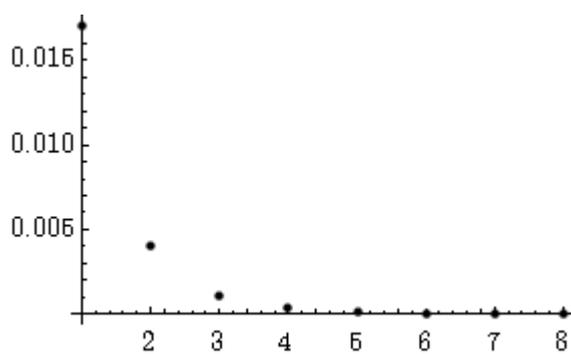
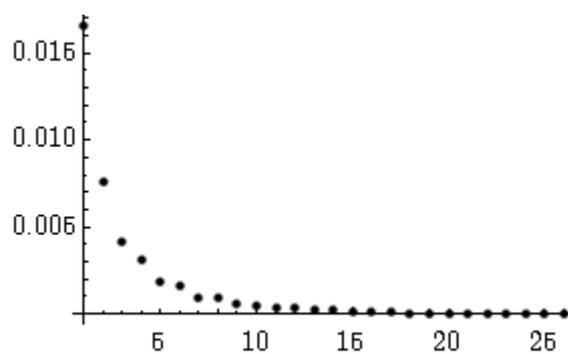
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ 

Рисунок Д.3 – Графики сходимости  $\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}$  к нулю при  $M = 5$  и  $Re = 5; 10$

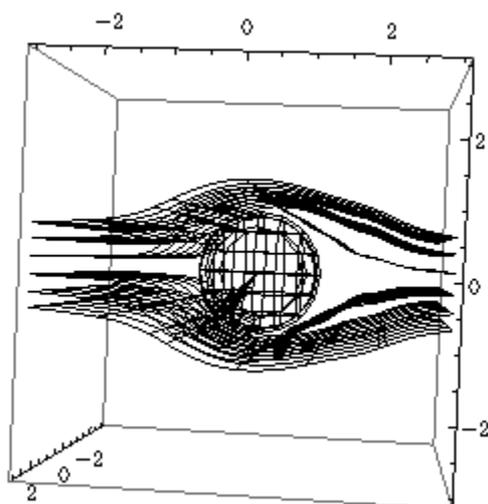
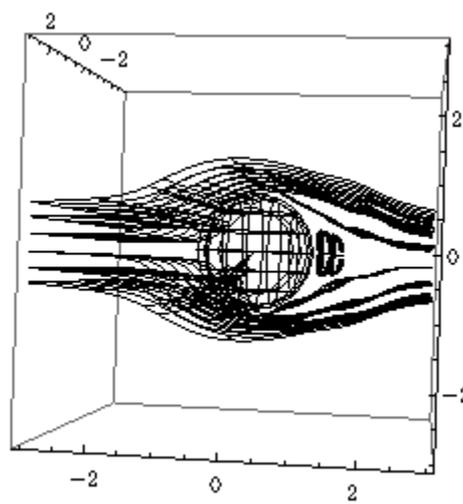
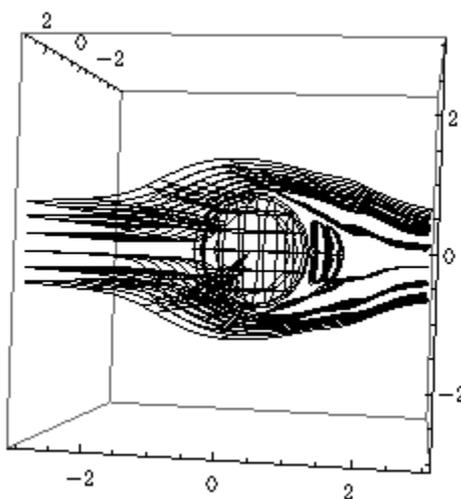
а)  $Re = 15$ б)  $Re = 20$ в)  $Re = 25$ 

Рисунок Д.4 – Поверхности уровня функции тока при  $M = 10$  и  $Re = 15; 20; 25$

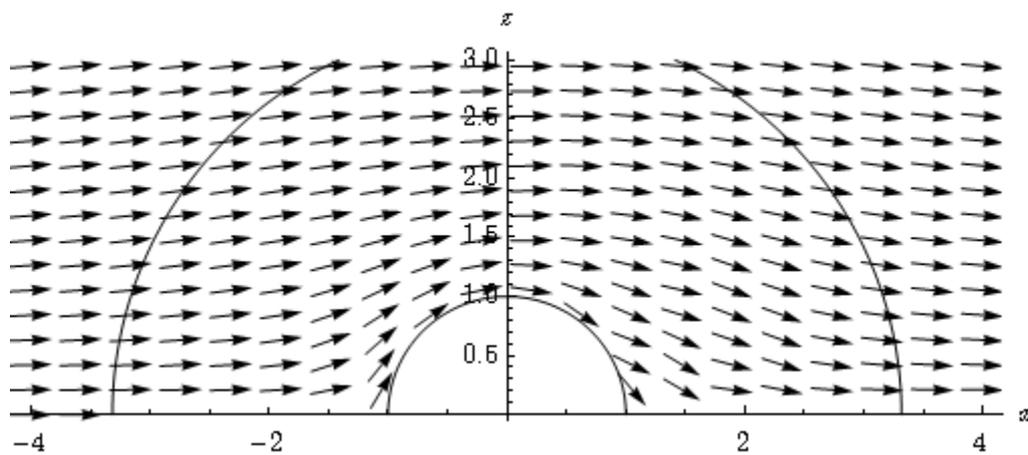
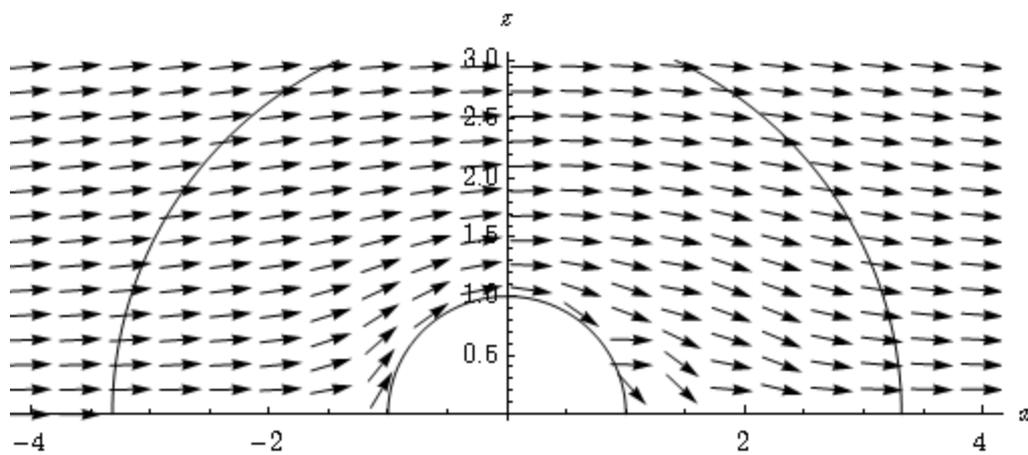
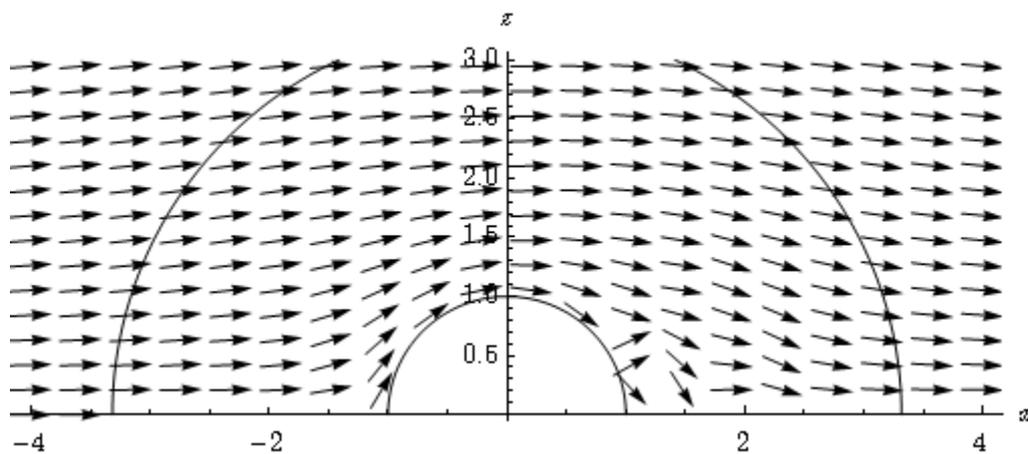
а)  $Re = 15$ б)  $Re = 20$ в)  $Re = 25$ 

Рисунок Д.5 – Векторные поля скоростей

при  $M = 10$  и  $Re = 15; 20; 25$

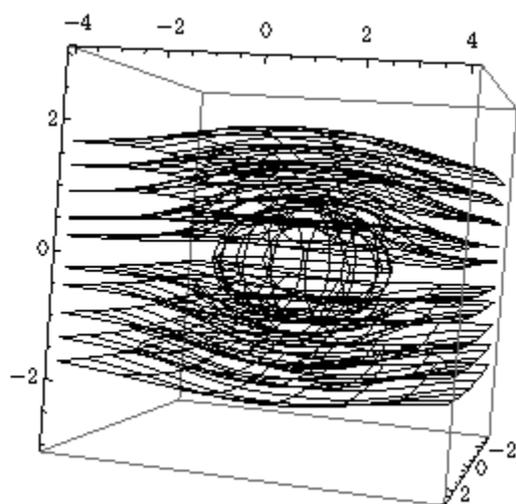
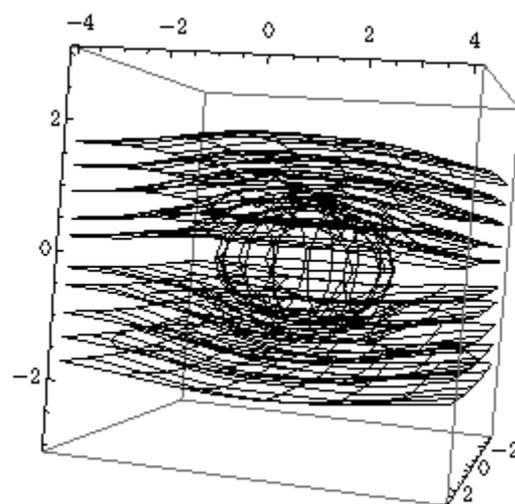
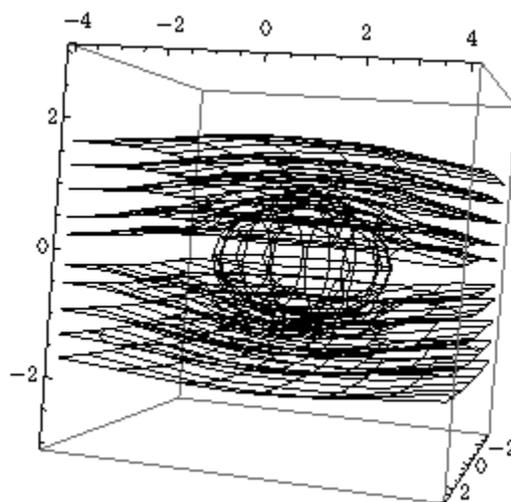
а)  $Re = 10$ б)  $Re = 30$ в)  $Re = 50$ 

Рисунок Д.6 – Поверхности уровня функции тока  
при  $Re = 10; 30; 50$

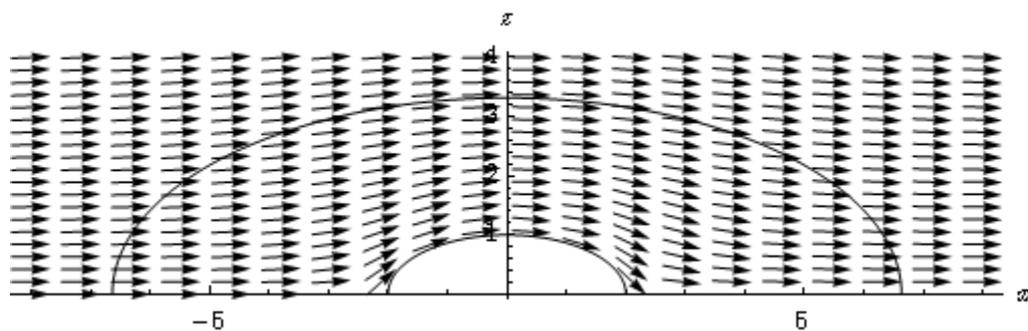
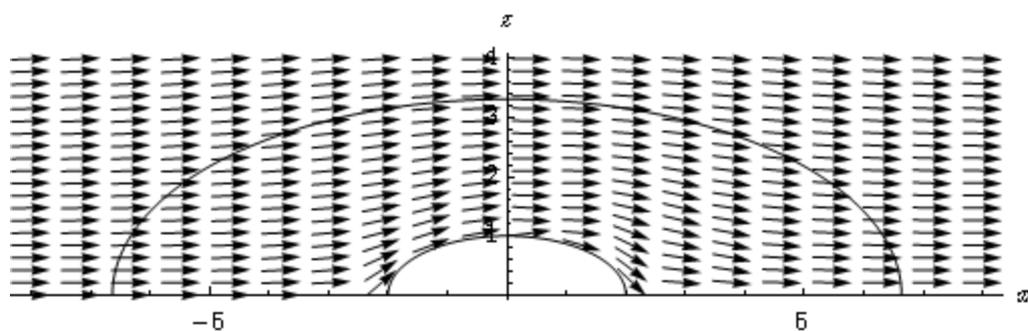
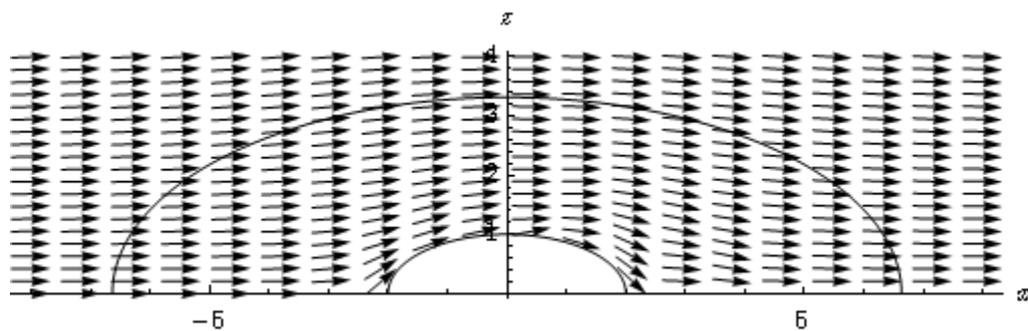
а)  $Re = 10$ б)  $Re = 30$ в)  $Re = 50$ 

Рисунок Д.7 – Векторные поля скоростей  
при  $Re = 10; 30; 50$

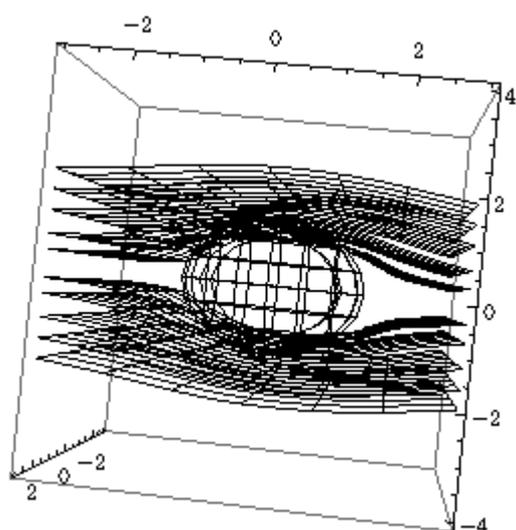
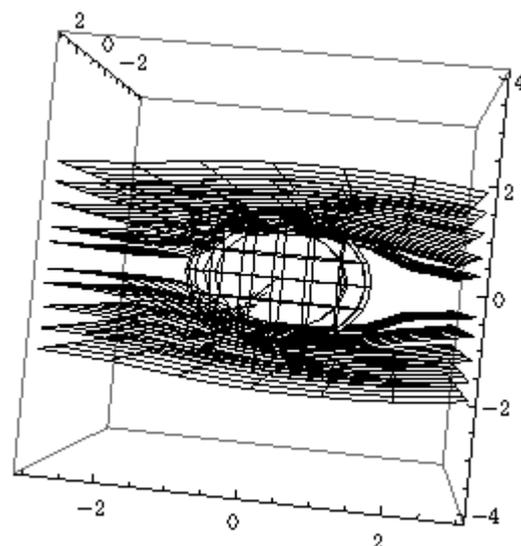
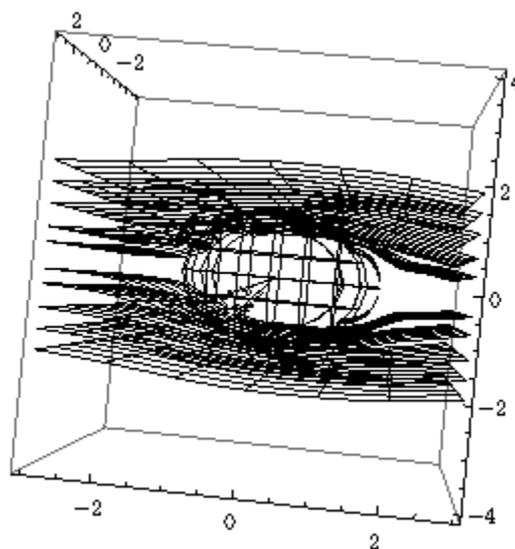
а)  $Re = 10$ б)  $Re = 30$ в)  $Re = 50$ 

Рисунок Д.8 – Поверхности уровня функции тока  
при  $Re = 10; 30; 50$

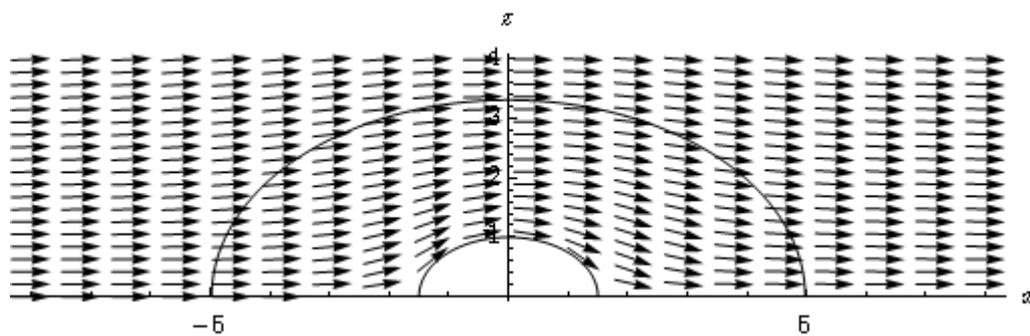
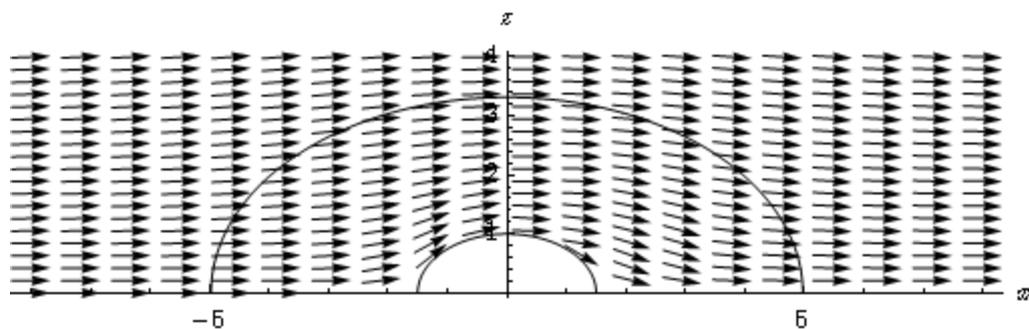
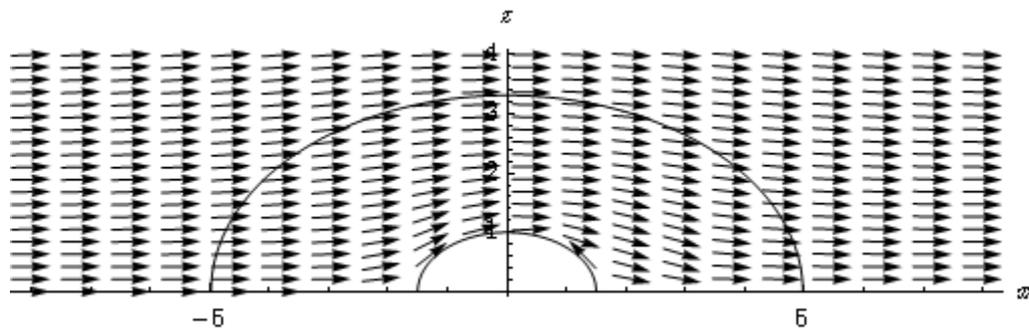
а)  $Re = 10$ б)  $Re = 30$ в)  $Re = 50$ 

Рисунок Д.9 – Векторное поле скоростей  
при  $Re = 10; 30; 50$

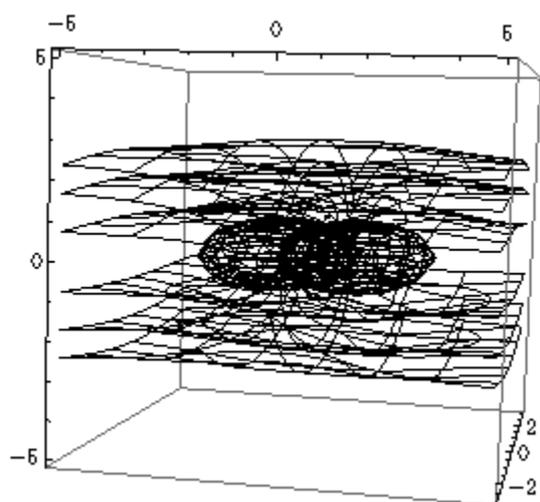
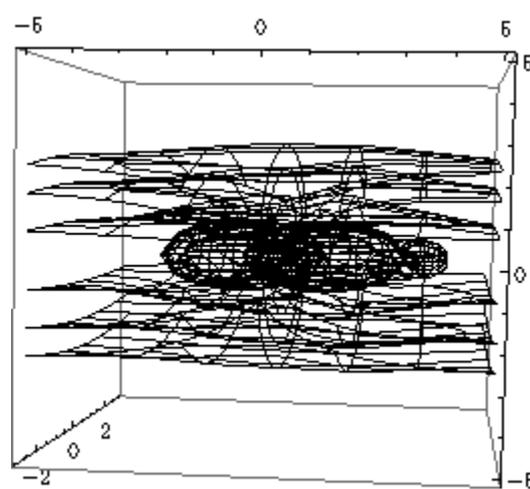
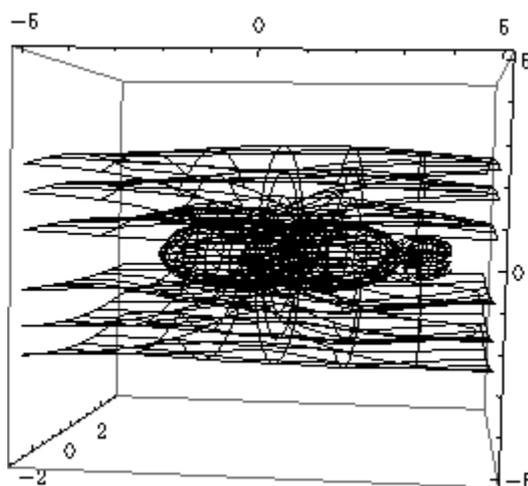
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 20$ 

Рисунок Д.10 – Поверхности уровня функции тока  
при  $Re = 5; 10; 20$

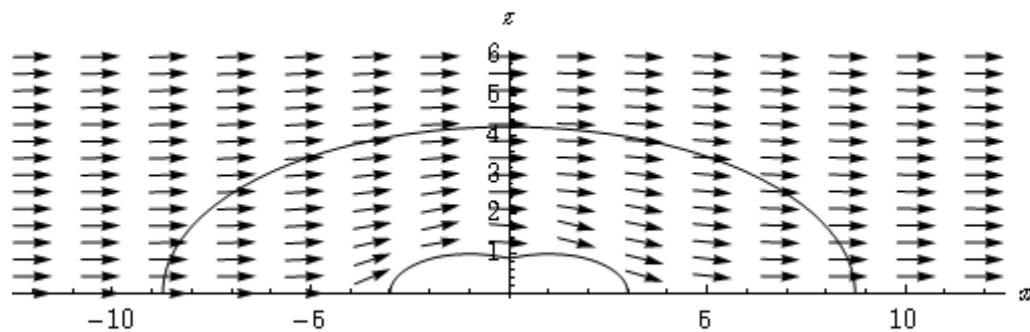
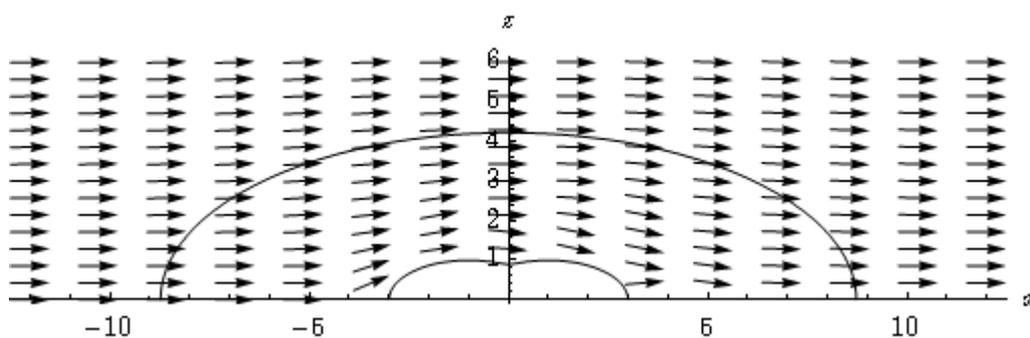
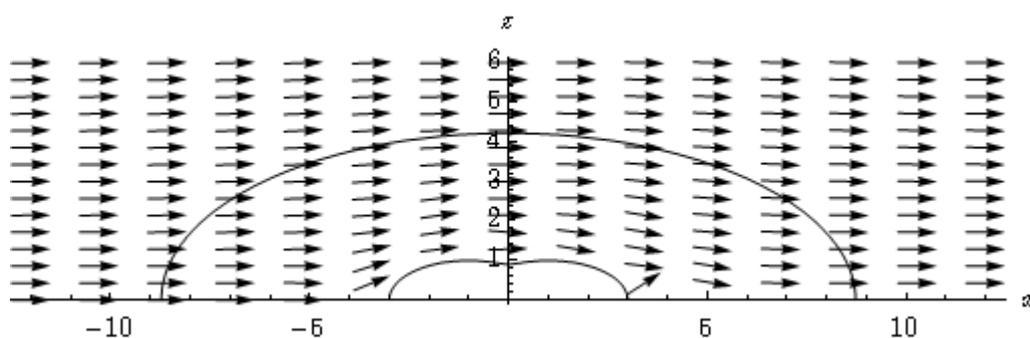
а)  $Re = 5$ б)  $Re = 10$ в)  $Re = 20$ 

Рисунок Д.11 – Векторное поле скоростей  
при  $Re = 5; 10; 20$

Таблица Д.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 5$ 

$k$	1	2	3	5	6	7	8
$\alpha_1$	0,00542	0,01188	0,01176	0,01145	0,01148	0,01148	0,01148
$\alpha_2$	-0,34420	-0,34494	-0,32589	-0,32761	-0,32764	-0,32743	-0,32742
$\alpha_3$	-0,00090	0,10746	0,10847	0,09853	0,09964	0,09968	0,09954
$\alpha_4$	0,00047	-0,08744	-0,08869	-0,07948	-0,08055	-0,08060	-0,08046
$\alpha_5$	-0,05043	-0,05624	-0,02100	-0,02398	-0,02430	-0,02364	-0,02359
$\alpha_6$	0,02441	0,02903	0,00092	0,00345	0,00375	0,00316	0,00310
$\alpha_7$	0,00070	0,02404	0,01959	0,02621	0,02493	0,02474	0,02496
$\alpha_8$	-0,00034	-0,01573	-0,01225	-0,01813	-0,01696	-0,01679	-0,01699
$\alpha_9$	-0,01796	-0,01895	-0,00414	-0,00499	-0,00475	-0,00492	-0,00497
$\alpha_{10}$	0,00606	0,00691	-0,00423	-0,00369	-0,00390	-0,00373	-0,00369
$\beta_1$	-0,27779	-0,29334	-0,29379	-0,29243	-0,29257	-0,29258	-0,29256
$\beta_2$	0,14951	0,15258	0,15268	0,15241	0,15244	0,15244	0,15243
$\beta_3$	0,51585	0,52827	0,52871	0,52756	0,52768	0,52769	0,52768
$\beta_4$	-0,18399	-0,18378	-0,17622	-0,17693	-0,17693	-0,17686	-0,17686
$\beta_5$	0,08274	0,08270	0,07899	0,07934	0,07934	0,07930	0,07930
$\beta_6$	0,35790	0,35782	0,33943	0,34112	0,34113	0,34094	0,34094
$\beta_7$	0,00116	-0,01359	-0,01353	-0,01257	-0,01267	-0,01267	-0,01266
$\beta_8$	-0,00054	0,01023	0,01026	0,00938	0,00947	0,00948	0,00947
$\beta_9$	0,00710	0,00707	0,00643	0,00646	0,00644	0,00645	0,00646
$\beta_{10}$	-0,00317	-0,00334	-0,00203	-0,00213	-0,00213	-0,00212	-0,00212
$\beta_{11}$	0,00033	0,00065	0,00054	0,00075	0,00069	0,00069	0,00070
$\beta_{12}$	-0,00016	-0,00008	-0,00012	-0,00007	-0,00007	-0,00007	-0,00007
$\beta_{13}$	0,00138	0,00133	0,00168	0,00167	0,00167	0,00167	0,00167
$\beta_{14}$	-0,00060	-0,00058	-0,00064	-0,00065	-0,00065	-0,00065	-0,00064

Таблица Д.2 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 5$  и  $Re = 10$ 

$k$	1	5	9	13	17	21	25
$\alpha_1$	0,01754	0,02566	0,02590	0,02594	0,02596	0,02596	0,02597
$\alpha_2$	-0,65489	-0,58759	-0,57879	-0,57663	-0,57597	-0,57576	-0,57573
$\alpha_3$	0,19996	0,30880	0,32269	0,32677	0,32833	0,32895	0,32939
$\alpha_4$	-0,16136	-0,24034	-0,25391	-0,25816	-0,25979	-0,26044	-0,26089
$\alpha_5$	-0,04736	0,03416	0,05540	0,06171	0,06367	0,06426	0,06420
$\alpha_6$	0,00638	-0,05407	-0,07270	-0,07850	-0,08031	-0,08085	-0,08079
$\alpha_7$	0,04929	0,13740	0,12109	0,11167	0,10767	0,10608	0,10510
$\alpha_8$	-0,03371	-0,10526	-0,09131	-0,08271	-0,07901	-0,07754	-0,07662
$\alpha_9$	-0,00986	0,05154	0,05051	0,04870	0,04812	0,04800	0,04821
$\alpha_{10}$	-0,00745	-0,05657	-0,05493	-0,05312	-0,05254	-0,05241	-0,05258
$\beta_1$	-0,30733	-0,32632	-0,32845	-0,32901	-0,32921	-0,32929	-0,32934
$\beta_2$	0,15536	0,15914	0,15959	0,15970	0,15974	0,15976	0,15977
$\beta_3$	0,53950	0,55473	0,55661	0,55712	0,55731	0,55738	0,55743
$\beta_4$	-0,35374	-0,32411	-0,32078	-0,32000	-0,31976	-0,31969	-0,31967
$\beta_5$	0,15862	0,14418	0,14256	0,14218	0,14207	0,14203	0,14202
$\beta_6$	0,68193	0,61327	0,60505	0,60309	0,60249	0,60230	0,60226
$\beta_7$	-0,02648	-0,04400	-0,04505	-0,04533	-0,04543	-0,04547	-0,04550
$\beta_8$	0,01947	0,03092	0,03204	0,03235	0,03247	0,03251	0,03255
$\beta_9$	0,01291	0,00948	0,00966	0,00979	0,00984	0,00985	0,00984
$\beta_{10}$	-0,00424	-0,00050	0,00007	0,00021	0,00025	0,00026	0,00027
$\beta_{11}$	0,00107	0,00345	0,00291	0,00248	0,00229	0,00222	0,00217
$\beta_{12}$	$9,7 \times 10^{-6}$	0,00036	0,00027	0,00029	0,00030	0,00030	0,00031
$\beta_{13}$	0,00333	0,00488	0,00483	0,00476	0,00474	0,00474	0,00474
$\beta_{14}$	-0,00129	-0,00158	-0,00158	-0,00156	-0,00156	-0,00156	-0,00156

Таблица Д.3 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $M = 10$  и  $\text{Re} = 15; 20; 25$

Re	15	20	25
$\alpha_1$	0,17536	0,23432	0,28364
$\alpha_2$	-2,13918	-2,29917	-2,37809
$\alpha_3$	1,29081	1,60251	1,83029
$\alpha_4$	-1,08400	-1,30039	-1,44195
$\alpha_5$	1,28651	1,86216	2,32302
$\alpha_6$	-1,15368	-1,62931	-1,99482
$\alpha_7$	1,18195	1,89334	2,58251
$\alpha_8$	-0,97450	-1,54714	-2,09067
$\alpha_9$	0,95184	1,59564	2,30334
$\alpha_{10}$	-0,79923	-1,33449	-1,92173
$\beta_1$	-0,07862	-0,09637	-0,10835
$\beta_2$	0,13057	0,13295	0,13452
$\beta_3$	0,24906	0,24086	0,23488
$\beta_4$	-0,79180	-0,89483	-0,97040
$\beta_5$	0,39263	0,42834	0,45025
$\beta_6$	2,22781	2,39220	2,46659
$\beta_7$	-0,07543	-0,11157	-0,14516
$\beta_8$	0,11417	0,14158	0,15941
$\beta_9$	0,06732	0,07675	0,07837
$\beta_{10}$	0,02356	0,04062	0,05568
$\beta_{11}$	0,05108	0,07200	0,08675
$\beta_{12}$	-0,00206	0,00147	0,00675
$\beta_{13}$	0,03548	0,05478	0,07316
$\beta_{14}$	-0,00891	-0,01249	-0,01485

Таблица Д.4 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $\text{Re} = 10; 30; 50$

Re	10	30	50
$\alpha_1$	-0,36902	0,57693	1,13214
$\alpha_2$	-4,41723	-6,60205	-5,71691
$\alpha_3$	3,89082	5,93520	5,72459
$\alpha_4$	-2,47318	-2,52779	-1,85553
$\alpha_5$	7,35427	14,75826	15,36915
$\alpha_6$	-6,80037	-11,70259	-10,92465
$\alpha_7$	6,76069	14,82870	14,64418
$\alpha_8$	-3,50979	-6,13419	-5,18224
$\alpha_9$	11,84213	30,25715	35,49103
$\alpha_{10}$	-7,68838	-17,97052	-18,84111
$\beta_1$	-0,77671	0,58596	1,55398
$\beta_2$	0,22211	-0,08199	-0,26405
$\beta_3$	1,31990	-0,34946	-1,50435
$\beta_4$	-0,73818	-1,25234	-1,28500
$\beta_5$	0,24237	0,36899	0,34080
$\beta_6$	3,57542	5,58340	5,04895
$\beta_7$	0,06747	0,21069	0,26808
$\beta_8$	-0,03485	-0,00344	0,00371
$\beta_9$	-0,07115	-0,09573	-0,07440
$\beta_{10}$	-0,02559	-0,03627	-0,03407
$\beta_{11}$	0,02065	0,00618	0,00918
$\beta_{12}$	-0,00031	-0,00181	-0,00227
$\beta_{13}$	0,00744	0,01354	0,01585
$\beta_{14}$	0,00076	0,00065	0,00018

Таблица Д.5 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $\text{Re} = 10; 30; 50$

Re	10	30	50
$\alpha_1$	-0,08926	0,63411	0,73929
$\alpha_2$	-3,77692	-5,20967	-4,06775
$\alpha_3$	3,24984	5,85677	5,70388
$\alpha_4$	-1,71842	-2,28220	-2,00336
$\alpha_5$	3,93039	8,81773	2,75164
$\alpha_6$	-4,29682	-8,12344	-6,31603
$\alpha_7$	4,88505	11,58634	10,89572
$\alpha_8$	-2,30181	-4,76718	-4,10887
$\alpha_9$	5,87401	18,99604	18,64395
$\alpha_{10}$	-4,23610	-12,40699	-14,10084
$\beta_1$	-0,40799	0,58839	0,09474
$\beta_2$	0,15707	-0,07132	0,03498
$\beta_3$	0,83550	-0,33428	0,10102
$\beta_4$	-0,76620	-1,04358	0,28874
$\beta_5$	0,28262	0,33094	-0,01181
$\beta_6$	3,21029	4,26892	0,50500
$\beta_7$	0,02357	0,00604	0,07758
$\beta_8$	0,00303	0,04760	-0,00153
$\beta_9$	-0,02585	-0,04592	0,00310
$\beta_{10}$	-0,02802	-0,00503	0,02221
$\beta_{11}$	0,03442	0,06119	0,07527
$\beta_{12}$	-0,00761	-0,01517	-0,01321
$\beta_{13}$	-0,00048	0,00154	-0,00739
$\beta_{14}$	0,00114	-0,00233	-0,00316

Таблица Д.6 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при разных числах

Рейнольдса

Re	5	10	15	20
$\alpha_1$	- 3,48398	- 2,51549	- 1,47663	- 0,64977
$\alpha_2$	- 7,38086	- 12,40077	- 14,06415	- 13,67918
$\alpha_3$	5,07185	7,27461	9,79924	11,26213
$\alpha_4$	- 6,23583	- 5,81216	- 5,34150	- 4,82394
$\alpha_5$	6,97544	12,05127	15,40880	17,57802
$\alpha_6$	- 9,63742	- 16,18203	- 18,84413	- 19,00961
$\beta_1$	- 1,74628	- 1,11203	- 0,56206	- 0,14019
$\beta_2$	0,27448	0,17863	0,09070	0,02614
$\beta_3$	4,58665	3,36231	2,20405	1,30997
$\beta_4$	- 0,16652	- 0,23790	- 0,24779	- 0,25040
$\beta_5$	0,05051	0,07852	0,08194	0,07381
$\beta_6$	4,12961	6,82588	7,68239	7,48467
$\beta_7$	- 0,20585	- 0,12970	- 0,03682	0,03753
$\beta_8$	- 0,00361	- 0,00277	- 0,00371	- 0,00506
$\beta_9$	- 0,04941	- 0,08656	- 0,09548	- 0,08274
$\beta_{10}$	- 0,00050	- 0,00050	- 0,00055	- 0,00102

## Приложение Е

### Задачи обтекания цилиндрических тел и тел вращения с учетом массопереноса

Таблица Е.1 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0,01$  и  $M = 10$

$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$	$\alpha_7$	$\alpha_9$	$\beta_1$
0,00420	0	0	0	0	0,31735
$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	
0,00074	0	0	0	0	

Таблица Е.2 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  $M = 5; 10$  и  
 $Re = 0; 5; 10; 15$

Re	0	5	10	15
M	5	5	5	10
$\alpha_1$	0,32094	0,37095	0,28907	0,32686
$\alpha_3$	0,34347	0,33740	0,37740	0,54482
$\alpha_5$	0,40374	0,26983	0,53027	0,32624
$\alpha_7$	0,14725	0,07001	0,30049	0,02429
$\alpha_9$	0,02701	0,00323	0,01966	– 0,01979
$\beta_1$	0,16796	0,15510	– 0,20559	0,22407
$\beta_2$	0,07609	0,12774	0,58475	0,15365
$\beta_4$	– 0,16863	– 0,23419	– 0,13366	– 0,32591
$\beta_6$	– 0,13863	– 0,13864	– 0,35943	– 0,24058
$\beta_8$	– 0,01980	– 0,02103	– 0,12405	– 0,04924
$\beta_{10}$	0,00412	– 0,00004	– 0,04812	– 0,01512

Таблица Е.3 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 20$ ,  $M = 5; 10$   
и  $Re = 0; 5; 10; 15$

Re	0	5	10	15
$M$	5	5	5	10
$\alpha_1$	0,33016	0,33759	0,34912	0,27791
$\alpha_3$	0,37274	0,38798	0,41471	0,51627
$\alpha_5$	0,64700	0,51722	0,44431	0,65326
$\alpha_7$	0,41807	0,27858	0,15368	0,17743
$\alpha_9$	0,13481	0,05196	- 0,02156	- 0,01632
$\beta_1$	- 0,03410	- 0,03232	- 0,04852	0,01092
$\beta_2$	0,25172	0,40188	0,40246	0,38875
$\beta_4$	- 0,15776	- 0,22439	- 0,23633	- 0,22031
$\beta_6$	- 0,21751	- 0,25030	- 0,30473	- 0,40604
$\beta_8$	- 0,07571	- 0,07467	- 0,08559	- 0,08777
$\beta_{10}$	0,00811	- 0,00727	- 0,02321	- 0,04705

Таблица Е.4 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 30$ ,  $M = 5; 10$   
и  $Re = 0; 5; 10; 15$

Re	0	5	10	15
$M$	5	5	5	10
$\alpha_1$	0,28523	0,26860	0,28907	0,24070
$\alpha_3$	0,35305	0,36166	0,37740	0,41560
$\alpha_5$	0,68812	0,57692	0,53027	0,77089
$\alpha_7$	0,59973	0,43885	0,30049	0,31962
$\alpha_9$	0,27608	0,13938	0,01966	0,03989
$\beta_1$	- 0,21429	- 0,18432	- 0,20559	- 0,17406
$\beta_2$	0,41736	0,61919	0,58475	0,50665
$\beta_4$	- 0,11974	- 0,14164	- 0,13366	- 0,04936
$\beta_6$	- 0,20530	- 0,26527	- 0,35943	- 0,46501
$\beta_8$	- 0,11840	- 0,11191	- 0,12405	- 0,10212
$\beta_{10}$	0,00590	- 0,01903	- 0,04812	- 0,07095

Таблица Е.5 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0,01$  и  $M = 10$ 

$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$	$\alpha_7$	$\alpha_9$	$\beta_1$
0,01171	- 1,66568	0,02516	- 1,10011	0,03537	0,04837
$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	
0,00162	0,20218	- 0,00069	- 0,02614	0,00008	

Таблица Е.6 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  $M = 5; 10$   
и  $Re = 0; 5; 15; 30$ 

Re	0	5	15	30
M	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,71908	0,59616	0,58893	0,59651
$\alpha_3$	0,24019	0,36739	0,49724	0,51872
$\alpha_5$	0,99110	0,91368	0,96242	0,72773
$\alpha_7$	0,06410	0,04317	0,19460	0,45300
$\alpha_9$	0,90391	0,68152	0,54284	0,37333
$\beta_1$	0,27627	0,43367	0,40779	0,35536
$\beta_2$	0,06669	0,19374	0,31397	0,41101
$\beta_4$	- 0,22765	- 0,28985	- 0,29132	- 0,29157
$\beta_6$	0,00840	0,00041	- 0,00795	- 0,01130
$\beta_8$	0,01625	0,02117	0,01884	0,01712
$\beta_{10}$	0,00444	0,00201	0,00068	- 0,00145

Таблица Е.7 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 20$ ,  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$

Re	0	5	15	30
$M$	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,55435	0,37294	0,33133	0,32473
$\alpha_3$	0,41378	0,47307	0,58174	0,61400
$\alpha_5$	1,46223	1,31630	1,27891	0,93800
$\alpha_7$	0,22889	0,18768	0,40915	0,71394
$\alpha_9$	1,49885	1,07836	0,85726	0,77189
$\beta_1$	0,11173	0,24369	0,17303	0,13872
$\beta_2$	0,38729	0,58761	0,71507	0,76344
$\beta_4$	- 0,32500	- 0,31700	- 0,26231	- 0,21031
$\beta_6$	- 0,07033	- 0,08471	- 0,08137	- 0,06313
$\beta_8$	0,02863	0,02706	0,02119	0,01419
$\beta_{10}$	0,01079	0,00833	0,00592	0,00110

Таблица Е.8 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 30$ ,  $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 30$

Re	0	5	15	30
$M$	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,44847	0,20708	0,13652	0,18452
$\alpha_3$	0,39203	0,42290	0,50612	0,54354
$\alpha_5$	1,65201	1,36963	1,21481	0,97697
$\alpha_7$	0,20717	0,14294	0,38656	0,71167
$\alpha_9$	1,75180	1,12148	0,79198	0,95556
$\beta_1$	- 0,13446	- 0,01589	- 0,09883	- 0,09009
$\beta_2$	0,61075	0,82416	0,92127	0,91644
$\beta_4$	- 0,31959	- 0,27829	- 0,19665	- 0,12043
$\beta_6$	- 0,12370	- 0,12873	- 0,10925	- 0,07431
$\beta_8$	0,03012	0,02584	0,01952	0,01151
$\beta_{10}$	0,01506	0,01228	0,00902	0,00239

Таблица Е.9 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0,01$  и  $M = 10$ 

$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$	$\alpha_7$	$\alpha_9$	$\beta_1$
0,00111	0	0	0,54960	- 0,00005	0,65922
$\beta_2$	$\beta_4$	$\beta_6$	$\beta_8$	$\beta_{10}$	
0,00005	0	0,00008	0,03012	- 0,00024	

Таблица Е.10 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 15; 20$ 

Re	0	5	15	20
$\alpha_1$	0,07238	0,07232	0,07305	0,07349
$\alpha_3$	0,04822	0,04765	0,04355	0,04208
$\alpha_5$	- 0,13143	- 0,12556	- 0,11383	- 0,11007
$\alpha_7$	0,45520	0,44445	0,43655	0,43581
$\alpha_9$	0,13417	0,12612	0,10346	0,09264
$\beta_1$	0,68762	0,68315	0,67440	0,67191
$\beta_2$	- 0,02598	- 0,02682	- 0,03373	- 0,03863
$\beta_4$	- 0,03771	- 0,04041	- 0,04368	- 0,04536
$\beta_6$	0,06571	0,06464	0,06762	0,07049
$\beta_8$	0,05659	0,04894	0,03619	0,03281
$\beta_{10}$	- 0,06100	- 0,06075	- 0,06690	- 0,07194

Таблица Е.11 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 20$ ,  $M = 10$  и  
 $Re = 0; 5; 15; 20$

Re	0	5	15	20
$\alpha_1$	0,09372	0,09586	0,10105	0,10241
$\alpha_3$	0,10524	0,10320	0,09464	0,09134
$\alpha_5$	- 0,12763	- 0,11648	- 0,10232	- 0,09931
$\alpha_7$	0,33485	0,32283	0,31793	0,31871
$\alpha_9$	0,17910	0,16127	0,12400	0,10799
$\beta_1$	0,72395	0,71049	0,68862	0,68325
$\beta_2$	- 0,02511	- 0,02873	- 0,04680	- 0,05807
$\beta_4$	- 0,08089	- 0,08323	- 0,08635	- 0,08849
$\beta_6$	0,07541	0,07464	0,08576	0,09332
$\beta_8$	0,09369	0,07639	0,05122	0,04574
$\beta_{10}$	- 0,08914	- 0,08994	- 0,10639	- 0,11808

Таблица Е.12 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 30$ ,  $M = 10$  и  
 $Re = 0; 5; 15; 20$

Re	0	5	15	20
$\alpha_1$	0,10214	0,10803	0,11792	0,11955
$\alpha_3$	0,13235	0,12986	0,12034	0,11647
$\alpha_5$	- 0,08286	- 0,06972	- 0,05668	- 0,05509
$\alpha_7$	0,26514	0,25587	0,25430	0,25508
$\alpha_9$	0,19317	0,16824	0,12242	0,10370
$\beta_1$	0,74443	0,72057	0,68623	0,67898
$\beta_2$	- 0,01570	- 0,02408	- 0,05542	- 0,07334
$\beta_4$	- 0,09873	- 0,10082	- 0,10449	- 0,10682
$\beta_6$	0,06593	0,06822	0,08992	0,10197
$\beta_8$	0,12085	0,09441	0,06070	0,05525
$\beta_{10}$	- 0,10484	- 0,10921	- 0,13870	- 0,15725

Таблица Е.13 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0$  и  $M = 5$ 

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
1,05190	0	0,03860	- 0,20257	0	- 0,05190	0
$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
- 0,02400	0	- 0,01301	- 0,43452	0	0,11239	0,04677
$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	
0	0,01328	0	-0,00589	0	- 0,00238	

Таблица Е.14 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$ 

Re	0	10	25
M	5	5	10
$\alpha_1$	0,93410	0,87503	0,81490
$\alpha_2$	0,93615	0,95665	1,08620
$\alpha_3$	- 0,28308	- 0,25951	- 0,42490
$\alpha_4$	- 0,25769	- 0,21909	- 0,41195
$\alpha_5$	- 0,10838	- 0,06680	- 0,09006
$\alpha_6$	- 0,38540	- 0,33886	- 0,69978
$\alpha_7$	- 0,67390	- 0,68797	- 0,62032
$\alpha_8$	0,11405	0,11323	0,22199
$\alpha_9$	- 0,10727	- 0,11192	- 0,10044
$\alpha_{10}$	0,07828	0,07249	0,14916
$\beta_1$	- 0,38208	- 0,40911	- 0,22410
$\beta_2$	0,17737	0,17636	0,01613
$\beta_3$	- 0,29371	- 0,31122	- 0,72025
$\beta_4$	- 0,00850	- 0,00473	- 0,14823
$\beta_5$	0,07106	0,04308	0,05295
$\beta_6$	0,11700	0,12912	0,27032
$\beta_7$	- 0,19141	- 0,17683	- 0,11356
$\beta_8$	0,01653	0,01554	0,03524
$\beta_9$	- 0,03685	- 0,03115	- 0,01716
$\beta_{10}$	0,00315	0,00238	- 0,00137

Таблица Е.15 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 20$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$

Re	0	10	25
$M$	5	5	10
$\alpha_1$	0,80604	0,73387	0,54502
$\alpha_2$	0,93299	0,92823	0,96051
$\alpha_3$	- 0,56941	- 0,53533	- 0,61535
$\alpha_4$	- 0,07320	0,02201	0,72903
$\alpha_5$	- 0,32373	- 0,24794	- 0,38017
$\alpha_6$	- 0,48392	- 0,46236	- 0,57541
$\alpha_7$	- 0,30096	- 0,30302	- 0,13941
$\alpha_8$	0,16339	0,18811	0,27134
$\alpha_9$	- 0,03840	- 0,04525	- 0,00698
$\alpha_{10}$	0,12624	0,13088	0,19848
$\beta_1$	- 0,43257	- 0,52061	- 0,90648
$\beta_2$	- 0,06382	- 0,04054	- 0,10313
$\beta_3$	- 0,36587	- 0,49360	- 0,81638
$\beta_4$	- 0,06632	- 0,05778	- 0,11202
$\beta_5$	0,21275	0,16349	0,23559
$\beta_6$	0,09467	0,17949	0,49195
$\beta_7$	- 0,11066	- 0,09122	- 0,03819
$\beta_8$	0,03785	0,03567	0,04528
$\beta_9$	- 0,03172	- 0,02164	- 0,01228
$\beta_{10}$	0,01342	0,00736	- 0,01604

Таблица Е.16 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 30$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 25$

Re	0	10	25
$M$	5	5	10
$\alpha_1$	0,68439	0,57751	0,17370
$\alpha_2$	0,89704	0,88626	0,98504
$\alpha_3$	- 0,78830	- 0,73488	- 0,79718
$\alpha_4$	0,32980	0,54725	2,26338
$\alpha_5$	- 0,52855	- 0,43333	- 0,67283
$\alpha_6$	- 0,33429	- 0,31803	- 0,08837
$\alpha_7$	0,06258	0,05754	0,29822
$\alpha_8$	0,12456	0,17423	0,23794
$\alpha_9$	0,03168	0,01902	0,07928
$\alpha_{10}$	0,12592	0,14081	0,19941
$\beta_1$	- 0,58404	- 0,78224	- 1,87473
$\beta_2$	- 0,27471	- 0,20350	- 0,21717
$\beta_3$	- 0,14171	- 0,37948	- 0,59076
$\beta_4$	- 0,11447	- 0,07563	0,04485
$\beta_5$	0,34394	0,28589	0,42834
$\beta_6$	- 0,02899	0,14695	0,61702
$\beta_7$	- 0,03935	- 0,03532	- 0,02019
$\beta_8$	0,05726	0,05282	0,05209
$\beta_9$	- 0,02684	- 0,01700	- 0,02070
$\beta_{10}$	0,02554	0,01267	- 0,02645

Таблица Е.17 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0$  и  $M = 5$ 

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
1,25444	0	0,18182	2,19766	0	- 0,07987	0
$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
- 0,22532	0	0,02348	- 1,05766	0	0,40670	0,05979
$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	
0	0,20389	0	- 0,00897	0	- 0,02669	

Таблица Е.18 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$ 

Re	0	10	30	50
$M$	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,76236	0,44582	0,39279	0,03373
$\alpha_2$	3,53898	3,35630	3,45999	2,01766
$\alpha_3$	- 3,54655	- 4,75052	- 4,79503	- 9,25678
$\alpha_4$	5,33317	9,24258	9,43840	17,03658
$\alpha_5$	- 3,02816	- 2,95423	- 2,85619	- 2,59100
$\alpha_6$	3,17099	4,99888	4,96641	10,28003
$\alpha_7$	- 1,91736	- 1,81526	- 2,32456	0,57396
$\alpha_8$	- 0,36523	- 0,73938	- 0,70066	- 1,11848
$\alpha_9$	0,25278	0,25078	0,15793	0,57097
$\alpha_{10}$	- 0,30789	- 0,51256	- 0,48529	- 1,05088
$\beta_1$	- 1,52340	- 1,88525	- 2,05953	- 3,74630
$\beta_2$	0,07219	0,11185	0,22159	0,31595
$\beta_3$	0,79705	1,01624	1,06208	1,38800
$\beta_4$	0,03920	0,03862	0,05375	0,25432
$\beta_5$	0,04715	0,03919	0,03654	0,01018
$\beta_6$	0,08069	0,01327	0,04111	0,27302
$\beta_7$	- 0,01126	- 0,01208	- 0,02499	- 0,01815
$\beta_8$	- 0,00458	- 0,00498	- 0,00610	- 0,00068
$\beta_9$	- 0,01380	- 0,00856	- 0,00866	0,00274
$\beta_{10}$	- 0,01193	- 0,00649	- 0,00920	- 0,04456

Таблица Е.19 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 20$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

Re	0	10	30	50
$M$	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,55730	0,22784	0,04942	0,21049
$\alpha_2$	2,77979	2,30817	2,49911	2,48577
$\alpha_3$	- 6,42125	- 7,49393	- 7,44643	- 7,72599
$\alpha_4$	7,22906	13,47175	14,74033	12,78039
$\alpha_5$	- 2,68852	- 2,45894	- 2,56262	- 2,63133
$\alpha_6$	5,74444	8,15805	8,25410	7,93787
$\alpha_7$	- 2,01636	- 1,27416	- 1,32592	- 1,07883
$\alpha_8$	- 0,34066	- 1,00103	- 1,04571	- 0,72888
$\alpha_9$	0,24161	0,29468	0,29045	0,34080
$\alpha_{10}$	- 0,57533	- 0,85611	- 0,82518	- 0,76886
$\beta_1$	- 2,10402	- 2,76811	- 3,10739	- 3,02395
$\beta_2$	0,21229	0,25772	0,36778	0,38290
$\beta_3$	1,25860	1,37800	1,27735	1,13853
$\beta_4$	0,08584	0,13027	0,17395	0,17906
$\beta_5$	0,03097	0,01840	0,01836	0,01923
$\beta_6$	0,01083	0,04767	0,15282	0,17846
$\beta_7$	- 0,01278	- 0,01317	- 0,02811	- 0,03072
$\beta_8$	- 0,00636	- 0,00496	- 0,00288	0,00033
$\beta_9$	- 0,01010	- 0,00106	- 0,00079	- 0,00133
$\beta_{10}$	- 0,00877	- 0,01773	- 0,02581	- 0,02574

Таблица Е.20 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 30$ ,  
 $M = 5; 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

Re	0	10	30	50
$M$	5	10	10	10
$\alpha_1$	0,63772	0,29192	0,03372	0,26857
$\alpha_2$	2,09551	1,78907	2,01766	1,97195
$\alpha_3$	- 8,14548	- 9,25385	- 9,25678	- 9,47321
$\alpha_4$	7,55283	15,00406	17,03658	14,05970
$\alpha_5$	- 2,35197	- 2,33485	- 2,59100	- 2,63667
$\alpha_6$	7,12275	9,94197	10,28003	9,68983
$\alpha_7$	- 1,39195	0,02073	0,57396	1,13522
$\alpha_8$	- 0,17370	- 0,99479	- 1,11848	- 0,67710
$\alpha_9$	0,30366	0,47609	0,57097	0,65039
$\alpha_{10}$	- 0,71687	- 1,05554	- 1,05088	- 0,96490
$\beta_1$	- 2,50636	- 3,29188	- 3,74630	- 3,55019
$\beta_2$	0,25586	0,24261	0,31595	0,30720
$\beta_3$	1,59136	1,57270	1,38800	1,18824
$\beta_4$	0,14119	0,19489	0,25432	0,24964
$\beta_5$	0,01520	0,00728	0,01018	0,01126
$\beta_6$	- 0,01742	0,10615	0,27302	0,29687
$\beta_7$	- 0,01125	- 0,00796	- 0,01815	- 0,01857
$\beta_8$	- 0,00979	- 0,00495	- 0,00068	0,00361
$\beta_9$	- 0,00621	0,00240	0,00274	0,00175
$\beta_{10}$	- 0,01126	- 0,03086	- 0,04456	- 0,04302

Таблица Е.21 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0$  и  $M = 10$ 

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
1,25803	0	0,00669	- 0,35811	0	- 0,27472	0
$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
0,08741	0	0,03930	- 0,62837	0	0,10758	0,04369
$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	
0	0,10841	0	- 0,00573	0	- 0,01198	

Таблица Е.22 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10, M = 10$  и

$Re = 0; 10; 30; 50$

Re	0	10	30	50
$\alpha_1$	0,91733	0,81440	0,79247	0,87438
$\alpha_2$	2,17168	2,13876	2,17438	2,17249
$\alpha_3$	- 2,53535	- 2,24447	- 2,14012	- 2,27567
$\alpha_4$	- 0,23724	0,32072	0,53540	- 0,17566
$\alpha_5$	- 1,55288	- 1,22556	- 1,13677	- 1,14490
$\alpha_6$	1,01064	0,91485	0,74147	0,63168
$\alpha_7$	- 0,81491	- 1,08286	- 1,26474	- 1,23575
$\alpha_8$	0,26746	0,26608	0,29191	0,40127
$\alpha_9$	0,10719	- 0,00247	- 0,05668	- 0,05280
$\alpha_{10}$	- 0,03536	- 0,01125	0,03101	0,05303
$\beta_1$	- 0,63727	- 0,84015	- 1,06212	- 1,04206
$\beta_2$	- 0,08505	0,03788	0,18134	0,21724
$\beta_3$	0,42129	0,48332	0,57156	0,51866
$\beta_4$	- 0,04821	- 0,04271	- 0,02222	- 0,01438
$\beta_5$	0,11135	0,08603	0,07762	0,07741
$\beta_6$	- 0,14866	- 0,10858	- 0,06306	- 0,04936
$\beta_7$	- 0,01010	- 0,02403	- 0,04871	- 0,05698
$\beta_8$	0,01279	0,00683	0,00132	0,00274
$\beta_9$	- 0,01371	- 0,01252	- 0,01365	- 0,01469
$\beta_{10}$	0,02489	0,02089	0,01570	0,01568

Таблица Е.23 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 20$ ,  $M = 10$  и $Re = 0; 10; 30; 50$ 

Re	0	10	30	50
$\alpha_1$	0,59478	0,34222	0,26900	0,51671
$\alpha_2$	1,71548	1,75638	1,88198	1,81765
$\alpha_3$	- 4,57133	- 3,90742	- 3,62155	- 3,80725
$\alpha_4$	2,94972	4,38858	4,54787	2,40253
$\alpha_5$	- 1,85404	- 1,55643	- 1,63964	- 1,62377
$\alpha_6$	3,44414	3,21027	2,85395	2,39962
$\alpha_7$	0,02253	- 0,16239	0,00058	0,22628
$\alpha_8$	- 0,09119	- 0,12035	- 0,03126	0,26205
$\alpha_9$	0,29891	0,18097	0,19117	0,22029
$\alpha_{10}$	- 0,31019	- 0,24389	- 0,15782	- 0,08995
$\beta_1$	- 1,38134	- 1,85768	- 2,24603	- 2,05924
$\beta_2$	- 0,03943	0,16895	0,33585	0,35459
$\beta_3$	1,03222	1,01773	0,94707	0,73733
$\beta_4$	- 0,00054	0,05872	0,13751	0,14837
$\beta_5$	0,11645	0,09216	0,09477	0,09287
$\beta_6$	- 0,26254	- 0,11689	0,03010	0,05828
$\beta_7$	0,01977	- 0,02143	- 0,06641	- 0,07520
$\beta_8$	0,01981	0,01302	0,01064	0,01527
$\beta_9$	0,00011	0,00044	- 0,00276	- 0,00415
$\beta_{10}$	0,02489	0,01347	0,00156	0,00288

Таблица Е.24 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 30$ ,  $M = 10$  и  $Re = 0; 10; 30; 50$

Re	0	10	30	50
$\alpha_1$	0,33451	– 0,00009	0,03207	0,50329
$\alpha_2$	1,51881	1,59437	1,70423	1,57067
$\alpha_3$	– 6,30656	– 5,44422	– 5,02417	– 5,17531
$\alpha_4$	6,29672	7,86612	6,65767	2,69987
$\alpha_5$	– 2,13834	– 1,90279	– 2,03274	– 1,94888
$\alpha_6$	5,83014	5,47189	4,66580	3,69122
$\alpha_7$	0,46174	0,71723	1,42036	1,75024
$\alpha_8$	– 0,42458	– 0,44453	– 0,18643	0,31665
$\alpha_9$	0,45360	0,38334	0,46397	0,49845
$\alpha_{10}$	– 0,58806	– 0,49257	– 0,34709	– 0,21934
$\beta_1$	– 2,20889	– 2,82629	– 3,07796	– 2,57863
$\beta_2$	– 0,01209	0,18044	0,29140	0,27566
$\beta_3$	1,54866	1,38992	1,05955	0,66108
$\beta_4$	0,07852	0,18596	0,28117	0,26617
$\beta_5$	0,12178	0,10195	0,10831	0,10252
$\beta_6$	– 0,29766	– 0,04208	0,17496	0,19317
$\beta_7$	0,02959	– 0,01337	– 0,05528	– 0,06093
$\beta_8$	0,02515	0,02176	0,02566	0,03356
$\beta_9$	0,00591	0,00677	0,00283	0,00142
$\beta_{10}$	0,01442	– 0,00516	– 0,01975	– 0,01423

Таблица Е.25 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 0$  и  $M = 10$ 

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
1,72375	0	-0,48512	6,47465	0	0,34320	0
$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
-1,03999	0	-0,02213	-0,57231	0	0,03434	0,00249
$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	
0	0,06894	0	0,00071	0	-0,00779	

Таблица Е.26 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Re = 10$ ,  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$ 

Re	0	5	10	20
$\alpha_1$	1,94600	1,85448	1,83561	1,82036
$\alpha_2$	3,16315	3,26391	3,29575	3,28768
$\alpha_3$	-10,48721	-10,21201	-10,31386	-10,71283
$\alpha_4$	6,71525	6,04168	6,58533	7,86831
$\alpha_5$	-4,38961	-4,34214	-4,25583	-4,16151
$\alpha_6$	8,02574	7,88213	8,07207	8,59654
$\alpha_7$	1,73232	0,51405	0,34528	0,33461
$\alpha_8$	-0,68513	-0,47056	-0,50475	-0,74157
$\alpha_9$	0,96749	0,82314	0,77159	0,73748
$\alpha_{10}$	-0,94446	-0,92625	-0,94624	-1,01044
$\beta_1$	-0,60310	-0,49012	-0,57396	-0,66714
$\beta_2$	-0,05494	-0,02430	0,01388	0,05542
$\beta_3$	0,66625	0,41667	0,40306	0,35330
$\beta_4$	-0,03497	-0,04451	-0,04410	-0,04246
$\beta_5$	0,00795	0,01204	0,00930	0,00724
$\beta_6$	-0,22792	-0,18449	-0,16109	-0,13002
$\beta_7$	0,01123	0,00787	0,00542	0,00296
$\beta_8$	0,00017	0,00308	0,00360	0,00455
$\beta_9$	-0,00182	-0,00092	-0,00059	-0,00050
$\beta_{10}$	0,01911	0,01778	0,01573	0,01280

Таблица Е.27 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 20$ ,  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$

Re	0	5	10	20
$\alpha_1$	2,48201	2,35190	2,30600	2,24766
$\alpha_2$	1,88454	1,96501	2,01298	2,02802
$\alpha_3$	- 13,43644	- 13,31818	- 13,47093	- 13,82175
$\alpha_4$	2,07665	1,93044	2,92676	5,31107
$\alpha_5$	- 3,15222	- 3,03302	- 3,01375	- 3,02441
$\alpha_6$	9,66946	9,84447	10,17390	10,81258
$\alpha_7$	1,93657	0,56407	1,14129	1,92295
$\alpha_8$	0,27565	0,53751	0,46329	0,02620
$\alpha_9$	0,85387	0,67123	0,70264	0,77807
$\alpha_{10}$	- 1,14945	- 1,16592	- 1,20087	- 1,27481
$\beta_1$	- 0,95195	- 0,76938	- 0,89131	- 1,04024
$\beta_2$	0,02409	0,05171	0,08728	0,12340
$\beta_3$	1,25251	0,71789	0,62260	0,51891
$\beta_4$	- 0,00907	- 0,02185	- 0,01713	- 0,01018
$\beta_5$	- 0,00381	0,00520	0,00290	0,00223
$\beta_6$	- 0,32904	- 0,24273	- 0,19019	- 0,13773
$\beta_7$	0,00841	0,00608	0,00378	0,00191
$\beta_8$	- 0,00498	0,00153	0,00320	0,00488
$\beta_9$	- 0,00082	- 0,00060	- 0,00057	- 0,00110
$\beta_{10}$	0,02123	0,01892	0,01540	0,01151

Таблица Е.28 – Значения  $\alpha_k$  и  $\beta_j$  при  $Pe = 30$ ,  $M = 10$  и  $Re = 0; 5; 10; 20$

Re	0	5	10	20
$\alpha_1$	2,75525	2,63649	2,61789	2,58823
$\alpha_2$	1,38023	1,42882	1,47289	1,51234
$\alpha_3$	- 14,46276	- 14,59872	- 14,82635	- 15,13217
$\alpha_4$	- 1,37922	- 1,25963	- 0,65116	1,26567
$\alpha_5$	- 2,59899	- 2,38864	- 2,39652	- 2,52562
$\alpha_6$	9,86918	10,33702	10,62902	11,06574
$\alpha_7$	2,84345	1,61385	2,82704	4,24296
$\alpha_8$	0,98691	1,28123	1,24358	0,83262
$\alpha_9$	0,88261	0,68378	0,78308	0,95829
$\alpha_{10}$	- 1,16600	- 1,21679	- 1,24775	- 1,29244
$\beta_1$	- 1,16025	- 0,93769	- 1,05323	- 1,20640
$\beta_2$	0,07015	0,08864	0,11571	0,14426
$\beta_3$	1,62073	0,96182	0,85187	0,78124
$\beta_4$	0,01099	- 0,00483	0,00024	0,00921
$\beta_5$	- 0,01363	- 0,00020	- 0,00141	- 0,00040
$\beta_6$	- 0,37852	- 0,29152	- 0,23473	- 0,18782
$\beta_7$	0,00491	0,00389	0,00240	0,00134
$\beta_8$	- 0,00882	- 0,00040	0,00164	0,00305
$\beta_9$	- 0,00097	- 0,00172	- 0,00210	- 0,00312
$\beta_{10}$	0,02211	0,02137	0,01817	0,01516