Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

АРТЮХ АНТОН ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 517.95:519.63

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сидоров Максим Вікторович,
доцент кафедри прикладної математики,
Харківський національний університет радіоелектроніки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Литвин Олег Миколайович,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики,
Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків);

кандидат фізико-математичних наук
Булигін Віталій Сергійович,
старший науковий співробітник лабораторії Мікро і Нано оптики, Інститут радіофізики та електроніки
ім. О.Я. Усикова НАН України (м. Харків).

Захист відбудеться «_26_» _квітня_ 2016 р. о _14^{00}_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському національному університеті радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

Автореферат розісланий « 25 » __березня__ 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Л.В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При розгляді процесів у геофізиці, біології, теплоенергетиці, біомедицині виникає необхідність дослідження нестаціонарних течій. При цьому часто рідину можна вважати в'язким ньютонівським нестисливим середовищем, що дозволяє моделювати такі течії за допомогою системи диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса.

Нелінійність рівнянь Нав'є-Стокса призводить до того, що вони у загальному випадку не піддаються безпосередньому аналізу. Так, відома лише обмежена кількість поодиноких випадків, коли систему рівнянь Нав'є-Стокса можна розв'язати аналітично. Основні результати з розв'язності початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса були отримані в роботах О.О. Ладиженської, Дж. Серріна, Р. Темама та інших.

Розвиток обчислювальної техніки сприяв появі ефективних чисельних методів розв'язання системи рівнянь Нав'є-Стокса. На теперішній час найбільш часто використовуються метод скінченних різниць (МСР) та метод скінченних елементів (МСЕ). Перевагою цих чисельних методів є простота у реалізації, а також можливість розпаралелити обчислювальний процес, що значно прискорює отримання результатів математичного моделювання. Однак МСР та МСЕ мають істотні недоліки: необхідно заново генерувати сітку для кожної області та спрощувати області (зокрема, замінювати криволінійні ділянки межі на ламані), що звичайно впливає на точність отриманого наближеного розв'язку. Тому існує необхідність розробки таких чисельних методів, які дозволять точно врахувати геометрію області течії. Крім того, найкращим є випадок отримання наближеного розв'язку в аналітичному вигляді, що досягається шляхом використання наближено-аналітичних методів (наприклад, проекційних).

Побудувати чисельний метод з вказаними властивостями можна за допомогою конструктивного апарату теорії *R*-функцій, що був розроблений академіком НАН України В.Л. Рвачовим та його учнями. Задачі гідродинаміки розв'язувались у роботах С.В. Колосової, К.В. Максименко-Шейко, М.В. Сидорова, І.Г. Суворової, Т.І. Шейко та інших. Однак в основному розглядались задачі розрахунку стаціонарних течій ідеальної або в'язкої рідини. Тому розробка нових, а також вдосконалення існуючих методів математичного моделювання нестаціонарних течій на основі методу *R*-функцій та проекційних методів є актуальною науковою задачею.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми „Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витоками" (ДР № 0111U002624, 2011 – 2013 рр.), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

Мета і задачі дослідження. Метою досліджень дисертаційної роботи є розробка методів математичного моделювання і чисельного аналізу плоскопаралельних нестаціонарних течій в'язкої нестисливої теплопровідної рідини в областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів *R*-функцій та Гальоркіна.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно розв'язати такі задачі:

– розробка методу розрахунку плоскопаралельних нестаціонарних течій у наближенні Стокса (лінеарізована задача) в однозв'язних областях на основі методів *R*-функцій і Гальоркіна;

– розробка методу розрахунку плоскопаралельних нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини (лінеарізована задача) в однозв'язних областях на основі методів *R*-функцій і Гальоркіна;

– подальший розвиток ітераційного методу розрахунку течій в'язкої рідини (нелінійна задача для функції течії та нелінійна задача для функції течії і температури) в однозв'язних областях у частині застосування до нестаціонарних задач;

– застосування розроблених методів чисельного аналізу до розв'язання тестових задач розрахунку плоскопаралельних нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини у однозв'язних областях при різних числах Рейнольдса, Грасгофа і Пекле.

Об'єктом дослідження є нестаціонарні гідродинамічні процеси у в'язкій нестисливій рідині, які описуються лінеарізованими або нелінійними рівняннями відносно функції течії та системами рівнянь відносно функції течії і температури.

Предметом дослідження є математичні моделі і методи чисельного аналізу нестаціонарних плоскопаралельних течій в'язкої нестисливої теплопровідної рідини у однозв'язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичної фізики і функціонального аналізу для обґрунтування та дослідження запропонованих чисельних методів; метод *R*-функцій для побудови нормалізованих рівнянь меж областей та структур розв'язку початково-крайових задач; метод Гальоркіна, метод послідовних наближень та методи теорії сплайнів для апроксимації невизначених компонент структур розв'язку; квадратурні формули Гаусса для чисельного інтегрування; методи Рунге-Кутти з автоматичним вибором кроку інтегрування для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів. Проведені у дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати нові наукові результати:

– вперше розроблено метод розв'язання лінійної нестаціонарної задачі Стокса в однозв'язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів *R*-функцій та Гальоркіна;

– вперше розроблено метод розв'язання нестаціонарної задачі розрахунку течії в'язкої теплопровідної рідини (лінеарізована задача) в однозв'язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів *R*-функцій та Гальоркіна;

– у частині застосування до нестаціонарних задач отримав подальший розвиток ітераційний метод розв'язання нелінійного диференціального рівняння для функції течії в однозв'язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів *R*-функцій, Гальоркіна та методу послідовних наближень; отримані умови та оцінки швидкості збіжності в нормі просторів $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap$ $\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$ до єдиного узагальненого розв'язку;

– у частині застосування до нестаціонарних задач отримав подальший розвиток ітераційний метод розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь для функції течії та температури в однозв'язних областях складної геометрії з кусково-гладкою межею на основі методів *R*-функцій, Гальоркіна та методу послідовних наближень; отримані умови та оцінки швидкості збіжності в нормі простору $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))\times L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ до єдиних узагальнених розв'язків.

У розроблених методах алгоритм не змінюється при переході до нової області, наближений розв'язок має аналітичний вигляд, а структура розв'язку точно враховує крайові умови для функції течії та температури. Крім того, можливість отримання розв'язку у аналітичному вигляді дозволяє проводити якісний аналіз течії, що безпосередньо неможливо при використанні сіткових методів.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені методи математичного моделювання і чисельного аналізу нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини мають досить прості обчислювальні схеми і є більш універсальними, ніж ті, що використовуються на цей час, що підтверджується проведеними обчислювальними експериментами. Це дозволяє з їх допомогою більш ефективно проводити математичне моделювання різних геофізичних, фізико-механічних, біологічних течій тощо. Розроблені в дисертаційній роботі методи розрахунку плоскопаралельних течій в'язкої теплопровідної рідини в однозв'язних областях впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах «Вибрані глави математичної фізики», «Конструктивні засоби математики», «Теорія *R*-функцій та її застосування» і «Чисельні методи» при проведенні лабораторних робіт, практичних занять, у курсовому та дипломному проектуванні.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані особисто дисертантом та опубліковано в роботах [1 – 23]. У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: у [1] – метод розв'язання задачі Стокса, проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі; у [2, 7, 23] – метод розв'язання нелінійного диференціального рівняння для функції течії; у [4] – метод розв'язання лінійної нестаціонарної задачі течії в'язкої теплопровідної рідини; у [5, 8] – ітераційний метод розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь для функції течії та температури, проведені обчислювальні експерименти.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи були апробовані на: Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012 р.); Міжнародній студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики (Львів, 2012, 2013, 2015 рр.); Міжнародній молодіжній науковій конференції «Гагаринские чтения» (Москва, 2012 – 2014 рр.); Всеукраїнській науково-технічній конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології» (Одеса, 2012 р.); Міжнародному молодіжному форумі «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харків, 2012 – 2015 рр.); International scientific conference of students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics» (Київ, 2012 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Информационные системы и технологии» (Морське-Харків, 2012 р.); Міжнародному симпозіумі «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (Харків-Херсон, 2013 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2015 р.); наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, 2012, 2015 рр.), кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2015 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертаційної роботи опубліковані в 23 друкованих роботах, з яких: 6 статей – у наукових фахових виданнях згідно з переліком фізико-математичних наук, 1 стаття – у закордонному науковому виданні; 16 тез доповідей, опублікованих у матеріалах наукових конференцій, у тому числі – 13 міжнародних.

Структура та обсяг роботи. Дисертація містить вступ, 5 розділів, висновки по роботі, 5 додатків (на 83 с.), 24 рисунка (на 8 с.), 38 таблиць (на 8 с.) та список використаних джерел із 194 найменувань (на 19 с.). Повний обсяг дисертації складає 251 сторінки, з них 133 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступній частині** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, які потрібно розв'язати для її досягнення. Надано стислу характеристику результатів дослідження, ступеня їх апробації та опублікування.

В **першому розділі** розглянуто узагальнену систему гідродинаміки у дійсних змінних, показано перехід від розмірних величин до безрозмірних, введено функцію течії та наведено математичні моделі течій в'язкої рідини. Проведено огляд існуючих методів чисельного аналізу нестаціонарних течій в'язкої рідини. Наведено основні відомості про *R*-функції та огляд робіт, у яких розв'язувались задачі гідродинаміки із застосуванням методу *R*-функцій. Обґрунтовано необхідність розробки нових методів математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої нестисливої рідини за допомогою апарату теорії *R*-функцій, методів Гальоркіна та послідовних наближень, сформульовано задачі дослідження.

У **другому розділі** розроблено метод чисельного аналізу та проведено обчислювальні експерименти для лінеаризованої за Стоксом задачі нестаціонарного плоскопаралельного руху в'язкої нестисливої рідини у скінченній однозв'язній області Ω площини xOy. Аналіз таких задач зручно проводити за допомогою функції течії $\psi(x,y,t)$, яка пов'язана з полем швидкостей $\vec{v}=(v_x,v_y)$ співвідношеннями $v_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$. Тоді математична модель має вигляд:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}=\nu\Delta^2\psi,\ \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega}=g_0(s,t),\ \ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0, \tag{2}$$

$$\psi\big|_{t=0}=\psi_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа; Δ^2 – бігармонічний оператор; ν – кінематична в'язкість; $\dfrac{df_0(s,t)}{ds}$, $g_0(s,t)$ – розподіли нормальної та дотичної складових швидкості потоку відповідно; ψ_0 – початкове значення функції течії.

Для розв'язання задачі (1) – (3) використаємо методи R-функцій і Гальоркіна. Відповідно до методу R-функцій структура розв'язку цієї задачі має вигляд

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi , \tag{4}$$

де $f = EC f_0$, $g = EC g_0$ – продовження функцій f_0 і g_0 в область Ω відповідно; $\omega(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ ($\omega = 0$ на $\partial\Omega$, $\omega > 0$ в Ω, $\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega$); Φ – невизначена компонента структури.

У задачі (1) – (3) зробимо заміну $\psi = \varphi + u$, де $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$, u – нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u = F , \quad (x, y) \in \Omega , \; t > 0 , \tag{5}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 , \; \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 , \; t \ge 0 , \quad u\big|_{t=0} = u_0 , \; (x, y) \in \bar{\Omega} , \tag{6}$$

де $F = -\nu\Delta^2\varphi + \dfrac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}$; $u_0 = \psi_0 - \varphi\big|_{t=0}$.

Розглянемо оператори A і B, що діють в $L_2(0,T; L_2(\Omega))$ за правилами $Au = \Delta^2 u$, $Bu = -\Delta u$ на областях визначення

$$D_A = \left\{ u \,\middle|\, u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \, u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_B = \left\{ u \,\middle|\, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \, u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Оператори A і B породжують енергетичні простори H_A і H_B з енергетичними добутками і нормами

$$[u, v]_A = \iint\limits_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dxdy , \quad [u, v]_B = \iint\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dxdy ,$$
$$\| u \|_A^2 = \iint\limits_{\Omega} (\Delta u)^2 \, dxdy , \quad \| u \|_B^2 = \iint\limits_{\Omega} \left| \nabla u \right|^2 dxdy .$$

Тоді задачу (5) – (6) можна записати в операторній формі

$$\frac{d}{dt} Bu + \nu Au = F , \quad (x, y) \in \Omega , \; t > 0 , \quad u\big|_{t=0} = u_0 . \tag{7}$$

Означення 1. Функція $u(t)$ називається узагальненим розв'язком задачі (7), якщо а) $u(t) \in L_2(0,T; H_A)$; б) для будь-якого елементу $v(t) \in W_T = \{ v \mid v \in L_2(0,T; H_A), \, v' \in L_2(0,T; L_2(\Omega)), \, v(T) = 0 \}$ виконується рівність

$$-\int_0^T \left[u, \frac{dv}{dt} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u,v]_A dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (F,v)_{L_2(\Omega)} dt .$$

Варіаційне формулювання задачі (7) виглядає так (u' – похідна за часом)

$$[u',v]_B + \nu[u,v]_A = (F,v)_{L_2(\Omega)} , \; t \in (0;T], \quad (u-u_0,v)_{L_2(\Omega)} = 0 , \; t = 0 . \qquad (8)$$

Для розв'язання задачі (8) використаємо метод Гальоркіна для нестаціонарних задач. Наближений розв'язок задачі (8) шукатимемо у вигляді

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i , \qquad (9)$$

де $c_i(t)$, $i = 1,...,n$, – невідомі функції; $\{\varphi_i\}$ – координатна послідовність, тобто послідовність, що задовольняє умовам: а) для будь-якого i $\varphi_i \in H_A$; б) для будь-якого n $\varphi_1,...,\varphi_n$ лінійно незалежні; в) $\{\varphi_i\}$ повна в H_A.

Оскільки з (4) слідує, що $u = \omega^2\Phi$, то координатну послідовність можна взяти у вигляді $\varphi_i = \omega^2\tau_i$, де $\{\tau_i\}$ – будь-яка повна в $L_2(\Omega)$ система функцій.

Згідно з методом Гальоркіна невідомі функції $c_i(t)$, $i = 1,...,n$, знайдено з умови ортогональності відхилу, що отримується при підстановці (9) в рівняння (8). Це призводить до задачі Коші вигляду

$$BC'(t) + \nu AC(t) = L(t) , \; t \in (0;T], \quad SC(0) = P , \qquad (10)$$

де $C(t) = \{c_i(t)\}$, $B = \{b_{ij}\} = \{[\varphi_i, \varphi_j]_B\}$, $A = \{a_{ij}\} = \{[\varphi_i, \varphi_j]_A\}$, $L(t) = \{l_j(t)\} = \{(F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $S = \{s_{ij}\} = \{(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $P = \{p_j\} = \{(u_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$.

Твердження 1. Додатної означеності операторів A і B достатньо, щоб розв'язок задачі Коші (10) існував і був єдиним, тобто при будь-якому n гальоркінські наближення до розв'язку задачі (5), (6) визначені та будуються єдиним чином.

Для наближеного розв'язку $u_n(t)$ отримана оцінка

$$\|u_n(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^t [u_n]^2_A \, d\tau \le \frac{1}{\chi} [u_n(0)]^2_B + \frac{c_1^2}{\nu\chi} \int_0^t \|F\|^2_{L_2(\Omega)} \, d\tau , \; t \in (0;T],$$

де $\chi = \min\{c_1^{-1}, \nu\}$.

З цієї оцінки випливає обмеженість наближеного розв'язку в нормі простору $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)$, яка визначена співвідношенням $\operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^T [u]^2_A \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. Варіаційна задача (8), що зводиться до задачі Коші (10), має єдиний (якщо він існує) розв'язок в просторі $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)$.

Також отримано оцінку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|u_n\right\|_{L_2(\Omega)} \le e^{-\nu c_3^2 T}\left\|u_n(0)\right\|_{L_2(\Omega)} + c_1\int_0^T e^{-\nu c_3^2 (T-t)}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}dt\,,$$

яка визначає стійкість наближеного розв’язку у нормі простору $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Теорема 2. Нехай задані функції $u_0\in L_2(\Omega)$ та $F(t)\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Тоді варіаційна задача (8) має єдиний розв’язок $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;H_A)$.

Отже, функція $\omega(x,y)$, побудована методом *R*-функцій повинна бути такою, щоб $u_0=\psi_0-\varphi\big|_{t=0}\in L_2(\Omega)$, $F(t)=-\nu\Delta^2\varphi+\dfrac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі (1) – (3) з відомим точним розв’язком ψ^*. Відповідна задача Коші розв’язувалась за допомогою методу Рунге-Кутти п’ятого порядку, інтеграли обчислювались за допомогою формули Гаусса з 16 вузлами, за координатні функції обирались поліноми Лежандра та сплайни Шенберга шостого порядку. Результати обчислювального експерименту наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Результати обчислювального експерименту для тестової задачі

Тип координатних функцій	Поліноми Лежандра		Сплайни Шенберга 6-го порядку	
Кількість координатних функцій	21	66	100	225
$\left\|\psi^*-\psi\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0{,}11\times10^{-6}$	$0{,}99\times10^{-8}$	$0{,}42\times10^{-8}$	$0{,}44\times10^{-9}$
$\left\|\left\|\vec v^*-\vec v\right\|\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0{,}48\times10^{-5}$	$0{,}84\times10^{-6}$	$0{,}37\times10^{-6}$	$0{,}79\times10^{-7}$
$\left\|\zeta^*-\zeta\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$	$0{,}34\times10^{-3}$	$0{,}11\times10^{-3}$	$0{,}73\times10^{-4}$	$0{,}33\times10^{-4}$

Також обчислювальний експеримент було проведено для трьох областей: квадрат, параболічний сегмент та трапеція. Графіки ліній рівня функції течії та завихореності наведено на рис. 1 та 2 відповідно.

Основні результати другого розділу опубліковані в [1, 9, 19, 21].

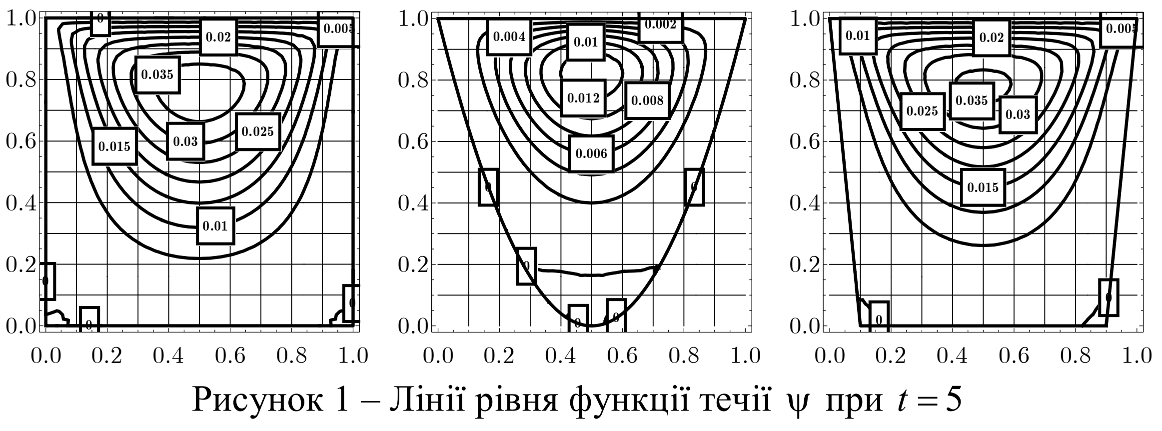

Рисунок 1 – Лінії рівня функції течії ψ при $t=5$

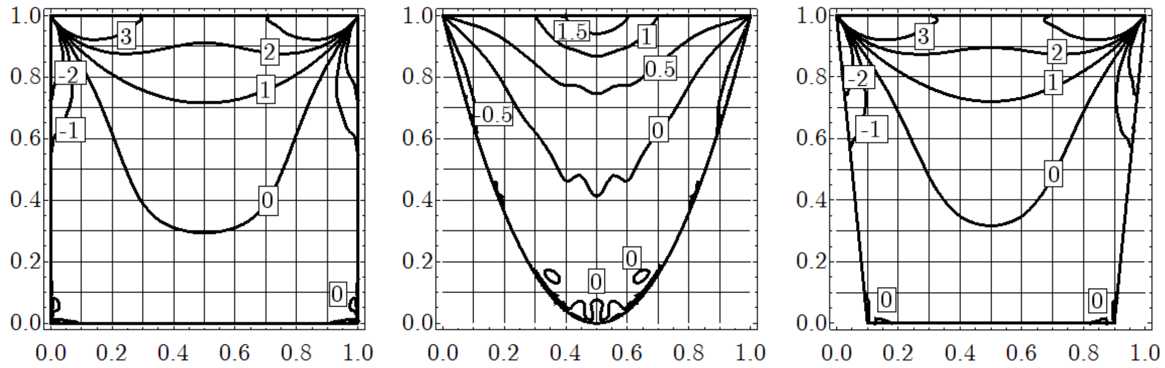

Рисунок 2 – Лінії рівня функції завихореності при $t = 5$

У **третьому розділі** розроблено метод чисельного аналізу та проведено обчислювальні експерименти для лінеаризованої задачі нестаціонарного плоскопаралельного руху в'язкої нестисливої теплопровідної рідини у скінченній однозв'язній області Ω площини xOy. Математична модель має вигляд:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta = 0, \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{12}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{13}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{14}$$

де ψ – функція течії; θ – температура; β – коефіцієнт об'ємного розширення; κ – коефіцієнт температуропровідності; h_0 – заданий розподіл температури на межі $\partial\Omega$; θ_0 – початковий розподіл температури.

Для розв'язання задачі (11) – (14) використаємо методи *R*-функцій та Гальоркіна. Відповідно до методу *R*-функцій структура розв'язку задачі (11), (13) має вигляд (4), а задачі (12), (14) – $\theta = h + \omega\Upsilon$, де $h = ECh_0$ – продовження функції h_0 в область Ω, Υ – невизначена компонента структури.

У задачі (11) – (14) зробимо заміну $\psi = \varphi + u$, $\theta = h + v$, де u, v – нові невідомі функції. Тоді для функцій u та v отримаємо задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u) + \nu\Delta^2 u - \beta\frac{\partial v}{\partial x} = F, \quad (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \kappa(-\Delta v) = G, \quad (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{16}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t\ge 0,\quad u\big|_{t=0} = u_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{17}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t\ge 0,\quad v\big|_{t=0} = v_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{18}$$

де $F = -\nu\Delta^2\varphi + \dfrac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial h}{\partial x}$; $G = -\dfrac{\partial h}{\partial t} + \kappa\Delta h$; $v_0 = \theta_0 - h\big|_{t=0}$.

Розглянемо оператори B_1, B_2 та E, що діють в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ за правилами $B_1u=-\Delta u$, $B_2v=-\Delta v$, $Ev=\dfrac{\partial v}{\partial x}$ на областях визначення

$$D_{B_1}=\left\{u\,|\,u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega}),\ u\big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

$$D_{B_2}=\{v\,|\,v\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}),v\big|_{\partial\Omega}=0\},\quad D_E=\{v\,|\,v\in C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}),v\big|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Тоді задачу (15) – (18) можна записати в операторній формі

$$\frac{d}{dt}B_1u+\nu Au-\beta Ev=F,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,\ \ u\big|_{t=0}=u_0,\ (x,y)\in\overline{\Omega},\tag{19}$$

$$\frac{dv}{dt}+\kappa B_2v=G,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,\ \ v\big|_{t=0}=v_0,\ (x,y)\in\overline{\Omega}.\tag{20}$$

Означення 2. Пара $(u(t),v(t))$ називається узагальненим розв’язком задачі (19), (20), якщо: а) $(u(t),v(t))\in L_2(0,T;H_A)\times L_2(0,T;H_{B_2})$; б) для будь-якої пари $(w_1(t),w_2(t))\in\mathbf{W}_T$ мають місце рівності

$$-\int_0^T[u,w_1']_{B_1}dt+\nu\int_0^T[u,w_1]_A dt-\beta\int_0^T(Ev,w_1)_{L_2(\Omega)}dt=[u_0,w_1(0)]_{B_1}+\int_0^T(F,w_1)_{L_2(\Omega)}dt,$$

$$-\int_0^T(v,w_2')_{L_2(\Omega)}dt+\kappa\int_0^T[v,w_2]_{B_2}dt=(v_0,w_2(0))_{L_2(\Omega)}+\int_0^T(G,w_2)_{L_2(\Omega)}dt,$$

де $\mathbf{W}_T=\{(w_1,w_2)\,|\,(w_1,w_2)\in L_2(0,T;H_A)\times L_2(0,T;H_{B_2}),$
$(w_1',w_2')\in L_2(0,T;L_2(\Omega)\times L_2(0,T;L_2(\Omega)),w_1(T)=0,\ w_2(T)=0\}$.

Варіаційне формулювання задачі (19), (20) можна записати так:

$$[u',w_1]_{B_1}+\nu[u,w_1]_A=(F,w_1)_{L_2(\Omega)}+\beta(Ev,w_1)_{L_2(\Omega)},\ t\in(0;T],\tag{21}$$

$$(v',w_2)_{L_2(\Omega)}+\kappa[v,w_2]_{B_2}=(G,w_2)_{L_2(\Omega)},\ t\in(0;T],\tag{22}$$

$$(u-u_0,w_1)_{L_2(\Omega)}=0,\quad (v-v_0,w_2)_{L_2(\Omega)}=0,\quad t=0.\tag{23}$$

Для побудови наближеного розв’язку задачі (21) – (23) використаємо метод Гальоркіна для нестаціонарних задач. Наближений розв’язок задачі (21) – (23) шукатимемо у вигляді $u_n(t)=\sum\limits_{i=1}^n c_i(t)\varphi_i$, $v_n(t)=\sum\limits_{i=1}^n d_i(t)\upsilon_i$, де $c_i(t)$, $d_i(t)$, $i=1,...,n$, – невідомі функції, $\{\varphi_i\}$, $\{\upsilon_i\}$ – координатні послідовності, які можна взяти у вигляді $\varphi_i=\omega^2\tau_i$, $\upsilon_i=\omega\tau_i$, де $\{\tau_i\}$ – повна в $L_2(\Omega)$ система функцій. З умови ортогональності відхилу першим n координатним функціям отримаємо задачу Коші для визначення невідомих функцій $c_i(t)$ та $d_i(t)$:

$$B_1C'(t)+\nu AC(t)-\beta ED(t)=L(t),\quad t\in(0;T],\quad SC(0)=P,\tag{24}$$

$$RD'(t)+\kappa B_2D(t)=M(t),\quad t\in(0;T],\quad RD(0)=Y,\tag{25}$$

де $C(t)=\{c_i(t)\}$, $B_1=\{b_{1,ij}\}=\{[\varphi_i,\varphi_j]_{B_1}\}$, $A=\{a_{ij}\}=\{[\varphi_i,\varphi_j]_A\}$, $E=\{e_{ij}\}=$ $=\{(E\upsilon_j,\varphi_i)_{L_2(\Omega)}\}$, $L(t)=\{l_j(t)\}=\{(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $B_2=\{b_{2,ij}\}=\{[\upsilon_i,\upsilon_j]_{B_2}\}$, $M(t)=$ $=\{m_j(t)\}=\{(G,\upsilon_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $S=\{s_{ij}\}=\{(\varphi_i,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $P=\{p_j\}=\{(u_0,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $R=$ $=\{r_{ij}\}=\{(\upsilon_i,\upsilon_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $Y=\{y_j\}=\{(v_0,\upsilon_j)_{L_2(\Omega)}\}$.

Твердження 2. Додатної означеності операторів A, B_1 і B_2, щоб розв'язок задачі Коші (24), (25) існував і був єдиним, тобто при будь-якому n гальоркінські наближення до розв'язку задачі (15) – (18) визначені та будуються єдиним чином.

Для пари наближених розв'язків $(u_n(t),v_n(t))$ отримані оцінки

$$\frac{1}{c_1}\|u_n(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\nu}{2c_1^2}\int_0^t\|u_n\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau\le|u_n(0)|^2_{B_1}+\frac{c_1^2}{\nu}\int_0^t\|F\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau+\frac{\beta c_1^2}{2\nu}\int_0^t|v_n|^2_{B_2}d\tau,$$

$$\|v_n(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\kappa\int_0^t|v_n|^2_{B_2}d\tau\le\|v_n(0)\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{c_1}{\kappa}\int_0^t\|G\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau.$$

Теорема 3. Варіаційна задача (21) – (23), що зводиться до задачі Коші (24), (25), має єдиний (якщо він існує) розв'язок в просторі $(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_A))\times(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_{B_2}))$.

Також для наближених розв'язків отримані оцінки

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\|u_n\|_{L_2(\Omega)}\le e^{-\nu c_3^2T}\|u_n(0)\|_{L_2(\Omega)}+c_1\int_0^T e^{-\nu c_3^2(T-t)}\left(\|F\|_{L_2(\Omega)}+\beta|v_n|_{B_2}\right)dt,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\|v_n\|_{L_2(\Omega)}\le e^{-\frac{\kappa}{c_1}T}\|v_n(0)\|_{L_2(\Omega)}+\int_0^T e^{-\frac{\kappa}{c_1}(T-t)}\|G\|_{L_2(\Omega)}dt.$$

Теорема 4. Нехай задані функції $u_0\in L_2(\Omega)$, $v_0\in L_2(\Omega)$ та $F(t)$, $G(t)\in$ $\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Тоді варіаційна задача (21) – (23) має єдиний розв'язок $(u,v)\in(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)))\times(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)))$.

Отже, функція $\omega(x,y)$, побудована методом R-функцій повинна бути такою, щоб $u_0=\psi_0-\varphi|_{t=0}\in L_2(\Omega)$, $v_0=\theta_0-h|_{t=0}\in L_2(\Omega)$, $F(t)=-\nu\Delta^2\varphi+$ $+\dfrac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}+\beta\dfrac{\partial h}{\partial x}\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $G(t)=-\dfrac{\partial h}{\partial t}+\kappa\Delta h\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Обчислювальні експерименти було проведено для трьох тестових областей: квадрат, параболічний сегмент та трапеція. Графіки ліній рівня функції течії та температури наведено на рис. 3 та 4 відповідно.

Основні результати третього розділу опубліковані в [4, 16, 20].

У **четвертому розділі** розроблено метод чисельного аналізу та проведено обчислювальні експерименти для нелінійної задачі нестаціонарного плоскопаралельного руху в'язкої нестисливої рідини у скінченній однозв'язній області Ω площини xOy. Математична модель має вигляд:

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = J(\Delta\psi, \psi),\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{26}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{27}$$

де $J(u,v) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

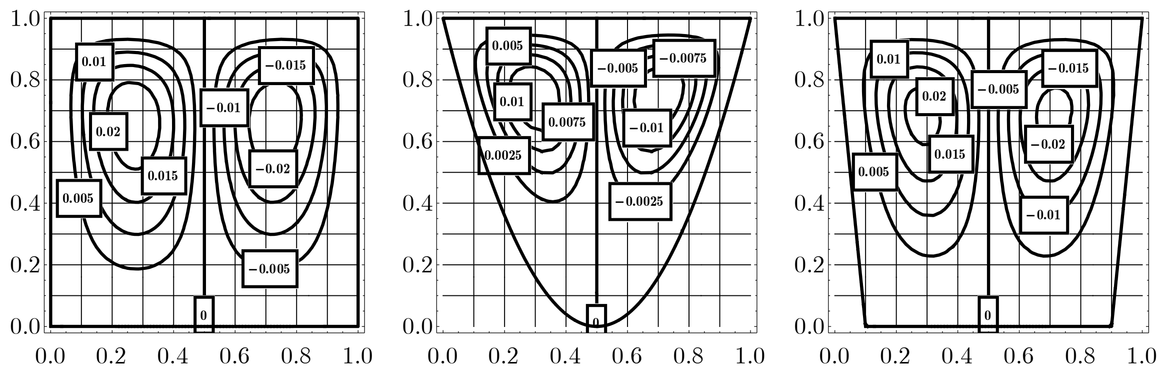

Рисунок 3 – Лінії рівня функції течії ψ при $t=5$

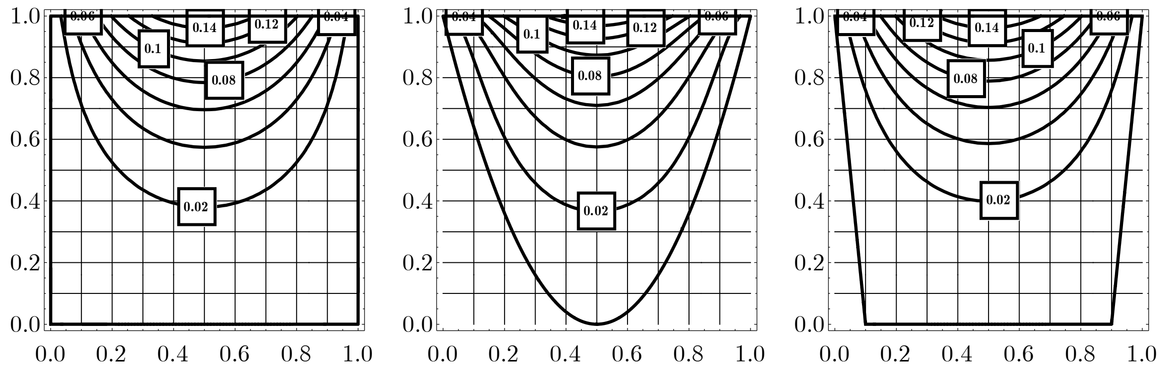

Рисунок 4 – Лінії рівня функції температури θ при $t=5$

Нехай u_0 – розв'язок задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u_0 = 0,\ \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{28}$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ u_0\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{29}$$

В задачі (26), (27) зробимо заміну $\psi = u_0 + u$, де u – нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u = J(\Delta(u_0+u), u_0+u),\quad (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{30}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t\ge 0,\quad u\big|_{t=0} = 0,\ (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{31}$$

Введемо оператор J, який діє за правилом $Ju = J(\Delta(u_0+u), u_0+u)$ на області визначення $D_J = \left\{ u \middle| u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$. Тоді задачу (30), (31) можна записати в операторній формі:

$$\frac{d}{dt}Bu + \nu Au = Ju, \quad (x,y)\in\Omega,\ t>0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{32}$$

Означення 3. Функція $u(t)$ називається узагальненим розв'язком задачі (32), якщо а) $u(t)\in L_2(0,T;H_A)$; б) для будь якого елементу $v(t)\in W_T$ виконується рівність

$$-\int_0^T \left[u, \frac{dv}{dt} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u,v]_A\, dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (J(u_0+u, v), \Delta(u_0+u))_{L_2(\Omega)} dt.$$

Для знаходження розв'язку задачі (32) побудуємо ітераційний процес послідовних наближень за нелінійністю. Нехай початкове наближення $u^{(0)}$ задано. Тоді при відомому значенні $u^{(k)}$ функції u на k-й ітерації наступне $(k+1)$-е наближення знаходимо як розв'язок лінійної задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu\Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0+u^{(k)}), u_0+u^{(k)}) \text{ в } \Omega,\ t>0, \tag{33}$$

$$u^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t\ge 0, \quad u^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0,\ (x,y)\in\bar{\Omega},\ k=0,1,2,\ldots \tag{34}$$

Отже, ітераційний процес (33), (34) зводить розв'язання нелінійної задачі (30), (31) до розв'язання послідовності лінійних задач з другого розділу.

Для наближеного розв'язку $u^{(k+1)}$ отримана оцінка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\| u^{(k+1)}(t)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T \left| u^{(k+1)} \right|_A^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{8c_0^2}{\nu\chi} c_1c_2c_3M_0^4T + \frac{8c_0^2}{\nu\chi} c_1c_2c_3c_4^4 \left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\| u^{(k)}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T \left| u^{(k)} \right|_A^2 d\tau \right)^2.$$

Теорема 5. Нехай $u_0 \in L_2(\Omega)$. Тоді послідовні наближення, що будуються за схемою (33), (34), збігаються при малих числах Рейнольдса до єдиного узагальненого розв'язку $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_A)$ задачі (26), (27). Умова малості чисел Рейнольдса формулюється у вигляді нерівностей

$$\frac{1}{\chi\nu} \le \frac{M}{8c_0^2c_1c_2c_3(M_0^4T + c_4^4M^2)}, \quad \frac{1}{\chi\nu} \le \frac{\alpha}{8c_1^2c_2(M_0^2 + c_3^2M)},\ \alpha\in(0,1).$$

Обчислювальні експерименти було проведено для трьох тестових областей: квадрат, параболічний сегмент та трапеція. Графіки ліній рівня функції течії для $\mathrm{Re} = 100$ наведено на рис. 5.

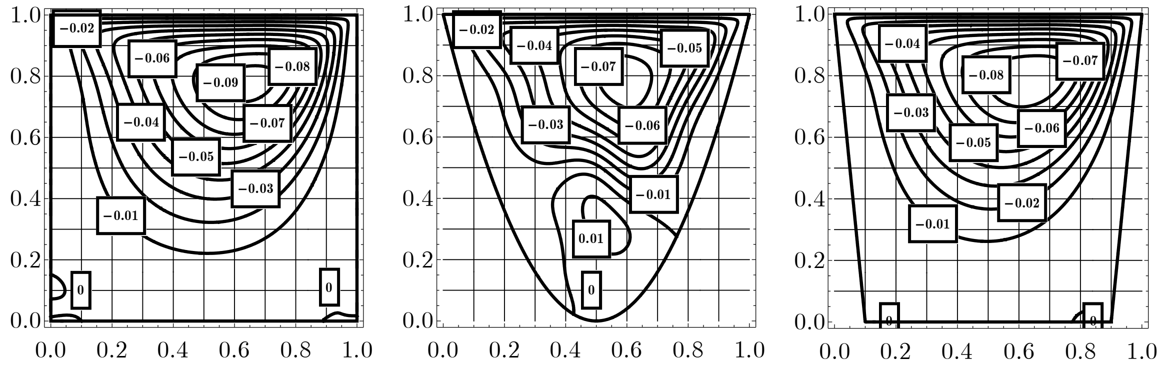

Рисунок 5 – Лінії рівня функції течії ψ при $t = 4$

Основні результати четвертого розділу опубліковані в [2, 7, 11, 12, 23].

У **п’ятому розділі** розроблено метод чисельного аналізу та проведено обчислювальні експерименти для нелінійної задачі нестаціонарного плоскопаралельного руху в’язкої нестисливої теплопровідної рідини у скінченній однозв’язній області Ω площини xOy. Математична модель має вигляд:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} = J(\Delta\psi,\psi),\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + J(\psi,\theta) - \kappa\Delta\theta = 0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{36}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{37}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{38}$$

Нехай (u_0, v_0) – розв’язок задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u_0 - \beta\frac{\partial v_0}{\partial x} = 0,\ \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - \kappa\Delta v_0 = 0,\ \ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{40}$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \left.\frac{\partial u_0}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\ u_0\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{41}$$

$$v_0\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t),\quad s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,\quad v_0\big|_{t=0} = \theta_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{42}$$

Після заміни $\psi = u_0 + u$, $\theta = v_0 + v$ отримаємо задачу відносно нових невідомих функцій u та v:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \beta\frac{\partial v}{\partial x} = J(\Delta(u_0+u), u_0+u),\quad (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa \Delta v = J(u_0 + u, v_0 + v), \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{44}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0. \tag{45}$$

Розглянуто оператори J_1 та J_2, що діють в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ за правилами

$$J_1(u) = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), \quad J_2(u,v) = J(u_0 + u, v_0 + v)$$

на областях визначення $D_{J_1} = \left\{ u \,\middle|\, u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),\ u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ та $D_{J_2} = \left\{ (u,v) \,\middle|\, (u,v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times (C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})),\ u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$.

Тоді задачу (43) – (45) можна записати в операторній формі:

$$\frac{d}{dt} B_1 u + \nu A u - \beta E v = J_1(u), \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \tag{46}$$

$$\frac{dv}{dt} + \kappa B_2 v = J_2(u,v), \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \quad v\big|_{t=0} = 0. \tag{47}$$

Означення 5. Пара $(u(t), v(t))$ називається узагальненим розв’язком задачі (46), (47), якщо: а) $(u(t), v(t)) \in L_2(0,T;H_A) \times L_2(0,T;H_{B_2})$; б) для будь-якої пари елементів $(w_1(t), w_2(t)) \in \mathbf{W}_T$ мають місце нерівності

$$-\int_0^T [u, w_1']_{B_1} dt + \nu \int_0^T [u, w_1]_A dt - \beta \int_0^T (Ev, w_1)_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)} dt,$$

$$-\int_0^T (v, w_2')_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T [v, w_2]_{B_2} dt = \int_0^T (J_2(u,v), w_2)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Для знаходження розв’язку задачі (46), (47) побудуємо ітераційний процес послідовних наближень за нелінійністю. Нехай початкове наближення $(u^{(0)}, v^{(0)})$ задано. Тоді при відомому значенні $(u^{(k)}, v^{(k)})$ пари (u,v) на k-й ітерації наступне $(k+1)$-е наближення знаходимо як розв’язок лінійної задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) + \beta \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x},\ (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t} - \kappa \Delta v^{(k+1)} = J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}),\ (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{49}$$

$$u^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(k+1)}\big|_{t=0} = 0, \quad v^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v^{(k+1)}\big|_{t=0} = 0. \tag{50}$$

Отже, ітераційний процес (48) – (50) зводить розв'язання нелінійної задачі (46), (47) до розв'язання послідовності лінійних задач з третього розділу.

В роботі отримано оцінки для норми пари розв'язку $(u^{(k+1)},v^{(k+1)})$:

$$\|u^{(k+1)}(t)\|_{B_1}^2+\nu\int_0^t\|u^{(k+1)}\|_A^2 d\tau\le\frac{16c_0^2}{\nu}c_2c_3c_4M_0^4T+$$
$$+\frac{16c_0^2}{\nu}c_2c_3c_4c_5^4\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|u^{(k)}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^T\|u^{(k)}\|_A^2\,d\tau\right)^2+$$
$$+\frac{2\beta c_1^2}{\nu}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|v^{(k)}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^T\|v^{(k)}\|_{B_2}^2\,d\tau\right),$$
$$\left\|v^{(k+1)}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\kappa\int_0^t\|v^{(k+1)}\|_{B_2}^2\,d\tau\le\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9(M_0^4+L_0^4)T+$$
$$+\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9c_{10}^2\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|u^{(k)}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^T\|u^{(k)}\|_A^2\,d\tau\right)^2+$$
$$+\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9c_{11}^2\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left\|v^{(k)}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^T\|v^{(k)}\|_{B_2}^2\,d\tau\right)^2,\quad t\in(0;T].$$

Теорема 6. Нехай $u_0,v_0\in L_2(\Omega)$. Тоді послідовні наближення, що будуються за схемою (48) – (50), збігаються при малих числах Рейнольдса, Грасгофа і Пекле до єдиного узагальненого розв'язку задачі (46), (47) $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_A)$, $v\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_{B_2})$. Умови малості чисел Рейнольдса, Грасгофа і Пекле формулюються у вигляді нерівностей

$$\frac{16c_0^2}{\nu}c_2c_3c_4M_0^4T+\frac{16c_0^2}{\nu}c_2c_3c_4c_5^4M^4+\frac{2\beta c_1^2}{\nu}L^2\le M^2,$$
$$\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9(M_0^4+L_0^4)T+\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9c_{10}^2M^2+\frac{2}{\kappa}c_6^2c_7^2c_8c_9c_{11}^2L^4\le L^2,$$
$$\sqrt{\rho(A^TA)}\le\alpha<1,$$

де $A=\begin{pmatrix}\dfrac{16c_1^2c_2}{\nu}(M_0^2+c_3^2M) & \dfrac{\beta^2c_1^2}{\nu}\\ \dfrac{4}{\kappa}c_1^2c_2^2c_5c_6(L_0^2+c_8^2L)^2 & \dfrac{4}{\kappa}c_1^2c_2^2c_3c_4(M_0^2+c_7^2M)\end{pmatrix}$.

Обчислювальний експеримент було проведено для трьох тестових областей: квадрат, параболічний сегмент та трапеція при різних числах Грасгофа та Пекле.

Розроблені у розділі методи було застосовано до математичного моделювання течії в канавці підшипника, вільної конвекції у розплавленому склі та вільної конвекції у порожнині з теплопровідними стінками.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані в [3, 5, 6, 8, 10, 13 – 15, 17, 18, 22].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі одержано результати, які в сукупності є подальшим узагальненням і розвитком чисельних методів математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої рідини. Результати роботи містять теоретичне обґрунтування чисельних методів розв'язання лінійних і нелінійних задач розрахунку в'язких нестаціонарних течій у складних однозв'язних областях з кусково-гладкою межею.

1. На основі методів *R*-функцій і Гальоркіна вперше розроблено метод розрахунку повільних плоскопаралельних нестаціонарних течій (лінеаризація Стокса) в'язкої нестисливої рідини в складних областях. Доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку у нормі простору $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$.

2. На основі методів *R*-функцій і Гальоркіна вперше розроблено метод розрахунку повільних плоскопаралельних нестаціонарних течій (лінеарізована задача для функції течії та температури) в'язкої нестисливої теплопровідної рідини в складних областях. Доведено збіжність гальокінських наближень до єдиного узагальненого розв'язку у нормі простору $(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)))\times$ $\times(L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\bigcap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)))$.

3. Алгоритми розроблених методів розв'язання лінеарізованих задач для функції течії і функції течії та температури не змінюються при зміні геометрії області, структура розв'язку точно враховує всі крайові умови задачі, а наближений розв'язок має аналітичну форму.

4. Для розв'язання нелінійної задачі відносно функції течії на основі методу послідовних наближень побудовано ітераційний метод: розв'язання нелінійної задачі зведено до розв'язання послідовності лінійних, причому на кожній ітерації відповідна лінійна задача розв'язується методами *R*-функцій і Гальоркіна. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса.

5. Для розв'язання системи нелінійних рівнянь відносно функції течії і температури на основі методу послідовних наближень побудовано ітераційний метод, який зводить розв'язання нелінійної задачі до розв'язання послідовності лінійних задач, що розв'язуються методами *R*-функцій і Гальоркіна. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса, Грасгофа і Пекле.

6. Достовірність отриманих результатів забезпечується строгістю математичних постановок задач з використанням основних положень математичної фізики. Коректність чисельних результатів підтверджується порівнянням з точними розв'язками та відомими з літератури чисельними розв'язками.

7. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки.

8. Отримані результати є теоретичною і практичною основою для розв'язання інженерних задач, які зводяться до моделювання плоскопаралельних нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини в областях складної геометрії.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Артюх А.В. Исследование нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (приближение Стокса) методами *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2011. – № 3 (54). – С. 16–21.

2. Артюх А.В. Применение методов *R*-функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 2. – С. 5–12.

3. Артюх А.В. Математическое моделирование и численный анализ нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости методами *R*-функций и Галёркина / А.В. Артюх // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 9–19.

4. Артюх А.В. Численный анализ нестационарных линеаризованных задач вязкой теплопроводной жидкости / А.В. Артюх, И.Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. – 2012. – № 3 (58). – С. 22–28.

5. Артюх А.В. Математическое моделирование и численный анализ течения в канавке подшипника методами *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления.– 2012. – № 1037, вып. 20. – С. 11–17.

6. Artyukh A. Mathematical and numerical modeling of natural convection in an enclosure region with heat-conducting walls by the *R*-functions and Galerkin methods / A. Artyukh // *R*adioelectronics & Informatics. – 2012. – № 4 (59). – P. 103–108.

7. Artyukh A. Mathematical modeling and numerical analysis of nonstationary plane-parallel flows of viscous incompressible fluid by *R*-functions and Galerkin method / A. Artyukh, M. Sidorov // Econtechmod. – 2014. – Vol. 3, No 3. – P. 3–11 (наукометрична база BazTech).

8. Артюх А.В. Численный анализ нестационарного течения в канавке подшипника методами последовательных приближений, *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Материалы Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии». – Морское-Харьков, 2012. – С. 17.

9. Артюх А.В. Чисельний аналіз нестаціонарних течій Стокса методом *R*-функцій / А.В. Артюх // Тези доповідей П'ятнадцятої Всеукраїнської (Десятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2012". – Львів, 2012. – С. 202–204.

10. Артюх А.В. Численный анализ гравитационной конвекции методами последовательных приближений, *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XXXVIII Гагаринские чтения» в 8 томах. – Москва, 2012. – Т. 5. – С. 37–38.

11. Артюх А.В. Применение метода *R*-функций и последовательных приближений для расчета нестационарных вязких течений / А.В. Артюх // Матери-

алы XVI Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2012. – Т. 10. – С. 133–134.

12. Артюх А.В. Про один підхід до чисельного аналізу нестаціонарних в'язких течій / А.В. Артюх // Матеріали Чотирнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2012. – Т. I. – С. 64.

13. Artiukh A.V. Numerical analysis of conjugate heat transfer in a enclosure region by the *R*-functions and Galerkin methods / A.V. Artiukh // Theoretical and applied aspects of cybernetics. Proceedings of the 2nd international scientific conference of students and young scientists (Kyiv, Cybernetics Faculty of Taras Shevchenko National University of Kyiv, November 12 – 16, 2012). – Kyiv, 2012. – P. 98–100.

14. Артюх А.В. Численное моделирование конвекции в расплавленном стекле методами *R*-функций и Галёркина / Артюх А.В. // Збірник наукових праць Одинадцятої Всеукраїнської науково-технічної конференції «Математичне моделювання та інформаційні технології». – Одеса, 2012. – С. 95.

15. Артюх А.В. Численное исследование естественной конвекции в замкнутой области с теплопроводными стенками методами *R*-функций и Галеркина / Артюх А.В. // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XXXIX Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва, 2013. – Т. 5. – С. 30–32.

16. Артюх А.В. Чисельне моделювання нестаціонарної гравітаційної конвекції (у лінійному наближенні) методом *R*-функцій / А.В. Артюх // Тези доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської (Одинадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2013”. – Львів, 2013. – С. 91–93.

17. Артюх А.В. Об одном подходе к математическому моделированию и численному анализу гравитационной конвекции / А.В. Артюх // Материалы XVII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2013. – Т. 7. – С. 96–97.

18. Артюх А.В. Математическое моделирование нестационарной конвекции в расплавленном стекле с помощью методов *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013). – Харьков, Херсон, 2013. – С. 45–48.

19. Артюх А.В. Численный анализ течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной геометрии (линейное приближение) / А.В. Артюх // Материалы XVIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2014. – Т. 7. – С. 54–55.

20. Артюх А.В. Численный анализ линеаризованной задачи расчета нестационарного течения теплопроводной несжимаемой жидкости в различных областях методами *R*-функций и Галеркина / А.В. Артюх // Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XL Гагаринские чтения» в 9 томах. – Москва, 2014. – Т. 5. – С. 53–55.

21. Артюх А.В. Тестовая задача расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области (линейное приближение) / А.В. Артюх // Материа-

лы XIX Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2015. – Т. 7. – С. 44–45.

22. Артюх А.В. Чисельне моделювання нестаціонарної течії теплопровідної рідини методами *R*-функцій та Гальоркіна (нелінійна задача) / А.В. Артюх // Тези доповідей Вісімнадцятої Всеукраїнської (Тринадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2015”. – Львів, 2015. – С. 70–72.

23. Артюх А.В. Метод чисельного аналізу плоскопаралельних нестаціонарних в’язких течій / А.В. Артюх, М.В. Сидоров // Збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – „APAMCS-2015”. – Львів, 2015. – С. 49–52.

АНОТАЦІЯ

Артюх А.В. Математичне моделювання та чисельний аналіз нестаціонарних плоскопаралельних течій в’язкої нестисливої рідини методом *R*-функцій. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2016.

Дисертація присвячена математичному моделюванню та чисельному аналізу на основі методів *R*-функцій, методу Гальоркіна та послідовних наближень нестаціонарних течій в’язкої нестисливої теплопровідної рідини у однозв’язних областях з кусково-гладкою межею.

На основі структурного методу *R*-функцій та методу Гальоркіна для нестаціонарних задач запропоновано методи чисельного аналізу лінійної задачі відносно функції течії (лінеаризація Стокса), а також лінійної задачі відносно функції течії та температури. Доведено збіжність гальоркінських наближень до єдиних узагальнених розв’язків відповідних задач та отримано умови застосовності запропонованих методів.

Удосконалено ітераційні методи розв’язання нелінійного рівняння відносно функції течії і системи нелінійних рівнянь відносно функції течії та температури на основі методів *R*-функцій, Гальоркіна та послідовних наближень в частині застосування до розв’язання нестаціонарних задач. Отримано умови та оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу до узагальнених розв’язків відповідних задач.

Ефективність розроблених методів проілюстрована багатьма обчислювальними експериментами для тестових областей (прямокутник, параболічний сегмент і трапеція), порівнянням з відомими точними розв’язками, а також з чисельними розв’язками, отриманими іншими авторами.

Ключові слова: в’язка рідина, нестаціонарні рівняння Нав’є-Стокса, функція течії, температура, метод *R*-функцій, метод Гальоркіна, метод послідовних наближень.

АННОТАЦИЯ

Артюх А.В. Математическое моделирование и численный анализ нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости методом *R*-функций. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена математическому моделированию и численному анализу нестационарных течений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в односвязных областях. Такие течения описываются с помощью дифференциального уравнения относительно функции тока и системы дифференциальных уравнений относительно функции тока и температуры.

Рассмотрено плоскопараллельное нестационарное медленное течение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое линейной задачей относительно функции тока (линеаризация Стокса), а также линейной задачей относительно функции тока и температуры. Для решения указанных задач предложены методы численного анализа, основанные на применении структурного метода *R*-функций и метода Галеркина. Доказана сходимость галеркинских приближений к единственному обобщенному решению соответствующих задач и получены условия применимости разработанных методов. Проведен вычислительный эксперимент для задачи относительно функции тока с известным точным решением, что позволило оценить точность предложенного метода. Координатная последовательность строилась на основе полиномов Лежандра и сплайнов Шенберга шестого порядка. Получено, что наименьшую погрешность дает использование сплайнов, которые были выбраны для проведения остальных вычислительных экспериментов. Проведены также вычислительные эксперименты для трех тестовых областей – прямоугольника, параболического сегмента и трапеции. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Получил дальнейшее развитие итерационный метод численного анализа нелинейной задачи относительно функции тока и нелинейной задачи относительно функции тока и температуры в части его применения к нестационарному случаю: исходная нелинейная задача с помощью последовательных приближений по нелинейности сводится к решению последовательности линейных задач. Доказана сходимость построенных итерационных процессов при малых числах Рейнольдса и малых числах Рейнольдса, Грасгофа и Пекле. Проведен вычислительный эксперимент для нелинейной задачи относительно функции тока с известным точным решением, при котором нелинейная часть уравнения обращается в нуль, что позволило оценить точность предложенного итерационного метода. Получены численные результаты для трех тестовых областей – прямоугольника, параболического сегмента и трапеции при различных числах Грасгофа и Пекле, которые хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

В разработанных методах алгоритм не изменяется при переходе к новой области, приближенное решение имеет аналитический вид, а структура решения точно учитывает краевые условия для функции тока и температуры. Кроме того, возможность получения решения в аналитическом виде позволяет провести качественный анализ течения.

Предложенные методы численного анализа нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости были применены к математическому моделированию течения в канавке подшипника, свободной конвекции в расплавленном стекле и свободной конвекции в полости с теплопроводными стенками.

Ключевые слова: вязкая жидкость, нестационарные уравнения Навье-Стокса, функция тока, температура, метод *R*-функций, метод Галеркина, метод последовательных приближений.

ABSTRACT

Artiukh A.V. Mathematical modeling and numerical analysis of non-steady plane-parallel flows of viscous incompressible fluid by the *R*-functions method. – Manuscript.

The thesis is presented for the Candidate of Physical and Mathematical degree in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – Kharkiv National University of Radioelectronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2016.

The thesis is devoted to mathematical modeling and numerical analysis of non-steady flows of viscous incompressible heat conducting fluid in simply connected domains with sectionally smooth boundary in terms of the *R*-functions method, Galerkin method and method of successive approximations.

In basis of the structural method of *R*-functions and Galerkin method for non-steady problems the methods of numerical analysis of linear problem with respect to the stream function (Stokes flow) and of linear problem with respect to the stream function and temperature were suggested. The convergence of Galerkin approximations to unique solutions of corresponding problems was proved. The conditions of validity of suggested methods were obtained.

The iteration methods for solving of nonlinear equation with respect to the stream function and system of nonlinear equations with respect to the stream function and temperature in terms of the *R*-functions method, Galerkin method and method of successive approximations were improved. The conditions and estimates of convergence speed for iteration process to generalized solutions of the corresponding problems were obtained.

Efficiency of the suggested methods was illustrated by computational experiments for test domains (rectangle, parabolic segment and trapezium), comparing with knows exact solutions and with numerical results, which were obtained by another authors.

Key words: viscous fluid, non-steady Navier-Stokes equations, stream function, temperature, *R*-functions method, Galerkin method, method of successive approximations.

Підп. по друку 08.12.2015 Формат 60×84 1/16
Друк на різографі Ум. друк. арк. 0,9
Зам. № б/н Тираж 100 прим.

Видавець і виготовлювач:
Надруковано ПП Степанов В.В., м. Харків, вул. Ак. Павлова, 311