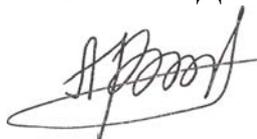


Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

На правах рукописи

АРТЮХ АНТОН ВЛАДИМИРОВИЧ



УДК 517.95 : 519.63

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Сидоров Максим Викторович,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Цей примірник дисертаційної роботи
ідентичний за змістом з іншими, поданими
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02
Вчений секретар спецради Д 64.052.02

 Л.В. Колесник

Харьков – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ	11
1.1 Математические модели нестационарных течений вязкой жидкости	11
1.2 Численные методы анализа нестационарных вязких течений	18
1.3 Структурный метод R -функций	23
1.4 Постановка задач исследования	31
РАЗДЕЛ 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА)	33
2.1 Постановка линеаризованной по Стоксу задачи для функции тока	33
2.2 Разработка метода численного анализа линеаризованной по Стоксу задачи	35
2.3 Вычислительный эксперимент для задачи с известным точным решением	50
2.4 Численные результаты расчета линеаризованной по Стоксу задачи для тестовых областей	58
Выводы по разделу 2	64
РАЗДЕЛ 3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ (ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА)	66
3.1 Постановка линеаризованной задачи для функции тока и температуры	66

3.2 Разработка метода численного анализа линеаризованной задачи	67
3.3 Результаты вычислительного эксперимента для тестовых областей	82
Выводы по разделу 3	87
РАЗДЕЛ 4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)	
4.1 Постановка нелинейной задачи для функции тока	89
4.2 Разработка метода численного анализа нелинейной задачи	98
4.3 Вычислительный эксперимент для нелинейной задачи с известным точным решением	107
4.4 Численные результаты расчета нелинейной задачи для тестовых областей	108
Выводы по разделу 4	113
РАЗДЕЛ 5 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)	
5.1 Постановка нелинейной задачи для функции тока и температуры	115
5.2 Разработка метода численного анализа нелинейной задачи	116
5.3 Результаты вычислительного эксперимента для тестовых областей	134
5.4 Результаты математического моделирования для прикладных задач	138
5.4.1 Математическое моделирование течения в канавке подшипника	138
5.4.2 Математическое моделирование свободной конвекции в расплавленном стекле	140

5.4.3 Математическое моделирование свободной конвекции в полости с теплопроводными стенками	143
Выводы по разделу 5	146
ВЫВОДЫ	148
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	150
Приложение А Акт внедрения	169
Приложение Б Результаты вычислительного эксперимента для задачи Стокса	171
Приложение В Результаты вычислительного эксперимента для функции тока и температуры (линеаризованная задача)	186
Приложение Г Результаты вычислительного эксперимента для функции тока (нелинейная задача)	207
Приложение Д Результаты вычислительного эксперимента для функции тока и температуры (нелинейная задача)	237

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность задачи. Математическое моделирование [105, 160] и численный анализ нестационарных течений жидкости играют важную роль в развитии современной науки и техники [13, 31, 32, 41, 43, 49, 58, 63, 84, 86, 89, 111]. В частности, к задачам расчета различных течений приходят при рассмотрении процессов в геофизике, биологии, теплоэнергетике, биомедицине и т.д. При этом часто жидкость можно считать вязкой ньютоновской несжимаемой средой, что позволяет моделировать такие течения с помощью системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса [90, 92, 110, 118, 125, 126, 129, 191, 192].

Нелинейность уравнений Навье-Стокса приводит к тому, что они в общем случае не поддаются непосредственному анализу. Так, известно лишь ограниченное число частных случаев, когда систему Навье-Стокса можно решить аналитически [2, 125, 147, 148].

Развитие вычислительной техники способствовало появлению и развитию эффективных численных методов решения системы Навье-Стокса. В настоящее время наиболее часто используются метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ) [15, 19, 23, 34, 116]. Преимуществом данных численных методов является простота в реализации, а также возможность распараллеливать вычислительный процесс, что существенно ускоряет получение результатов математического моделирования. Однако МКР и МКЭ имеют существенные недостатки: необходимо заново генерировать сетку для каждой новой области и упрощать области (в частности, заменять ломаными криволинейные участки границы [97]), что сказывается на точности полученного решения. Таким образом, существует необходимость разработки таких численных методов, которые позволяют точно учесть геометрию области течения. Кроме того, более предпочтительным является получение приближенного решения в аналитическом виде, что достигается с помощью использования приближенно-аналитических методов (например, проекционных).

Построить численный метод с указанными свойствами можно с помощью конструктивного аппарата теории R -функций, который разработан академиком НАН Украины В.Л. Рвачевым и его учениками [112, 119, 149 – 155 и др.]. Задачи гидродинамики с использованием метода R -функций решались в работах С.В. Колосовой [113 – 115, 174], К.В. Максименко-Шейко [131 – 135], М.В. Сидорова [165 – 169, 178], И.Г. Суворовой [175 – 177], Т.И. Шейко [133, 154] и др. Однако в основном рассматривались задачи расчета стационарных течений идеальной или вязкой жидкости. Таким образом, разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования нестационарных течений вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости на основе метода R -функций и проекционных методов является актуальной научной задачей.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнялась согласно плану научных работ кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники в рамках госбюджетной темы "Разработка моделей, методов и инструментальных средств структурной и параметрической оптимизации инженерных сетей с истоками" (ДР № 0111U002624, 2011 – 2013 гг.), в разработке которой автор участвовал как исполнитель.

Цель и задачи исследования. Целью исследований диссертационной работы является разработка методов математического моделирования и численного анализа плоскопараллельных нестационарных течений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей на основе методов R -функций и Галеркина.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

- разработка метода расчета плоскопараллельных нестационарных течений в приближении Стокса (линеаризованная задача) в односвязных областях на основе методов R -функций и Галеркина;
- разработка метода расчета плоскопараллельных нестационарных те-

чений вязкой теплопроводной жидкости (линеаризованная задача) в односвязных областях на основе методов R -функций и Галеркина;

– дальнейшее развитие итерационного метода расчета вязких течений жидкости (нелинейная задача для функции тока и нелинейная задача для функции тока и температуры) в односвязных областях в части его применения к нестационарным задачам;

– применение разработанных методов численного анализа к решению тестовых задач расчета плоскопараллельных нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости в односвязных областях при различных числах Рейнольдса, Грасгофа и Пекле.

Объектом исследования являются нестационарные гидродинамические процессы в вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются линеаризованными или нелинейными уравнениями относительно функции тока и системами уравнений относительно функции тока и температуры.

Предметом исследования являются математические модели и методы численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в односвязных областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей.

Методы исследования. В работе используются методы математической физики и функционального анализа для обоснования и исследования предложенных численных методов; метод R -функций для построения нормализованных уравнений границ областей и структур решения начально-краевых задач; метод Галеркина, метод последовательных приближений и методы теории сплайнов для аппроксимации неопределенных компонент структур решения; квадратурные формулы Гаусса для численного интегрирования; методы Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна полученных результатов. Проведенные в диссертационной работе исследования позволили получить новые научные результаты:

– впервые разработан метод решения линейной нестационарной задачи Стокса в односвязных областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей на основе методов R -функций и Галеркина;

– впервые разработан метод решения нестационарной задачи расчета течения вязкой теплопроводной жидкости (линеаризованная задача) в односвязных областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей на основе методов R -функций и Галеркина;

– в части применения к нестационарным задачам получил дальнейшее развитие итерационный метод решения нелинейного дифференциального уравнения для функции тока в односвязных областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей на основе методов R -функций, Галеркина и метода последовательных приближений; получены условия и оценки скорости сходимости в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^2(\Omega))$ к единственному обобщенному решению;

– в части применения к нестационарным задачам получил дальнейшее развитие итерационный метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для функции тока и температуры в односвязных областях сложной геометрии с кусочно-гладкой границей на основе методов R -функций, Галеркина и метода последовательных приближений; получены условия и оценки скорости сходимости в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^2(\Omega)) \times L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$ к единственному обобщенному решению.

В разработанных методах алгоритм не изменяется при переходе к новой области, приближенное решение имеет аналитический вид, а структура решения точно учитывает краевые условия для функции тока и температуры. Кроме того, возможность получения решения в аналитическом виде позволяет провести качественный анализ течения, что непосредственно невозможно при использовании сеточных методов.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанные методы математического моделирования и численного анализа нестационар-

ных течений вязкой теплопроводной жидкости имеют достаточно простые вычислительные схемы и являются более универсальными, чем те, которые используются в настоящее время, что подтверждается проведенными вычислительными экспериментами. Это позволяет с их помощью более эффективно проводить математическое моделирование разных геофизических, физико-механических, биологических течений и т.д. Разработанные в диссертационной работе методы расчета плоскопараллельных течений вязкой теплопроводной жидкости в односвязных областях внедрены в учебный процесс в Харьковском национальном университете радиозлектроники в дисциплинах “Избранные главы математической физики”, “Конструктивные средства математики”, “Теория R -функций и ее приложения” и “Численные методы” при проведении лабораторных работ, практических занятий, в курсовом и дипломном проектировании.

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертационной работы получены лично диссертантом и опубликованы в работах [5 – 7, 64 – 83]. В работах, опубликованных в соавторстве, диссертанту принадлежат следующие результаты: в работе [66] разработан метод решения задачи Стокса, проведен вычислительный эксперимент для тестовой задачи; в работах [7, 70, 72] – метод решения нелинейного дифференциального уравнения для функции тока; в работе [82] – метод решения линейной нестационарной задачи течения вязкой теплопроводной жидкости; в работах [68, 81] – итерационный метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для функций тока и температуры, проведены вычислительные эксперименты.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 14-й Международной научной конференции им. акад. Кравчука (Киев, 2012); П’ятнадцятій всеукраїнській (десятій міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2012» (Львів, 2012); Международной молодежной научной конференции «XXXVIII Гагаринские чтения» (Москва, 2012); Одинадцятій всеукраїнській науково-технічній конференції

«Математичне моделювання та інформаційні технології» (Одеса, 2012); XVI Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, 2012); 2nd International scientific conference of students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics» (Kyiv, 2012); Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» (Морское-Харьков, 2012); Международной молодёжной научной конференции «XXXIX Гагаринские чтения» (Москва, 2013); Шістнадцятій Всеукраїнській (Одинадцятій Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» (Львів, 2013); XVII Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, 2013); XVI Международном симпозиуме «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 2013); XVIII Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, 2014); Международной молодёжной научной конференции «XL Гагаринские чтения» (Москва, 2014); XIX Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, 2015); Вісімнадцятій Всеукраїнській (Тринадцятій Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2015» (Львів, 2015); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» – «АРАМCS-2015» (Львів, 2015); научных семинарах кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники (Харьков, 2012, 2015 гг.), кафедры высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии (Харьков, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертационной работы опубликованы в 23 печатных работах, из которых: 6 статей – в научных изданиях согласно с перечнем физико-математическим наук, 1 статья – в зарубежном научном издании, 16 докладов и тезисов докладов, опубликованных в материалах научных конференций, в том числе 13 международных.

РАЗДЕЛ 1
АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

1.1 Математические модели нестационарных течений вязкой жидкости

Движение жидкости в области $G \subset \mathbb{R}^3$ описывается общей системой уравнений гидродинамики, которая состоит из уравнения динамики сплошной среды Навье-Стокса, общего уравнения переноса тепла и уравнения неразрывности, которое выражает закон сохранения массы. Для реальной сжимаемой жидкости общая система гидродинамики имеет вид [101, 143, 130, 163]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (1.1)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \nabla s \right) = \kappa \Delta T + D, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.3)$$

где ρ – плотность жидкости, кг/м³;

t – время, с;

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скоростей с проекциями $v_1 = v_1(x, y, z; t)$, $v_2 = v_2(x, y, z; t)$, $v_3 = v_3(x, y, z; t)$ на оси Ox , Oy , Oz декартовой системы координат соответственно, м/с;

$p = p(x, y, z; t)$ – давление, Па;

η – коэффициент сдвиговой вязкости, кг/(м·с);

ζ – коэффициент объемной вязкости, кг/(м·с);

\vec{g} – ускорение земного тяготения, м/с²;

$T = T(x, y, z; t)$ – абсолютная температура, К;

s – энтропия единицы массы жидкости, Дж/(К·кг);

κ – коэффициент теплопроводности Дж/(м·с·К);

D – диссипативная функция, Дж/(м³·с);

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор Гамильтона, 1/м;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, 1/м².

Общую систему уравнений гидродинамики нужно дополнить уравнением состояния среды, с помощью которого можно выразить энтропию s через две термодинамические переменные T и p . Уравнение состояния среды имеет вид

$$\rho = \rho(T, p). \quad (1.4)$$

Известно, что с помощью уравнений (1.1) – (1.4) можно описать большой класс задач движения жидкости. Особый интерес представляют задачи свободной тепловой конвекции, т.е. движение макроскопических частей жидкости, приводящее к переносу тепла или массы, которое возникает под действием статического поля силы тяжести, обусловленное температурной неоднородностью. Существенно упростить (1.1) – (1.4) позволяет предположение о том, что сжимаемость среды несущественна. Полученное приближение общей системы уравнений гидродинамики называют уравнениями конвекции в приближении Буссинеска-Обербека.

Для вывода уравнений свободной конвекции предполагают, что давление и температуру можно представить в виде $T = \bar{T} + T'$, $p = \bar{P} + P'$, где \bar{T} и \bar{P} – постоянные средние значения, T' и P' – малые отклонения от средних значений, т.к. обусловленные ими отклонения плотности ρ' от среднего значения $\rho_0 = \rho(\bar{T}, \bar{P})$ малы по сравнению с ρ_0 . Учитывая введенные выше обозначения, уравнение состояния (1.4) можно переписать в виде

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T P' = \rho_0(1 - \beta T' + \alpha P'), \quad (1.5)$$

где β и α – коэффициенты теплового расширения и изотермической сжимаемости соответственно: $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$, $\alpha = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$.

Требование малости ρ' по сравнению с ρ_0 означает, что $|\beta T'| \ll 1$ и $|\alpha P'| \ll 1$. Будем считать, что изменение плотности в зависимости от температуры намного больше, чем от давления, т.е. $|\alpha P'| \ll |\beta T'|$, и тогда (1.5) можно переписать в виде:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T'). \quad (1.6)$$

Так как изменение плотности мало, то будем далее считать, что плотность остается постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения, т.е. не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. В таком случае жидкость называется несжимаемой ($\rho = \text{const}$). Тогда в (1.3) производная от плотности по времени равна нулю, ρ выносится из дивергенции и сокращается. Отсюда (1.3) можно записать следующим образом:

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (1.7)$$

Далее перейдем к рассмотрению уравнения переноса тепла (1.2). По аналогии с (1.5), запишем энтропию с помощью малых отклонений T' и P' :

$$s = s_0 + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T P'. \quad (1.8)$$

Из термодинамических соотношений

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{\beta}{\rho_0}, \quad c_p - c_v = \frac{\beta^2 \bar{T}}{\alpha \rho_0},$$

где c_p и c_v – удельные теплоемкости, Дж/(кг·К), и из условия

$|\alpha P'| \ll |\beta T'|$, делаем вывод, что можно пренебречь изменением энтропии за счет давления и (1.8) записать следующим образом: $s = s_0 + \frac{c_p}{T} T'$.

После подстановки последнего соотношения для энтропии в (1.2) и пренебрегая диссипативным теплом D , которое в обычных условиях влияет незначительно, получим уравнение теплопроводности в движущейся жидкости:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (1.9)$$

где $\chi = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим уравнение динамики сплошной среды Навье-Стокса. Подставим (1.6) в (1.1) с учетом (1.7) и предположим, что вертикальное ускорение будет мало по сравнению с силой тяжести (что обычно выполняется для свободной конвекции), тогда, разделив на среднюю плотность ρ_0 , получим:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} \beta T'. \quad (1.10)$$

Таким образом, получили систему уравнений свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} \beta T', \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.13)$$

Для существования единственного решения задачи (1.11) – (1.13) необходимо задать начальные и краевые условия для скорости и температуры. Для температуры ставят одно из следующих краевых условий [126]:

а) в каждой точке поверхности ∂G задается температура $T|_{\partial G} = f_1(P, t)$, где $f_1(P, t)$ – известная функция точки $P(x, y, z)$ поверхности ∂G и времени t (условие первого рода или условие Дирихле);

б) на поверхности ∂G задается тепловой поток $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$, где \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности ∂G , откуда $\kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial G} = f_2(P, t)$, где $f_2(P, t)$ – известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток по формуле $f_2(P, t) = -q(P, t)$ (условие второго рода или условие Неймана);

в) на поверхности ∂G происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой T_c известна: $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial G} + h(T - T_c)|_{\partial G} = f_3(P, t)$, где $h = \frac{H}{\kappa}$; H – коэффициент теплообмена; $f_3(P, t)$ – известная функция (условие третьего рода);

г) смешанные краевые условия, т.е. используются краевые условия различных родов на различных участках поверхности ∂G ($\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$), например: $T|_{\partial G_1} = f_1(P, t)$, $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial G_2} = f_2(P, t)$;

д) при наличии на ∂G двух соприкасающихся сред ставятся условия сопряжения [170]: $T_1|_{\partial G} = T_2|_{\partial G}$, $\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial G} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial G}$, где один из индексов обозначает жидкость, а другой – среду, контактирующую с ней.

Для удобства на практике используют безразмерные величины. С этой целью вводят три независимых безразмерных комплекса. Часто в качестве таких комплексов используют число Прандтля $\mathbf{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$, число Грасгофа

$\mathbf{Gr} = \frac{g\beta l^3 T'}{\nu^2}$ и число Струхала $\mathbf{Sh} = l^2 t_0 \nu$, где t_0 и l – характеристическое

время и длина соответственно. Известно, что число Прандтля характеризует подобие полей скорости и температуры в потоке и является мерой соотношения интенсивности переноса импульса внутренним трением и интенсивности

переноса энергии теплопроводностью в потоке жидкости; число Грасгофа – критерий подобия, определяющий процесс теплообмена при свободном движении в поле гравитации и являющийся мерой соотношения архимедовой силы, вызванной неравномерным распределением плотности в неоднородном поле температур, и силами межмолекулярного трения; число Струхаля – критерий подобия, который характеризует сходные гидродинамические явления в нестационарных режимах течения.

Введем новые безразмерные величины: $\tau = \frac{t}{t_0}$ – безразмерное время, $\nabla^* = l\nabla$ – безразмерный оператор Гамильтона, $\Delta^* = l^2\Delta$ – безразмерный оператор Лапласа, $\vec{v}^* = \frac{\vec{v}l}{\nu}$ – безразмерный вектор скорости, $p^* = \frac{pl^2}{\rho_0\nu^2}$ – безразмерное давление, $\theta = \frac{T'}{T_0}$ – безразмерная температура.

Учитывая три безразмерных комплекса и введенные безразмерные переменные, из системы (1.11) – (1.13) получим систему безразмерных уравнений:

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \tau} + (\vec{v}^* \nabla^*) \vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \Delta^* \vec{v}^* - \mathbf{Gr} \theta \frac{\vec{g}}{g}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \vec{v}^* \nabla^* \theta = \frac{1}{\mathbf{Pr}} \Delta^* \theta, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{div}^* \vec{v}^* = 0. \quad (1.16)$$

Далее для простоты записи будем считать все величины безразмерными и знак «*» будем опускать.

Часто от пространственной задачи тепловой гравитационной конвекции можно перейти к задаче в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, что значительно упрощает систему уравнений (1.14) – (1.16). Для удобства решения вводится так называемая функция тока $\psi(x, y)$, которая задается соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.17)$$

При подстановке (1.17) в уравнение неразрывности (1.16) последнее обращается в тождество, а уравнения (1.14) и (1.15) примут вид:

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \Delta^2 \psi - \mathbf{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathbf{Pr}} \Delta \theta. \quad (1.19)$$

Из соображений удобства решения систему (1.18) – (1.19) часто записывают с помощью функции завихренности $\omega = -\Delta \psi$:

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \Delta \omega + \mathbf{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{Sh} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathbf{Pr}} \Delta \theta. \quad (1.21)$$

При рассмотрении неконвективного течения (1.18) преобразуется к [126]:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \frac{1}{\mathbf{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (1.22)$$

где \mathbf{Re} – число Рейнольдса, которое является мерой соотношения сил инерции и вязкого (внутреннего) трения в потоке жидкости.

Также в записи уравнений в безразмерных переменных используют число Пекле, которое является мерой соотношения интенсивностей переноса энергии конвекцией и теплопроводности в потоке жидкости:

$$\mathbf{Pe} = \mathbf{Re} \cdot \mathbf{Pr}.$$

Для решения задачи (1.18) – (1.19), (1.20) – (1.21) или (1.22) необходимо добавить начальные и краевые условия. Краевые условия для функции тока $\psi(x, y)$ ставятся по заданному на $\partial \Omega$ вектору скорости \vec{v} [126]:

а) приток жидкости в область Ω соответствует краевым условиям для

компонент скорости, одна из которых равна нулю, а другая задана функцией:

$v_x = 0$, $v_y = v_y(x)$, что соответствует краевым условиям для функции тока

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

б) свободная поверхность, т.е. поверхность является обтекаемой и на вектор скорости и на функцию тока соответственно накладываются условия:

$$v_y = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$

в) неподвижные стенки, т.е. скорость жидкости равна нулю. Соответствующие краевые условия для скорости и функции тока имеют вид: $v_x = 0$,

$$v_y = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0;$$

г) сток жидкости: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, v_y = 0$ или $v_y = 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

1.2 Численные методы анализа нестационарных вязких течений

Математическая теория стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости Навье-Стокса изложена в монографии О.А. Ладыженской [124], в которой получены условия существования, единственности и устойчивости решений задач для линейных и нелинейных уравнений Навье-Стокса. Также исследование уравнений Навье-Стокса проведено в монографиях Ж.-Л. Лионса [127], Р. Темама [179], J. D. Anderson [3], R. Ansoerge [4] и др.

Аналитическое решение уравнения Навье-Стокса возможно лишь в некоторых частных случаях и является трудновыполнимой, а чаще невыполнимой, задачей. Наиболее известные – плоское течение Пуазейля, которое широко используется для описания течений в трубах; плоское течение Куэтта (ламинарное безнапорное течение); решение Кармана, которое является основой теории вращающегося дискового электрода Левича и т.д. Точные решения уравнения

Навье-Стокса классифицируются путем подходящего выбора декартовой системы координат: 1) решения, линейные по части пространственных переменных; 2) решения, которые описывают конические течения, где скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от начала координат; 3) другие решения. Наиболее полный перечень случаев интегрируемости уравнений Навье-Стокса дан в [147, 148]. Точные решения способствуют лучшему пониманию качественных особенностей течений, используются для тестирования существующих численных, приближенно-аналитических и асимптотических методов, однако на практике уравнения Навье-Стокса часто приходится решать численно [22, 26, 27, 62, 85, 88, 100, 102 – 104, 107, 117, 123, 138, 159, 183, 190].

Существует три подхода при решении уравнений Навье-Стокса для плоскопараллельного нестационарного течения [145, 156]:

а) решение в естественных переменных скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ и давления $p = p(x, y)$ (массовые силы отсутствуют):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (1.25)$$

б) решение уравнения для функции тока $\psi = \psi(x, y, t)$:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (1.26)$$

где функция тока связана с вектором скорости соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1.27)$$

в) решение системы уравнений для функции тока $\psi = \psi(x, y, t)$ и завихренности $\zeta = \zeta(x, y, t)$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nu \Delta \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.28)$$

$$-\Delta \psi = \zeta. \quad (1.29)$$

Рассмотрим достоинства и недостатки этих трех подходов.

Преимуществом системы (1.23) – (1.25) является непосредственное получение решения для вектора скорости и давления и второй порядок системы дифференциальных уравнений [12, 16]. К недостаткам системы (1.23) – (1.25) можно отнести отсутствие отдельного уравнения и условий на границе для давления, а также необходимость на каждом шаге следить за выполнением уравнений неразрывности (1.25). Ввиду этого необходимо строить дополнительные вычислительные процедуры, которые усложняют процесс решения задачи.

Уравнение (1.26) и система (1.28), (1.29) обладают следующими достоинствами: отсутствие давления; нет необходимости заботиться о соленоидальности вектора скорости (равенство нулю его дивергенции), так как с введением функции тока ψ соотношениями (1.27) это условие выполнено автоматически. Однако недостатком уравнения (1.26) является четвертый порядок дифференциальных уравнений, что усложняет его решение. При нахождении решения системы (1.28), (1.29) возникают трудности, связанные с заданием краевых условий для завихренности, которые в физической постановке задачи отсутствуют [51, 106]. Это приводит к необходимости применения различных методик по заданию краевых условий для завихренности (например, условие Тома, используемое как условие первого порядка точности относительно шага сетки), которые не имеют физического обоснования [126]. Эта проблема отсутствует в уравнении (1.26). В этом случае из физических соображений

можно задать краевые условия $\psi|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega}$, где \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Рассмотрим основные подходы к численному анализу систем (1.23) – (1.25), (1.28), (1.29) и уравнения (1.26).

Наиболее часто используемым численным методом благодаря возможности аппроксимировать решения большого класса прикладных задач является метод конечных разностей (МКР). МКР позволяет находить решения сложных задач, для которых затруднительно найти точное решение (как, например, для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса [42]). МКР является довольно простым и хорошо изученным методом, в котором осуществляется замена непрерывной области интегрирования совокупностью изолированных точек, а производные аппроксимируются конечными разностями. Модель, формируемая таким образом, может быть улучшена с помощью увеличения количества точек. Точность МКР может быть без труда оценена с помощью остаточного члена разложения в ряд Тейлора, что невозможно сделать, например, для метода конечных элементов. Также важным преимуществом является возможность простого расширения решения одномерной задачи на двумерный или трехмерный случай. Метод широко используется в гидродинамике [20, 37, 39, 44 – 46, 53, 95, 96, 157, 164, 184, 185, 194], однако появление большого количества сложных областей и необходимость учета условий на границе области усложняет его использование.

Метод конечных объемов (МКО), который изначально был представлен в [17] для уравнения теплопроводности, является скорее улучшением МКР и хорошо зарекомендовал себя в задачах вычислительной гидродинамики [144]. Метод принадлежит к классу вычислительных схем, способных справиться с неструктурированными многоугольными и многогранными сетками, а также нелинейными уравнениями. Идея метода [144] сводится к разбиению области на конечное число непересекающихся объемов так, чтобы каждая узловая точка содержалась в одном объеме. Далее дифференциальное уравнение интегрируется по каждому объему. Полученный таким образом дискретный аналог задачи выражает закон сохранения для конечного объема так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для

бесконечно малого объема. Существенным преимуществом метода является то, что в нем изначально точно сохраняются интегральные соотношения для таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе конечных объемов, а, следовательно, и на всей области. МКО довольно часто используется инженерами на практике [99, 47].

Метод конечных элементов (МКЭ) [15, 34, 60, 128] впервые был разработан для задачи нахождения напряжений в сложных структурах планера [14] и позже был распространен для случая произвольного поля сплошной среды [60]. Метод состоит в разбиении области на подобласти (или элементы) и дает кусочно-гладкое приближение к решению дифференциального уравнения задачи, сводя его нахождение к системе линейных или нелинейных уравнений. Таким образом, дискретизация области конечными элементами позволяет уменьшить сложность задачи. Также благодаря возможности выбора формы элемента разбиения можно приближенно учесть краевые условия. Эти особенности МКЭ обусловили его широкое использование в гидродинамике [1, 8 – 10, 19, 24, 25, 28 – 30, 48, 50, 52, 54 – 57, 60, 116]. К недостаткам следует отнести ряд условий, накладываемых на построение сетки (например, при триангуляции это условия отсутствия малых углов, «вырождающихся» треугольников, смежных треугольников со значительно различающимися размерами [193]).

Отдельно стоит рассмотреть метод фиктивных областей (МФО), который впервые был применен для краевой задачи Дирихле в сложной области В.К. Саулевым [161]. Метод заключается в том [91], что для решения исходной краевой задачи в сложной области используется вспомогательная задача в более простой области, что позволяет значительно расширить класс решаемых задач. Вспомогательная задача решается методом конечных разностей. К недостаткам МФО можно отнести следующее: вспомогательная задача – это задача с сильноменяющимися коэффициентами, что усложняет построение конечно-разностных схем; такая вспомогательная задача не является единственной; возможна слишком медленная скорость сходимости приближенного решения к точному. Как показано в работе [137], МФО может

быть применен к задачам гидродинамики. Вычислительные результаты для уравнений Навье-Стокса были получены в работах [98, 142, 172, 122] и др.

Также для моделирования различных физико-механических полей (в частности, гидродинамических) используется метод R -функций, разработанный школой академика НАН Украины В.Л. Рвачева. Благодаря аппарату функций непрерывных аргументов, обладающих свойствами булевых функций, удается строить пучки функций (структуры решений), точно учитывающие геометрию области и краевые условия задачи.

В вычислительной гидродинамике метод R -функций применялся Колосовой С.В. (течения идеальной жидкости в каналах и задачи обтекания тел [113 – 115]), Максименко-Шейко К.В. (течения вязкой жидкости в областях с винтовой симметрией [131 – 135]), Сидоровым М.В. (стационарные течения вязкой жидкости в односвязных и многосвязных областях) [165 – 169, 178], Слесаренко А.П. (задачи теплообмена в трубах сложного сечения [170]), Суворовой И.Г. (стационарные течения вязкой жидкости [154, 175 – 177]), Шейко Т.И. (магнито-гидродинамические течения [149]) и др.

1.3 Структурный метод R -функций

Структурный метод R -функций – метод решения краевых задач для уравнений с частными производными. R -функции были введены в 1963 году академиком НАН Украины В.Л. Рвачёвым и образуют множество, которое пересекается с множеством элементарных функций [152]. Благодаря этому существует возможность производить над R -функциями дифференцирование и другие вычислительные операции. Рвачёв В.Л. предложил одновременно рассматривать функции дискретного и непрерывного анализа, и, как следствие, ему удалось заметить среди функций непрерывных аргументов существование функций (R -функций), которые по своим свойствам напоминают функции алгебры логики. Таким образом, каждой R -функции поставлена в соответствие булева функция, что позволило в дальнейшем использовать ме-

тоды алгебры логики в классическом непрерывном анализе для описания сложных геометрических объектов.

Сформулируем обратную задачу аналитической геометрии и рассмотрим основные понятия теории R -функций [119, 120, 150, 153]. Пусть в \mathbb{R}^2 задан геометрический объект Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и требуется построить функцию $\omega(x, y)$, положительную внутри Ω , отрицательную вне Ω и равную нулю на $\partial\Omega$. Уравнение $\omega(x, y) = 0$ будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу $\partial\Omega$ области Ω . В дальнейшем, следуя работам академика В.Л. Рвачёва, будем также использовать термин локус, под которым необходимо понимать множество точек \mathbb{R}^2 , для которого с помощью некоторой системы элементарных функций и констант $a \in \mathbb{R}$ путем образования их суперпозиций можно написать уравнение вида $\omega(x, y) = 0$. Причем функция $\omega(x, y)$ будет являться элементарной функцией и иметь вид единого аналитического выражения. Функция $\omega(x, y)$ может быть достаточно просто построена с помощью метода R -функций для областей произвольной формы.

Определение 1.1. R -функцией (функцией В.Л. Рвачёва), соответствующей разбиению числовой оси на интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, +\infty)$, называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов.

Существует также альтернативное определение.

Определение 1.2. Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, определенная всюду в \mathbb{R}^n , называется R -функцией, если существует такая булева функция F , что выполнено равенство

$$S[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S(x_1), \dots, S(x_n)], \quad (1.30)$$

где двузначный предикат $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Определение 1.3. Функция F из равенства (1.30) называется сопрово-

ждающей для R -функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Каждой R -функции соответствует единственная сопровождающая, обратное неверно.

Определение 1.4. Совокупность всех R -функций, имеющих одну и ту же сопровождающую булеву функцию, назовем ветвью множества R -функций. Всего существует 2^{2^n} ветвей множества R -функций n переменных.

Определение 1.5. Система H R -функций называется достаточно полной, если пересечение множества $\mathfrak{M}(H)$ (множества суперпозиций H) с каждой ветвью множества R -функций не является пустым.

Рассмотрим основные достаточно полные системы R -функций, соответствующие системе сопровождающих функций

$$H_2 = \{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \sim X_2, X_1 \Rightarrow X_2, X_1 | X_2\}.$$

Наиболее часто используется система \mathfrak{R}_α :

$$\begin{aligned} x \wedge_\alpha y &\equiv (1 + \alpha)^{-1} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ x \vee_\alpha y &\equiv (1 + \alpha)^{-1} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \quad \bar{x} \equiv -x. \end{aligned}$$

Здесь $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$.

При $\alpha \equiv 0$ получаем систему \mathfrak{R}_0 , которую часто используют на практике

$$x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} \equiv -x.$$

Пусть область Ω может быть сконструирована из вспомогательных (опорных) областей $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ по логическим правилам, определяемым булевой функцией F , с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания: $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m)$.

Считаем, что каждая опорная область Σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, может быть

задана в виде $\Sigma_i = \{\omega_i(x, y) \geq 0\}$, где функция $\omega_i(x, y)$ является элементарной. Тогда, заменяя в выражении для Ω символы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на символы R -операций \wedge_α , \vee_α , $-$, а Ω и Σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, на $\omega(x, y)$ и $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$, соответственно, получим в итоге аналитическое выражение, определяющее в элементарных функциях требуемое уравнение границы $\omega(x, y) = 0$. При этом для внутренних точек области $\omega(x, y) > 0$, а для внешних $\omega(x, y) < 0$.

Определение 1.6. Уравнение $\omega = 0$ называется нормализованным до k -го порядка, если

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 1, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\vec{n}^2}\Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^k\omega}{\partial\vec{n}^k}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.32)$$

где \vec{n} – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$.

Условия (1.31) и (1.32) означают, что вдоль нормали к $\partial\Omega$ функция ω ведет себя примерно как расстояние ρ точек этой нормали от $\partial\Omega$.

Теорема 1.1. Если $\omega_1(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} > 0$, то функция $\omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\nabla\omega_1|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 1$ во всех регулярных точках $\partial\Omega$. Здесь

$$\nabla\omega_1 = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} \right), \quad |\nabla\omega_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} \right)^2}.$$

Выражение в знаменателе можно заменить любым другим не обращающимся в нуль в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ выражением, совпадающим на $\partial\Omega$ с $|\nabla\omega_1|$. Например, можно использовать формулу

$$\omega = \frac{\omega_1}{\|\nabla\omega_1\|_{\partial\Omega}}, \quad (1.33)$$

если $\|\nabla\omega_1\|_{\partial\Omega} \neq 0$.

Построим с помощью системы \mathfrak{R}_0 нормализованное уравнение $\omega(x, y) = 0$ границы замкнутой области $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ (рис. 1.1).

Область Ω может быть сконструирована из опорных областей $\Sigma_1 = \left\{ \frac{1}{a}x(a-x) \geq 0 \right\}$, $\Sigma_2 = \left\{ \frac{1}{b}y(b-y) \geq 0 \right\}$ по формуле $\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2$.

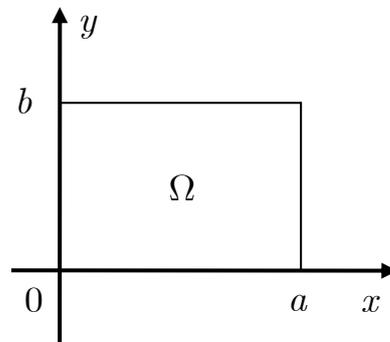


Рисунок 1.1 – Область Ω

Тогда уравнение границы области Ω определяется уравнением $\omega(x, y) = 0$, где

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \left[\frac{1}{a}x(a-x) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{b}y(b-y) \right] = \\ &= \frac{x(a-x)}{a} + \frac{y(b-y)}{b} - \sqrt{\frac{x^2(a-x)^2}{a^2} + \frac{y^2(b-y)^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Пусть имеем некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\partial\Omega$ – граница этой области. Требуется решить задачу

$$Au = f, \quad (1.34)$$

$$L_i u|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.35)$$

Здесь (1.34) – неоднородное дифференциальное уравнение, (1.35) – однородные краевые условия, $A: X \rightarrow Y$, X, Y – функциональные пространства, L_i – оператор краевых условий, $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$ – покрытие границы $\partial\Omega$, при этом не все участки $\partial\Omega_i$ могут быть различными, некоторые из них могут совпадать с $\partial\Omega$.

Определение 1.7. Общей структурой решения краевой задачи (1.34), (1.35) называется выражение:

$$u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_i\}_{i=1}^m), \quad (1.36)$$

которое при любом выборе неопределенной компоненты Φ точно удовлетворяет краевым условиям (1.35). Здесь B – оператор, зависящий от геометрии области Ω и участков $\partial\Omega_i$ ее границы, а также от операторов краевых условий L_i , но не зависящий от вида оператора A и функции f .

Определение 1.8. Частной структурой решения называется формула $u = B_i(\Phi, \omega, \omega_i, \varphi_i)$, которая при любом выборе неопределенной компоненты Φ точно удовлетворяет лишь краевому условию на i -м участке границы, $\Phi \in \mathfrak{M}$.

Определение 1.9. Структура (1.36), учитывающая краевые условия (1.35), называется полной структурой на множестве \mathfrak{M} , если существует элемент $\Phi^* \in \mathfrak{M}$, что выражение $u^* = B(\Phi^*, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_i\}_{i=1}^m)$ определяет точное решение краевой задачи (1.34), (1.35).

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с невырождающимся эллиптическим оператором A :

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x) \text{ в } \Omega, \quad (1.37)$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Задача Дирихле. Краевое условие на $\partial\Omega$ имеет вид:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (1.38)$$

где $\varphi_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Построим продолжение функции φ_0 в область Ω , т.е. такую функцию $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$, что $\varphi(x)$ определена для любого $x \in \bar{\Omega}$ и $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$. Тогда структура решения задачи (1.37), (1.38) имеет вид [150, 153]:

$$u = \varphi + \omega\Phi. \quad (1.39)$$

Построенную структуру (1.39) можно использовать для перехода к однородным краевым условиям с помощью замены $u = \varphi + v$, где v – новая неизвестная функция. После подстановки замены в (1.37) получим новую задачу

$$\begin{aligned} Av &= \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{f} = f - A\varphi$, структура решения которой имеет вид $v = \omega\Phi$.

Задача Неймана. Краевое условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad (1.40)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$. Тогда структура решения задачи (1.37), (1.40) имеет вид:

$$u = \Phi_1 + \omega(\omega\Phi_2 + D_1\Phi_1 + \varphi). \quad (1.41)$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 – неопределенные компоненты структуры, оператор

$$D_1 \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Третья краевая задача. Краевое условие имеет вид:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h_0 u \right) \Big|_{\partial \Omega} = \varphi_0. \quad (1.42)$$

Пусть $\varphi = \text{EC}\varphi_0$ и $h = \text{ECh}_0$. Тогда структура решения задачи (1.37), (1.42) имеет вид:

$$u = \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + h \Phi_1 \omega + \varphi \omega + \omega^2 \Phi_2. \quad (1.43)$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 – неопределенные компоненты структуры.

Смешанные краевые условия. Краевые условия имеют вид:

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h_0 u \right) \Big|_{\partial \Omega_2} = \psi_0. \quad (1.44)$$

Пусть $\varphi = \text{EC}\varphi_0$, $h = \text{ECh}_0$ и $\psi = \text{EC}\psi_0$. Тогда структура решения задачи (1.37), (1.44) имеет вид:

$$u = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2^2} \left(\omega_1 \omega_2^2 + \omega_2^2 \varphi + \omega_1 \left[\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2 - h \Phi_2 \omega_2 + \psi \omega_2 \right] \right), \quad (1.45)$$

$$\text{где } D_1^{(2)} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим структуру решения для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f \quad (1.46)$$

с краевыми условиями

$$u|_{\partial \Omega} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = h_0. \quad (1.47)$$

Пусть $\varphi = \text{EC}\varphi_0$ и $h = \text{ECh}_0$. Тогда структура решения задачи (1.46), (1.47) имеет вид:

$$u = \varphi + \omega(h - D_1 \varphi) + \omega^2 \Phi. \quad (1.48)$$

Отметим, что функции $\omega(x, y)$ в структурах (1.41), (1.43), (1.48) и $\omega_2(x, y)$ в структуре (1.45) должны быть нормализованными.

1.4 Постановка задач исследования

Из проведенного выше анализа методов решения плоскопараллельных задач гидродинамики вязкой жидкости следует, что при моделировании нестационарных вязких течений эффективнее использовать уравнение для функции тока $\psi(x, y, t)$ вида (1.26), чем систему для функции тока $\psi(x, y, t)$ и завихренности $\zeta(x, y, t)$ вида (1.28), (1.29) или систему в естественных переменных для скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ и давления $p = p(x, y, t)$ вида (1.23) – (1.25), поскольку для функции $\psi(x, y, t)$ можно корректно задать краевые условия и при решении уравнения для ψ нет необходимости удовлетворять уравнению неразрывности, которое удовлетворяется автоматически.

Однако, четвертый порядок дифференциального уравнения (1.26), его нелинейность и зависимость от времени стали причиной того, что методы решения этого уравнения с нашей точки зрения разработаны недостаточно. Ввиду того, что является проблематичным построение устойчивых конечно-разностных схем высокого порядка аппроксимации, то более привлекательным является использование для решения уравнения (1.26) проекционных методов (типа метода Галеркина) в сочетании с итерационными методами. Это связано с тем, что проекционные методы дают приближенное решение в аналитическом виде, что облегчает дальнейшее использование функции тока $\psi(x, y, t)$ для нахождения поля скоростей и давления. Однако эти методы при расчете течений в сложных областях границу исходной области заменяют более простой, т.е. геометрическая информация, содержащаяся в постановке задачи, учитывается неточно. Чтобы точно учесть геометрию области, необходимо воспользоваться конструктивным аппаратом теории R -функций при решении обратной задачи аналитической геометрии и построении структур

решения краевых задач.

Исходя из вышеизложенного, задачами данной диссертационной работы являются:

а) рассмотреть постановку нестационарной линейаризованной по Стоксу задачи для функции тока в односвязной области с кусочно-гладкой границей и разработать метод численного анализа на основе структурного метода R -функций и метода Галёркина для нестационарных задач;

б) рассмотреть постановку нестационарной линейаризованной задачи для функции тока и температуры в односвязной области с кусочно-гладкой границей и разработать метод численного анализа на основе структурного метода R -функций и метода Галёркина для нестационарных задач;

в) рассмотреть постановку нестационарной нелинейной задачи для функции тока и, используя разработанный метод решения задачи Стокса, построить итерационный метод решения нелинейного уравнения, исследовать вопросы сходимости полученной итерационной последовательности;

г) рассмотреть постановку нестационарной нелинейной задачи для функции тока и температуры и, используя разработанный метод решения соответствующей линейаризованной задачи, построить итерационный метод решения системы нелинейных уравнений, исследовать вопросы сходимости полученной итерационной последовательности;

д) провести численное моделирование и выполнить программную реализацию разработанных методов и алгоритмов на примере тестовых задач.

РАЗДЕЛ 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА)

2.1 Постановка линеаризованной по Стоксу задачи для функции тока

Достаточно широкий класс течений может быть сведен к двумерным течениям. Далее будем рассматривать плоскопараллельные течения, когда область, в которой изучается течение, является цилиндрической, а краевые и начальные данные не зависят от координаты оси цилиндра.

Плоскопараллельное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается хорошо известными уравнениями Навье-Стокса [101, 126]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (2.1)$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.2)$$

где $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – поле скоростей;

p – давление;

ν – кинематическая вязкость;

ρ – плотность;

∇ – оператор набла;

Δ – оператор Лапласа.

Будем предполагать, что объемные силы отсутствуют.

Решение системы (2.1), (2.2) сопряжено со значительными трудностями, связанными, в основном, с присутствием в (2.1) нелинейного члена $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$.

Для достаточно медленного (ползущего) течения отношение порядка

конвективных сил инерции к порядку сил вязкости малó и нелинейным членом в (2.1) можно пренебречь. При этом мы получим линеаризованные по Стоксу уравнения вязкой несжимаемой жидкости.

В приближении Стокса уравнения нестационарного плоскопараллельного движения вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области Ω плоскости xOy имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Анализ плоскопараллельных течений удобно производить с помощью функции тока $\psi(x, y, t)$, вводимой соотношениями [101, 126]

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\tag{2.4}$$

(уравнение неразрывности при этом обращается в тождество).

Исключая давление из (2.3) перекрестным дифференцированием, для функции тока получаем уравнение $\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi$, где Δ^2 – бигармонический оператор.

Начальные и краевые условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор \vec{v} . Так, если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющая скорости (условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки.

Исходя из этого, на границе $\partial\Omega$ области Ω можно задать значение функции тока ψ и её нормальной производной $\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}$, где \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Итак, для функции тока ψ можно поставить начально-краевую задачу

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2.7)$$

Методика задания функций $f_0(s, t)$ и $g_0(s, t)$ рассмотрена в [166].

2.2 Разработка метода численного анализа линейризованной по Стоксу задачи

Для решения начально-краевой задачи (2.5) – (2.7) воспользуемся методами R -функций и Галеркина.

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω кусочно-гладкая и может быть описана элементарной функцией $\omega(x, y)$ согласно методу R -функций [119, 150, 153], причем функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- а) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
- б) $\omega(x, y) > 0$ в Ω ;
- в) $\frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, \vec{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль,

т.е. $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$.

В работе [166] было показано, что краевым условиям (2.6) удовлетворяет пучок функций

$$\psi = f - \omega(D_1f + g) + \omega^2\Phi, \quad (2.8)$$

где $f = EC f_0$, $g = EC g_0$ – продолжения функций f_0 , g_0 в Ω ;

$$D_1 u = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y};$$

$\Phi = \Phi(x, y, t)$ – неопределенная компонента, которую будем предполагать достаточно гладкой.

В задаче (2.5) – (2.7) сделаем замену $\psi = \varphi + u$, где u – новая неизвестная функция, $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$.

Тогда для функции u получим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.11)$$

$$\text{где } F = -\nu \Delta^2 \varphi + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t};$$

$$u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0}.$$

Для решения задачи (2.9) – (2.11) применим метод Галеркина для нестационарных задач [61, 109, 136, 139, 158].

Пусть $T > 0$, H – сепарабельное гильбертово пространство [171, 173, 180]. Символом $L_2(0, T; H)$ будем обозначать множество функций $u(t)$,

$t \in [0, T]$, со значениями в H таких, что $\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < +\infty$.

Это множество является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt$.

Возьмем $H = L_2(\Omega)$. Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$, $F(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Введем в рассмотрение операторы A и B , действующие в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ по правилам $Au = \Delta^2 u$, $Bu = -\Delta u$ на областях определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_B = \left\{ u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

На D_A введем энергетическое произведение $[u, v]_A$ по правилу: для любых $u, v \in D_A$

$$[u, v]_A = (Au, v)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx dy.$$

В формулу Грина [140]

$$\iint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds \quad (2.12)$$

вместо u подставим Δu . Тогда

$$\iint_{\Omega} v\Delta^2 u \, dx dy = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial \Delta u}{\partial \vec{n}} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

Отсюда, учитывая краевые условия, которым удовлетворяют функции из D_A , получим, что криволинейный интеграл первого рода в правой части последнего равенства равен нулю и

$$\iint_{\Omega} v\Delta^2 u \, dx dy = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx dy. \quad (2.13)$$

Тогда скалярное произведение $[u, v]_A$ можно записать в виде

$$[u, v]_A = (Au, v)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx dy, \quad (2.14)$$

а соответствующую энергетическую норму

$$\|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (2.15)$$

Пополняя D_A в норме $\|u\|_A$, получим энергетическое пространство H_A оператора A .

На D_B введем энергетическое произведение $[u, v]_B$ по правилу: для любых $u, v \in D_B$

$$[u, v]_B = (Bu, v)_{L_2(\Omega)} = - \iint_{\Omega} \Delta u \cdot v dx dy.$$

Применяя формулу Грина (2.12) и учитывая краевые условия, которым удовлетворяют функции из D_B , получим

$$[u, v]_B = (Bu, v)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy, \quad (2.16)$$

а соответствующая энергетическая норма

$$\|u\|_B^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (2.17)$$

Пополняя D_B в норме $\|u\|_B$, получим энергетическое пространство H_B оператора B .

Можно показать, что $H_A = \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \subset H_B = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Лемма 2.1. Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Оператор $Au = \Delta^2 u$ симметричный и положительно определенный.

Доказательство. Свойство симметричности непосредственно следует из (2.14). Чтобы доказать положительную определенность, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u\|_A^2 \geq \gamma^2 \iint_{\Omega} u^2 dx dy = \gamma^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Из неравенства Фридрикса [140, 158]

$$\iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq c_1 \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + c_2 \int_{\partial\Omega} u^2 ds,$$

учитывая краевые условия, которым удовлетворяет функция из H_A , получим,

что $\int_{\partial\Omega} u^2 ds = 0$ и

$$\iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq c_1 \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (2.18)$$

Неравенство (2.18) сначала запишем, заменив u на $\frac{\partial u}{\partial x}$, тогда

$$\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \geq \frac{1}{c_1} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy,$$

потом заменив u на $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \geq \frac{1}{c_1} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy.$$

Сложив предыдущие два неравенства, получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy &\geq \frac{1}{c_1} \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{c_1^2} \iint_{\Omega} u^2 dx dy. \end{aligned}$$

Последняя оценка получена после повторного применения неравенства Фридрикса.

В [140] доказано, что если функция $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (2.10), то $\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$. Тогда получим, что

$$|u|_A^2 \geq \gamma^2 \iint_{\Omega} u^2 dx dy = \gamma^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где $\gamma^2 = \frac{1}{c_1^2}$.

Значит, оператор A положительно определенный.

Лемма доказана.

Заметим, что из доказательства леммы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} |u|_A^2 &= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Следствие 2.1. Как следствие из доказанной леммы получаем двойное неравенство

$$\frac{1}{c_1^2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq |u|_A^2 \leq \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2. \quad (2.19)$$

Лемма 2.2. Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Оператор $Bu = -\Delta u$ симметричный и положительно определенный.

Доказательство. Свойство симметричности непосредственно следует из (2.14). Чтобы доказать положительную определенность, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$|u|_B^2 \geq \gamma^2 \iint_{\Omega} u^2 dx dy = \gamma^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Из (2.17)

$$|u|_B^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

Используя (2.18), сразу получим, что

$$|u|_B^2 \geq \gamma^2 \iint_{\Omega} u^2 dx dy = \gamma^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где $\gamma^2 = \frac{1}{c_1}$, $c_1 > 0$.

Таким образом, оператор B положительно определенный. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Как следствие из доказанной леммы получаем двойное неравенство

$$\frac{1}{c_1} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq |u|_B^2 \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \quad (2.20)$$

Ясно, что $D_A \subset D_B$.

Лемма 2.3. Имеет место неравенство

$$|u|_A \geq c_3 |u|_B. \quad (2.21)$$

Доказательство. Неравенство (2.21) следует из теоремы вложения пространств Соболева $H_A = \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) = H_B$. Лемма доказана.

Задачу (2.9) – (2.11) можно записать в операторной форме

$$\frac{d}{dt} Bu + \nu Au = F, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2.22)$$

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (2.23)$$

Пусть $u(t)$ – классическое решение задачи (2.22), (2.23), т.е. для любого $t \geq 0$ $u(t) \in D_A$, $u(t)$ непрерывно дифференцируема по t , удовлетворяет уравнению (2.22) и начальному условию (2.23).

Пусть $v(t)$ – достаточно гладкая в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая краевым условиям (2.10) и такая, что при некотором $T > 0$ $v(T) = 0$. Умножим (2.22) скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную функцию $v(t)$ с указанными свойствами:

$$\left(\frac{d}{dt} Bu, v \right)_{L_2(\Omega)} + \nu (Au, v)_{L_2(\Omega)} = (F, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя последнее равенство по t от 0 до T , получаем, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} Bu, v \right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T (Au, v)_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (F, v)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Если проинтегрировать первый интеграл по частям (по переменной t), воспользоваться равенством $v(T) = 0$, то, учитывая вид энергетических произведений в H_A и H_B , получим, что

$$-\int_0^T \left[u, \frac{dv}{dt} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u, v]_A dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (F, v)_{L_2(\Omega)} dt. \quad (2.24)$$

Последнее равенство возьмем в качестве определения обобщенного (слабого) решения задачи (2.22), (2.23) (а значит, задачи (2.9) – (2.11)).

Обозначим множество функций

$$W_T = \left\{ u \mid u \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)), u' \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), u(T) = 0 \right\}.$$

Определение 2.1. Функция $u(t)$ называется *обобщенным (слабым) решением* задачи (2.22), (2.23), если

а) $u(t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$;

б) для любого элемента $v(t) \in W_T$ имеет место равенство (2.24).

Вариационную формулировку задачи (2.22), (2.23) (эквивалентную определению обобщенного решения) можно записать следующим образом:

$$[u', v]_B + \nu[u, v]_A = (F, v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (2.25)$$

$$(u - u_0, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \quad (2.26)$$

где под u' следует понимать производную по времени.

Для построения обобщенного решения задачи (2.25), (2.26) воспользуемся методом Галеркина [139, 158]. Приближенное решение задачи (2.25), (2.26) ищем в виде

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i, \quad (2.27)$$

где $c_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, – неизвестные функции;

$\{\varphi_i\}$ – координатная последовательность, т.е. она удовлетворяет условиям:

а) для любого i $\varphi_i \in H_A$;

б) для любого n $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;

в) $\{\varphi_i\}$ полна в H_A .

Поскольку из (2.8) следует, что $u = \omega^2 \Phi$, где $\Phi = \Phi(x, y, t)$ – неопределенная компонента структуры решения, то координатную последовательность можно взять в виде $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций [153, 181, 182].

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (2.27) в уравнение (2.25), первым n координатным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Это приводит для определения $c_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t) b_{ij} + \nu \sum_{i=1}^n c_i(t) a_{ij} = l_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i(0) s_{ij} = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.29)$$

где $b_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_B$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $l_j(t) = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$, $s_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$, $p_j = (u_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$.

В матричных обозначениях $C(t) = \{c_i(t)\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$, $L(t) = \{l_j(t)\}$, $S = \{s_{ij}\}$, $P = \{p_j\}$. Здесь B , A , S – квадратные матрицы порядка n , C , L , P – матрицы столбцы. Тогда задачу (2.28), (2.29) можно записать в виде:

$$BC'(t) + \nu AC(t) = L(t), \quad t \in (0; T], \quad (2.30)$$

$$SC(0) = P. \quad (2.31)$$

Отметим, что матрицы B , A , S – матрицы с отличными от нуля определителями (как матрицы Грама линейно независимой системы функций относительно скалярных произведений $[\cdot, \cdot]_B$, $[\cdot, \cdot]_A$, $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$); они симметричные и положительно определенные.

Утверждение 2.1. Приведенных свойств достаточно для того, чтобы решение задачи Коши (2.30), (2.31) существовало и было единственным, т.е. при любом n галеркинские приближения к решению задачи (2.9) – (2.11) (а значит, и приближения $\psi_n = \varphi + u_n$ к решению задачи (2.5) – (2.7)) определены и строятся единственным образом.

Изучим свойства аппроксимаций Галеркина $u_n(t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$. Для этого подставим в вариационную задачу

$$[u_n', v]_B + \nu [u_n, v]_A = (F, v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$(u_n - u_0, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0,$$

вместо произвольной функции v приближенное решение $u_n(t)$. Получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u_n, u_n]_B + \nu [u_n, u_n]_A = (F, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$(u_n, u_n)_{L_2(\Omega)} = (u_0, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0.$$

Перепишем предыдущие два уравнения в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|_B^2 + \nu \|u_n\|_A^2 = (F, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (2.32)$$

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 = (u_0, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0. \quad (2.33)$$

Проинтегрируем уравнение (2.32) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\frac{1}{2} \|u_n(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u_n(0)\|_B^2 + \int_0^t (F, u_n)_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (2.34)$$

Для исследования устойчивости аппроксимации Галеркина получим оценки сверху для двух норм решения u_n . Сформулируем теоремы о единственности.

Для этого получим оценки норм решения. Оценим правую часть в соотношении (2.34). Из неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad (2.35)$$

и следствия 2.1 получим, что

$$|(F, u_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \|F\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|F\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_A.$$

Из неравенства Юнга

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.36)$$

при $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$, $a = \|u_n\|_A$, $b = c_1 \|F\|_{L_2(\Omega)}$ получим, что

$$|(F, u_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \frac{\nu}{2} \|u_n\|_A^2 + \frac{1}{2\nu} c_1^2 \|F\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\int_0^t (F, u_n)_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \int_0^t |(F, u_n)_{L_2(\Omega)}| d\tau \leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau + \frac{c_1^2}{2\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Подставим полученное неравенство в правую часть (2.34) и умножим обе части неравенства на 2:

$$\|u_n(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau \leq \|u_n(0)\|_B^2 + \frac{c_1^2}{\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Из следствия 2.2 следует, что

$$\|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau \leq \frac{1}{\chi} \|u_n(0)\|_B^2 + \frac{c_1^2}{\nu\chi} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau, \quad (2.37)$$

где $\chi = \min \left\{ \frac{1}{c_1}, \nu \right\}$, $t \in (0; T]$.

Из доказанного неравенства (2.37) следует ограниченность решения задачи в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$, которая опреде-

лена соотношением $\text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|u\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Вариационная задача (2.25), (2.26), которая приводит к задаче Коши (2.28), (2.29) имеет (если оно существует) единственное решение в пространстве $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$.

Рассмотрим еще одну оценку нормы решения. С этой целью перепишем уравнение (2.32) в виде

$$\|u_n\|_B \frac{d}{dt} \|u_n\|_B + \nu \|u_n\|_A^2 = (F, u_n)_{L_2(\Omega)}.$$

Используя неравенство (2.21) из леммы 2.3, получим

$$\|u_n\|_B \frac{d}{dt} \|u_n\|_B + \nu c_3^2 \|u_n\|_B^2 \leq (F, u_n)_{L_2(\Omega)}.$$

Оценим правую часть по неравенству Коши-Буняковского-Шварца (2.34):

$$|(F, u_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \|F\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\|u_n\|_B \frac{d}{dt} \|u_n\|_B + \nu c_3^2 \|u_n\|_B^2 \leq \|F\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

Используя левую часть из следствия 2.2, получим

$$\frac{1}{c_1} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \frac{d}{dt} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} + \frac{\nu c_3^2}{c_1} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|F\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\frac{1}{c_1} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}$:

$$\frac{d}{dt} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} + \nu c_3^2 \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|F\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.38)$$

Заметим, что $\frac{d}{dt} (e^{\gamma t} g(t)) = e^{\gamma t} \left(\frac{d}{dt} g(t) + \gamma g(t) \right)$. Тогда выражение слева в

формуле (2.38) можно записать в виде:

$$e^{-\nu c_3^2 t} \frac{d}{dt} \left(e^{\nu c_3^2 t} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (2.39)$$

Из формулы (2.38), учитывая (2.39), получаем

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\nu c_3^2 t} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq c_1 e^{\nu c_3^2 t} \|F\|_{L_2(\Omega)}.$$

Проинтегрируем это неравенство на промежутке $[0; t]$:

$$e^{\nu c_3^2 t} \|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)} - \|u_n(0)\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \int_0^t e^{\nu c_3^2 \tau} \|F(\tau)\|_{L_2(\Omega)} d\tau.$$

Окончательно перепишем неравенство в виде

$$\|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{-\nu c_3^2 t} \|u_n(0)\|_{L_2(\Omega)} + c_1 \int_0^t e^{-\nu c_3^2 (t-\tau)} \|F(\tau)\|_{L_2(\Omega)} d\tau.$$

Полученная оценка также определяет устойчивость приближенного решения, но в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.

Теорема 2.2. Пусть заданы функции $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $F(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Тогда вариационная задача (2.25), (2.26) имеет единственное решение $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся свойствами полноты координатных функций φ_k из (2.27), согласно которому последовательность приближенных решений является сходящейся в норме пространства H_A , т.е. $u_n \xrightarrow{H_A} u$, где u – предел последовательности, который принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$. Используя здесь свойства положительной определенности операторов A и B , а также следствия 2.1 и 2.2, получим, что $u_n \xrightarrow{H_A} u$, $u_n \xrightarrow{H_B} u$, где эта же предельная функция u принадлежит одновременно пространствам H_A и H_B . Необходимо только доказать, что эта предельная функция удовлетворяет уравнению вариационной задачи

$$[u'_n, v]_B + \nu[u_n, v]_A = (F, v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (2.40)$$

$$[u_n - u_0, v]_B = 0, \quad t = 0. \quad (2.41)$$

Будем считать, что функция v зависит от времени t , непрерывна до производных первого порядка по этой переменной и удовлетворяет условию $v(T) = 0$, т.е. $v \in W_T$.

Проинтегрируем уравнение (2.40) по времени на промежутке $[0; T]$, используя в первом слагаемом интегрирование по частям. Получим

$$\int_0^T (-[u_n, v']_B + \nu[u_n, v]_A - (F, v)_{L_2(\Omega)}) dt = [u_n(0), v(0)]_B.$$

Перейдем в полученном уравнении к пределу при $n \rightarrow \infty$ и применяем к первому слагаемому вновь интегрирование по частям. Получим:

$$\int_0^T ([u', v]_B + \nu[u, v]_A - (F, v)_{L_2(\Omega)}) dt = [u(0) - u_0, v(0)]_B. \quad (2.42)$$

Учитывая полноту системы координатных функций φ_k множество W_T образует плотное множество в пространстве $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$. С учетом этого, а также условие (2.41), из уравнения (2.42) получим

$$[u', v]_B + \nu[u, v]_A = (F, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Это значит, что предел u является решением вариационной задачи (2.40), (2.41), и выполняется энергетическое уравнение

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u\|_A^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u(0)\|_B^2 + \int_0^t (F, u)_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T].$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\|u(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u\|_A^2 d\tau \leq \|u_0\|_B^2 + \frac{c_1^2}{\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (2.43)$$

Докажем теперь, что задача (2.40), (2.41) имеет единственное решение. Допустим обратное: пусть u_1 и u_2 – два разных решения этой задачи. Вследствие линейности функция $u = u_1 - u_2$ также является решением задачи (2.40), (2.41) в случае $F \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$. Оценка (2.43) дает основание сделать вывод, что $u \equiv 0$, а это противоречит предположению, что решения u_1 и u_2 различные.

Теорема доказана.

Итак, условия применимости метода R -функций к решению задачи (2.5) – (2.7) формулируются следующим образом: функция ω , удовлетворяющая условиям а) – в), такова, что

$$u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0} \in L_2(\Omega), \quad (2.44)$$

$$F(t) = -\nu \Delta^2 \varphi + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \in L_2(0, T; L_2(\Omega)). \quad (2.45)$$

2.3 Вычислительный эксперимент для задачи с известным точным решением

Была рассмотрена задача (2.5) – (2.7) для случая, когда $\nu = 1$, $T = 0,25$, Ω – квадрат $0 < x < 0,5$, $0 < y < 0,5$, т.е. задача вида

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \Delta^2 \psi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.46)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{-2\pi^2 t} \cos \pi y, & x = 0; \\ e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x, & y = 0; \\ 0, & x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -\pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x, & y = \frac{1}{2}; \\ -\pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi y, & x = \frac{1}{2}; \\ 0, & x = 0 \text{ или } y = 0; \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y, \quad (2.48)$$

для которой известно точное решение [146]:

$$\psi^*(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x \cos \pi y. \quad (2.49)$$

Для решения задачи (2.46) – (2.48) использовался метод, предложенный в пункте 2.2. Используя формулу «склейки» [153] были построены продолжения функций $f_0(s, t)$ и $g_0(s, t)$ в область Ω :

$$f(x, y, t) = \text{EC } f_0(s, t) = \frac{e^{-2\pi^2 t} \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) (y \cos \pi y + x \cos \pi x)}{y \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) + x \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) + xy},$$

$$g(x, y, t) = \text{EC } g_0(s, t) = \frac{-\pi e^{-2\pi^2 t} xy \left(\left(\frac{1}{2} - x\right) \cos \pi x + \left(\frac{1}{2} - y\right) \cos \pi y \right)}{xy \left(\frac{1}{2} - x\right) + xy \left(\frac{1}{2} - y\right) + \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - y\right)}.$$

Функция $\omega(x, y)$ имеет вид $\omega(x, y) = x(1 - 2x) \wedge_0 y(1 - 2y)$, где \wedge_0 – знак R -конъюнкции, $u \wedge_0 v = u + v - \sqrt{u^2 + v^2}$.

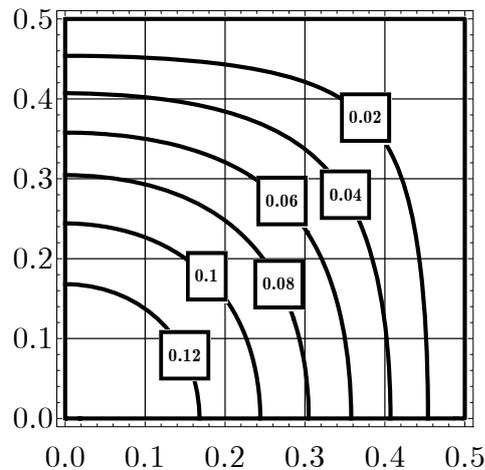
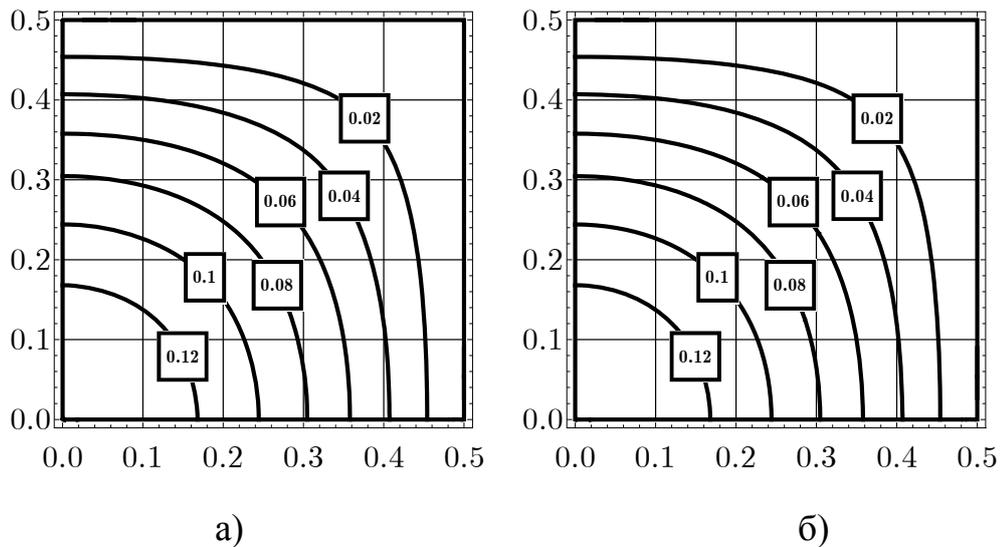
Соответствующая задача Коши (2.30), (2.31) решалась с помощью метода Рунге-Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага [108, 186], интегралы вычислялись с помощью формулы Гаусса с 16 узлами [94]. В качестве координатных функций были взяты полиномы Лежандра и сплайны Шенберга шестого порядка [181, 182].

Результаты вычислительных экспериментов показаны в таблице 2.1.

На рисунке 2.1 показаны линии уровня функции тока $\psi^*(x, y, 0.1)$ точного решения, а на рисунках 2.2 и 2.3 – линии уровня функции тока $\psi(x, y, 0.1)$ приближенного решения, которое получено с помощью полиномов Лежандра для 21 и 66 координатных функций и сплайнов Шенберга шестого порядка для 100 и 225 координатных функций. Графики линий уровня функции тока, полученные из приближенных решений, полностью совпадают с точным решением.

Таблица 2.1 – Сравнение типов координатных функций

Тип координатных функций	Полиномы Лежандра		Сплайны Шенберга 6 порядка	
	21	66	100	225
$\ \psi^* - \psi\ _{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0,11 \times 10^{-6}$	$0,99 \times 10^{-8}$	$0,42 \times 10^{-8}$	$0,44 \times 10^{-9}$
$\ \vec{v}^* - \vec{v}\ _{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0,48 \times 10^{-5}$	$0,84 \times 10^{-6}$	$0,37 \times 10^{-6}$	$0,79 \times 10^{-7}$
$\ \zeta^* - \zeta\ _{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0,34 \times 10^{-3}$	$0,11 \times 10^{-3}$	$0,73 \times 10^{-4}$	$0,33 \times 10^{-4}$

Рисунок 2.1 – Линии уровня функции тока $\psi^*(x, y, 0.1)$ Рисунок 2.2 – Линии уровня функции тока $\psi(x, y, 0.1)$, полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

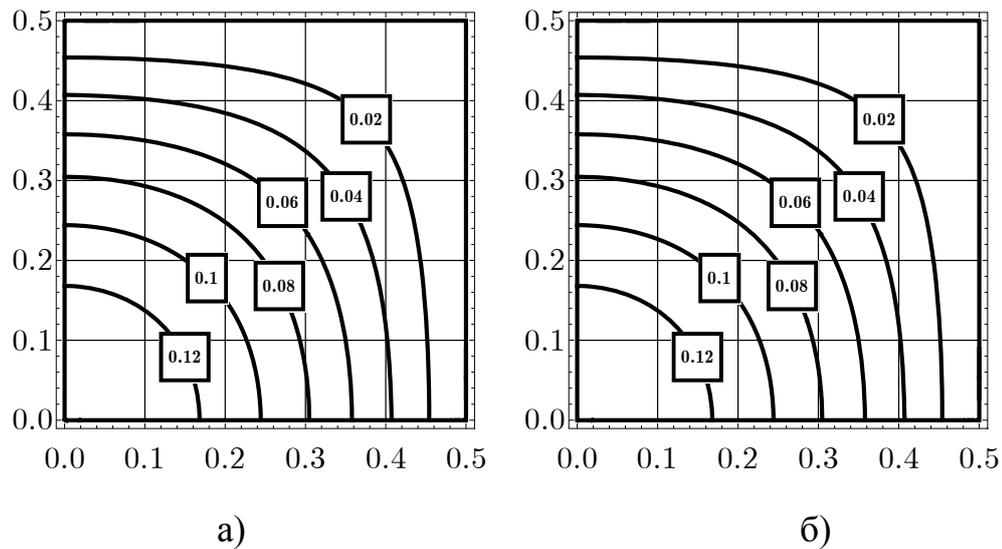


Рисунок 2.3 – Линии уровня функции тока $\psi(x, y, 0.1)$,

сплайны шестого порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

На рисунке 2.4 приведено векторное поле скоростей $\vec{v}^* = (v_x^*, v_y^*)$ точного решения в момент времени $t = 0.1$, а на рисунках 2.5 и 2.6 – векторное поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Графики векторного поля скоростей, полученные из приближенных решений, полностью совпадают с точным решением.

На рисунке 2.7 изображены линии уровня вихря $\zeta^*(x, y, 0.1) = -\Delta\psi^*(x, y, 0.1)$ точного решения, а на рисунках 2.8, 2.9 – линии уровня $\zeta(x, y, 0.1)$ приближенных решений, полученных с помощью 21, 66 координатных функций Лежандра и 100, 225 сплайнов Шенберга 6 порядка соответственно. По рисункам видно, что наилучшим образом функция вихря приближается с помощью сплайнов Шенберга 6 порядка с 225 координатными функциями. Этот же вывод подтверждается и данными таблицы 2.1.

На рисунках 2.10 – 2.15 показаны относительные погрешности

$$\frac{\|\psi^*(x, y, t) - \psi(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}{\|\psi^*(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}, \quad \frac{\|\vec{v}^*(x, y, t) - v(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}{\|\vec{v}^*(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}, \quad \frac{\|\zeta^*(x, y, t) - \zeta(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}{\|\zeta^*(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)}}$$

функции тока, вектора скорости и вихря в зависимости от времени для 21, 66 координатных функций Лежандра и 100, 225 сплайнов Шенберга 6 порядка соответственно.

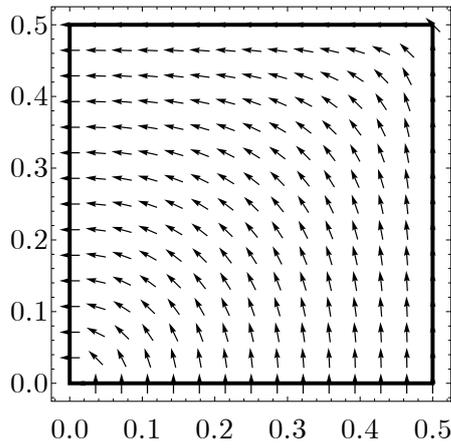


Рисунок 2.4 – Векторное поле скоростей $\vec{v}^* = (v_x^*, v_y^*)$ при $t = 0.1$

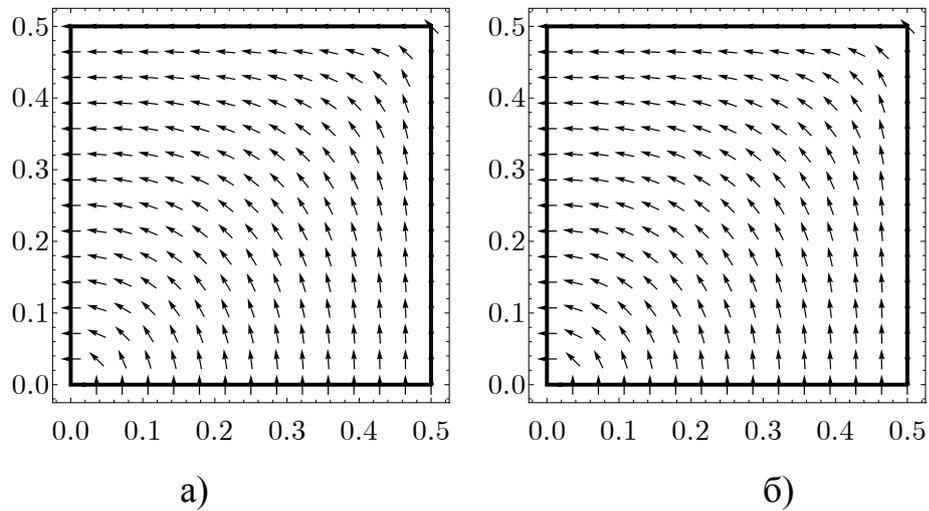


Рисунок 2.5 – Векторное поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$,
полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

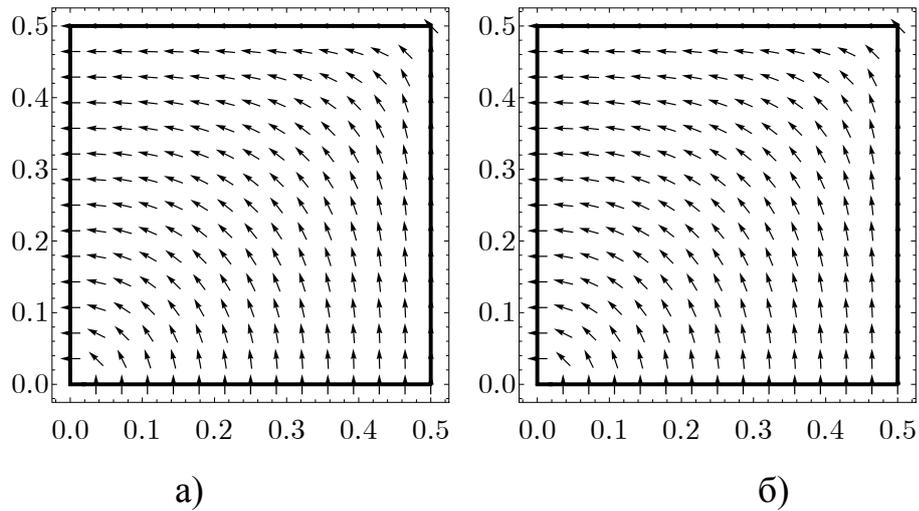


Рисунок 2.6 – Векторное поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$,
сплайны шестого порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

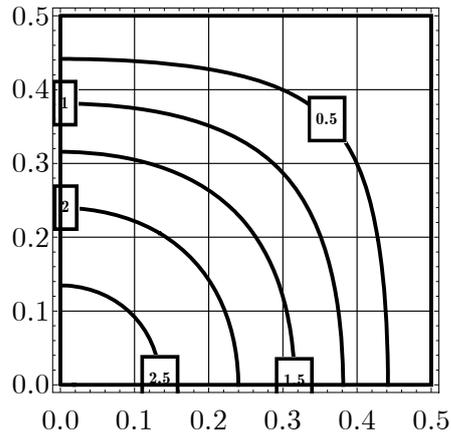


Рисунок 2.7 – Линии уровня вихря $\zeta^*(x, y, 0.1)$

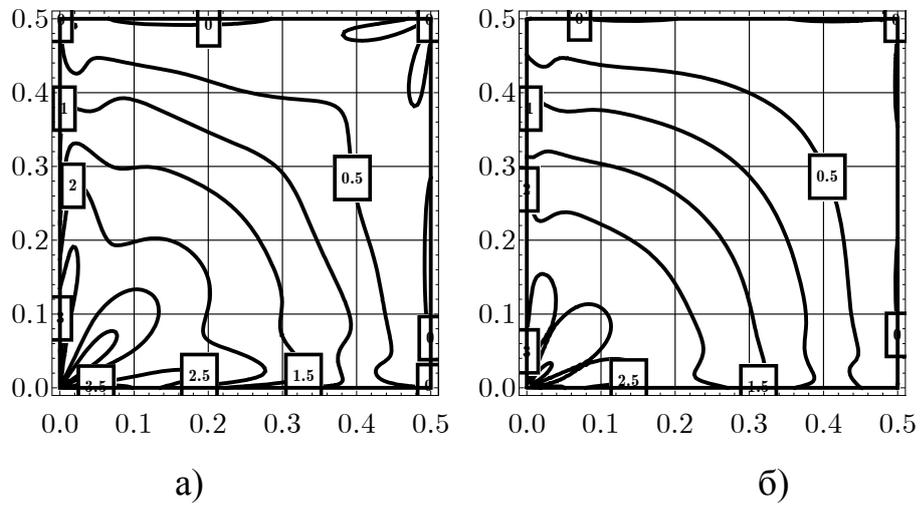


Рисунок 2.8 – Линии уровня функции вихря $\zeta(x, y, 0.1)$,
полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

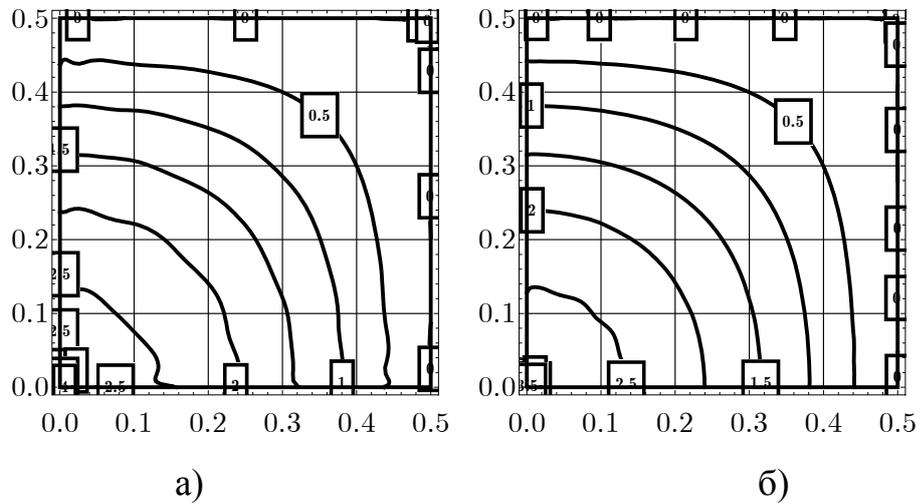


Рисунок 2.9 – Линии уровня функции вихря $\zeta(x, y, 0.1)$,
сплайны шестого порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

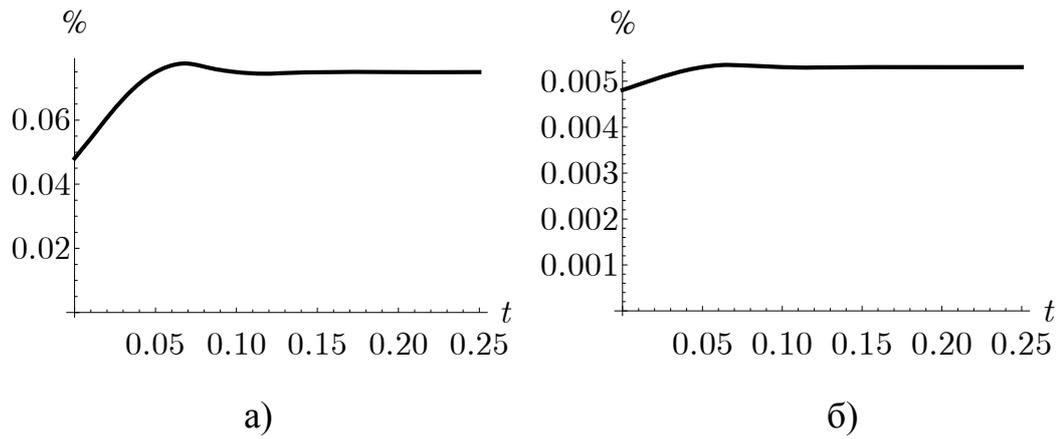


Рисунок 2.10 – Относительная погрешность функции тока $\psi(x, y, t)$, полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

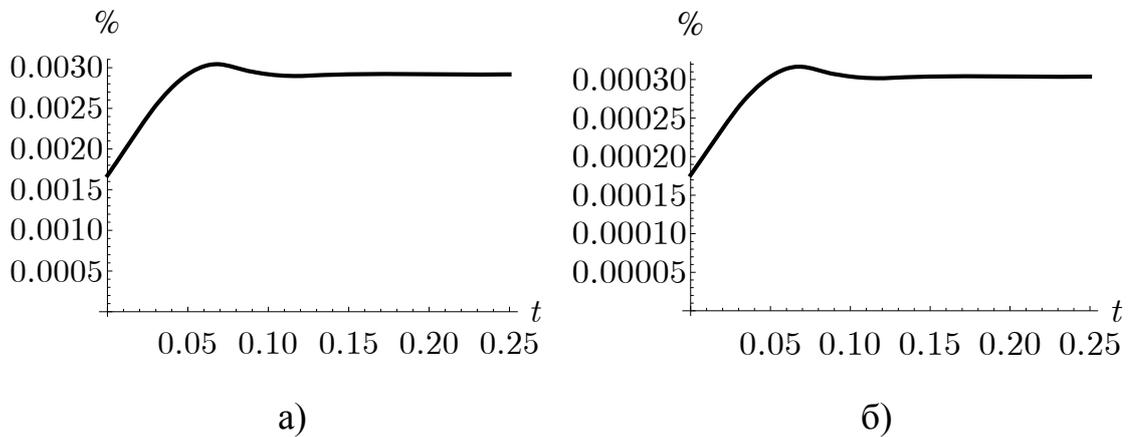


Рисунок 2.11 – Относительная погрешность функции тока $\psi(x, y, t)$, сплайны 6 порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

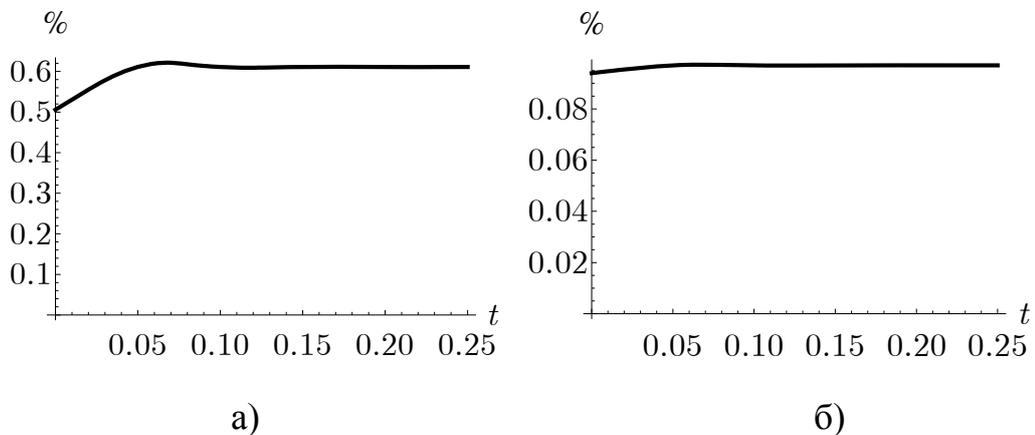


Рисунок 2.12 – Относительная погрешность модуля вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$, полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

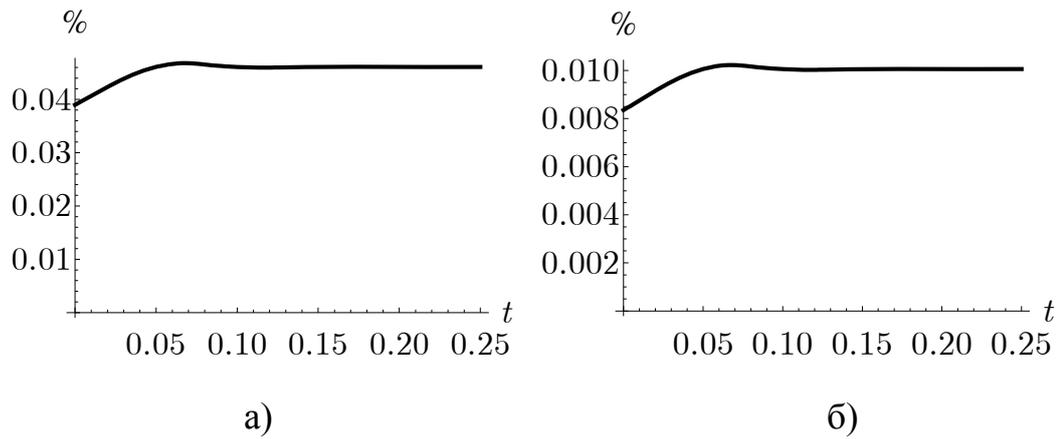


Рисунок 2.13 – Относительная погрешность модуля вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$, сплайны 6 порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

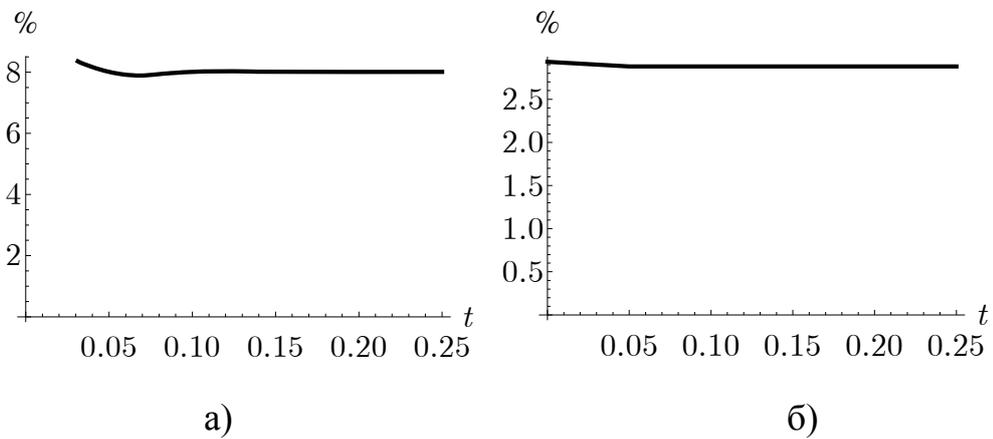


Рисунок 2.14 – Относительная погрешность функции вихря $\zeta(x, y, t)$, полиномы Лежандра с а) 21 и б) 66 координатными функциями

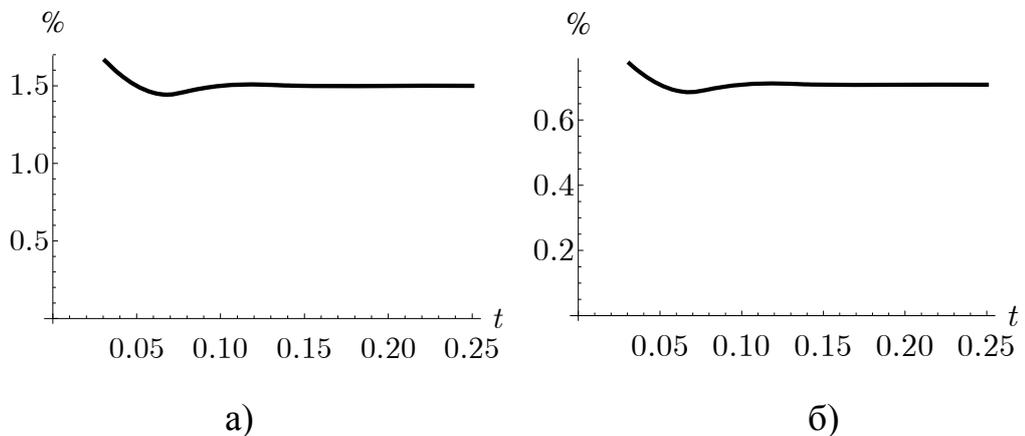


Рисунок 2.15 – Относительная погрешность функции вихря $\zeta(x, y, t)$, сплайны 6 порядка с а) 100 и б) 225 координатными функциями

Из графиков видно, что относительная погрешность с ростом времени не возрастает, что говорит о вычислительной устойчивости метода на тестовой задаче.

Таким образом, наилучшие результаты показали сплайны Шенберга шестого порядка с 225 координатными функциями. Их и будем использовать для дальнейших вычислений.

2.4 Численные результаты расчета линеаризованной по Стоксу задачи для тестовых областей

Вычислительный эксперимент для задачи (2.5) – (2.7) был проведен в трех областях Ω при $\nu = 1$, $t \in (0; 5]$, где краевые и начальные условия были выбраны следующим образом:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{-t} - 1, & y = 1, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = 1\}, \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\psi|_{t=0} = 0. \quad (2.51)$$

В качестве базисных функций были выбраны сплайны Шенберга шестого порядка. Интегралы в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.27), (2.28) считались с помощью формулы Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате. Условия применимости метода R -функций (2.44), (2.45) были проверены непосредственно. Неопределенная компонента Φ аппроксимировалась выражением [181, 182]

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{i=-3}^{N_x+3} \sum_{j=-3}^{N_y+3} c_{ij}(t) B_6\left(\frac{N_x x}{a} - i\right) B_6\left(\frac{N_y y}{b} - j\right) = \sum_{i=-3}^{N_x+3} \sum_{j=-3}^{N_y+3} c_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y),$$

где $B_6(t)$ – сплайн Шенберга шестого порядка.

Область А. Прямоугольник $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ (рис. 2.16).

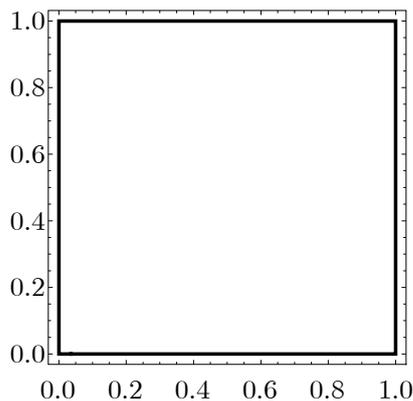


Рисунок 2.16 – Область А

Нормализованное уравнение области Ω имеет вид:

$$\omega(x, y) \equiv [x(1-x)] \wedge_\alpha [y(1-y)] = 0.$$

Также

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= 1 - y, \quad \omega_2(x, y) = xy(1 - x), \quad f(x, y, t) \equiv 0, \\ g(x, y, t) &= \frac{\frac{e^{-t} - 1}{\omega_1(x, y)}}{\frac{1}{\omega_1(x, y)} + \frac{1}{\omega_2(x, y)}} = \frac{(e^{-t} - 1)xy(1 - x)}{1 - y + xy(1 - x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, структура решения задачи (2.5), (2.50), (2.51) имеет вид:

$$\psi(x, y, t) = -\omega(x, y) \frac{(e^{-t} - 1)xy(1 - x)}{1 - y + xy(1 - x)} + \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t). \quad (2.52)$$

В таблицах 2.2 и 2.3 приведены численные характеристики течения. Здесь t – время; $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – координаты вихревого центра; $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение функции тока в вихревом центре; $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение вихря в вихревом центре; $\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$ – максимум одной из координат скорости в сечении $x = 0.5$; $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$ – нормы функции тока, двух координат скоростей и вихря в пространстве $L_2(\Omega)$.

Таблица 2.2 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.5, 0.767418)	0.0387710	1.24795
1.0	(0.5, 0.765929)	0.0628912	2.01875
1.5	(0.5, 0.765473)	0.0775215	2.48635
2.0	(0.5, 0.765273)	0.0863954	2.77000
3.0	(0.5, 0.765113)	0.0950423	3.04639
5.0	(0.5, 0.765043)	0.0993936	3.18548

Таблица 2.3 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.080545	0.0160663	0.085004	0.0544381	1.94585
1.0	0.130581	0.0260708	0.137201	0.0883455	3.12644
1.5	0.160936	0.0321390	0.168861	0.1089120	3.84649
2.0	0.179348	0.0358195	0.188064	0.1213860	4.27913
3.0	0.197290	0.0394059	0.206776	0.1335410	4.70318
5.0	0.206318	0.0412106	0.216192	0.1396580	4.91127

На рис. Б.1 – Б.12 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Б.13 – Б.24 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Б.25 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Б.26 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. Б.27 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Для этой задачи в работе [35] методом граничных элементов для стационарного решения получены следующие результаты: $x_{v.c.} = 0,500$, $y_{v.c.} = 0,769$, $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = 0,0991$, $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = 3,245$. Относительное расхождение с результатами, приведенными в таблице 2.2, составляет для $y_{v.c.}$ – 0,5%, для $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – 0,3%, а для $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – 1,9%.

Также полученные результаты хорошо согласуются с результатами, приведенными в работах [38, 11], где использовались метод конечных разностей и метода релаксации соответственно.

Область Б. Параболический сегмент $\Omega = \{(x, y) | y > 4(x - 0,5)^2, y < 1\}$

(рис. 2.17).

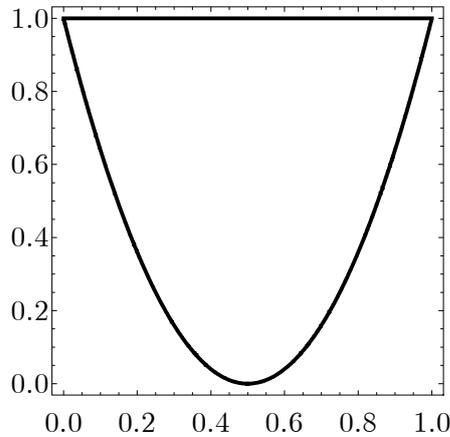


Рисунок 2.17 – Область Б

Нормализованное уравнение области Ω имеет вид:

$$\omega(x, y) \equiv \left[\frac{y - 4(x - 0,5)^2}{\sqrt{64(x - 0,5)^2 + 1}} \right] \wedge_{\alpha} [1 - y] = 0.$$

Также

$$\omega_1(x, y) = 1 - y, \quad \omega_2(x, y) = \frac{y - 4(x - 0,5)^2}{\sqrt{64(x - 0,5)^2 + 1}}, \quad f(x, y, t) \equiv 0,$$

$$g(x, y, t) = \frac{\frac{e^{-t} - 1}{\omega_1(x, y)}}{\frac{1}{\omega_1(x, y)} + \frac{1}{\omega_2(x, y)}} = \frac{(e^{-t} - 1)(y - 4(x - 0,5)^2)}{y - 4(x - 0,5)^2 + \sqrt{64(x - 0,5)^2 + 1}}.$$

Таким образом, структура решения задачи (2.5), (2.50), (2.51) имеет вид:

$$\psi(x, y, t) = -\omega(x, y) \frac{(e^{-t} - 1)(y - 4(x - 0,5)^2)}{y - 4(x - 0,5)^2 + \sqrt{64(x - 0,5)^2 + 1}} + \omega^2(x, y) \Phi(x, y, t). \quad (2.53)$$

В таблицах 2.4 и 2.5 приведены численные характеристики течения.

Таблица 2.4 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.5, 0.821933)	0.0133669	0.78009
1.0	(0.5, 0.821178)	0.0215995	1.25692
1.5	(0.5, 0.820945)	0.0265929	1.54613
2.0	(0.5, 0.820841)	0.0296216	1.72155
3.0	(0.5, 0.820762)	0.0325728	1.89251
5.0	(0.5, 0.820723)	0.0340579	1.97851

Таблица 2.5 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.0357880	0.00423413	0.0269256	0.0166924	0.371179
1.0	0.0578354	0.00684561	0.0434087	0.0270068	0.596286
1.5	0.0712088	0.00842957	0.0534064	0.0332628	0.732825
2.0	0.0793203	0.00939029	0.0594703	0.0370573	0.815641
3.0	0.0872243	0.01032640	0.0653791	0.0407547	0.896338
5.0	0.0912018	0.01079750	0.0683525	0.0426153	0.936946

На рис. Б.28 – Б.39 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Б.40 – Б.51 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Б.52 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Б.53 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. Б.54 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область В. Трапеция $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < 1, y > 10x - 9, y > 1 - 10x\}$

(рис. 2.18).

Нормализованное уравнение области Ω имеет вид:

$$\omega(x, y) \equiv \left[\frac{y + 10x - 1}{\sqrt{101}} \right] \wedge_\alpha \left[\frac{y - 10x + 9}{\sqrt{101}} \right] \wedge_\alpha [y(1 - y)] = 0.$$

Также

$$\omega_1(x, y) = 1 - y, \quad \omega_2(x, y) = \left[\frac{y + 10x - 1}{\sqrt{101}} \right] \wedge_\alpha \left[\frac{y - 10x + 9}{\sqrt{101}} \right] \wedge_\alpha y, \quad f(x, y, t) \equiv 0,$$

$$g(x, y, t) = \frac{\frac{e^{-t} - 1}{\omega_1(x, y)}}{\frac{1}{\omega_1(x, y)} + \frac{1}{\omega_2(x, y)}}.$$

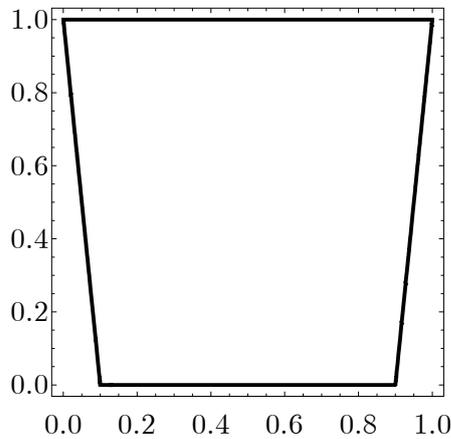


Рисунок 2.18 – Область В

Таким образом, структура решения задачи (2.5), (2.50), (2.51) имеет вид:

$$\psi(x, y, t) = -\omega(x, y) \frac{\frac{e^{-t} - 1}{\omega_1(x, y)}}{\frac{1}{\omega_1(x, y)} + \frac{1}{\omega_2(x, y)}} + \omega^2(x, y) \Phi(x, y, t). \quad (2.54)$$

На рис. Б.55 – Б.66 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Б.67 – Б.78 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Б.79 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Б.80 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. Б.81 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

В таблицах 2.6 и 2.7 приведены численные характеристики течения.

Как показывает анализ полученных результатов для областей А, Б и В течение является симметричным относительно прямой $x = 0,5$, носит циркуляционный характер и интенсивность течения, определяемая по плотности расположения линий тока, больше в верхней части области.

Таблица 2.6 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.5, 0.782019)	0.0364773	1.32980
1.0	(0.5, 0.780843)	0.0590929	2.14977
1.5	(0.5, 0.780483)	0.0728105	2.64717
2.0	(0.5, 0.780324)	0.0811307	2.94888
3.0	(0.5, 0.780198)	0.0892380	3.24288
5.0	(0.5, 0.780143)	0.0933178	3.39083

Таблица 2.7 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.081256	0.0142846	0.082046	0.0509164	1.92808
1.0	0.131524	0.0231446	0.132326	0.0825211	3.09747
1.5	0.162017	0.0285186	0.162823	0.1016910	3.80676
2.0	0.180513	0.0317780	0.181320	0.1133180	4.23696
3.0	0.198536	0.0349541	0.199344	0.1246470	4.65616
5.0	0.207605	0.0365524	0.208415	0.1303480	4.86711

Выводы по разделу 2

1. Для функции тока плоскопараллельного нестационарного течения рассмотрена постановка линеаризованной по Стоксу задачи.

2. Разработан метод численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (линеаризация Стокса), основанный на структурном методе R -функций и методе Галеркина для нестационарных задач. Доказана сходимость галеркинских приближений к единственному обобщенному решению $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$, получены оценки приближенного решения в норме пространств $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$, которые определяют его устойчивость.

3. Проведены вычислительные эксперименты для тестовой линейной задачи, имеющей точное решение. На основании сравнения с точным решением сделан вывод, что более высокую точность и вычислительную устойчивость имеют сплайны Шенберга шестого порядка.

4. Проведены вычислительные эксперименты для трех тестовых областей – прямоугольной, имеющей форму параболического сегмента, и трапециевидной. Полученные для прямоугольной области результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами, что говорит об эффективности разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в [66, 74, 77, 83].

РАЗДЕЛ 3
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ
(ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА)

3.1 Постановка линеаризованной задачи для функции тока и температуры

Рассмотрим линейную задачу расчета нестационарного плоскопараллельного течения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости. Пусть Ω – плоская односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Линеаризованная система уравнений, описывающая такое течение, состоит из уравнения движения для скорости \vec{v} и нормализованного на плотность давления p

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } p - \nu \text{ div grad } \vec{v} - \beta \vec{e} \theta = 0, \quad (3.1)$$

уравнения неразрывности

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

и уравнения, которое описывает перенос тепла теплопроводностью и конвекцией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \text{ div grad } \theta = 0, \quad (3.3)$$

где $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – поле скоростей;

ν – кинематическая вязкость;

β – коэффициент объемного расширения;

$\vec{e} = (0, 1)$ – вектор, задающий направление выталкивающей силы;

$\theta = \theta(x, y, t)$ – отклонение температуры от равновесной;

κ – коэффициент температуропроводности.

Будем предполагать, что объемные силы отсутствуют.

После подстановки соотношения (2.4) для функции тока в (3.1) и исключения давления с помощью перекрестного дифференцирования исходное уравнение для вектора скорости \vec{v} сводится к уравнению для функции тока вида $-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$.

Начальные и краевые условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор \vec{v} . Краевое условие для температуры задается исходя из задания температурного режима на границе области течения.

Итак, для функции тока ψ и температуры θ можно поставить начально-краевую задачу

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \Delta \theta = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.7)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.9)$$

где $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – некоторые распределения нормальной и касательной со-

ставляющей скорости потока соответственно;

h_0 – заданное распределение температуры на границе $\partial\Omega$.

3.2 Разработка метода численного анализа линеаризованной задачи

Для решения начально-краевой задачи (3.4) – (3.9) воспользуемся методами R -функций и Галеркина.

В работах [153, 166] было показано, что краевым условиям (3.6) и (3.8) удовлетворяют пучки функций соответственно

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \quad (3.10)$$

$$\theta = h + \omega \Upsilon, \quad (3.11)$$

где $f = EC f_0$, $g = EC g_0$, $h = EC h_0$ – продолжения функций f_0 , g_0 , h_0 в Ω ;

$\Phi = \Phi(x, y, t)$, $\Upsilon = \Upsilon(x, y, t)$ – неопределенные компоненты структур, которые будем предполагать достаточно гладкими.

В задаче (3.4) – (3.9) сделаем замену $\psi = \varphi + u$, $\theta = h + v$, где u , v – новые неизвестные функции, $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$.

Тогда для функции u и v получим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u) + \nu \Delta^2 u - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = F, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \kappa(-\Delta v) = G, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (3.13)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.14)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.15)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.17)$$

$$\text{где } F = -\nu \Delta^2 \varphi + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x};$$

$$G = -\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \Delta h;$$

$$u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0};$$

$$v_0 = \theta_0 - h|_{t=0}.$$

Для решения задачи (3.12) – (3.17) применим метод Галеркина для нестационарных задач [61, 109, 136, 139, 158].

Пусть $u_0, v_0 \in L_2(\Omega)$, $F(t), G(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Введем в рассмотрение операторы A , B_1 , B_2 и E , действующие в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ по правилам $Au = \Delta^2 u$, $B_1 u = -\Delta u$, $B_2 v = -\Delta v$, $Ev = \frac{\partial v}{\partial x}$ на областях определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{B_1} = \left\{ u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \subset D_A,$$

$$D_{B_2} = \left\{ v \mid v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_E = \left\{ v \mid v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \subset D_{B_2}.$$

В леммах 2.1, 2.2 доказано, что операторы A , B_1 , B_2 линейны и положительно определенные, также можно показать, что оператор E линеен.

Тогда задачу (3.12) – (3.17) можно записать в операторной форме

$$\frac{d}{dt} B_1 u + \nu A u - \beta E v = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{dv}{dt} + \kappa B_2 v = G, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.19)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.20)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (3.21)$$

На D_A введем энергетическое произведение $[u_1, u_2]_A$ по правилу: для любых $u_1, u_2 \in D_A$

$$[u_1, u_2]_A = (A u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 \, dx dy.$$

Соответствующая энергетическая норма

$$\|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dy .$$

Пополняя D_A в норме $\|u\|_A$, получим энергетическое пространство H_A оператора A .

На D_{B_1} введем энергетическое произведение $[u_1, u_2]_{B_1}$ по правилу: для любых $u_1, u_2 \in D_{B_1}$

$$[u_1, u_2]_{B_1} = (B_1 u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx dy .$$

Соответствующая энергетическая норма

$$\|u\|_{B_1}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy .$$

Пополняя D_{B_1} в норме $\|u\|_{B_1}$, получим энергетическое пространство H_{B_1} оператора B_1 . Можно показать, что $H_A = \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \subset H_{B_1}$.

На D_{B_2} введем энергетическое произведение $[v_1, v_2]_{B_2}$ по правилу: для любых $v_1, v_2 \in D_{B_2}$

$$[v_1, v_2]_{B_2} = (B_2 v_1, v_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx dy .$$

Соответствующая энергетическая норма

$$\|v\|_{B_2}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy .$$

Пополняя D_{B_2} в норме $\|v\|_{B_2}$, получим энергетическое пространство H_{B_2} оператора B_2 . Можно показать, что $H_{B_2} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Пусть $(u(t), v(t)) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – классическое решение задачи (3.18) – (3.21), т.е. для любого $t \geq 0$ $u(t) \in D_A$, $v(t) \in D_{B_2}$, $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы по t , удовлетворяют уравнениям (3.18) и (3.19) и начальным условиям (3.20) и (3.21) соответственно.

Пусть $w_1(t)$, $w_2(t)$ – достаточно гладкие в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ функции, удовлетворяющие краевым условиям (3.14) и (3.16) соответственно, и такие, что при некотором $T > 0$ $w_1(T) = 0$ и $w_2(T) = 0$. Умножим (3.18) скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную функцию $w_1(t)$ с указанными свойствами, а уравнение (3.19) – на $w_2(t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} B_1 u, w_1 \right)_{L_2(\Omega)} + \nu (A u, w_1)_{L_2(\Omega)} - \beta (E v, w_1)_{L_2(\Omega)} &= (F, w_1)_{L_2(\Omega)}, \\ \left(\frac{d v}{dt}, w_2 \right)_{L_2(\Omega)} + \kappa (B_2 v, w_2)_{L_2(\Omega)} &= (G, w_2)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Интегрируя последние равенства по t от 0 до T , получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} B_1 u, w_1 \right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T (A u, w_1)_{L_2(\Omega)} dt - \beta \int_0^T (E v, w_1)_{L_2(\Omega)} dt &= \int_0^T (F, w_1)_{L_2(\Omega)} dt, \\ \int_0^T \left(\frac{d v}{dt}, w_2 \right)_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T (B_2 v, w_2)_{L_2(\Omega)} dt &= \int_0^T (G, w_2)_{L_2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав первый интеграл в каждом уравнении по частям (по переменной t) и воспользовавшись равенствами $w_1(T) = 0$ и $w_2(T) = 0$, получим, что

$$\begin{aligned} - \int_0^T [u, w_1']_{B_1} dt + \nu \int_0^T [u, w_1]_A dt - \beta \int_0^T (E v, w_1)_{L_2(\Omega)} dt &= \\ = [u_0, w_1(0)]_{B_1} + \int_0^T (F, w_1)_{L_2(\Omega)} dt, & \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$-\int_0^T (v, w_2')_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T [v, w_2]_{B_2} dt = (v_0, w_2(0))_{L_2(\Omega)} + \int_0^T (G, w_2)_{L_2(\Omega)} dt, \quad (3.23)$$

где обозначено $w_1' = \frac{dw_1}{dt}$, $w_2' = \frac{dw_2}{dt}$.

Последние равенства возьмем в качестве определения обобщенного (слабого) решения задачи (3.18) – (3.21) (а значит, и задачи (3.12) – (3.17)).

Обозначим множество функций

$$\mathbf{W}_T = \left\{ (w_1, w_2) \mid (w_1, w_2) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \right. \\ \left. (w_1', w_2') \in L_2(0, T; L_2(\Omega) \times L_2(0, T; L_2(\Omega))), w_1(T) = 0, w_2(T) = 0 \right\}.$$

Определение 3.1. Пара функций $(u(t), v(t))$ называется *обобщенным (слабым) решением* задачи (3.18) – (3.21), если

а) $(u(t), v(t)) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega));$

б) для любой пары элементов $(w_1(t), w_2(t)) \in \mathbf{W}_T$ имеют место равенства (3.22) и (3.23).

Вариационную формулировку задачи (3.18) – (3.21) (эквивалентную определению обобщенного решения) можно записать следующим образом:

$$[u', w_1]_{B_1} + \nu[u, w_1]_A = (F, w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev, w_1)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.24)$$

$$(v', w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v, w_2]_{B_2} = (G, w_2)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.25)$$

$$(u - u_0, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \quad (3.26)$$

$$(v - v_0, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \quad (3.27)$$

Для построения обобщенного решения задачи (3.24) – (3.27) воспользуемся методом Галеркина [139, 159]. Приближенное решение задачи (3.24) – (3.27) ищем в виде

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i, \quad (3.28)$$

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t)v_i, \quad (3.29)$$

где $c_i(t)$, $d_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, – неизвестные функции;

$\{\varphi_i\}$, $\{v_i\}$ – координатные последовательности, т.е. они удовлетворяют

условиям соответственно:

а) для любого i $\varphi_i \in H_A$;

б) для любого n $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;

в) $\{\varphi_i\}$ полна в H_A ;

и

а) для любого i $v_i \in H_{B_2}$;

б) для любого n v_1, \dots, v_n линейно независимы;

в) $\{v_i\}$ полна в H_{B_2} .

Поскольку из (3.10) и (3.11) следует, что $u = \omega^2\Phi$ и $v = \omega\Upsilon$, где $\Phi = \Phi(x, y, t)$ и $\Upsilon = \Upsilon(x, y, t)$ – неопределенные компоненты структуры решения, то координатные последовательности можно взять в виде $\varphi_i = \omega^2\tau_i$, $v_i = \omega\tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций [153, 181, 182].

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_i(t)$ и $d_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (3.28) и (3.29) в уравнения (3.24) и (3.25), первым n координатным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и v_1, \dots, v_n соответственно. Это приводит для определения $c_i(t)$, $d_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t)b_{1,ij} + \nu \sum_{i=1}^n c_i(t)a_{ij} - \beta \sum_{i=1}^n d_i(t)e_{ij} = l_j(t), \quad (3.30)$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{d}_i(t)r_{ij} + \kappa \sum_{i=1}^n d_i(t)b_{2,ij} = m_j(t), \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i(0)s_{ij} = p_j, \quad (3.32)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i(0)r_{ij} = y_j, \quad (3.33)$$

где $b_{1,ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_{B_1}$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $e_{ij} = (Ev_j, \varphi_i)_{L_2(\Omega)}$, $l_j(t) = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$,
 $r_{ij} = (v_i, v_j)_{L_2(\Omega)}$, $b_{2,ij} = [v_i, v_j]_{B_2}$, $m_j(t) = (G, v_j)_{L_2(\Omega)}$, $s_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$,
 $p_j = (u_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$, $y_j = (v_0, v_j)_{L_2(\Omega)}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В матричных обозначениях $C(t) = \{c_i(t)\}$, $B_1 = \{b_{1,ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$,
 $E = \{e_{ij}\}$, $L(t) = \{l_j(t)\}$, $R = \{r_{ij}\}$, $B_2 = \{b_{2,ij}\}$, $M(t) = \{m_j(t)\}$, $S = \{s_{ij}\}$,
 $P = \{p_j\}$, $Y = \{y_j\}$. Здесь B_1 , A , E , R , B_2 , S – квадратные матрицы порядка n , C , D , L , M , P , Y – матрицы-столбцы. Тогда задачу (3.30) – (3.33) можно записать в виде:

$$B_1 C'(t) + \nu A C(t) - \beta E D(t) = L(t), \quad t \in (0; T], \quad (3.34)$$

$$R D'(t) + \kappa B_2 D(t) = M(t), \quad t \in (0; T], \quad (3.35)$$

$$S C(0) = P, \quad (3.36)$$

$$R D(0) = Y. \quad (3.37)$$

Отметим, что матрицы B_1 , A , R , B_2 , S – матрицы с отличными от нуля определителями (как матрицы Грама линейно независимой системы функций относительно скалярных произведений $[\cdot, \cdot]_{B_1}$, $[\cdot, \cdot]_A$, $[\cdot, \cdot]_{B_2}$, $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$); они симметричные и положительно определенные.

Утверждение 3.1. Приведенных свойств достаточно для того, чтобы решение задачи Коши (3.34) – (3.37) существовало и было единственным, т.е. при любом n галеркинские приближения к решению задачи (3.12) – (3.17) (а значит, и приближения $\psi_n = \varphi + u_n$, $\theta_n = h + v_n$ к решению задачи (3.4) – (3.9)) определены и строятся единственным образом.

Изучим свойства аппроксимаций Галеркина $u_n(t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$,
 $v_n(t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$. Для этого подставим в вариационную задачу

$$[u_n', w_1]_{B_1} + \nu [u_n, w_1]_A = (F, w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta (Ev_n, w_1)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$(v_n', w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa [v_n, w_2]_{B_2} = (G, w_2)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$(u_n - u_0, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0,$$

$$(v_n - v_0, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0,$$

вместо произвольных функций w_1 и w_2 приближенное решение $u_n(t)$ и $v_n(t)$ соответственно. Получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u_n, u_n]_{B_1} + \nu [u_n, u_n]_A = (F, u_n)_{L_2(\Omega)} + \beta (Ev_n, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_n, v_n)_{L_2(\Omega)} + \kappa [v_n, v_n]_{B_2} = (G, v_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T],$$

$$(u_n, u_n)_{L_2(\Omega)} = (u_0, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0,$$

$$(v_n, v_n)_{L_2(\Omega)} = (v_0, v_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0.$$

Перепишем предыдущие четыре уравнения в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|_{B_1}^2 + \nu \|u_n\|_A^2 = (F, u_n)_{L_2(\Omega)} + \beta (Ev_n, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \|v_n\|_{B_2}^2 = (G, v_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.39)$$

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 = (u_0, u_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0, \quad (3.40)$$

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)}^2 = (v_0, v_n)_{L_2(\Omega)}, \quad t = 0. \quad (3.41)$$

Проинтегрируем уравнение (3.39) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\frac{1}{2} \|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v_n\|_{B_2}^2 d\tau = \frac{1}{2} \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t (G, v_n)_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (3.42)$$

Для исследования устойчивости аппроксимации Галеркина получим оценки сверху для двух норм решения u_n и v_n . Сформулируем теоремы о единственности.

Для этого получим оценки норм решения. Оценим сначала правую

часть в соотношении (3.42). Из неравенства Коши-Буняковского-Шварца (2.36) и следствия 2.2 получим, что

$$|(G, v_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \|G\|_{L_2(\Omega)} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{c_1} \|G\|_{L_2(\Omega)} \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}.$$

Из неравенства Юнга (2.37) при $\varepsilon = \frac{\kappa}{2}$, $a = \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}$, $b = \sqrt{c_1} \|G\|_{L_2(\Omega)}$ получим, что

$$|(G, v_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}^2 + \frac{1}{2\kappa} c_1 \|G\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\int_0^t (G, v_n)_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \int_0^t |(G, v_n)_{L_2(\Omega)}| d\tau \leq \frac{\kappa}{2} \int_0^t \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}^2 d\tau + \frac{c_1}{2\kappa} \int_0^t \|G\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Подставим полученное неравенство в правую часть (3.42) и умножим обе части неравенства на 2:

$$\|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}^2 d\tau \leq \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{c_1}{\kappa} \int_0^t \|G\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau. \quad (3.43)$$

Из доказанного неравенства (3.43) следует ограниченность решения v_n в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, которая определена

$$\text{соотношением } \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \mathbf{I}v_n\mathbf{I}_{B_2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (3.38). Проинтегрируем уравнение (3.38) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\frac{1}{2} \mathbf{I}u_n(t)\mathbf{I}_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \mathbf{I}u_n\mathbf{I}_A^2 d\tau = \frac{1}{2} \mathbf{I}u_n(0)\mathbf{I}_{B_1}^2 + \int_0^t (F, u_n)_{L_2(\Omega)} d\tau + \beta \int_0^t \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega)} d\tau,$$

$t \in (0; T]$.

В пункте 2.2 была получена оценка второго слагаемого в правой части:

$$\int_0^t (F, u_n)_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \int_0^t |(F, u_n)|_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \frac{\nu}{2} \int_0^t |u_n|_A^2 d\tau + \frac{c_1^2}{2\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Оценим теперь третье слагаемое с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца (2.36) и неравенства Юнга (2.37) при $\varepsilon = \frac{\nu}{2c_1^2}$,

$a = \|u_n\|_{L_2(\Omega)}$, $b = \beta \left\| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}$ и учитывая, что $\left\| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq |v_n|_{B_2}$, получим, что

$$\begin{aligned} \beta \int_0^t \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega)} d\tau &\leq \beta \int_0^t \left| \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}, u_n \right) \right|_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_2(\Omega)} d\tau \leq \\ &\leq \frac{\nu}{2c_1^2} \int_0^t \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\beta c_1^2}{2\nu} \int_0^t \left\| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\nu}{2c_1^2} \int_0^t \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\beta c_1^2}{2\nu} \int_0^t |v_n|_{B_2}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Тогда используя последнее неравенство и (2.38), после выполнения элементарных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} \|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2c_1^2} \int_0^t \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau &\leq \\ &\leq |u_n(0)|_{B_1}^2 + \frac{c_1^2}{\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\beta c_1^2}{2\nu} \int_0^t |v_n|_{B_2}^2 d\tau, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

В силу ограниченности решения v_n , доказанного выше, делаем вывод, что решение u_n также ограничено в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Вариационная задача (3.24) – (3.27), которая приводит к задаче Коши (3.30) – (3.33), имеет (если оно существует) единственное решение в пространстве

$$(L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))).$$

Рассмотрим еще одну оценку нормы решения. С этой целью перепишем уравнение (3.39) в виде

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \frac{d}{dt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} + \kappa \|v_n\|_{B_2}^2 = (G, v_n)_{L_2(\Omega)}.$$

Используя левую часть из следствия 2.2, получим

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \frac{d}{dt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} + \frac{\kappa}{c_1} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (G, v_n)_{L_2(\Omega)}.$$

Оценим правую часть по неравенству Коши-Буняковского-Шварца (2.36):

$$|(G, v_n)_{L_2(\Omega)}| \leq \|G\|_{L_2(\Omega)} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \frac{d}{dt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} + \frac{\kappa}{c_1} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|G\|_{L_2(\Omega)} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\|v_n\|_{L_2(\Omega)}$:

$$\frac{d}{dt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} + \frac{\kappa}{c_1} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq \|G\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.44)$$

Выражение слева в формуле (3.44) можно записать в виде:

$$e^{-\frac{\kappa}{c_1}t} \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\kappa}{c_1}t} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (3.45)$$

Из формулы (3.44), учитывая (3.45), получаем

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\kappa}{c_1}t} \|v_n\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq e^{\frac{\kappa}{c_1}t} \|G\|_{L_2(\Omega)}.$$

Проинтегрируем это неравенство на промежутке $[0; t]$:

$$e^{\frac{\kappa}{c_1}t} \|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)} - \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \int_0^t e^{\frac{\kappa}{c_1}\tau} \|G(\tau)\|_{L_2(\Omega)} d\tau.$$

Окончательно перепишем неравенство в виде

$$\|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{-\frac{\kappa}{c_1}t} \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\frac{\kappa}{c_1}(t-\tau)} \|G(\tau)\|_{L_2(\Omega)} d\tau.$$

Для уравнения (3.38) вторая оценка с учетом оценки из пункта 2.2 и ограниченности $\left\| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}$ будет иметь вид

$$\|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{-\nu c_3^2 t} \|u_n(0)\|_{L_2(\Omega)} + c_1 \int_0^t e^{-\nu c_3^2(t-\tau)} \left(\|F(\tau)\|_{L_2(\Omega)} + \beta \|v_n(\tau)\|_{B_2} \right) d\tau.$$

Полученные две оценки также определяют устойчивость приближенного решения, но в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \times L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.

Теорема 3.2. Пусть заданы функции $u_0 \in L_2(\Omega)$, $v_0 \in L_2(\Omega)$ и $F(t), G(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Тогда вариационная задача (3.24) – (3.27) имеет единственное решение

$$(u, v) \in (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся свойствами полноты координатных функций φ_i , v_i из (3.28) и (3.29), согласно которому последовательность приближенных решений является сходящейся в норме пространства H_A и H_{B_2} соответственно, т.е. $u_n \xrightarrow{H_A} u$, $v_n \xrightarrow{H_{B_2}} v$, где u , v – пределы последовательностей, которые принадлежат пространствам $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Используя здесь свойства положительной определенности операторов A и B_2 , а также следствия 2.1 и 2.2, получим, что $u_n \xrightarrow{H_A} u$, $u_n \xrightarrow{H_{B_1}} u$, $v_n \xrightarrow{H_{B_2}} v$, где эта же предельная функция u принадлежит одновременно пространствам H_A и H_{B_1} , а функция v – пространству H_{B_2} .

Необходимо только доказать, что эти предельные функции удовлетворяют уравнениям вариационной задачи

$$[u'_n, w_1]_{B_1} + \nu[u_n, w_1]_A = (F, w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev_n, w_1)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.46)$$

$$(v'_n, w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v_n, w_2]_{B_2} = (G, w_2)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (3.47)$$

$$(u_n - u_0, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \quad (3.48)$$

$$(v_n - v_0, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \quad (3.49)$$

Будем считать, что функции w_1 и w_2 зависят от времени t , непрерывны до производных первого порядка по этой переменной и удовлетворяют условию $w_1(T) = 0$ и $w_2(T) = 0$, т.е. $w_1, w_2 \in \mathbf{W}_T$.

Проинтегрируем уравнения (3.46), (3.47) по времени на промежутке $[0; T]$, используя в первом слагаемом интегрирование по частям. Получим

$$\int_0^T \left(-[u_n, w'_1]_{B_1} + \nu[u_n, w_1]_A - (F, v)_{L_2(\Omega)} - \beta \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega)} \right) dt = [u_n(0), w_1(0)]_{B_1},$$

$$\int_0^T \left(-(v_n, w'_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v_n, w_2]_{B_2} - (G, w_2)_{L_2(\Omega)} \right) dt = (v_n(0), w_2(0))_{L_2(\Omega)}.$$

Перейдем в полученных уравнениях к пределу при $n \rightarrow \infty$ и применяем к первым слагаемым вновь интегрирование по частям. Получим:

$$\int_0^T \left([u', w_1]_{B_1} + \nu[u, w_1]_A - (F, w_1)_{L_2(\Omega)} - \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right) dt =$$

$$= [u(0) - u_0, w_1(0)]_{B_1}, \quad (3.50)$$

$$\int_0^T \left((v', w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v, w_2]_{B_2} - (G, w_2)_{L_2(\Omega)} \right) dt = (v(0) - v_0, w_2(0))_{L_2(\Omega)}. \quad (3.51)$$

Учитывая полноту системы координатных функций φ_i и v_i множество \mathbf{W}_T образует плотное множество в $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$. С учетом этого, а также условия (3.48), (3.49), из уравнений (3.50) и (3.51) получим

$$[u', w_1]_{B_1} + \nu[u, w_1]_A = (F, w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x}, u \right)_{L_2(\Omega)},$$

$$(v', w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v, w_2]_{B_2} = (G, w_2)_{L_2(\Omega)}.$$

Это значит, что пределы u и v являются решениями вариационной задачи (3.46) – (3.49), и выполняются энергетические уравнения

$$\frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u_n(0)\|_{B_1}^2 + \int_0^t (F, u_n)_{L_2(\Omega)} d\tau + \beta \int_0^t \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}, u_n \right)_{L_2(\Omega)} d\tau,$$

$$\frac{1}{2} \|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v_n\|_{B_2}^2 d\tau = \frac{1}{2} \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t (G, v_n)_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T].$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\|u_n(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u_n\|_A^2 d\tau \leq$$

$$\leq \|u_n(0)\|_{B_1}^2 + \frac{c_1^2}{\nu} \int_0^t \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\beta c_1^2}{2\nu} \int_0^t \|v_n\|_{B_2}^2 d\tau, \quad t \in (0; T], \quad (3.52)$$

$$\|v_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v_n\|_{B_2}^2 d\tau \leq \|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{c_1}{\kappa} \int_0^t \|G\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (3.53)$$

Дальше докажем, что задача (3.46) – (3.49) имеет единственное решение. Допустим обратное: пусть (u_1, v_1) и (u_2, v_2) – два разных решения этой задачи. Вследствие линейности $(u, v) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ также является решением задачи (3.46) – (3.49) в случае $F \equiv 0$, $G \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$. Оценки (3.52), (3.53) дают основание сделать вывод, что $(u, v) \equiv 0$, а это противоречит предположению, что решения (u_1, v_1) и (u_2, v_2) различные.

Теорема доказана.

Итак, условия применимости метода R -функций к решению задачи (3.4) – (3.9) формулируются следующим образом: функция ω , удовлетворяющая условиям а) – в), такова, что

$$u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0} \in L_2(\Omega), \quad (3.54)$$

$$v_0 = \theta_0 - h|_{t=0} \in L_2(\Omega), \quad (3.55)$$

$$F(t) = -\nu \Delta^2 \varphi + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), \quad (3.56)$$

$$G(t) = -\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \Delta h \in L_2(0, T; L_2(\Omega)). \quad (3.57)$$

3.3 Результаты вычислительного эксперимента для тестовых областей

Вычислительный эксперимент для задачи (3.4) – (3.9) был проведен в трех областях Ω при $\nu = 1$, $\kappa = 1$ и $t \in (0; 5]$. Краевые и начальные условия были выбраны следующим образом:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.58)$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad (3.59)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x(x-1)(1-e^{-t}), & \text{если } y = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\theta|_{t=0} = 0. \quad (3.61)$$

Эти условия соответствуют свободной конвекции в прямоугольной полости Ω с подогревом сверху.

В качестве координатных функций были взяты сплайны Шенберга шестого порядка [181, 182]. Интегралы в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.30) – (3.33) считались с помощью формулы Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате [94]. Соответствующая задача Коши (3.34) – (3.37) решалась с помощью метода Рунге-Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага [186]. Условия применимости метода R -функций (3.54) – (3.57) были проверены непосредственно.

Область А. Прямоугольник $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ (рис. 2.1).

Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.4.

Структура решения задачи (3.4), (3.5), (3.58) – (3.61) имеет вид:

$$\psi(x, y, t) = \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t), \quad (3.62)$$

$$\theta(x, y, t) = h(x, y, t) + \omega(x, y)\Upsilon(x, y, t), \quad (3.63)$$

где

$$h(x, y, t) = \frac{x^2(1-x)^2y}{1-y+xy(1-x)}(1-e^{-t}). \quad (3.64)$$

В таблицах 3.1 – 3.3 приведены численные характеристики течения. Здесь t – время; $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – координаты вихревого центра; $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение функции тока в вихревом центре; $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение вихря в вихревом центре; $(x_{t.c.}, y_{t.c.})$ – координаты максимума функции температуры, $\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$ – значение температуры в максимуме; $\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$ – максимум одной из координат скорости в сечении $x = 0.5$; $q(0.25, 0.25)$ – значение теплового потока по направлению $\vec{l}(0.5, 1.0)$ в точке $(0.25, 0.25)$, $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\theta\|_{L_2(\Omega)}$ – нормы функции тока, двух координат скоростей, вихря и температуры в пространстве $L_2(\Omega)$.

Таблица 3.1 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.273913, 0.658931)	0.0174246	1.19183
1.0	(0.274094, 0.658349)	0.0282756	1.91613
1.5	(0.274149, 0.658173)	0.0348590	2.35571
2.0	(0.274173, 0.658095)	0.0388481	2.62243
3.0	(0.274192, 0.658033)	0.0427327	2.88238
5.0	(0.274201, 0.658006)	0.0446926	3.01320

Таблица 3.2 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.0355326	0.0074498	0.0276507	0.0493789	0.60547
1.0	0.0577887	0.0120844	0.0448242	0.0801251	0.98109
1.5	0.0712820	0.0148953	0.0552404	0.0987699	1.20890
2.0	0.0794652	0.0166002	0.0615581	0.1100786	1.34708
3.0	0.0874390	0.0182616	0.0677144	0.1210907	1.48172
5.0	0.0914513	0.0190976	0.0708122	0.1266424	1.54948

Таблица 3.3 – Характеристики функции температуры

t	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$q(0.25, 0.25)$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	(0.5, 1.0)	0.098367	0.0061872	0.0273411
1.0	(0.5, 1.0)	0.158030	0.0118394	0.0449367
1.5	(0.5, 1.0)	0.194217	0.0155797	0.0556142
2.0	(0.5, 1.0)	0.216166	0.0179664	0.0620912
3.0	(0.5, 1.0)	0.237553	0.0203793	0.0684029
5.0	(0.5, 1.0)	0.248316	0.0216266	0.0715791

На рис. В.1 – В.12 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. В.13 – В.24 – линии уровня и поверхности температуры θ , на рис. В.25 – В.36 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. В.37 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. В.38 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. В.39 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область Б. Параболический сегмент $\Omega = \{(x, y) | y > 4(x - 0,5)^2, y < 1\}$ (рис. 2.2).

Краевые и начальные условия имеют вид (3.58) – (3.61). Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.3. Структура решения задачи (3.4), (3.5), (3.58) – (3.61) задается формулами (3.62), (3.63), где

$$h(x, y, t) = \frac{x(x-1)(y-4(x-0,5)^2)}{1-4(x-0,5)^2} (1-e^{-t}). \quad (3.65)$$

В таблицах 3.4 – 3.6 приведены численные характеристики течения.

Таблица 3.4 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.302336, 0.745742)	0.0084072	0.88504
1.0	(0.302475, 0.745565)	0.0135862	1.43086
1.5	(0.302518, 0.745512)	0.0167274	1.76193
2.0	(0.302536, 0.745488)	0.0186326	1.96273
3.0	(0.302551, 0.745469)	0.0204891	2.15839
5.0	(0.302558, 0.745461)	0.0214233	2.25685

Таблица 3.5 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.0262361	0.0071985	0.066012	0.228731	12.5006
1.0	0.0424178	0.0116247	0.106554	0.369512	20.1818
1.5	0.0522326	0.014326	0.131274	0.455455	24.8603
2.0	0.0581855	0.0159812	0.146399	0.508140	27.7177
3.0	0.0639861	0.0176375	0.161483	0.560933	30.5535
5.0	0.0669051	0.0185988	0.170104	0.591793	32.1320

Таблица 3.6 – Характеристики функции температуры

t	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$q(0.25, 0.25)$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	(0.5, 1.0)	0.098367	0.0061872	0.0265796
1.0	(0.5, 1.0)	0.158030	0.0118394	0.0433692
1.5	(0.5, 1.0)	0.194217	0.0155797	0.0535566
2.0	(0.5, 1.0)	0.216166	0.0179664	0.0597362
3.0	(0.5, 1.0)	0.237553	0.0203793	0.0657579
5.0	(0.5, 1.0)	0.248316	0.0216266	0.0687879

На рис. В.40 – В.51 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. В.52 – В.63 – линии уровня и поверхности температуры θ , на рис. В.64 – В.75 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. В.76 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. В.77 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. В.78 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область В. Трапеция $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < 1, y > 10x - 9, y > 1 - 10x\}$

(рис. 2.3).

Краевые и начальные условия имеют вид (3.58) – (3.61). Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.3.

Структура решения задачи (3.4), (3.5), (3.58) – (3.61) задается формулами (3.62) – (3.63), где

$$h(x, y, t) = \frac{xy(x-1)(y-10x+9)(y+10x-1)}{1-y+y(y-10x+9)(y+10x-1)}(1-e^{-t}). \quad (3.66)$$

В таблицах 3.7 – 3.9 приведены численные характеристики течения.

На рис. В.79 – В.90 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. В.91 – В.102 – линии уровня и поверхности температуры θ , на рис. В.103 – В.114 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. В.115 показан график одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. В.116 показан выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. В.117 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Таблица 3.7 – Характеристики течения в вихревом центре

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.5, 0.782019)	0.0364773	1.32980
1.0	(0.5, 0.780843)	0.0590929	2.14977
1.5	(0.5, 0.780483)	0.0728105	2.64717
2.0	(0.5, 0.780324)	0.0811307	2.94888
3.0	(0.5, 0.780198)	0.0892380	3.24288
5.0	(0.5, 0.780143)	0.0933178	3.39083

Анализ полученных результатов для областей А, Б и В показал, что решение задачи является симметричным относительно прямой $x = 0,5$, течение носит циркуляционный характер и интенсивность течения, определяемая по плотности расположения линий тока, больше в верхней части области.

Тепловой поток принимает наибольшее значение на верхних стенках областей, что подтверждается плотностью расположения линий уровня функции температуры и следует из краевого условия (3.60).

Таблица 3.8 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.081256	0.0142846	0.082046	0.050916	1.92808
1.0	0.131524	0.0231446	0.132326	0.082521	3.09747
1.5	0.162017	0.0285186	0.162823	0.101691	3.80676
2.0	0.180513	0.0317780	0.181320	0.113318	4.23696
3.0	0.198536	0.0349541	0.199344	0.124647	4.65616
5.0	0.207605	0.0365524	0.208415	0.130348	4.86711

Таблица 3.9 – Характеристики функции температуры

t	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$q(0.25, 0.25)$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	(0.5, 1.0)	0.098367	0.0061872	0.0265796
1.0	(0.5, 1.0)	0.158030	0.0118394	0.0433692
1.5	(0.5, 1.0)	0.194217	0.0155797	0.0535566
2.0	(0.5, 1.0)	0.216166	0.0179664	0.0597362
3.0	(0.5, 1.0)	0.237553	0.0203793	0.0657579
5.0	(0.5, 1.0)	0.248316	0.0216266	0.0687879

Выводы по разделу 3

1. Для функции тока и температуры плоскопараллельного нестационарного течения рассмотрена постановка линеаризованной задачи.

2. Разработан метод численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости (линейная задача), основанный на структурном методе R -функций и методе Галеркина для нестационарных задач. Доказана сходимость галеркинских приближений к единственному обобщенному решению

$$(u, v) \in (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))),$$

получены оценки приближенного решения в норме пространств $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \times L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ и $(L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)))$, которые определяют его устойчивость.

3. Проведены вычислительные эксперименты для трех тестовых областей – прямоугольной, имеющей форму параболического сегмента, и трапециевидной.

Основные результаты раздела опубликованы в [75, 80, 82].

РАЗДЕЛ 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

4.1 Постановка нелинейной задачи для функции тока

Будем рассматривать плоскопараллельные течения, когда область, в которой изучается течение, является цилиндрической, а краевые и начальные данные задачи не зависят от координаты оси цилиндра.

Итак, пусть Ω – плоская односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Введением функции тока ψ , связанной с вектором $\vec{v} = (v_x, v_y)$ скоростей жидкости с помощью соотношений (2.4), исходная система уравнений Навье-Стокса преобразуется к нелинейному уравнению четвертого порядка с краевыми и начальными условиями вида [126]:

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = J(\Delta \psi, \psi) \text{ в } \Omega, t > 0, \quad (4.1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (4.2)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4.3)$$

где $J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$.

4.2 Разработка метода численного анализа нелинейной задачи

Для решения начально-краевой задачи (4.1) – (4.3) воспользуемся методами последовательных приближений, R -функций и Галеркина.

Пусть $u_0(x, y, t)$ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

$$u_0|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (4.6)$$

В задаче (4.1) – (4.3) сделаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция. Тогда для функции u получим начально-краевую задачу с однородными краевыми и начальным условиями:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим введенные ранее в разделе 2 операторы A , B и введем оператор J , действующий в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ по правилу

$$Ju = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u)$$

на области определения

$$D_J = \left\{ u \mid u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

В пункте 2.2 показано, что операторы A и B линейные и положительно определенные. Оператор J нелинеен. Ясно, что $D_A \subset D_B$ и $D_A \subset D_J$.

Задачу (4.7) – (4.9) можно записать в операторной форме

$$\frac{d}{dt} Bu + \nu Au = Ju, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.10)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (4.11)$$

Пусть $u(t)$ – классическое решение задачи (4.10), (4.11), т.е. для любого $t \geq 0$ $u(t) \in D_A$, $u(t)$ непрерывно дифференцируема по t , удовлетворяет уравнению (4.10) и начальному условию (4.11).

Пусть $v(t)$ – достаточно гладкая в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая краевым условиям (4.8) и такая, что при некотором $T > 0$ $v(T) = 0$. Умножим (4.10) скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную функцию $v(t)$ с указанными свойствами:

$$\left(\frac{d}{dt} Bu, v \right)_{L_2(\Omega)} + \nu (Au, v)_{L_2(\Omega)} = (Ju, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя последнее равенство по t от 0 до T , получаем, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} Bu, v \right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T (Au, v)_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (Ju, v)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Если проинтегрировать первый интеграл по частям (по переменной t), воспользоваться равенством $v(T) = 0$, то, учитывая вид энергетических произведений в H_A и H_B , получим, что

$$-\int_0^T \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u, v]_A dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (Ju, v)_{L_2(\Omega)} dt. \quad (4.12)$$

Лемма 4.1. Пусть функции u и v достаточно гладкие и удовлетворяют однородным краевым условиям (4.8). Тогда имеет место равенство [188]

$$(Ju, v)_{L_2(\Omega)} = (J(u_0 + u, v), \Delta(u_0 + u))_{L_2(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Доказательство. Преобразуем выражение $(Ju, v)_{L_2(\Omega)}$, используя фор-

мулу интегрирования по частям, краевые условия (4.8), а также другое представление для якобиана, которое имеет вид:

$$J(w_1, w_2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right).$$

Получим:

$$\begin{aligned} (Ju, v)_{L_2(\Omega)} &= (J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), v)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} \right) \right] v \, dx dy = \\ &= - \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} v \cos(\vec{n}, x) \, ds + \\ &+ \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \, dx dy - \int_{\partial\Omega} \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} v \cos(\vec{n}, y) \, ds = \\ &= \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u) \left[\frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \, dx dy = \\ &= (J(u_0 + u, v), \Delta(u_0 + u))_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

С учетом леммы 4.1 равенство (4.12) принимает вид

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]_B \, dt + \nu \int_0^T [u, v]_A \, dt = \\ & = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (J(u_0 + u, v), \Delta(u_0 + u))_{L_2(\Omega)} \, dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Последнее равенство возьмем в качестве определения обобщенного (слабого) решения задачи (4.10), (4.11) (а значит, задачи (4.1) – (4.3)).

Обозначим множество функций

$$W_T = \left\{ u \mid u \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)), u' \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), u(T) = 0 \right\}.$$

Определение 4.1. Функция $u(t)$ называется *обобщенным (слабым) решением* задачи (4.10), (4.11), если

а) $u(t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$;

б) для любого элемента $v(t) \in W_T$ имеет место равенство (4.14).

Для нахождения обобщенного решения задачи (4.10), (4.11) (а значит, и задачи (4.1) – (4.3)) построим итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть начальное приближение $u^{(0)}$ задано. Тогда при известном значении $u^{(k)}$ функции u на k -й итерации следующее $(k + 1)$ -е приближение находим как решение линейной задачи

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \text{ в } \Omega, t > 0, \quad (4.15)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.16)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

Итерационный процесс (4.15) – (4.17) сводит решение нелинейной задачи (4.7) – (4.9) к последовательности линейных задач, которые аналогичны рассмотренным в разделе 2.

Вариационную формулировку задачи (4.15) – (4.17) можно записать следующим образом:

$$[u^{(k+1)}, v]_B + \nu [u^{(k+1)}, v]_A = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (4.18)$$

$$(u^{(k+1)}, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \quad (4.19)$$

Для построения обобщенного решения задачи (4.18), (4.19) воспользуемся методом Галеркина [61, 109, 136, 139, 158]. Приближенное решение за-

дачи (4.18), (4.19) на $(k + 1)$ -той итерации ищем в виде

$$u_n^{(k+1)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) \varphi_i, \quad (4.20)$$

где $c_i^{(k+1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, – неизвестные функции;

$\{\varphi_i\}$ – координатная последовательность.

Поскольку из (2.8) следует, что $u^{(k+1)} = \omega^2 \Phi^{(k+1)}$, где $\Phi^{(k+1)} = \Phi^{(k+1)}(x, y, t)$ – неопределенная компонента структуры, то координатную последовательность можно взять в виде $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций [153, 181, 182].

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_i^{(k+1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (4.20) в уравнение (4.18), первым n координатным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Это приводит для определения $c_i^{(k+1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями:

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i^{(k+1)}(t) b_{ij} + \nu \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) a_{ij} = l_j^{(k)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

$$c_i^{(k+1)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.22)$$

где $b_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_B$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $l_j^{(k)}(t) = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$.

В матричных обозначениях $C^{(k+1)}(t) = \{c_i^{(k+1)}(t)\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$, $L^{(k)}(t) = \{l_j^{(k)}(t)\}$.

Здесь B , A – квадратные матрицы порядка n , $C^{(k+1)}$ и $L^{(k)}$ – матрицы столбцы. Тогда задачу (4.21), (4.22) можно записать в виде:

$$BC'^{(k+1)}(t) + \nu AC^{(k+1)}(t) = L^{(k)}(t), \quad t \in (0; T], \quad (4.23)$$

$$C^{(k+1)}(0) = 0. \quad (4.24)$$

Отметим, что матрицы B и A – матрицы с отличными от нуля определителями (как матрицы Грама линейно независимой системы функций относительно скалярных произведений $[\cdot, \cdot]_B, [\cdot, \cdot]_A$); они симметричные и положительно определенные.

Утверждение 4.1. Приведенных свойств достаточно для того, чтобы решение задачи Коши (4.23), (4.24) существовало и было единственным, т.е. при любом n галеркинские приближения к решению задачи (4.15) – (4.17) определены и строятся единственным образом.

Изучим свойства аппроксимаций Галеркина. Для этого предположим, что $\|u^{(k)}\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M$, подставим в (4.18), (4.19) вместо v решение $u^{(k+1)}$ и после выполнения элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u^{(k+1)}, u^{(k+1)}]_B + \nu [u^{(k+1)}, u^{(k+1)}]_A = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \\ & (u^{(k+1)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения перепишем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{(k+1)}\|_B^2 + \nu \|u^{(k+1)}\|_A^2 = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\|u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0. \quad (4.26)$$

Проинтегрировав (4.25) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\frac{1}{2} \|u^{(k+1)}(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau =$$

$$= \int_0^t (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (4.27)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в правой части (4.27), используя равенство (4.13).

Получим

$$\begin{aligned} & (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = \\ & = (J(u_0 + u^{(k)}, u^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u^{(k)}))_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Лемма 4.2. Пусть $u, v \in W_2^2(\Omega)$. Тогда имеет место неравенство:

$$|(J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega)}| \leq c_0 \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.29)$$

Доказательство. Непосредственно можно проверить, что

$$\begin{aligned} J(u, v) \cdot \Delta u &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем скалярное произведение $(J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega)}$, используя выражение для $J(u, v) \cdot \Delta u$, полученное выше, интегрирование по частям и условие $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ для обнуления интегралов по $\partial\Omega$. Получим

$$\begin{aligned} (J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega)} &= \iint_{\Omega} J(u, v) \cdot \Delta u dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy = \\
= & - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \cos(\vec{n}, x) ds - \\
& - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) ds - \\
& - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \cos(\vec{n}, y) ds + \\
& + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, x) ds = \\
= & \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy.
\end{aligned}$$

Оценим $|(J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega)}|$, используя выражение, полученное выше, элементарные неравенства $|a - b| \leq |a| + |b|$, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, $ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}$, неравенство Коши-Буняковского-Шварца (2.36), а также неравенство Ладыженской [18, 124]

$$\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}^2 \leq c \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

Получим

$$\begin{aligned}
& |(J(u, v), \Delta u)_{L_2(\Omega)}| = \left| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy - \right. \\
& - \left. \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \right| \leq \left| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy \right| + \\
& + \left| \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \right| \leq \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| dx dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right| \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right| dx dy \leq \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \right) dx dy + \\
& + \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right| \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \right) dx dy + \\
& \quad + \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right| \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad + \left(\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left(\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\iint_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. + \left(\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \|\nabla u\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_0 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Оценим модуль подынтегрального выражения в правой части (4.27). Для этого воспользуемся выражением (4.13), полученным в лемме 4.1, и неравенством (4.29), полученным в лемме 4.2. Получим

$$\begin{aligned}
& \left| (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| = \\
& = \left| (J(u_0 + u^{(k)}, u^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u^{(k)}))_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\
& \leq c_0 \|u^{(k+1)}\|_A \|\nabla(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Используем неравенство Юнга (2.37), где $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$, $a = \|u^{(k+1)}\|_A$,

$b = c_0 \left\| \nabla(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| &\leq \frac{\nu}{2} \mathbf{I} u^{(k+1)} \mathbf{I}_A^2 + \\ &+ \frac{c_0^2}{2\nu} \left\| \nabla(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Подставим полученное неравенство в правую часть (4.27) и умножим обе части неравенства на 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} u^{(k+1)}(t) \mathbf{I}_B^2 + \nu \int_0^t \mathbf{I} u^{(k+1)} \mathbf{I}_A^2 d\tau &\leq \\ &\leq \frac{c_0^2}{\nu} \int_0^t \left\| \nabla(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau, \quad t \in (0; T]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Оценим подынтегральное выражение в (4.31). При этом воспользуемся вложениями пространств $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^1(\Omega)$, $W_2^{\circ 2}(\Omega) \hookrightarrow W_2^2(\Omega)$, неравенствами $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ и условием ограниченности решения $\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M_0$. Получим

$$\begin{aligned} \left\| \nabla(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq c_1 c_2 \left\| u_0 + u^{(k)} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \left\| u_0 + u^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq c_1 c_2 c_3 \left\| u_0 + u^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^4 \leq c_1 c_2 c_3 \left(\left\| u_0 \right\|_{W_2^2(\Omega)} + \left\| u^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega)} \right)^4 \leq \\ &\leq c_1 c_2 c_3 \left(M_0 + c_4 \mathbf{I} u^{(k)} \mathbf{I}_A \right)^4 \leq 4c_1 c_2 c_3 \left(M_0^2 + c_4^2 \mathbf{I} u^{(k)} \mathbf{I}_A^2 \right)^2 \leq \\ &\leq 8c_1 c_2 c_3 \left(M_0^4 + c_4^4 \mathbf{I} u^{(k)} \mathbf{I}_A^4 \right). \end{aligned}$$

Тогда интеграл в правой части (4.31) можно оценить следующим образом:

$$\int_0^t \left\| \nabla(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \leq 8c_1 c_2 c_3 \int_0^t \left(M_0^4 + c_4^4 \mathbf{I} u^{(k)} \mathbf{I}_A^4 \right) d\tau \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 8c_1c_2c_3 \left(M_0^4 t + c_4^4 \int_0^t \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \int_0^t \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right) \leq \\ &\leq 8c_1c_2c_3 M_0^4 T + 8c_1c_2c_3 c_4^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получим в (4.31), что

$$\begin{aligned} &\|u^{(k+1)}(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ &\leq \frac{8c_0^2}{\nu} c_1c_2c_3 M_0^4 T + \frac{8c_0^2}{\nu} c_1c_2c_3 c_4^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right)^2, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

Из следствия 2.2 получим:

$$\begin{aligned} &\|u^{(k+1)}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ &\leq \frac{8c_0^2}{\nu\chi} c_1c_2c_3 M_0^4 T + \frac{8c_0^2}{\nu\chi} c_1c_2c_3 c_4^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right)^2, \quad (4.32) \end{aligned}$$

где $\chi = \min \left\{ \frac{1}{c_1}, \nu \right\}$, $t \in (0; T]$.

Из доказанного неравенства (4.32) следует ограниченность решения задачи в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$, которая определена соотношением

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|u\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

при условии, что

$$\frac{1}{\chi\nu} \leq \frac{M}{8c_0^2c_1c_2c_3(M_0^4T + c_4^4M^2)}. \quad (4.33)$$

Докажем сходимость последовательности $u^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим разности $\delta u^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-\Delta\delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu\Delta^2\delta u^{(k+1)} &= J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - \\ &- J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

краевым и начальному условиям

$$\delta u^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\delta u^{(k+1)}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.35)$$

$$\delta u^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (4.36)$$

Вариационную формулировку задачи (4.34) – (4.36) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &[\delta u^{(k+1)}, v]_B + \nu[\delta u^{(k+1)}, v]_A = \\ &= (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \\ &(u^{(k+1)}, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Подставим вместо v решение $u^{(k+1)}$. После интегрирования на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\delta u^{(k+1)}(t)|_B^2 + \nu \int_0^t |\delta u^{(k+1)}|_A^2 d\tau = \\ &= \int_0^t (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau, \\ &t \in (0; T], \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\|\delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0. \quad (4.38)$$

Оценим разность якобианов в правой части уравнения (4.37) с помощью формулы

$$J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_1, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2).$$

Тогда с учетом обозначения $\delta u^{(k)} = u^{(k)} - u^{(k-1)}$

$$\begin{aligned} & J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}) = \\ & = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u^{(k)} - u^{(k-1)}) + J(\Delta(u^{(k)} - u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}) = \\ & = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), \delta u^{(k)}) + J(\Delta \delta u^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение в правой части (4.37). Проинтегрируем его по частям с учетом краевых условий (4.35). Получим

$$\begin{aligned} & (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), \delta u^{(k)}) + J(\Delta \delta u^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta(u_0 + u^{(k)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \right) \right] \delta u^{(k+1)} dx dy + \\ & + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \delta u^{(k)} \frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \delta u^{(k)} \frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial x} \right) \right] \delta u^{(k+1)} dx dy = \\ & = - \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u^{(k)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial x} dx dy + \int_{\partial \Omega} \Delta(u_0 + u^{(k)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial y} \delta u^{(k+1)} \cos(\vec{n}, x) ds + \\ & + \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u^{(k)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial y} dx dy - \int_{\partial \Omega} \Delta(u_0 + u^{(k)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \delta u^{(k+1)} \cos(\vec{n}, y) ds + \\ & - \iint_{\Omega} \Delta \delta u^{(k)} \frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial y} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial x} dx dy + \int_{\partial \Omega} \Delta \delta u^{(k)} \frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial y} \delta u^{(k+1)} \cos(\vec{n}, x) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega} \Delta(u_0 + u^{(k-1)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial y} dx dy - \int_{\partial \Omega} \Delta(u_0 + u^{(k-1)}) \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \delta u^{(k+1)} \cos(\vec{n}, y) ds = \\
& = \iint_{\Omega} \left[\Delta(u_0 + u^{(k)}) \left(\frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial y} - \frac{\partial \delta u^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \Delta \delta u^{(k)} \left(\frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial x} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial y} - \frac{\partial (u_0 + u^{(k-1)})}{\partial y} \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\
& = (J(\delta u^{(k)}, \delta u^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u^{(k)}))_{L_2(\Omega)} + (J(u_0 + u^{(k-1)}, \delta u^{(k+1)}), \Delta \delta u^{(k)})_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Оценим скалярное произведение в правой части (4.37) по модулю с учетом равенства, полученного выше, и неравенства

$$|(J(u, v), w)_{L_2(\Omega)}| \leq c_1 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega), \quad w \in L_2(\Omega). \quad (4.39)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& |(J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}| = \\
& = |(J(\delta u^{(k)}, \delta u^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u^{(k)}))_{L_2(\Omega)} + (J(u_0 + u^{(k-1)}, \delta u^{(k+1)}), \Delta \delta u^{(k)})_{L_2(\Omega)}| \leq \\
& \leq c_1 \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} + \\
& + c_1 \|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \\
& \leq c_1 c_2 \left(\|u_0\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} + \|u^{(k)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \right) \|\delta u^{(k)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \|\delta u^{(k+1)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} + \\
& + c_1 c_2 \left(\|u_0\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} + \|u^{(k-1)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \right) \|\delta u^{(k+1)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \|\delta u^{(k)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \leq \\
& \leq c_1 c_2 \left(M_0 + c_3 \|u^{(k)}\|_A \right) \|\delta u^{(k)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \|\delta u^{(k+1)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} + \\
& + c_1 c_2 \left(M_0 + c_3 \|u^{(k-1)}\|_A \right) \|\delta u^{(k+1)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \|\delta u^{(k)}\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \leq \\
& = 2c_1 c_2 (M_0 + c_3 M) \|\delta u^{(k+1)}\|_A \|\delta u^{(k)}\|_A \leq \\
& \leq \frac{\nu}{2} \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 + \frac{4c_1^2 c_2^2}{\nu} (M_0 + c_3 M)^2 \|\delta u^{(k)}\|_A^2.
\end{aligned}$$

Здесь воспользовались вложениями пространств $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^2(\Omega)$ и элементарными неравенствами $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, а при последнем переходе использовали неравенство Юнга (2.36), где $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$, $a = \|\delta u^{(k+1)}\|_A$, $b = 2c_1c_2(M_0 + c_3M)\|\delta u^{(k)}\|_A$.

Подставим полученное неравенство в правую часть (4.35) и умножим обе части неравенства на 2:

$$\begin{aligned} & \|\delta u^{(k+1)}(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{8c_1^2c_2^2}{\nu} (M_0^2 + c_3^2M^2) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Из следствия 2.2 получим:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{8c_1^2c_2^2}{\nu\chi} (M_0^2 + c_3^2M^2) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 dt \right), \quad (4.40) \end{aligned}$$

где $\chi = \min \left\{ \frac{1}{c_3}, \nu \right\}$, $t \in (0; T]$.

Из доказанного неравенства (4.40) следует ограниченность $\delta u^{(k+1)}$ в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$, которая определена соотношением

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

при условии, что $\frac{8c_1^2c_2^2}{\chi\nu} (M_0^2 + c_3^2M^2) \leq \alpha < 1$, т.е.

$$\frac{1}{\chi\nu} \leq \frac{\alpha}{8c_1^2c_2(M_0^2 + c_3^2M)}. \quad (4.41)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\delta u^{(k+1)}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)} &\leq \alpha \|\delta u^{(k)}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)} \leq \dots \leq \\ &\leq \alpha^k \|\delta u^{(1)}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\delta u^{(k)}$ стремится к нулю в норме пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)$, т.е. существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u^*$.

Докажем, что предельная функция удовлетворяет эквивалентному (в силу леммы 4.1) уравнению вариационной задачи (4.18), (4.19):

$$\begin{aligned} [u'^{(k+1)}, v]_B + \nu [u^{(k+1)}, v]_A &= (J(u_0 + u^{(k)}, \Delta(u_0 + u^{(k)})), v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \\ (u^{(k+1)}, v)_{L_2(\Omega)} &= 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что функция v зависит от времени t , непрерывна до производных первого порядка по этой переменной и удовлетворяет условию $v(T) = 0$, т.е. $v \in W_T$.

Проинтегрируем уравнение (4.18) по времени на промежутке $[0; T]$, используя в первом слагаемом интегрирование по частям. Получим

$$\int_0^T ([u^{(k+1)}, v']_B + \nu [u^{(k+1)}, v]_A - (J(u_0 + u^{(k)}, \Delta(u_0 + u^{(k)})), v)_{L_2(\Omega)}) dt = 0.$$

Перейдем в полученном уравнении к пределу при $k \rightarrow \infty$ и применяем к первому слагаемому вновь интегрирование по частям. Получим:

$$\int_0^T ([u^{*'}, v]_B + \nu [u^*, v]_A - (J(u_0 + u^*, \Delta(u_0 + u^*)), v)_{L_2(\Omega)}) dt = 0. \quad (4.42)$$

Учитывая полноту системы координатных функций φ_k множество W_T образует плотное множество в пространстве $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$. С учетом этого, а также условие (4.19), из равенства (4.42) получим

$$[u^{*'}, v]_B + \nu[u^*, v]_A = (J(u_0 + u^*, \Delta(u_0 + u^*)), v)_{L_2(\Omega)}.$$

Это значит, что предел u^* является решением вариационной задачи (4.18), (4.19), и выполняется энергетическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^*(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau = \\ & = \int_0^t (J(u_0 + u^*, \Delta(u_0 + u^*)), u^*)_{L_2(\Omega)} dt, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^*(t)\|_B^2 + \nu \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau \leq \frac{8c_0^2}{\nu} c_1 c_2 c_3 M_0^4 T + \\ & + \frac{8c_0^2}{\nu} c_1 c_2 c_3 c_4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau \right)^2, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что задача (4.18), (4.19) имеет единственное решение. Допустим обратное: задача (4.18), (4.19) кроме решения u^* имеет еще одно ограниченное решение u^{**} . Рассмотрим разность $\delta u = u^* - u^{**}$. Она удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(-\Delta\delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2\delta u = \\ & = J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - J(\Delta(u_0 + u^{**}), u_0 + u^{**}). \end{aligned}$$

Тогда из (4.39) получим, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T |\delta u|_A^2 dt \leq \\ & \leq \frac{8c_1^2 c_2^2}{\nu \chi} (M_0^2 + c_3^2 M) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T |\delta u|_A^2 dt \right). \end{aligned}$$

Последнее неравенство имеет смысл только при $\delta u \equiv 0$, если условие (4.41) выполнено.

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 4.1. Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда последовательные приближения, формулируемые по схеме (4.15) – (4.17), сходятся при малых числах Рейнольдса к единственному обобщенному решению задачи (4.1) – (4.3), причем $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$. Условие малости чисел Рейнольдса формулируется в виде неравенств (4.33) и (4.41).

4.3 Вычислительный эксперимент для задачи с известным точным решением

Рассмотрим задачу (4.1) – (4.3) для случая, когда $\nu = 1$, Ω – квадрат $0 < x < 0,5$, $0 < y < 0,5$, с краевыми условиями (2.47) и начальным условием (2.48), для которой известно точное решение (2.49).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция (2.49) также удовлетворяет и нелинейному уравнению (4.1), что дает возможность протестировать итерационный процесс, построенный в данной главе.

В таблице 4.1 показаны результаты такого вычислительного эксперимента для тех же координатных функций, что и во 2 главе.

Критерием сходимости итерационного процесса была малость нормы разности между предыдущей и последующей итерацией в пространстве

$L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Из таблицы 4.1 видно, что итерационный процесс сходится за относительно небольшое количество итераций. Наилучший результат снова показали сплайны шестого порядка для 225 координатных функций, которые и будут использоваться для дальнейших расчетов.

Таблица 4.1 – Сравнение разных типов координатных функций

Тип координатных функций	Полиномы Лежандра		Сплайны Шенберга 6 порядка	
	Количество координатных функций	21	66	100
Количество итераций	6	6	9	9
Достигнутая погрешность	$0,56 \times 10^{-13}$	$0,53 \times 10^{-13}$	$0,37 \times 10^{-13}$	$0,28 \times 10^{-13}$

4.4 Численные результаты расчета нелинейной задачи для тестовых областей

Вычислительный эксперимент для задачи (4.1) – (4.3) был проведен в трех областях Ω при $\nu = 0,01$ и $\nu = 0,005$ ($Re = 100$ и $Re = 200$), $t \in (0; 5]$, где краевые и начальное условия имеют вид

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{-t} - 1, & y = 1, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = 1\}, \end{cases} \quad \psi|_{t=0} = 0.$$

В качестве базисных функций были выбраны сплайны Шенберга шестого порядка [181, 182]. Интегралы в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.23), (4.24) считались с помощью формулы Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате [94]. Соответствующая задача Коши (4.23), (4.24) решалась с помощью метода Рунге-Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага [186]. Условия применимости метода R -функций для линейной задачи (2.44), (2.45) были проверены непосредственно.

Область А. Прямоугольник $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ (рис. 2.16).

Структура решения задачи имеет вид (2.52). В таблицах 4.2 – 4.5 приведены численные характеристики течения.

Таблица 4.2 – Характеристики течения в вихревом центре при $Re = 100$

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.51775, 0.88137)	-0.0167209	-1.12319
1.0	(0.56746, 0.85097)	-0.0359719	-1.83669
2.0	(0.60614, 0.83029)	-0.0524051	-3.17616
3.0	(0.62834, 0.81466)	-0.0657059	-3.80723
4.0	(0.64656, 0.79285)	-0.0841613	-3.85554
5.0	(0.65233, 0.771994)	-0.1001910	-3.66133

Таблица 4.3 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при $Re = 100$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.0066387	0.058437	0.0236281	2.05573
1.0	0.632120	0.0143983	0.107806	0.0501456	3.20438
1.5	0.864665	0.0259629	0.167223	0.0898214	4.32049
2.0	0.950213	0.0327293	0.194984	0.1132730	4.73488
3.0	0.981684	0.0365352	0.207732	0.1264660	4.88898
5.0	0.993262	0.0386662	0.213610	0.1338110	4.94622

Таблица 4.4 – Характеристики течения в вихревом центре при $Re = 200$

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.501113, 0.904656)	-0.0126187	-1.09191
1.0	(0.585329, 0.878908)	-0.0277805	-1.88477
2.0	(0.685220, 0.861843)	-0.0414854	-3.83704
3.0	(0.726185, 0.846057)	-0.0541707	-5.17640
4.0	(0.746762, 0.822172)	-0.0758606	-5.31532
5.0	(0.746314, 0.793253)	-0.1026780	-4.73947

На рис. Г.1 – Г.12, Г.28 – Г.39 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Г.13 – Г.24, Г.40

– Г.51 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Г.25, Г.52 показаны графики одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Г.26, Г.52 показаны выход функции тока ψ в стационарный режим, на рис. Г.27, Г.54 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Таблица 4.5 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при $Re = 200$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.0049646	0.051226	0.018301	2.14814
1.0	0.632121	0.0110484	0.096296	0.039981	3.29852
1.5	0.864665	0.0206827	0.154077	0.075619	4.41634
2.0	0.950213	0.0269672	0.184234	0.099816	4.83907
3.0	0.981684	0.0311275	0.200143	0.115646	5.00001
5.0	0.993261	0.0339823	0.208857	0.126082	5.06132

Аналогичная задача была решена в [36] методом конечных разностей. В ней получены такие результаты после выхода на стационарный режим: $x_{v.c.} = 0,6250$, $y_{v.c.} = 0,7500$, $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = -0,1029$, $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = -3,1668$. Относительное расхождение с результатами, приведенными в таблице 4.2, составляет не более 5%.

Область Б. Параболический сегмент $\Omega = \{(x, y) | y > 4(x - 0,5)^2, y < 1\}$ (рис. 2.17). Структура решения задачи имеет вид (2.53). В таблицах 4.6 – 4.9 приведены численные характеристики течения.

Таблица 4.6 – Характеристики течения в вихревом центре при $Re = 100$

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.512151, 0.888205)	-0.0162522	-1.30300
1.0	(0.536711, 0.862192)	-0.0342567	-2.12025
2.0	(0.559010, 0.843828)	-0.0488386	-3.53769
3.0	(0.574523, 0.826402)	-0.0601361	-4.51832
4.0	(0.59456, 0.788434)	-0.0758858	-5.37542
5.0	(0.610903, 0.743763)	-0.0905579	-5.63703

Таблица 4.7 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при

Re = 100

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.0081546	0.060295	0.065382	3.18172
1.0	0.632120	0.0151411	0.111461	0.119386	5.68017
1.5	0.864665	0.0243579	0.179139	0.229298	10.8967
2.0	0.950213	0.0293770	0.213148	0.316803	15.6665
3.0	0.981684	0.0320203	0.228336	0.375730	19.2581
5.0	0.993262	0.0332969	0.234846	0.412399	21.6718

Таблица 4.8 – Характеристики течения в вихревом центре при Re = 200

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.512613, 0.910547)	-0.012453	-1.314510
1.0	(0.542521, 0.886109)	-0.027198	-1.926730
2.0	(0.572480, 0.866353)	-0.040179	-2.955120
3.0	(0.594488, 0.834618)	-0.052035	-4.644940
4.0	(0.637827, 0.615774)	-0.103942	-0.897987
5.0	(0.644086, 0.605790)	-0.207950	-0.743607

Таблица 4.9 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при

Re = 200

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.0073570	0.054068	0.067817	3.32613
1.0	0.632121	0.0133389	0.104229	0.130414	6.37498
1.5	0.864665	0.0224419	0.189894	0.289175	13.6872
2.0	0.950213	0.0328114	0.250418	0.435654	20.8962
3.0	0.981684	0.0446970	0.285533	0.547213	27.0376
5.0	0.993261	0.0545346	0.303881	0.629205	32.0023

На рис. Г.55 – Г.66, Г.82 – Г.93 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Г.67 – Г.78, Г.94 – Г.105 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Г.52, Г.79 показаны графики одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Г.53, Г.80 показаны выход функции тока ψ в стационарный режим, на рис. Г.54, Г.81 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область В. Трапеция $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < 1, y > 10x - 9, y > 1 - 10x\}$

(рис. 2.18). Структура решения задачи имеет вид (2.54).

В таблицах 4.10 – 4.13 приведены численные характеристики течения.

Таблица 4.10 – Характеристики течения в вихревом центре при $Re = 100$

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.517604, 0.883634)	-0.016511	-1.17898
1.0	(0.568117, 0.854487)	-0.035315	-1.93446
2.0	(0.601227, 0.835108)	-0.051138	-3.37271
3.0	(0.619300, 0.820851)	-0.063659	-4.06829
4.0	(0.634599, 0.801610)	-0.080373	-4.17285
5.0	(0.639640, 0.784337)	-0.093837	-4.01747

Таблица 4.11 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при

$Re = 100$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.006350	0.058813	0.041222	2.61816
1.0	0.632120	0.013596	0.107725	0.073372	4.16822
1.5	0.864665	0.024105	0.165686	0.114147	5.67547
2.0	0.950213	0.029989	0.192036	0.135280	6.22185
3.0	0.981684	0.033130	0.203679	0.145963	6.41238
5.0	0.993262	0.034789	0.208781	0.151278	6.47310

Таблица 4.12 – Характеристики течения в вихревом центре при $Re = 200$

t	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
0.5	(0.495470, 0.906199)	-0.012505	-1.14985
1.0	(0.594025, 0.881222)	-0.027423	-1.97770
2.0	(0.671143, 0.864446)	-0.040795	-4.03297
3.0	(0.707101, 0.849097)	-0.052782	-5.46960
4.0	(0.729610, 0.825670)	-0.072650	-5.76679
5.0	(0.731317, 0.799057)	-0.096025	-5.28673

На рис. Г.109 – Г.120, Г.136 – Г.147 приведены линии уровня и поверхности функции тока ψ в фиксированные моменты времени, на рис. Г.121 – Г.132,

Г.148 – Г.159 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. Г.133, Г.160 показаны графики одной из координат вектора скорости в разные моменты времени, на рис. Г.134, Г.161 показаны выход функции тока ψ на стационарный режим, на рис. Г.135, Г.162 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Таблица 4.13 – Характеристики течения в сечении и нормы в $L_2(\Omega)$ при $Re = 200$

t	$\max_{y \in [0,1]} v_x(0.5, y)$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0.5	0.393469	0.004808	0.051905	0.038800	2.67896
1.0	0.632121	0.010554	0.096892	0.067391	4.21070
1.5	0.864665	0.019465	0.154078	0.105502	5.75617
2.0	0.950213	0.025069	0.183497	0.127564	6.33937
3.0	0.981684	0.028620	0.198640	0.140731	6.55410
5.0	0.993261	0.030947	0.206634	0.148816	6.62937

Как показывает анализ полученных результатов для областей А, Б и В поток не является симметричным в силу нелинейности, носит циркуляционный характер, содержит придонные вихри и интенсивность течения, определяемая по плотности расположения линий тока, больше в верхней части области.

Выводы по разделу 4

1. Для функции тока плоскопараллельного нестационарного течения рассмотрена постановка нелинейной задачи.

2. Для решения нестационарной нелинейной задачи для функции тока применен итерационный метод, основанный на совместном использовании метода последовательных приближений, структурного метода R -функций и метода Галеркина для нестационарных задач: исходная нелинейная задача заменена последовательностью линейных задач.

3. Для построенного итерационного процесса решения нелинейной задачи для функции тока получены условия и оценки скорости сходимости в

норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^{\circ 2}(\Omega))$ к единственному обобщенному решению задачи.

4. Проведены вычислительные эксперименты для тестовой нелинейной задачи, имеющей точное решение. На основании сравнения с точным решением сделан вывод, что более высокую точность и вычислительную устойчивость имеют сплайны Шенберга шестого порядка.

5. Проведены вычислительные эксперименты для трех тестовых областей – прямоугольной, имеющей форму параболического сегмента, и трапециевидной. Полученные для прямоугольной области результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами, что говорит об эффективности разработанного численного метода.

Основные результаты раздела опубликованы в [7, 65, 72, 74, 75].

РАЗДЕЛ 5
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ
ЖИДКОСТИ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

5.1 Постановка нелинейной задачи для функции тока и температуры

Рассматривается нестационарная задача расчета плоскопараллельного течения вязкой теплопроводной жидкости в приближении Буссинеска.

Пусть Ω – плоская односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в естественных переменных состоит из уравнения движения для скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ и нормализованного на плотность давления p

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} - \beta \vec{e} \theta = 0,$$

уравнения несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

и уравнения, описывающего перенос тепла теплопроводностью и конвекцией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \theta - \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta = 0.$$

После введения функции тока ψ , связанной с вектором $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ скоростей жидкости с помощью соотношений (2.4) исходная система уравнений Навье-Стокса преобразуется к системе уравнений, состоящей из нелинейного уравнения для функции тока

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

и уравнения, описывающего перенос тепла теплопроводностью и конвекцией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \kappa \Delta \theta = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0. \quad (5.2)$$

Считаем, что массовые силы потенциальны.

Исходя из задания $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}$, $\mathbf{v}|_{t=0}$ и $\theta|_{\partial\Omega}$, $\theta|_{t=0}$, систему уравнений (5.1), (5.2)

следует дополнить краевыми и начальными условиями вида

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.3)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.4)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.5)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.6)$$

5.2 Разработка метода численного анализа нелинейной задачи

Для решения начально-краевой задачи (5.1) – (5.6) воспользуемся методами последовательных приближений, R -функций и Галеркина.

Пусть $(u_0(x, y, t), v_0(x, y, t))$ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_0 - \beta \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - \kappa \Delta v_0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (5.9)$$

$$u_0|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5.10)$$

$$v_0|_{\partial\Omega} = h_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.11)$$

$$v_0|_{t=0} = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (5.12)$$

В задаче (5.1) – (5.6) сделаем замену

$$\psi = u_0 + u, \theta = v_0 + v,$$

где (u, v) – новая пара неизвестных функций.

Тогда для пары функций (u, v) получим начально-краевую задачу с однородными краевыми и начальными условиями:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa \Delta v = J(u_0 + u, v_0 + v) \quad \text{в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.15)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (5.16)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.17)$$

$$v|_{t=0} = 0. \quad (5.18)$$

Рассмотрим введенные ранее в пункте 2.3 операторы A, B_1, B_2, E и введем операторы J_1 и J_2 , действующие в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ по правилам,

$$J_1(u) = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), \quad J_2(u, v) = J(u_0 + u, v_0 + v)$$

на области определения

$$D_{J_1} = \left\{ u \mid u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{J_2} = \left\{ (u, v) \mid (u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times (C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})), \quad u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Операторы A и B линейные и положительно определенные, E линейный, J_1, J_2 – нелинейные. Ясно, что $D_A \subset D_{B_1}, D_A \subset D_{J_1}, D_A \times D_{B_2} \subset D_{J_2}$.

Задачу (5.13) – (5.18) можно записать в операторной форме

$$\frac{d}{dt} B_1 u + \nu A u - \beta E v = J_1(u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{dv}{dt} + \kappa B_2 v = J_2(u, v), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.20)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (5.21)$$

$$v|_{t=0} = 0. \quad (5.22)$$

Пусть $(u(t), v(t)) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – классическое решение задачи (5.19) – (5.22), т.е. для любого $t \geq 0$ $u(t) \in D_A$, $v(t) \in D_{B_2}$, $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы по t , удовлетворяют уравнениям (5.19) и (5.20) и начальным условиям (5.21) и (5.22) соответственно.

Пусть $w_1(t)$, $w_2(t)$ – достаточно гладкие в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ функции, удовлетворяющие краевым условиям (5.15) и (5.17) соответственно, и такие, что при некотором $T > 0$ $w_1(T) = 0$ и $w_2(T) = 0$. Умножим (5.19) скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную функцию $w_1(t)$ с указанными свойствами, а уравнение (5.20) – на $w_2(t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} B_1 u, w_1 \right)_{L_2(\Omega)} + \nu (A u, w_1)_{L_2(\Omega)} - \beta (E v, w_1)_{L_2(\Omega)} &= (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)}, \\ \left(\frac{dv}{dt}, w_2 \right)_{L_2(\Omega)} + \kappa (B_2 v, w_2)_{L_2(\Omega)} &= (J_2(u, v), w_2)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Интегрируя последние равенства по t от 0 до T , получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} B_1 u, w_1 \right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T (A u, w_1)_{L_2(\Omega)} dt - \beta \int_0^T (E v, w_1)_{L_2(\Omega)} dt &= \int_0^T (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)} dt, \\ \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, w_2 \right)_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T (B_2 v, w_2)_{L_2(\Omega)} dt &= \int_0^T (J_2(u, v), w_2)_{L_2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав первый интеграл в каждом уравнении по частям (по

переменной t) и воспользовавшись равенствами $w_1(T) = 0$ и $w_2(T) = 0$, получим, что

$$-\int_0^T [u, w_1']_{B_1} dt + \nu \int_0^T [u, w_1]_A dt - \beta \int_0^T (Ev, w_1)_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)} dt, \quad (5.23)$$

$$-\int_0^T (v, w_2')_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T [v, w_2]_{B_2} dt = \int_0^T (J_2(u, v), w_2)_{L_2(\Omega)} dt, \quad (5.24)$$

где обозначено $w_1' = \frac{dw_1}{dt}$, $w_2' = \frac{dw_2}{dt}$.

Последние равенства возьмем в качестве определения обобщенного (слабого) решения задачи (5.19) – (5.22) (а значит, и задачи (5.13) – (5.18)).

Обозначим множество функций

$$\mathbf{W}_T = \left\{ (w_1, w_2) \mid (w_1, w_2) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \right. \\ \left. (w_1', w_2') \in L_2(0, T; L_2(\Omega) \times L_2(0, T; L_2(\Omega))), w_1(T) = 0, w_2(T) = 0 \right\}.$$

Определение 5.1. Пара функций $(u(t), v(t))$ называется *обобщенным (слабым) решением* задачи (5.19) – (5.22), если

- 1) $(u(t), v(t)) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$;
- 2) для любой пары элементов $(w_1(t), w_2(t)) \in \mathbf{W}_T$ имеют место равенства (5.23) и (5.24).

Для нахождения обобщенного решения задачи (5.19) – (5.22) (а значит, задачи (5.1) – (5.6)) построим итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть начальное приближение $(u^{(0)}, v^{(0)})$ задано. Тогда при известном значении $(u^{(k)}, v^{(k)})$ пары функций (u, v) на k -й итерации следующее $(k + 1)$ -е приближение находим как решение следующей линейной задачи:

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) + \beta \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}, \text{ в } \Omega, t > 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t} - \kappa \Delta v^{(k+1)} = J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) \text{ в } \Omega, 0 < t \leq T, \quad (5.26)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.27)$$

$$u^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad (5.28)$$

$$v^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.29)$$

$$v^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Итерационный процесс (5.25) – (5.30) сводит решение нелинейной задачи (5.19) – (5.22) к последовательности линейных задач, которые аналогичны рассмотренным в разделе 3.

Вариационную формулировку задачи (5.25) – (5.30) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & [u'^{(k+1)}, w_1]_{B_1} + \nu [u^{(k+1)}, w_1]_A = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta (Ev^{(k)}, w_1)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$(v'^{(k+1)}, w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa [v^{(k+1)}, w_2]_{B_2} = (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), w_2)_{L_2(\Omega)}, \quad (5.32)$$

$$(u^{(k+1)}, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \quad (5.33)$$

$$(v^{(k+1)}, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \quad (5.34)$$

Для построения обобщенного решения задачи (5.31) – (5.34) воспользуемся методом Галеркина [61, 109, 136, 139, 158]. Приближенное решение задачи (5.31) – (5.34) на $(k + 1)$ -той итерации ищем в виде

$$u_n^{(k+1)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) \varphi_i, \quad (5.35)$$

$$v_n^{(k+1)}(t) = \sum_{i=1}^n d_i^{(k+1)}(t) v_i, \quad (5.36)$$

где $c_i^{(k+1)}(t)$, $d_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$, – неизвестные функции, $\{\varphi_i\}$, $\{v_i\}$ – координатные последовательности.

Поскольку из (3.10) и (3.11) следует, что

$$u^{(k+1)} = \omega^2 \Phi^{(k+1)}, \quad v^{(k+1)} = \omega \Upsilon^{(k+1)},$$

где $\Phi^{(k+1)} = \Phi^{(k+1)}(x, y, t)$ и $\Upsilon^{(k+1)} = \Upsilon^{(k+1)}(x, y, t)$ – неопределенные компоненты структуры, то координатные последовательности можно взять в виде $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$, $v_i = \omega \tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций [153, 181, 182].

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_i^{(k+1)}(t)$, $d_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (5.35) в уравнение (5.25) и (5.36) в уравнение (5.26), первым n координатным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и v_1, \dots, v_n соответственно. Это приводит для определения $c_i^{(k+1)}(t)$, $d_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями:

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i^{(k+1)}(t) b_{ij}^{(1)} + \nu \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) a_{ij} = l_j^{(k)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.37)$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{d}_i^{(k+1)}(t) r_{ij} + \kappa \sum_{i=1}^n d_i^{(k+1)}(t) b_{ij}^{(2)} = m_j^{(k)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.38)$$

$$c_i^{(k+1)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.39)$$

$$d_i^{(k+1)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.40)$$

где $b_{ij}^{(1)} = [\varphi_i, \varphi_j]_{B_1}$, $r_{ij} = (v_i, v_j)_{L_2(\Omega)}$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $b_{ij}^{(2)} = [v_i, v_j]_{B_2}$, $l_j^{(k)}(t) = \left(J \left(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)} \right) + \beta \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}, \varphi_j \right)_{L_2(\Omega)}$, $m_j^{(k)}(t) = (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), v_j)_{L_2(\Omega)}$.

В матричных обозначениях $C^{(k+1)}(t) = \{c_i^{(k+1)}(t)\}$, $D^{(k+1)}(t) = \{d_i^{(k+1)}(t)\}$, $B_1 = \{b_{ij}^{(1)}\}$, $B_2 = \{b_{ij}^{(2)}\}$, $A = \{a_{ij}\}$, $R = \{r_{ij}\}$, $L^{(k)}(t) = \{l_j^{(k)}(t)\}$, $M^{(k)}(t) = \{m_j^{(k)}(t)\}$.

Здесь B , B_2 , A и R – квадратные матрицы порядка n , $C^{(k+1)}$, $D^{(k+1)}$, $L^{(k)}$, $M^{(k)}$ – матрицы столбцы. Тогда задачу (5.37) – (5.40) можно записать в виде:

$$B_1 C'^{(k+1)}(t) + \nu A C^{(k+1)}(t) = L^{(k)}(t), \quad t \in (0; T], \quad (5.41)$$

$$R D'^{(k+1)}(t) + \kappa B_2 D^{(k+1)}(t) = M^{(k)}(t), \quad t \in (0; T], \quad (5.42)$$

$$C^{(k+1)}(0) = 0, \quad (5.43)$$

$$D^{(k+1)}(0) = 0. \quad (5.44)$$

Утверждение 5.1. Приведенных свойств достаточно для того, чтобы решение задачи Коши (5.41) – (5.44) существовало и было единственным, т.е. при любом n галеркинские приближения к решению задачи (5.25) – (5.30) определены и строятся единственным образом.

В (5.31), (5.32) подставим вместо w_1 решение $u^{(k+1)}$, вместо w_2 – $v^{(k+1)}$ и, выполнив элементарные преобразования. Предположим, что $\|u^{(k)}\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M$ и $\|v^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq L$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u^{(k+1)}, u^{(k+1)}]_{B_1} + \nu [u^{(k+1)}, u^{(k+1)}]_A = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^{(k+1)}, v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} + \kappa [v^{(k+1)}, v^{(k+1)}]_{B_2} = (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}, v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \\ & (u^{(k+1)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \\ & (v^{(k+1)}, v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Последние четыре уравнения перепишем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{(k+1)}\|_{B_1}^2 + \nu \|u^{(k+1)}\|_A^2 = \\ & = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (5.45) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \|v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 = (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}, v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \quad (5.46)$$

$$\|u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0, \quad (5.47)$$

$$\|v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0. \quad (5.48)$$

Проинтегрируем (5.45), (5.46) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau &= \beta \int_0^t (Ev^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau + \\ &+ \int_0^t (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T], \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^{(k+1)}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 d\tau &= \\ = \int_0^t (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Оценим правую часть в формуле (5.49). Подынтегральную функцию во втором интеграле оценим аналогично пункту 3.2 при $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ в неравенстве Юнга. Получим

$$\begin{aligned} &\left| (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|u^{(k+1)}\|_A^2 + \frac{c_0^2}{\nu} 8c_2c_3c_4 \left(M_0^4 + c_4^4 \|u^{(k)}\|_A^4 \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Для оценки первого интеграла в правой части воспользуемся оценкой для скалярного произведения $\beta \left(\frac{\partial v}{\partial x}, u \right)_{L_2(\Omega)}$ из пункта 2.3 при $\varepsilon = \frac{\nu}{4c_1^2}$ в неравенстве Юнга. Получим:

$$\begin{aligned} \beta \left| \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}, u^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega)} \right| &\leq \frac{\nu}{4c_1^2} \|u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\beta c_1^2}{\nu} \left\| \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|u^{(k+1)}\|_A^2 + \frac{\beta c_1^2}{\nu} \|v^{(k)}\|_{B_2}^2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Подставим (5.51), (5.52) в (5.49). Получим:

$$\begin{aligned}
& \|u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 M_0^4 T + \\
& + \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 c_5^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u^{(k)}\|_A^2 d\tau \right)^2 + \\
& + \frac{2\beta c_1^2}{\nu} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|v^{(k)}\|_{B_2}^2 d\tau \right). \tag{5.53}
\end{aligned}$$

Из доказанного неравенства (5.53) следует ограниченность решения $v^{(k+1)}$ в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$, которая опреде-

лена соотношением $\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k+1)}(t)\|_{B_1} + \left(\int_0^T \|u^{(k+1)}\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, при условии, что

$$\frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 M_0^4 T + \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 c_5^4 M^4 + \frac{2\beta c_1^2}{\nu} L^2 \leq M^2. \tag{5.54}$$

Оценим правую часть в (5.50) по модулю. Воспользуемся формулой

$$|(J(u, v), w)_{L_2(\Omega)}| \leq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.55}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& |(J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}| = |(J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)}), v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}| \leq \\
& \leq c_6 \|\nabla(v_0 + v^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \\
& \leq c_6 c_7 \|\nabla(v_0 + v^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|v^{(k+1)}\|_{B_2}.
\end{aligned}$$

Используем неравенство Юнга при $\varepsilon = \frac{\kappa}{2}$, $a = \|v^{(k+1)}\|_{B_2}$,

$$b = c_6 c_7 \|\nabla(v_0 + v^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда, воспользовавшись после неравенства Юнга элементарным неравенством $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ и вложениями $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$,

$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^2(\Omega)$, получим:

$$\begin{aligned}
& c_6 c_7 \left\| \nabla(v_0 + v^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{1}{2\kappa} c_6^2 c_7^2 \left\| \nabla(v_0 + v^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{1}{2\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left\| u_0 + u^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \left\| v_0 + v^{(k)} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(\left\| u_0 \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \left\| u^{(k)} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \right) \left(\left\| v_0 \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| v^{(k)} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(M_0^2 + c_{10} \mathbf{I}_A u^{(k)} \right) \left(L_0^2 + c_{11} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k)} \right) \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(\left(M_0^2 + c_{10} \mathbf{I}_A u^{(k)} \right)^2 + \left(L_0^2 + c_{11} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k)} \right)^2 \right) \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(M_0^4 + c_{10}^2 \mathbf{I}_A u^{(k)} + L_0^4 + c_{11}^2 \mathbf{I}_{B_2} v^{(k)} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$\begin{aligned}
& \left| (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} + \\
& + \frac{1}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(M_0^4 + c_{10}^2 \mathbf{I}_A u^{(k)} + L_0^4 + c_{11}^2 \mathbf{I}_{B_2} v^{(k)} \right). \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Подставим (5.56) в правую часть (5.50) и умножим обе части неравенства на 2. Тогда

$$\begin{aligned}
& \left\| v^{(k+1)}(t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \mathbf{I}_{B_2} v^{(k+1)} d\tau \leq \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 \left(M_0^4 + L_0^4 \right) T + \\
& + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{10}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| u^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \mathbf{I}_A u^{(k)} d\tau \right)^2 + \\
& + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{11}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| v^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \mathbf{I}_{B_2} v^{(k)} d\tau \right)^2, \quad t \in (0; T]. \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Из доказанного неравенства (5.57) следует ограниченность решения $v^{(k+1)}$ в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, которая опреде-

лена соотношением $\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|v^{(k+1)}(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|v^{(k+1)}\|_{H_{B_2}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, при условии, что

$$\frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 (M_0^4 + L_0^4) T + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{10}^2 M^2 + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{11}^2 L^4 \leq L^2. \quad (5.58)$$

Докажем сходимость последовательности $(u^{(k)}, v^{(k)})$. Для этого рассмотрим разности $\delta u^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$, $\delta v^{(k+1)} = v^{(k+1)} - v^{(k)}$, которые удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-\Delta \delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 \delta u^{(k+1)} &= J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - \\ &- J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}) + \beta \frac{\partial \delta v^{(k)}}{\partial x}, \quad \text{в } \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \delta v^{(k+1)}}{\partial t} - \kappa \Delta \delta v^{(k+1)} = \\ &= J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) - J(u_0 + u^{(k-1)}, v_0 + v^{(k-1)}) \quad \text{в } \Omega, 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\delta u^{(k+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.61)$$

$$\delta u^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad (5.62)$$

$$\delta v^{(k+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.63)$$

$$\delta v^{(k+1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.64)$$

Вариационная постановка задачи (5.59) – (5.64) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta u^{(k+1)}\|_{B_1}^2 + \nu \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 = \\ &= (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}), u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} + \\ &\quad + \beta (E v^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 = \\ &= (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) - J(u_0 + u^{(k-1)}, v_0 + v^{(k-1)}), v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0; T], \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\|\delta u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0, \quad (5.67)$$

$$\|\delta v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad t = 0. \quad (5.68)$$

Проинтегрируем (5.65), (5.66) на промежутке $[0; t]$ по временной переменной, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\delta u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau = \\ & = \int_0^t (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}, u^{(k+1)}))_{L_2(\Omega)} d\tau + \\ & \quad + \beta \int_0^t (Ev^{(k)}, u^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T], \quad (5.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\delta v^{(k+1)}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 d\tau = \int_0^t (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) - \\ & \quad - J(u_0 + u^{(k-1)}, v_0 + v^{(k-1)}, \delta v^{(k+1)}))_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T]. \quad (5.70) \end{aligned}$$

Оценим первое подынтегральное выражение по модулю справа в (5.69) аналогично пункту 3.2 с параметром $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ в неравенстве Юнга. Получим

$$\begin{aligned} & |(J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}, u^{(k+1)}))_{L_2(\Omega)}| \leq \\ & \leq \frac{\nu}{4} \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 + \frac{8c_1^2 c_2}{\nu} (M_0^2 + c_3^2 M) \|\delta u^{(k)}\|_A^2. \quad (5.71) \end{aligned}$$

Оценим второе подынтегральное выражение по модулю справа в (5.69) аналогично (5.52). Получим

$$\beta \left| \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}, u^{(k+1)} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq \frac{\nu}{4} \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 + \frac{\beta^2 c_1^2}{\nu} \|\delta v^{(k)}\|_{B_2}^2. \quad (5.72)$$

Подставим (5.71), (5.72) в (5.69) и умножим на 2.

$$\begin{aligned}
& \|\delta u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau \leq \\
& \leq \frac{16c_1^2 c_2}{\nu} (M_0^2 + c_3^2 M) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 dt \right) + \\
& + \frac{\beta^2 c_1^2}{\nu} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta v^{(k)}\|_{B_2}^2 dt \right). \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Оценим подынтегральное выражение по модулю справа в (5.70). Для этого воспользуемся неравенством (5.54) формулой для разности якобианов

$$J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_2, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \left| (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) - J(u_0 + u^{(k-1)}, v_0 + v^{(k-1)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| = \\
& = \left| (J(u_0 + u^{(k-1)}, \delta v^{(k)}) + J(\delta u^{(k)}, v_0 + v^{(k-1)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\
& \leq \left| (J(u_0 + u^{(k-1)}, \delta v^{(k)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| + \left| (J(\delta u^{(k)}, v_0 + v^{(k-1)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| = \\
& = \left| (J(\delta v^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| + \left| (J(v_0 + v^{(k-1)}, \delta u^{(k)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\
& \leq c_1 \|\nabla \delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \delta v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)} + \\
& + c_1 \|\nabla(v_0 + v^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \delta v^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \\
& \leq c_1 c_2 \|\nabla \delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2} + \\
& + c_1 c_2 \|\nabla(v_0 + v^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}.
\end{aligned}$$

Последние два слагаемых оценим с помощью неравенства Юнга при $\varepsilon = \frac{\kappa}{4}$, $a = \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}$, $b = c_1 c_2 \|\nabla \delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)}$ (для первого слагаемого) и при $\varepsilon = \frac{\kappa}{4}$, $a = \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}$, $b = c_1 c_2 \|\nabla(v_0 + v^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}$ (для второго слагаемого). Тогда

$$c_1 c_2 \|\nabla \delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2} +$$

$$\begin{aligned}
& +c_1c_2 \left\| \nabla(v_0 + v^{(k-1)}) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \Delta \delta u^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{4} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 \left\| \nabla \delta v^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta(u_0 + u^{(k-1)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
& + \frac{\kappa}{4} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 \left\| \nabla(v_0 + v^{(k-1)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \Delta \delta u^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} \left\| u_0 + u^{(k-1)} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \\
& \quad + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left\| v_0 + v^{(k-1)} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \mathbf{I}_A \delta u^{(k)} \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} \left(\left\| u_0 \right\|_{W_2^2(\Omega)} + \left\| u^{(k-1)} \right\|_{W_2^2(\Omega)} \right)^2 + \\
& \quad + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left(\left\| v_0 \right\|_{W_2^1(\Omega)} + \left\| v^{(k-1)} \right\|_{W_2^1(\Omega)} \right)^2 \mathbf{I}_A \delta u^{(k)} \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} \left(M_0 + c_7 \mathbf{I}_A u^{(k-1)} \right)^2 + \\
& \quad + \frac{1}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left(L_0 + c_8 \mathbf{I}_{B_2} v^{(k-1)} \right)^2 \mathbf{I}_A \delta u^{(k)} \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{2}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \left(M_0^2 + c_7^2 M \right) \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} + \frac{2}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left(L_0^2 + c_8^2 L \right)^2 \mathbf{I}_A \delta u^{(k)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$\begin{aligned}
& \left| (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) - J(u_0 + u^{(k-1)}, v_0 + v^{(k-1)}), \delta v^{(k+1)})_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\
& \leq \frac{\kappa}{2} \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} + \frac{2}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \left(M_0^2 + c_7^2 M \right) \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} + \frac{2}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left(L_0^2 + c_8^2 L \right)^2 \mathbf{I}_A \delta u^{(k)}.
\end{aligned}$$

Подставим полученное выше неравенство в (5.60) и умножим на 2 :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \delta v^{(k+1)}(t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k+1)} d\tau \leq \\
& \leq \frac{4}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 \left(L_0^2 + c_8^2 L \right)^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| \delta u^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \mathbf{I}_A \delta u^{(k)} dt \right) + \\
& + \frac{4}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 \left(M_0^2 + c_7^2 M \right) \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| \delta v^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \mathbf{I}_{B_2} \delta v^{(k)} dt \right). \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Вектор погрешности будем рассматривать как вектор в \mathbb{R}^2 с нормой

$\|\vec{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16c_1^2 c_2}{\nu} (M_0^2 + c_3^2 M) & \frac{\beta^2 c_1^2}{\nu} \\ \frac{4}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_5 c_6 (L_0^2 + c_8^2 L)^2 & \frac{4}{\kappa} c_1^2 c_2^2 c_3 c_4 (M_0^2 + c_7^2 M) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}) =$$

$$= \left(\|\delta u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|\delta u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau, \|\delta v^{(k+1)}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|\delta v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 d\tau \right).$$

Тогда систему неравенств (5.73) и (5.74) можно записать в виде $\vec{\xi}^{(k+1)} \leq A \vec{\xi}^{(k)}$. Пусть спектральный радиус матрицы $A^T A$ таков, что

$$\sqrt{\rho(A^T A)} \leq \alpha < 1. \quad (5.75)$$

Тогда будет иметь место цепочка неравенств

$$\|\vec{\xi}^{(k+1)}\|_2 \leq \alpha \|\vec{\xi}^{(k)}\|_2 \leq \alpha^2 \|\vec{\xi}^{(k-1)}\|_2 \leq \dots \leq \alpha^k \|\vec{\xi}^{(1)}\|_2.$$

Таким образом, $\delta u^{(k)}$ и $\delta v^{(k)}$ стремятся к нулю в нормах пространств $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ соответственно, т.е. существуют пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u^*$, $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = v^*$.

Из доказанных неравенств (5.73) и (5.74) следует ограниченность $\delta u^{(k+1)}$ и $\delta v^{(k+1)}$ в нормах пространств $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, которые определены соотношениями

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|\delta u^{(k)}\|_A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta v^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|\delta v^{(k)}\|_{B_2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что предельные функции удовлетворяют эквивалентным уравнениям вариационной задачи (5.31) – (5.34):

$$\begin{aligned}
& [u^{(k+1)}, w_1]_{B_1} + \nu[u^{(k+1)}, w_1]_A = \\
& = (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev^{(k)}, w_1)_{L_2(\Omega)}, \\
& (v^{(k+1)}, w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v^{(k+1)}, w_2]_{B_2} = (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), w_2)_{L_2(\Omega)}, \\
& (u^{(k+1)}, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \\
& (v^{(k+1)}, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0.
\end{aligned}$$

Будем считать, что функции w_1 и w_2 зависят от времени t , непрерывны до производных первого порядка по этой переменной и удовлетворяют условиям $w_1(T) = 0$, $w_2(T) = 0$, т.е. $(w_1, w_2) \in \mathbf{W}_T$.

Проинтегрируем уравнения (5.31) и (5.32) по времени на промежутке $[0; T]$, используя в первом слагаемом интегрирование по частям. Получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^T ([u^{(k+1)}, w_1']_{B_1} + \nu[u^{(k+1)}, w_1]_A - \\
& - (J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), w_1)_{L_2(\Omega)} - \beta(Ev^{(k)}, w_1)_{L_2(\Omega)}) dt = 0, \\
& \int_0^T ((v^{(k+1)}, w_2')_{L_2(\Omega)} + \kappa[v^{(k+1)}, w_2]_{B_2} - (J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}), w_2)_{L_2(\Omega)}) dt = 0.
\end{aligned}$$

Перейдем в полученном уравнении к пределу при $k \rightarrow \infty$ и применяем к первым слагаемым вновь интегрирование по частям. Получим:

$$\int_0^T ([u^*, w_1]_{B_1} + \nu[u^*, w_1]_A - (J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*), w_1)_{L_2(\Omega)} - \beta(Ev^*, w_1)_{L_2(\Omega)}) dt = 0, \quad (5.76)$$

$$\int_0^T ((v^*, w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v^*, w_2]_{B_2} - (J(u_0 + u^*, v_0 + v^*), w_2)_{L_2(\Omega)}) dt = 0. \quad (5.77)$$

Учитывая полноту системы координатных функций φ_k и v_k множество \mathbf{W}_T образует плотное множество в пространстве $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)) \times L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$. С учетом этого, а также условий (4.32), (4.34), из равенств (5.76), (5.77) получим

$$\begin{aligned}
& [u^{*'}, w_1]_{B_1} + \nu[u^*, w_1]_A = \\
& = (J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*), w_1)_{L_2(\Omega)} + \beta(Ev^*, w_1)_{L_2(\Omega)}, \\
& (v^{*'}, w_2)_{L_2(\Omega)} + \kappa[v^*, w_2]_{B_2} = (J(u_0 + u^*, v_0 + v^*), w_2)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Это значит, что пределы u^* и v^* являются решением вариационной задачи (5.31) – (5.34), и выполняются энергетические уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u^*(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau = \beta \int_0^t (Ev^*, u^*)_{L_2(\Omega)} d\tau + \\
& + \int_0^t (J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*), u^*)_{L_2(\Omega)} dt, \quad t \in (0; T], \\
& \frac{1}{2} \|v^*(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v^{(k+1)}\|_{B_2}^2 dt = \\
& = \int_0^t (J(u_0 + u^*, v_0 + v^*), v^*)_{L_2(\Omega)} d\tau, \quad t \in (0; T].
\end{aligned}$$

Таким образом, выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
& \|u^*(t)\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau \leq \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 M_0^4 T + \\
& + \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 c_5^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau \right)^2 + \\
& + \frac{2\beta c_1^2}{\nu} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|v^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|v^*\|_{B_2}^2 d\tau \right), \quad t \in (0; T], \\
& \|v^*(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|v^*\|_{B_2}^2 d\tau \leq \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 (M_0^4 + L_0^4) T + \\
& + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{10}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u^*\|_A^2 d\tau \right)^2 + \\
& + \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{11}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|v^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|v^*\|_{B_2}^2 d\tau \right)^2, \quad t \in (0; T].
\end{aligned}$$

Докажем теперь, что задача (5.31) – (5.34) имеет единственное решение. Допустим обратное: задача (5.31) – (5.34) кроме решения (u^*, v^*) имеет еще одно ограниченное решение (u^{**}, v^{**}) . Рассмотрим разность

$$\vec{\delta}(u, v) = (\delta u, \delta v) = (u^* - u^{**}, v^* - v^{**}).$$

Она удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-\Delta\delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2\delta u - \beta\frac{\partial\delta v}{\partial x} &= J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - J(\Delta(u_0 + u^{**}), u_0 + u^{**}), \\ \frac{\partial\delta v}{\partial t} - \kappa\Delta\delta v &= J(u_0 + u^*, v_0 + v^*) - J(u_0 + u^{**}, v_0 + v^{**}). \end{aligned}$$

Тогда из доказанного выше получим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u\|_{B_1}^2 + \nu \int_0^t \|\delta u\|_A^2 d\tau &\leq \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 M_0^4 T + \\ &+ \frac{16c_0^2}{\nu} c_2 c_3 c_4 c_5^4 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u\|_A^2 d\tau \right)^2 + \\ &+ \frac{2\beta c_1^2}{\nu} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta v\|_{B_2}^2 d\tau \right), \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \kappa \int_0^t \|\delta v\|_{B_2}^2 d\tau &\leq \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 (M_0^4 + L_0^4) T + \\ &+ \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{10}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta u\|_A^2 d\tau \right)^2 + \\ &+ \frac{2}{\kappa} c_6^2 c_7^2 c_8 c_9 c_{11}^2 \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\delta v\|_{B_2}^2 d\tau \right)^2, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

Последние неравенства имеет смысл только при $\delta(u, v) \equiv 0$, если условия (5.54) и (5.58) выполнены. Единственность доказана.

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 5.1. Пусть $u_0, v_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда последовательные приближения, формулируемые по схеме (5.37) – (5.40), сходятся при малых числах Рейнольдса к единственному обобщенному решению задачи (5.1) – (5.6), причем $u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)$, $v \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_{B_2})$.

Условие малости чисел Рейнольдса, Грасгофа и Пекле формулируется в виде неравенств (5.54), (5.58) и (5.75).

5.3 Результаты вычислительного эксперимента для тестовых областей

Вычислительный эксперимент для задачи (5.1) – (5.6) был проведен в трех областях Ω при $Re = 100$ и различных числах Gr и Pe , $t \in (0; 5]$. Краевые и начальные условия имеют вид (3.58) – (3.61).

В качестве базисных функций выбирались сплайны Шенберга шестого порядка [181, 182]. Интегралы в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (5.41) – (5.44) считались с помощью квадратурной формулы Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате [94]. Соответствующая задача Коши (5.41) – (5.44) решалась с помощью метода Рунге-Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага [186]. Условия применимости метода R -функций для каждой задачи были проверены непосредственно. Критерием прекращения итерационного процесса было выбрано выполнение при $\varepsilon = 10^{-6}$ неравенства

$$\max \left\{ \left\| \psi^{(k+1)} - \psi^{(k)} \right\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_A)}, \left\| \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)} \right\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_{B_2})} \right\} < \varepsilon.$$

Область А. Прямоугольник $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ (рис. 2.1).

Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.4. Структура решения задачи имеет вид (3.62), (3.63). В таблицах 5.1 – 5.3 показаны результаты вычислительного эксперимента.

Таблица 5.1 – Характеристики течения в вихревом центре

	N	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
$Gr = 1, Pe = 1$	1	(0.356494, 0.672077)	0.000400	0.00033543
$Gr = 1, Pe = 50$	2	(0.360475, 0.672075)	0.000400	0.00033536
$Gr = 50, Pe = 1$	2	(0.398405, 0.685724)	0.002010	0.00436898
$Gr = 50, Pe = 50$	7	(0.399521, 0.687313)	0.002010	0.00543635

Таблица 5.2 – Нормы приближенных решений в $L_2(\Omega)$ при $t = 5.0$

	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
$Gr = 1, Pe = 1$	0.00001683	0.0000634	0.0001109	0.001397
$Gr = 1, Pe = 50$	0.00001681	0.0000633	0.0001108	0.001395
$Gr = 50, Pe = 1$	0.00083964	0.0031682	0.0055327	0.069766
$Gr = 50, Pe = 50$	0.00095445	0.0032547	0.0064246	0.078564

Таблица 5.3 – Характеристики функции температуры

	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
$Gr = 1, Pe = 1$	(0.499997, 1.0)	0.25	0.0720761
$Gr = 1, Pe = 50$	(0.499997, 1.0)	0.25	0.0720626
$Gr = 50, Pe = 1$	(0.499997, 1.0)	0.25	0.0720626
$Gr = 50, Pe = 50$	(0.499997, 1.0)	0.25	0.0720765

Здесь N – количество итераций, за которое сошелся итерационный процесс; $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – координаты вихревого центра; $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение функции тока в вихревом центре; $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ – значение вихря в вихревом центре; $(x_{t.c.}, y_{t.c.})$ – координаты максимума функции температуры, $\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$ – значение температуры в максимуме; $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\theta\|_{L_2(\Omega)}$ – нормы функции тока, двух координат скоростей, вихря и температуры в пространстве $L_2(\Omega)$.

На рисунках Д.1 – Д.8 приведены линии уровня и поверхности функции тока $\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.9 – Д.16 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta(x, y, 5.0) = -\Delta\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.17 – Д.24 – линии

уровня и поверхности температуры $\theta = \theta(x, y, 5.0)$, на рисунке Д.25 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область Б. Параболический сегмент $\Omega = \{(x, y) | y > 4(x - 0,5)^2, y < 1\}$ (рис. 2.2).

Краевые и начальные условия имеют вид (3.58) – (3.61). Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.3. Структура решения задачи задается формулами (3.62), (3.63). В таблицах 5.4 – 5.6 показаны результаты вычислительного эксперимента.

Таблица 5.4 – Характеристики течения в вихревом центре

	N	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
Gr = 1, Pe = 1	3	(0.699771, 0.745860)	0.000020	0.00219
Gr = 1, Pe = 50	4	(0.699749, 0.745835)	0.000020	0.00219
Gr = 50, Pe = 1	4	(0.700862, 0.746698)	0.001048	0.10984
Gr = 50, Pe = 50	8	(0.699721, 0.745409)	0.001080	0.11308

Таблица 5.5 – Нормы приближенных решений в $L_2(\Omega)$ при $t = 5.0$

	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
Gr = 1, Pe = 1	0.000007	0.000037	0.000054	0.000916
Gr = 1, Pe = 50	0.000007	0.000037	0.000054	0.000916
Gr = 50, Pe = 1	0.000345	0.001858	0.002711	0.045838
Gr = 50, Pe = 50	0.000355	0.001909	0.002800	0.047051

Таблица 5.6 – Характеристики функции температуры

	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
Gr = 1, Pe = 1	(1.0, 0.737233)	0.098438	0.066209
Gr = 1, Pe = 50	(1.0, 0.737237)	0.098417	0.066215
Gr = 50, Pe = 1	(1.0, 0.737237)	0.098417	0.066215
Gr = 50, Pe = 50	(1.0, 0.737452)	0.097406	0.066522

На рисунках Д.26 – Д.33 приведены линии уровня и поверхности функции тока $\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.34 – Д.41 – линии уровня и поверхности

завихренности $\zeta(x, y, 5.0) = -\Delta\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.42 – Д.49 – линии уровня и поверхности температуры $\theta = \theta(x, y, 5.0)$, на рисунке Д.50 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Область В. Трапеция $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < 1, y > 10x - 9, y > 1 - 10x\}$

(рис. 2.3).

Краевые и начальные условия имеют вид (3.58) – (3.61). Нормализованное уравнение области Ω построено в п. 2.3. Структура решения задачи задается формулами (3.62), (3.63). В таблицах 5.7 – 5.9 показаны результаты вычислительного эксперимента.

Таблица 5.7 – Характеристики течения в вихревом центре

	N	$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
Gr = 1, Pe = 1	1	(0.281064, 0.696086)	0.000032	0.00249
Gr = 1, Pe = 50	2	(0.281032, 0.696141)	0.000032	0.00249
Gr = 50, Pe = 1	2	(0.281992, 0.697391)	0.001576	0.12453
Gr = 50, Pe = 50	3	(0.280502, 0.699913)	0.001509	0.11948

Таблица 5.8 – Нормы приближенных решений в $L_2(\Omega)$ при $t = 5.0$

	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
Gr = 1, Pe = 1	0.000012	0.000051	0.000088	0.001206
Gr = 1, Pe = 50	0.000012	0.000051	0.000088	0.001206
Gr = 50, Pe = 1	0.000617	0.002556	0.004374	0.060255
Gr = 50, Pe = 50	0.000589	0.002458	0.004173	0.057986

Таблица 5.9 – Характеристики функции температуры

	$(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\theta(x_{t.c.}, y_{t.c.})$	$\ \theta\ _{L_2(\Omega)}$
Gr = 1, Pe = 1	(0.499997, 1.0)	0.25	0.070553
Gr = 1, Pe = 50	(0.499997, 1.0)	0.25	0.070543
Gr = 50, Pe = 1	(0.499997, 1.0)	0.25	0.070540
Gr = 50, Pe = 50	(0.499997, 1.0)	0.25	0.070041

На рисунках Д.51 – Д.58 приведены линии уровня и поверхности функции тока $\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.59 – Д.66 – линии уровня и поверхности завихренности $\zeta(x, y, 5.0) = -\Delta\psi(x, y, 5.0)$, на рисунках Д.67 – Д.74 – линии уровня и поверхности температуры $\theta = \theta(x, y, 5.0)$, на рисунке Д.75 – векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

5.4 Результаты математического моделирования для прикладных задач

5.4.1 Математическое моделирование течения в канавке подшипника

Рассмотрим схему течения, показанную на рис. 5.1. Вращающийся вал опирается на подшипник. Тонкий кольцевой зазор между подшипником и валом заполнен смазочным маслом, которое подается в канавку подшипника через отверстие в ее основании. Вал и подшипник обычно имеют одинаковую и равномерно распределенную температуру, а масло имеет более низкую температуру. При построении математической модели делаются следующие допущения:

- а) размеры канавки гораздо меньше диаметра вала, в связи с чем область течения можно считать прямоугольником;
- б) скорость течения жидкости вдоль канавки настолько мала, что не влияет на структуру решения в поперечном сечении, т.е. течение можно считать плоскопараллельным;
- в) ядро холодного масла, медленно текущего вдоль канавки, можно моделировать, задавая низкую постоянную температуру в соответствующей области ядра течения.

Течение масла в канавке подшипника $\Omega = (0; 0,25) \times (0; 0,25)$ описывается с помощью задачи для системы дифференциальных уравнений относительно функции тока ψ и температуры T вида (приближение Буссинеска):

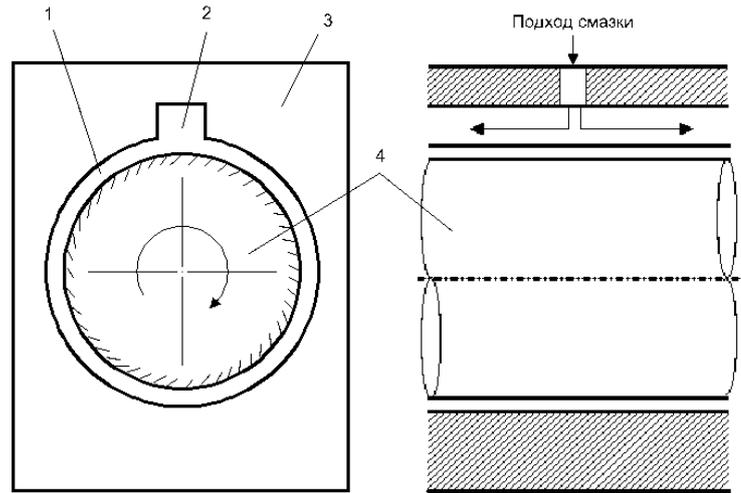


Рисунок 5.1 – Схема течения в канавке подшипника

1 – смазка, 2 – канавка, 3 – подшипник, 4 – вал.

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \Delta^2 \psi = \mathbf{Re} J(\Delta \psi, \psi) + \mathbf{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0,$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Delta \theta = \mathbf{Pe} J(\theta, \psi), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0,$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0,5,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = 0\}, \end{cases}$$

$$T|_{\partial\Omega} = 1,$$

$$\psi|_{t=0} = 0, T|_{t=0} = 1.$$

Здесь \mathbf{Re} – число Рейнольдса, \mathbf{Gr} – число Грасгофа, \mathbf{Pe} – число Пекле.

В качестве базисных функций выбирались сплайны Шенберга шестого порядка на сетке $h = 0,1$. При вычислении интегралов в системах использовалась кубатурная формула Гаусса с 16 узлами. Получено численное решение задачи при $\mathbf{Re} = 1$, Пекле $\mathbf{Pe} = 1$ и Грасгофа $\mathbf{Gr} = 50$. На рис. 5.2 показаны изотермы и линии тока при $t = 5$.

Сходимость с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ достигнута на 7 итерации. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов и результатами из [21, 187].

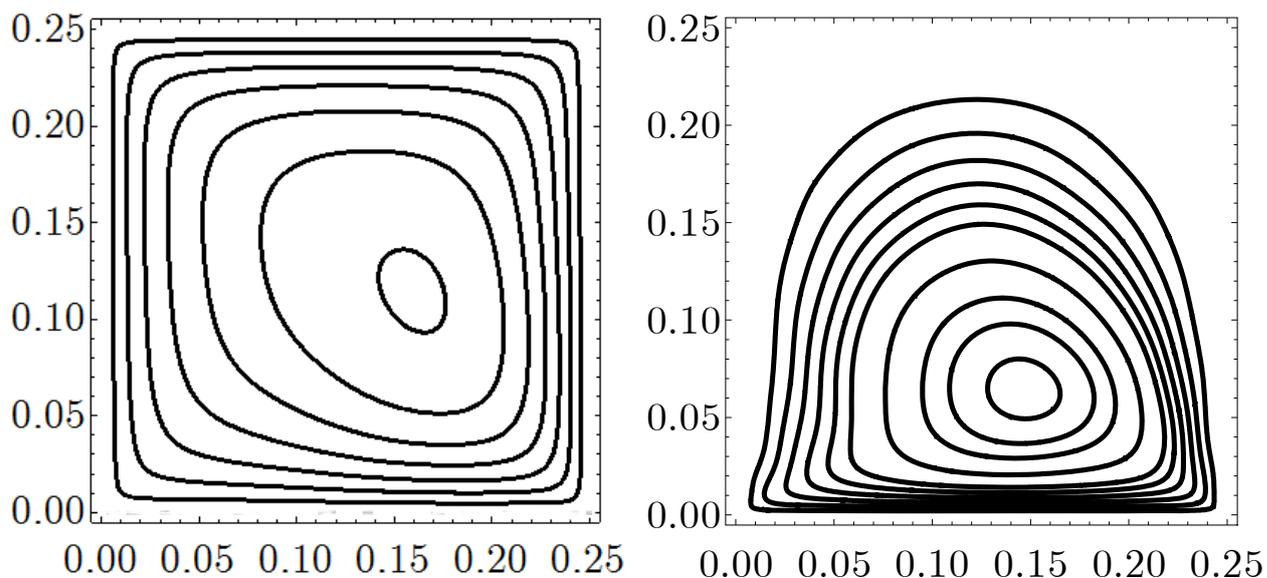


Рисунок 5.2 – Изотермы $T = \text{const}$ и линии тока $\psi = \text{const}$

5.4.2 Математическое моделирование свободной конвекции в расплавленном стекле

В процессе превращения в готовый продукт стекломасса претерпевает сложные физико-химические превращения, точный учет которых оказывается чрезвычайно сложным. Ограничимся описанием этого процесса на гидродинамическом уровне и исследуем циркуляционное течение вязкой жидкости в прямоугольной области. Итак, пусть расплавленная стекломасса занимает прямоугольную полость (сечение модели стекловаренной печи) высоты H и длины L [141]. В дальнейшем примем $H = 1$.

Будем считать, что плавление происходит за счет подвода тепла сверху, торцевые стенки печи отдают тепло в окружающую среду, а дно печи считаем теплоизолированным. Кроме того, на дне и боковых стенках расплавленное стекло удовлетворяет условиям прилипания. Верхнюю границу будем считать свободной, причем деформацией границы, вызванной конвекцией, пренебрежем.

Для математического описания конвективного течения воспользуемся системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в переменных

«функция тока – температура» в области $\Omega = \{0 < x < L, 0 < y < 1\}$. Тогда дифференциальные уравнения, описывающие процесс, имеют вид

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \kappa \Delta \theta = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0.$$

Исходя из задания вектора скорости жидкости и температурного режима на границе и в начальный момент времени, систему уравнений (5.1), (5.2) следует дополнить краевыми и начальными условиями вида

$$\begin{aligned} \psi|_{t=0} &= \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{n}^2} \Big|_{y=1} = 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=1} &= q, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} + \alpha \theta \Big|_{x=0} &= g, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} + \alpha \theta \Big|_{x=L} = g, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Используя формулу склейки [153], построим функции

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha y(1-y)}{\frac{1}{L} x(L-x) + y(1-y)}, \\ \varphi_2 &= \frac{qxy(L-x) + Lgy(1-y)}{xy(L-x) + Ly(1-y) + (1-y)x(L-x)}. \end{aligned}$$

Тогда краевые условия для температуры можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial \theta^{(k+1)}}{\partial \vec{n}} + \varphi_1 \theta^{(k+1)} \right|_{\partial \Omega} = \varphi_2.$$

Значит, структуры решения для функции тока и температуры имеют вид [153, 166]:

$$\psi = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} (\omega_2 \Phi_2 - D_2^{(2)}(\omega_1^2 \omega_2 \Phi_1)),$$

$$\theta = \Upsilon_1 - \omega(D_1 \Upsilon_1 - \varphi_1 \Upsilon_1 + \varphi_2) + \omega^2 \Upsilon_2,$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \Upsilon_1, \Upsilon_2$ – неопределенные компоненты.

Дифференциальный оператор $D_2^{(2)}$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} D_2^{(2)}u &= \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u = \\ &= \left(\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Функции

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{L} x(L - x) \wedge_0 y,$$

$$\omega_2(x, y) = 1 - y,$$

$$\omega(x, y) = \frac{1}{L} x(L - x) \wedge_0 y(1 - y)$$

являются нормализованными уравнениями $\partial \Omega_1 = \{y = 1\}$, $\partial \Omega_2 = \partial \Omega \setminus \partial \Omega_1$ и $\partial \Omega$ соответственно.

Сходимость с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$ при $\nu = 1$, $\beta = 1$, $\kappa = 1$, $L = 4$, $\alpha = 1$, $q = 1$, $g = 1$ достигнута на 5 итерации. На рисунке 5.3 приведены линии уровня функции тока и температуры при $t = 5.0$.

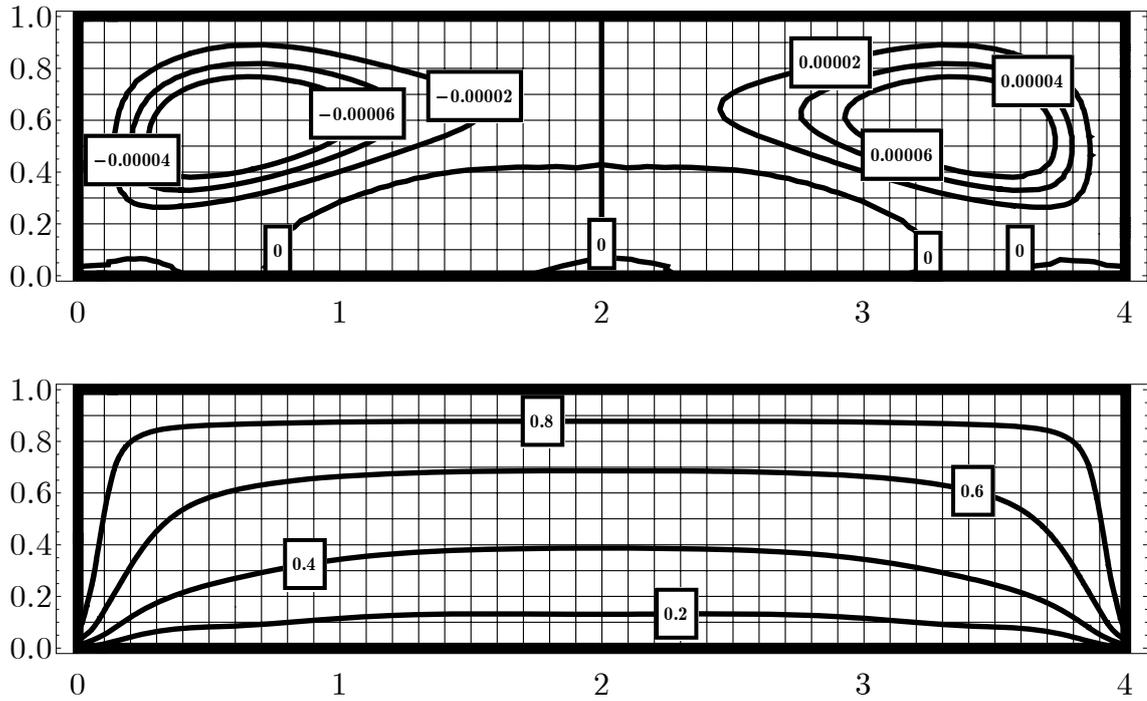


Рисунок 5.3 – Линии тока $\psi = \text{const}$ и изотермы $T = \text{const}$

5.4.3 Математическое моделирование свободной конвекции в полости с теплопроводными стенками

Рассмотрим плоское ламинарное конвективное течение вязкой теплопроводной жидкости в замкнутой квадратной области Ω_f с теплопроводными стенками конечной толщины Ω_s (рис. 5.4) [121, 189]. Вертикальные стенки $x = 0$ и $x = L_x$ поддерживаются при постоянных температурах, а горизонтальные $y = 0$, $y = L_y$ являются адиабатическими. Сила тяжести направлена вниз по оси y . Математическая модель задачи сопряженной теплогравитационной конвекции имеет вид:

в газовой полости Ω_f , $t > 0$:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \Delta^2 \psi + \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \Delta \theta,$$

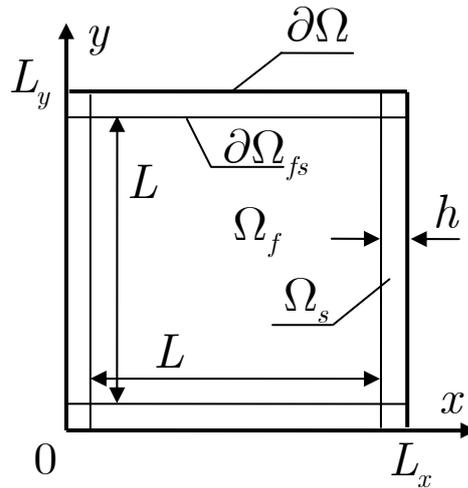


Рисунок 5.4 – Геометрия области задачи

в твердых стенках Ω_s , $t > 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a_{sf}}{\sqrt{\mathbf{Ra} \cdot \mathbf{Pr}}} \Delta \theta,$$

где \mathbf{Ra} – число Релея;

\mathbf{Pr} – число Прандтля;

a_{sf} – относительный коэффициент теплопроводности.

Начальные условия имеют вид

$$\psi|_{t=0} = \theta|_{t=0} = 0.$$

Краевые условия заданы следующим образом:

на внешних стенках

$$\theta|_{x=0} = \theta_1, \quad \theta|_{x=L_x} = \theta_2, \quad \text{где } 0 \leq y \leq L_y,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \Big|_{L_y} = 0, \quad \text{где } 0 \leq x \leq L_x,$$

на внутренних стенках:

$$\begin{aligned}\psi|_{x=h} &= \psi|_{x=L_x-h} = \psi|_{y=h} = \psi|_{y=L_y-h} = 0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{x=h} &= \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{x=L_x-h} = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{y=h} = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{y=L_y-h} = 0, \\ \theta_s &= \theta_f, \quad \frac{\partial\theta_f}{\partial\vec{n}} = \lambda_{sf} \frac{\partial\theta_s}{\partial\vec{n}},\end{aligned}$$

где λ_{sf} – относительный коэффициент теплопроводности;

θ_s – температура в твердой стенке;

θ_f – температура в газовой полости;

h – толщина стенок;

L – размер каверны.

Структура решения, построенная методом R -функций, имеет вид [170]

$$\begin{aligned}\psi &= \omega_{sf}^2 \Phi, \\ \theta &= \begin{cases} B(\Upsilon), & (x, y) \in \Omega_s, \\ B(\Upsilon) - (1 - \lambda_{sf})\omega_{sf} D_1 B(\Upsilon), & (x, y) \in \Omega_f, \end{cases}\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \frac{1}{L_x} x(L_x - x) \wedge_0 \frac{1}{L_y} y(L_y - y), \\ \omega_{sf}(x, y) &= \frac{1}{L_x - 2h} (x - h)(L_x - x) \wedge_0 \frac{1}{L_y - 2h} (y - h)(L_y - y), \\ B(\Upsilon) \Big|_{\frac{x}{L_x}(L_x - x) = 0} &= \frac{\theta_1(L_x - x) + \theta_2 x}{L_x}, \\ \frac{\partial B(\Upsilon)}{\partial\vec{n}} \Big|_{\frac{y}{L_y}(L_y - y) = 0} &= 0.\end{aligned}$$

Вычислительный эксперимент был проведен для $L_x = L_y = L = 1$,
 $h = 0.05$, $\mathbf{Ra} = 10^3$, $\mathbf{Pr} = 0.7$, $\lambda_{sf} = 10$, $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = -0.5$, $a_{sf} = 1$, $T = 5$.

Сходимость с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$ достигнута на 8 итерации. На рисунке 5.5 представлены линии уровня функции тока и температуры в момент времени $t = 5.0$.

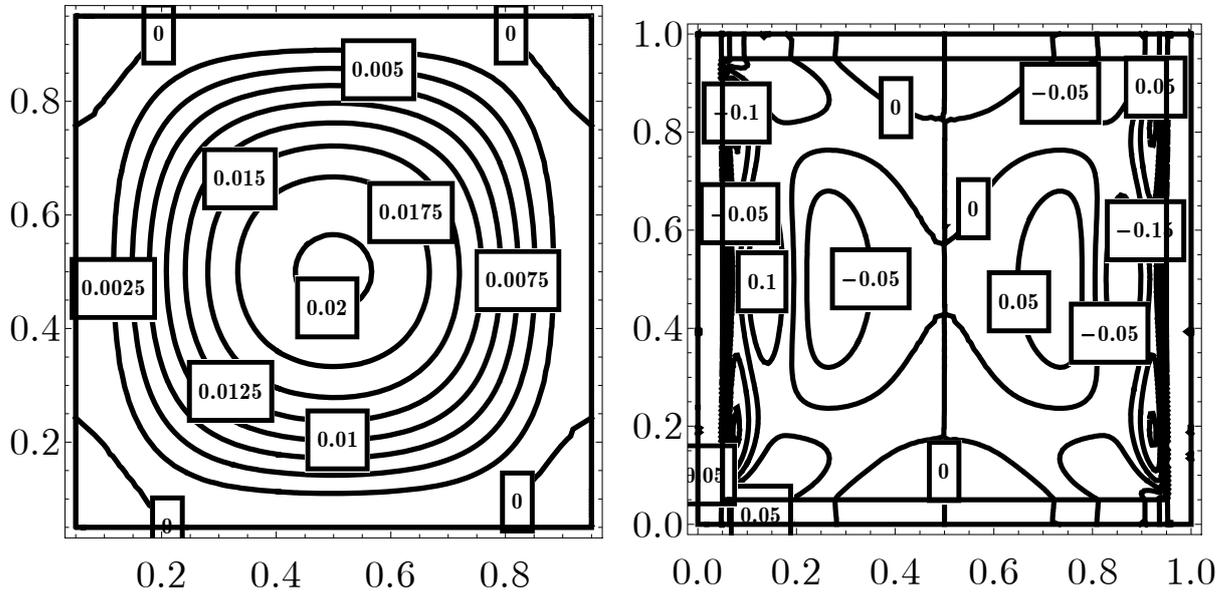


Рисунок 5.5 – Линии уровня функции тока $\psi = \text{const}$ и изотермы $T = \text{const}$ при $t = 5$

Выводы по разделу 5

1. Для функции тока и температуры плоскопараллельного нестационарного течения рассмотрена постановка нелинейной задачи.

2. Для решения нестационарной нелинейной задачи для функции тока и температуры применен итерационный метод, основанный на совместном использовании метода последовательных приближений, структурного метода R -функций и метода Галеркина для нестационарных задач: исходная нелинейная задача заменена последовательностью линейных задач.

3. Для построенного итерационного процесса решения нелинейной задачи для функции тока и температуры получены условия и оценки скорости сходимости к единственному обобщенному решению задачи в норме пространства

$$(L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))).$$

4. Проведены вычислительные эксперименты для трех тестовых областей – прямоугольной, имеющей форму параболического сегмента, и трапециевидной.

5. Разработанные методы решения нелинейной задачи для функции тока и температуры были применены к математическому моделированию течения в канавке подшипника, свободной конвекции в расплавленном стекле и свободной конвекции в полости с теплопроводными стенками.

Основные результаты раздела опубликованы в [5, 6, 68, 69, 73, 78, 80, 81, 83].

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе получены результаты, которые в совокупности являются дальнейшим обобщением и развитием численных методов математического моделирования нестационарных течений вязкой жидкости. Результаты работы содержат теоретическое обоснование методов решения линейных и нелинейных задач расчета вязких нестационарных течений в сложных областях с кусочно-гладкой границей.

1. На основе методов R -функций и Галеркина впервые разработан метод расчета медленных плоскопараллельных нестационарных течений (линеаризация Стокса) вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях. Доказана сходимость галеркинских приближений к единственному обобщенному решению задачи в норме пространства $L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))$.

2. На основе методов R -функций и Галеркина впервые разработан метод расчета медленных плоскопараллельных нестационарных течений (линеаризованная задача для функции тока и температуры) вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в сложных областях. Доказана сходимость галеркинских приближений к единственному обобщенному решению в норме пространства $(L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)))$.

3. Алгоритмы разработанных методов решения линеаризованных задач для функции тока и функции тока и температуры не изменяются при изменении геометрии области, структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, а приближенное решение имеет аналитический вид.

4. Для решения нелинейной задачи относительно функции тока на основе метода последовательных приближений построен итерационный метод: решение нелинейной задачи сведено к решению последовательностей линейных, причем на каждой итерации соответствующая линейная задача решается методами R -функций и Галеркина. Доказана сходимость построенного итера-

ционного процесса при малых числах Рейнольдса.

5. Для решения системы нелинейных уравнений относительно функции тока и температуры на основе метода последовательных приближений построен итерационный процесс, сводящий решение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач, которые решаются методами R -функций и Галеркина. Доказана сходимость построенного итерационного процесса при малых числах Рейнольдса, Грасгофа и Пекле.

6. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических постановок задач с использованием основных положений математической физики. Корректность численных результатов подтверждается сравнениями с точными решениями и с известными из литературы численными решениями.

7. Результаты исследований диссертационной работы внедрены в учебный процесс в Харьковском национальном университете радиоэлектроники.

8. Полученные результаты являются теоретической и практической основой для решения инженерных задач, которые сводятся к моделированию плоскопараллельных нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости в областях сложной геометрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Achdou Y. Convergence analysis of a finite element projection / Lagrange–Galerkin method for the incompressible Navier–Stokes equations / Y. Achdou, J. Guermond // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000. – No 37(3). P. 799–826.
2. Agranovich Yu.Ya. Mathematical Modeling of Nonlinearly Viscous Fluid Motion: Strong Solutions / Yu.Ya. Agranovich, V.L. Khatskevich // *Automation and Remote Control*, 2012. – Vol. 73, No. 1. – P. 171–180.
3. Anderson J.D., Jr. Computational Fluid Dynamics: the basics with applications / J.D., Jr. Anderson. – New York: McGraw-Hill, Inc., 1995. – 547 p.
4. Ansorge R. Mathematical models of fluid dynamics / R. Ansorge. – Berlin: Wiley-VCH GmbH & Co. KGaA, 2003. – 181 p.
5. Artiukh A.V. Numerical analysis of conjugate heat transfer in a enclosure region by the R-functions and Galerkin methods / A.V Artiukh // *Theoretical and applied aspects of cybernetics. Proceedings of the 2nd international scientific conference of students and young scientists (Kyiv, Cybernetics Faculty of Taras Shevchenko National University of Kyiv)*. – Kyiv: Bukrek, 2012. – P. 98–100.
6. Artyukh A. Mathematical and numerical modeling of natural convection in an enclosure region with heat-conducting walls by R-functions and Galerkin Method / A. Artyukh // *Radioelectronics and informatics*. – 2012. – №4. – P. 103–108.
7. Artyukh A. Mathematical modeling and numerical analysis of nonstationary plane-parallel flows of viscous incompressible fluid by R-functions and Galerkin method / A. Artyukh, M. Sidorov // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes*. – 2014. – Vol. 3, No 3. – P. 3–11.
8. Bao K. A finite element method for the numerical solution of the coupled Cahn-Hilliard and Navier-Stokes system for moving contact line problems / K. Bao, Y. Shi, S. Sun, X.-P. Wang. // *J. Comput. Phys.*, 2012. – No 231. – P. 8083–8099.
9. Barragy E. Stream function-vorticity driven cavity solutions using p finite

elements / E. Barragy, G.F. Carey // *Computers and Fluids*, 1997. – No 26. – P. 453–468.

10. Bermejo R. A second order in time modified Lagrange–Galerkin finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations / R. Bermejo, P. del Sastre, L. Saavedra // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012. – No 50(6). – P. 3084–3109.

11. Burggraf O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow / O. R. Burggraf // *J. Fluid Mech.* – 1966. – V. 24. – P. 113–151.

12. Burman E. Pressure projection stabilizations for Galerkin approximations of Stokes' and Darcy's problem / E. Burman // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2008. – No 24. – P. 127–143.

13. Buyskikh A.A. Viscous Flow Simulation of Geological Bodies / A.A. Buyskikh // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2015. – Vol. 7, No. 4. – P. 374–380.

14. Clough R.W. The finite element analysis in plane stress analysis / R.W. Clough // *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation.* – Pittsburgh, PA, September, 1960.

15. Donea J. Finite Element Methods for flow Problems / J. Donea, A. Huerta. – London: Wiley, 2003. – 350 p.

16. Dubois F. Vorticity–velocity–pressure formulation for the Stokes problem / F. Dubois // *Math. Methods Appl. Sci.* – No 25. – P. 1091–1119.

17. Dusenberre G.M. Heat transfer calculations by numerical methods / G.M. Dusenberre // *Journal of the American Society for Naval Engineers*, 1955. – V. 67 (4).

18. Duvaut G. Inequalities in Mechanics and Physics / G. Duvaut, J.L. Lions. – Springer, 1976. – 374 p.

19. Elman H.C. Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics. Numerical Mathematics and Scientific Computation / H.C. Elman, D.J. Silvester, A.J. Wathen – Oxford University Press, New York, 2005. – 528 p.

20. Erturk E., Corke T. C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady in-

compressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2005. – V. 48. – P. 747–774.

21. Ettles C. Solution for flow in a bearing groove / C. Ettles // *Mech. Eng. Tribology Convection*. – Pitlochry, Scotland, 1968. – № 15.

22. Ferziger J.H. Computational methods for fluid dynamics / J. H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002 – 430 p.

23. Girault V. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin: Springer, 1979. – 200 p.

24. Glowinski R. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations / R. Glowinski, O. Piranneau // *Annu, Rev, Fluid Mech*, 1992. – No 24. P. 167–204.

25. Gross S. Finite element discretization error analysis of a surface tension force in two-phase incompressible flows / S. Gross, A. Reusken // *SIAM J. Numer. An.*, 2007. – No 45. – P. 1679–1700.

26. Gross S. Numerical methods for two-phase incompressible flows / S. Gross, A. Reusken. – Berlin: Springer, 2011. – 488 p.

27. Happel J. Low Reynolds number hydrodynamics / J. Happel, H. Brenner. – Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1983. – 564 p.

28. He Y. A two-level finite element Galerkin method for the nonstationary Navier-Stokes equations II: time discretization / Y. He // *J. Comput. Math.*, 2004. – No 22(1). – P. 33–54.

29. He Y. Local and parallel finite element algorithms for the Stokes problem / Y. He, J. Xu, A. Zho, J. Li // *Numer. Math.*, 2008 – No 109. – P. 415–434.

30. Iannelli J. Characteristics finite element method in computational fluid dynamics / J. Iannelli. – Berlin: Springer, 2006 – 744 p.

31. Khurshid H. Development of a high-order solver for blood flow / H. Khurshid, K.A. Hoffmann // *Engineering with Computers*, 2013. – No 3. – P. 10–30.

32. Kołodziej A. Application of the method of fundamental solutions and the radial basis functions for viscous laminar flow in wavy channel. / A. Kołodziej, J.K. Grabski // *Eng. An. Boundary Elem*, 2014. – Vol.57. – P. 58–65.

33. Ladyzhenskaya O.A. Finding Minimal Global Attractors for the Navier-

Stokes Equations and Other Partial Differential Equations / O.A. Ladyzhenskaya // *Usp. Mat. Nauk*, 1987. – Vol. 42, No 6. – P. 25–68.

34. Lewis R.W. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow* / R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K. Seetharamu. – Wiley, 2004. – 356 p.

35. Liao S.J. Higher-order streamfunction-vorticity formulation of 2D steady-state Navier-Stokes equations / S.J. Liao // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992. – Vol. 15. – P. 565–612.

36. LIN J. Application of a three-point explicit compact difference scheme to the incompressible Navier-Stokes equations / Jian-guo LIN, Zhihua Xie, Jun-tao ZHOU // *Journal of Hydrodynamics*, 2006. – Vol. 18(3). – P. 151–156.

37. LIN Jian-guo. Application of a three-point explicit compact difference scheme to the incompressible Navier-Stokes equations / LIN Jian-guo, XIE Zhi-hua, ZHOU Jun-tao // *Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics*, 2006. – P. 151–156.

38. Loukopoulos V.C. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables and velocity-vorticity formulation / V.C. Loukopoulos, G.T. Messaris, G.C. Bourantas // *Applied Mathematics and Computation*, 2013. – Vol. 222. – P. 575–588.

39. LU Chang-gen. A study on numerical method of Navier-Stokes equation and non-linear evolution of the coherent structures in a laminar boundary layer / LU Chang-gen, CAO Wei-dong, QIAN Jian-hua // *Journal of Hydrodynamics*, 2006. – No 18 (3). – P. 372–377.

40. Mizukami A. A stream function – vorticity finite element formulation for Navier-Stokes equations in multi-connected domain / A. Mizukami // *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1983. – V. 19. – P. 1403 –1409.

41. Mohanty R.K. A new high accuracy method for twodimensional biharmonic equation with nonlinear third derivative terms: application to Navier–Stokes equations of motion / R.K. Mohanty, Weizhong Dai, Fei Han // *International Journal of Computer Mathematics*, 2014. – P. 1–17.

42. Ozisik N. *Finite Difference Methods in Heat Transfer* / N. Ozisik. –

Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. – 432 p.

43. Podyma M. Numerical analysis of blood flow in human abdominal aorta / M. Podyma, I. Zbicinski, J. Walecki // *Adv. Fluid. Mech.*, 2006. – No 52. – P. 603–611.

44. Popova I.V. Difference Schemes on Triangular and Tetrahedral Grids for Navier–Stokes Equations of Incompressible Fluid / I.V. Popova, I.V. Fryazinov // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010. – Vol. 2, No. 3. – P. 281–292.

45. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation / C. Pozrikidis. – USA: Kluwer academic publishers, 2001. – 557 p.

46. Quartapelle L. Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations / L. Quartapelle. – Springer, 1993. – 296 p.

47. Sahin M. A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem. Part I: High Reynolds number flow calculations / M. Sahin, R.G. Owens // *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2003. – No 42. – P. 57–77.

48. Salaün M. Low-order finite element method for the well-posed bidimensional Stokes problem / M. Salaün // *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2015. – No 35. P. 427–453.

49. Savel'ev A.D. Application of High Order Difference Operators in Numerical Simulation of Aerodynamic Problems / A.D. Savel'ev // *Mathematical Models and Computer Simulations*. – 2012. – Vol. 4, No. 6. – P. 80–94.

50. Si Zhiyong. Second order modified method of characteristics mixed defect-correction finite element method for time dependent Navier–Stokes problems / Zhiyong Si // *Numer. Algor.*, 2012. – No 59. – P. 271–300.

51. Sousa E. Effect of boundary vorticity discretization on explicit streamfunction vorticity calculations / E. Sousa, I.J. Sobey // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005. – No 49. – P. 371–393.

52. Tabata M. Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment / M. Tabata, S. Fujima // *Computational Fluid Dynamics*, 2004. – P. 177–182.

53. Tian Zhen F. An efficient compact difference scheme for solving the streamfunction formulation of the incompressible Navier–Stokes equations / Zhen F. Tian,

P.X. Yu // Journal of Computational Physics, 2011. – No 230. – P. 6404–6419.

54. Verfurth R. Finite element approximation on incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition / R. Verfurth // Numer. Math., 1986. – No 50. – 3. 697–721.

55. Volkov P.K. Finite Elements Method to Solve the Boundary Value Problems of Regularizing Equations for Incompressible Liquid Written for Velocity Pressure Variables // P.K. Volkov, A.V. Pereverzev // Mat. Model., 2003. – No 15 (3). P. 15–28.

56. Wessiling P. Principles of computational Fluid Dynamics / P. Wessiling. – Berlin: Springer, 2001. – 644 p.

57. Yueqiang Shang. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations for the transient Stokes equations / Yueqiang Shang, Kun Wang // Numer. Algor., 2010. – No 54. – P. 195–218.

58. Zeytounian R.K. Meteorological fluid dynamics / R.K. Zeytounian. – Berlin: Springer, 1991. – 356 p.

59. Zienkiewicz O.C. Finite elements in the solution of field problems / O.C. Zienkiewicz, K. Cheung // Engineer, 1965. – V. 200. – P. 507–510.

60. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor Vol. 1: The Basics. – Oxford: BH, 2000. – 689 p.; Vol. 2: Solid Mechsncics. – Oxford: BH, 2000. – 459 p.; Vol. 3: Fluid Dinamics. – Oxford: BH, 2000. – 334 p.

61. Агошков В.И. Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев / Под ред. Г.И. Марчука. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

62. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с; Т. 2. – 392 с.

63. Артемов В.И. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена в элементах теплотехнического и энергетического оборудования / В.И. Артемов, Г.Г. Яньков, В.Е. Карпов, М.В. Макаров // Теплоэнергетика. – 2000. – №7. – С. 52–59.

64. Артюх А.В. Применение метода R-функций и последовательных

приближений для расчета нестационарных вязких течений / А.В. Артюх // Материалы XVI Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2012. – Т. 10. – С. 133–134.

65. Артюх А.В. Численное моделирование конвекции в расплавленном стекле методами R-функций и Галёркина / Артюх А.В. // Збірник наукових праць Одинадцятій Всеукраїнської науково-технічної конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології». – Одеса, 2012. – С. 95.

66. Артюх А.В. Исследование нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (приближение Стокса) методами R-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2011. – № 3 (54). – С. 16–21.

67. Артюх А.В. Математическое моделирование и численный анализ нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости методами R-функций и Галёркина / А.В. Артюх // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 9–19.

68. Артюх А.В. Математическое моделирование и численный анализ течения в канавке подшипника методами R-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления.– 2012. – № 1037, вып. 20. – С. 11–17.

69. Артюх А.В. Математическое моделирование нестационарной конвекции в расплавленном стекле с помощью методов R-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013). – Харьков, Херсон, 2013. – С. 45–48.

70. Артюх А.В. Метод чисельного аналізу плоскопаралельних нестационарних в'язких течій / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – „APAMCS-2015”. – Львів, 2015. – С. 49–52.

71. Артюх А.В. Об одном подходе к математическому моделированию

и численному анализу гравитационной конвекции / А.В. Артюх // Материалы XVII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2013. – Т. 7. – С. 96–97.

72. Артюх А.В. Применение методов R-функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 2. – С. 5–12.

73. Артюх А.В. Про один підхід до чисельного аналізу нестационарних в'язких течій / А.В. Артюх // Матеріали Чотирнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2012. – Т. I. – С. 64.

74. Артюх А.В. Тестовая задача расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области (линейное приближение) / А.В. Артюх // Материалы XIX Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2015. – Т. 7. – С. 44–45.

75. Артюх А.В. Чисельне моделювання нестационарної гравітаційної конвекції (у лінійному наближенні) методом R-функцій / А.В. Артюх // Тези доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської (Одинадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2013”. – Львів, 2013. – С. 91–93.

76. Артюх А.В. Чисельне моделювання нестационарної течії теплопровідної рідини методами R-функцій та Гальоркіна (нелінійна задача) / А.В. Артюх // Тези доповідей Вісімнадцятої Всеукраїнської (Тринадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2015”. – Львів, 2015. – С. 70–72.

77. Артюх А.В. Чисельний аналіз нестационарних течій Стокса методом R-функцій / А.В. Артюх // Тези доповідей П'ятнадцятої Всеукраїнської (Десятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2012”. – Львів, 2012. – С. 202–204.

78. Артюх А.В. Численное исследование естественной конвекции в замкнутой области с теплопроводными стенками методами R-функций и Галеркина /

Артюх А.В. // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XXXIX Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва, 2013. – Т. 5. – С. 30–32.

79. Артюх А.В. Численный анализ гравитационной конвекции методами последовательных приближений, R-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XXXVIII Гагаринские чтения» в 8 томах. – Москва, 2012. – Т. 5. – С. 37–38.

80. Артюх А.В. Численный анализ линеаризованной задачи расчета нестационарного течения теплопроводной несжимаемой жидкости в различных областях методами R-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XL Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва, 2014. – Т. 5. – С. 53–55.

81. Артюх А.В. Численный анализ нестационарного течения в канавке подшипника методами последовательных приближений, R-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Материалы Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии». – Морское, Харьков, 2012. – С. 17.

82. Артюх А.В. Численный анализ нестационарных линеаризованных задач вязкой теплопроводной жидкости / А.В. Артюх, И.Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. – 2012. – № 3 (58). – С. 22–28.

83. Артюх А.В. Численный анализ течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной геометрии (линейное приближение) / А.В. Артюх // Материалы XVIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2014. – Т. 7. – С. 54–55.

84. Бабушкин И.А. Принципы регистрации инерционных сигналов с помощью конвективных датчиков / И.А. Бабушкин, В.А. Демин, Д.В. Пепеляев // Известия Томского политехнического университета, 2010. – Т. 317, № 4. – С. 38–43.

85. Белоносов С.М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, К.А. Черноус. – М.: Наука, 1985. – 312 с.

86. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – М.: Физматлит, 1994. – 448 с.

87. Берковский Б.М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б.М. Берковский, В.К. Полевиков. – Минск: Университетское, 1988. – 168 с.
88. Богословский Н.Н. Параллельная реализация алгоритма вычислительной гидродинамики SIMPLE / Н.Н. Богословский, А.О. Есаулов, А.В. Старченко // Сибирская школа семинар по параллельным вычислениям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – С. 118–124.
89. Буряк Я.Й. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів / Я.Й. Буряк, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – К.: Наук. думка, 2006. – 272 с.
90. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор – М.: Мир, 1973. – 778 с.
91. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 156 с.
92. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк – М.: Мир, 1986. – 184 с.
93. Василенко С.М. Основи тепломасообміну / С.М. Василенко, А.І. Українець, В.В. Олішевський. – К.: НУХТ, 2004. – 250 с.
94. Вержбицкий В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
95. Винников В.В. Применение декартовых сеток для решения уравнений Навье-Стокса в областях с криволинейными границами / В.В. Винников, Д.Л. Ревизников // Матем. моделирование, 2005. – Т. 17, № 8. – С. 15–30.
96. Виноградова П.В. Проекционный и проекционно-разностный методы решения уравнений Навье–Стокса / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин, Ю.О. Суэтина // Ж. вычисл. матем. И матем. физ., 2011. – Т. 51, № 5. – С. 898–912.
97. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.
98. Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для квазилинейных уравнений четвертого порядка / С.А. Войцеховский // Вычисл. и прикл. матем. – № 51. – К., 1983. – С. 42–50.

99. Волков К.Н. Преобусловливание уравнений Навье–Стокса в расчетах свободно-конвективных течений / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, А.Г. Карпенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – М., 2015. – Т. 55, № 12. – С. 2109–2122.

100. Галактіонов О.С. Хаотична адвекція у плоских стоксових течіях в прямокутній порожнині з циліндром всередині. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми / Галактіонов Олексій Сергійович; Ін-т гідромеханіки НАН України. – К., 1995. – 16 с.

101. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

102. Деги Д.В. Численное решение уравнений Навье–Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой / Д.В. Деги, А.В. Старченко // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2012. – № 2(18). – С. 88–98.

103. Дунаєва Т.А. Перемішування в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса у скінчених двовимірних областях. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми / Дунаєва Тамара Альбінівна; Ін-т гідромеханіки НАН України. – К., 2002. – 20 с.

104. Ермаков М.К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье–Стокса / М.К. Ермаков // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2010. – Т. 9. – С. 1–8.

105. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике / В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 496 с.

106. Захаренков М.Н. Единственность давления при решении уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока и завихренность / М.Н. Захаренков // Матем. моделирование, 1998. – Т. 10, № 1. С. 3–10.

107. Исаев В.И. Варианты метода коллации и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Навье – Стокса / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // ЖВМ и МФ, 2010. – Т. 50. № 10. – С. 1758–1770.

108. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512с.

109. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа /

Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

110. Кафаров В.В. Основы массопередачи / В.В. Кафаров. – М.: Высш. школа, 1979. – 439с.

111. Кирко И.М. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем / И.М. Кирко, Г.Е. Кирко. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований, 2009. – 632 с.

112. Колодяжный В.М. Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач: Препр. / В. М. Колодяжный, В. А. Рвачев / АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; 10. – Харьков: 1975. – 75 с.

113. Колосова С.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости / С.В. Колосова, М.В. Сидоров // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. – 2003. – № 602. – С. 61–67.

114. Колосова С.В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе / С.В. Колосова // Прикл. мех. – 1971. – № 7. – В. 10. – С. 100–105.

115. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к.ф.-м.н.: 01.01.07 – вычислительная математика / Колосова Светлана Васильевна; Харьковский ин-т радиоэлектроники. – Харьков, 1972. – 85 с.

116. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.

117. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Канн. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

118. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – Ч. 2. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 728 с.

119. Кравченко В.Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.

120. Кравченко В.Ф. Булева алгебра и методы аппроксимации в

краевых задачах электродинамики / В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб. – М.: Физматлит, 2004. – 308 с.

121. Кузнецов Г.В. Численное моделирование температурных полей узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет // Микроэлектроника, 2009. – Т. 38, № 5. – С. 344–352.

122. Куттыкожаева Ш.Н. Об одном численном методе решения уравнения Стокса / Ш.Н. Куттыкожаева, А.А. Наурызбаева // Современные наукоемкие технологии, 2012. – № 7. – С. 27–28.

123. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

124. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

125. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – М.: РХД, 2003. – Т. 1, 452 с.; Т. 2, 452 с.

126. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.

127. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

128. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / О.М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.

129. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

130. Лыков А.В. Конвекция и тепловые волны / А.В. Лыков, Б.М. Берковский. – М.: Энергия, 1974. – 336 с.

131. Максименко-Шейко К.В. R-функції в математичному моделюванні геометричних об'єктів та фізичних полів : автореф. дис ... д-ра техн. наук : 01.05.02 / К.В. Максименко-Шейко. – Харків, 2012. – 40 с.

132. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим с пристеночными витковыми вставками методом R-функций / К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко // Мат.

методи та фіз.-мех. поля. – Львів, 2005. – Т. 48, № 1. – С. 163–169.

133. Максименко-Шейко К.В. Моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам методом R-функций / К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко // Электронное моделирование. – К., 2005. – Т. 27, № 1. – С. 31–43.

134. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций / К.В. Максименко-Шейко // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41–46.

135. Максименко-Шейко К.В. Математичне моделювання фізико-математичних полів з гвинтовим типом симетрії методом R-функцій. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи / Максименко-Шейко Кирило Володимирович; Ін-т проблем машинобудування НАН України. – Харків, 2003. – 18 с.

136. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

137. Матеева Э.Й. Решение уравнений Навье-Стокса в сложных областях. Авторед. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 – вычислительная математика. – М., 1972. – 8 с.

138. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб и др. – М.: Наука, 1987. – 272 с.

139. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

140. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

141. Ноубл Ж. Математическое и экспериментальное моделирование циркуляционного движения в расплаве стекла / Ж. Ноубл, Л. Кломбург // Теплопередача. – 1972. – Т.94. №2. – С.23–30.

142. Орунханов М.К. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-

Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями / М.К. Орунханов, Ш. Смагулов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 46–53.

143. Остроумов Г.Л. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи / Г.Л. Остроумов. – М., 1952. – 286 с.

144. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. / С. Патанкар – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

145. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т.Д. Тейлор. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 352 с.

146. Пирсон К.Е. Численный метод для задач вязкого потока / К.Е. Пирсон // Механика. – 1965. – № 6 (94). – С. 65–77.

147. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

148. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

149. Рвачев В.Л. Метод R -функций в задаче о течении Гартмана / В.Л. Рвачев, А.Л. Корсунский, Т.И. Шейко // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 2. – С. 64–69.

150. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физики / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1974. – 260 с.

151. Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.

152. Рвачев В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов / В.Л. Рвачев // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 153, №4. – С. 765–768.

153. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

154. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R -функций в системе “Поле-3” / В.Л. Рвачев, И.Г. Суворова,

Т.И. Шейко // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 95–99.

155. Рвачов В.Л. Деякі нові конструктивні засоби методу R -функцій / В.Л. Рвачов, Ф.Ф. Коваль, Г.П. Манько // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – №8. – С. 691–694.

156. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

157. Рябенский В.С. Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока / В.С. Рябенский, В.А. Торгашов // Мат. моделирование. – 1996. – 8, № 8. – С. 100–112.

158. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 224 с.

159. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 784 с.

160. Самарский А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

161. Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей / В.К. Саульев // Сибирский математический журнал. 1963. – Т. 4, № 4. – С. 912–925.

162. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми / І.В. Сергієнко. – К.: Нак. думка, 1999. – 354 с.

163. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин. – М.: ИЛ, 1963. – 256 с.

164. Сидняев Н.И. О точности разностной схемы для уравнений Навье-Стокса / Н. И. Сидняев, Н. М. Гордеева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – Самара, 2014. – Вып. 1(34). – С. 156–167.

165. Сидоров М.В. Застосування паралельних обчислень та технології NVIDIA CUDA до розв'язання крайових задач математичної фізики варіаційними методами / М.В. Сидоров, А.В. Шишка // Вестник ХНУ им. В.Н.

Каразина. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2011. – № 987, вып. 18. – С. 99–106.

166. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С. 52–54.

167. Сидоров М.В. Об одном подходе к численному моделированию конвективных вязких течений в односвязных и многосвязных областях / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – № 4. – С. 55–57.

168. Сидоров М.В. Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – №1. – С. 42–44.

169. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №4. – С. 77–78.

170. Слесаренко А.П. R-функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения / А.П. Слесаренко, Д.А. Котульский // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 3 – 4. – С. 72–78.

171. Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Н.Слободецкий // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. – 1958. – Т. 197. – С. 54–112.

172. Смагулов Ш.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости / Ш.С. Смагулов, Н.М. Темирбеков, К.С. Камаубаев // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. – Т. 3, №1. – С. 57–71.

173. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

174. Стрельченко А.Й. Про один метод розв'язування крайових задач / А.Й. Стрельченко, С.В. Колосова, В.Л. Рвачов // Доп. АН УРСР, сер. А.– 1972. – № 9. – С. 837–839.

175. Суворова И.Г. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода R -функций / И.Г. Суворова, О.В. Кравченко, И.А. Баранов // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – Львів, 2011. – Т. 54, № 2. – С. 139–149.

176. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы / И.Г. Суворова // Вестн. НТУ ХПИ. – Харьков. – 2004. – № 31. – С. 141–148.

177. Суворова І.Г. Метод R -функцій у дослідженнях та розрахунках фізико-механічних полів для задач будівництва. Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.13.16 – Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях / Суворова Ірина Георгіївна; Ін-т проблем машинобудування НАН України. – Харків, 1993. – 26 с.

178. Тевяшев А.Д. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях / А.Д. Тевяшев, Н.В. Гибкина, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 50–57.

179. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

180. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.

181. Федотова Е.А. Атомарная и сплайн-аппроксимация решений краевых задач математической физики. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 – вычислительная математика / Федотова Елена Александровна; АН УССР. Ин-т пробл. машиностр. – Харьков, 1985. – 170 с.

182. Федотова Е.А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программирующих системах серии “Поле”: Препр. / Е.А. Федотова / АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; 202. – Харьков: 1984. – 60 с.

183. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. –Т. 1. – 504 с.; Т. 2. – 552 с.

184. Фомин А.А. Численное решение уравнений Навье–Стокса при

моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости / А.А. Фомин, Л.Н. Фомина // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2014. – № 3(29). – С. 94–108.

185. Фромм Дж. Неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости / Дж. Фромм // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 343–381.

186. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

187. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / А.Д. Госмен, В.М. Пан, А.К. Ранчел и др. – М.: Мир, 1972. – 326 с.

188. Чуешов И.Д. Методические указания «Некоторые операторные методы в математической физике» / И.Д. Чуешов. – Харьков, 1980. – 52 с.

189. Шеремет М.А. Математическое моделирование естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с теплопроводными стенками конечной толщины / М.А. Шеремет // Физ-Мат. 2011. – № 1-2. – С. 3–8.

190. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена / Д. Ши. – М.: Мир, 1988. – 544 с.

191. Шкадов В.Я. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов. – М.: Изд-во Моск. у-та, 1984. – 200 с.

192. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости / Ю.Д. Шмыглевский. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 232 с.

193. Шурина Э.П. Анализ алгоритмов методов конечных элементов и конечного объема на неортогональных сетках при решении уравнений Навье – Стокса / Э.П. Шурина, Т.В. Войтович // ЖВТ, 1997. – №4. – С. 84–104.

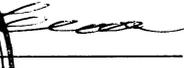
194. Ясинский Ф.Н. О решении уравнения Навье-Стокса в переменных «функция тока – вихрь» на многопроцессорной вычислительной машине с использованием системы CUDA / Ф.Н. Ясинский, А.В. Евсеев // Вестник ИГЕУ, 2010. – Вып. 3. – С. 1–4.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Акт внедрения

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з навчально-педагогічної роботи
Харківського національного
університету радіоелектроніки



 проф. Н.С. Лесна

 2015 р.

про використання результатів дисертаційної роботи

Артюха Антона Володимировича

„Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R -функцій
нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини”

Ми, що нижче підписалися, начальник відділу організації навчального процесу ХНУРЕ доц. Волошина Н.О., завідувач кафедри прикладної математики, професор Тевяшев А.Д., професор кафедри прикладної математики Колосова С.В. склали цей акт про те, що результати кандидатської дисертаційної роботи Артюха Антона Володимировича впроваджені у навчальний процес на кафедрі прикладної математики в дисциплінах „Вибрані глави математичної фізики”, „Конструктивні засоби математики”, „Теорія R -функцій та її застосування” та „Чисельні методи”, а також у курсовому та дипломному проектуванні.

Начальник відділу організації
навчального процесу



Н.О. Волошина

Завідувач кафедри
прикладної математики



А.Д. Тевяшев

Професор кафедри
прикладної математики

С.В. Колосова

Згідно з оригіналом

Секретар вченої ради Д 64.052.02



Л.В. Колесник

Приложение Б

Результаты вычислительного эксперимента для задачи Стокса

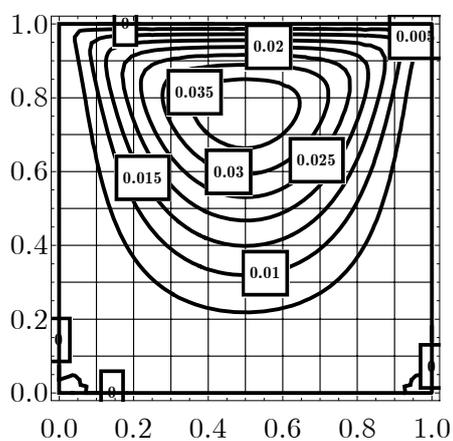


Рисунок Б.1 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

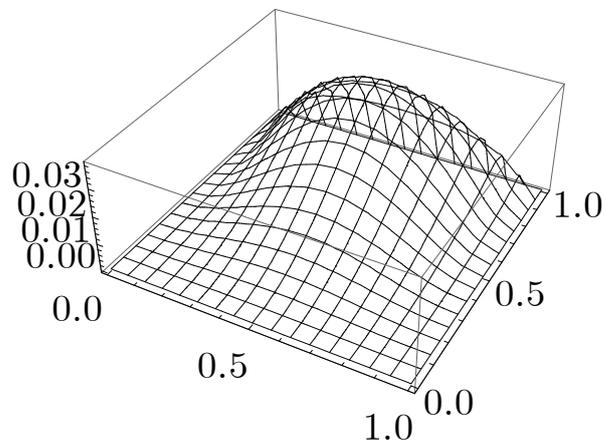


Рисунок Б.4 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

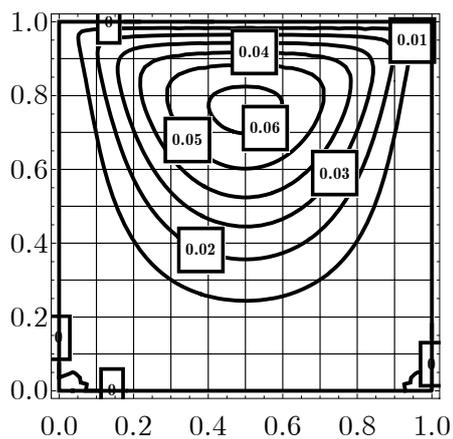


Рисунок Б.2 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

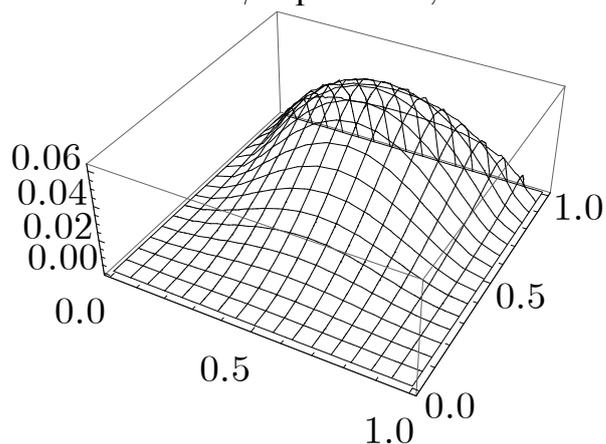


Рисунок Б.5 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

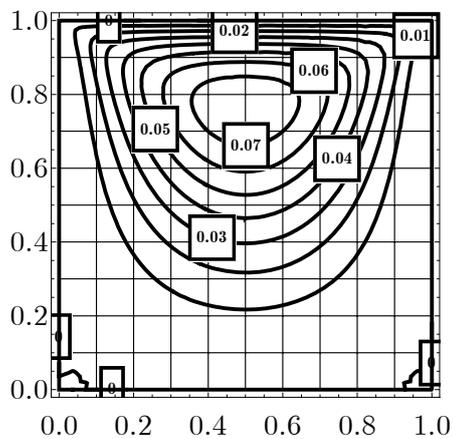


Рисунок Б.3 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

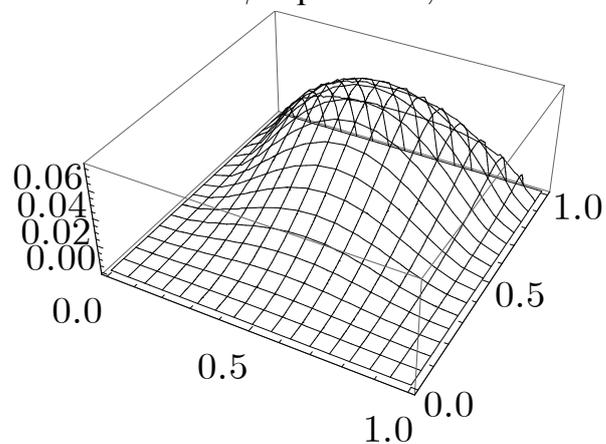


Рисунок Б.6 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

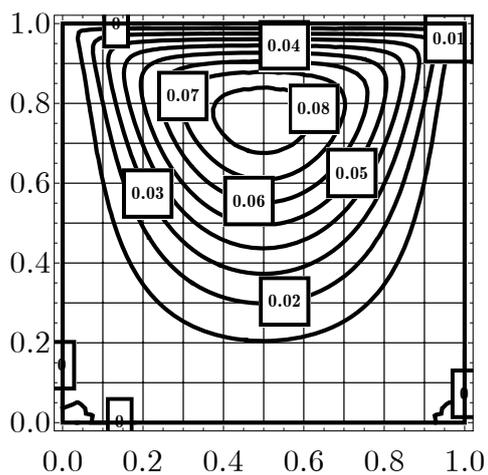


Рисунок Б.7 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

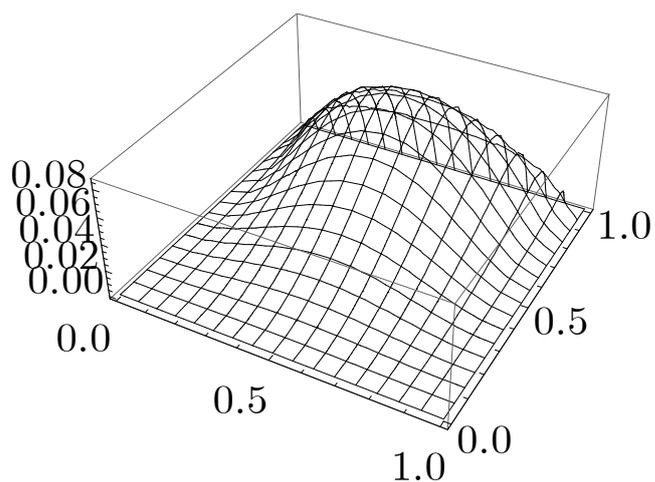


Рисунок Б.10 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

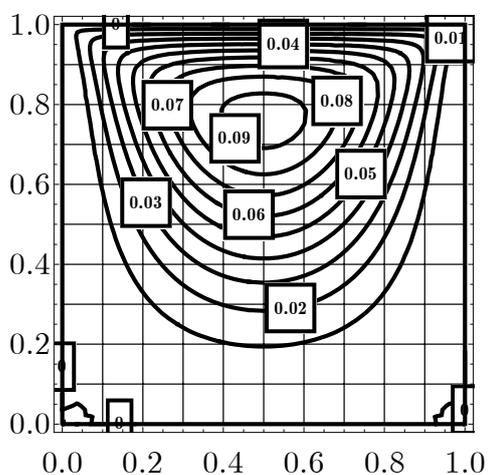


Рисунок Б.8 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

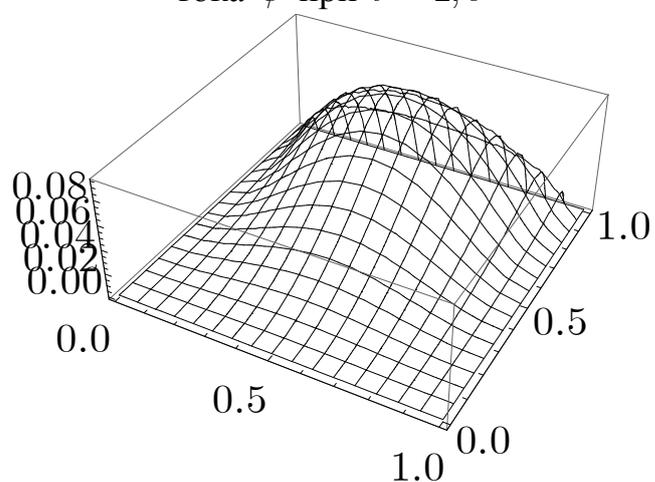


Рисунок Б.11 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

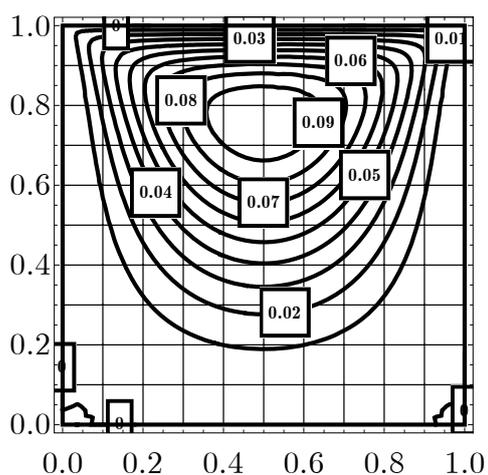


Рисунок Б.9 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

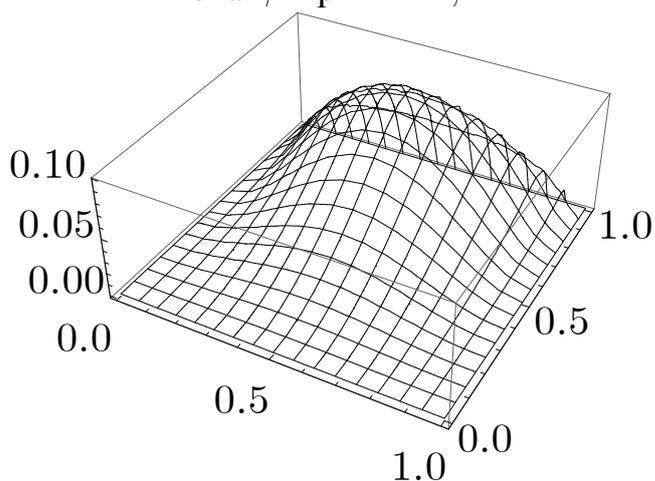


Рисунок Б.12 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

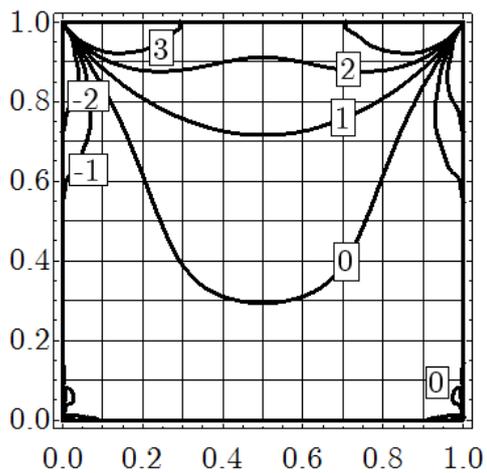


Рисунок Б.13 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

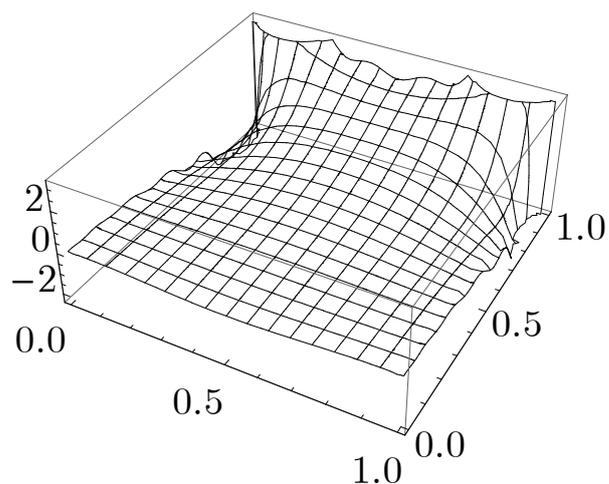


Рисунок Б.16 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

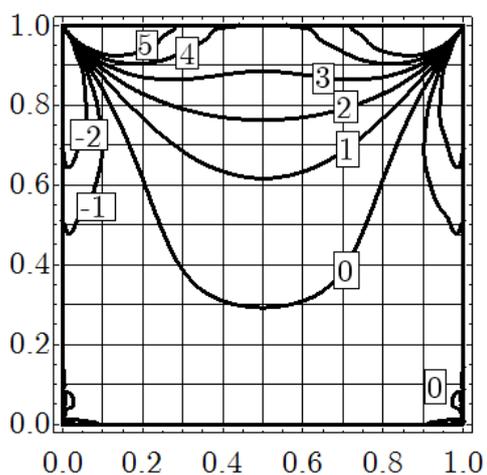


Рисунок Б.14 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

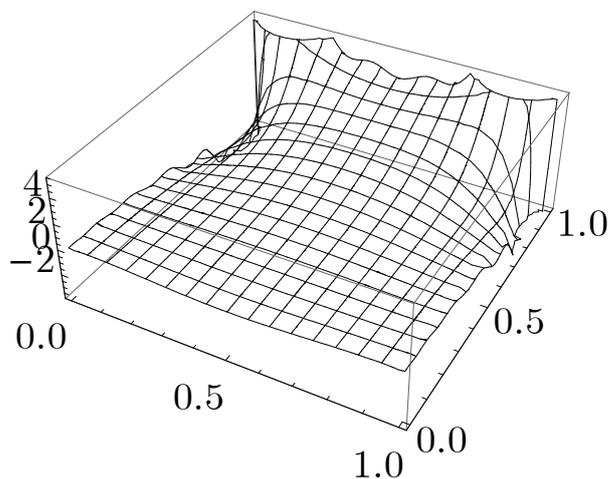


Рисунок Б.17 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

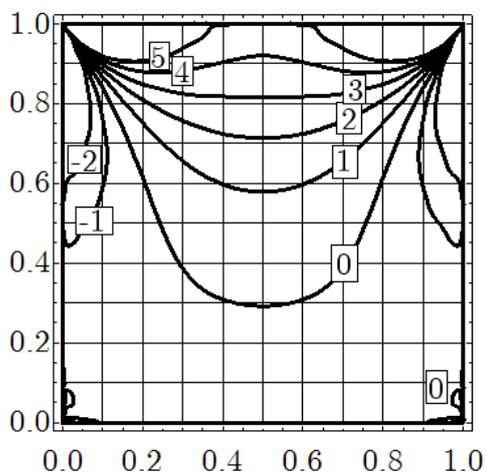


Рисунок Б.15 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

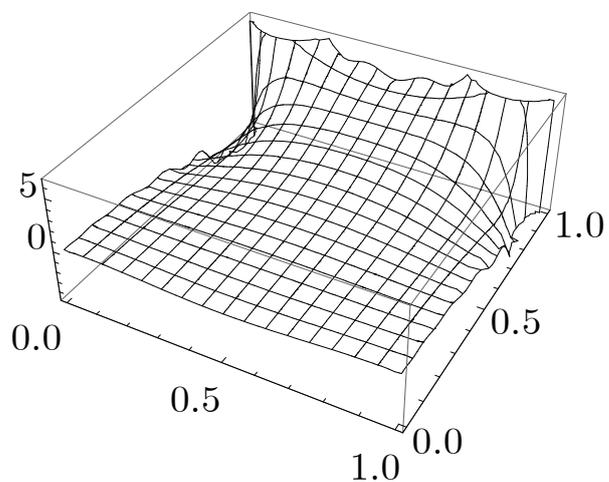


Рисунок Б.18 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

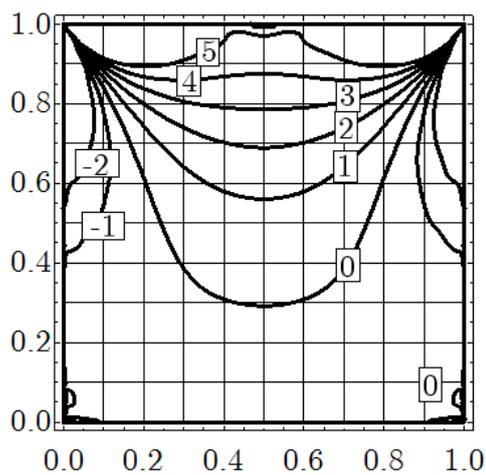


Рисунок Б.19 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

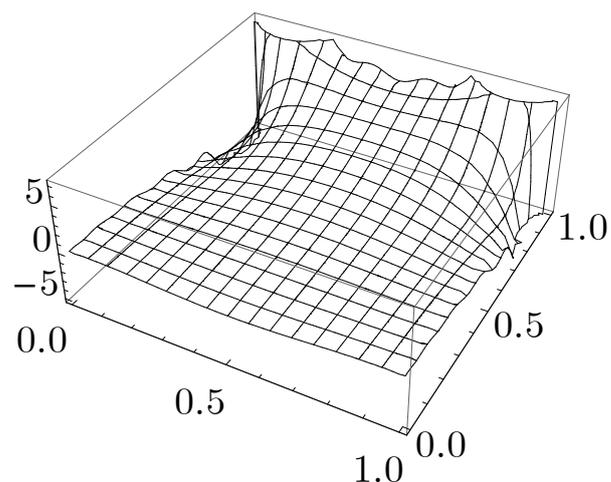


Рисунок Б.22 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

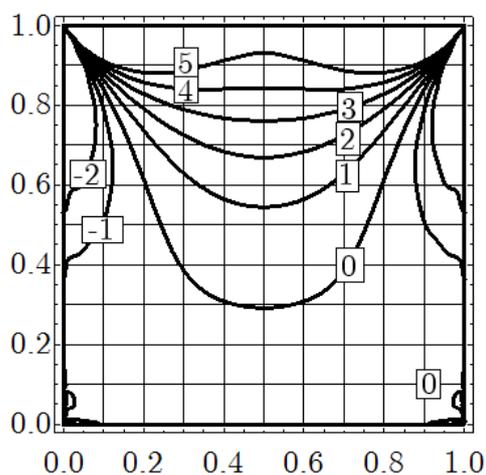


Рисунок Б.20 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

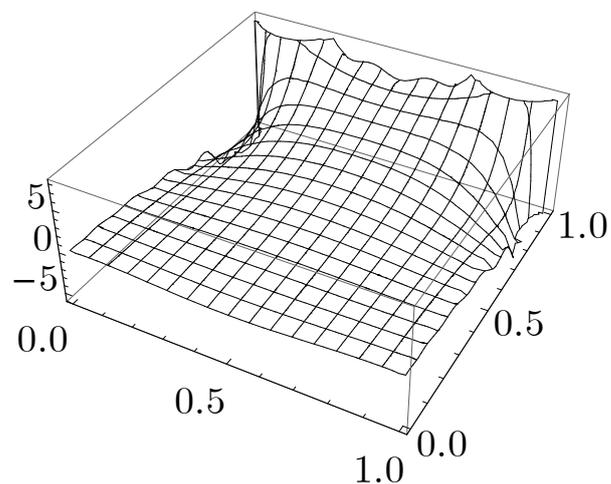


Рисунок Б.23 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

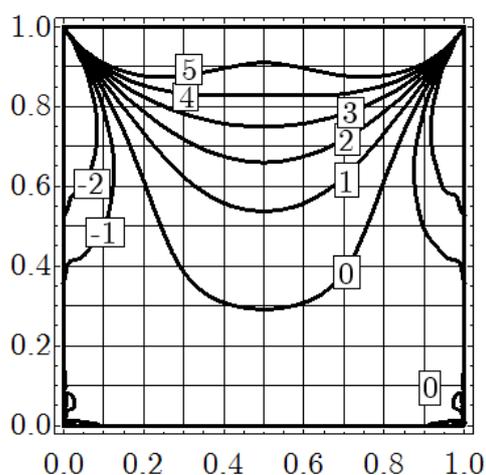


Рисунок Б.21 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

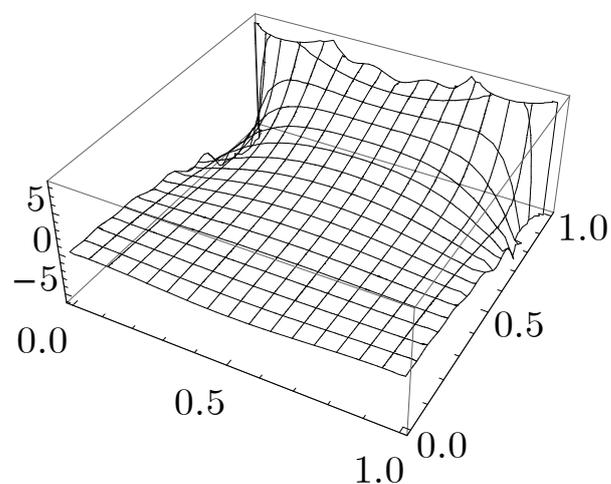


Рисунок Б.24 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

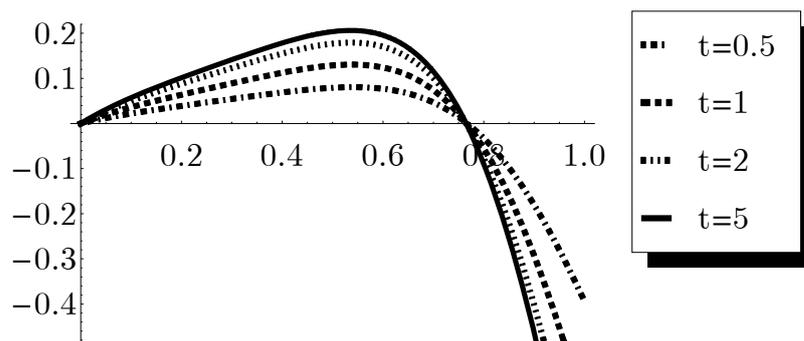


Рисунок Б.25 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени

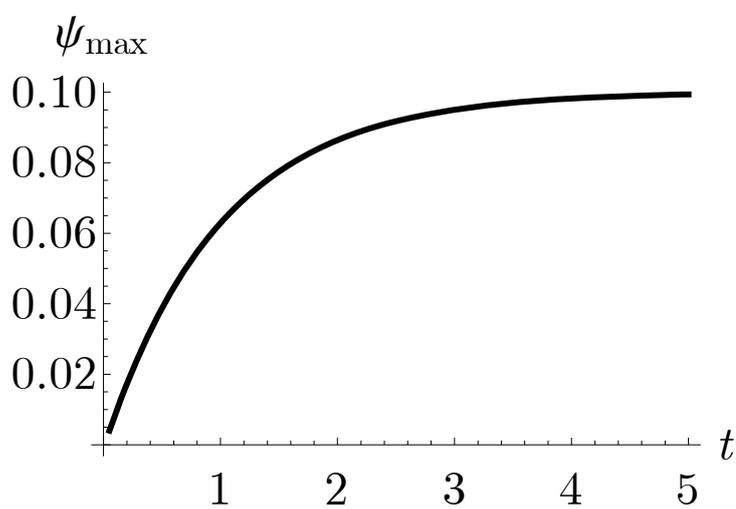


Рисунок Б.26 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

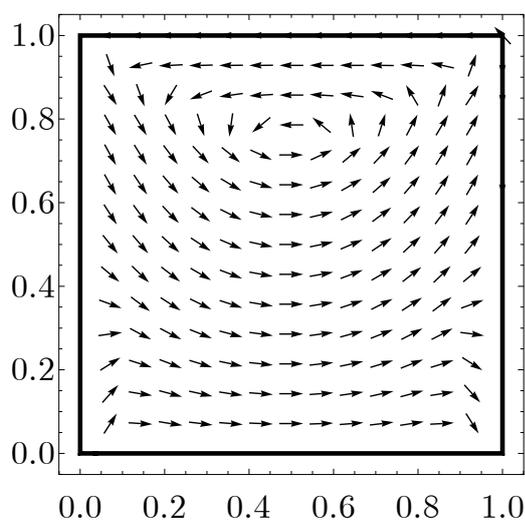


Рисунок Б.27 – Векторное поле скоростей

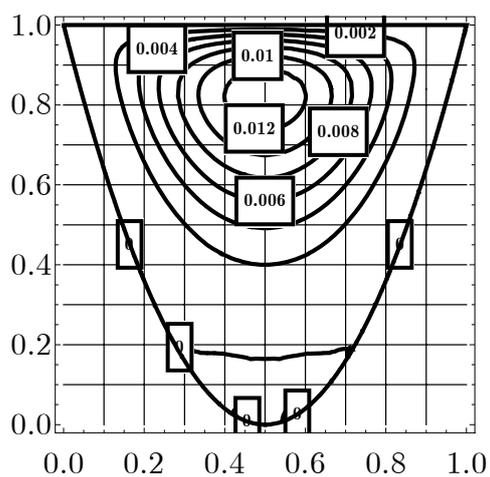


Рисунок Б.28 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

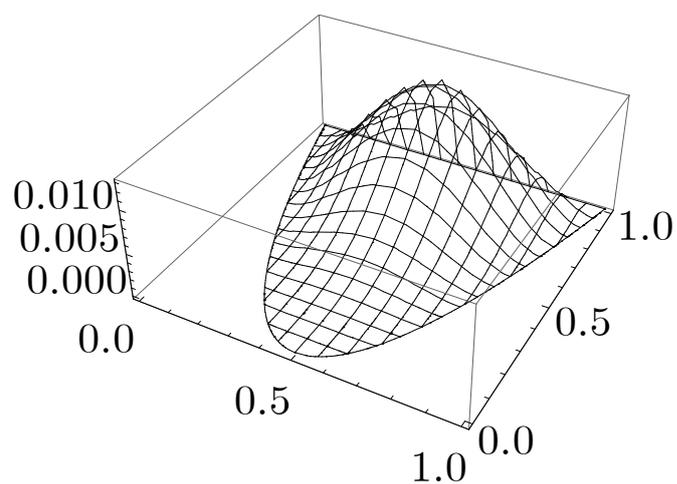


Рисунок Б.31 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

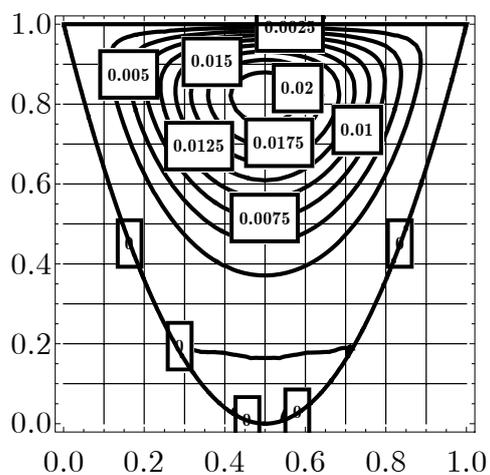


Рисунок Б.29 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

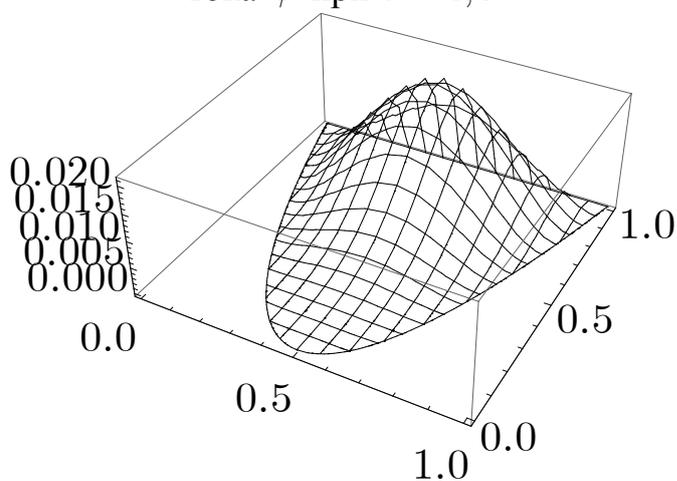


Рисунок Б.32 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

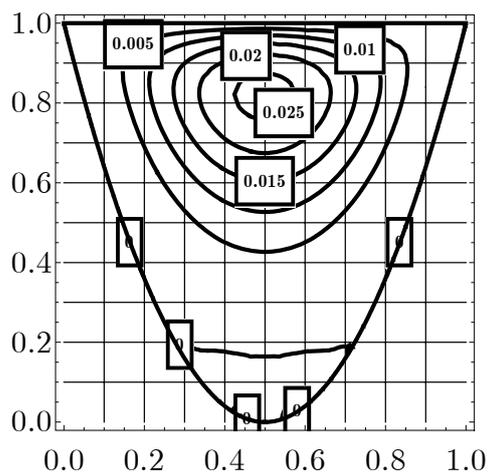


Рисунок Б.30 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

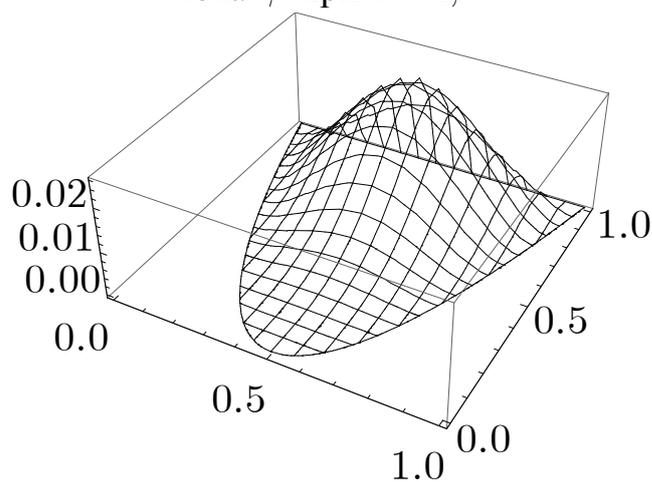


Рисунок Б.33 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

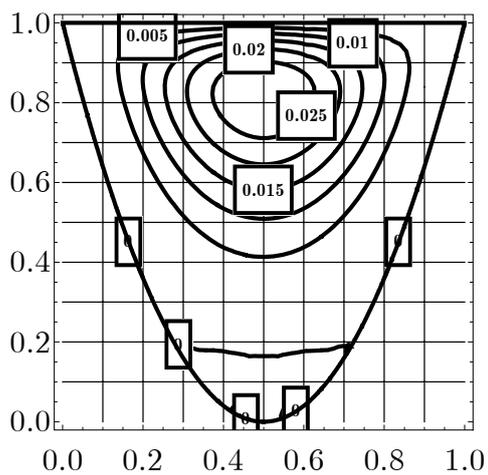


Рисунок Б.34 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

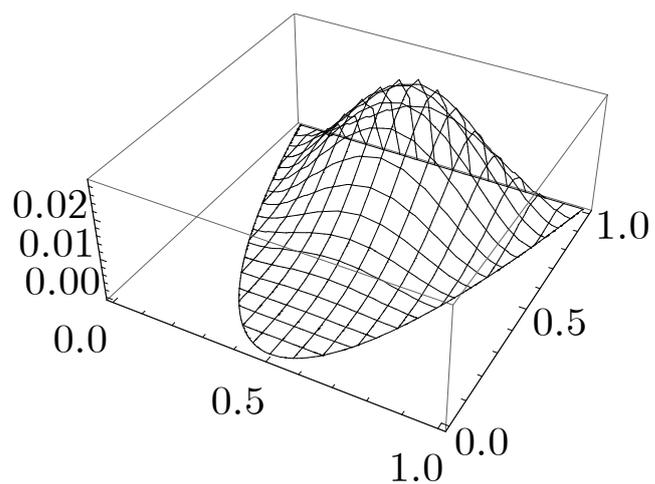


Рисунок Б.37 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

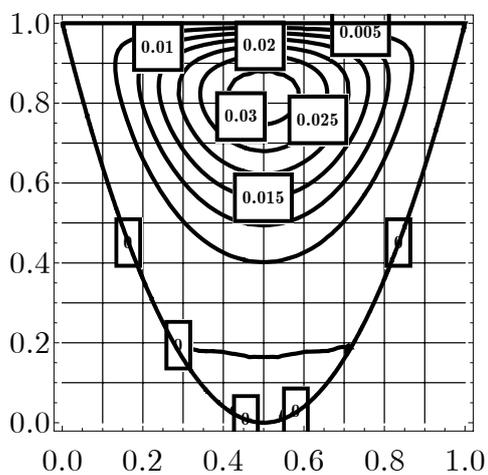


Рисунок Б.35 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

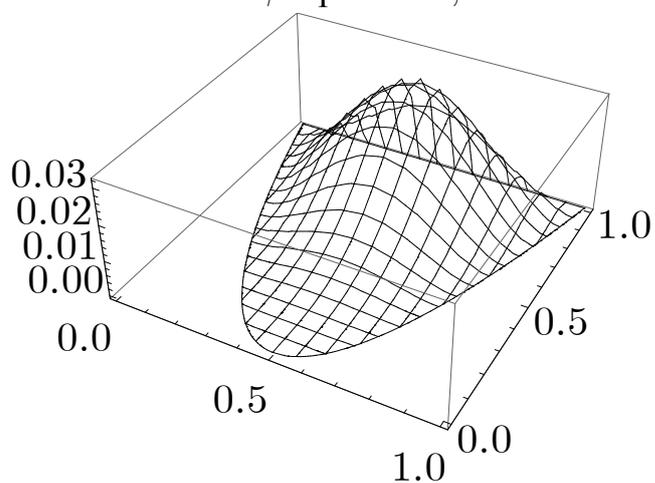


Рисунок Б.38 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

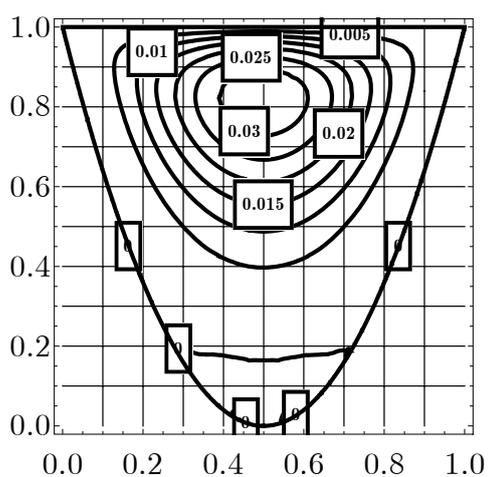


Рисунок Б.36 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

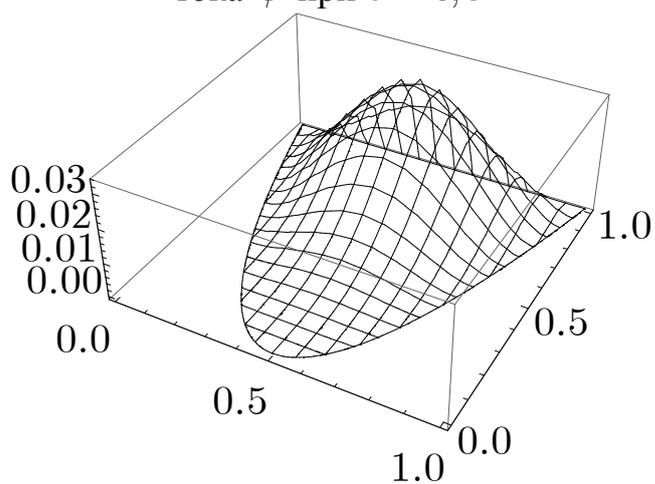


Рисунок Б.39 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

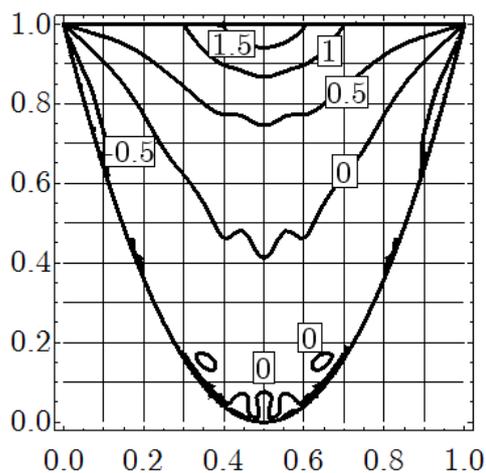


Рисунок Б.40 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

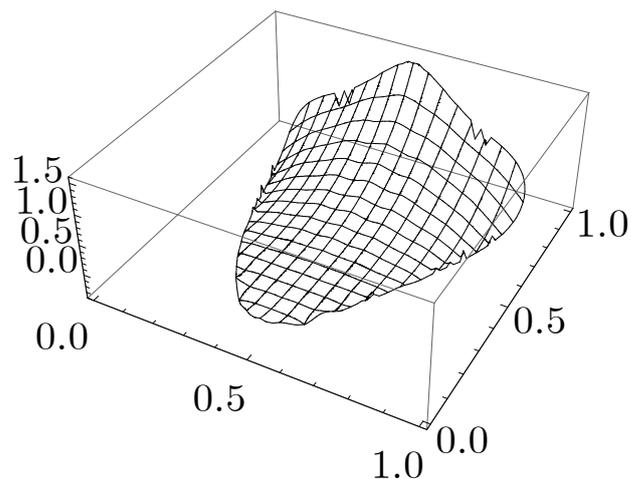


Рисунок Б.43 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

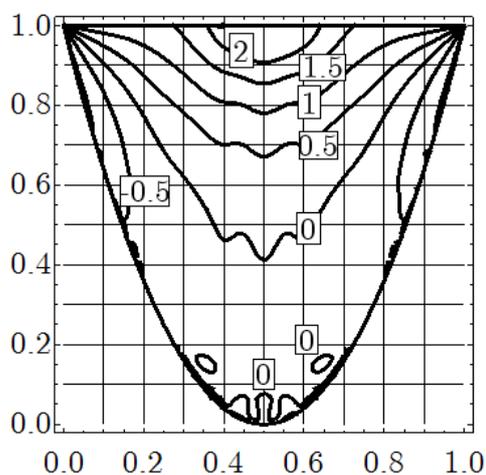


Рисунок Б.41 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

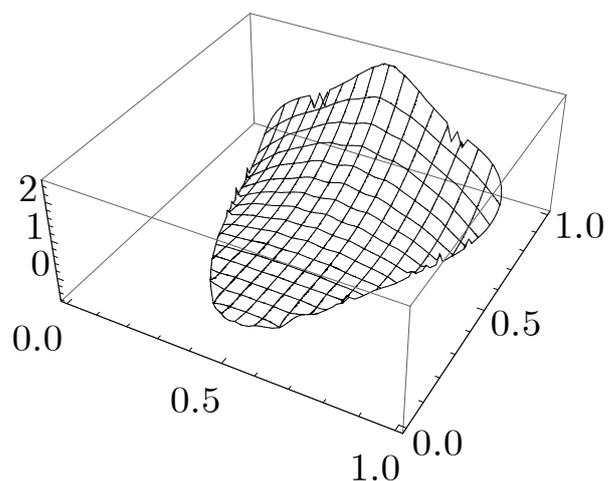


Рисунок Б.44 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

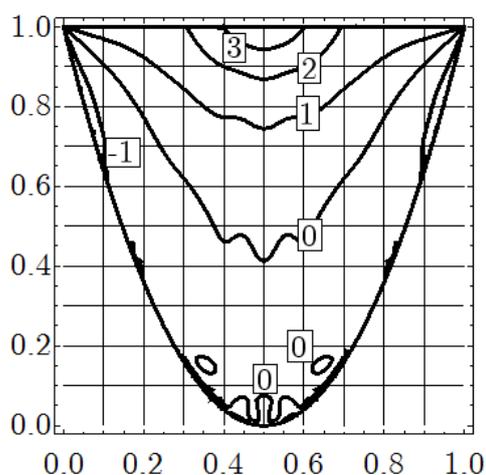


Рисунок Б.42 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

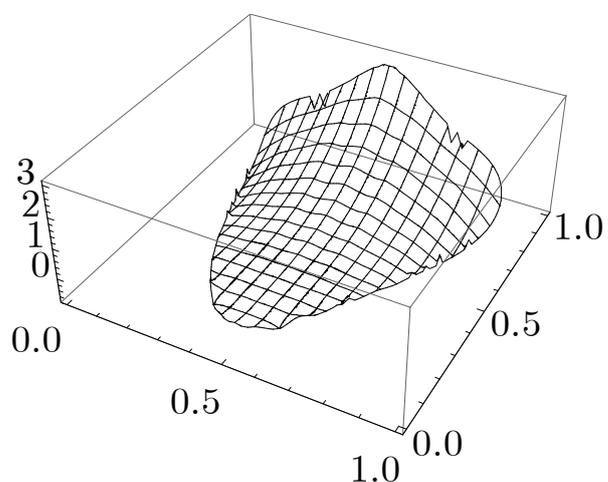


Рисунок Б.45 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

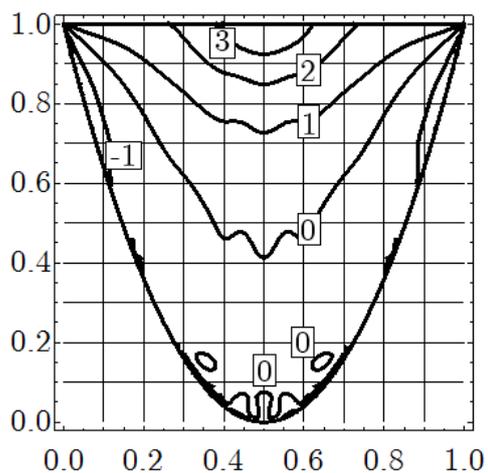


Рисунок Б.46 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

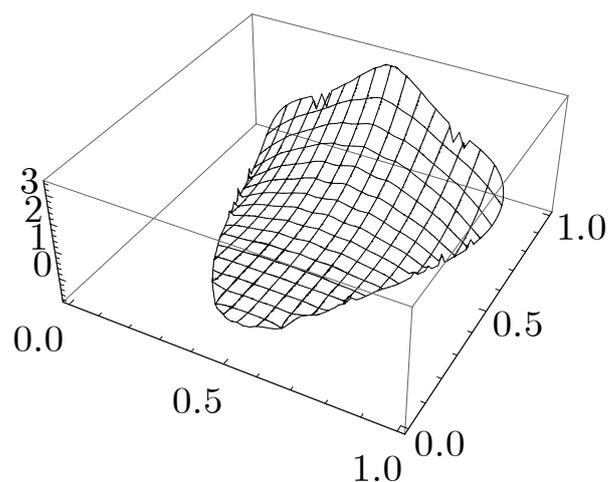


Рисунок Б.49 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

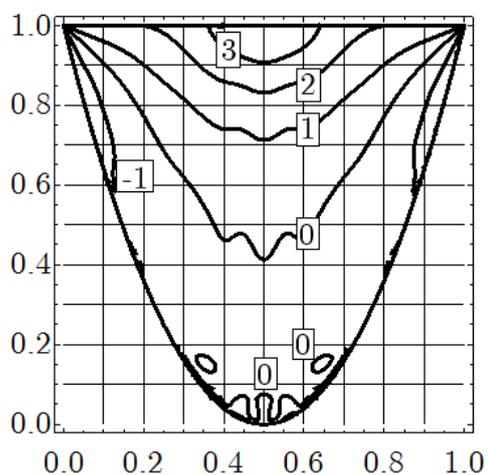


Рисунок Б.47 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

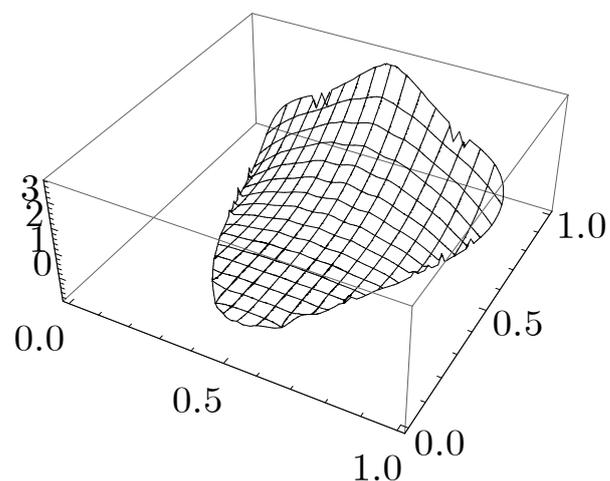


Рисунок Б.50 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

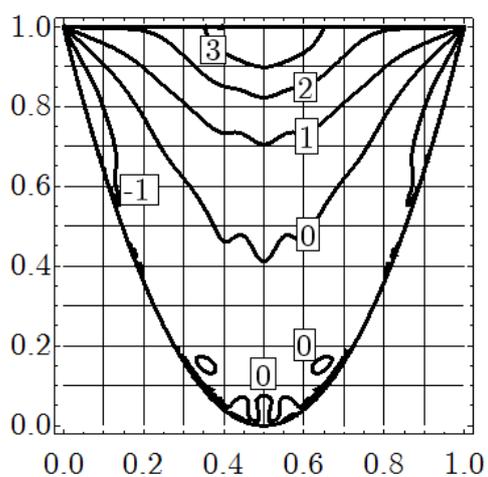


Рисунок Б.48 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

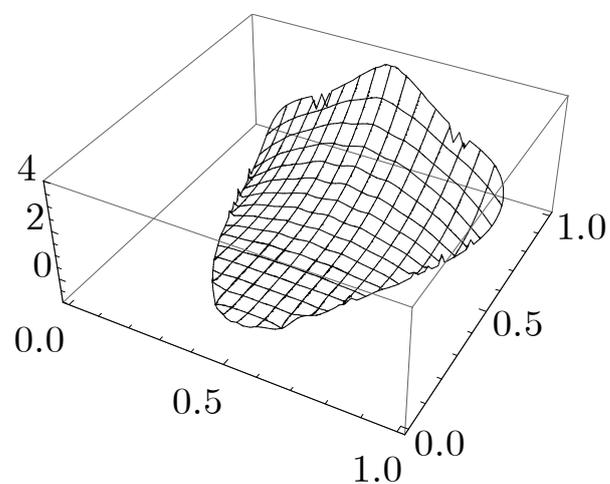


Рисунок Б.51 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

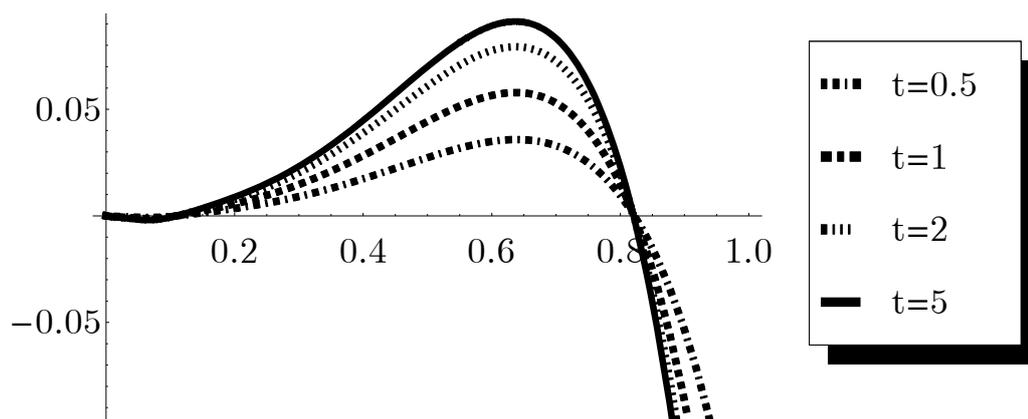


Рисунок Б.52 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени

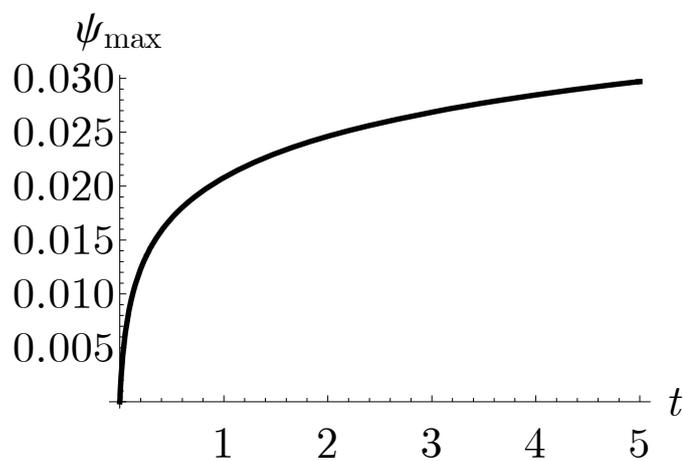


Рисунок Б.53 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

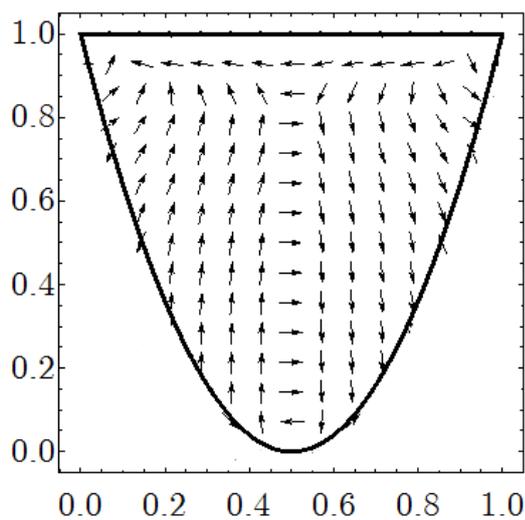


Рисунок Б.54 – Векторное поле скоростей

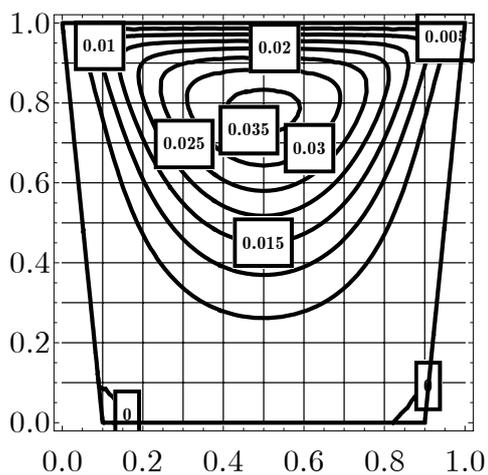


Рисунок Б.55 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

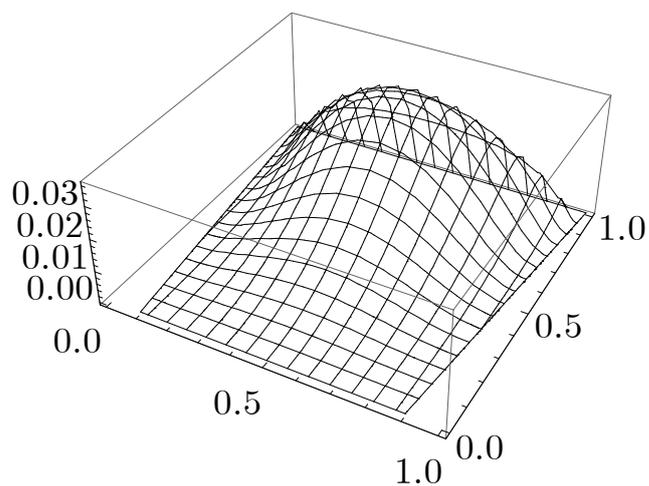


Рисунок Б.58 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

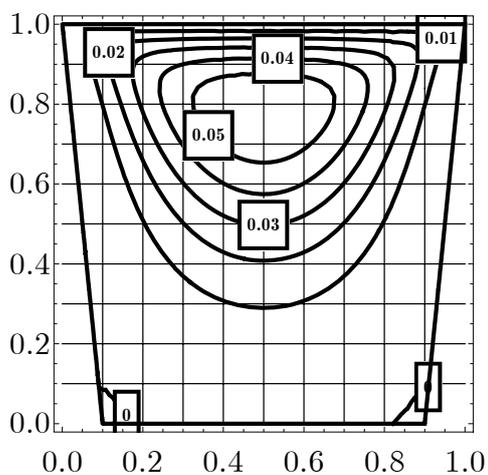


Рисунок Б.56 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

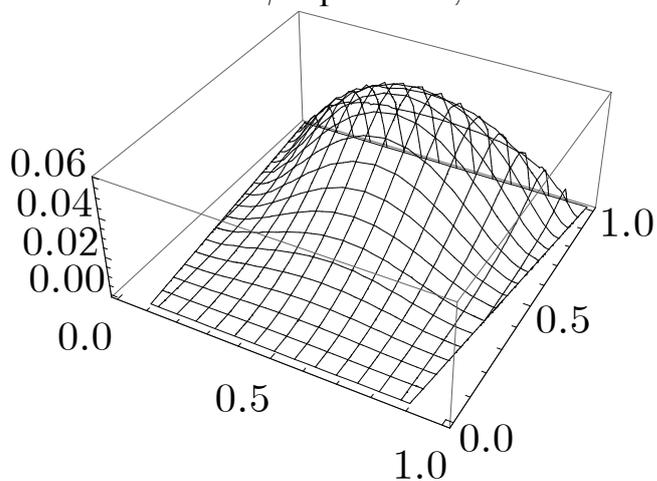


Рисунок Б.59 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

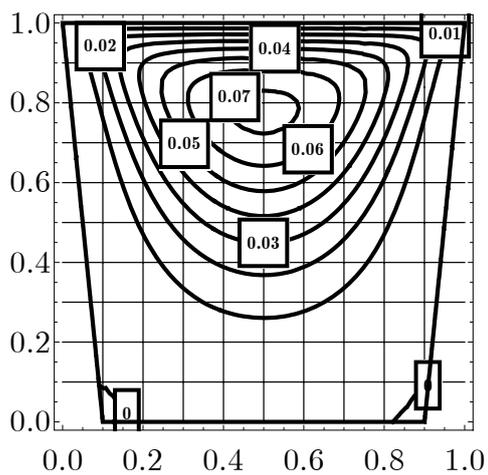


Рисунок Б.57 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

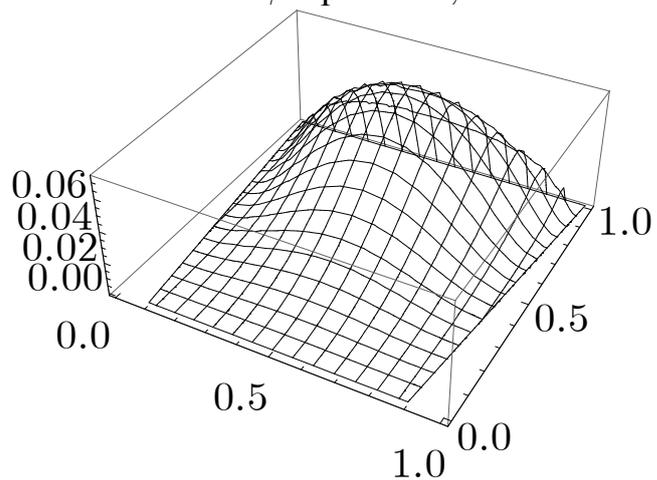


Рисунок Б.60 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

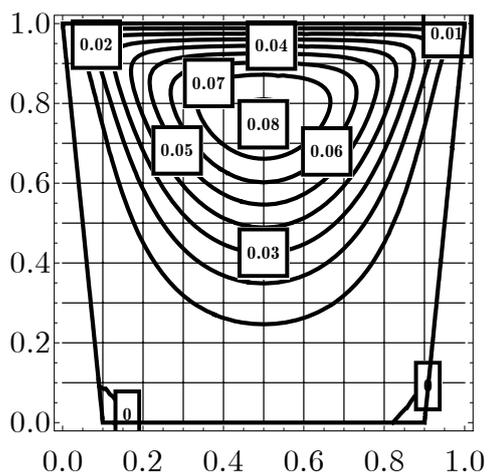


Рисунок Б.61 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

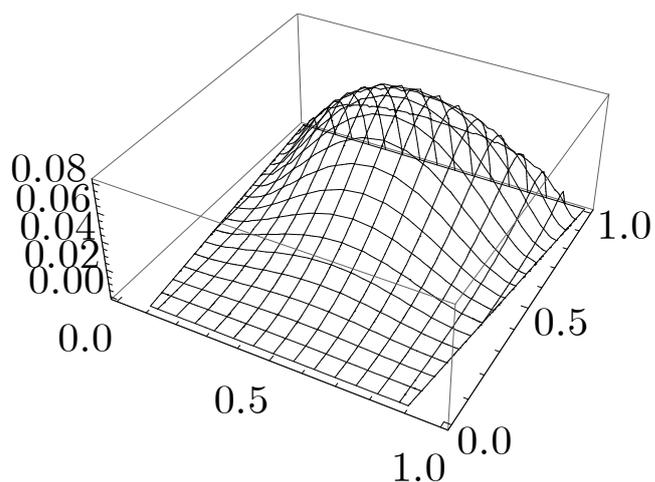


Рисунок Б.64 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

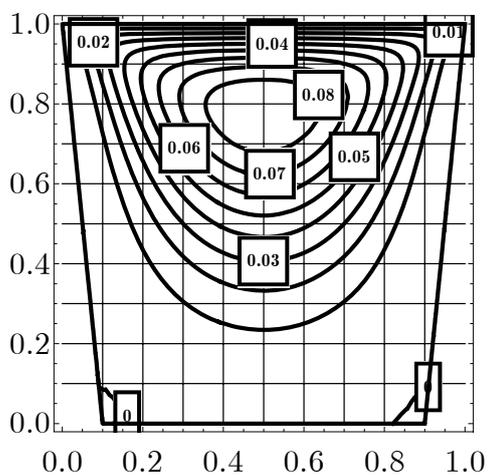


Рисунок Б.62 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

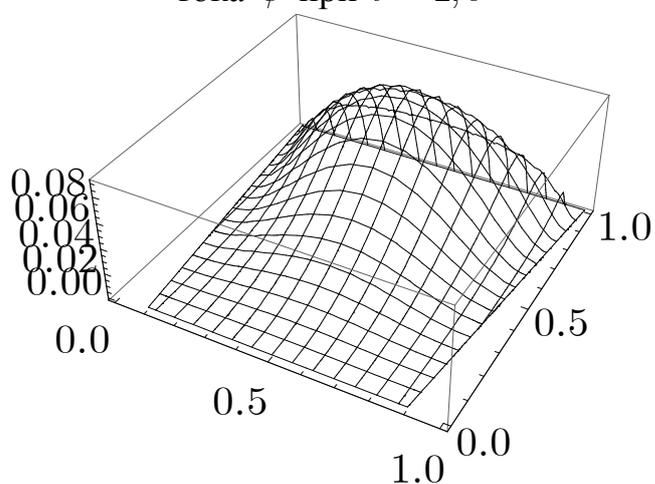


Рисунок Б.65 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

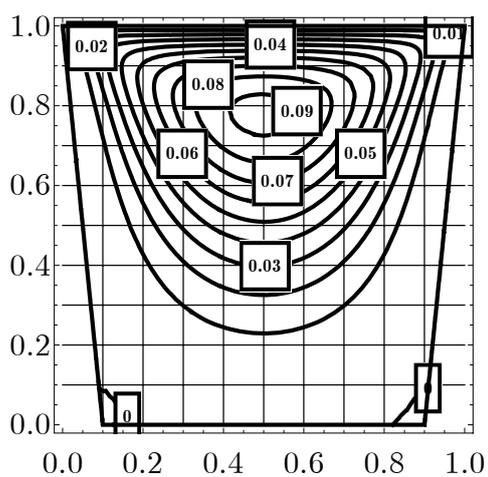


Рисунок Б.63 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

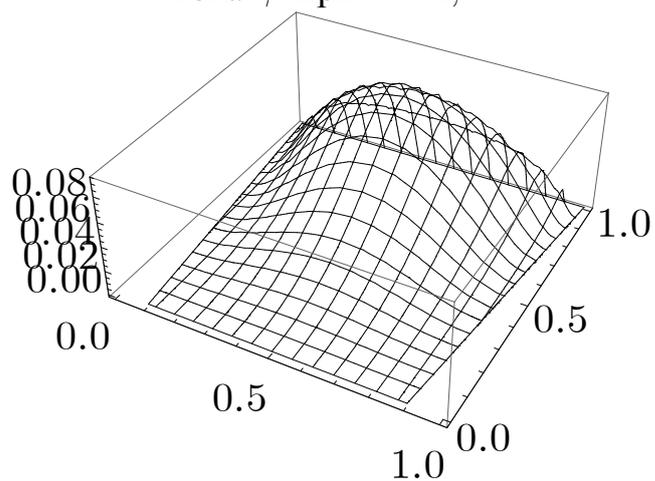


Рисунок Б.66 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

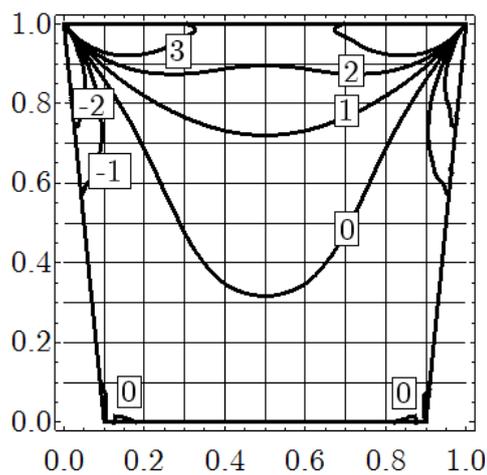


Рисунок Б.67 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

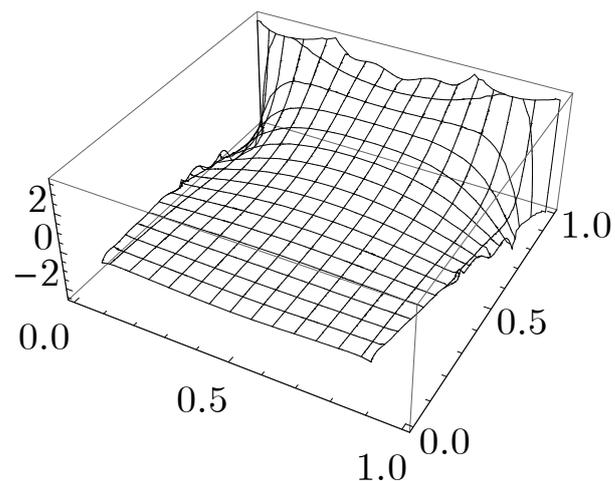


Рисунок Б.70 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

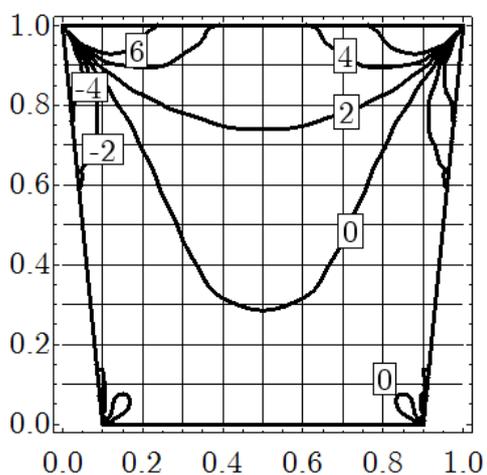


Рисунок Б.68 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

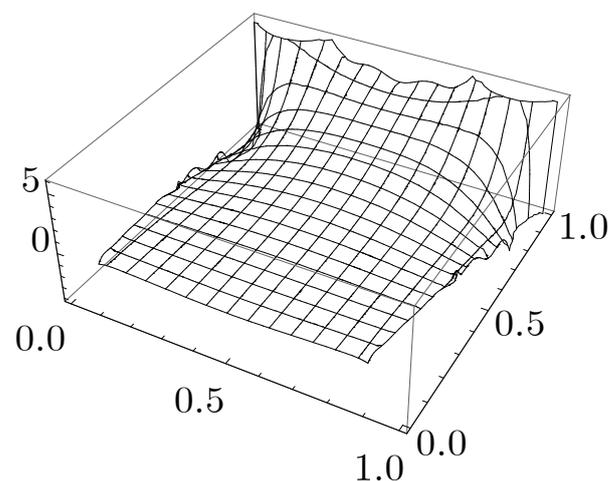


Рисунок Б.71 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

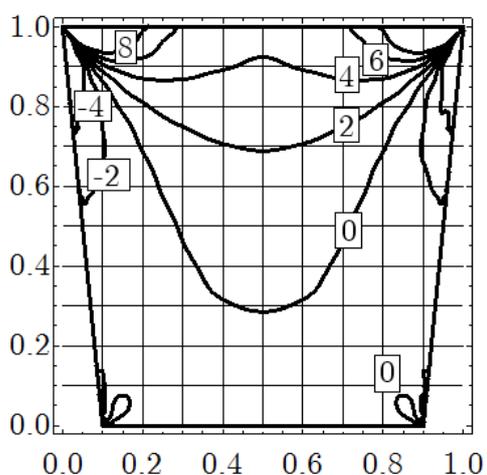


Рисунок Б.69 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

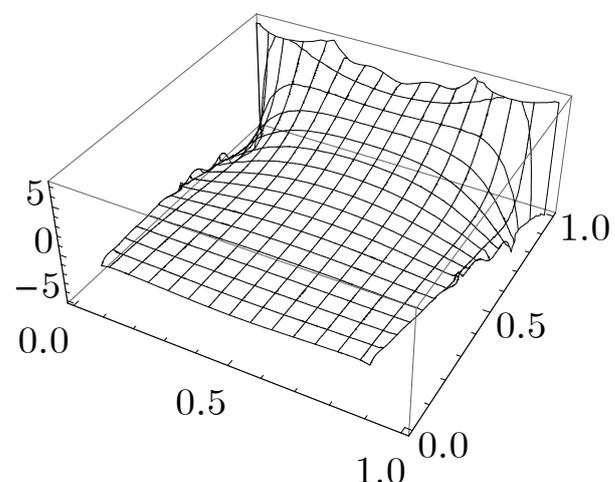


Рисунок Б.72 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

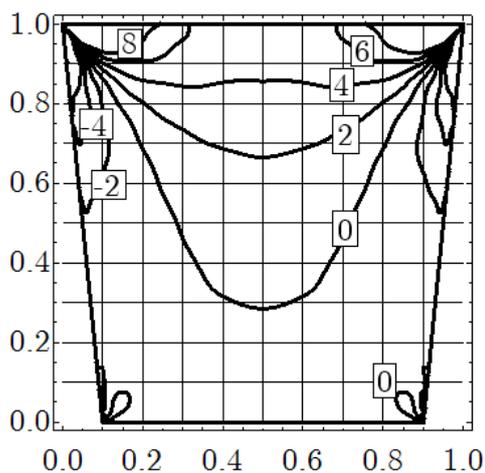


Рисунок Б.73 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

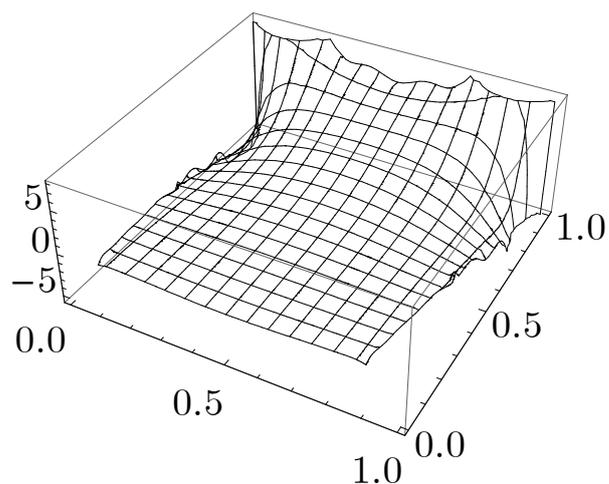


Рисунок Б.76 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

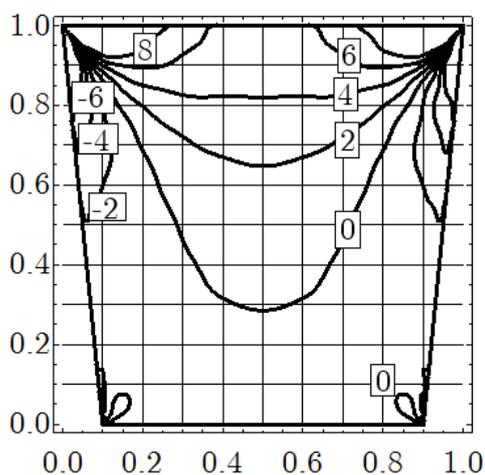


Рисунок Б.74 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

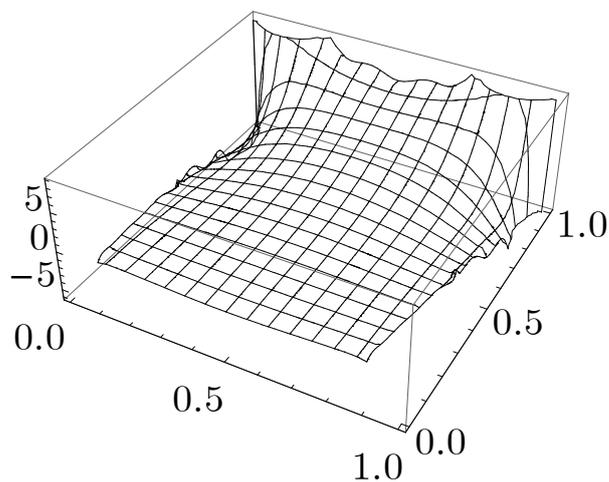


Рисунок Б.77 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

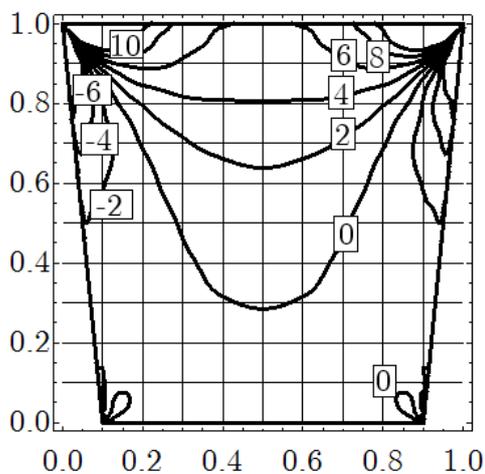


Рисунок Б.75 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

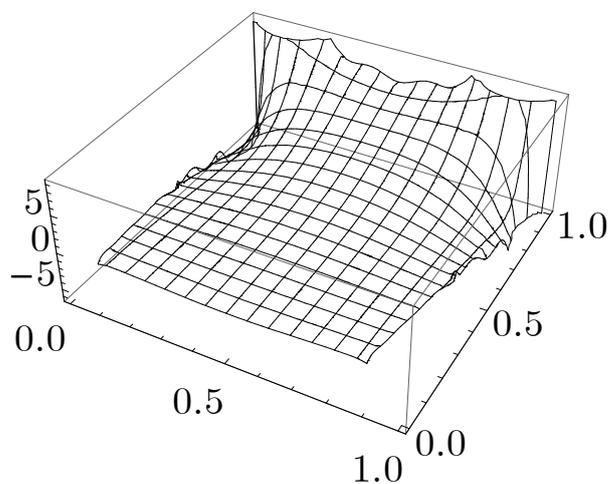


Рисунок Б.78 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

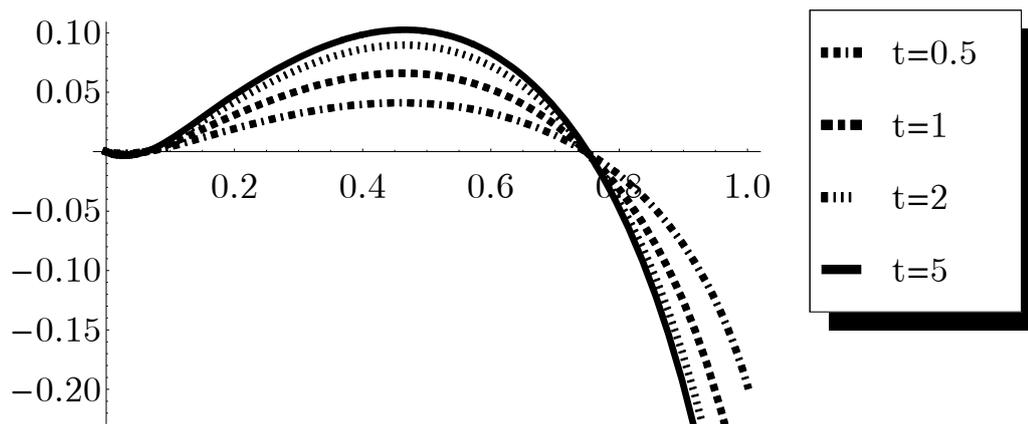


Рисунок Б.79 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени

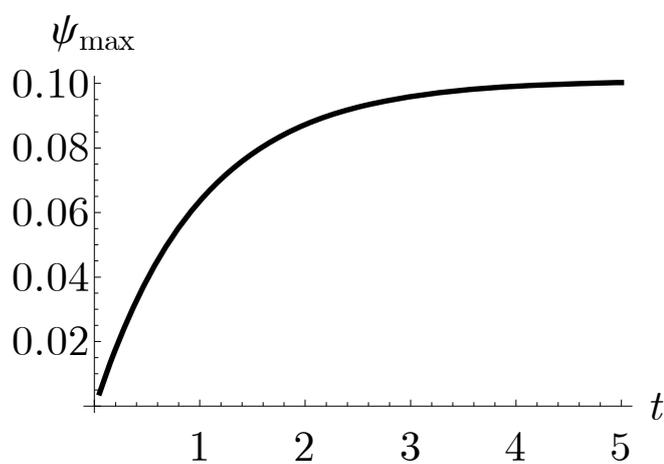


Рисунок Б.80 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

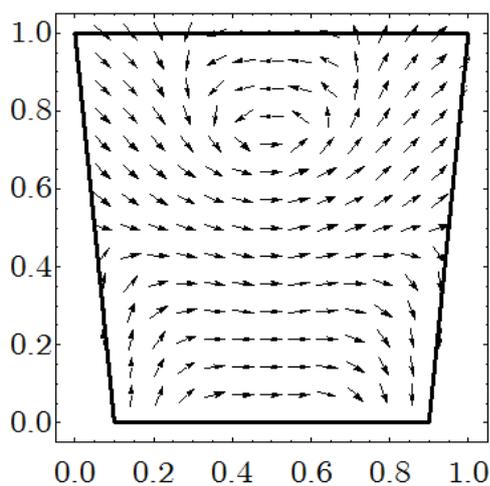


Рисунок Б.81 – Векторное поле скоростей

Приложение В

Результаты вычислительного эксперимента для функции тока и температуры (линеаризованная задача)

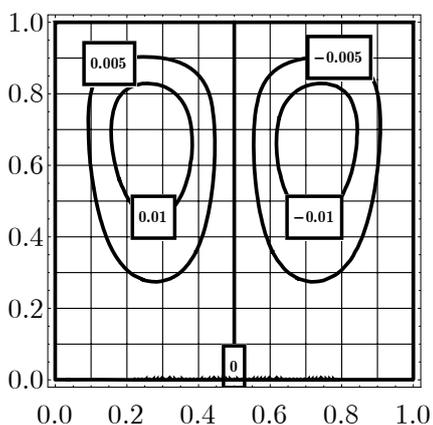


Рисунок В.1 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

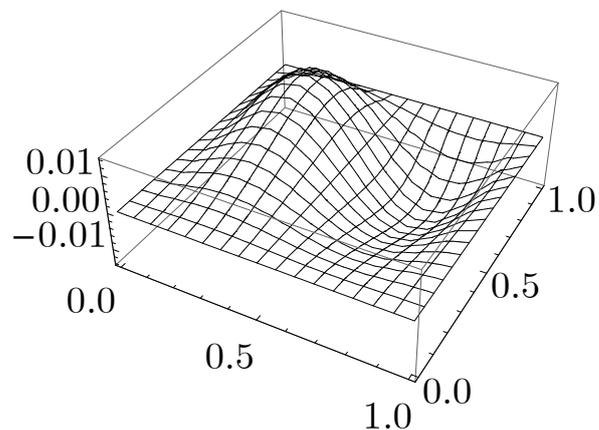


Рисунок В.4 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

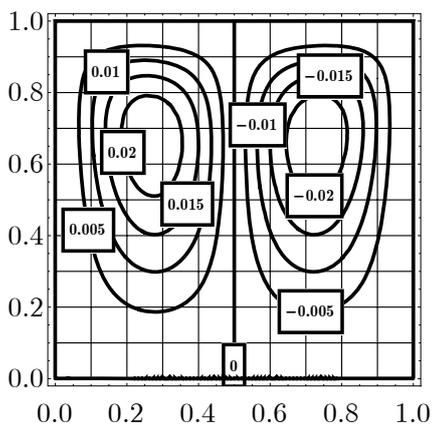


Рисунок В.2 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

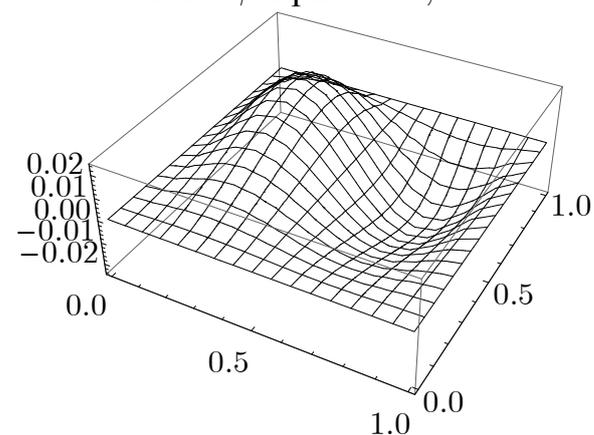


Рисунок В.5 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

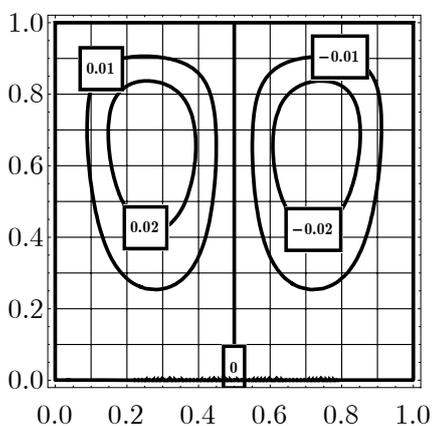


Рисунок В.3 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

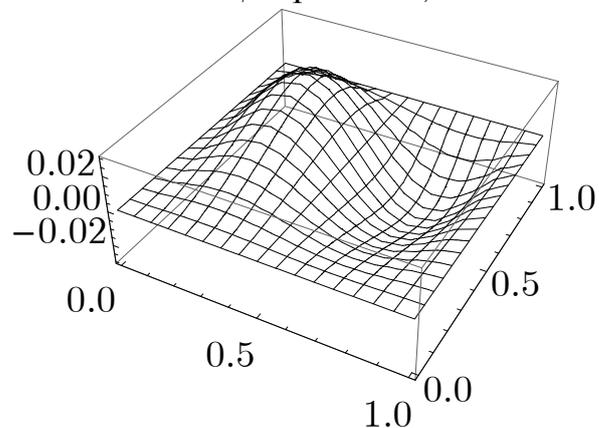


Рисунок В.6 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

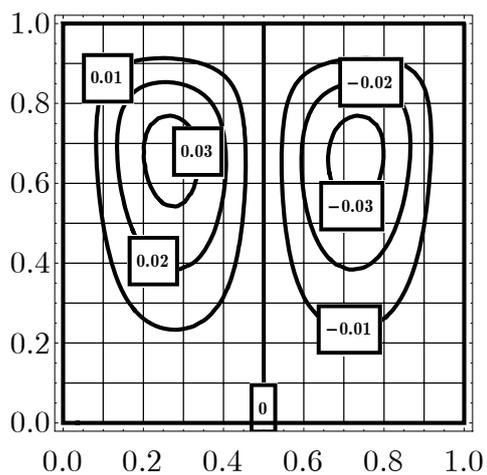


Рисунок В.7 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

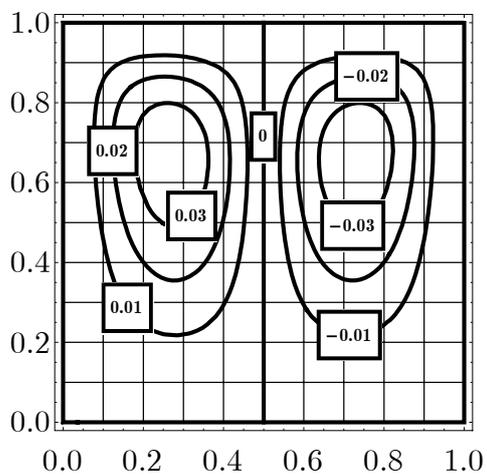


Рисунок В.8 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

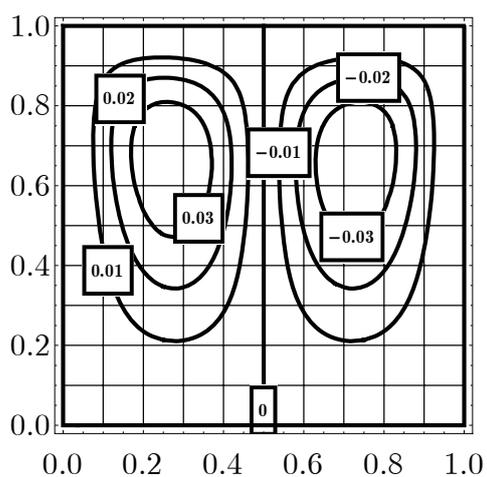


Рисунок В.9 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

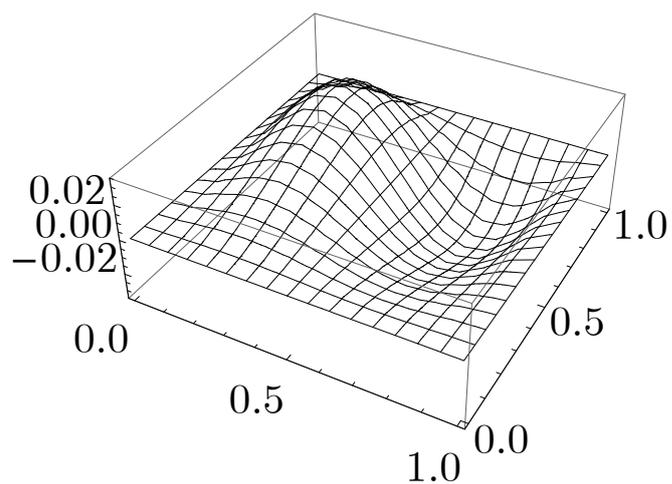


Рисунок В.10 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

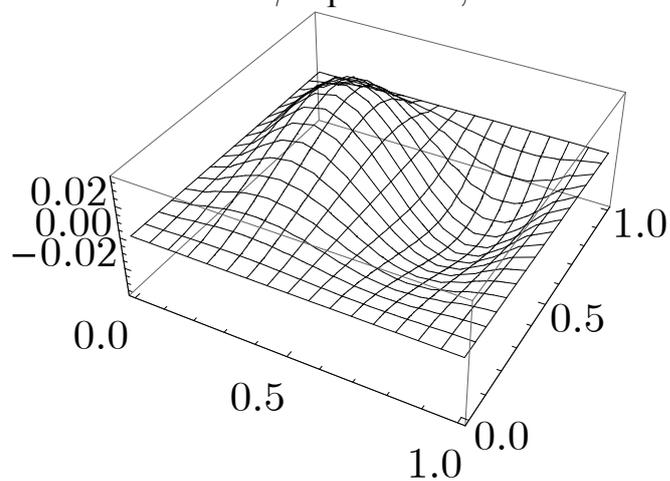


Рисунок В.11 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

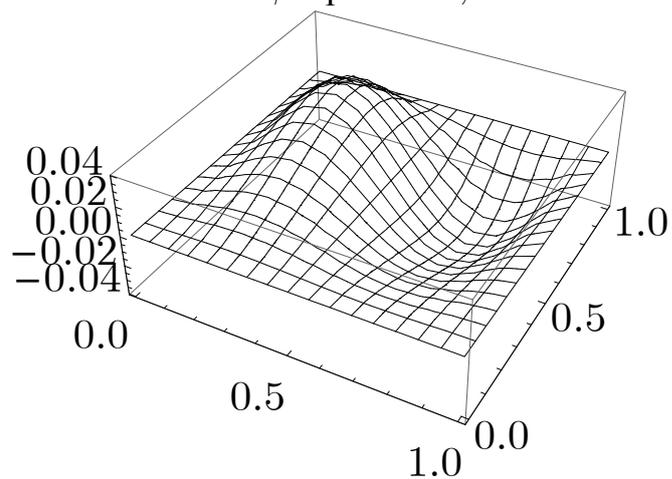


Рисунок В.12 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

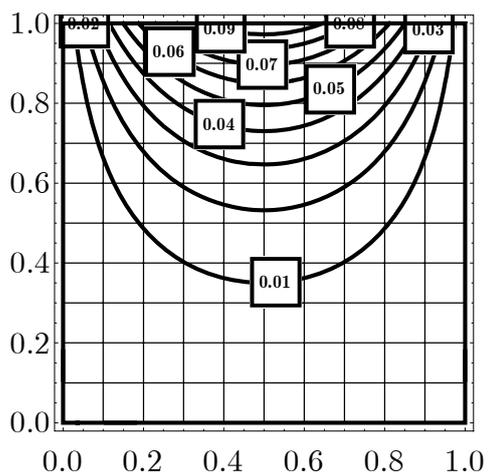


Рисунок В.13 – Линии уровня температуры θ при $t = 0,5$

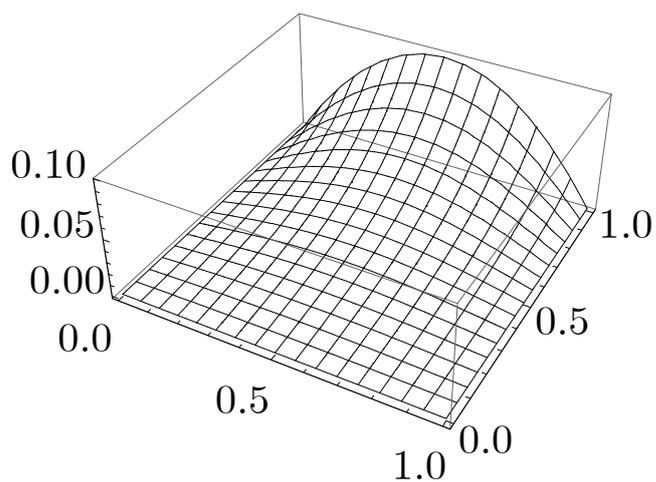


Рисунок В.16 – Поверхность температуры θ при $t = 0,5$

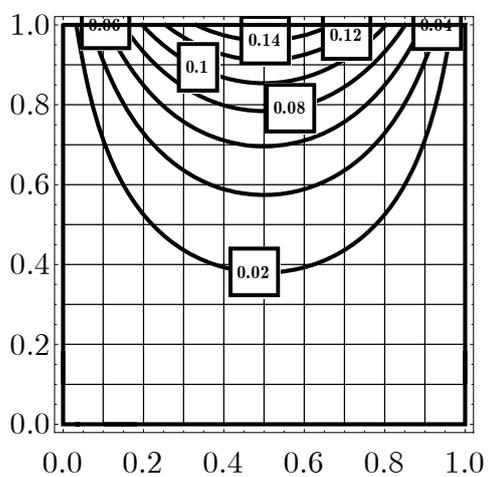


Рисунок В.14 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,0$

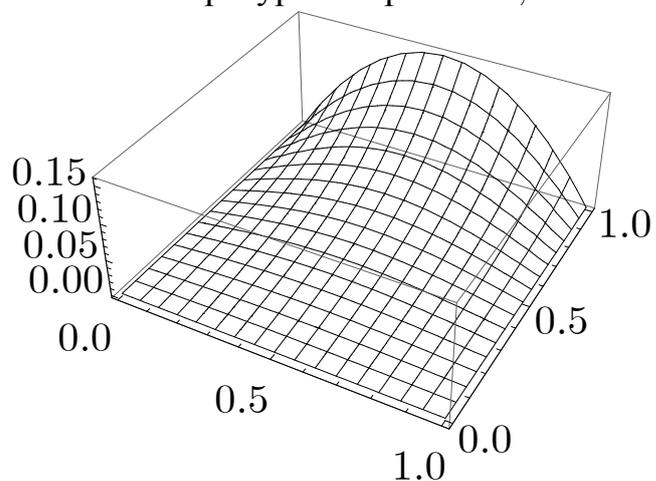


Рисунок В.17 – Поверхность температуры θ при $t = 1,0$

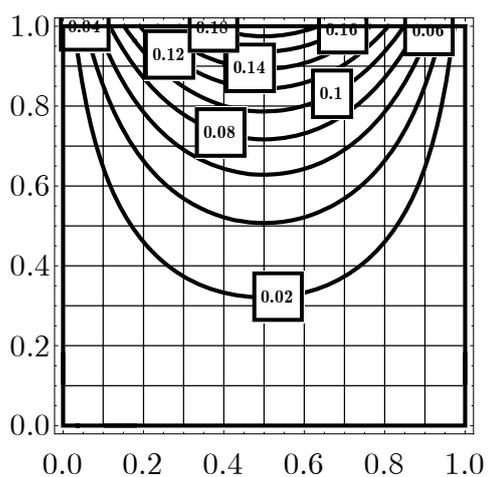


Рисунок В.15 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,5$

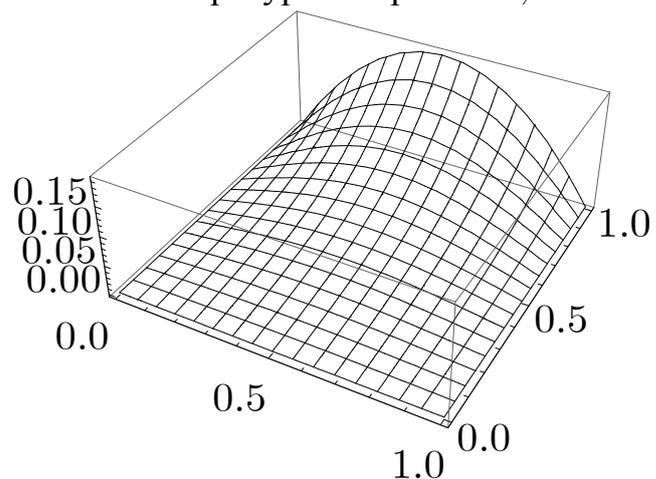


Рисунок В.18 – Поверхность температуры θ при $t = 1,5$

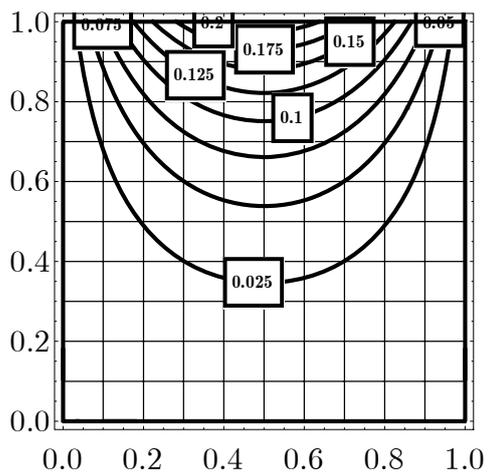


Рисунок В.19 – Линии уровня температуры θ при $t = 2,0$

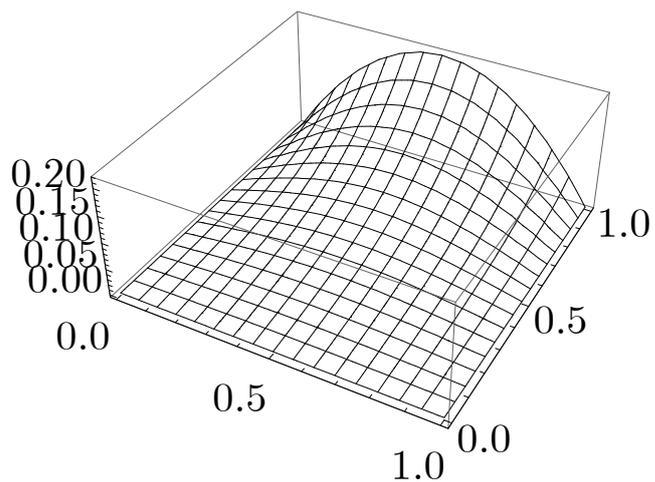


Рисунок В.22 – Поверхность температуры θ при $t = 2,0$

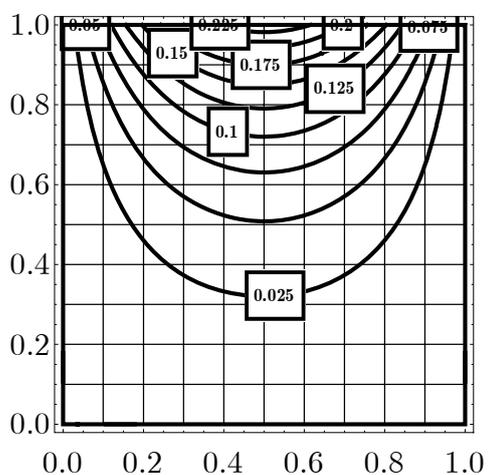


Рисунок В.20 – Линии уровня температуры θ при $t = 3,0$

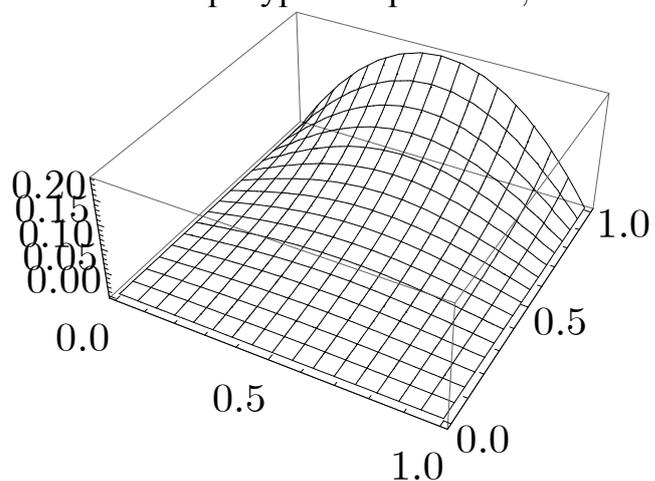


Рисунок В.23 – Поверхность температуры θ при $t = 3,0$

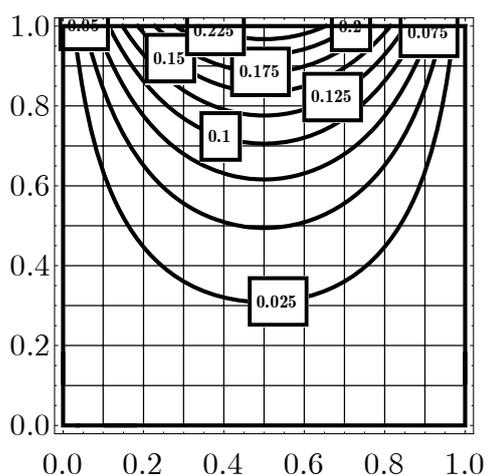


Рисунок В.21 – Линии уровня температуры θ при $t = 5,0$

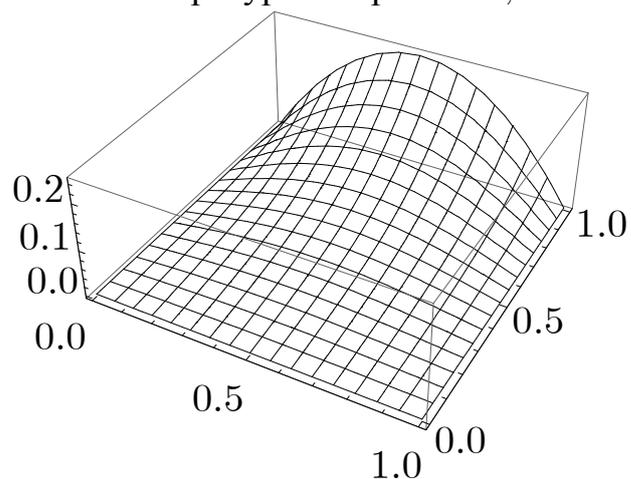


Рисунок В.24 – Поверхность температуры θ при $t = 5,0$

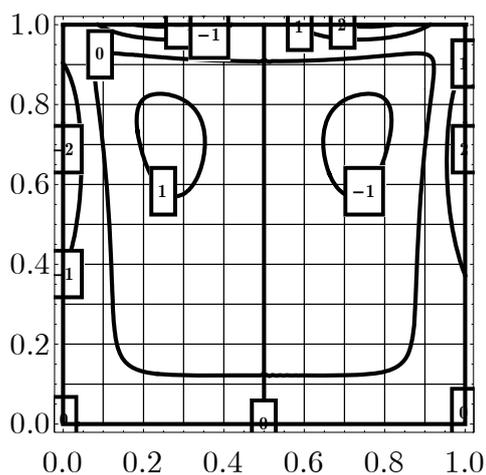


Рисунок В.25 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

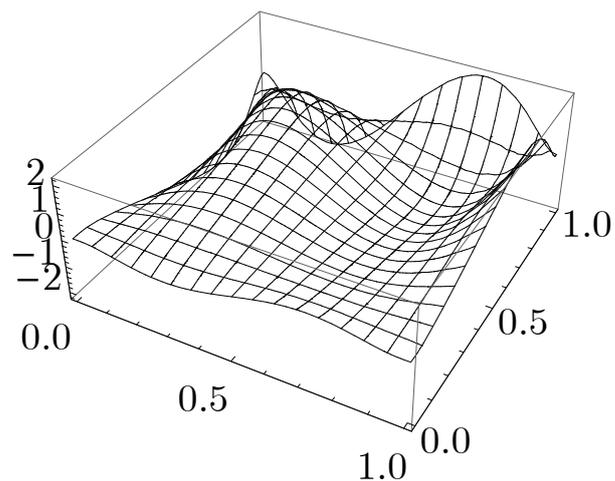


Рисунок В.28 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

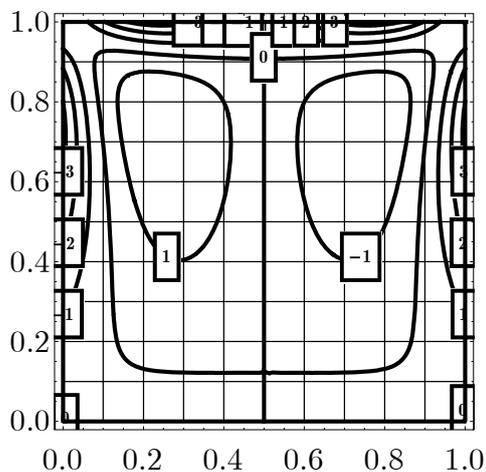


Рисунок В.26 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

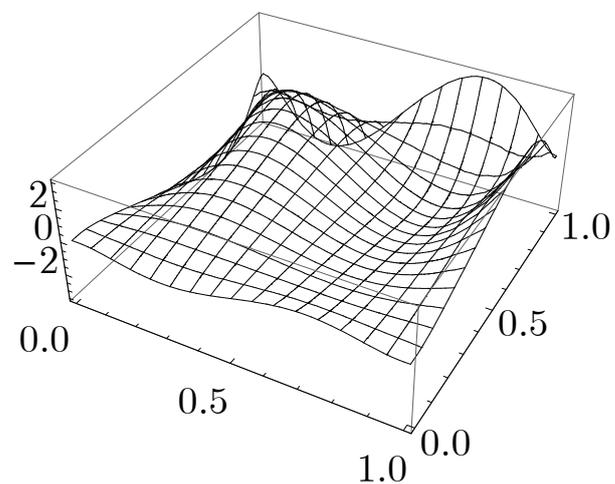


Рисунок В.29 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

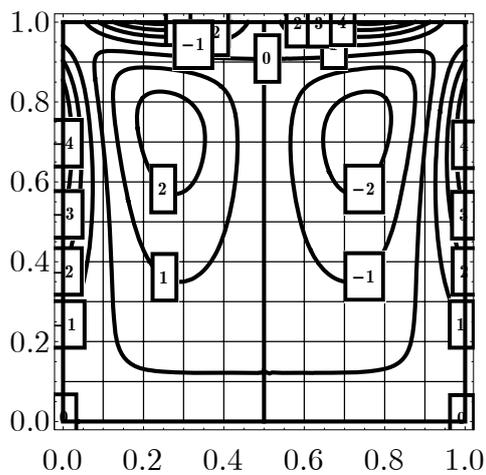


Рисунок В.27 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

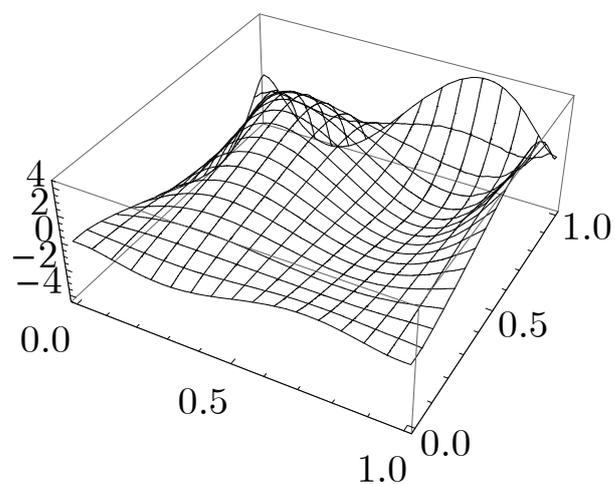


Рисунок В.30 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

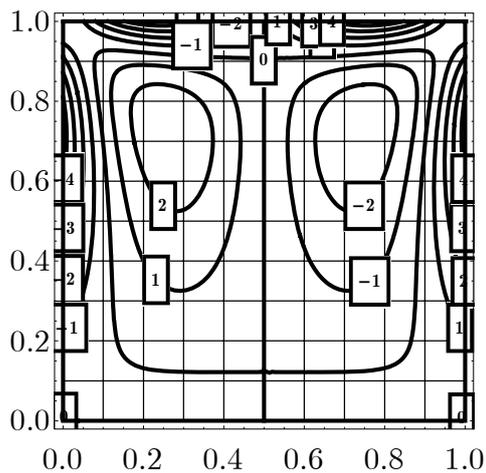


Рисунок В.31 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

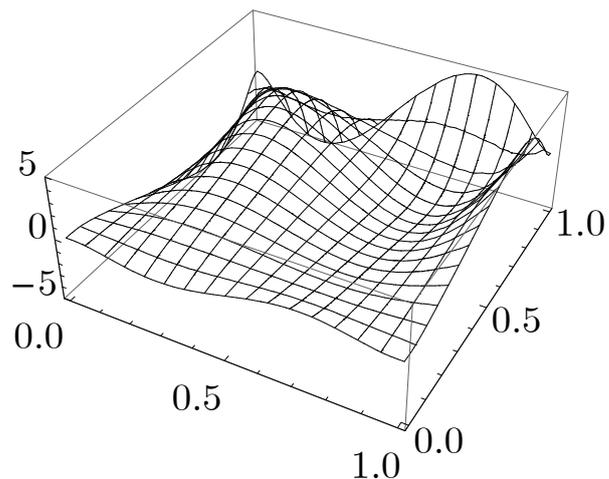


Рисунок В.34 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

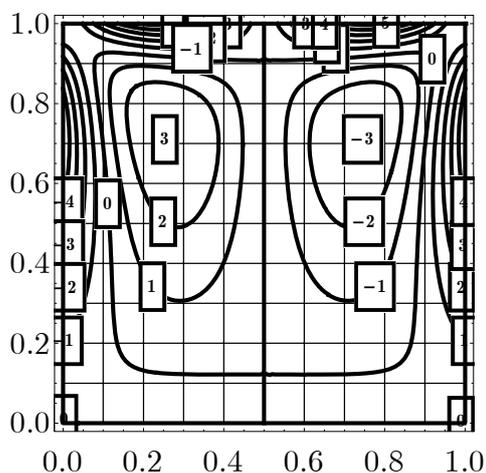


Рисунок В.32 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

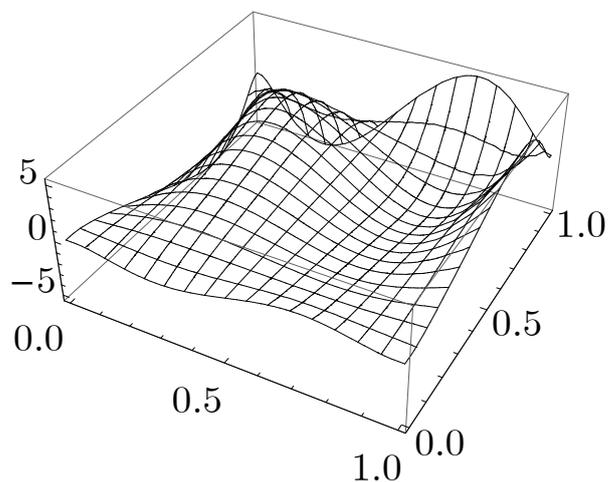


Рисунок В.35 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

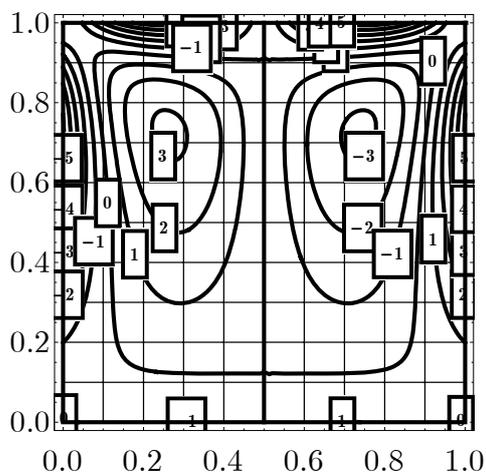


Рисунок В.33 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

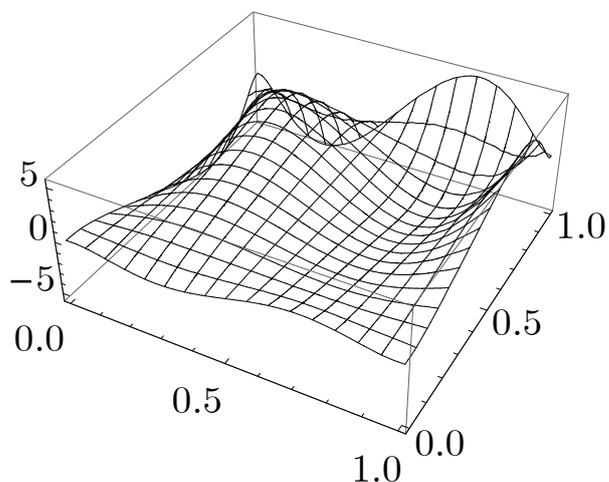


Рисунок В.36 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

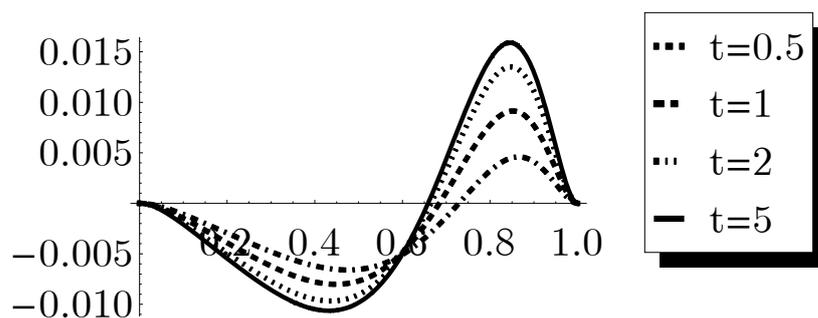


Рисунок В.37 – График скорости $v_y|_{x=x_c}$ в разные моменты времени

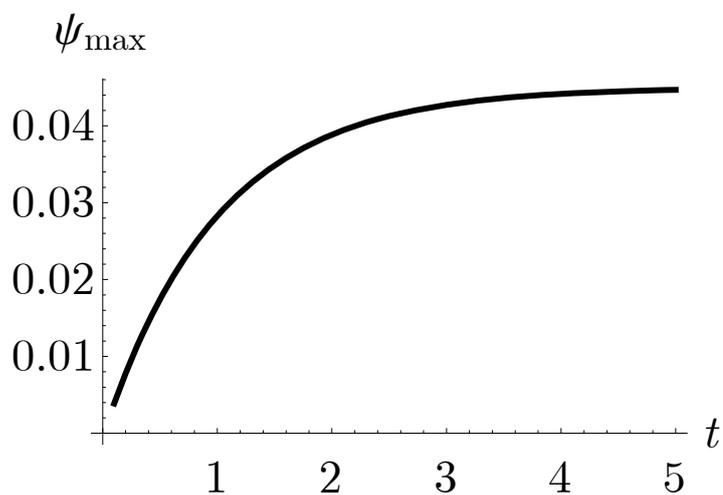


Рисунок В.38 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

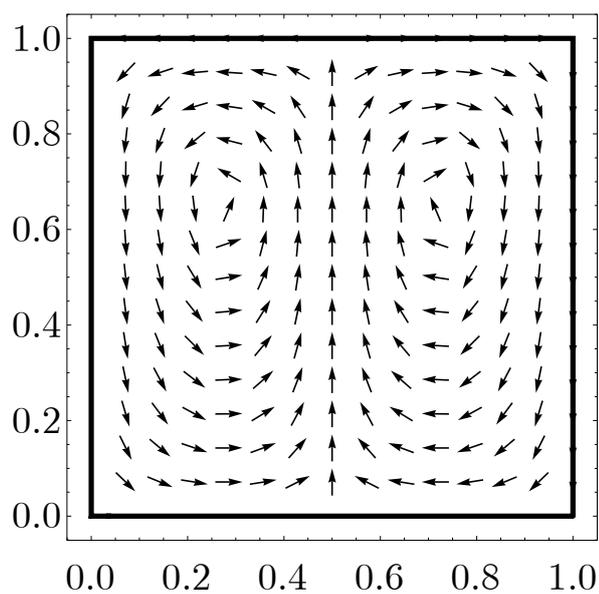


Рисунок В.39 – Векторное поле скоростей

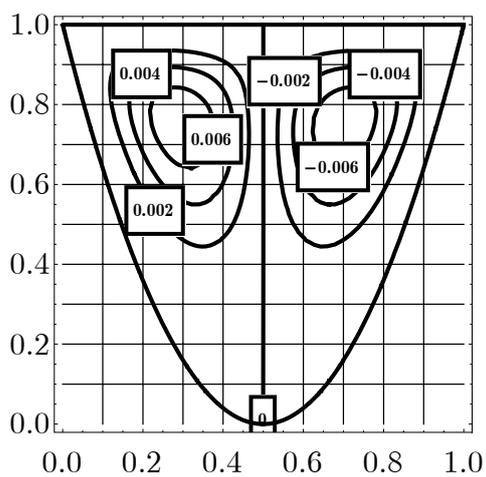


Рисунок В.40 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

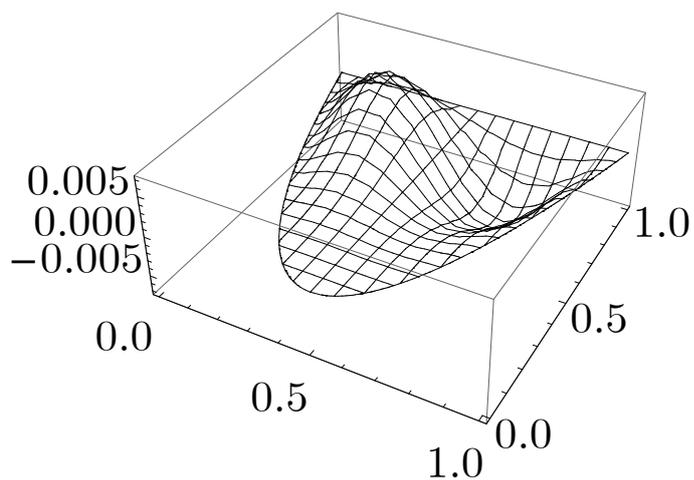


Рисунок В.43 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

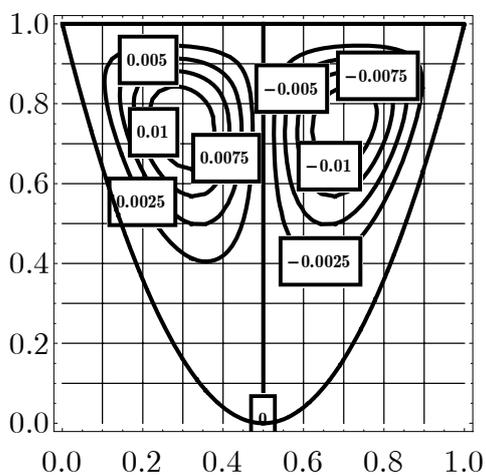


Рисунок В.41 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

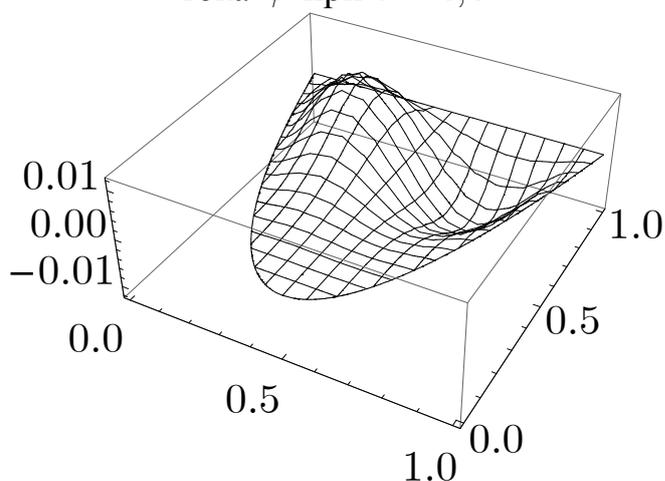


Рисунок В.44 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

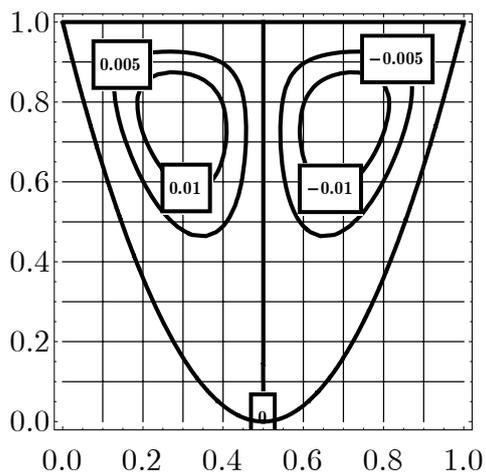


Рисунок В.42 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

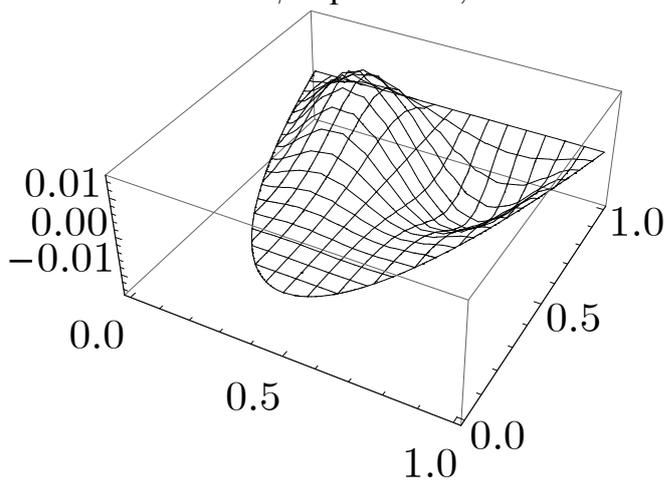


Рисунок В.45 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

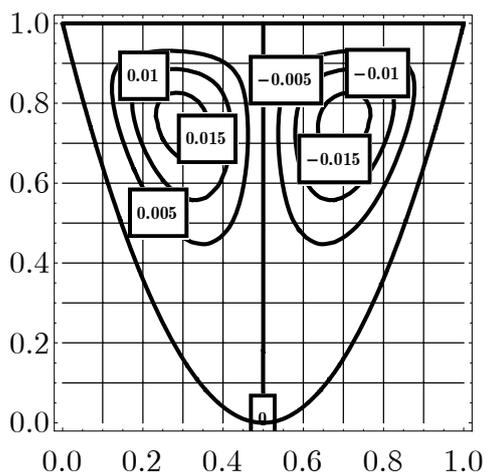


Рисунок В.46 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

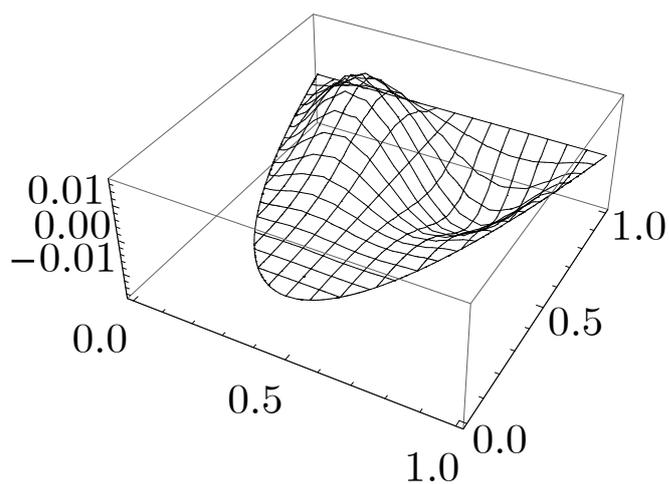


Рисунок В.49 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

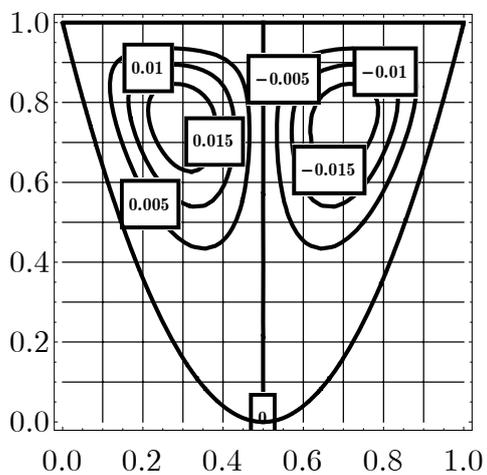


Рисунок В.47 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

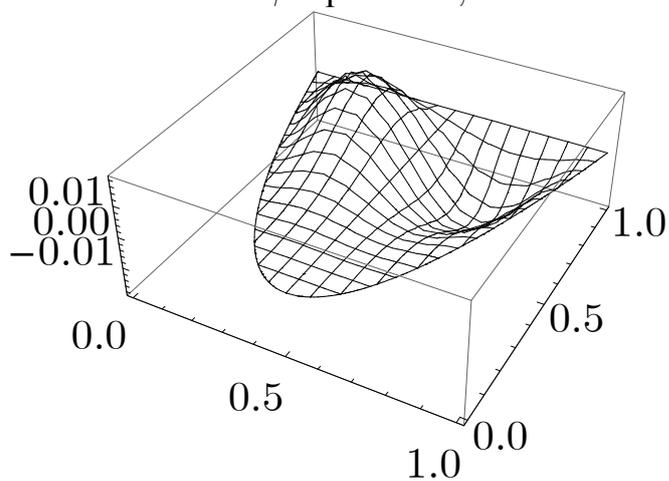


Рисунок В.50 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

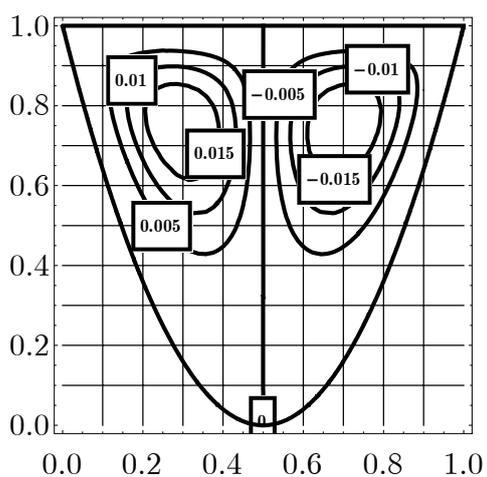


Рисунок В.48 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

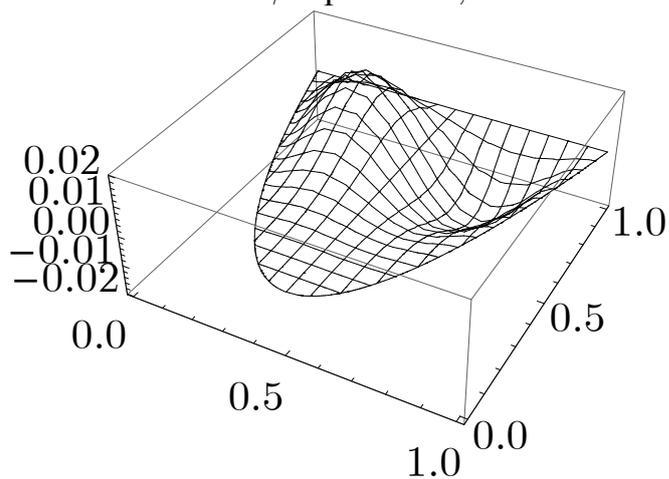


Рисунок В.51 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

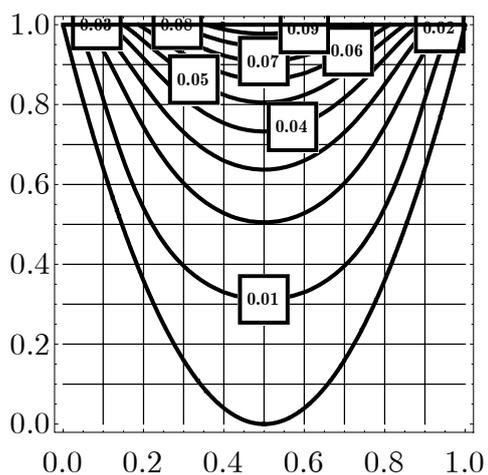


Рисунок В.52 – Линии уровня температуры θ при $t = 0,5$

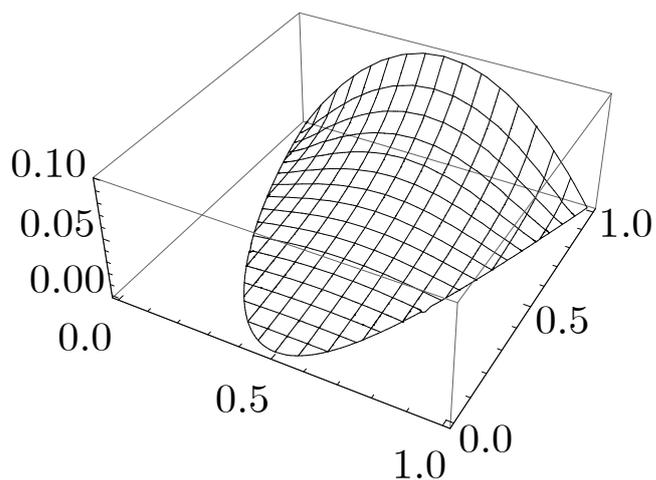


Рисунок В.55 – Поверхность температуры θ при $t = 0,5$

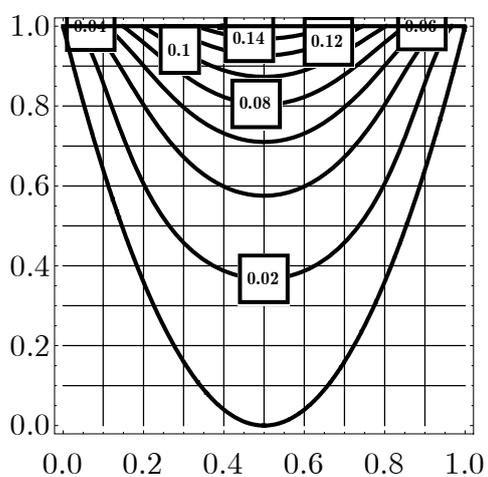


Рисунок В.53 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,0$

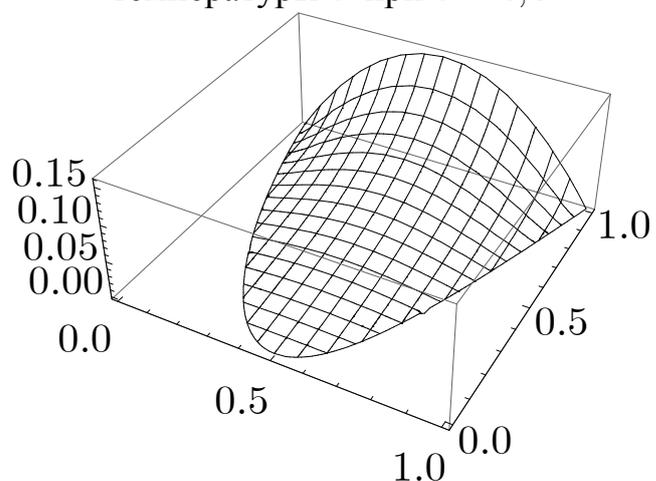


Рисунок В.56 – Поверхность температуры θ при $t = 1,0$

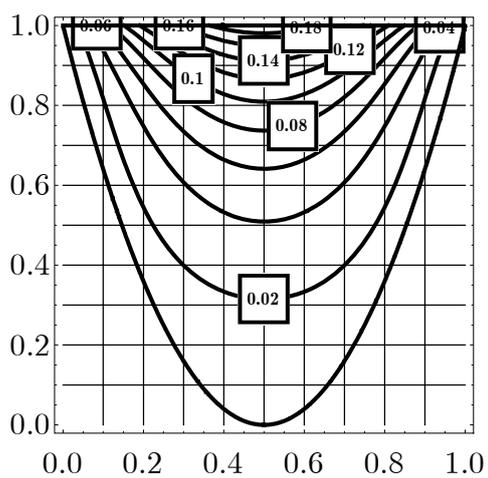


Рисунок В.54 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,5$

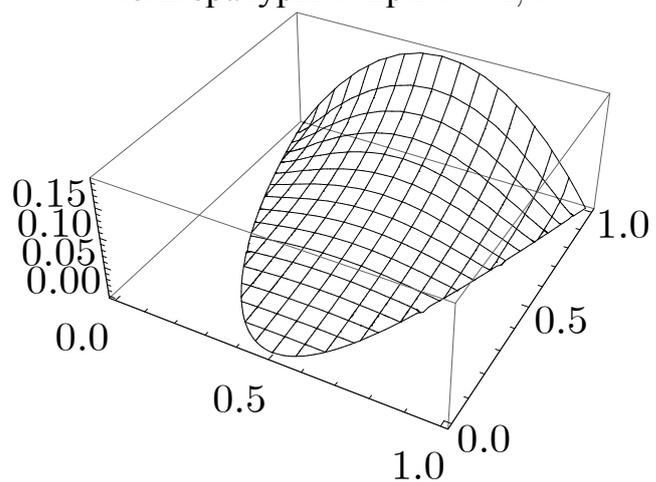


Рисунок В.57 – Поверхность температуры θ при $t = 1,5$

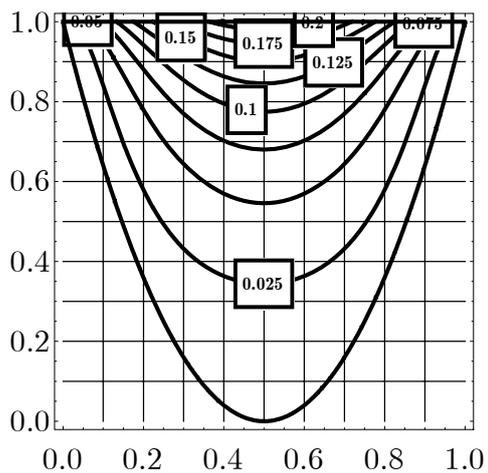


Рисунок В.58 – Линии уровня температуры θ при $t = 2,0$

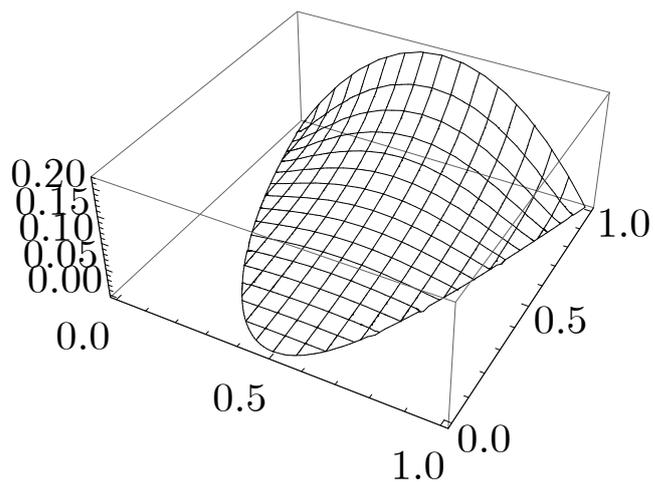


Рисунок В.61 – Поверхность температуры θ при $t = 2,0$

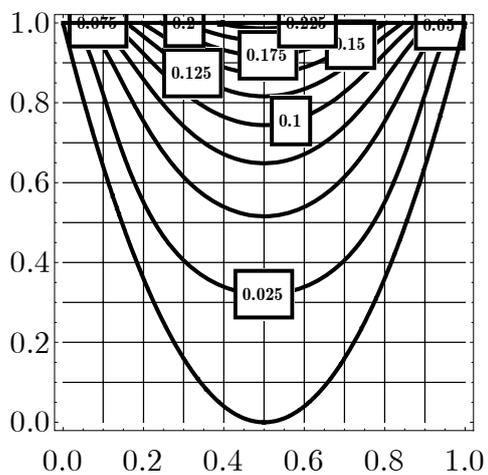


Рисунок В.59 – Линии уровня температуры θ при $t = 3,0$

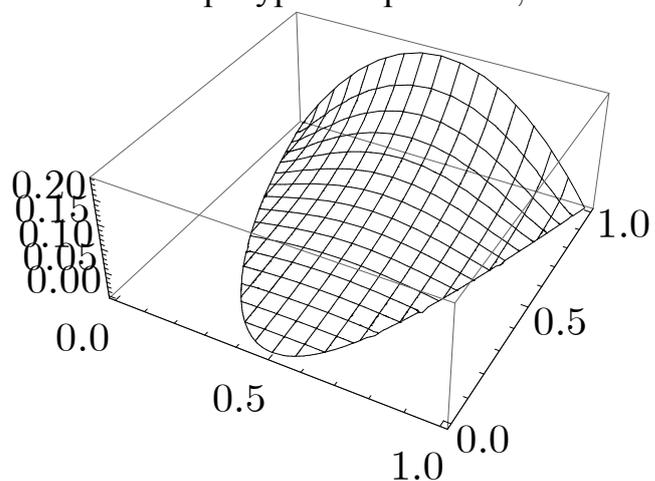


Рисунок В.62 – Поверхность температуры θ при $t = 3,0$

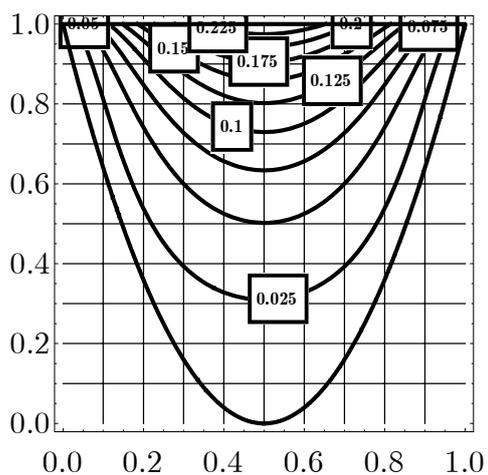


Рисунок В.60 – Линии уровня температуры θ при $t = 5,0$

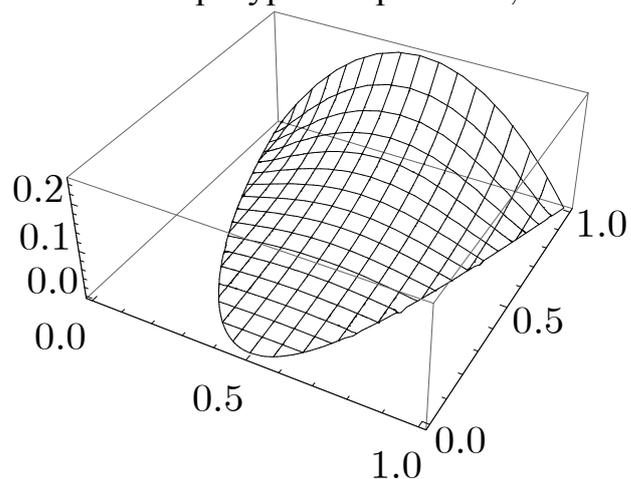


Рисунок В.63 – Поверхность температуры θ при $t = 5,0$

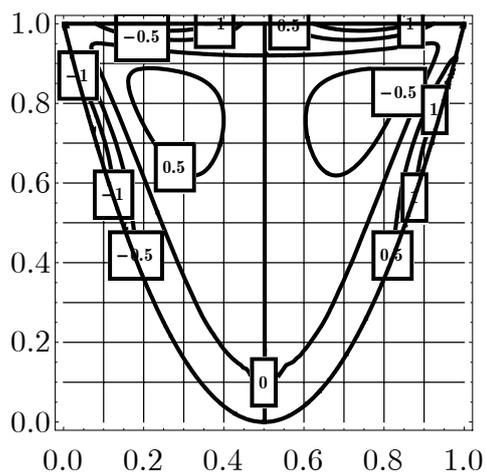


Рисунок В.64 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

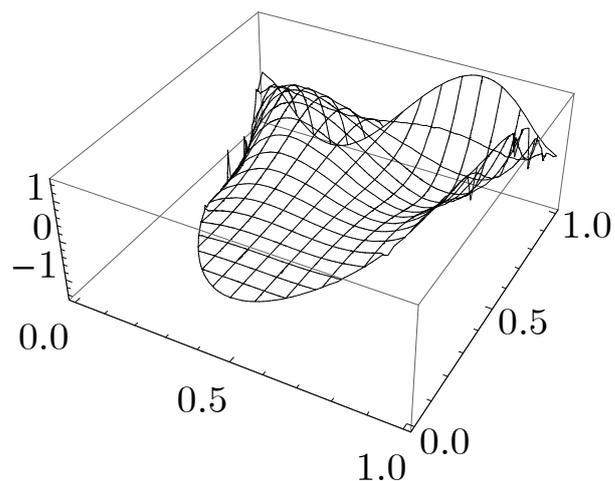


Рисунок В.67 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

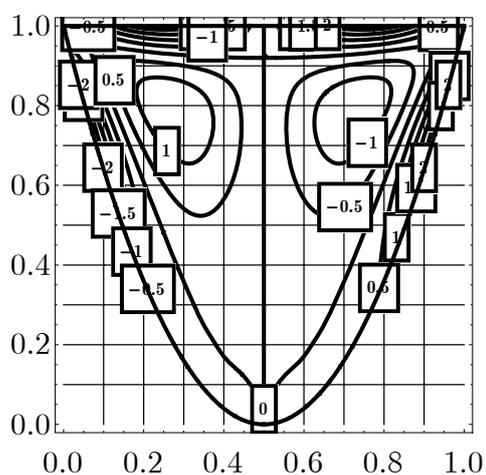


Рисунок В.65 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

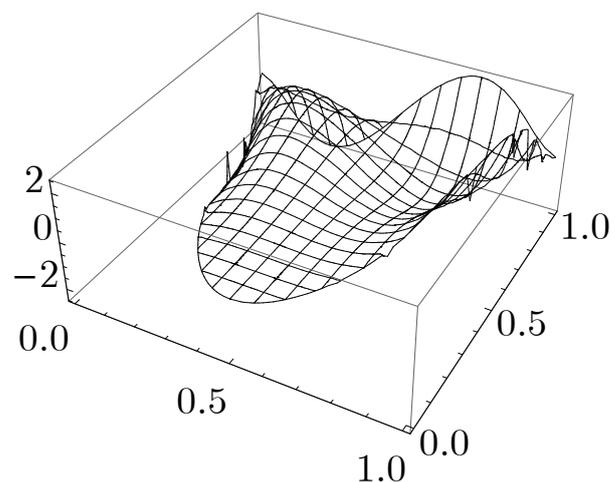


Рисунок В.68 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

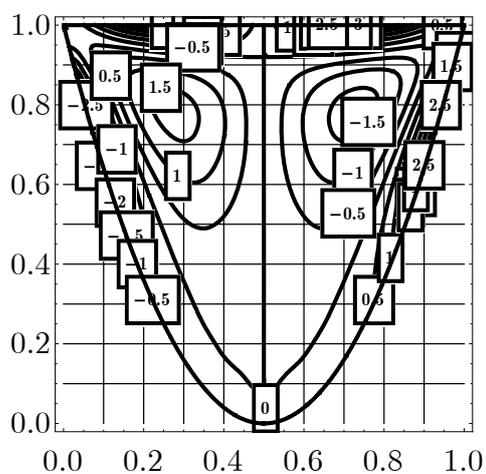


Рисунок В.66 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

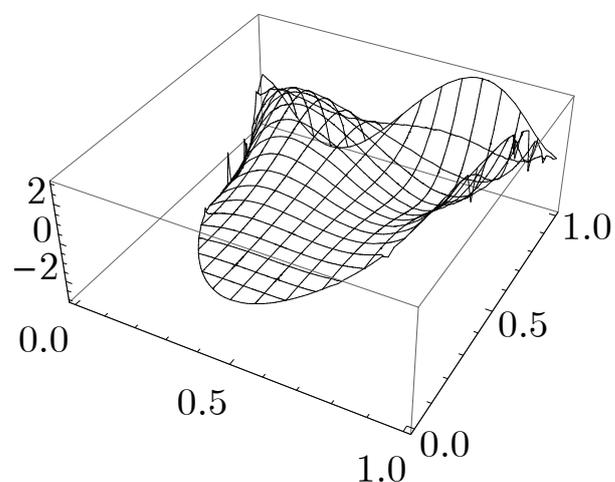


Рисунок В.69 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

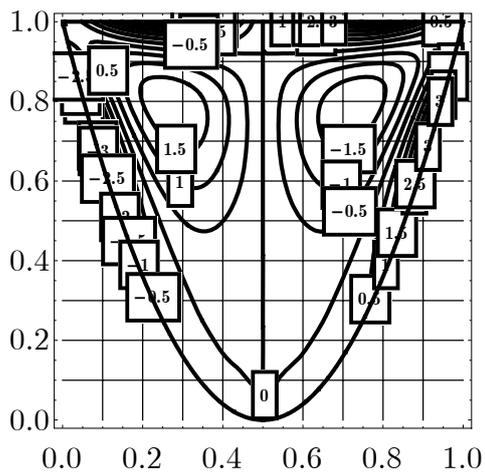


Рисунок В.70 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

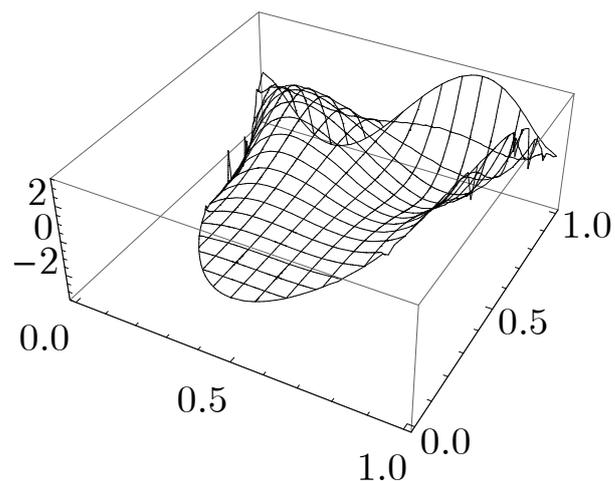


Рисунок В.73 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

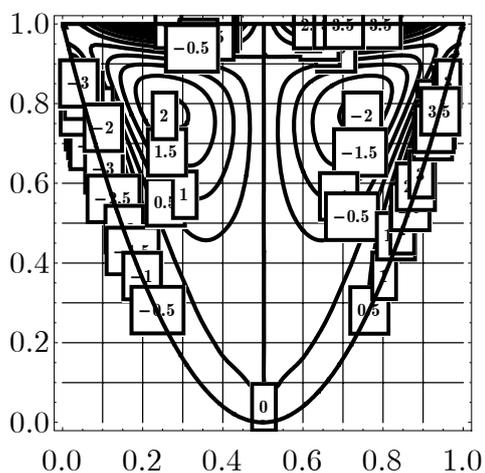


Рисунок В.71 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

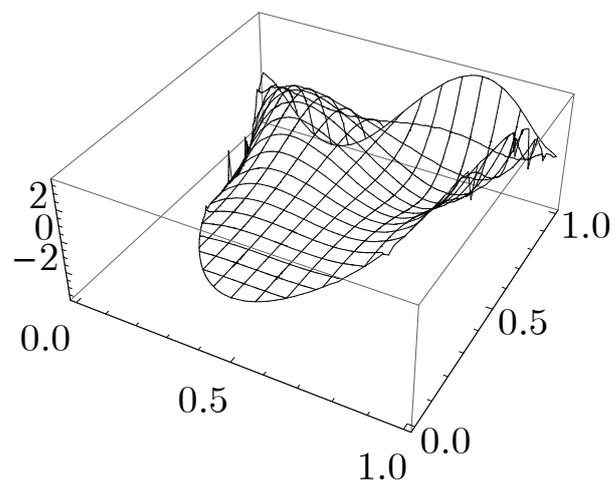


Рисунок В.74 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

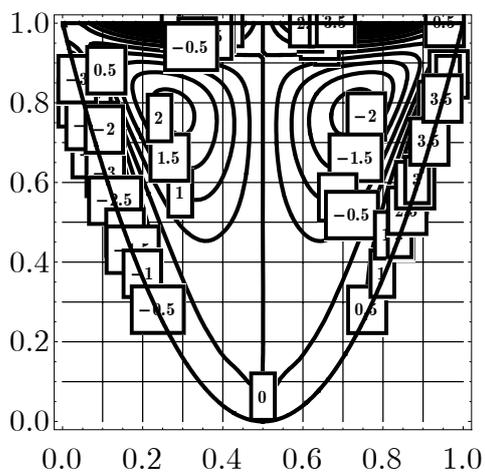


Рисунок В.72 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

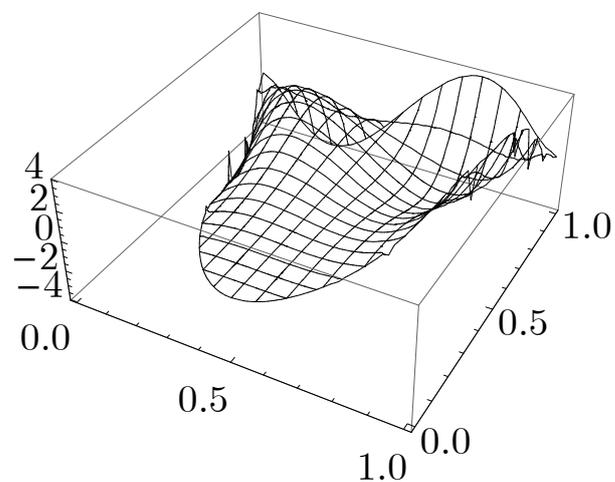


Рисунок В.75 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

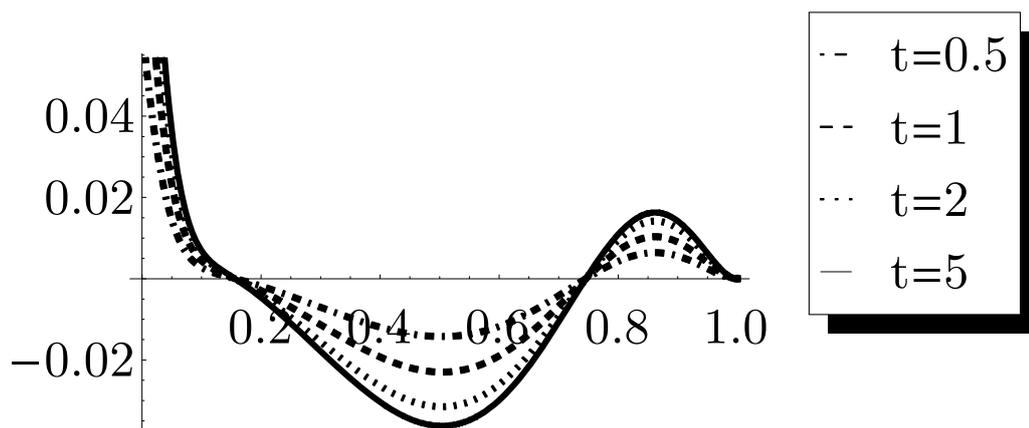


Рисунок В.76 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени

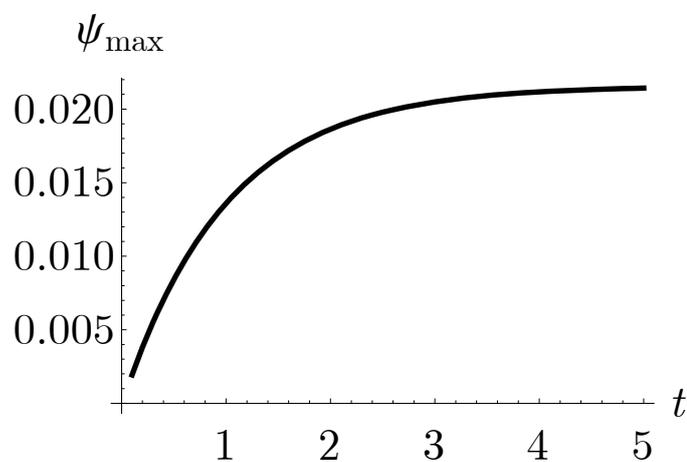


Рисунок В.77 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

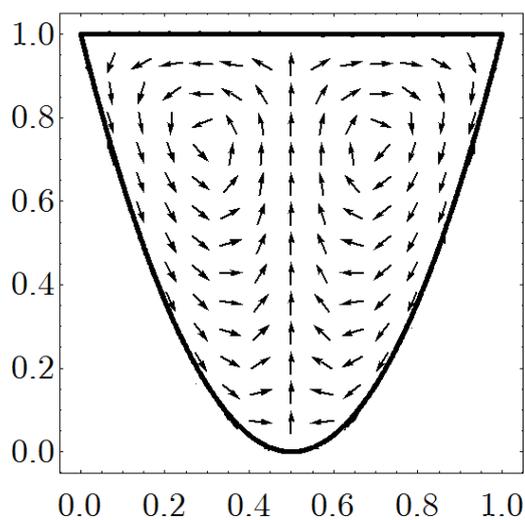


Рисунок В.78 – Векторное поле скоростей

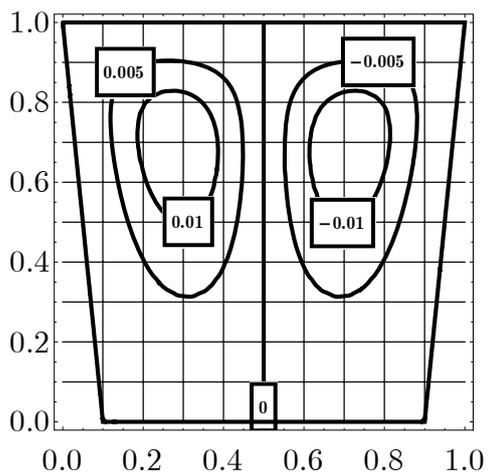


Рисунок В.79 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$

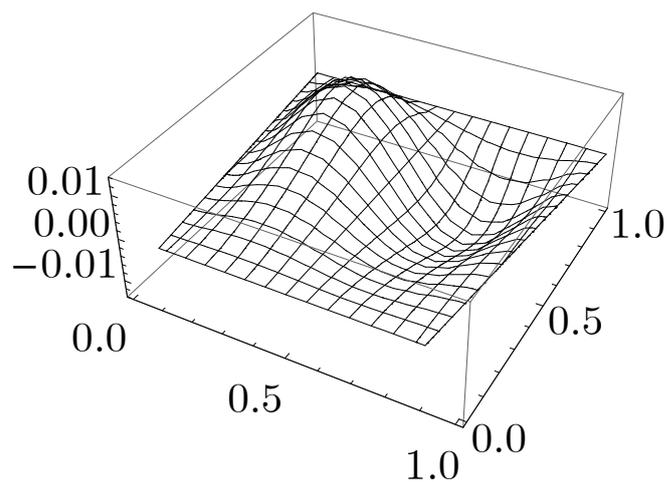


Рисунок В.82 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$

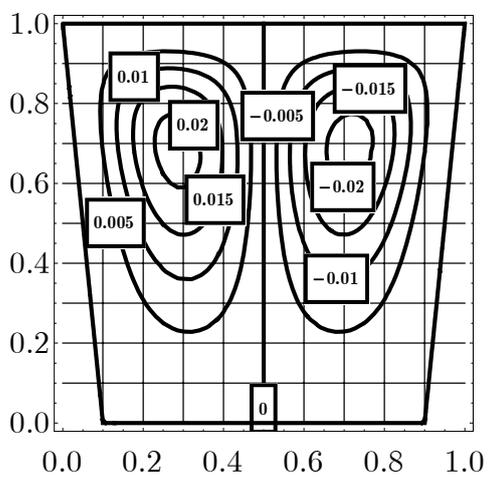


Рисунок В.80 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$

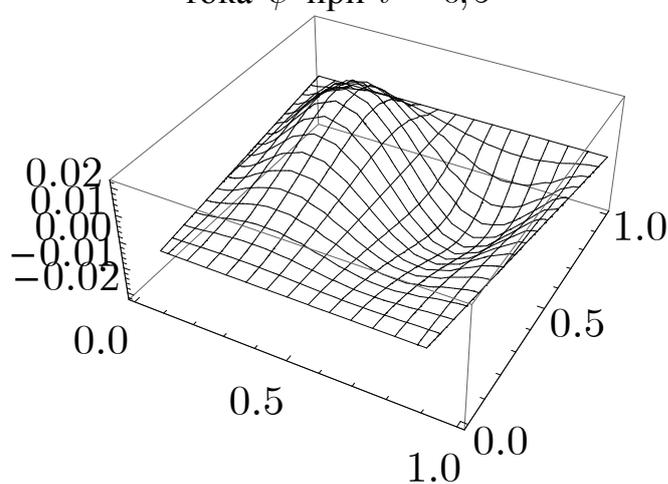


Рисунок В.83 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$

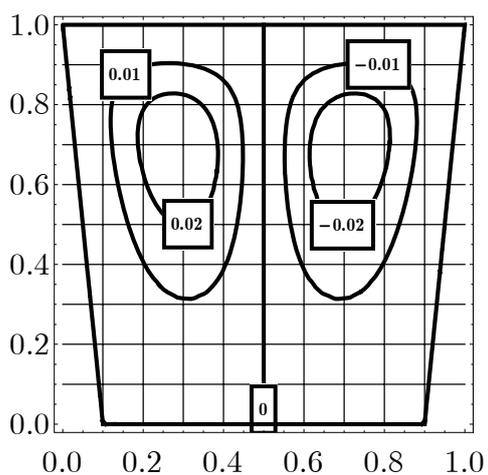


Рисунок В.81 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,5$

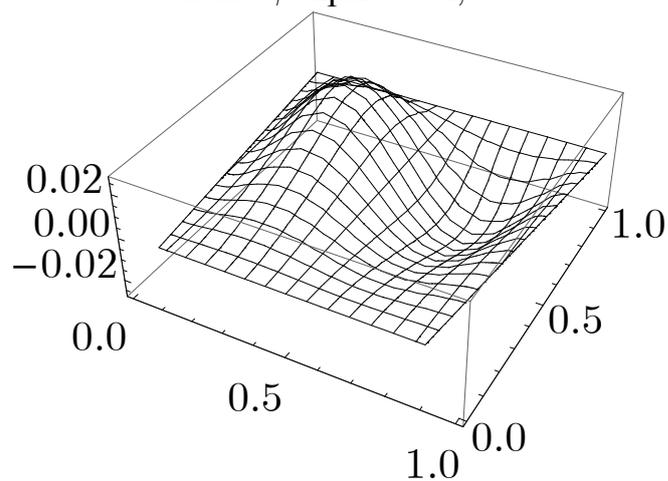


Рисунок В.84 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,5$

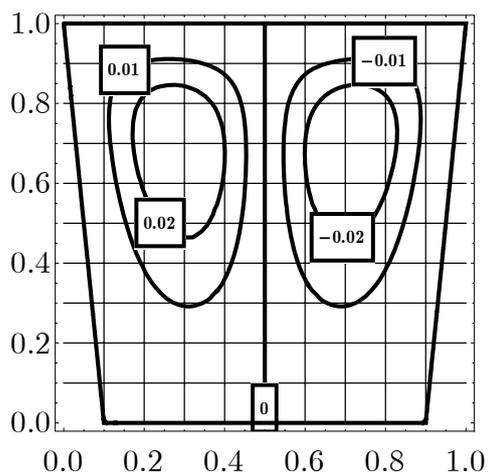


Рисунок В.85 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$

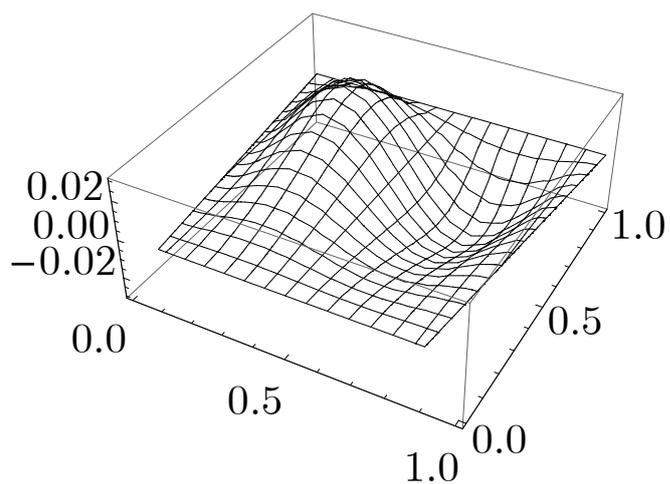


Рисунок В.88 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$

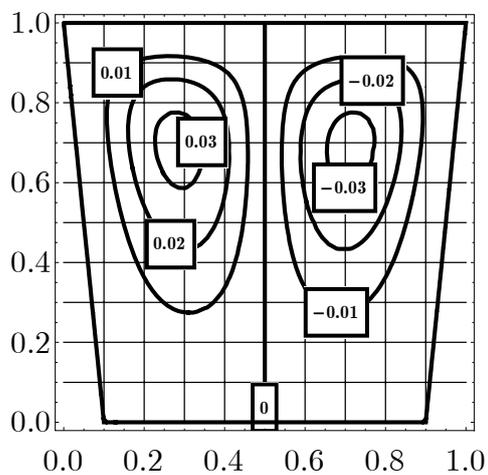


Рисунок В.86 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$

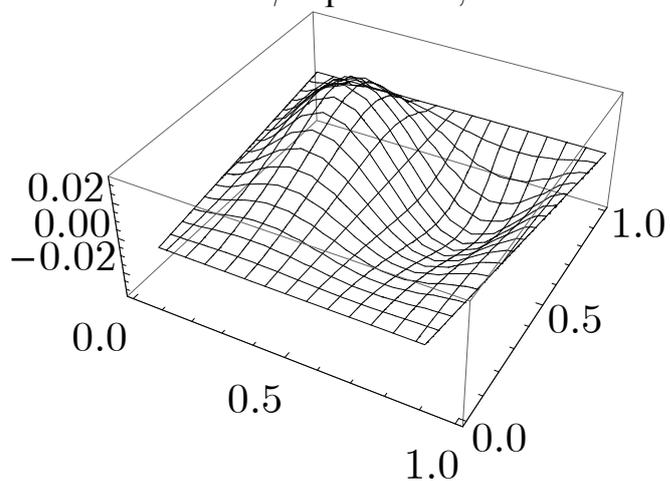


Рисунок В.89 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$

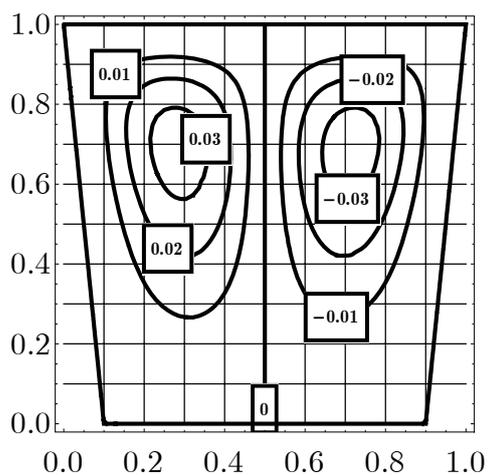


Рисунок В.87 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$

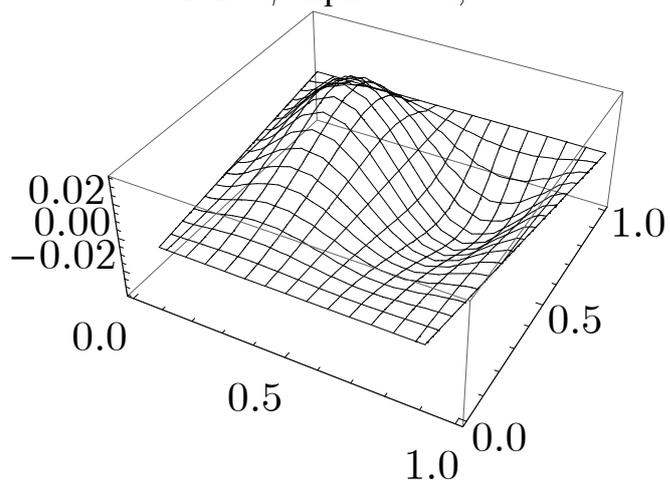


Рисунок В.90 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$

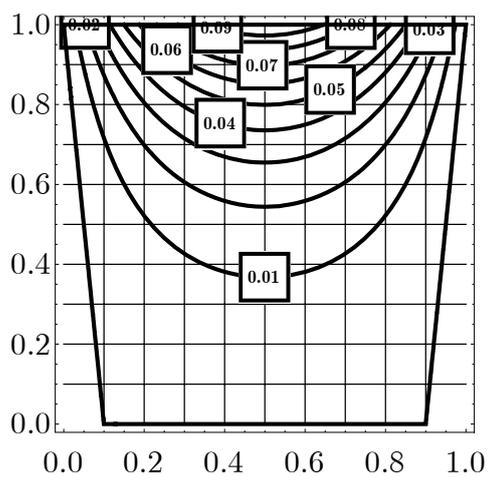


Рисунок В.91 – Линии уровня температуры θ при $t = 0,5$

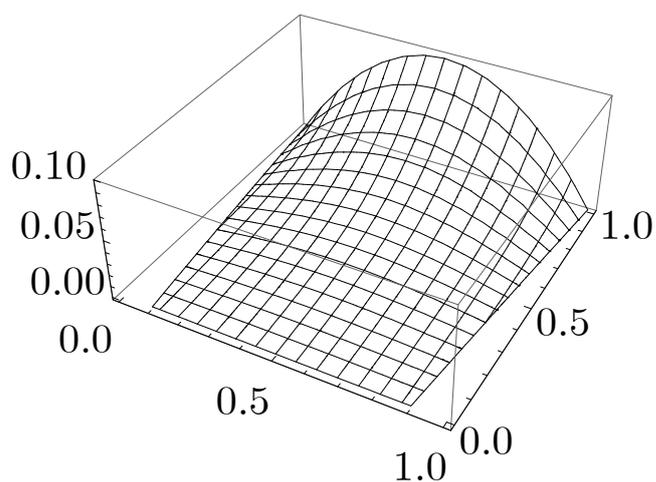


Рисунок В.94 – Поверхность температуры θ при $t = 0,5$

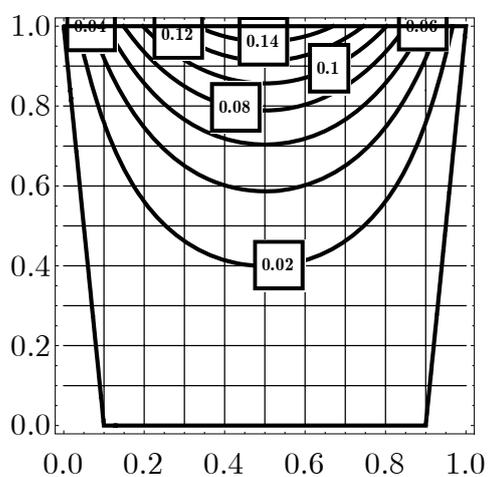


Рисунок В.92 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,0$

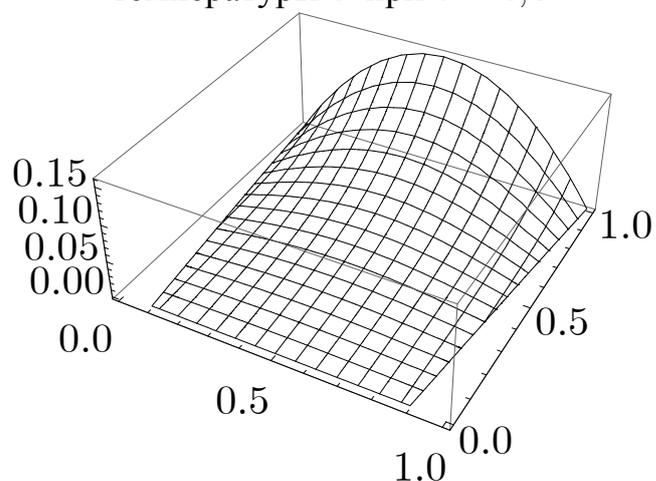


Рисунок В.95 – Поверхность температуры θ при $t = 1,0$

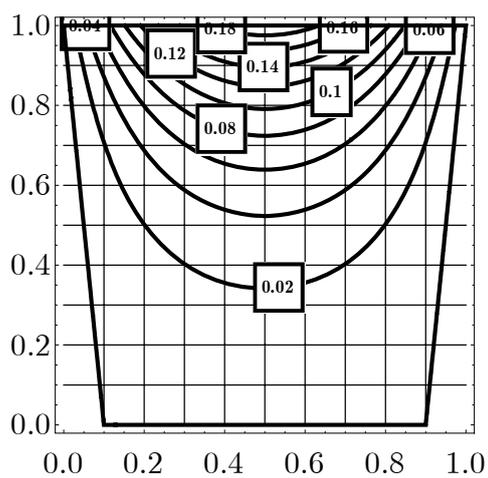


Рисунок В.93 – Линии уровня температуры θ при $t = 1,5$

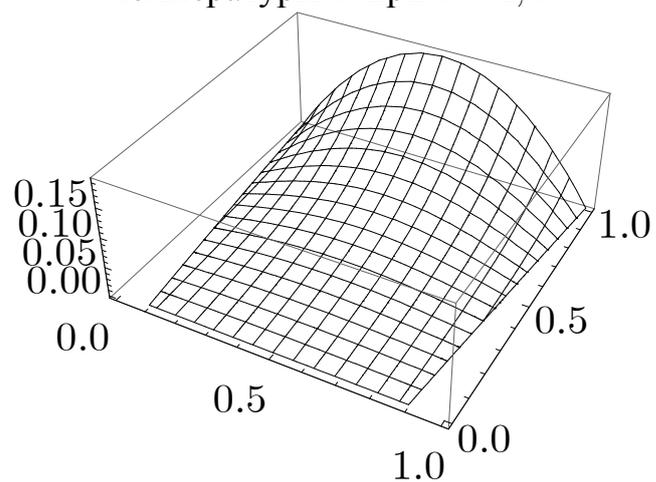


Рисунок В.96 – Поверхность температуры θ при $t = 1,5$

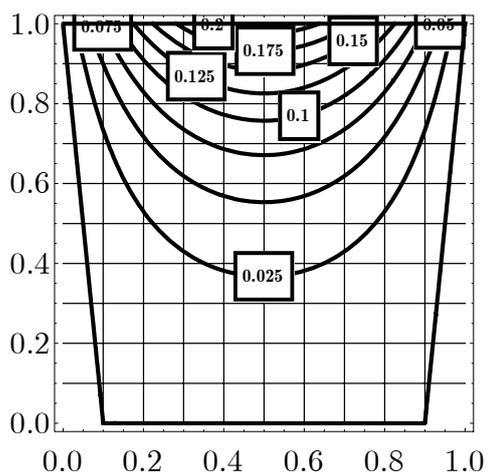


Рисунок В.97 – Линии уровня температуры θ при $t = 2,0$

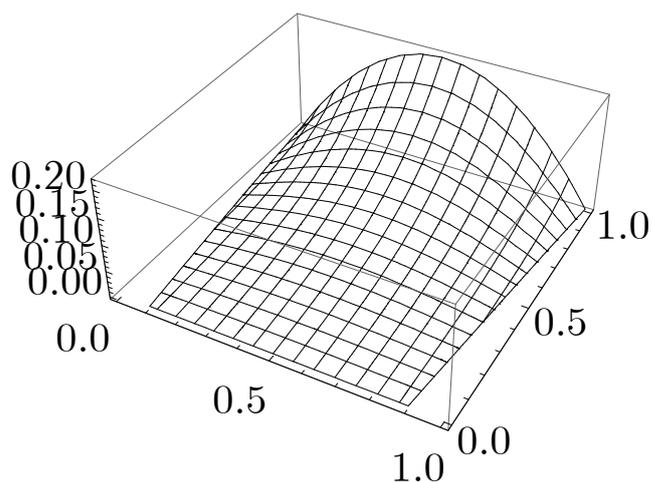


Рисунок В.100 – Поверхность температуры θ при $t = 2,0$

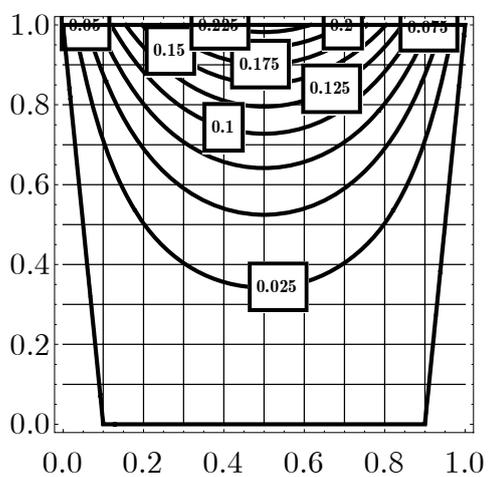


Рисунок В.98 – Линии уровня температуры θ при $t = 3,0$

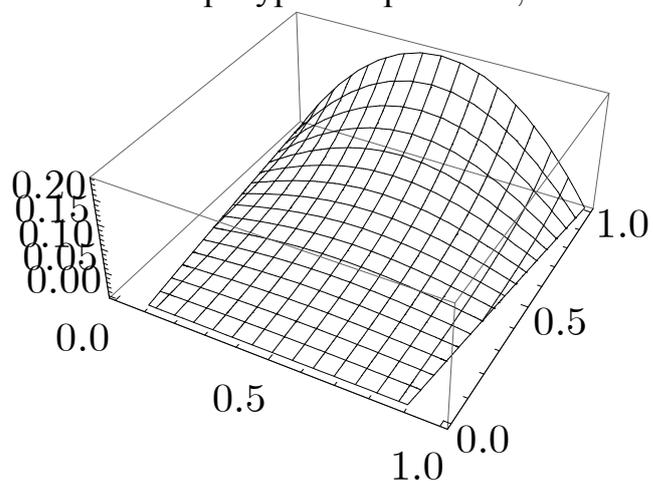


Рисунок В.101 – Поверхность температуры θ при $t = 3,0$

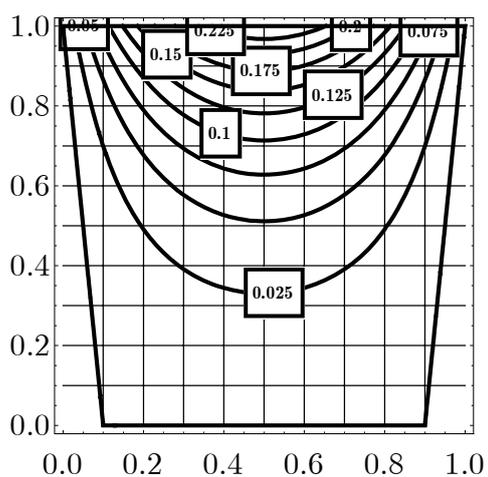


Рисунок В.99 – Линии уровня температуры θ при $t = 5,0$

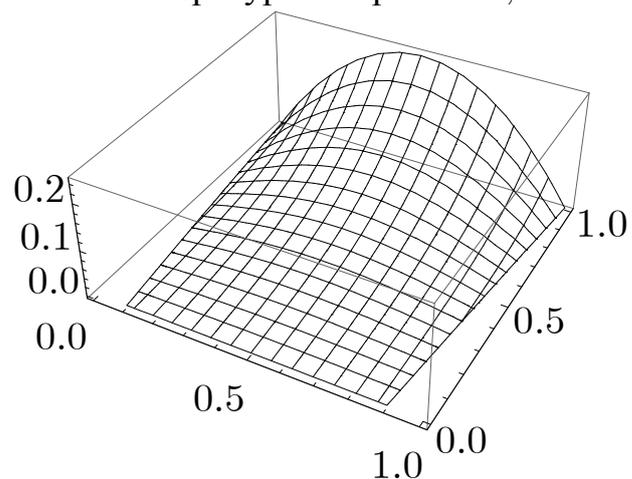


Рисунок В.102 – Поверхность температуры θ при $t = 5,0$

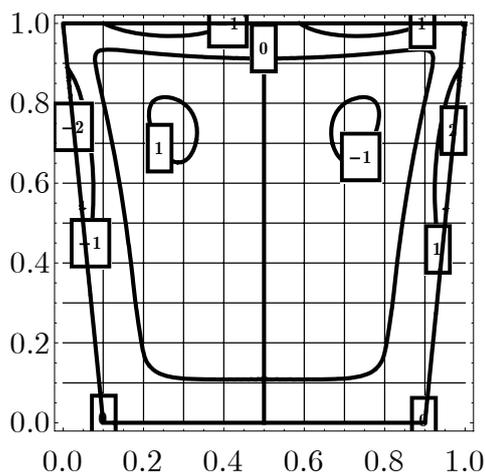


Рисунок В.103 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

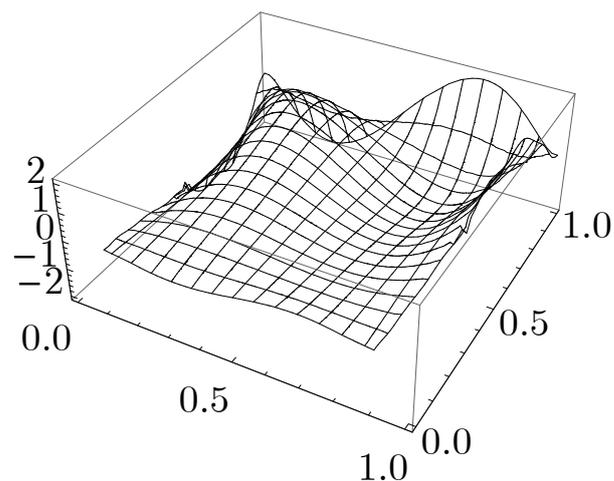


Рисунок В.106 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$

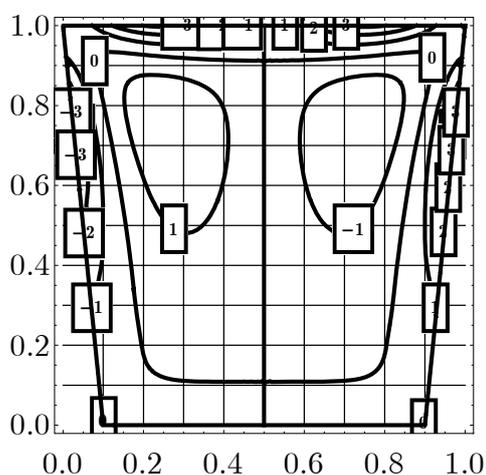


Рисунок В.104 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

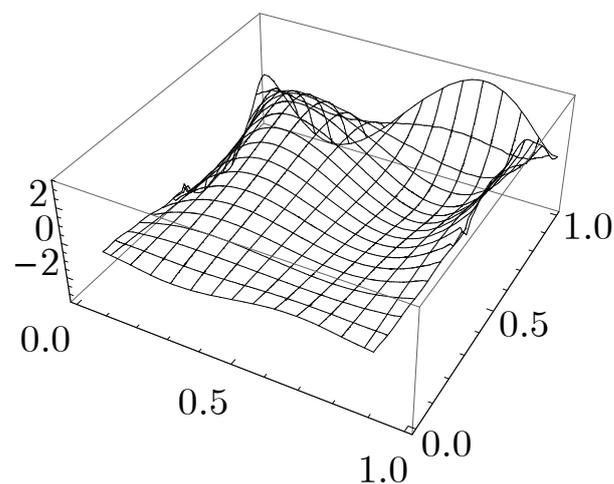


Рисунок В.107 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$

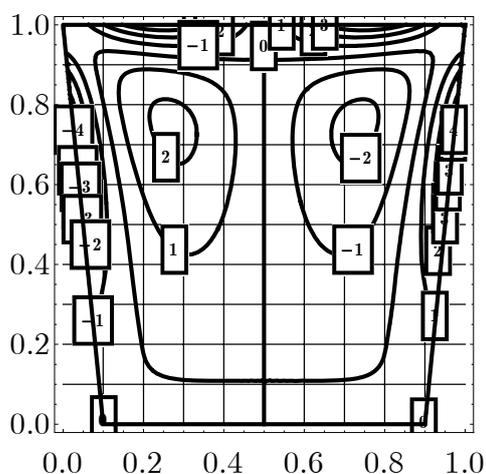


Рисунок В.105 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

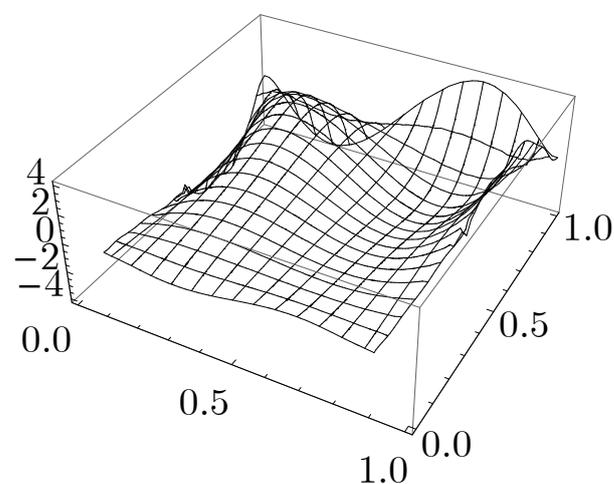


Рисунок В.108 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,5$

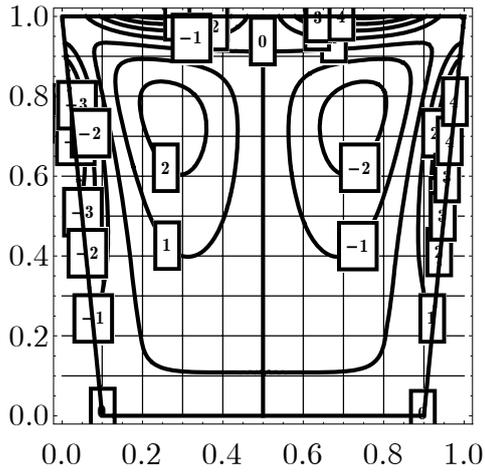


Рисунок В.109 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

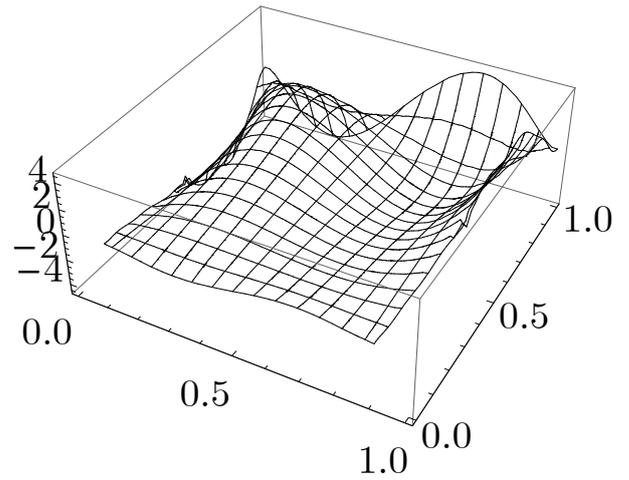


Рисунок В.112 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$

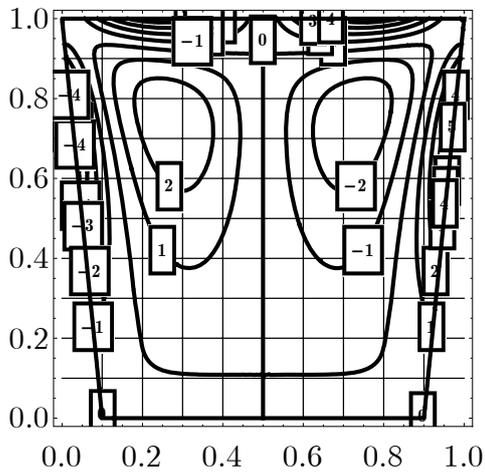


Рисунок В.110 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

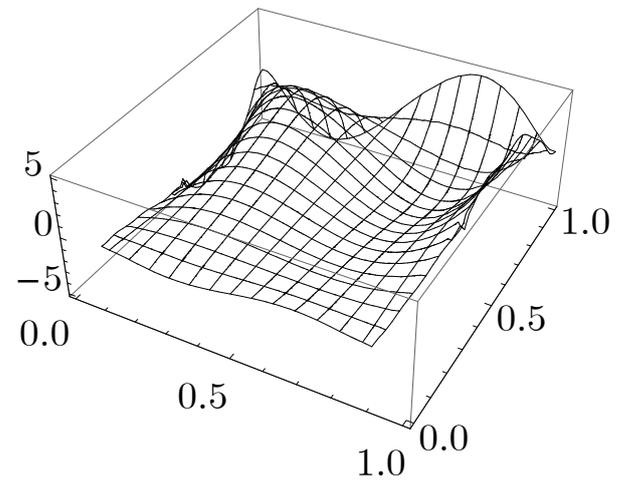


Рисунок В.113 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$

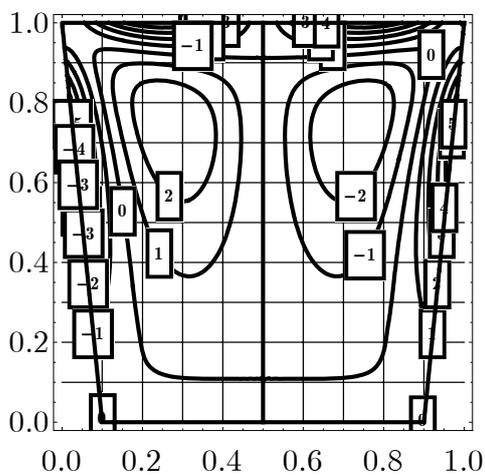


Рисунок В.111 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

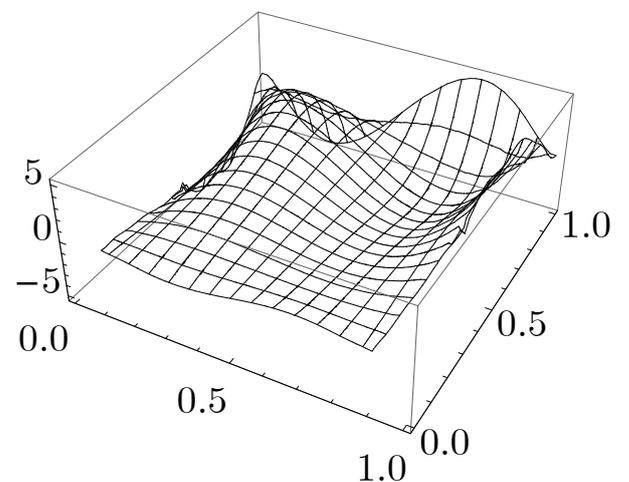


Рисунок В.114 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$

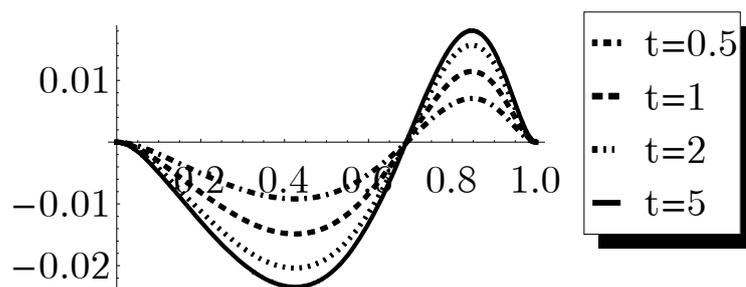


Рисунок В.115 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени

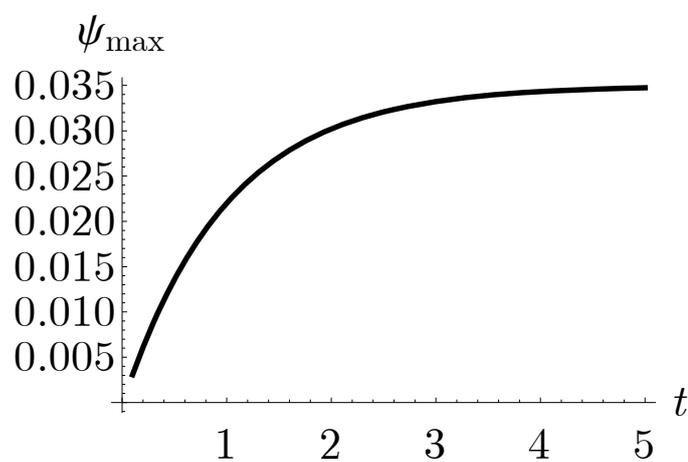


Рисунок В.116 – Изменение максимума функции тока ψ во времени

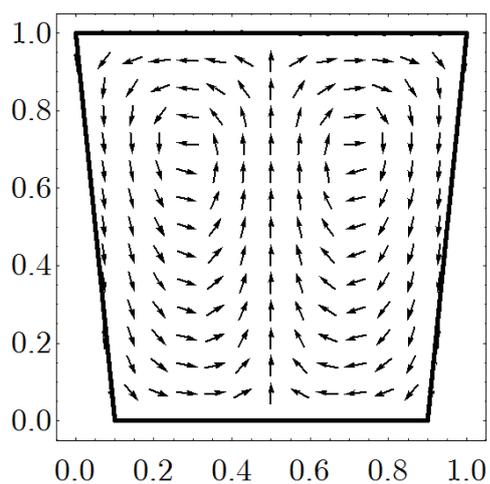


Рисунок В.117 – Векторное поле скоростей

Приложение Г

Результаты вычислительного эксперимента для функции тока (нелинейная задача)

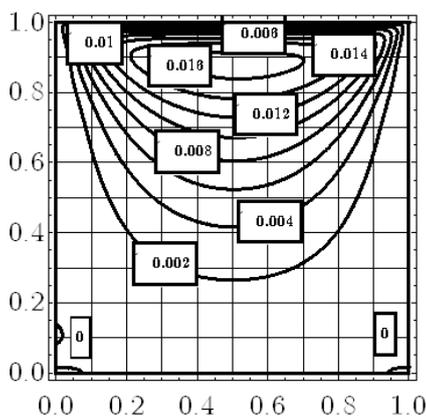


Рисунок Г.1 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

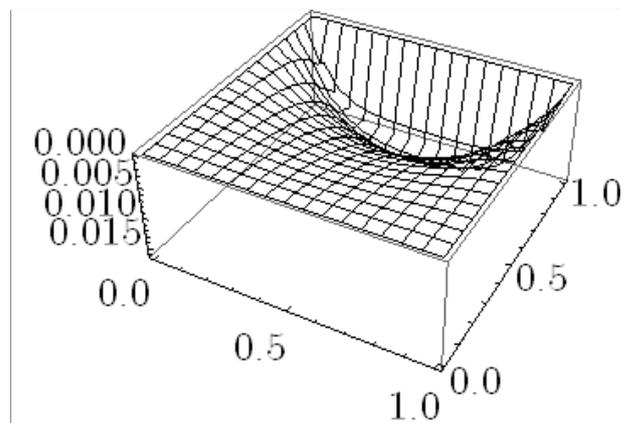


Рисунок Г.4 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

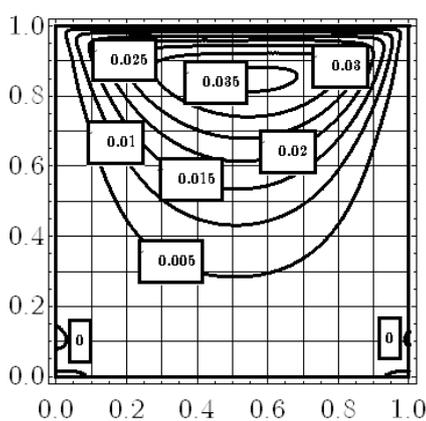


Рисунок Г.2 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

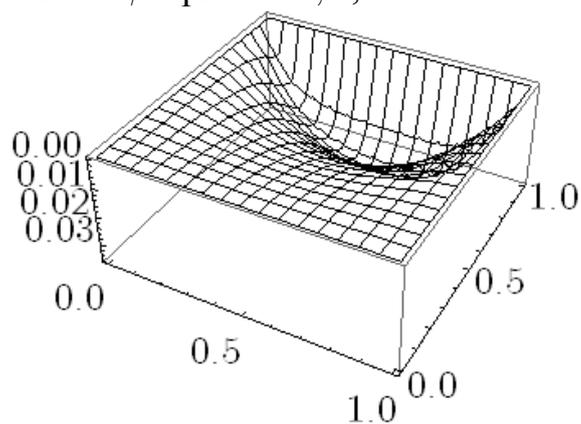


Рисунок Г.5 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

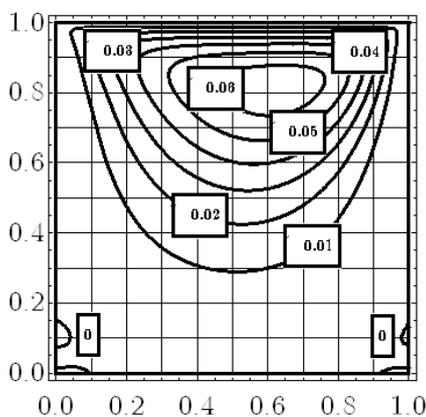


Рисунок Г.3 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

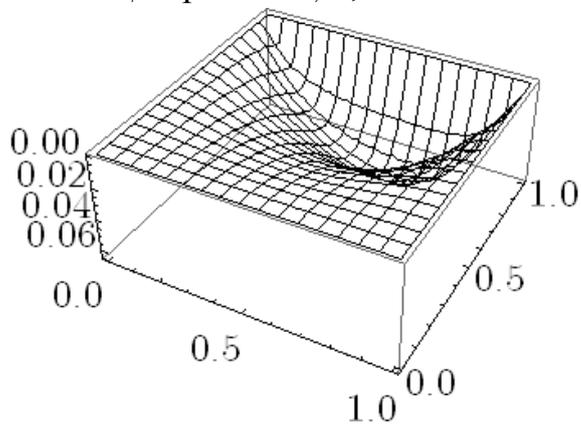


Рисунок Г.6 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

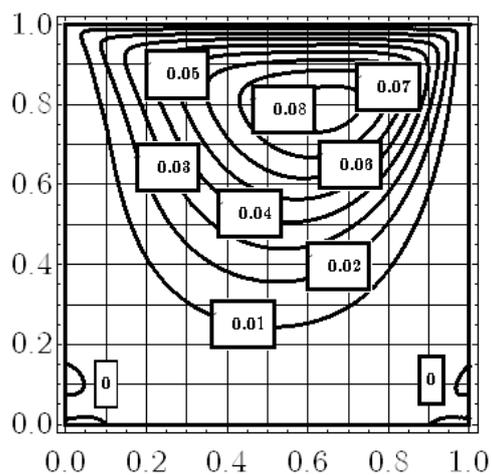


Рисунок Г.7 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

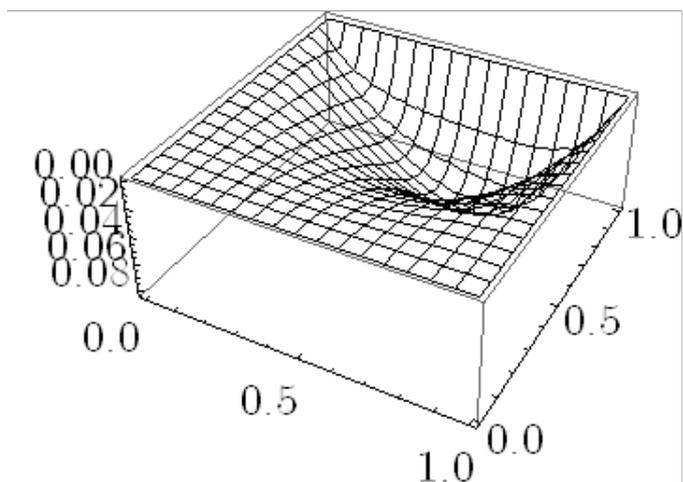


Рисунок Г.10 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

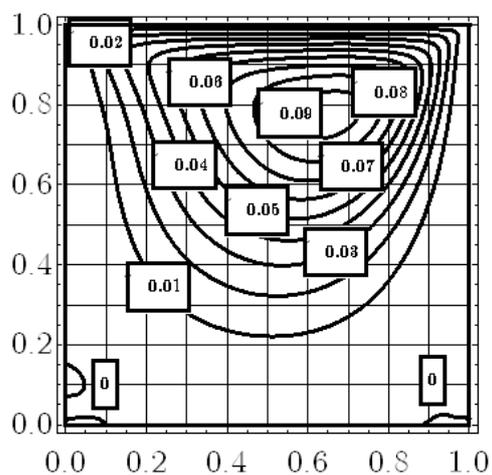


Рисунок Г.8 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

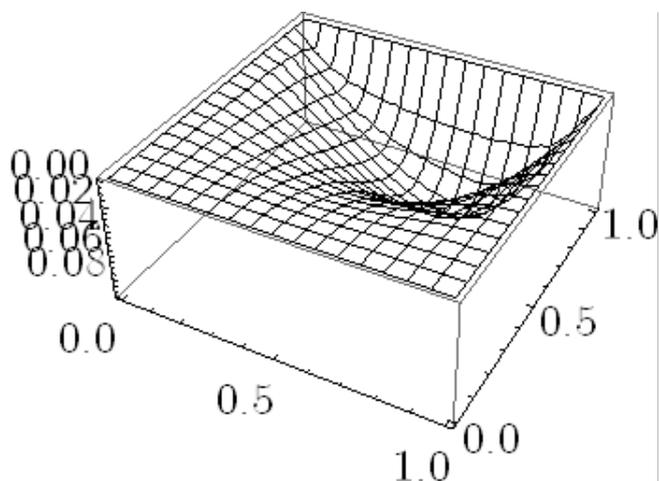


Рисунок Г.11 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

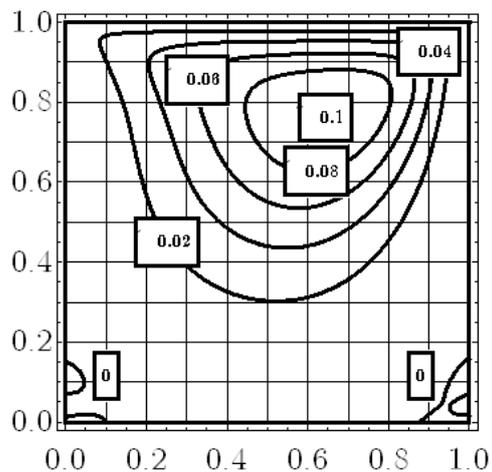


Рисунок Г.9 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

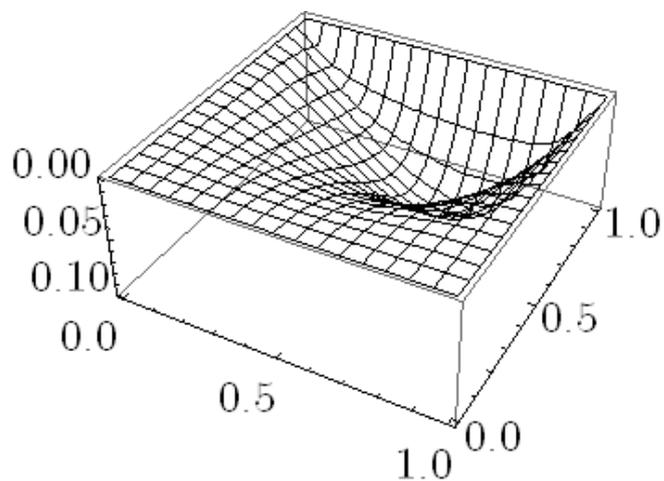


Рисунок Г.12 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

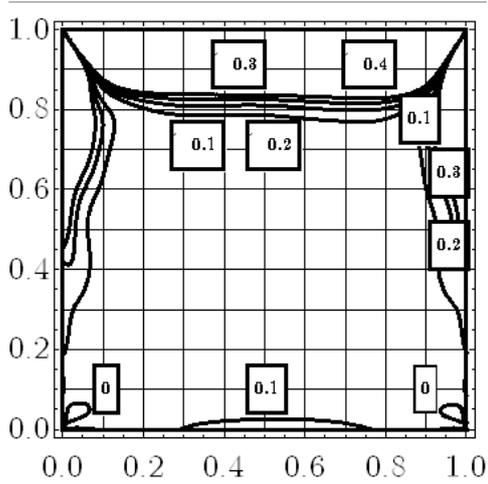


Рисунок Г.13 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

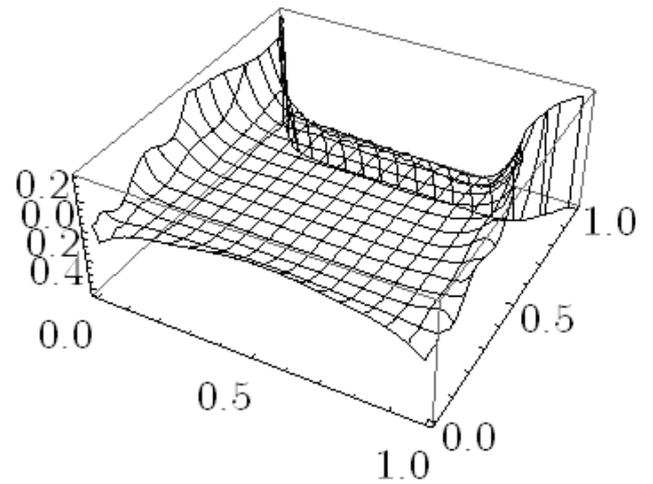


Рисунок Г.16 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

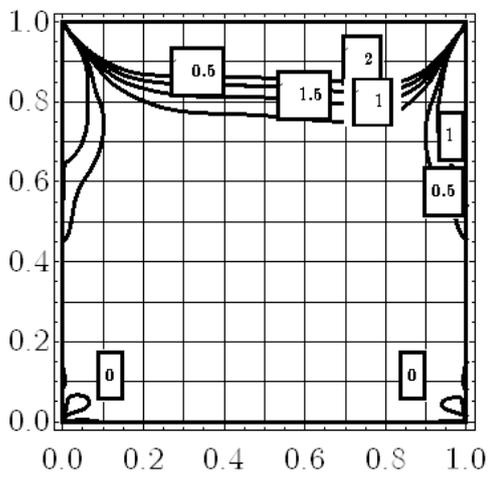


Рисунок Г.14 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

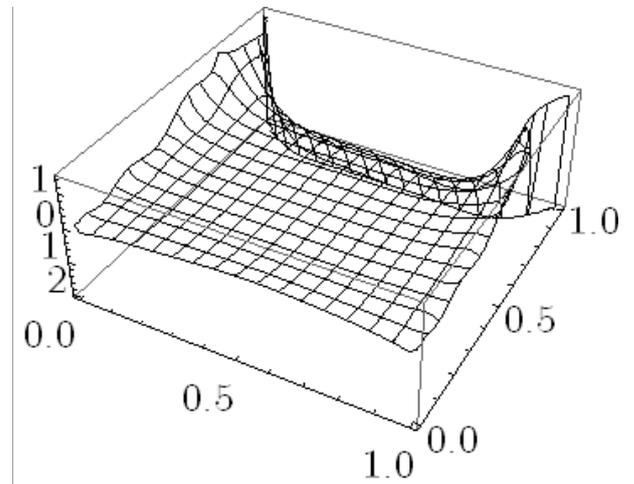


Рисунок Г.17 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

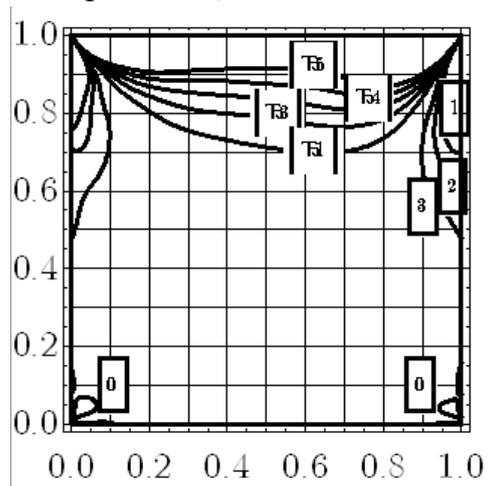


Рисунок Г.15 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

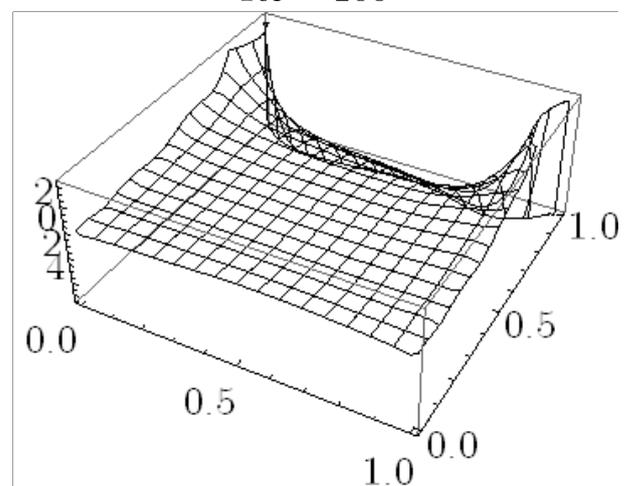


Рисунок Г.18 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

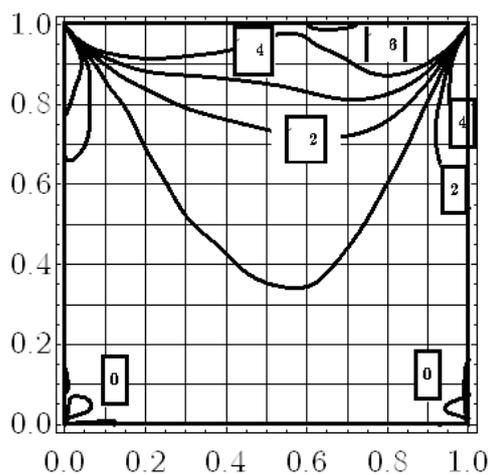


Рисунок Г.19 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

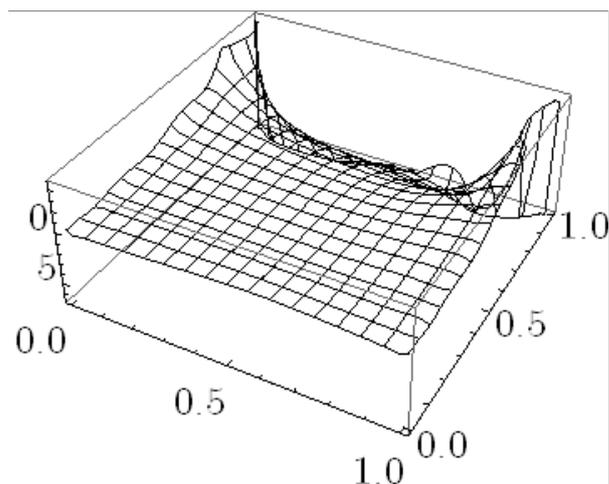


Рисунок Г.22 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

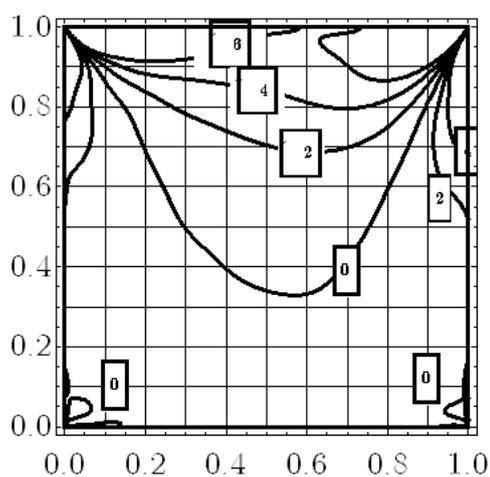


Рисунок Г.20 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

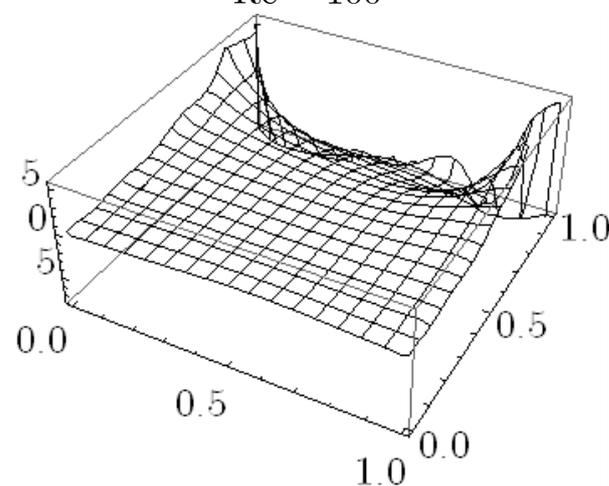


Рисунок Г.23 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

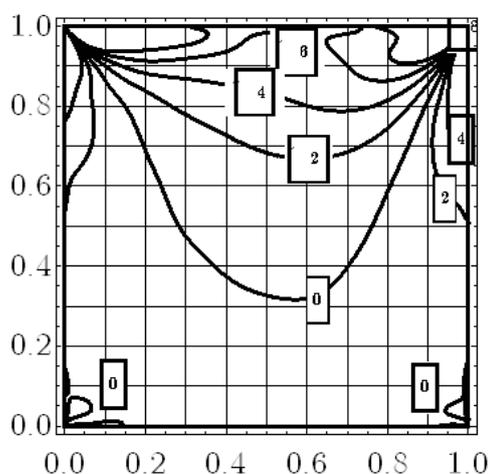


Рисунок Г.21 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

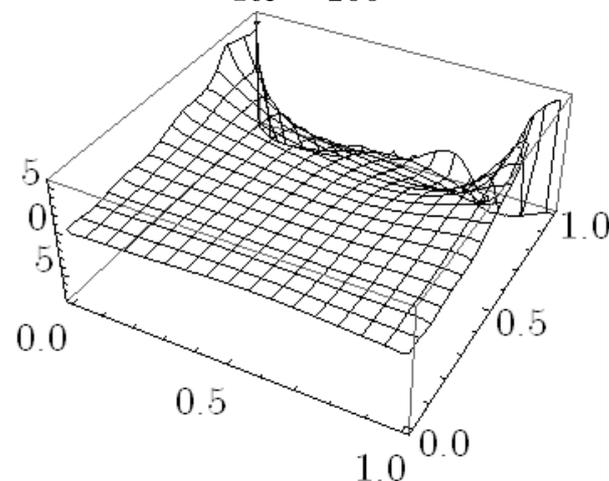


Рисунок Г.24 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

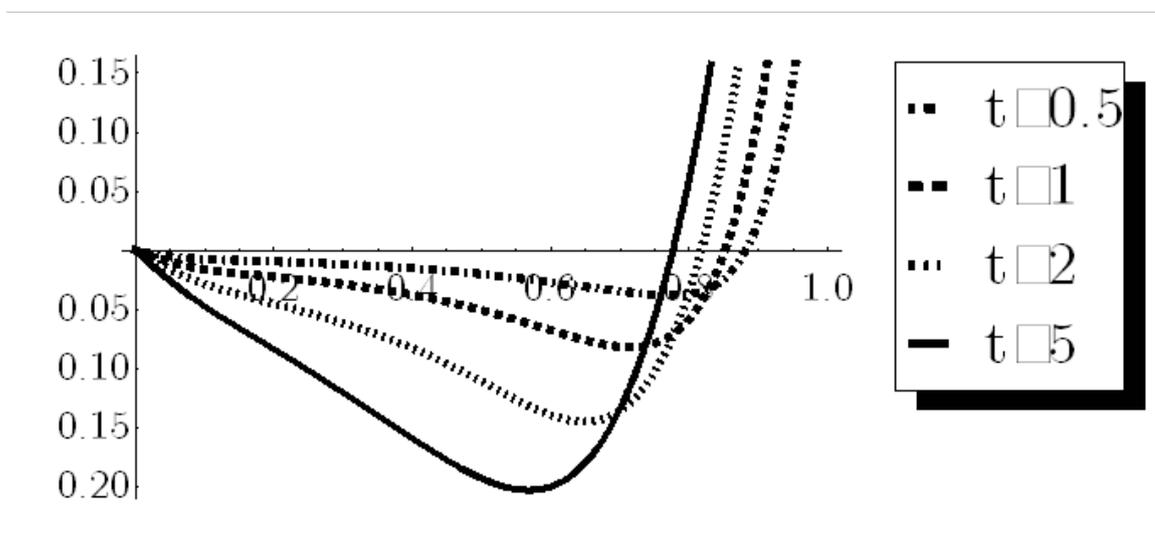


Рисунок Г.25 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени,
 $Re = 100$

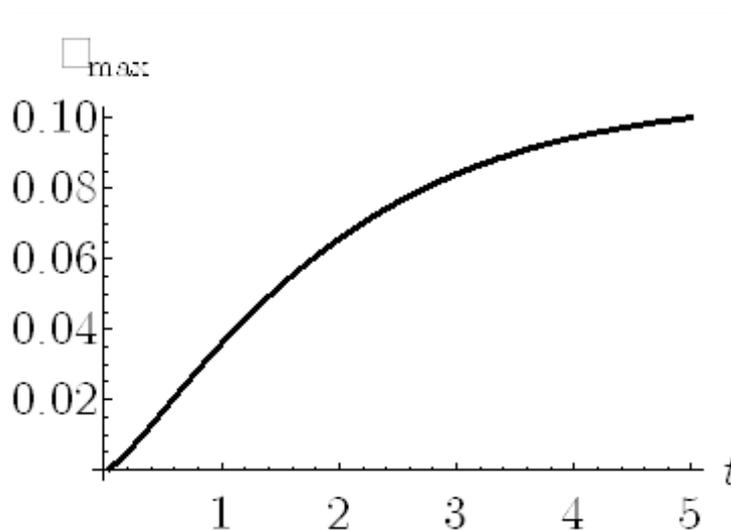


Рисунок Г.26 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени,
 $Re = 100$

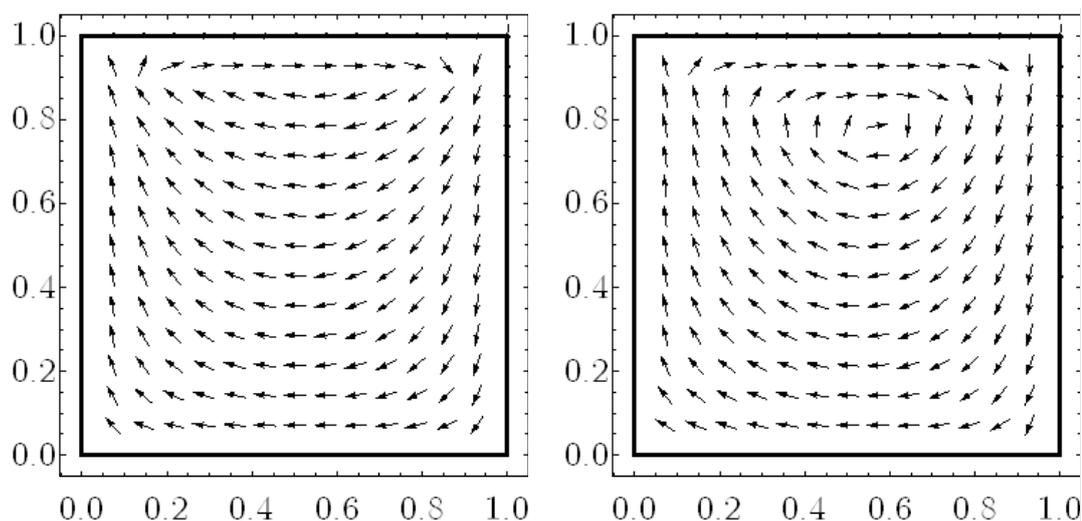


Рисунок Г.27 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 100$

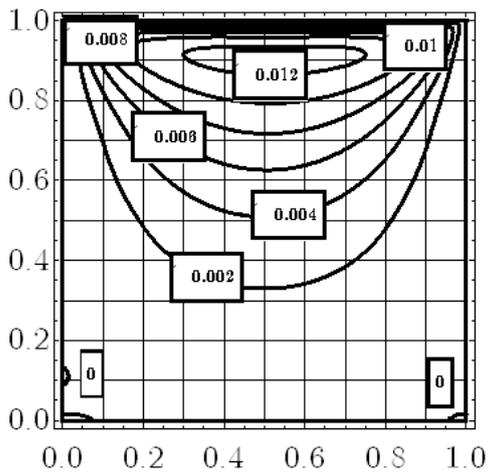


Рисунок Г.28 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

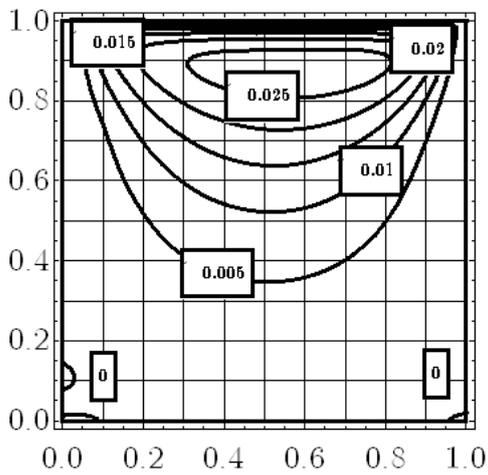


Рисунок Г.29 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

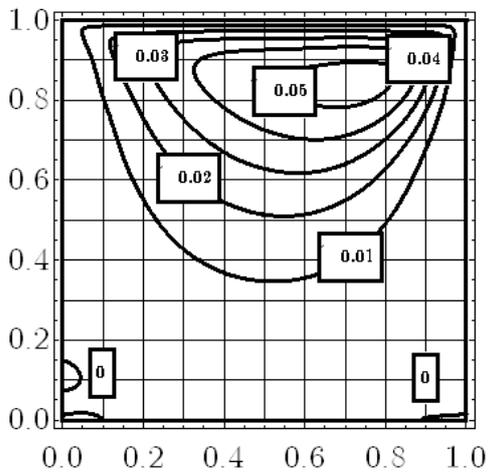


Рисунок Г.30 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

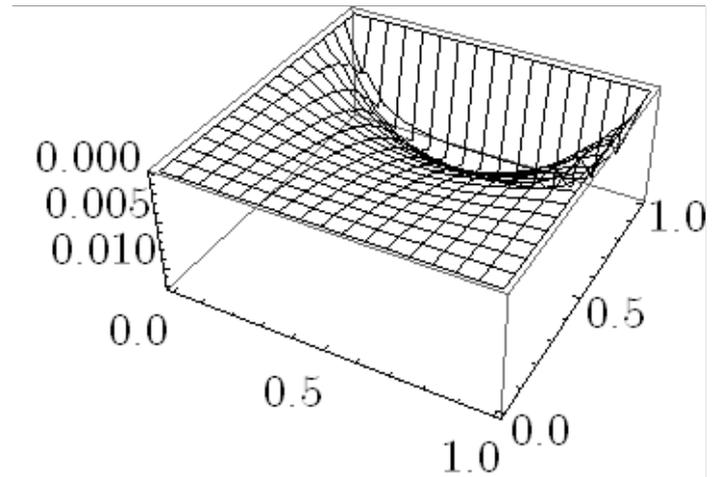


Рисунок Г.31 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

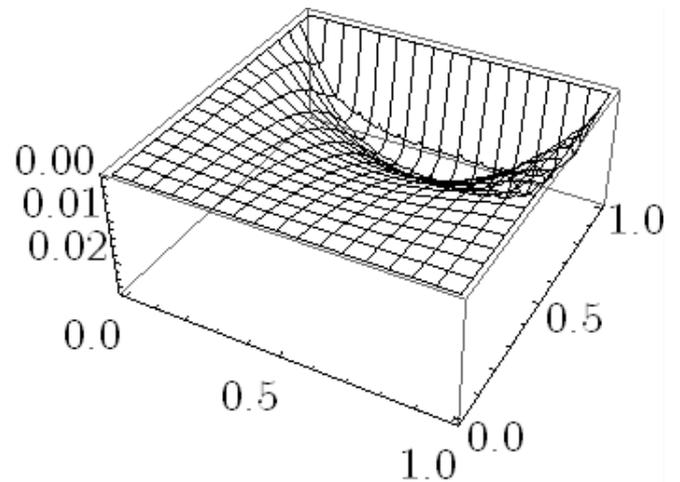


Рисунок Г.32 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

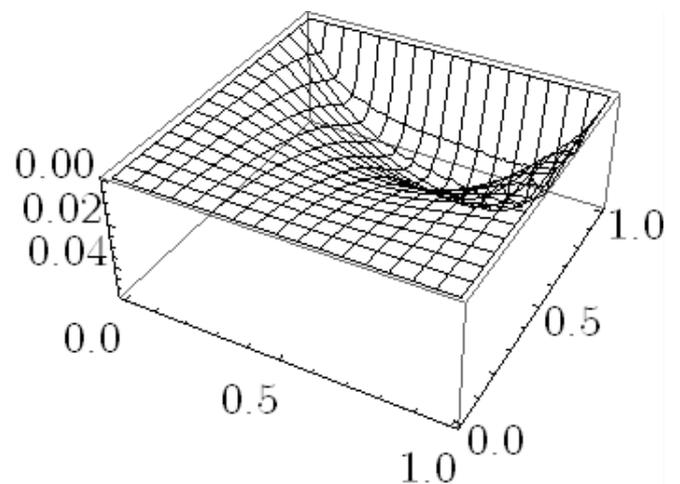


Рисунок Г.33 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

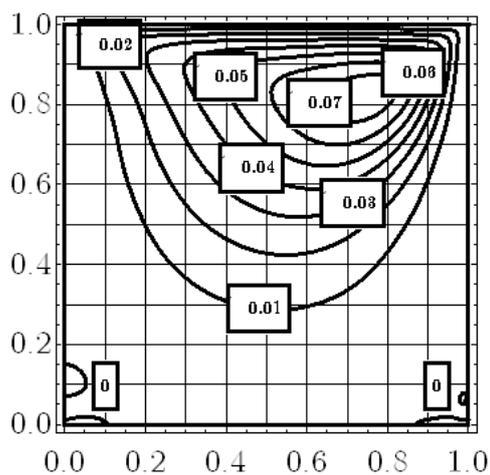


Рисунок Г.34 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

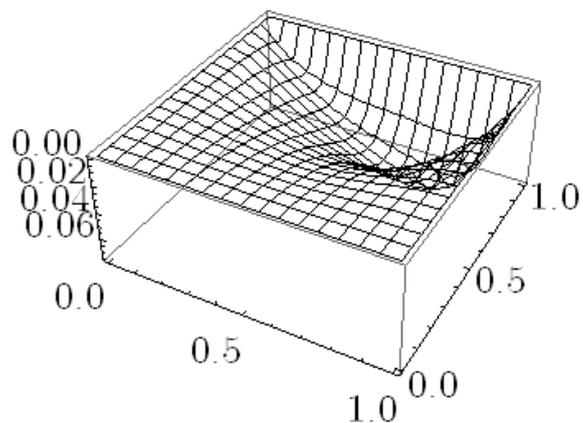


Рисунок Г.37 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

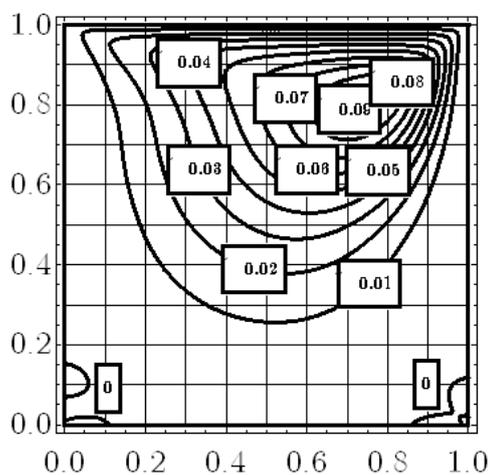


Рисунок Г.35 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

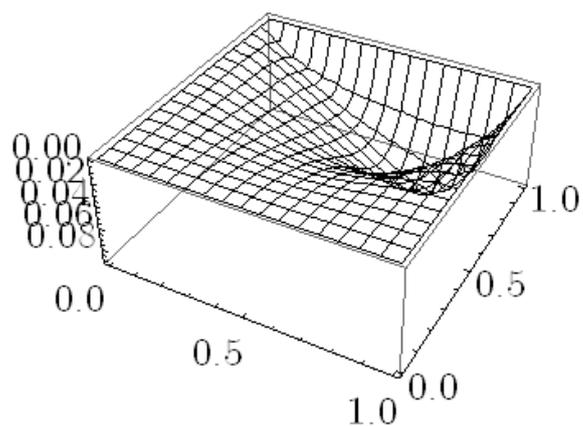


Рисунок Г.38 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

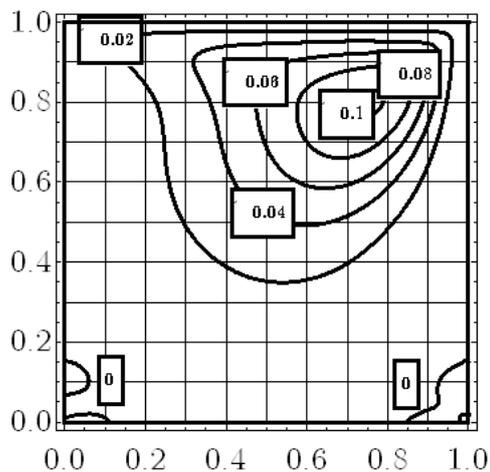


Рисунок Г.36 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

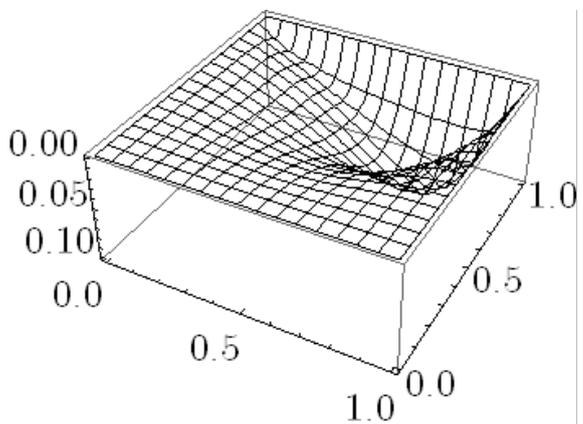


Рисунок Г.39 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

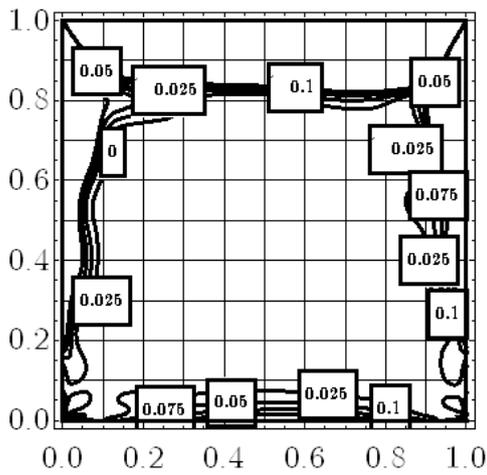


Рисунок Г.40 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 200$

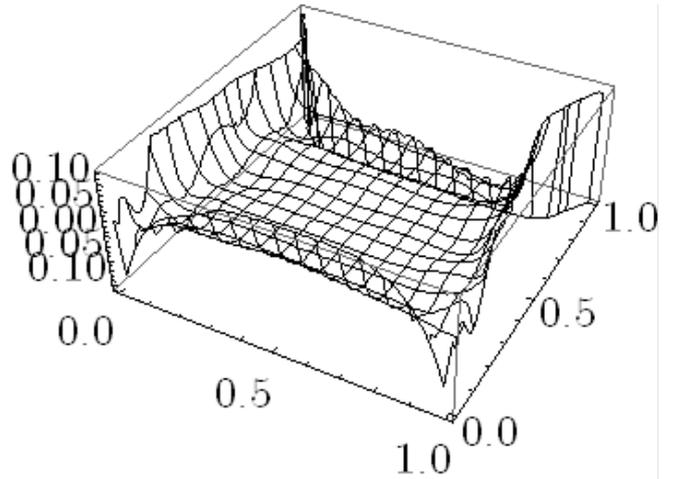


Рисунок Г.43 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 200$

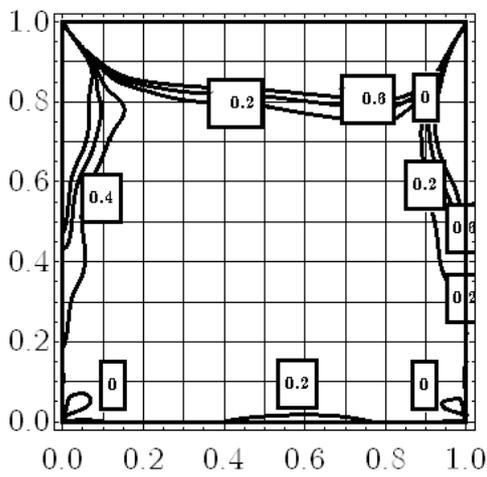


Рисунок Г.41 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 200$

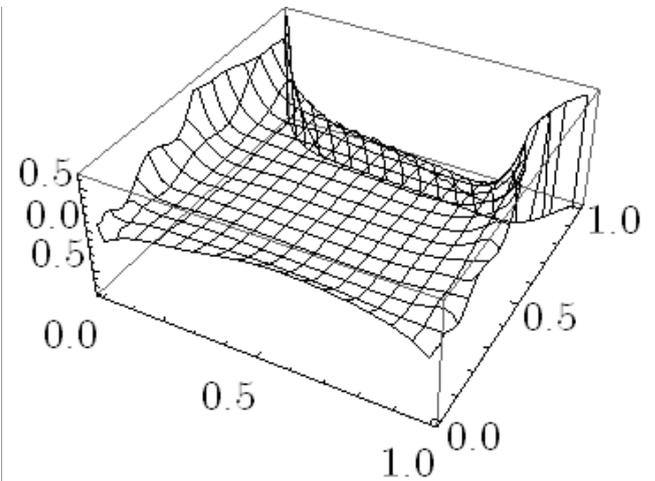


Рисунок Г.44 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 200$

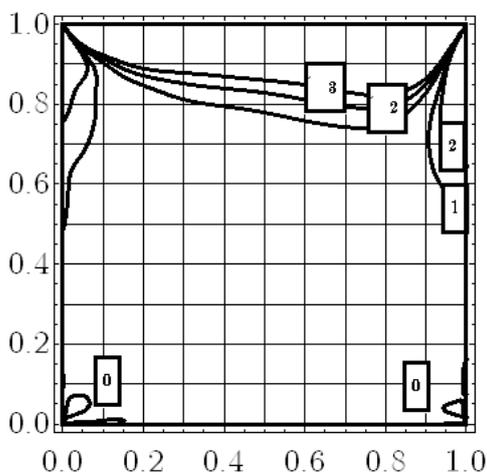


Рисунок Г.42 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 200$

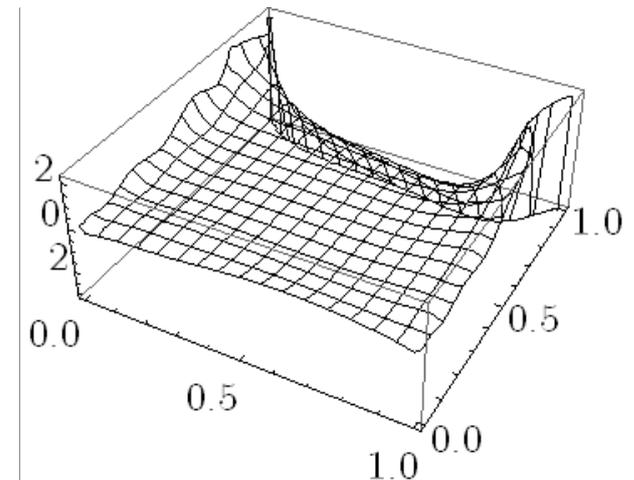


Рисунок Г.45 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 200$

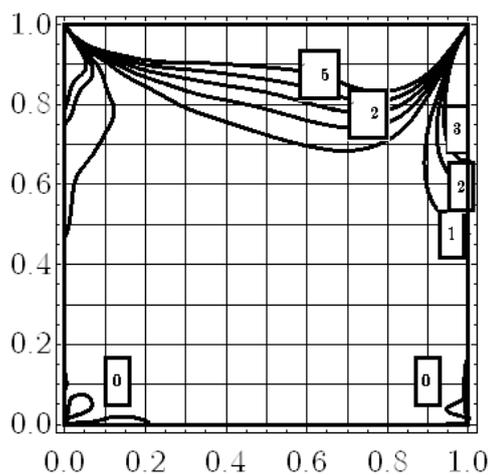


Рисунок Г.46 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

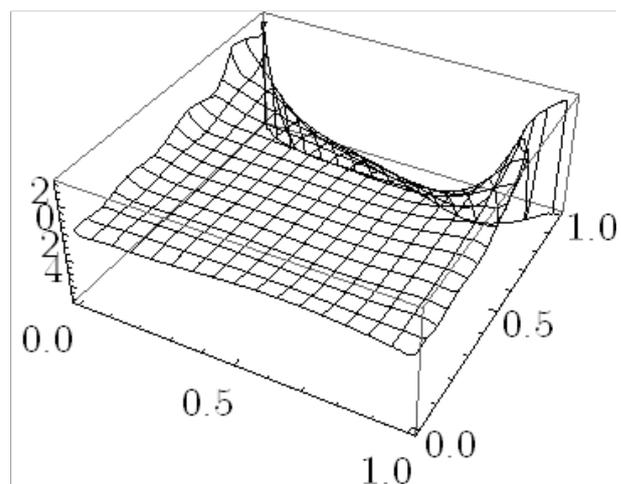


Рисунок Г.49 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

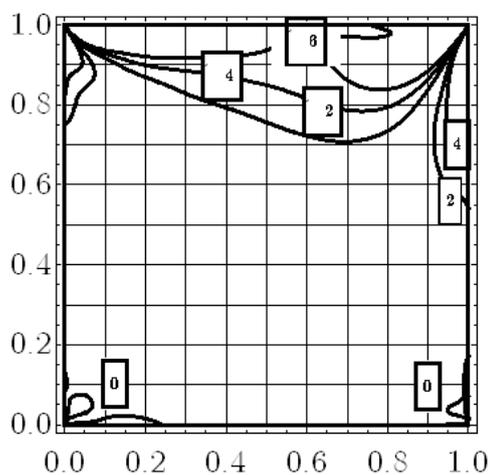


Рисунок Г.47 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

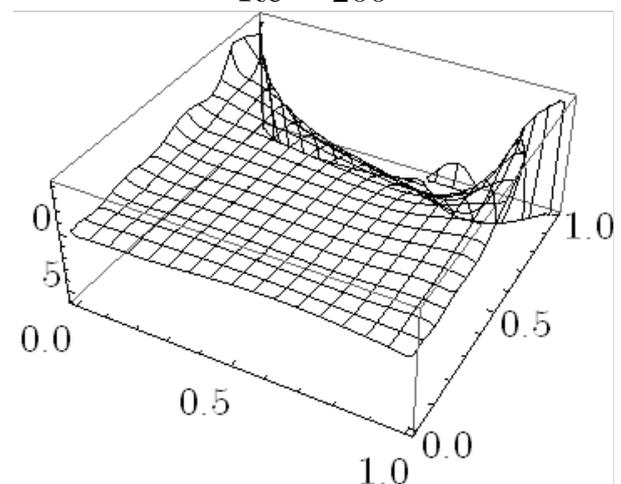


Рисунок Г.50 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

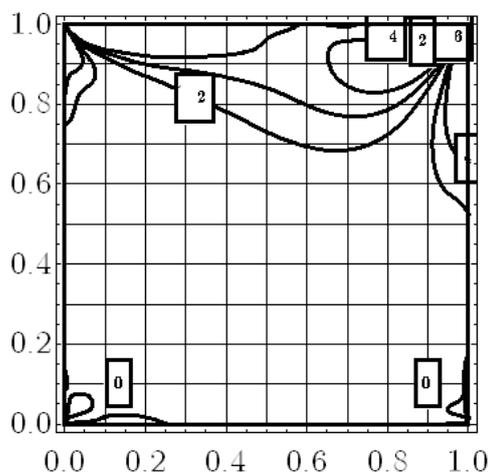


Рисунок Г.48 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

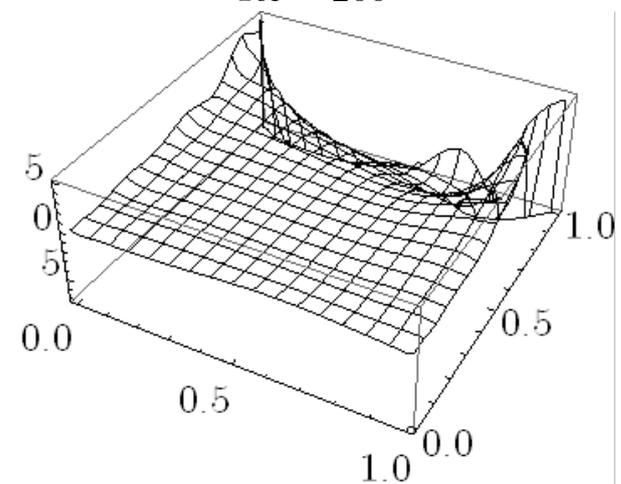


Рисунок Г.51 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

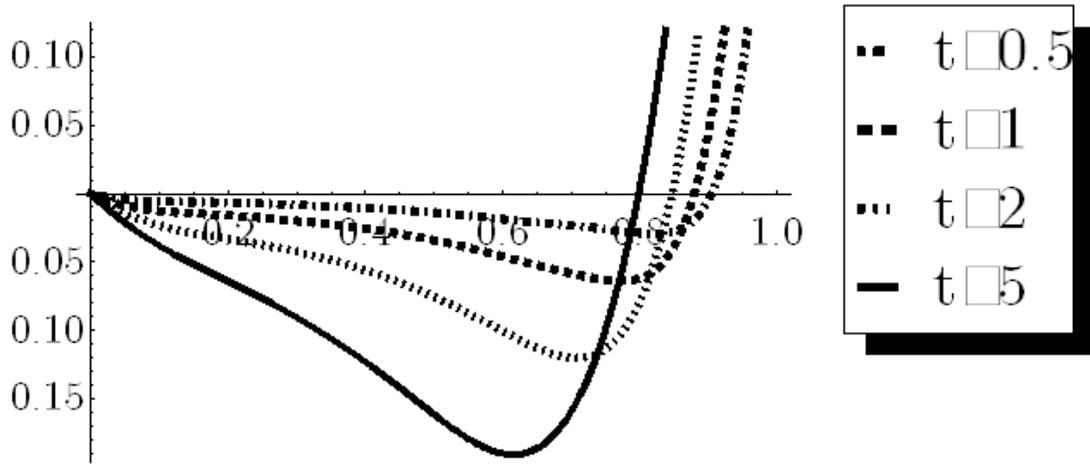


Рисунок Г.52 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени, $Re = 200$

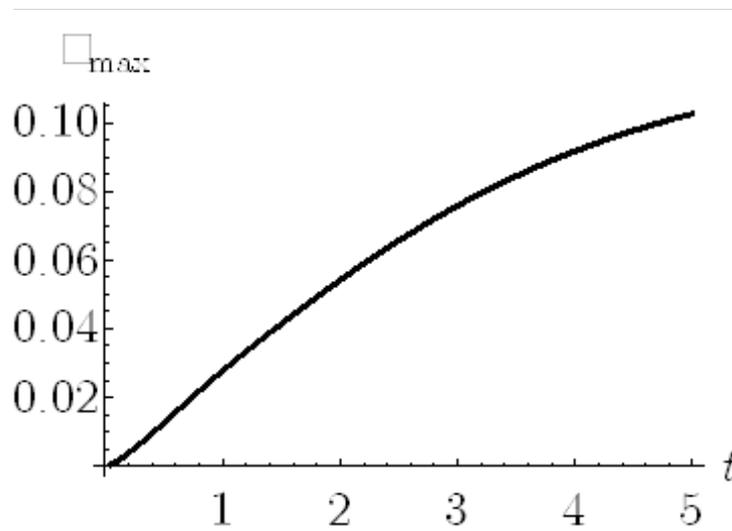


Рисунок Г.53 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени, $Re = 200$

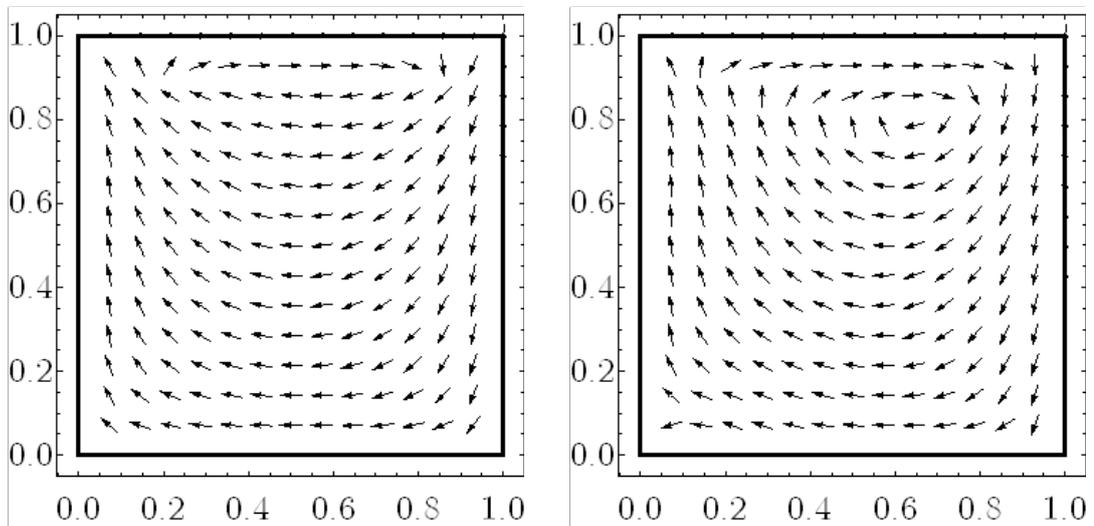


Рисунок Г.54 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 200$

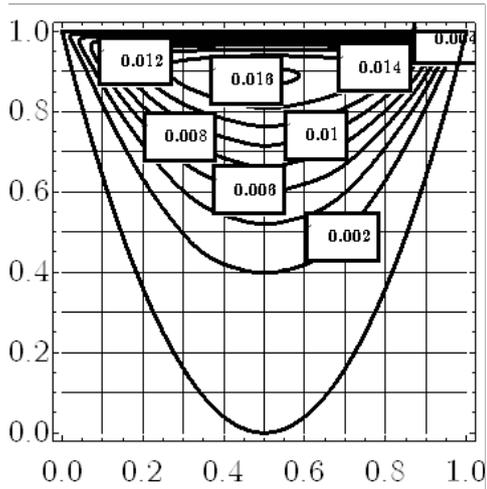


Рисунок Г.55 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

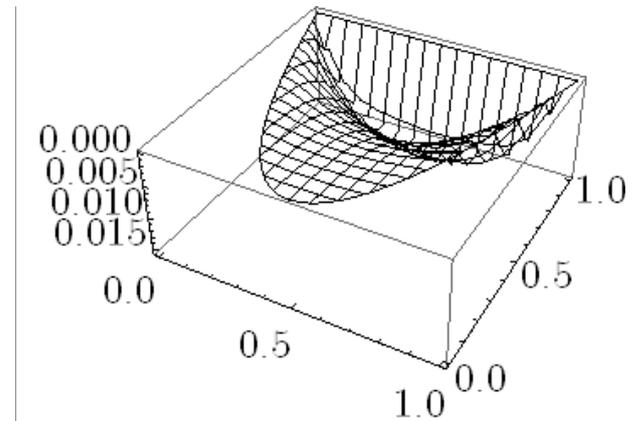


Рисунок Г.58 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

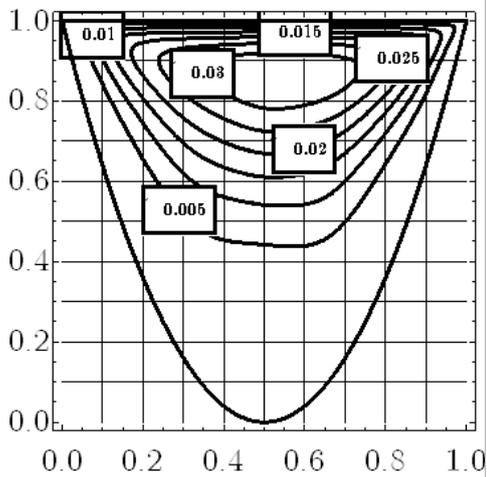


Рисунок Г.56 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

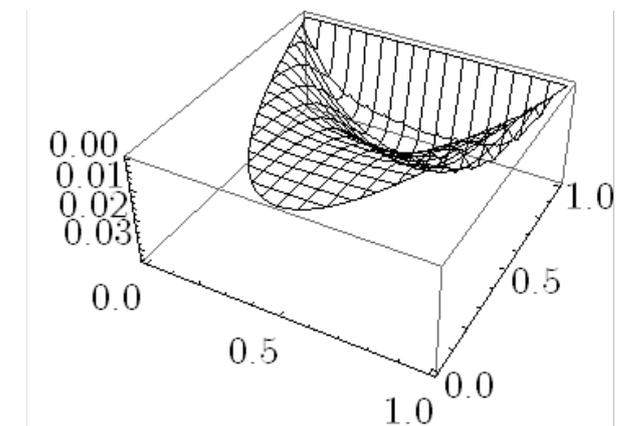


Рисунок Г.59 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

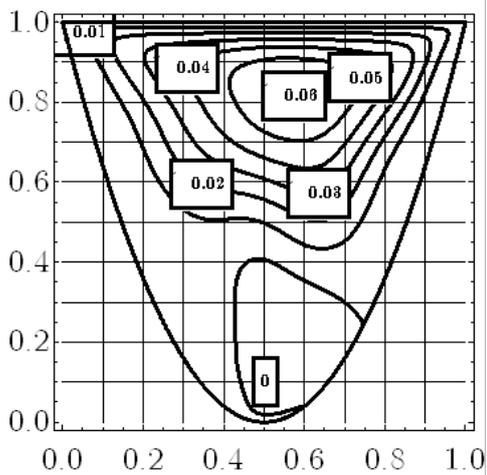


Рисунок Г.57 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

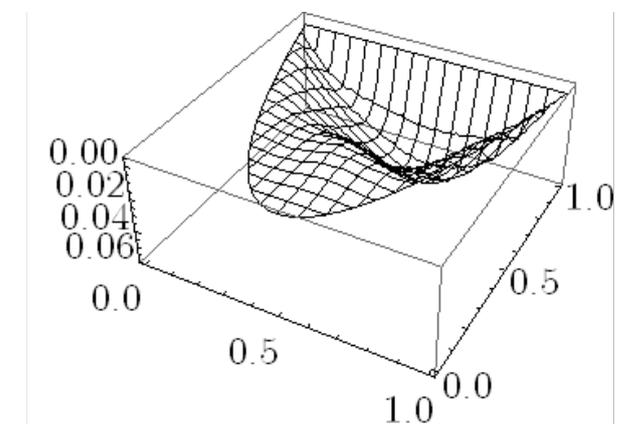


Рисунок Г.60 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

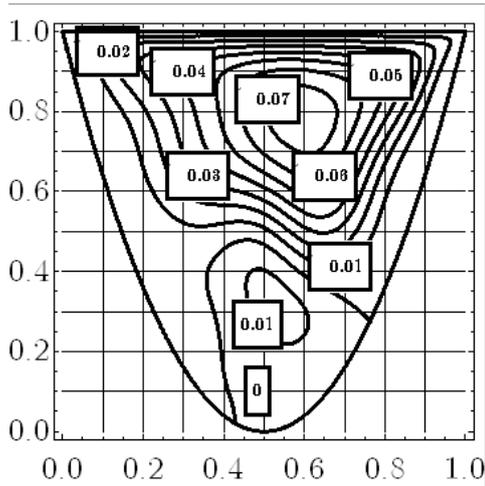


Рисунок Г.61 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

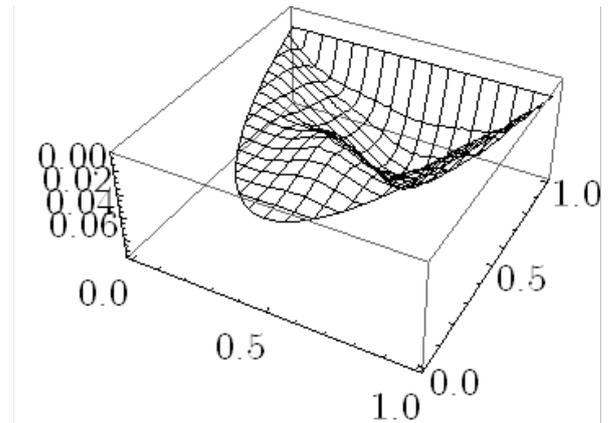


Рисунок Г.64 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

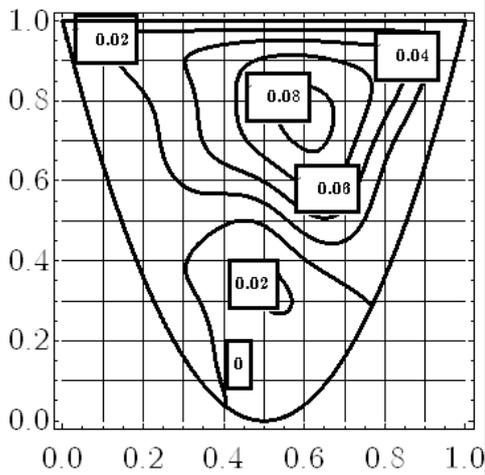


Рисунок Г.62 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

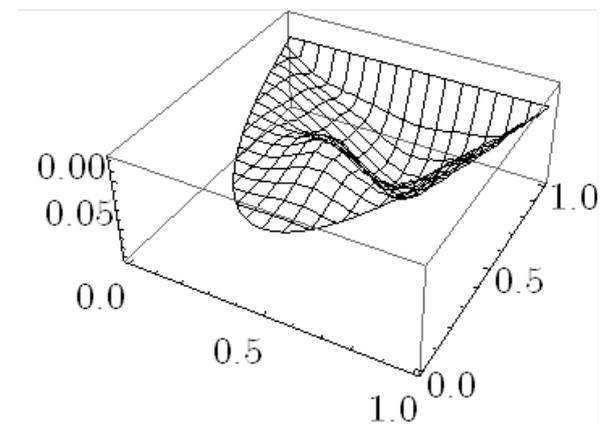


Рисунок Г.65 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

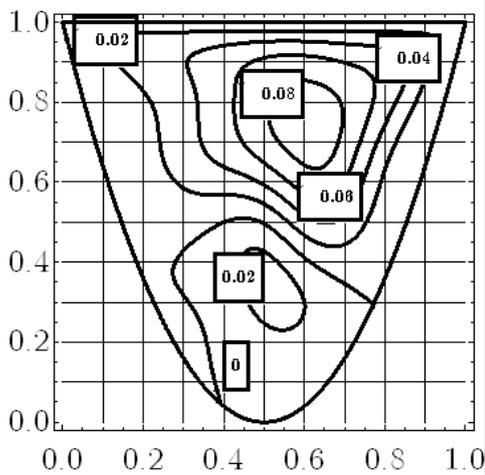


Рисунок Г.63 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

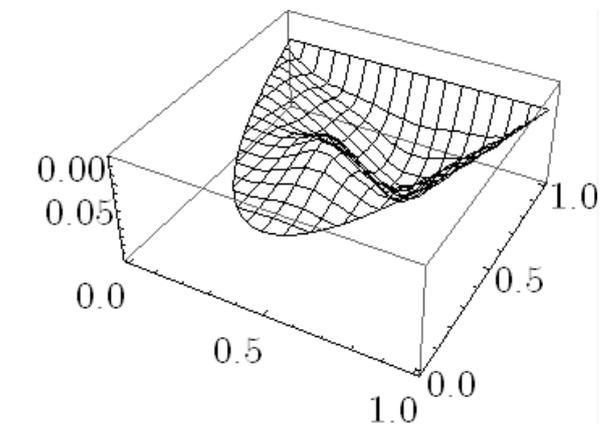


Рисунок Г.66 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

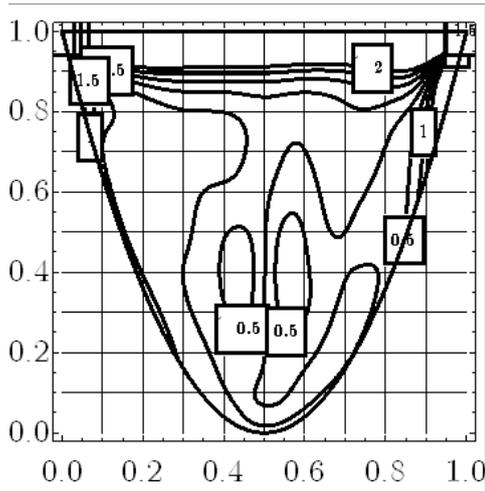


Рисунок Г.67 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

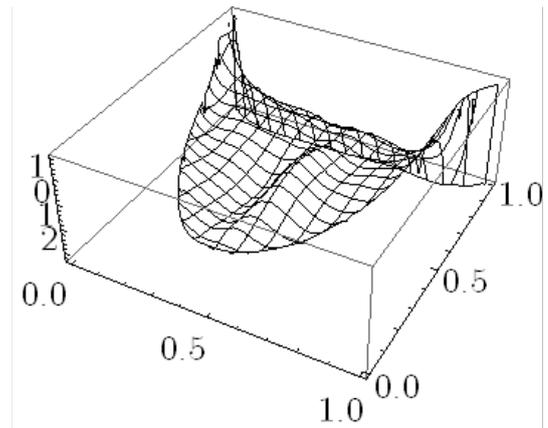


Рисунок Г.70 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

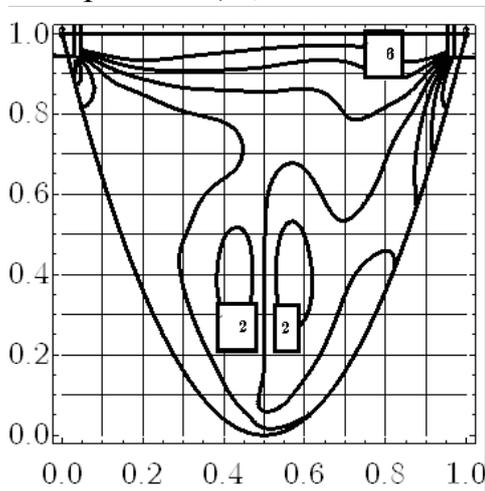


Рисунок Г.68 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

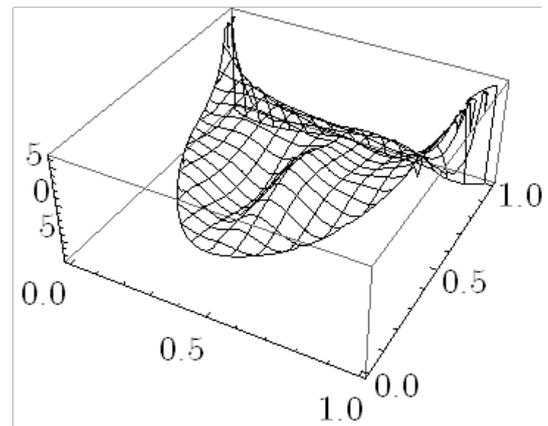


Рисунок Г.71 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

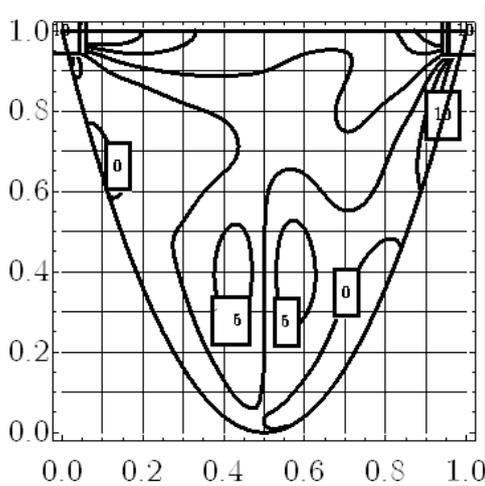


Рисунок Г.69 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

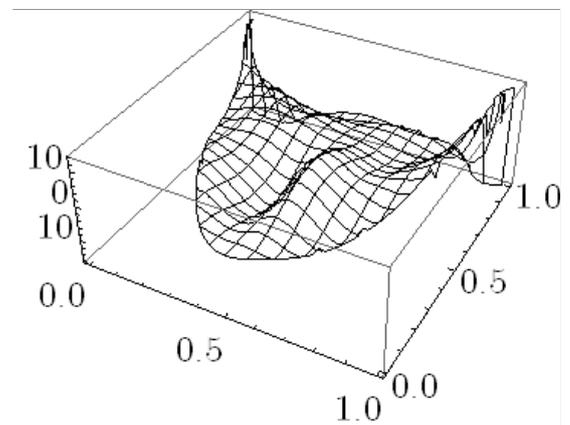


Рисунок Г.72 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

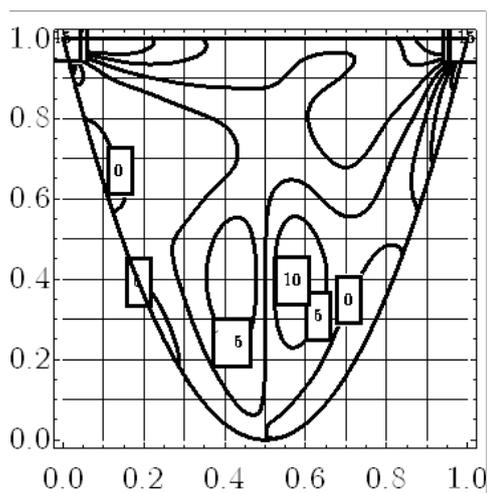


Рисунок Г.73 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

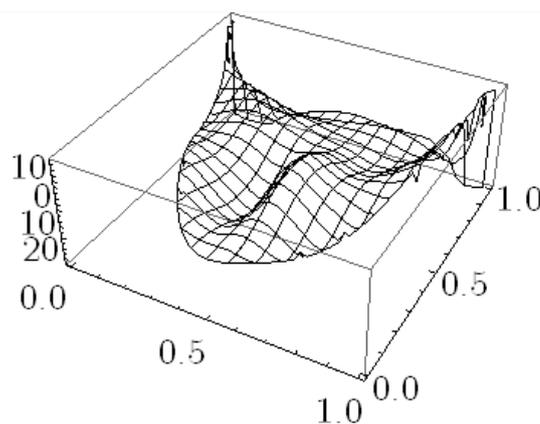


Рисунок Г.76 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

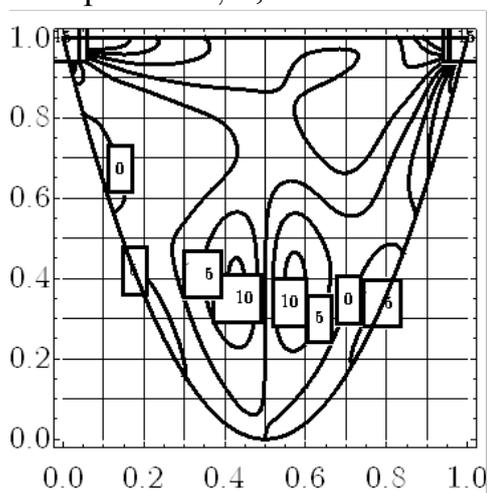


Рисунок Г.74 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

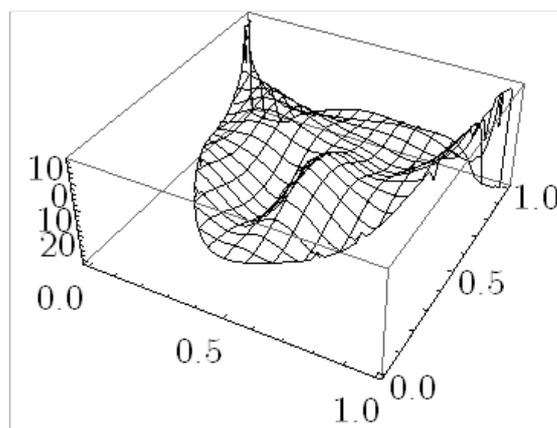


Рисунок Г.77 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

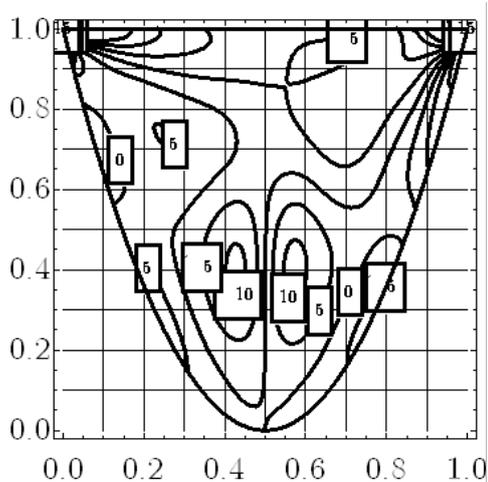


Рисунок Г.75 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

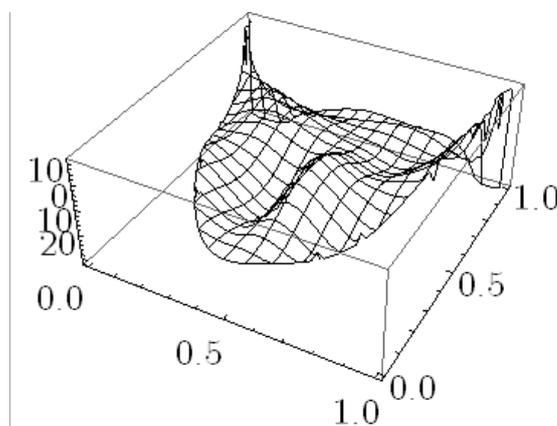


Рисунок Г.78 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

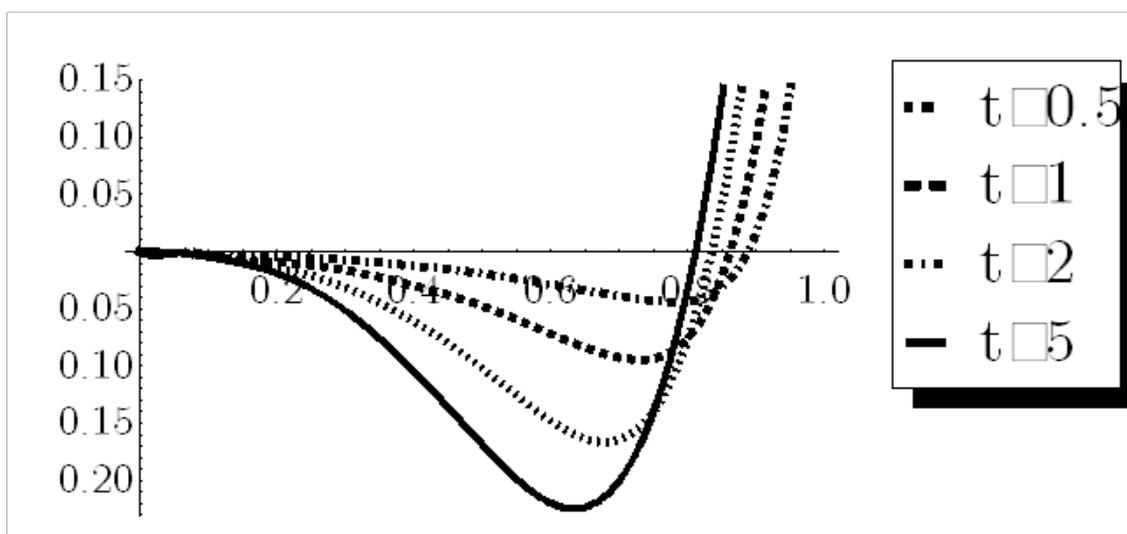


Рисунок Г.79 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени,
 $Re = 100$

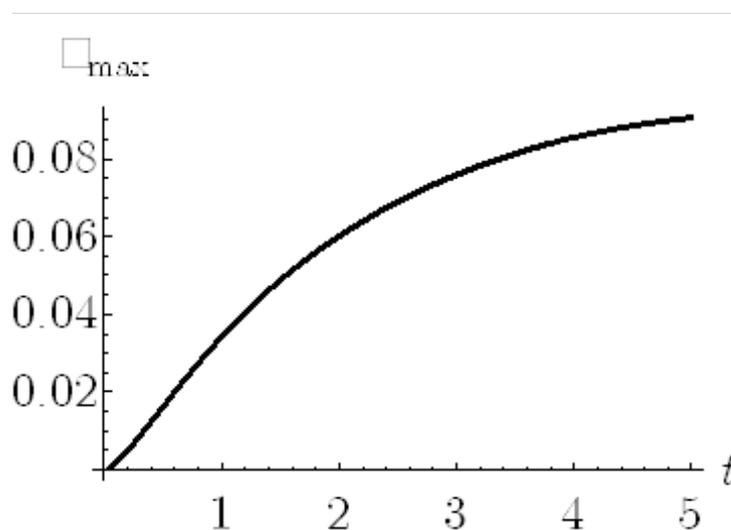


Рисунок Г.80 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени,
 $Re = 100$

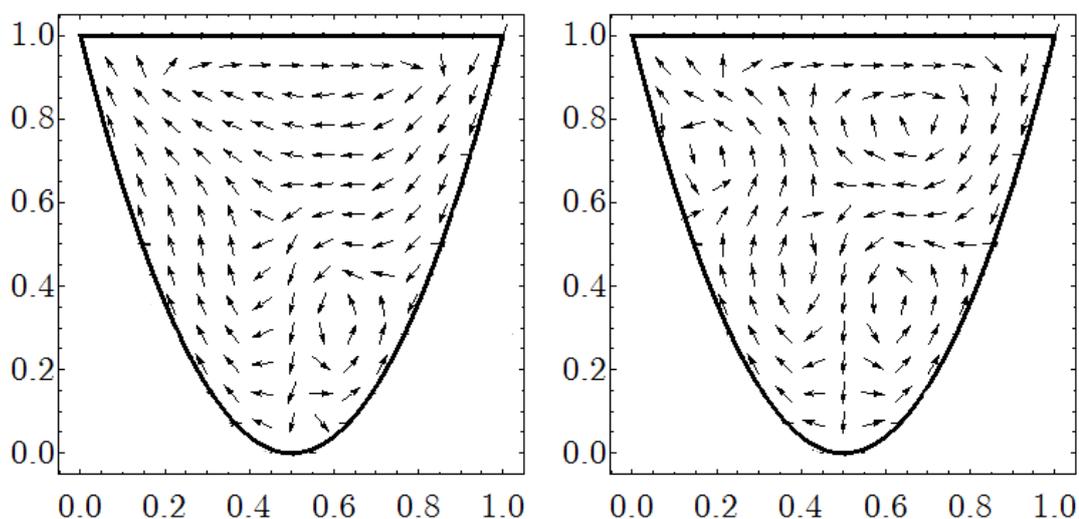


Рисунок Г.81 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 100$

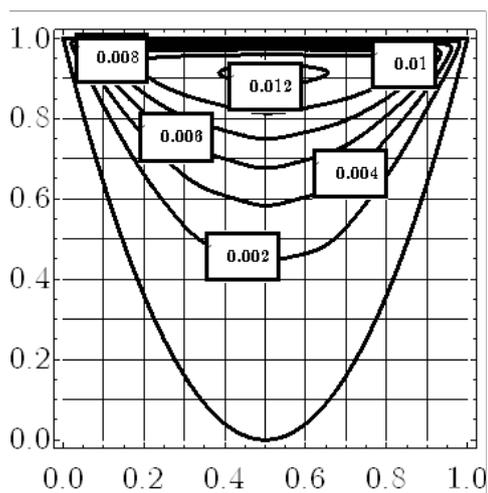


Рисунок Г.82 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

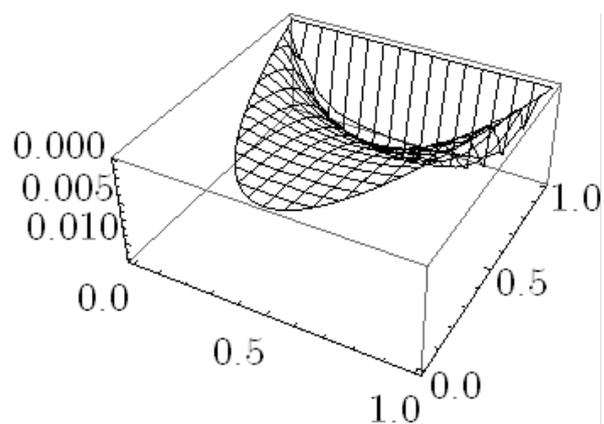


Рисунок Г.85 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

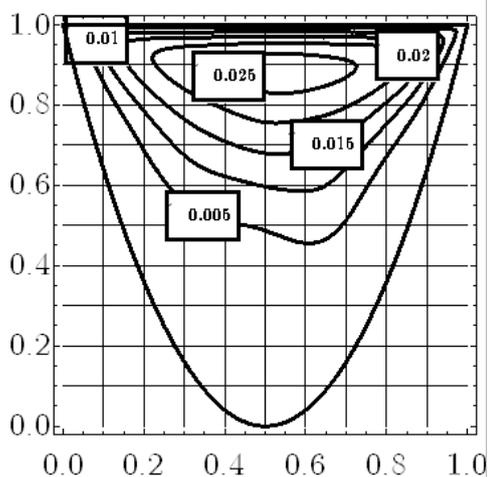


Рисунок Г.83 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

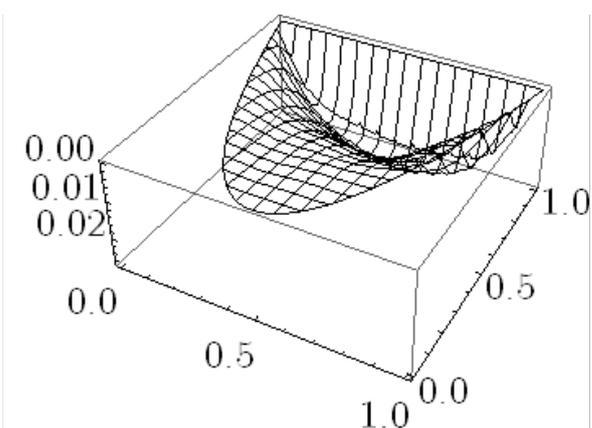


Рисунок Г.86 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

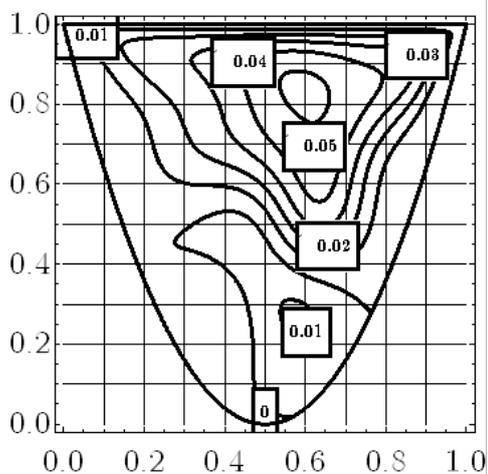


Рисунок Г.84 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

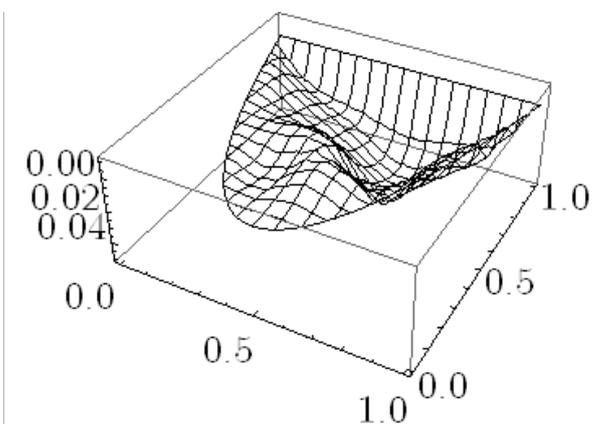


Рисунок Г.87 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

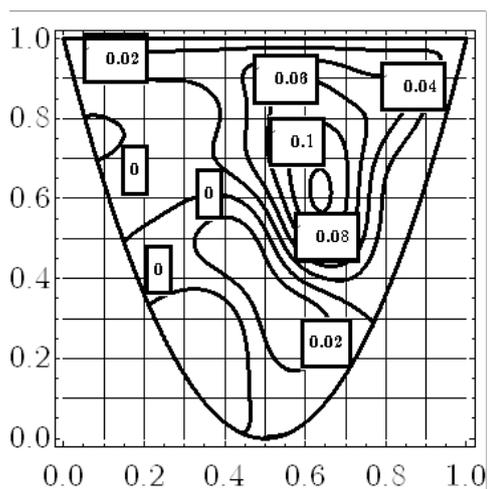


Рисунок Г.88 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

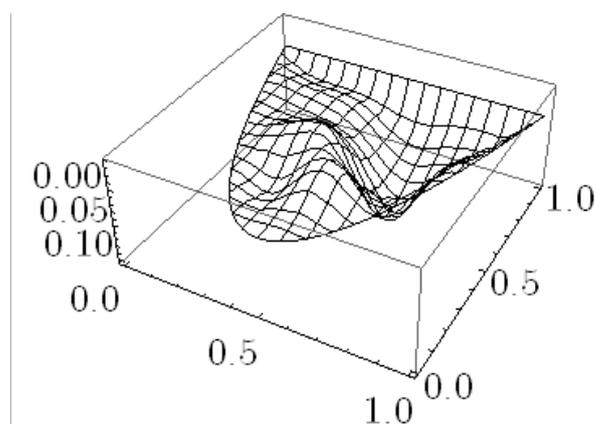


Рисунок Г.91 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

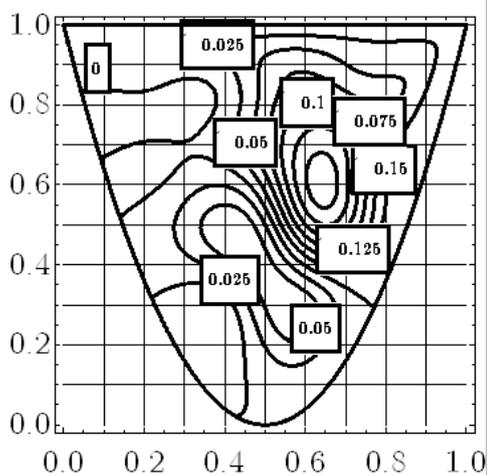


Рисунок Г.89 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

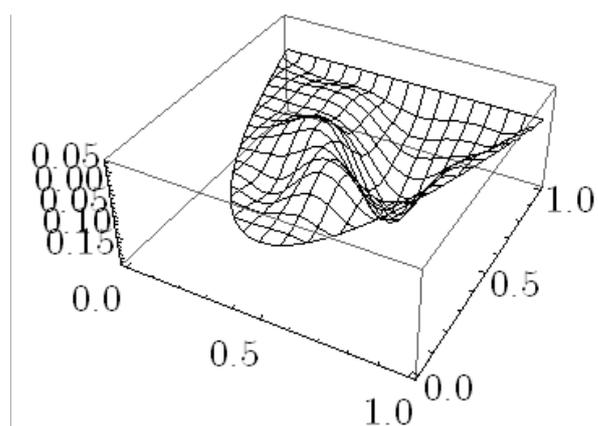


Рисунок Г.92 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

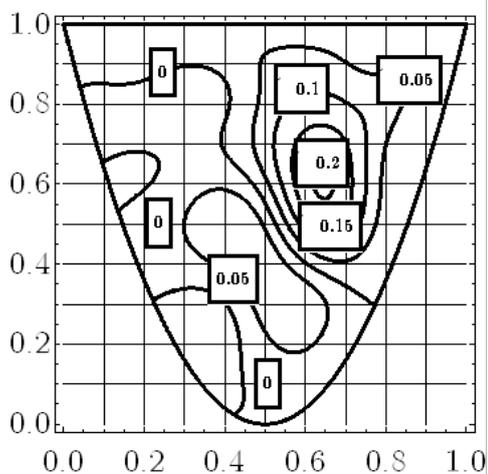


Рисунок Г.90 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

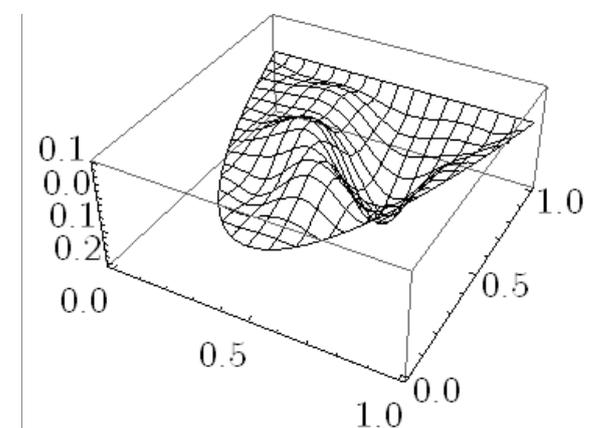


Рисунок Г.93 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

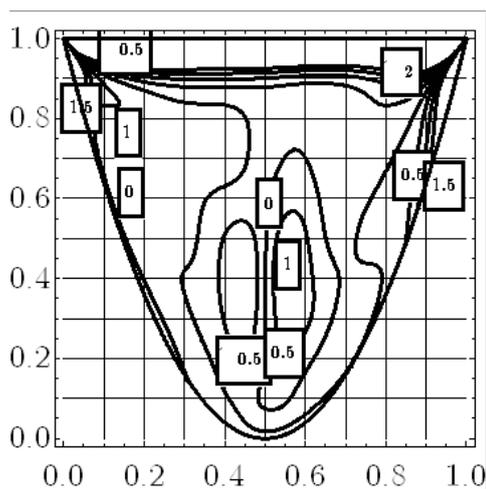


Рисунок Г.94 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 200$

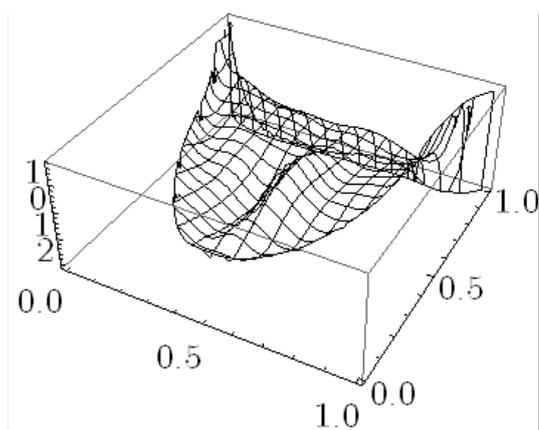


Рисунок Г.97 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 200$

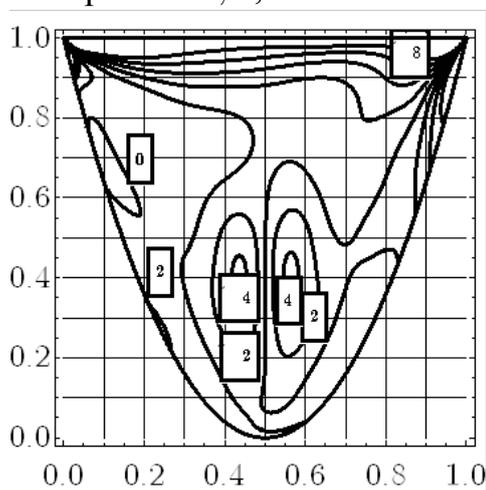


Рисунок Г.95 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 200$

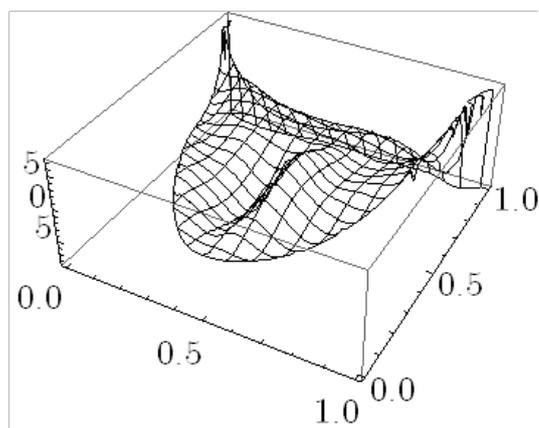


Рисунок Г.98 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 200$

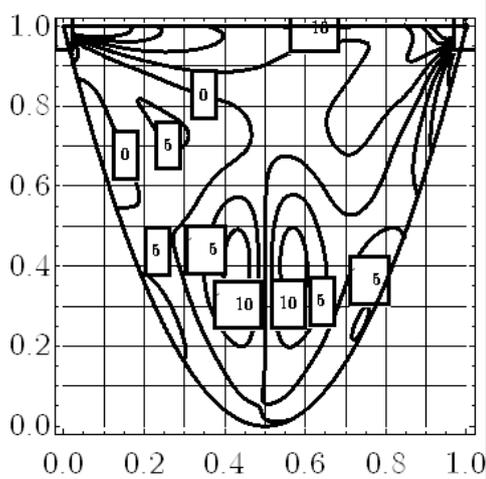


Рисунок Г.96 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 200$

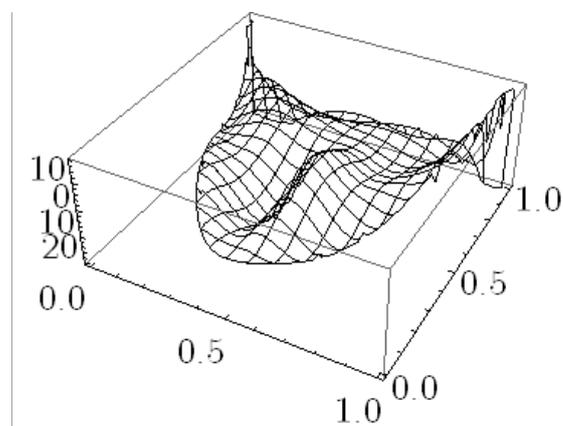


Рисунок Г.99 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 200$

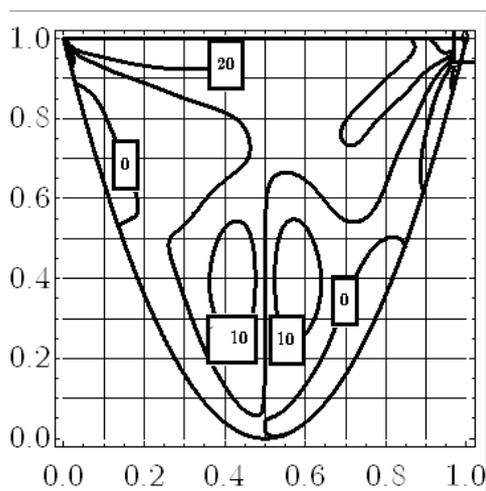


Рисунок Г.100 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

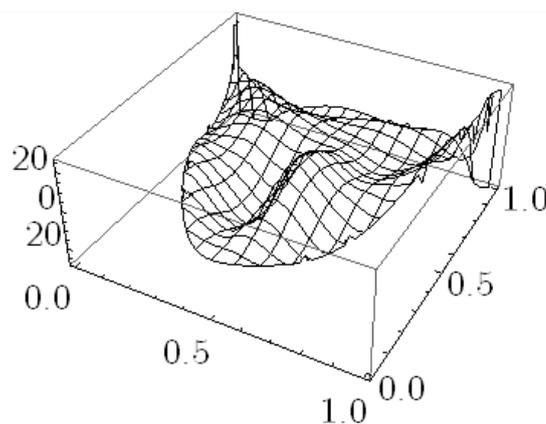


Рисунок Г.103 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

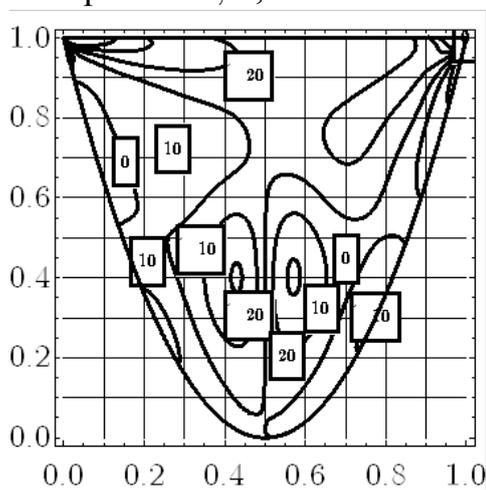


Рисунок Г.101 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

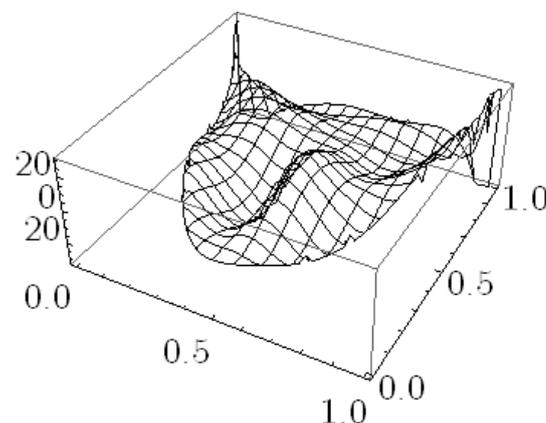


Рисунок Г.104 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

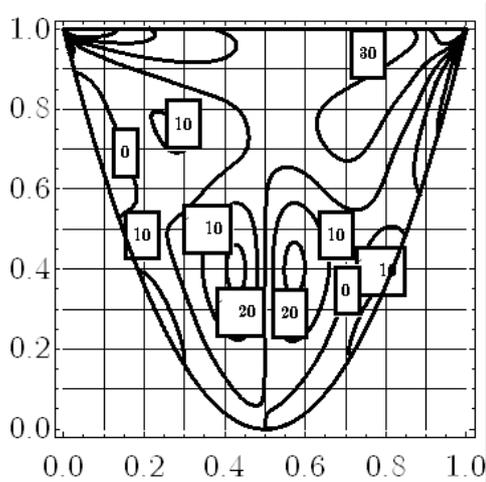


Рисунок Г.102 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

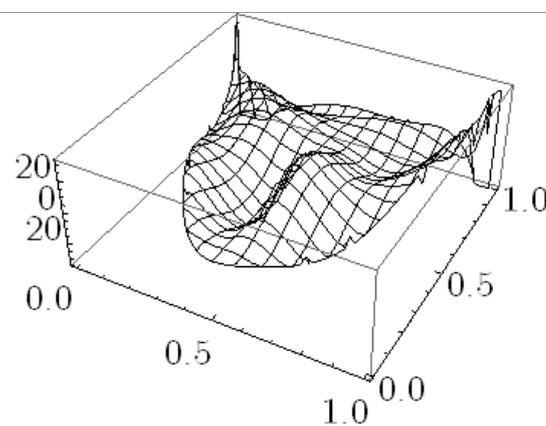


Рисунок Г.105 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

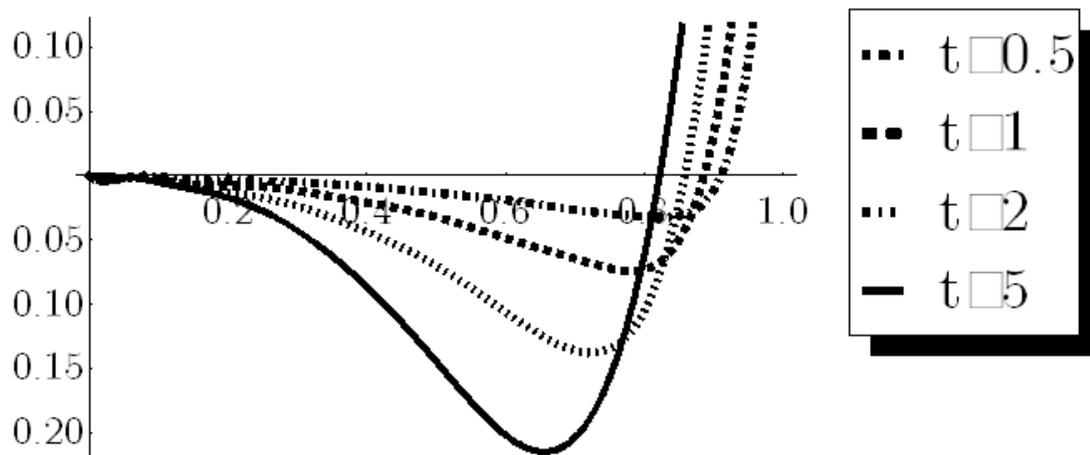


Рисунок Г.106 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени,
 $Re = 200$

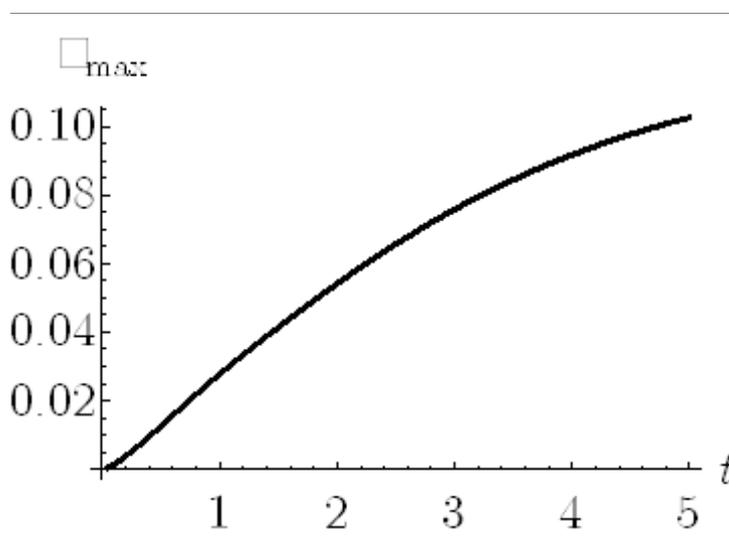


Рисунок Г.107 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени,
 $Re = 200$

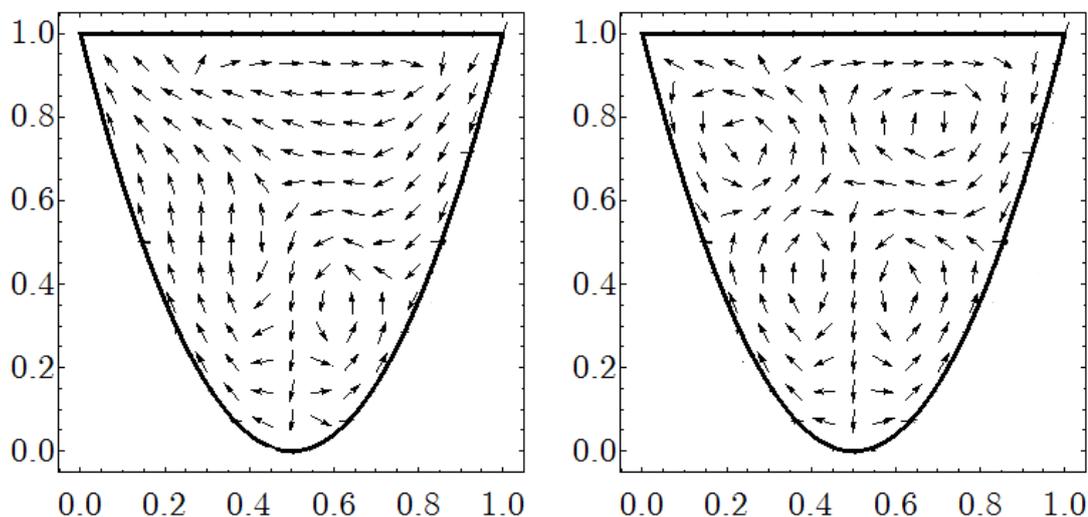


Рисунок Г.108 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 200$

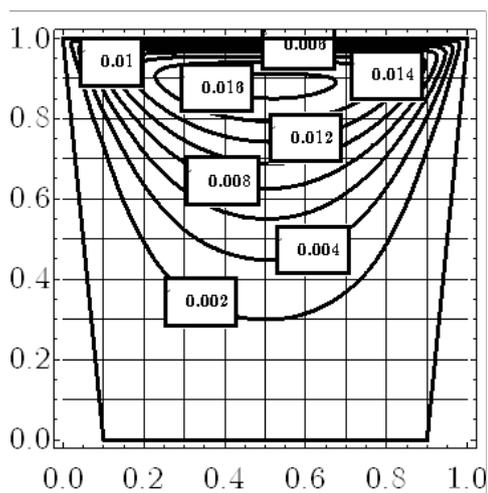


Рисунок Г.109 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

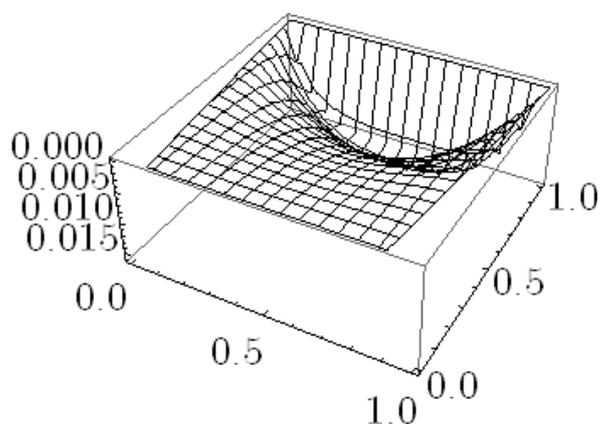


Рисунок Г.112 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 100$

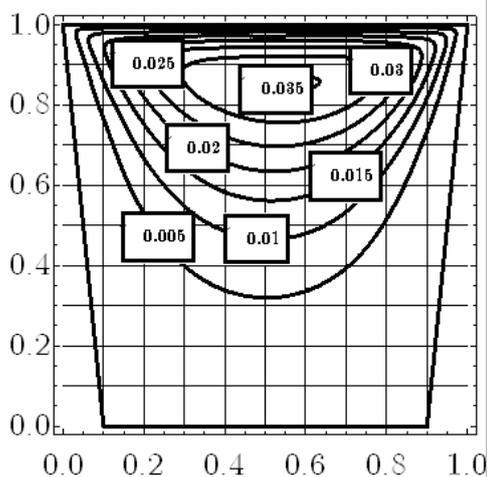


Рисунок Г.110 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

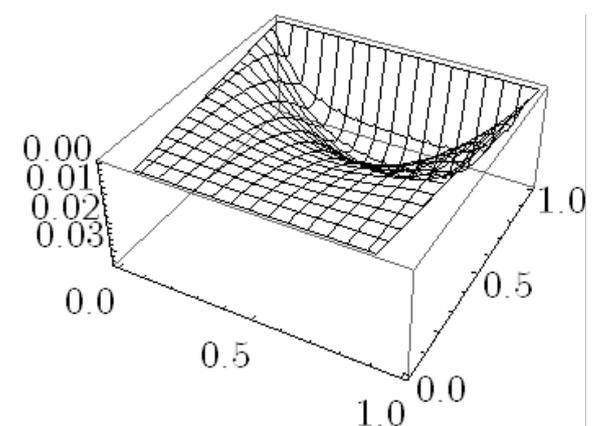


Рисунок Г.113 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 100$

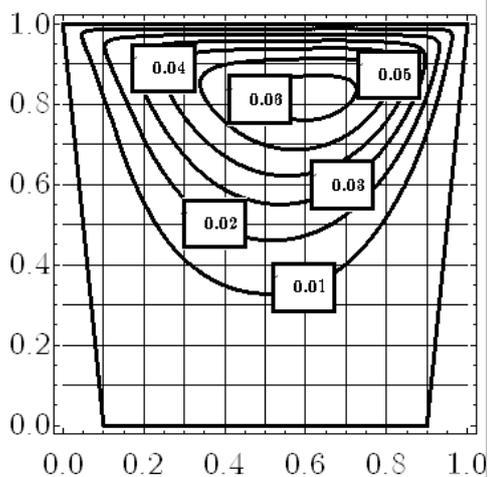


Рисунок Г.111 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

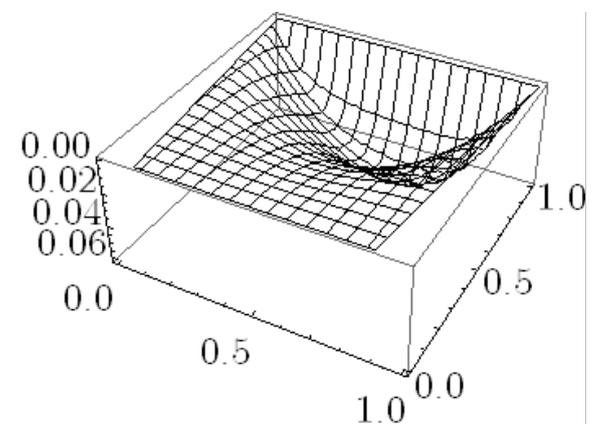


Рисунок Г.114 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 100$

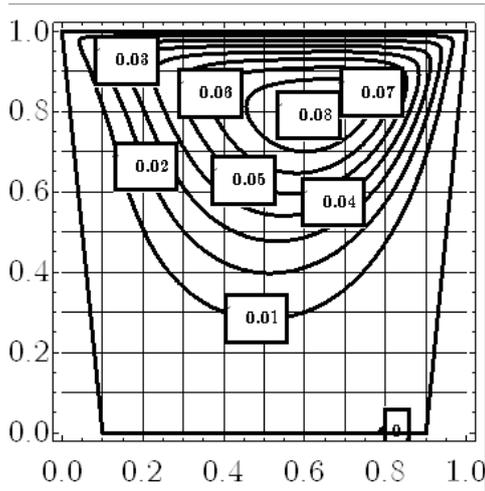


Рисунок Г.115 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

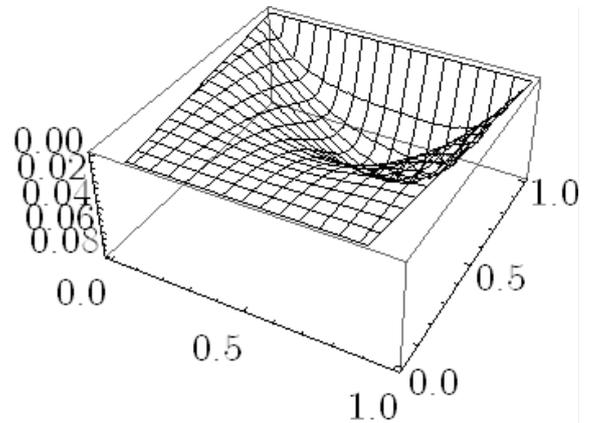


Рисунок Г.118 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 100$

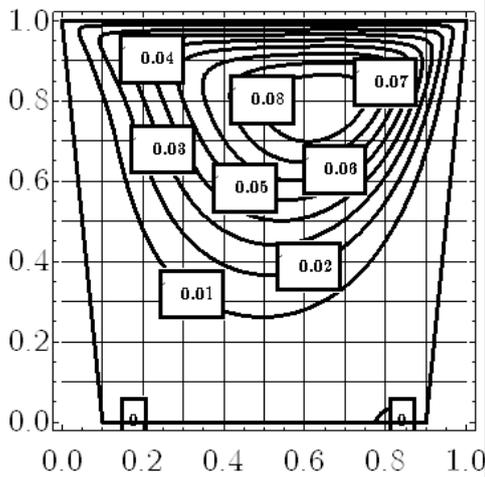


Рисунок Г.116 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

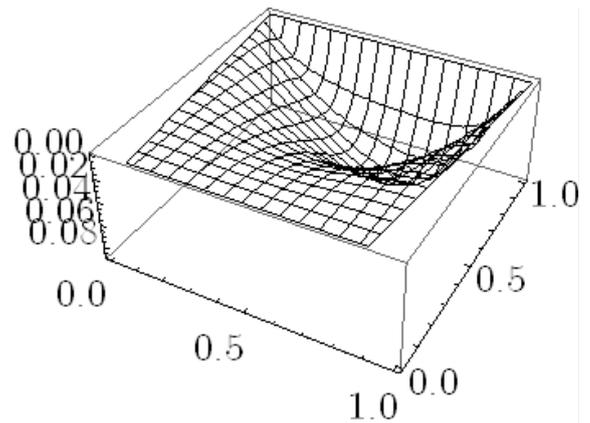


Рисунок Г.119 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 100$

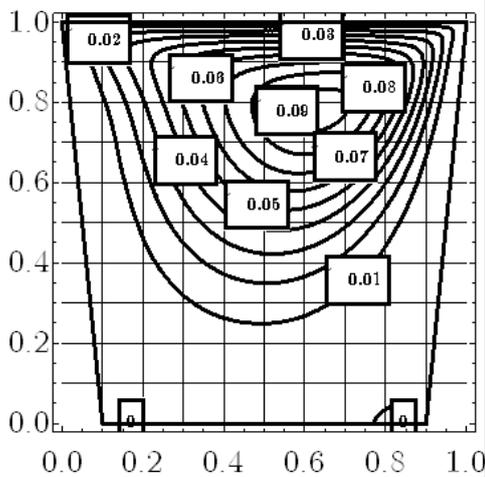


Рисунок Г.117 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

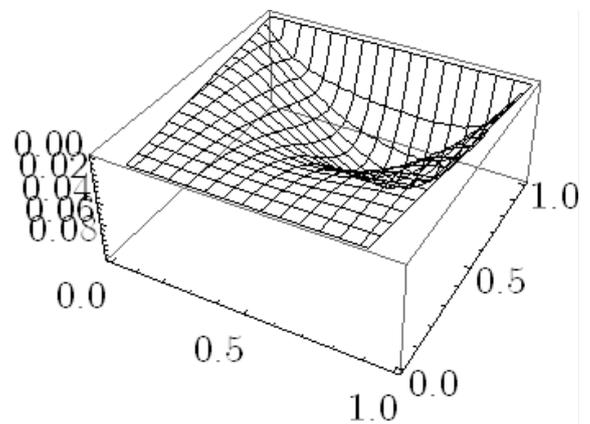


Рисунок Г.120 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 100$

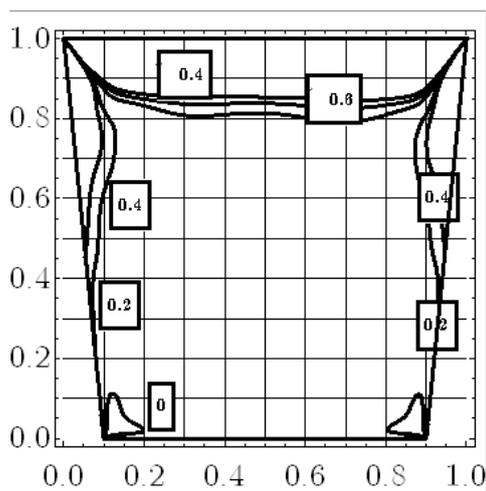


Рисунок Г.121 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

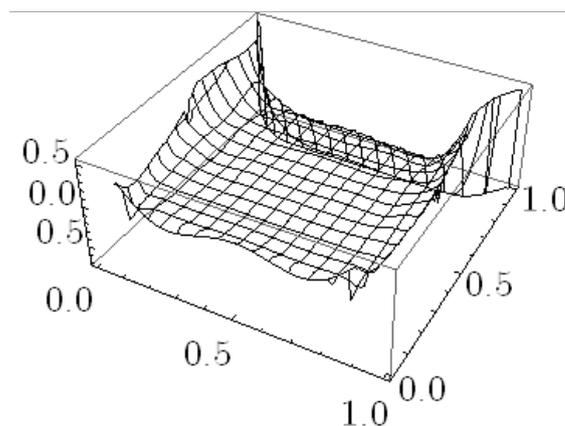


Рисунок Г.124 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 0,5$, $Re = 100$

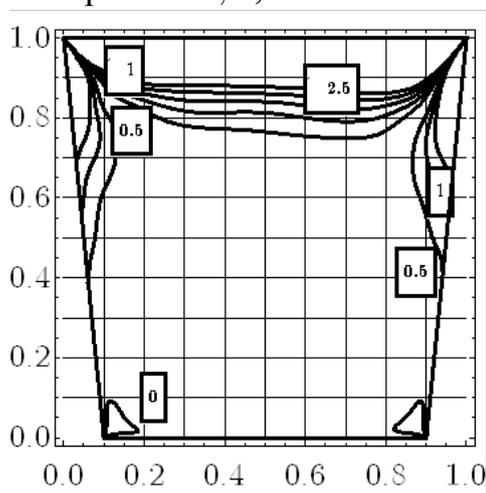


Рисунок Г.122 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

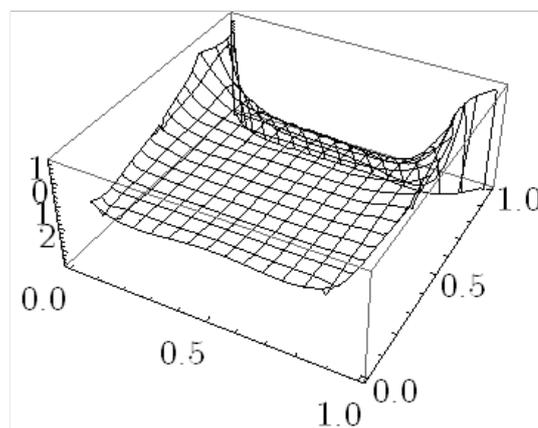


Рисунок Г.125 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 1,0$, $Re = 100$

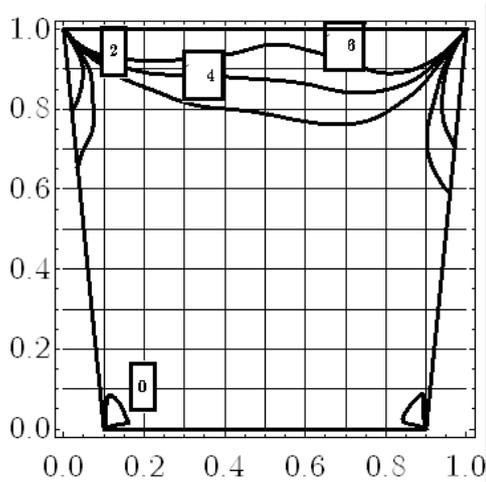


Рисунок Г.123 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

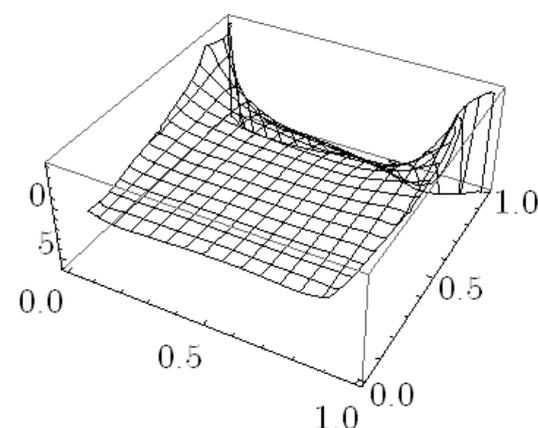


Рисунок Г.126 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 2,0$, $Re = 100$

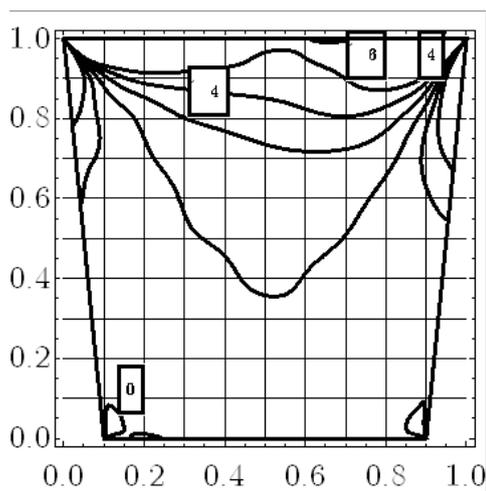


Рисунок Г.127 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

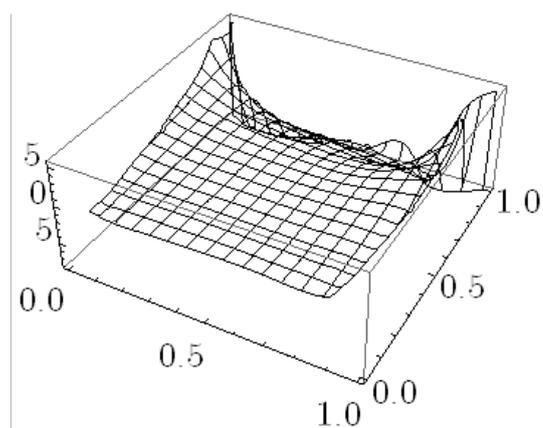


Рисунок Г.130 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 100$

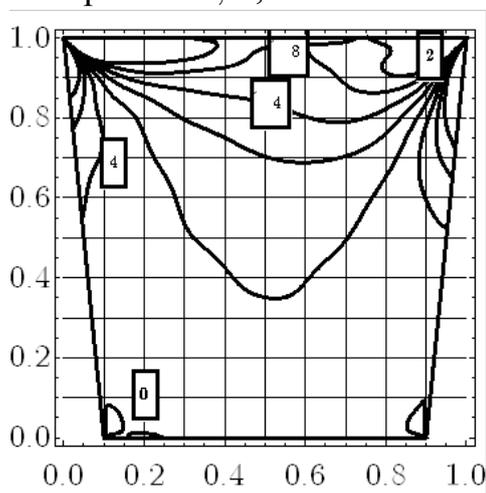


Рисунок Г.128 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

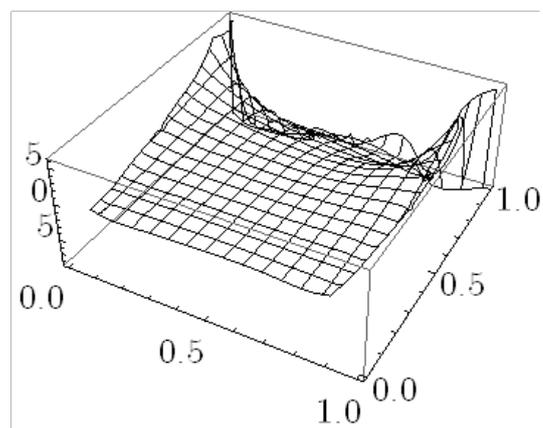


Рисунок Г.131 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 100$

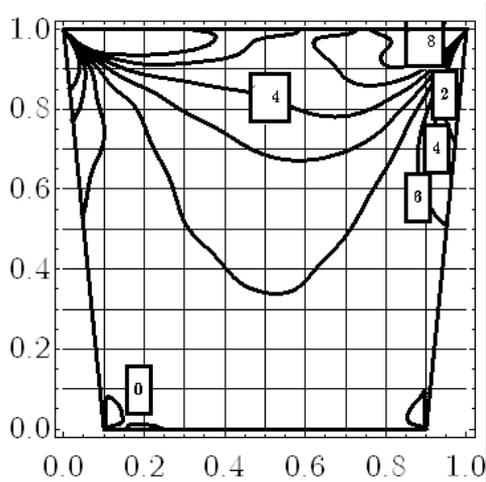


Рисунок Г.129 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

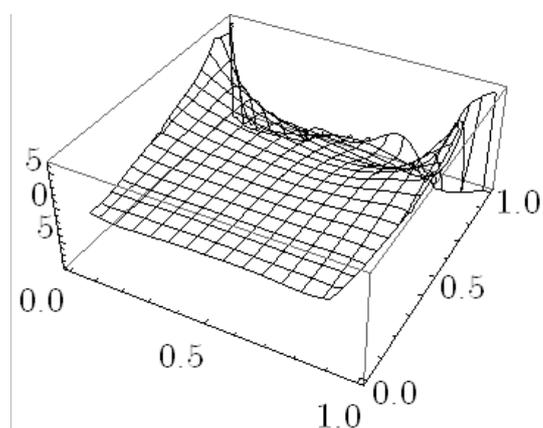


Рисунок Г.132 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 100$

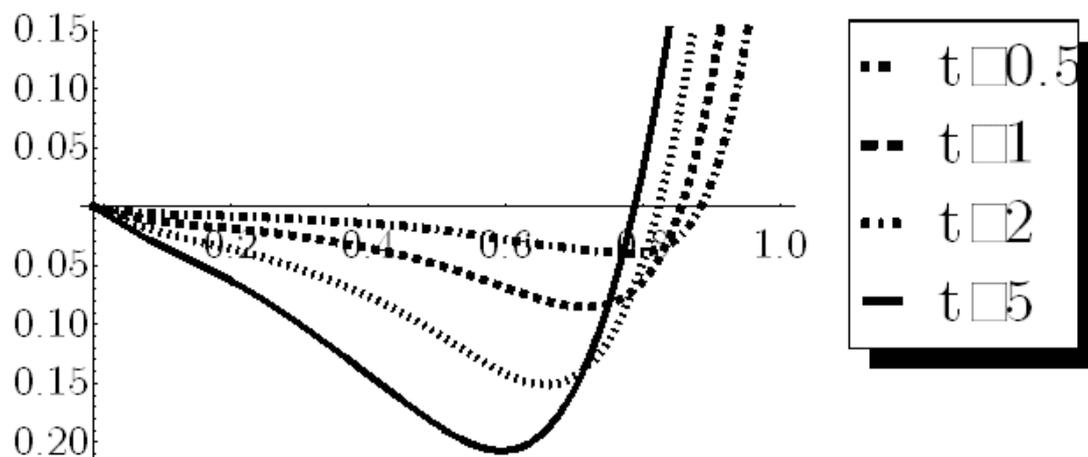


Рисунок Г.133 – График скорости $v_y|_{y=0,5}$ в разные моменты времени, $Re = 100$

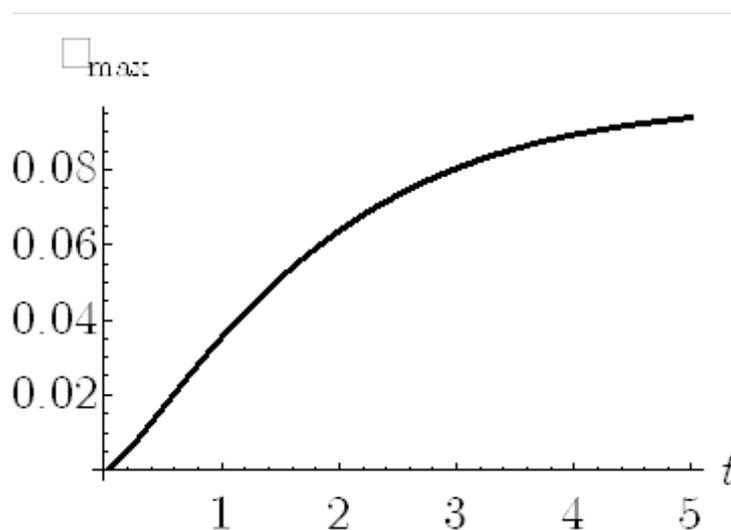


Рисунок Г.134 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени, $Re = 100$

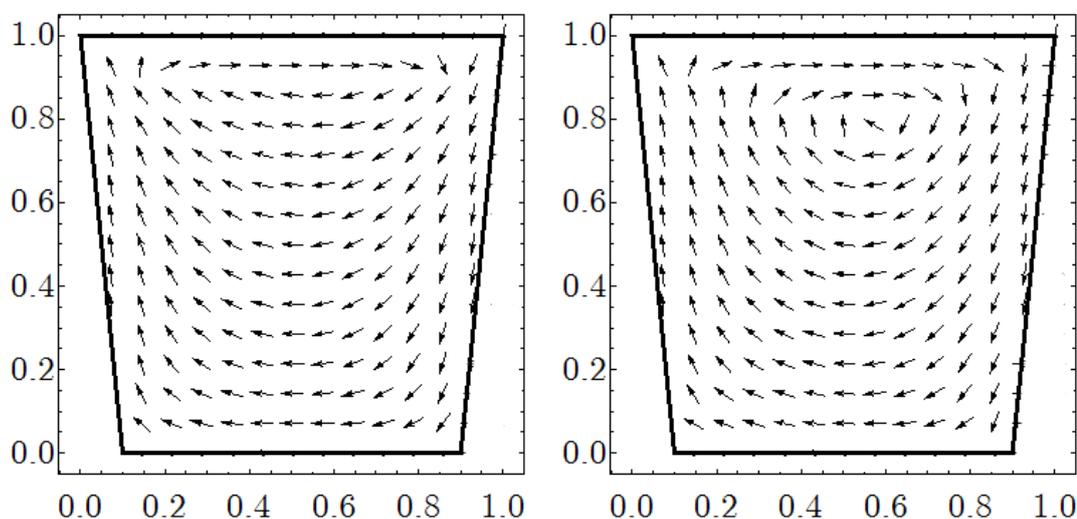


Рисунок Г.135 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 100$

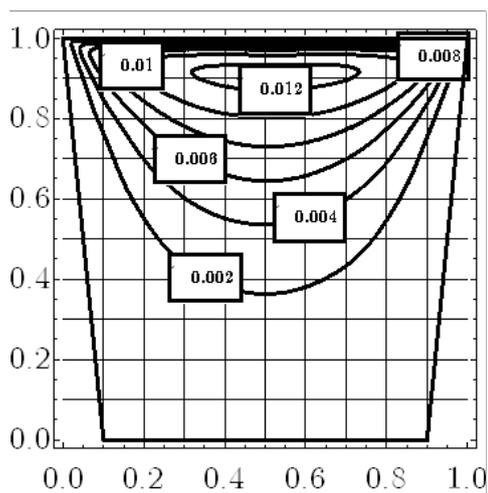


Рисунок Г.136 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

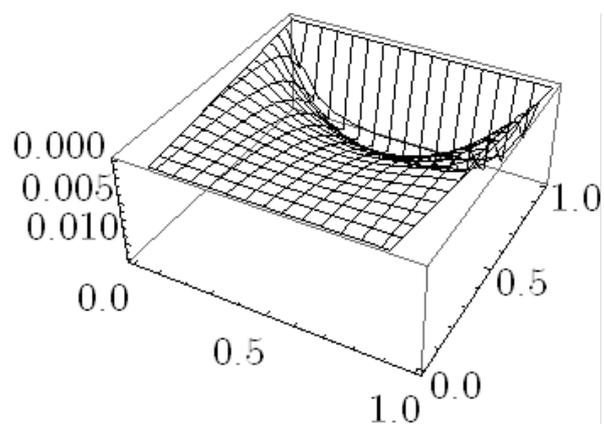


Рисунок Г.139 – Поверхность функции тока ψ при $t = 0,5$, $Re = 200$

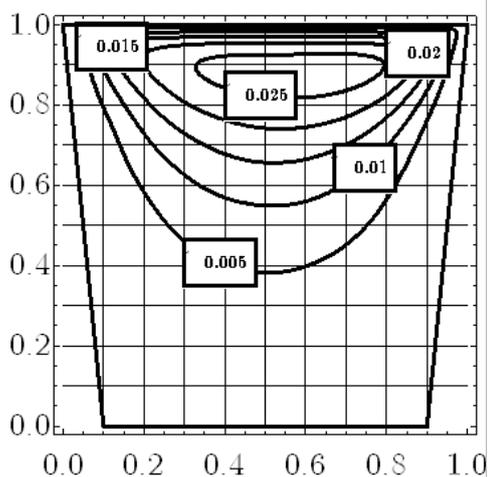


Рисунок Г.137 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

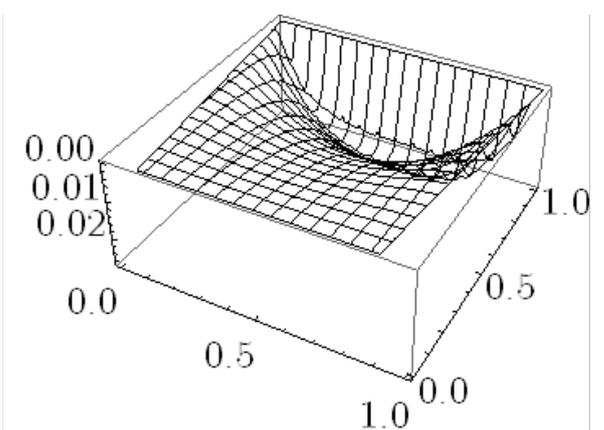


Рисунок Г.140 – Поверхность функции тока ψ при $t = 1,0$, $Re = 200$

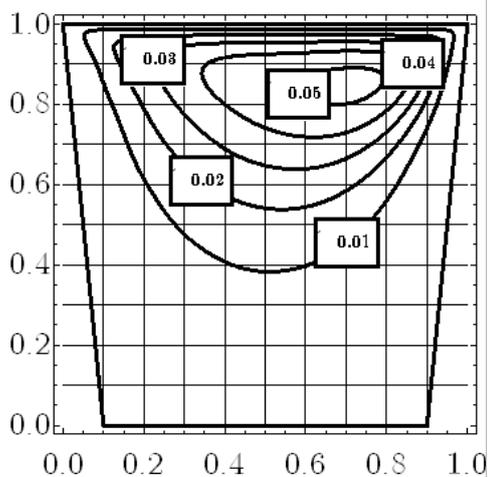


Рисунок Г.138 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

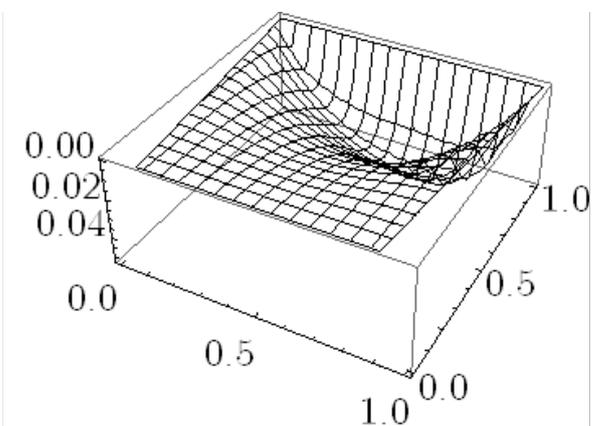


Рисунок Г.141 – Поверхность функции тока ψ при $t = 2,0$, $Re = 200$

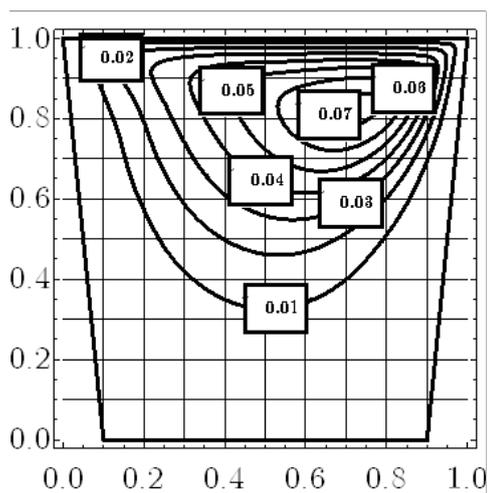


Рисунок Г.142 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

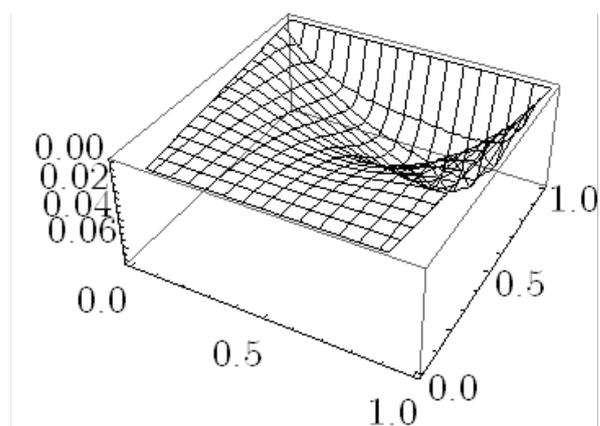


Рисунок Г.145 – Поверхность функции тока ψ при $t = 3,0$, $Re = 200$

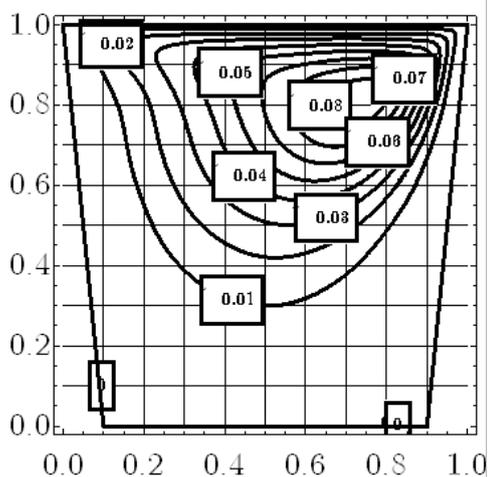


Рисунок Г.143 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

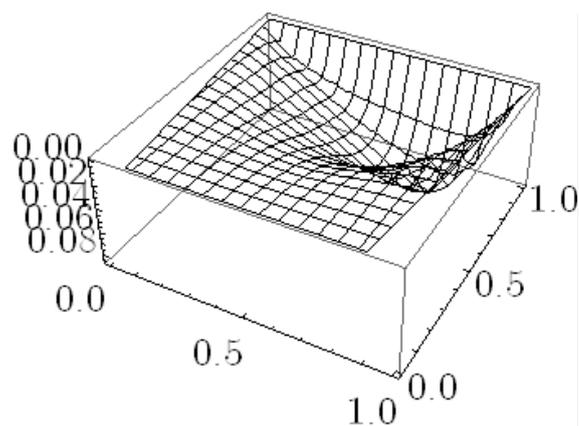


Рисунок Г.146 – Поверхность функции тока ψ при $t = 4,0$, $Re = 200$

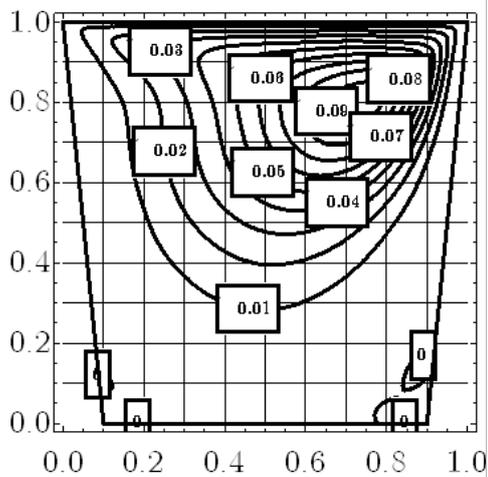


Рисунок Г.144 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

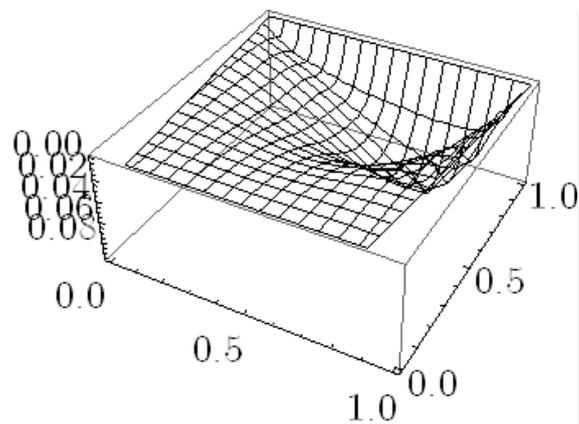


Рисунок Г.147 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5,0$, $Re = 200$

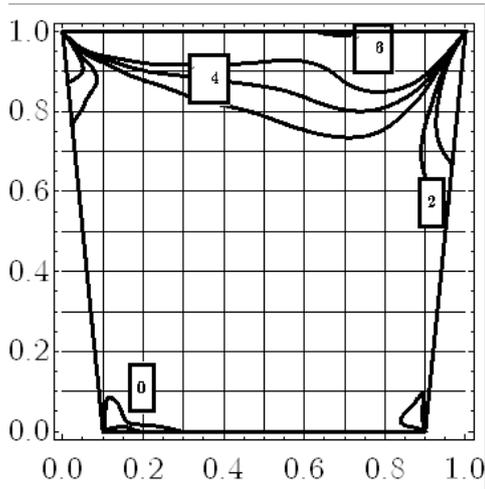


Рисунок Г.154 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

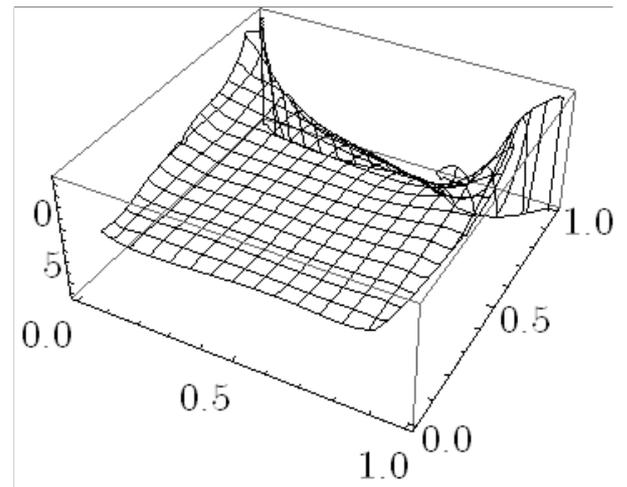


Рисунок Г.157 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 3,0$, $Re = 200$

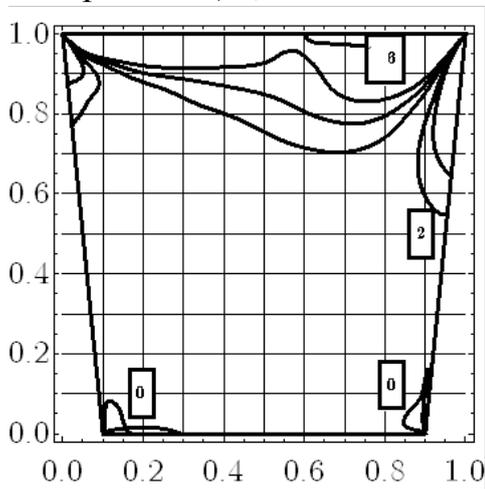


Рисунок Г.155 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

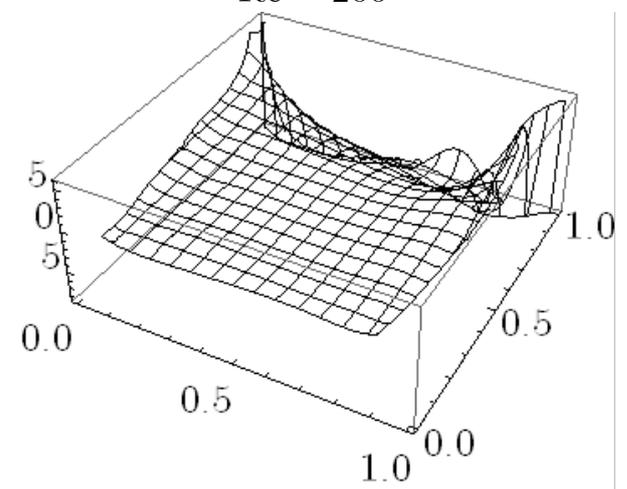


Рисунок Г.158 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 4,0$, $Re = 200$

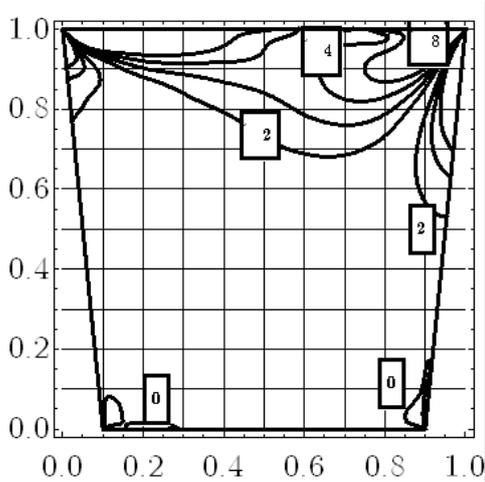


Рисунок Г.156 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

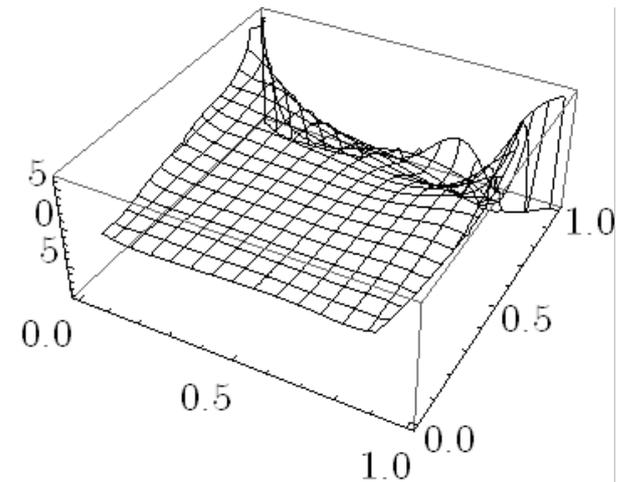


Рисунок Г.159 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5,0$, $Re = 200$

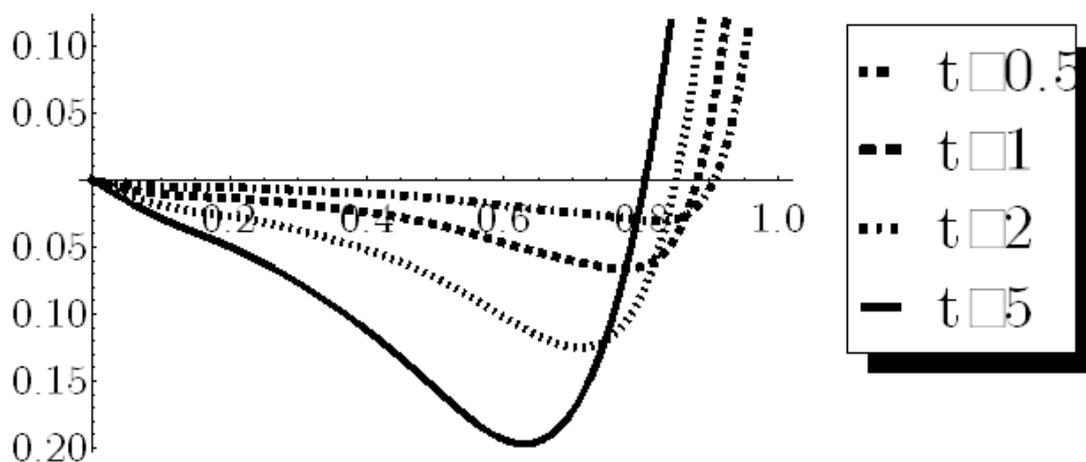


Рисунок Г.160 – График скорости $v_y|_{y=0.5}$ в разные моменты времени, $Re = 200$

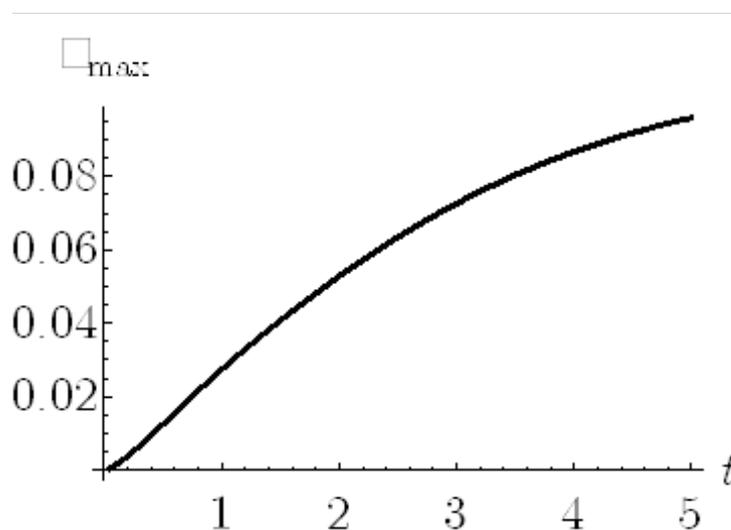


Рисунок Г.161 – Изменение максимума модуля функции тока ψ во времени, $Re = 200$

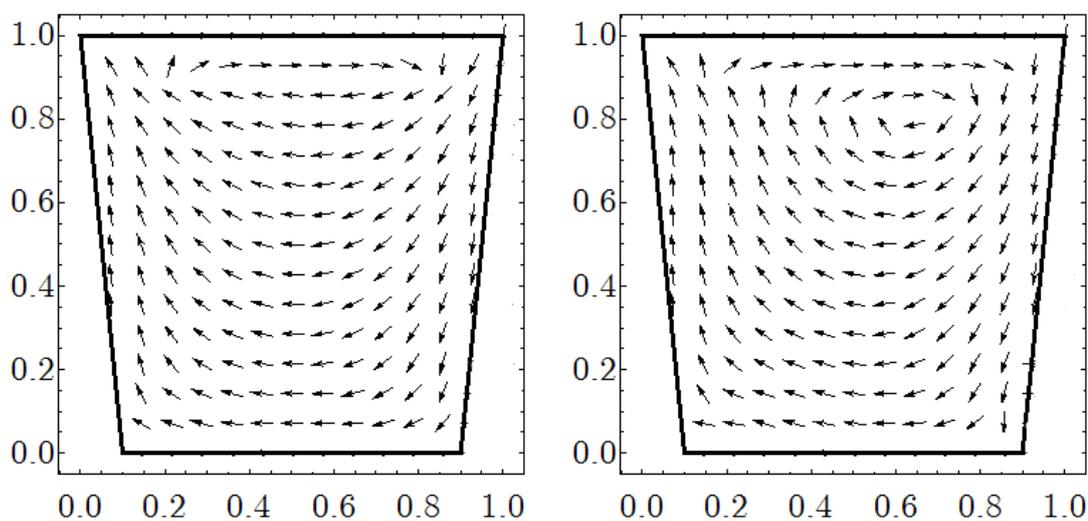


Рисунок Г.162 – Векторное поле скоростей при $t = 0,5$ и $t = 5,0$, $Re = 200$

Приложение Д

Результаты вычислительного эксперимента для функции тока и температуры (нелинейная задача)

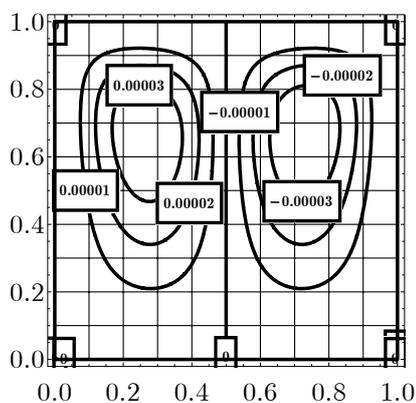


Рисунок Д.1 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

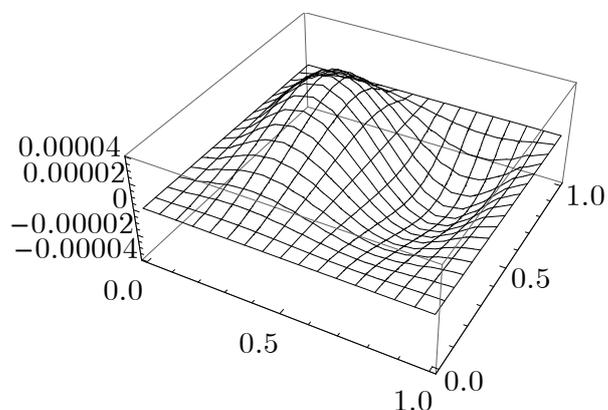


Рисунок Д.2 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

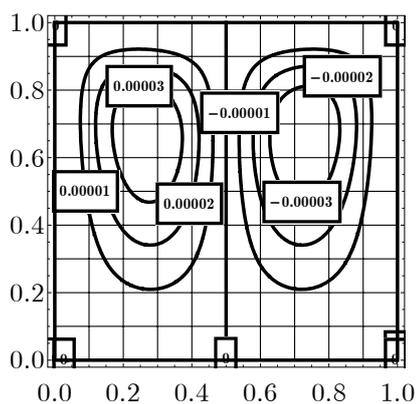


Рисунок Д.3 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

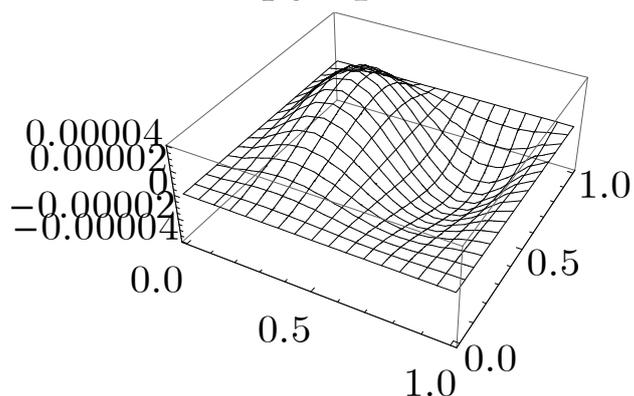


Рисунок Д.4 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

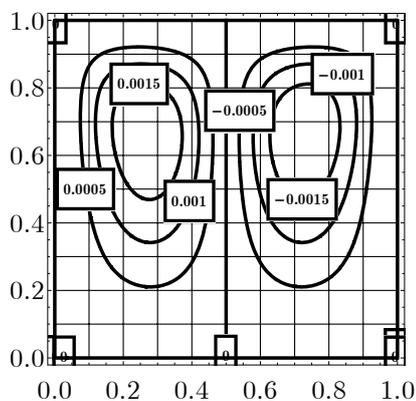


Рисунок Д.5 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

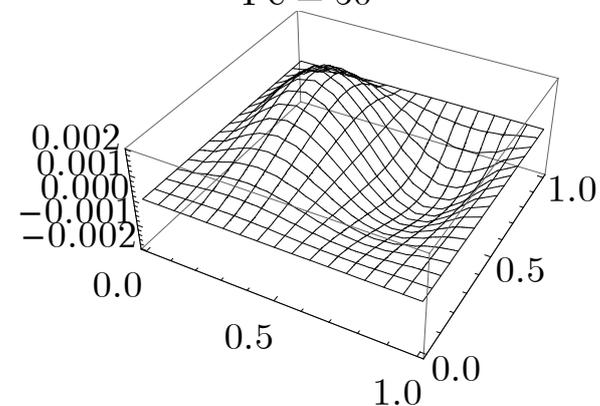


Рисунок Д.6 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

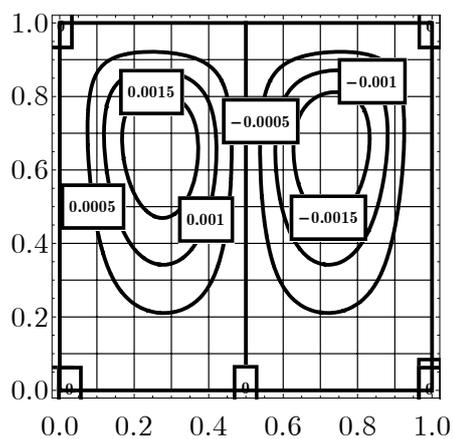


Рисунок Д.7 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

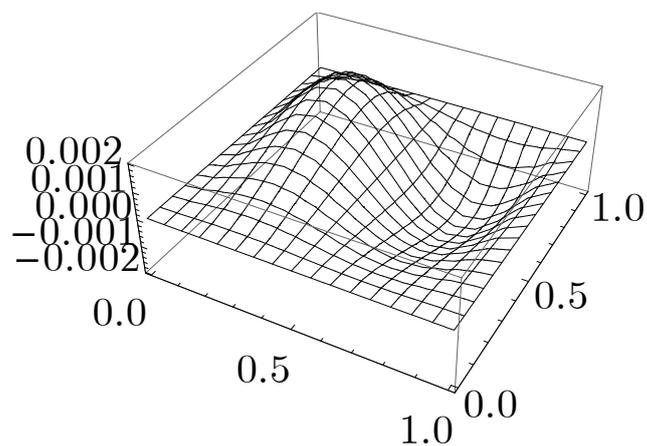


Рисунок Д.8 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

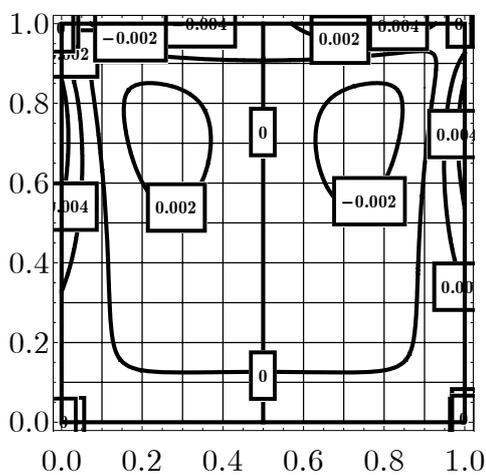


Рисунок Д.9 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

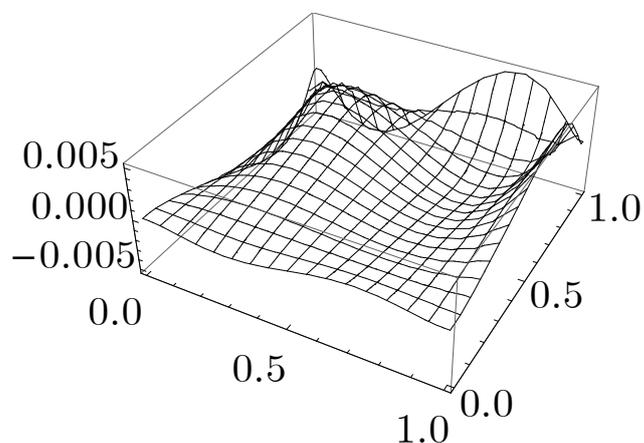


Рисунок Д.10 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

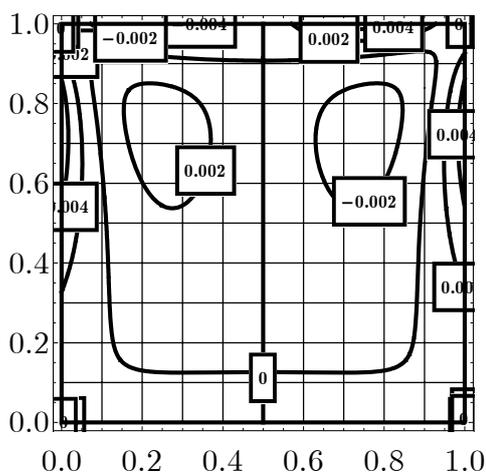


Рисунок Д.11 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

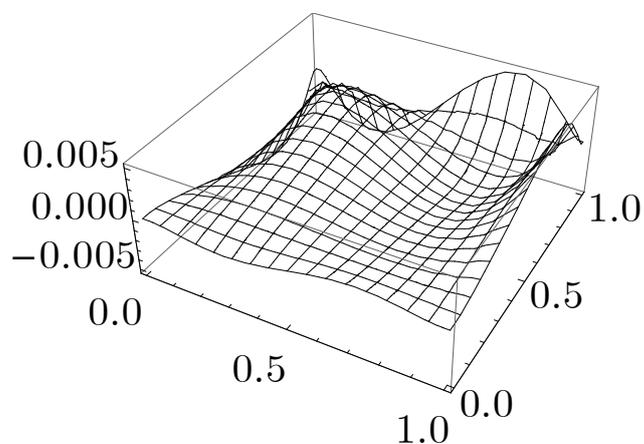


Рисунок Д.12 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

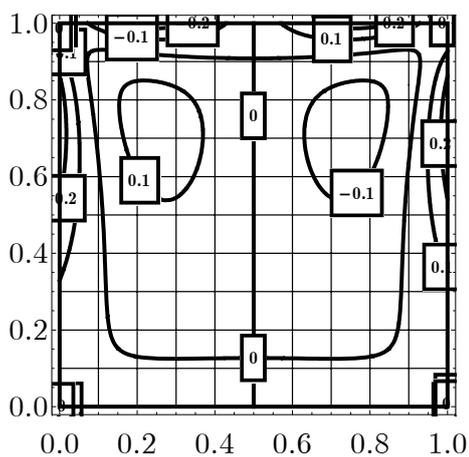


Рисунок Д.13 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

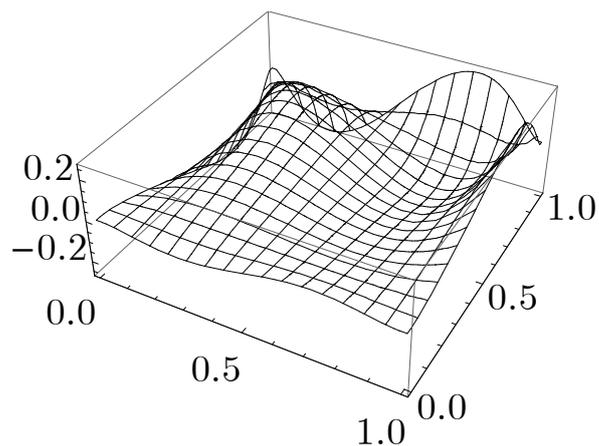


Рисунок Д.14 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

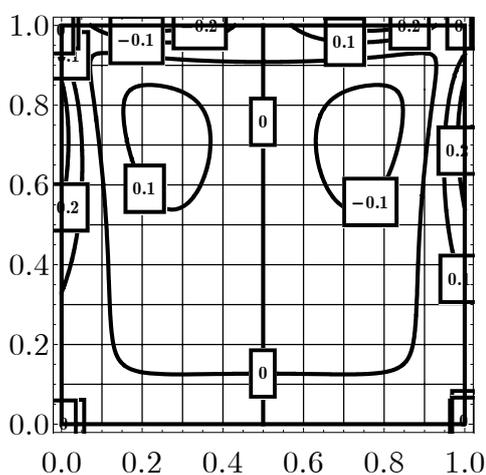


Рисунок Д.15 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

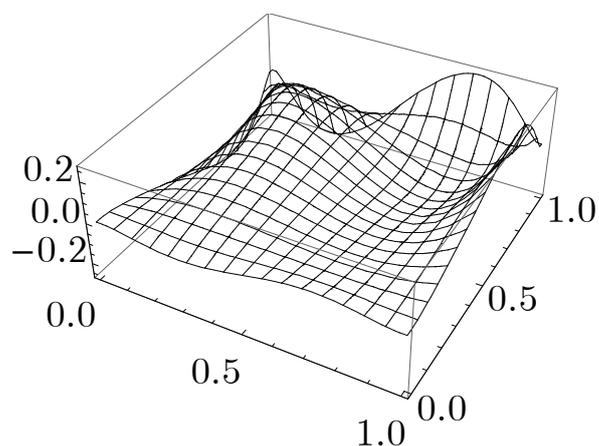


Рисунок Д.16 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

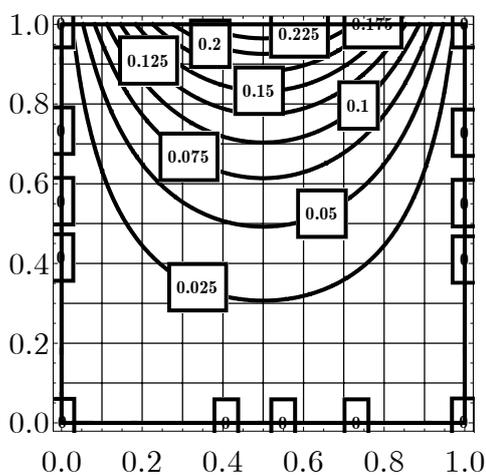


Рисунок Д.17 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

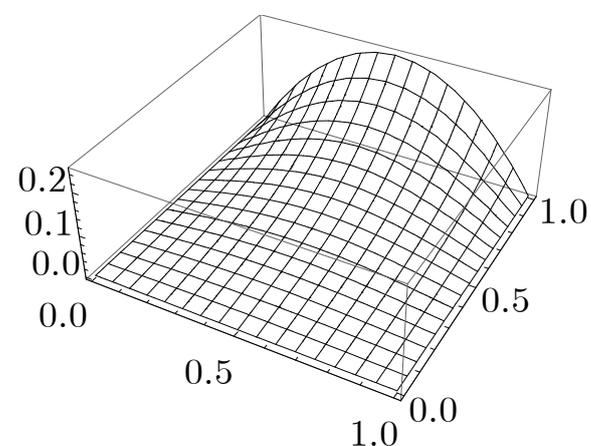


Рисунок Д.18 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

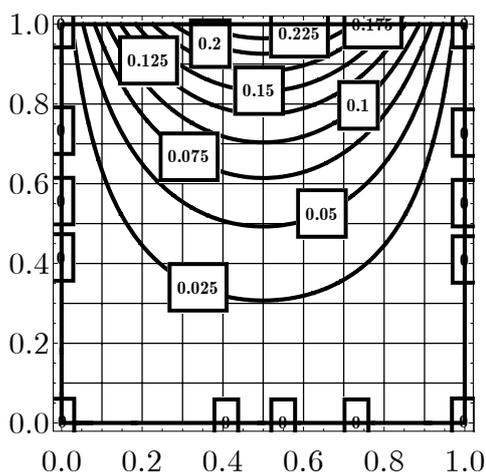


Рисунок Д.19 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

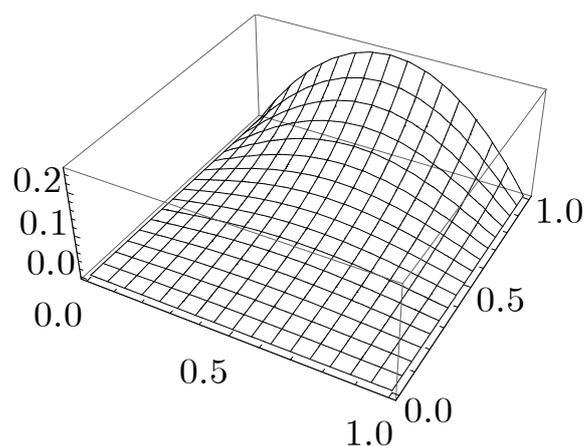


Рисунок Д.20 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

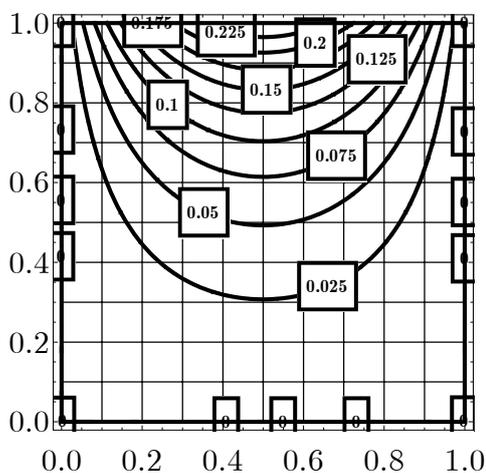


Рисунок Д.21 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

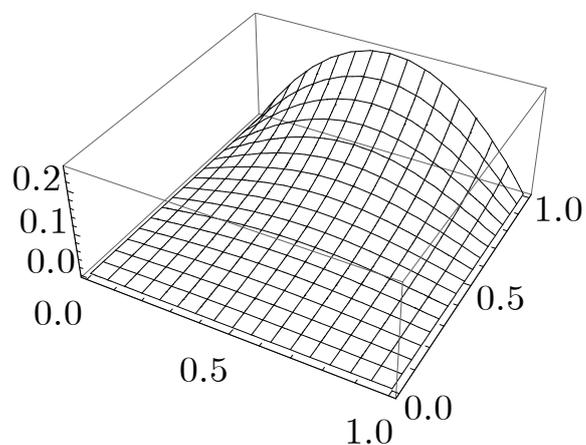


Рисунок Д.22 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

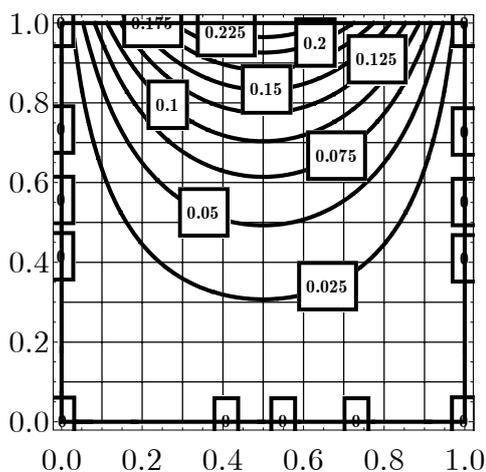


Рисунок Д.23 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

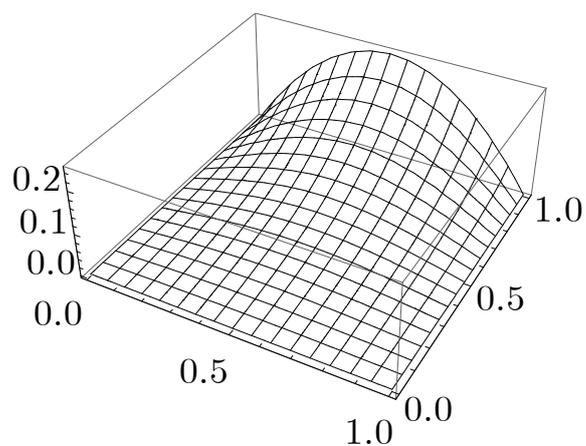


Рисунок Д.24 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

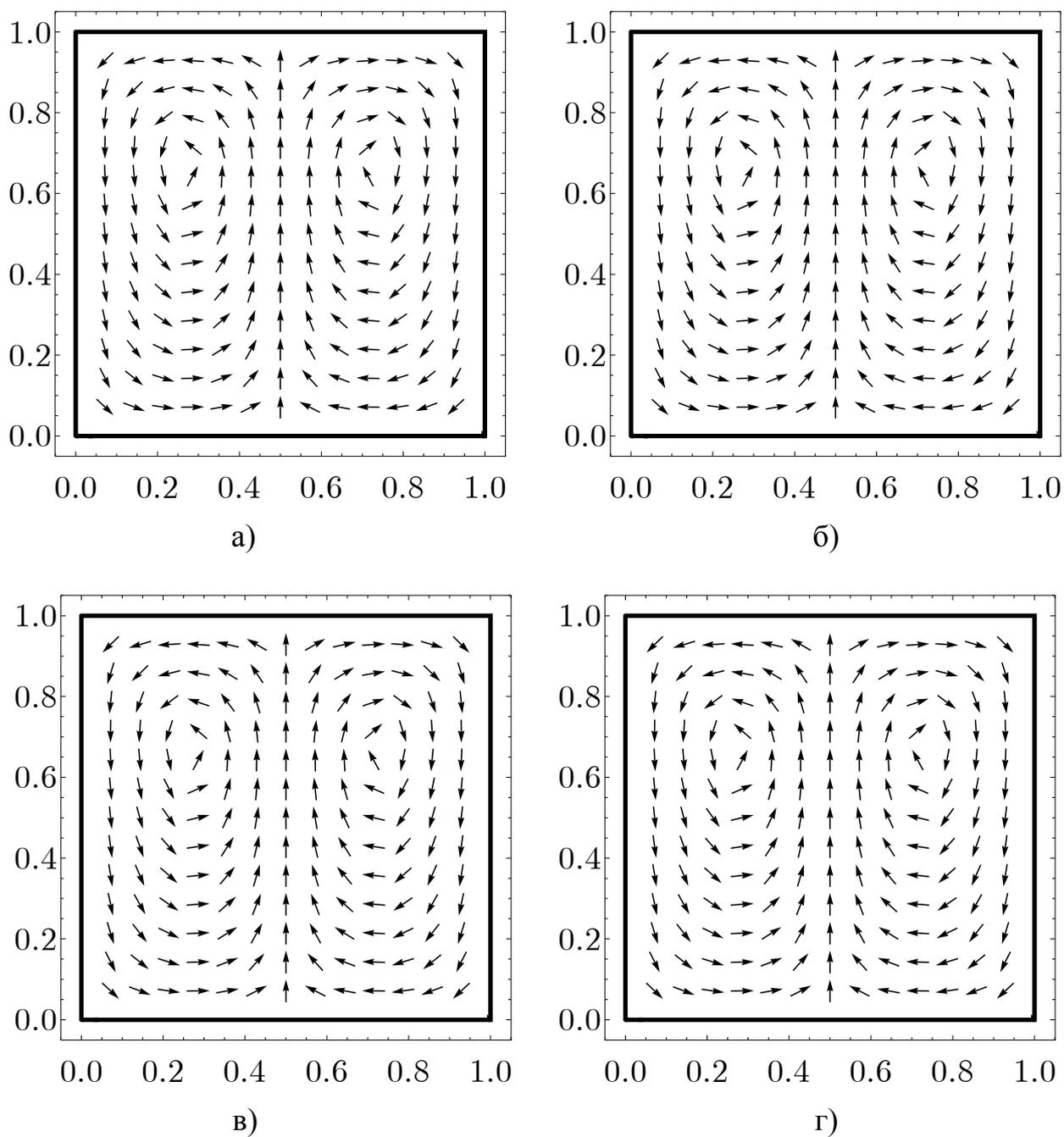


Рисунок Д.25 – Векторное поле скоростей при $Re = 100$

и различных числах Грасгофа и Пекле:

- а) $Gr = 1, Pe = 1$, б) $Gr = 1, Pe = 50$,
 в) $Gr = 50, Pe = 1$, г) $Gr = 50, Pe = 50$.

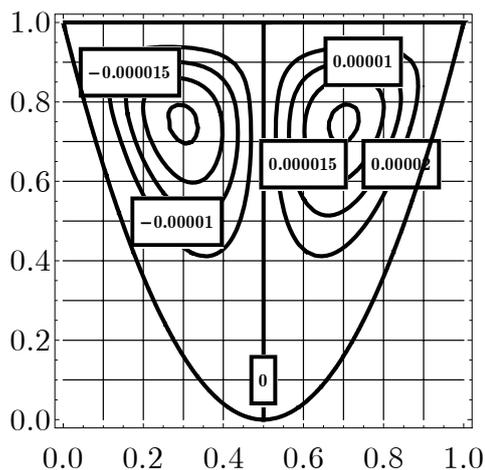


Рисунок Д.26 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

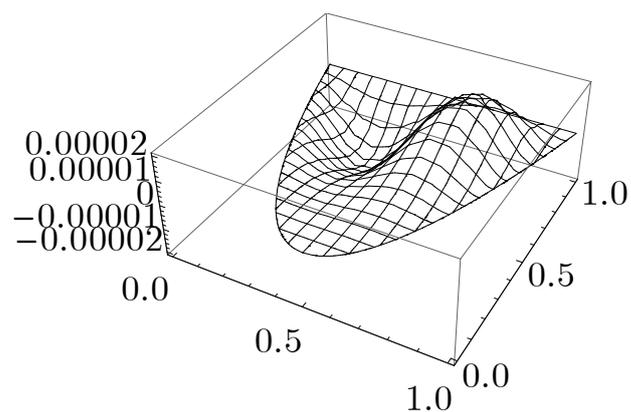


Рисунок Д.27 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

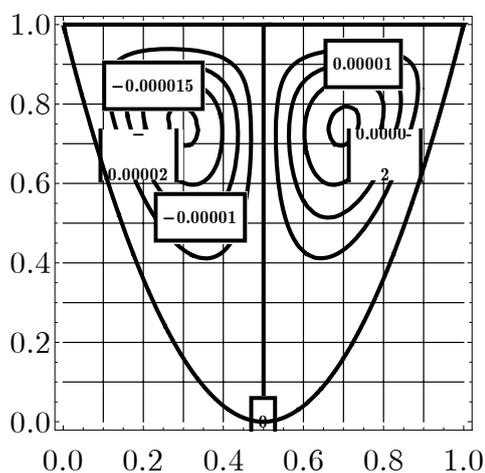


Рисунок Д.28 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

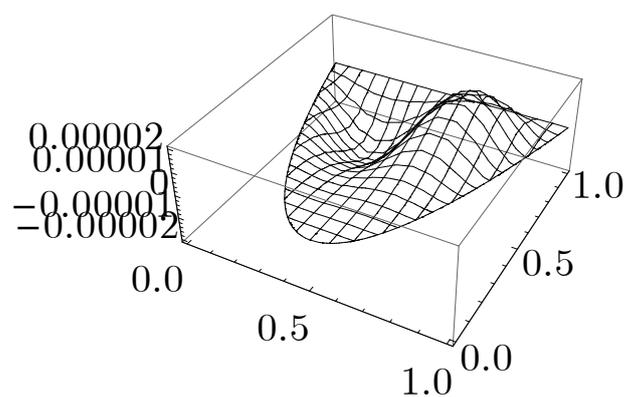


Рисунок Д.29 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

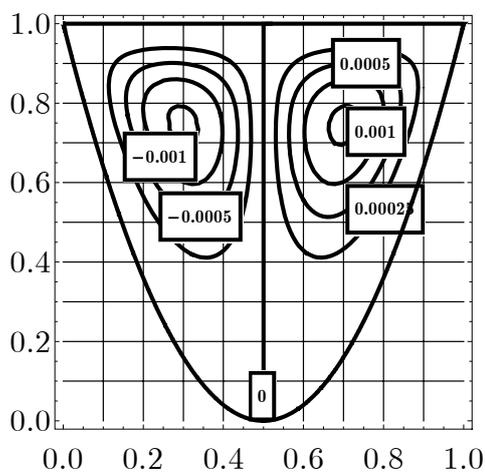


Рисунок Д.30 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

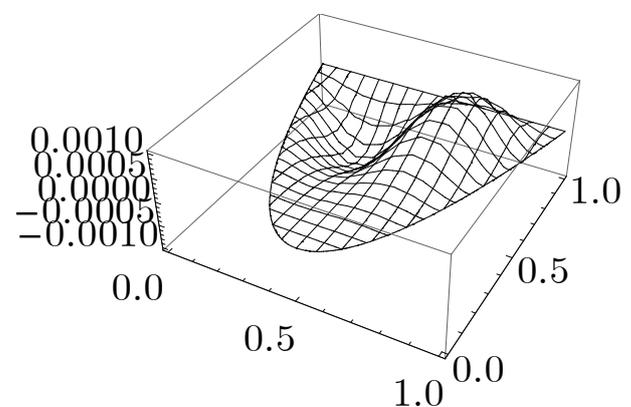


Рисунок Д.31 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

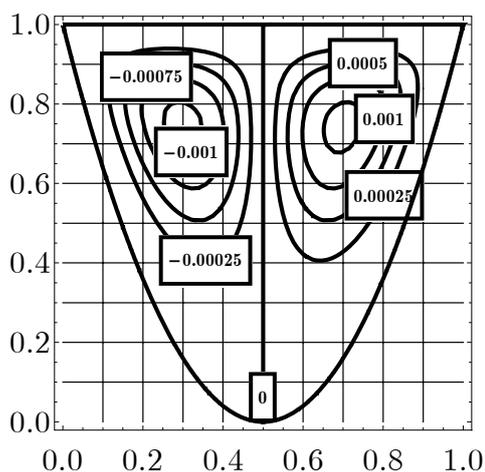


Рисунок Д.32 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

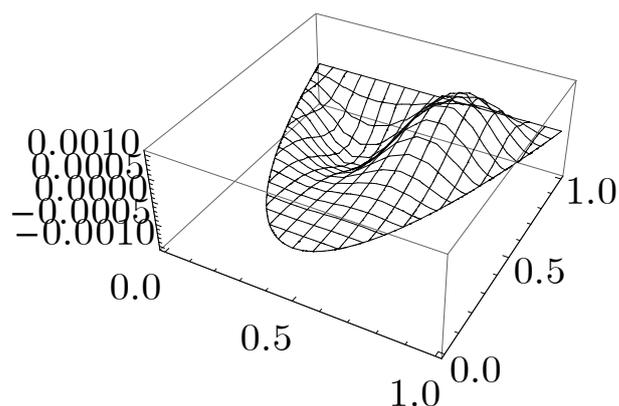


Рисунок Д.33 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

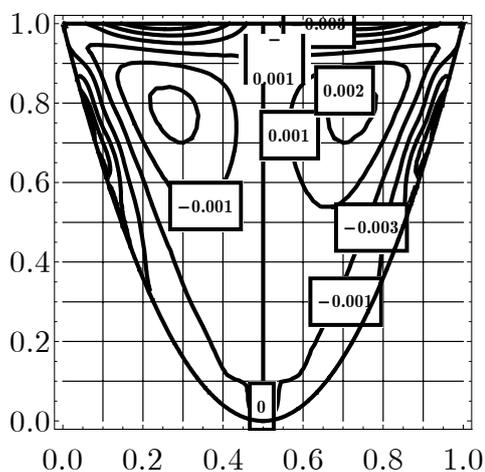


Рисунок Д.34 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

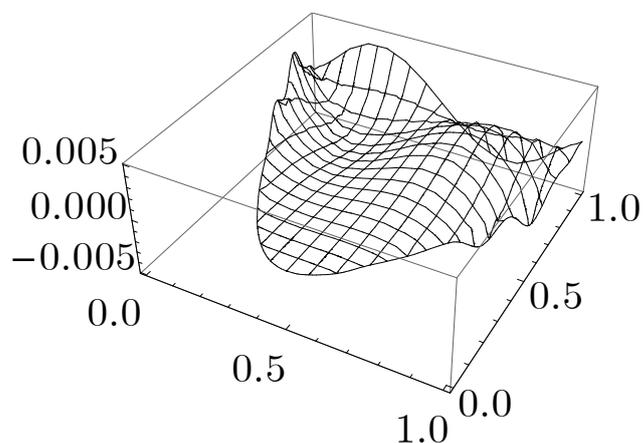


Рисунок Д.35 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

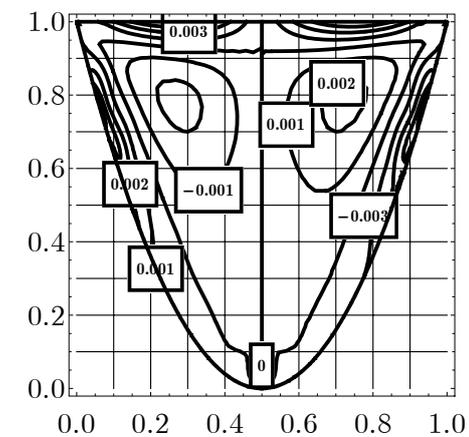


Рисунок Д.36 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

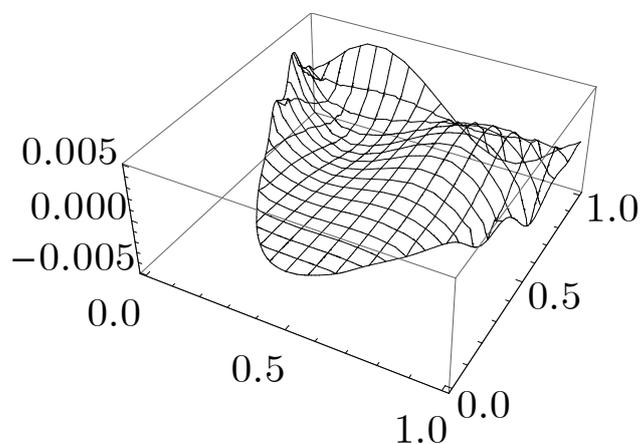


Рисунок Д.37 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

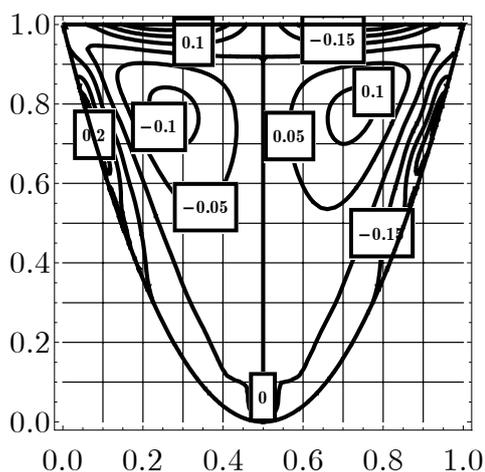


Рисунок Д.38 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

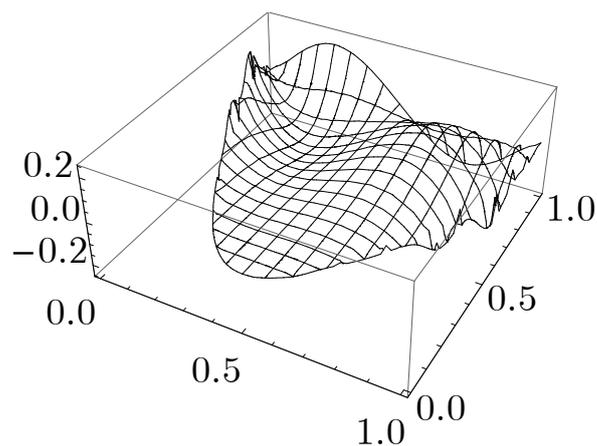


Рисунок Д.39 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

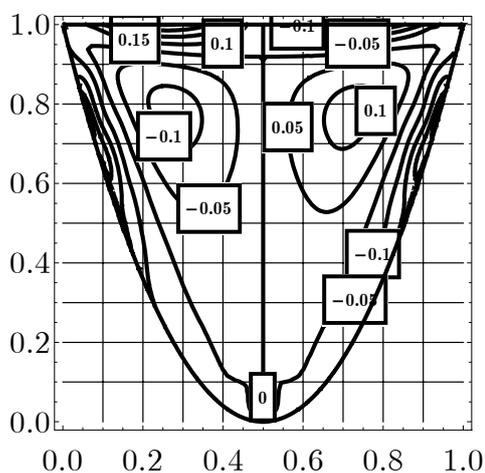


Рисунок Д.40 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

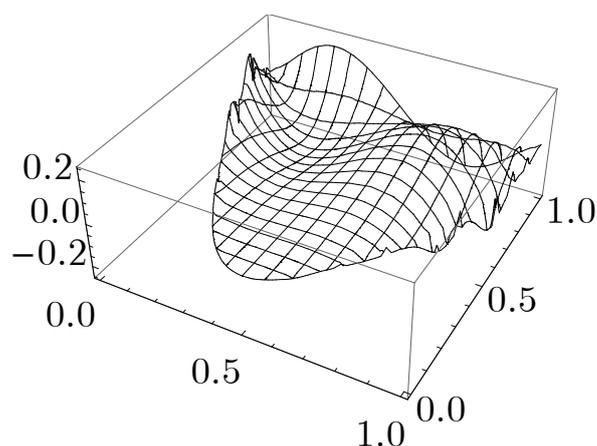


Рисунок Д.41 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

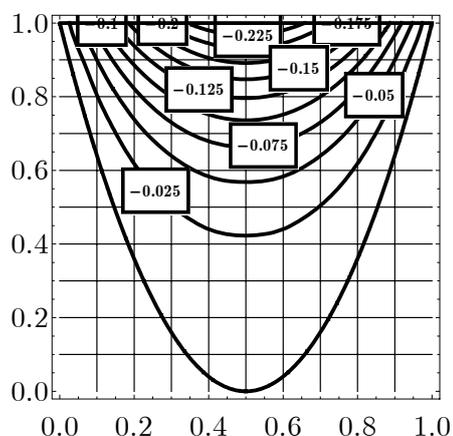


Рисунок Д.42 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

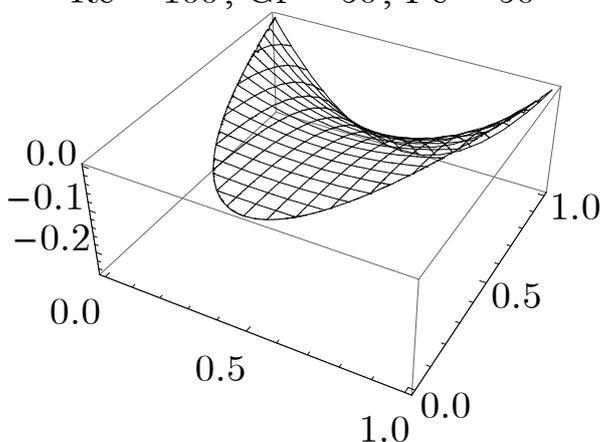


Рисунок Д.43 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

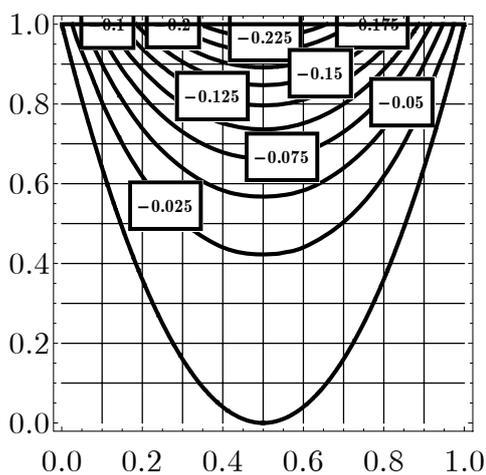


Рисунок Д.44 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

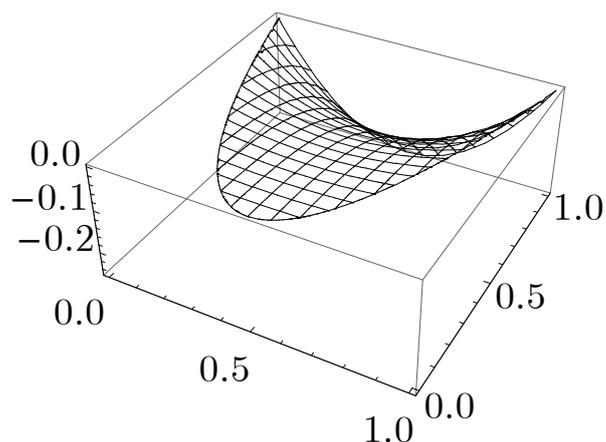


Рисунок Д.45 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

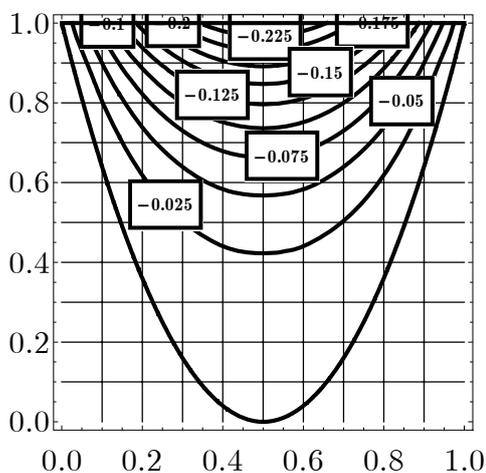


Рисунок Д.46 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

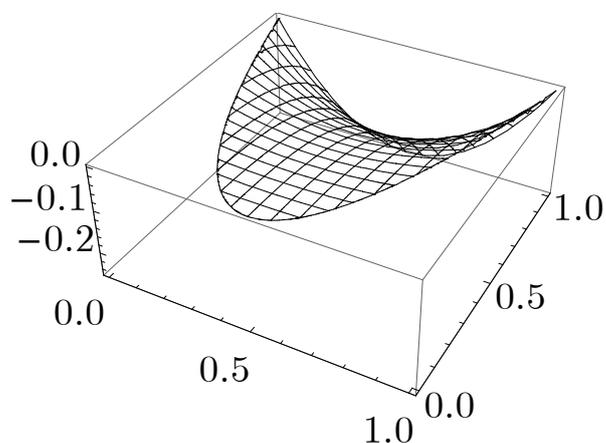


Рисунок Д.47 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

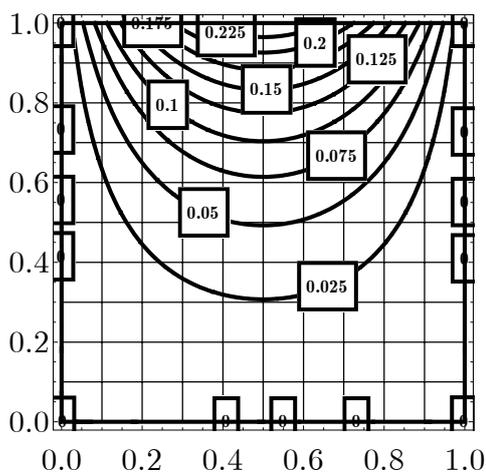


Рисунок Д.48 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

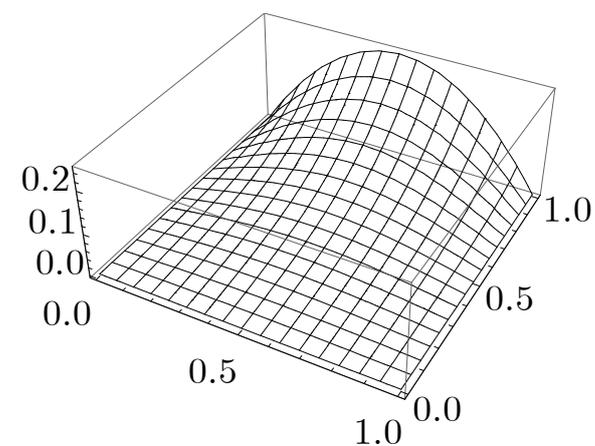
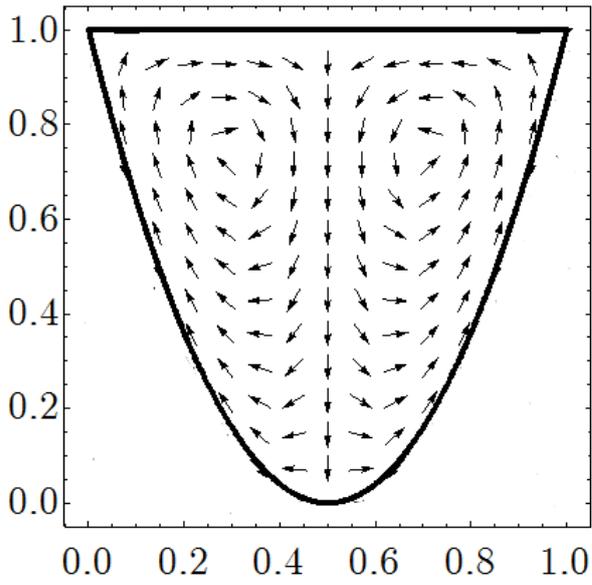
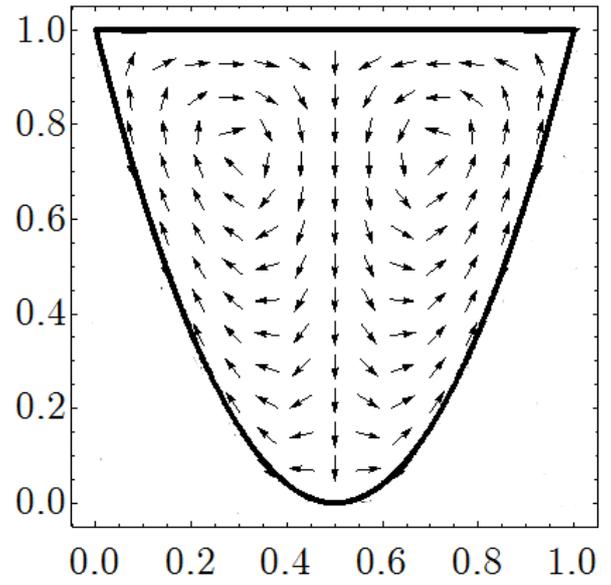


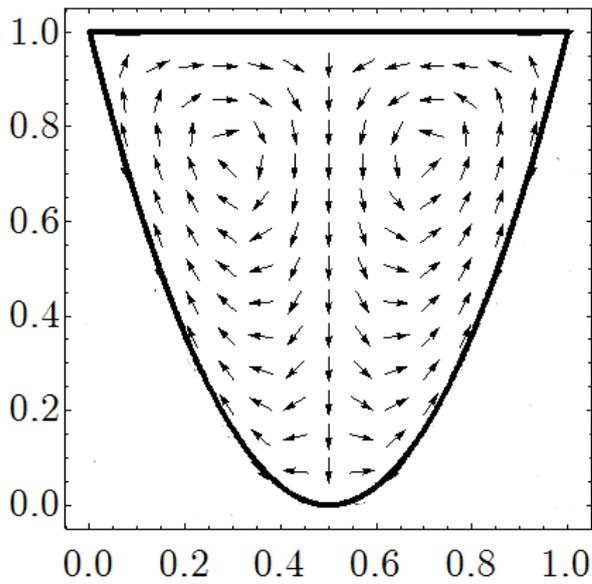
Рисунок Д.49 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$



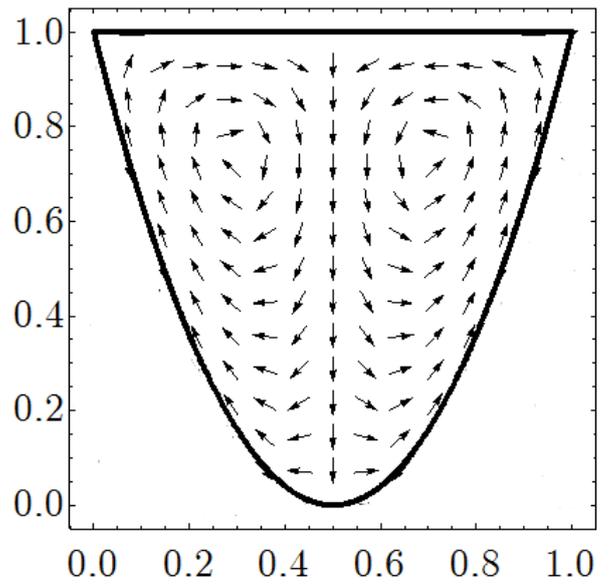
а)



б)



в)



г)

Рисунок Д.50 – Векторное поле скоростей при $Re = 100$

и различных числах Грасгофа и Пекле:

а) $Gr = 1$, $Pe = 1$, б) $Gr = 1$, $Pe = 50$,

в) $Gr = 50$, $Pe = 1$, г) $Gr = 50$, $Pe = 50$.

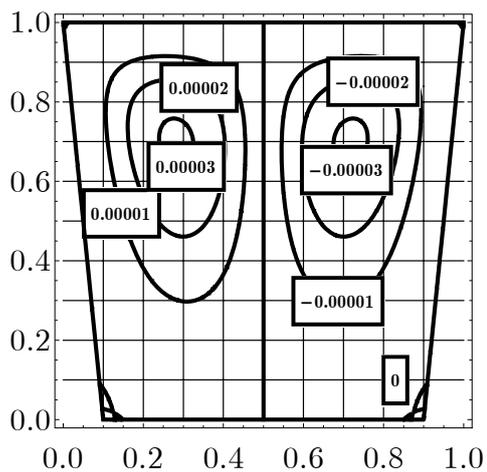


Рисунок Д.51 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

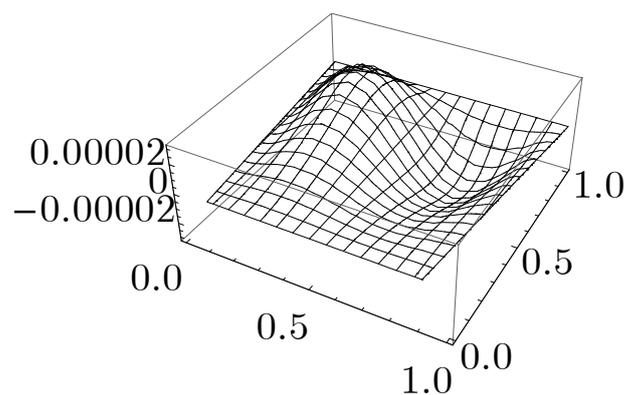


Рисунок Д.52 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

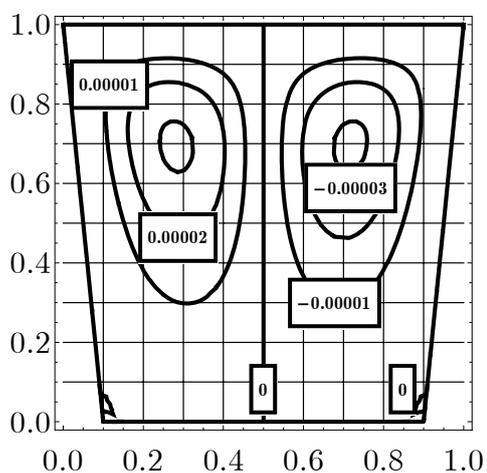


Рисунок Д.53 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

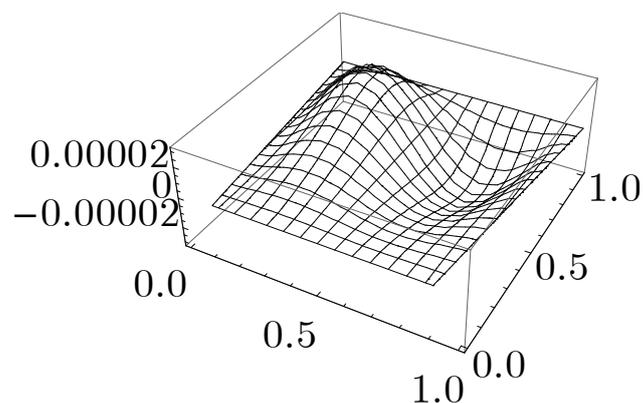


Рисунок Д.54 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

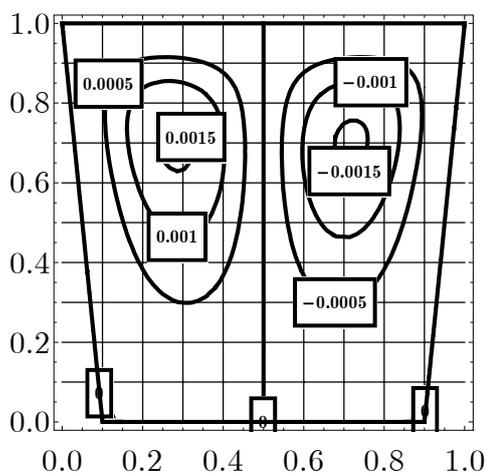


Рисунок Д.55 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

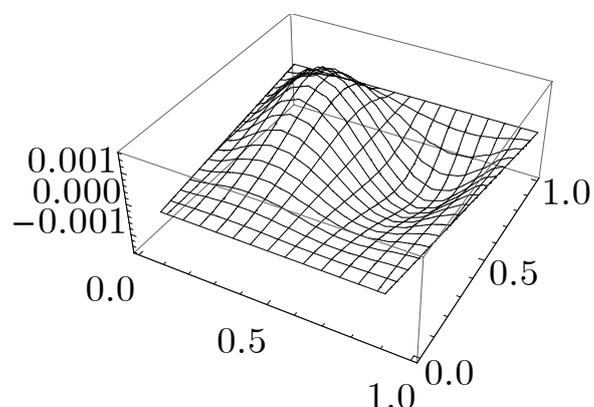


Рисунок Д.56 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

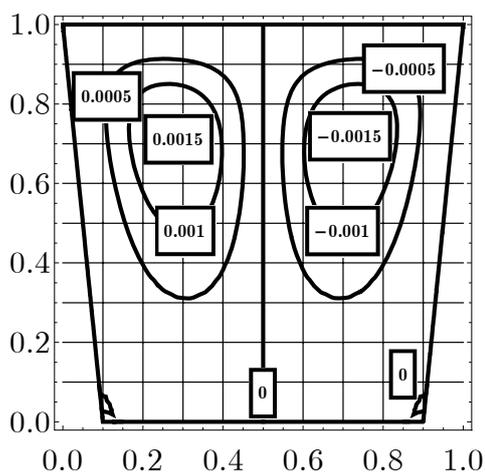


Рисунок Д.57 – Линии уровня функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

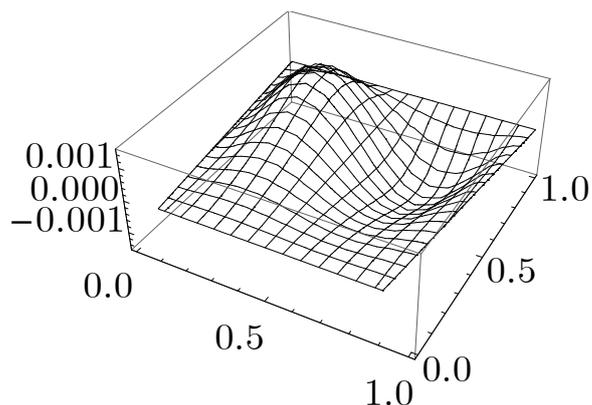


Рисунок Д.58 – Поверхность функции тока ψ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

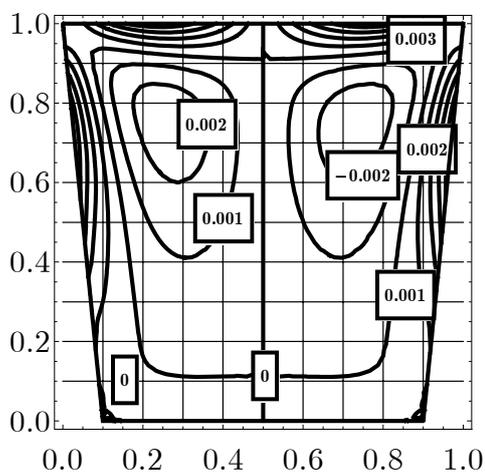


Рисунок Д.59 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

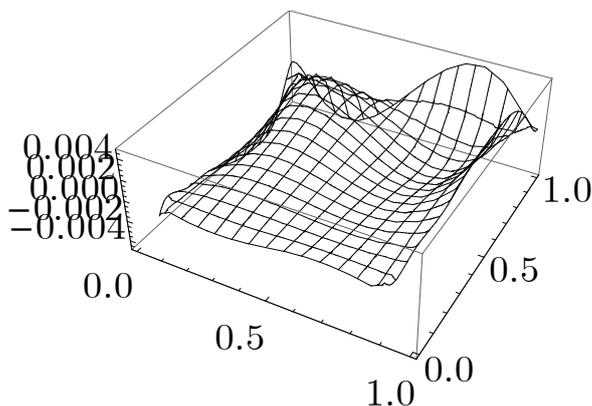


Рисунок Д.60 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

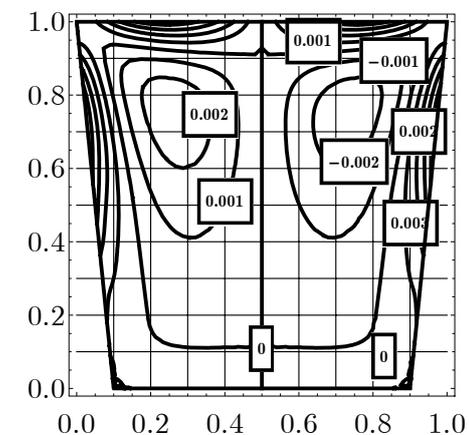


Рисунок Д.61 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

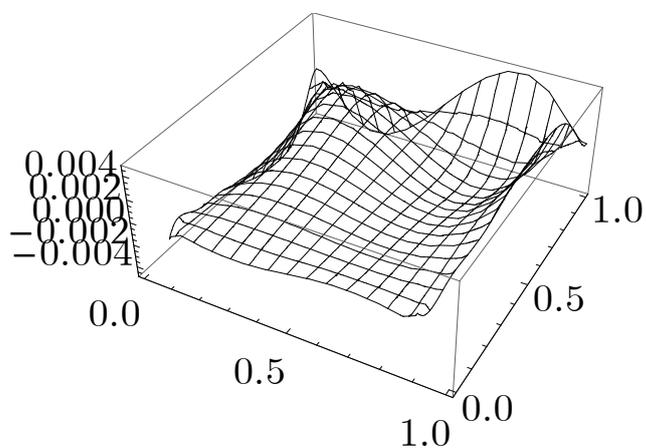


Рисунок Д.62 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

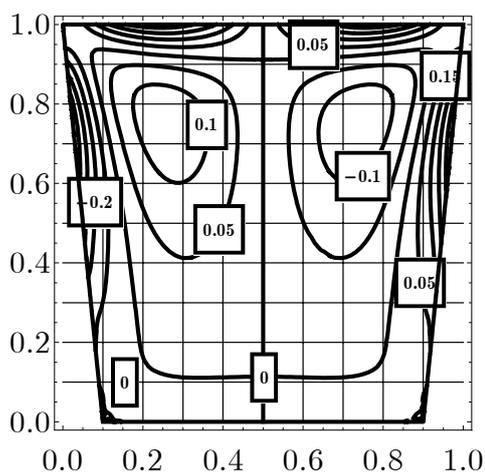


Рисунок Д.63 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

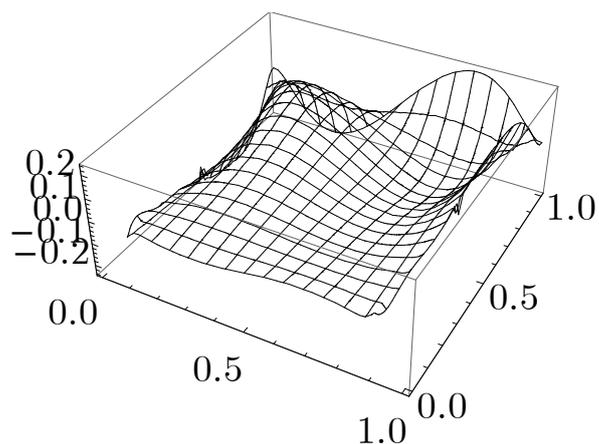


Рисунок Д.64 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

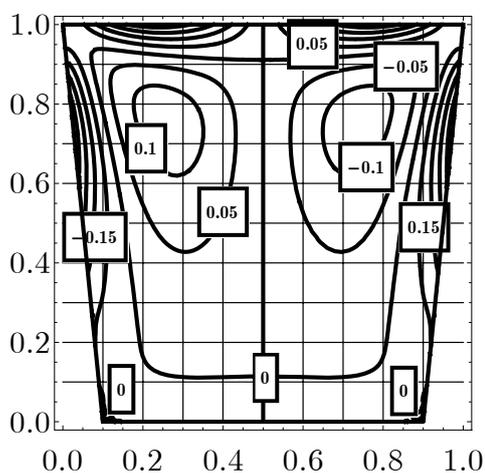


Рисунок Д.65 – Линии уровня функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

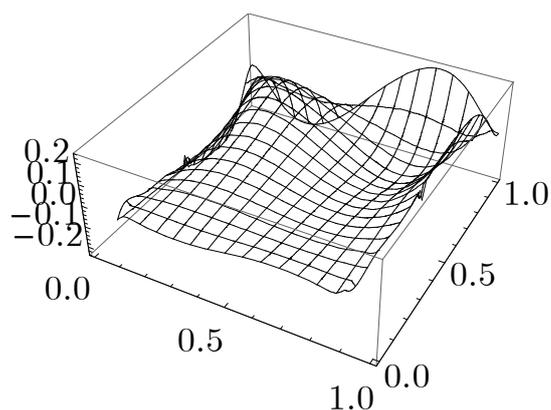


Рисунок Д.66 – Поверхность функции завихренности $\zeta = -\Delta\psi$ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

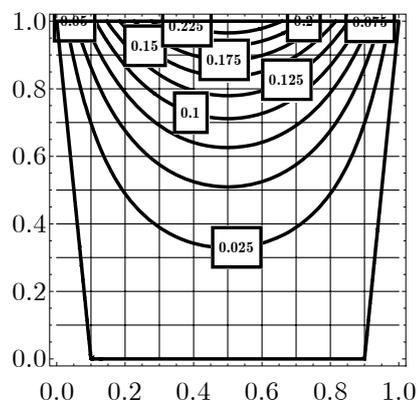


Рисунок Д.67 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

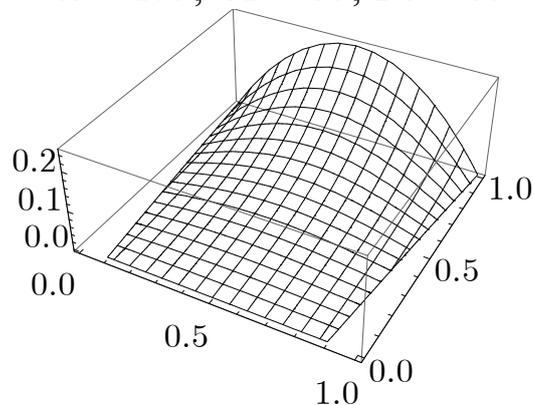


Рисунок Д.68 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 1$

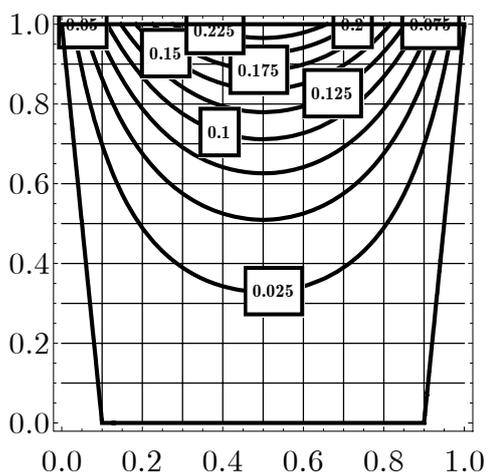


Рисунок Д.69 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

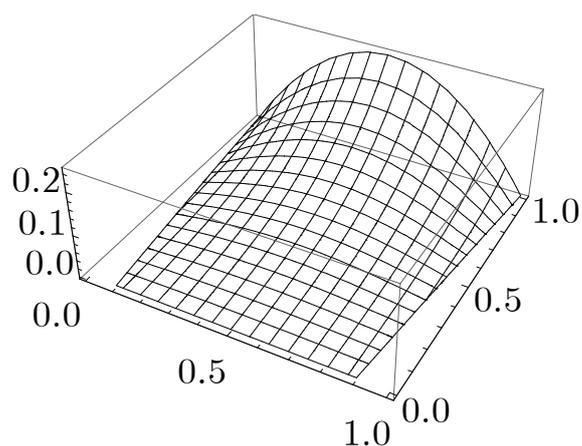


Рисунок Д.70 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 1$, $Pe = 50$

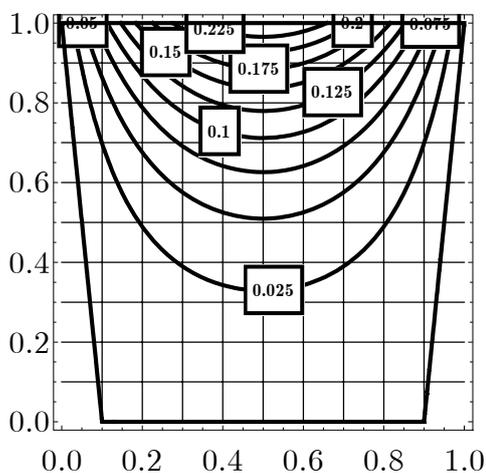


Рисунок Д.71 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

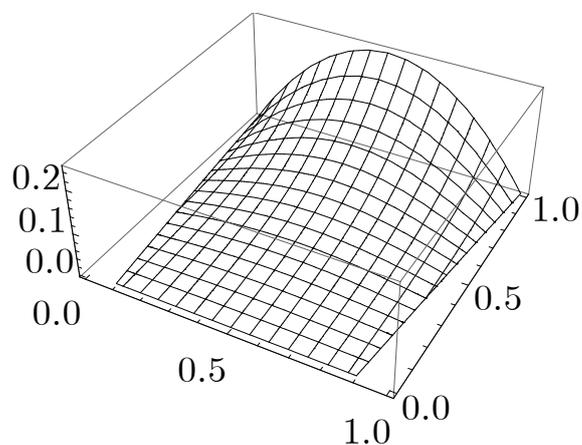


Рисунок Д.72 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 1$

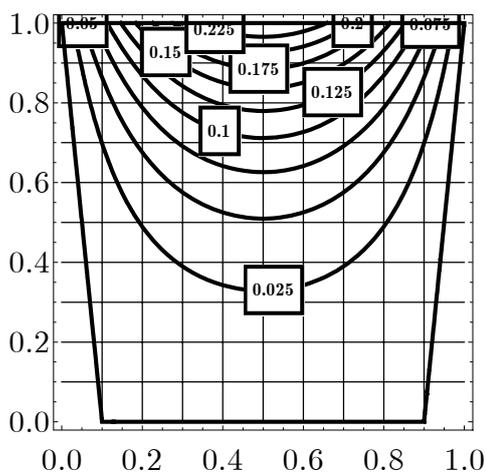


Рисунок Д.73 – Линии уровня температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$

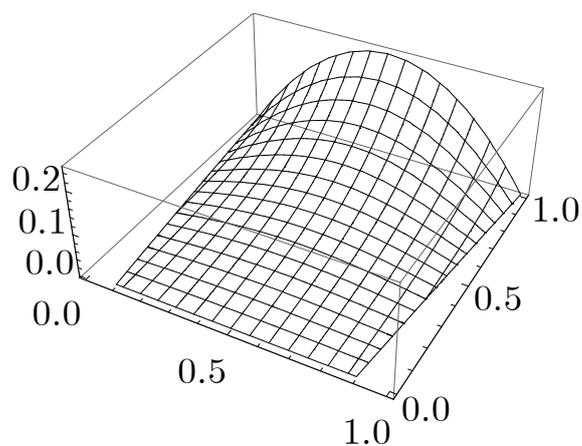
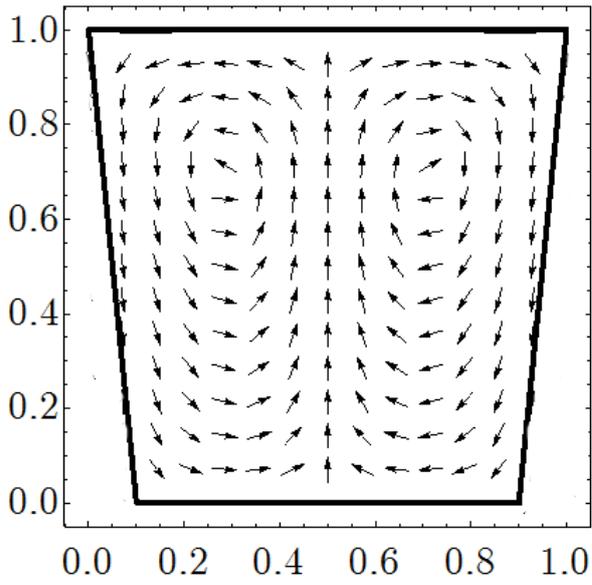
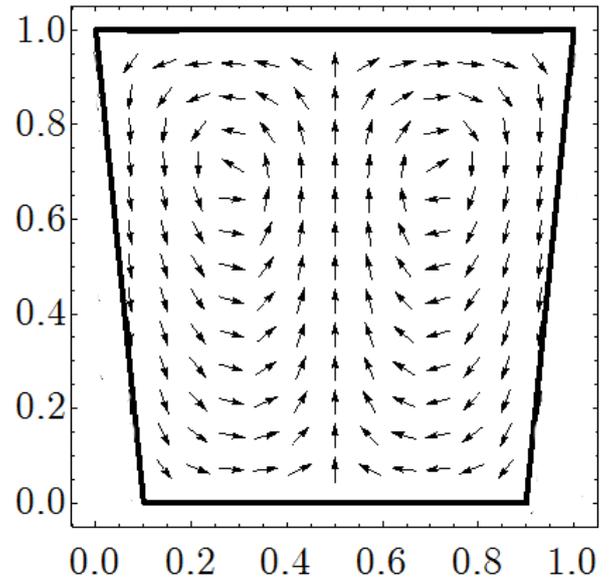


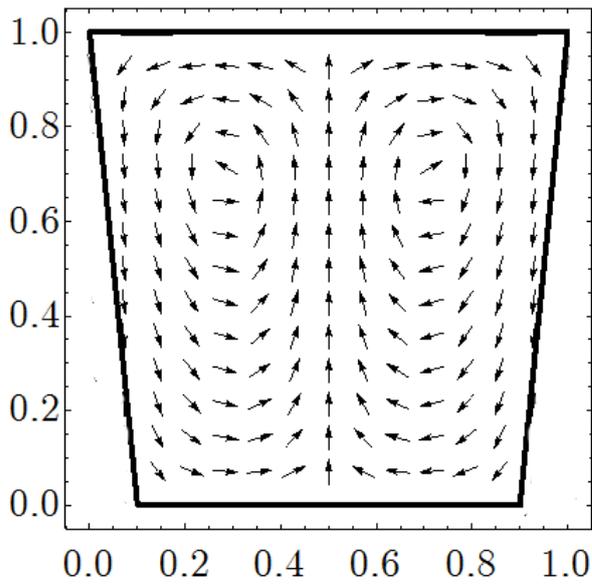
Рисунок Д.74 – Поверхность температуры θ при $t = 5$, $Re = 100$, $Gr = 50$, $Pe = 50$



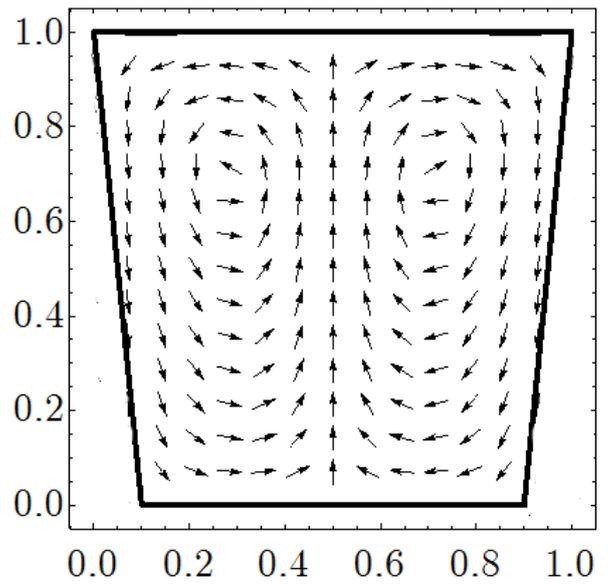
а)



б)



в)



г)

Рисунок Д.75 – Векторное поле скоростей при $Re = 100$

и различных числах Грасгофа и Пекле:

а) $Gr = 1$, $Pe = 1$, б) $Gr = 1$, $Pe = 50$,

в) $Gr = 50$, $Pe = 1$, г) $Gr = 50$, $Pe = 50$.