

КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

Введение

При решении ряда практических задач измерения параметров приземных слоев атмосферы акустическое зондирование имеет существенные преимущества перед радиолокационным зондированием [1]. Станции акустического зондирования (сонары) могут быть использованы для прогнозирования погоды, в климатологии и экологии, для измерения параметров атмосферной турбулентности. Перспективным является использование сонаров для обнаружения турбулентных потоков в воздушном пространстве аэропортов, а также для исследования влияния мегаполисов на атмосферные процессы. Обычно в местах расположения сонаров наблюдается неблагоприятная акустическая помеховая обстановка, особенно в районах городов и аэропортов, поскольку формирование акустического шума обусловлено прежде всего жизнедеятельностью человека. В связи с этим возрастает роль исследований по созданию эффективных методов подавления акустических помех в сонарах.

Акустические помехи характеризуются значительным разнообразием. Спектральный состав помех, часто представляющих аддитивную смесь колебаний от различных источников, может быть сложным. При исследовании методов помехозащиты сонаров и определении их потенциальных возможностей целесообразно иметь имитационные математические модели помеховых колебаний. В связи с этим актуальна задача синтеза эффективных методов генерации случайных сигналов с различными формами спектров. Авторами предложен метод генерации случайных комплексных сигналов методом формирующих фильтров на основе модели авторегрессии (АР).

Модель АР случайных сигналов обладает рядом свойств, позволяющих использовать ее для анализа и формирования случайных сигналов [2, 3]. Конструктивность модели дает возможность сравнительно просто синтезировать схемы и алгоритмы, позволяющие генерировать случайные процессы с заданными статистическими характеристиками. В качестве таких характеристик можно использовать ширину полосы и центральную частоту мод спектральной плотности мощности (СПМ). В работе рассматривается метод получения случайных процессов с одномодовой и многомодовой формами СПМ. Предложенный метод может быть использован для получения имитационных случайных процессов при анализе эффективности способов подавления акустических помех в системах акустической локации, а также в других задачах, требующих формирования случайных колебаний с заданными статистическими и спектральными свойствами.

Связь коэффициентов АР и спектральных характеристик

В основу модели АР положена корреляция отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым конечным или бесконечным числом отсчетов в предыдущие моменты времени. В уравнении АР текущий отсчет представляется взвешенной суммой предыдущих с некоторыми коэффициентами веса. Для заданной выборки сигнала комплексная модель АР описывается разностным уравнением [3]

$$\dot{x}[t] = \sum_{j=1}^p \dot{\Phi}[j] \dot{x}[t-j] + \dot{a}[t], \quad (1)$$

где $\dot{\Phi}[j]$ – комплексные коэффициенты АР, $\dot{a}[t]$ – ошибки предсказания модели, представляющие собой комплексные некоррелированные случайные отсчеты, p – порядок модели

АР. Из (1) видно, что построение АР модели случайного процесса сводится к определению порядка p и нахождению коэффициентов АР. Порядок процесса АР определяется с использованием различных критериев, как правило, основанных на минимизации некоторой теоретико-информационной функции [3]. Коэффициенты АР рассчитываются с помощью системы p уравнений Юла – Уокера

$$\dot{R}[i] - \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[k-i] = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

где $\dot{R}[i] = E\{\dot{x}[t]\dot{x}[t-i]\}$ – значения функции корреляции случайного процесса $\dot{x}[t]$.

Выражение для спектра модели АР имеет вид [2]

$$P(f) = D_a \left| 1 - \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}[i] e^{-ji2\pi fT} \right|^2, \quad (3)$$

где T – интервал дискретизации процесса, D_a – дисперсия ошибок предсказания модели АР.

В задачах статистического моделирования часто возникает необходимость генерации случайного процесса с заданной корреляционной функцией или с заданной формой и характеристиками СПМ. Для этих целей эффективно использовать генератор процесса АР на основе уравнения (1). Генерация случайного процесса осуществляется методом формирующего фильтра с использованием порождающего случайного процесса. Порождающий процесс в виде белого шума пропускается через формирующий фильтр, параметры которого определяются соответствующей моделью АР. При этом параметры модели должны быть определены заранее, что можно сделать несколькими способами. В случае, когда в результате исследований известны формы спектров и их характеристики, можно воспользоваться выражениями, полученными ниже, которые связывают коэффициенты АР и параметры СПМ.

Из условия устойчивости формирующего АР фильтра с рациональной передаточной функцией следует условие стационарности АР процесса. Для проверки стационарности случайного АР процесса используется характеристическое уравнение

$$\dot{\Phi}(c) = c^p - \dot{\Phi}[1]c^{p-1} - \dots - \dot{\Phi}[p] = 0. \quad (4)$$

Если корни характеристического уравнения (4) лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, то процесс АР удовлетворяет условию стационарности.

Уравнение (4) можно представить в виде

$$c^p - \dot{\Phi}[1]c^{p-1} - \dots - \dot{\Phi}[p] = \prod_{i=1}^p (c - \dot{c}[i]) = 0, \quad (5)$$

где $\dot{c}[i]$ – корни характеристического уравнения (4). Приравнявая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях c , найдем связь между коэффициентами АР и корнями $\dot{c}[i]$. Приведем соответствующие формулы для значений $p = 1 \div 4$:

$$\dot{\Phi}[1,1] = \dot{c}[1]; \quad (6a)$$

$$\dot{\Phi}[2,1] = \dot{c}[2,1] + \dot{c}[2,2];$$

$$\dot{\Phi}[2,2] = -\dot{c}[2,1]\dot{c}[2,2]; \quad (6б)$$

$$\dot{\Phi}[3,1] = \dot{c}[3,1] + \dot{c}[3,2] + \dot{c}[3,3];$$

$$\Phi[3,2] = -(\dot{c}[3,1]\dot{c}[3,2] + \dot{c}[3,1]\dot{c}[3,3] + \dot{c}[3,2]\dot{c}[3,3]); \quad (6в)$$

$$\Phi[3,3] = \dot{c}[3,1]\dot{c}[3,2]\dot{c}[3,3];$$

$$\Phi[4,1] = \dot{c}[4,1] + \dot{c}[4,2] + \dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,4];$$

$$\Phi[4,2] = -(\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,4]\dot{c}[4,1] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,4]); \quad (6г)$$

$$\Phi[4,3] = \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,4];$$

$$\Phi[4,4] = -\dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4].$$

В (6) первый индекс в квадратных скобках указывает на соответствующий порядок модели, а второй индекс – это номер коэффициента АР. Количество пиков в СПМ процесса АР совпадает с порядком модели.

Полученные формулы оказываются полезными для определения коэффициентов АР по заданным характеристикам пиков СПМ случайного процесса, которые определяют корни характеристического уравнения (4). Действительные корни характеристического уравнения зависят от ширины полосы Δf_i i -го пика СПМ [3]

$$c[i] = e^{-\pi\Delta f_i T}. \quad (7)$$

Комплексный корень характеристического уравнения описывается выражением

$$\dot{c}[i] = e^{-\pi\Delta f_i T + j2\pi f_i T}, \quad (8)$$

где f_i – собственная частота модели АР, соответствующая i -му пику СПМ. Для различных значений порядка модели, если подставить (7) или (8) в формулы (6), можно определить коэффициенты АР. Ниже показано, что рассчитанные таким образом коэффициенты АР, можно использовать для генерации процессов АР с заданными характеристиками СПМ.

Момент времени, с которого процесс можно считать стационарным, определяется временем установления процесса. Найдем интервал установления процесса АР. Как известно, переходной процесс $x_n[t]$ формирующего фильтра описывается рекуррентным уравнением [5]

$$x_n[t] = \sum_{i=1}^p \Phi[i]x_n[t-i]. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) определяется корнями характеристического уравнения (4)

$$x_n[t] = \sum_{i=1}^p A[i]c[i]^t, \quad (10)$$

где $A[i]$ – постоянные, определяемые из начальных условий уравнения. Будем полагать процесс $x_n[t]$ практически затухшим на интервале t_0 , если

$$x_n[t_0] = 0.01x_n[0]. \quad (11)$$

С учетом (10), условие затухания переходного процесса (11) сводится к выражению [4]

$$A[i]|c_m[i]|^{t_0} = 0.01A[i], \quad (12)$$

где $|c_m[i]|^{t_0}$ – наибольший модуль из всех p модулей корней характеристического уравнения. При увеличении t остальные слагаемые в (10) будут затухать быстрее. Из (12) легко получить интервал установления стационарности процесса АР

$$t_0 = -2/\lg|c_m[i]|. \quad (13)$$

Например, если при получении имитационного случайного процесса использовались оценки коэффициентов АР $\Phi[1] = 1,378$ и $\Phi[2] = -0,678$, то корни характеристического уравнения получаются следующими: $c[1,2] = 0,689 \pm j0,451$. Рассчитанный по формуле (13) интервал установления стационарности составил 24 отсчета. Поэтому для получения стационарного имитационного процесса первые 24 отсчета необходимо отбросить. Генерация процесса АР не вызывает больших вычислительных затрат и поэтому, отбрасывая несколько сотен первых отсчетов, можно исключить участок установления процесса.

Комплексные модели АР сигналов

Ниже приведены результаты имитационного моделирования комплексных процессов АР первого, второго, третьего и четвертого порядков с использованием приведенных выше соотношений. Для получения имитационного процесса на основе модели АР(1) с одномодовым спектром задавались характеристики СПМ, равные $f_1 = 500 \text{ Гц}$, $\Delta f_1 = 50 \text{ Гц}$ отсчетов частоты, при $T = 10^{-4} \text{ с}$, что соответствует частоте дискретизации 10000 Гц. Корень характеристического уравнения, вычисленный из (8), использовался для расчета коэффициента АР(1) по формуле (6а). Рассчитанный комплексный коэффициент АР(1) равен $\dot{\Phi}[1,1] = 0,9362 + j0,3042$. С помощью разностного уравнения (1) генерировался комплексный процесс АР(1) длиной 500 отсчетов. Выборочные оценки коэффициентов АР(1) рассчитывались по формуле (2). Полученные с использованием комплексной модели теоретическая и выборочная СПМ АР(1), рассчитанные по формуле (3), представлены на рис. 1. Сравнение графиков спектров показывает их хорошее качественное совпадение.

Описанный алгоритм использовался также для моделирования комплексного процесса АР(2), обладающего двумодовым спектром, при следующих характеристиках СПМ: $f_1 = 400 \text{ Гц}$, $\Delta f_1 = 50 \text{ Гц}$, $f_2 = 1500 \text{ Гц}$, $\Delta f_2 = 70 \text{ Гц}$. Коэффициенты АР(2), найденные из (6б) с использованием (8), составляли: $\dot{\Phi}[2,1] = 1,5285 + j1,0362$, $\dot{\Phi}[2,2] = -0,3545 - j0,8954$. Результаты моделирования, представленные на рис. 2, показывают хорошее совпадение теоретической и выборочной СПМ, полученной на основе комплексной модели АР(2).

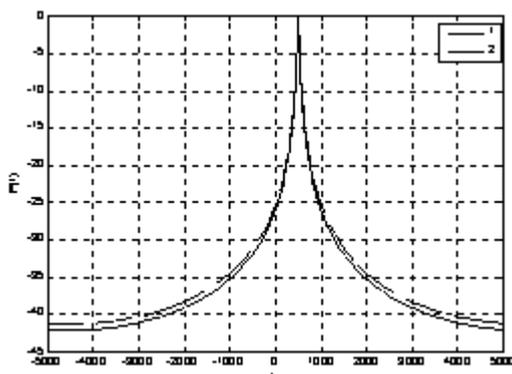


Рис. 1

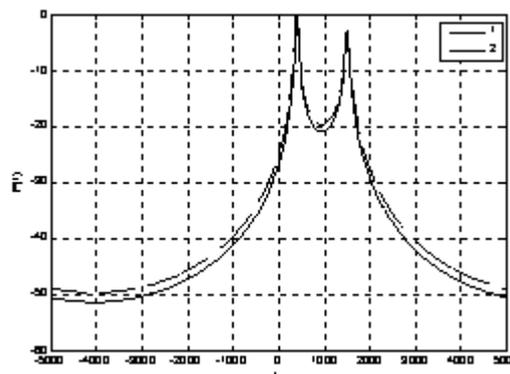


Рис. 2

Аналогично могут быть получены комплексные процессы АР с более сложным многомодовым спектром. Заметим, что достаточно сложная задача генерации случайных процессов с многомодовыми спектрами в научной литературе обычно не рассматривается [6, 7]. Ниже приведены примеры генерации процесса с трехмодовым и четырехмодовым спектрами. Длина полученных выборок составляла 1000 отсчетов. Параметры СПМ трехмодового спектра задавались следующие:

$$f_1 = 0 \text{ Гц}, \Delta f_1 = 100 \text{ Гц}, f_2 = 600 \text{ Гц}, \Delta f_2 = 60 \text{ Гц}, f_3 = 2000 \text{ Гц}, \Delta f_3 = 80 \text{ Гц}.$$

Комплексные коэффициенты АР(3) получены с использованием формулы (6в):

$$\dot{\Phi}[3,1] = 2.1828 + j1.2887, \quad \dot{\Phi}[3,2] = -1.1161 - j2.2039, \quad \dot{\Phi}[3,3] = -0.0582 + j0.9255.$$

Теоретическая и выборочная СПМ, полученные с использованием комплексной модели АР(3), представлены на рис. 3.

При моделировании четырехмодового спектра задавались исходные характеристики:

$$f_1 = -500 \text{ Гц}, \Delta f_1 = 50 \text{ Гц}, f_2 = -1600 \text{ Гц}, \Delta f_2 = 60 \text{ Гц}, f_3 = 200 \text{ Гц}, \Delta f_3 = 40 \text{ Гц}, \\ f_4 = 2500 \text{ Гц}, \Delta f_4 = 50 \text{ Гц}.$$

Рассчитанные с использованием выражения (6г) комплексные коэффициенты АР(4):

$$\dot{\Phi}[4,1] = 2.4418 - j0.0246, \quad \dot{\Phi}[4,2] = -2.8061 - j0.5392, \quad \dot{\Phi}[4,3] = 2.1866 + j0.8976, \\ \dot{\Phi}[4,4] = -0.8732 - j0.3457.$$

Теоретическая и полученная выборочная четырехмодовая СПМ комплексного случайного процесса АР(4) представлены на рис. 4.

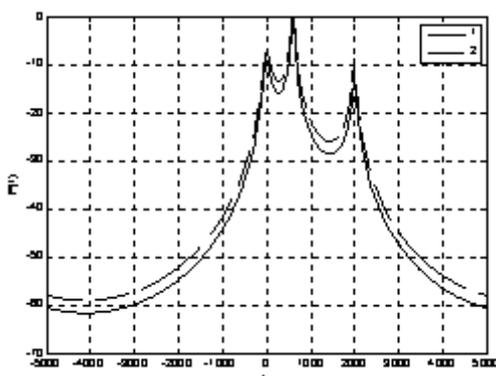


Рис. 3

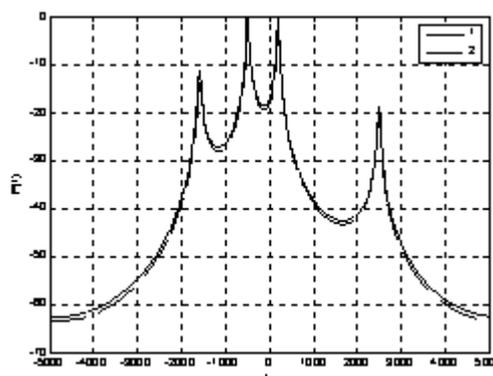


Рис. 4

Анализ результатов моделирования, представленных на рис. 3 и 4, показывает хорошее совпадение теоретических и выборочных СПМ. Заметим, что для процессов со сложным многомодовым спектром, при расчете СПМ требуется более точная оценка корреляционной функции. Поэтому, для демонстрации потенциальной точности предложенного метода генерации процессов с трехмодовым и четырехмодовым спектром использовалась выборка большей длины. Формулы, аналогичные (6), могут использоваться и для генерации действительных процессов. Для получения действительных коэффициентов АР корни характеристического уравнения должны быть комплексно-сопряженными:

$$\dot{c}[i] = e^{-\pi\Delta f_i T + j2\pi f_i T}, \\ \dot{c}[i+1] = e^{-\pi\Delta f_i T - j2\pi f_i T}.$$

Предложенный метод генерации случайных процессов целесообразно использовать прежде всего для получения узкополосных случайных процессов, для которых используемая модель АР является адекватной.

Выводы

Найдены соотношения, связывающие параметры спектра и комплексные коэффициенты модели АР случайных процессов, которые позволяют рассчитывать коэффициенты формирующего АР фильтра. Методом формирующего фильтра при использовании гауссова белого шума в качестве порождающего процесса сгенерированы комплексные процессы АР с заданными формами спектра. Приведенные результаты моделирования имитационных процессов с одномодовым и многомодовыми спектрами демонстрируют хорошее сходство теоретических и выборочных спектров.

Список литературы: 1. *Карташов В.М., Тихонов В.А.* и др. Обработка сигналов в радиоэлектронных системах дистанционного мониторинга атмосферы. – Харьков : ХНУРЭ, 2014. – 312 с. 2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов : пер. с. англ. – М. : Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с. 3. *Марпл.-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М. : Мир, 1990. – 584 с. 4. *Кармалита В.А.* Цифровая обработка случайных колебаний. – М. : Машиностроение, 1986. – 80 с. 5. *Лебедев А.Н., Недосекин Д.Д., Стеклова Г.А., Чернявский Е.А.* Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-измерительных системах. – Л. : Энергоатомиздат, 1988. – 64 с. 6. *Быков В.В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М. : Сов. радио, 1971. – 326 с. 7. *Омельченко В.О., Безрук В.М., Драган Я.П., Колесников О.О., Омельченко А.В.* Імовірнісні моделі випадкових сигналів та полів у прикладах і задачах : навч. посібник / За ред. В.О. Омельченка. – К. : ІСДО, 1996. – 272 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.04.2016