УДК 537.8+538.3

*А.А. ШМАТЬКО, д-р физ.-мат. наук, А.В. КАЗАНКО, В.Н. МИЗЕРНИК,*
*Е.Н. ОДАРЕНКО, д-р физ.-мат. наук*

# ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

В последние годы особый интерес представляют фотонно-кристаллические структуры, выполненные из различных магнитодиэлектрических материалов и метаматериалов [1 – 3]. Это, в первую очередь, структуры ограниченных размеров – объемные магнитодиэлектрические решетки из брусьев прямоугольного поперечного сечения. Обилие параметров задачи приводит к необходимости детального математического исследования дисперсионных свойств одномерных (бесконечных в направлении слоев) структур для физического обоснования наблюдаемых явлений в задачах дифракции плоских волн на ограниченных по высоте решетках.

В данной работе основное внимание уделяется вопросам, связанным с нахождением корней характеристического уравнения, соответствующих собственным значениям оператора Штурма – Лиувилля в задаче рассеяния Е-поляризованной плоской волны на магнитодиэлектрической решетке из брусьев прямоугольного поперечного сечения. Следует отметить, что в данном случае спектральным параметром является не поперечное волновое число в направлении периодичности решетки (ось $Oz$), а продольное волновое число $\beta$ вдоль магнитодиэлектрических слоев (ось $Oy$). Это приводит к тому, что характеристическое уравнение необходимо решать численно для различных параметров задачи, включающих и угол падения волны на решетку $\varphi$. Задача решается в строгой математической постановке для произвольных соотношений между длиной волны и геометрическими размерами элементов структуры. Рассматриваются различные сочетания материальных параметров двухслойной структуры, включая вариант фазовой решетки, для которого волновые сопротивления двух сред одинаковы при разных значениях их материальных параметров, а также решетки, выполненные из метаматериалов.

## Постановка задачи и ее решение

Определим дисперсионное уравнение для нахождения собственных значений оператора Штурма – Лиувилля в задаче о рассеянии плоской $E_x$-поляризованной электромагнитной волны на объемной периодической двухслойной структуре из магнитодиэлектрика (рис. 1). Диэлектрическая и магнитная проницаемости структуры $\varepsilon_j$, $\mu_j$ ($j=1,2$) могут принимать произвольные положительные и отрицательные значения, $l$ – период структуры, $d\times h$ – размеры в поперечном сечении (плоскостью YOZ) одного семейства брусьев, и $(l-d)\times h$ – размеры в поперечном сечении другого семейства брусьев, $\varphi$ – угол падения волны.

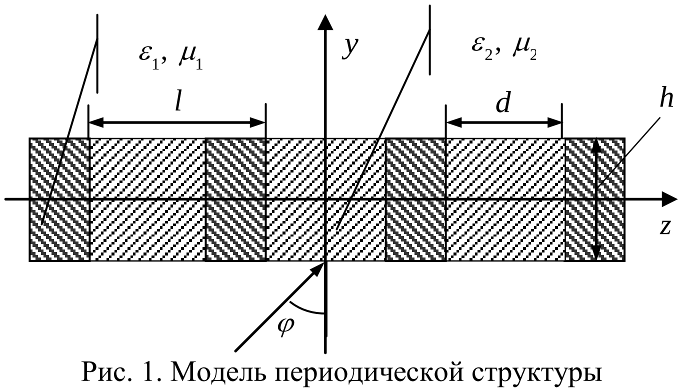

Рис. 1. Модель периодической структуры

Задача нахождения рассеянного магнитодиэлектрической решеткой поля сводится к решению однородного уравнения Гельмгольца относительно $E_x$-компоненты напряженности электрического поля:

$$\Delta E_x + k^2\varepsilon(z)\mu(z)E_x = 0\,, \tag{1}$$

$$\varepsilon(z)=\begin{cases}\varepsilon_1, & z\in\left[\dfrac{d}{2}-l,-\dfrac{d}{2}\right)\\ \varepsilon_2, & z\in\left[-\dfrac{d}{2},\dfrac{d}{2}\right)\end{cases},\qquad \mu(z)=\begin{cases}\mu_1, & z\in\left[\dfrac{d}{2}-l,-\dfrac{d}{2}\right)\\ \mu_2, & z\in\left[-\dfrac{d}{2},\dfrac{d}{2}\right)\end{cases}.$$

Граничные условия – непрерывность тангенциальных компонент напряженности электрического и магнитного полей на поверхностях решетки с использованием теоремы Флоке, связывающей поле в соседних периодах структуры [4, 5].

Решение задачи дифракции для трех областей с учетом граничных условий представим следующим образом:

$$E_x(z,\,y)=\begin{cases} e^{ik_y(y+\frac{h}{2})+ik\alpha z}+\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}A_m e^{-i\gamma_m(y+\frac{h}{2})}e^{-i(k\alpha+\lambda_m)z}; & y<-\dfrac{h}{2}\\ \sum\limits_n Y_{\beta_n}(y)Z_{\beta_n}(z); & |y|\le\dfrac{h}{2}\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}B_m e^{i\gamma_m(y+\frac{h}{2})}e^{-i(k\alpha+\lambda_m)z}; & y>\dfrac{h}{2}\end{cases}, \tag{2}$$

здесь $\lambda_m=\dfrac{2\pi}{l}m$; $\gamma_m=\sqrt{k^2-(k\alpha+\lambda_m)^2}$; $\alpha=\sin\varphi$; $k_y=k\cos\varphi$; $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$; $A_m$, $B_m$ – неизвестные коэффициенты Фурье-разложения для областей вне решетки; $Z_{\beta_n}$ – решения задачи Штурма – Лиувилля $\left(Z''+\varsigma^2 Z=0\right)$ с граничными условиями в области магнитодиэлектрической решетки. Функции $Y_{\beta_n}(y)$ представляется следующим образом: $Y_{\beta_n}(y)=C_{\beta_n}e^{\beta_n y}+D_{\beta_n}e^{-\beta_n y}$, ($\beta_n=\sqrt{k^2\varepsilon\mu-\varsigma_n^2}$). Если $\beta_n$ чисто мнимое число, то волна является распространяющейся, а если $\beta_n$ – вещественное, то волна затухает. Для определенности будем полагать, что материальные параметры двух слоев решетки удовлетворяют условиям: $|\varepsilon_1\mu_1|<|\varepsilon_2\mu_2|$, т. е. $|n_1|<|n_2|$.

Решение уравнения (1) в области, заполненной периодической структурой, представим в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля:

$$E_x(z,y)=\sum_n\left(C_{\beta_n}e^{\beta_n y}+D_{\beta_n}e^{-\beta_n y}\right)Z_{\beta_n}(z)\,,\ \ |y|\le\frac{h}{2}\,, \tag{3}$$

Функции $Z_{\beta_n}$ представим в виде

$$Z_{\beta_n}(z)=\begin{cases}A_{\varsigma_n^{\mathrm{I}}}\cos\varsigma_n^{\mathrm{I}}\left(z+\dfrac{d}{2}\right)+B_{\varsigma_n^{\mathrm{I}}}\sin\varsigma_n^{\mathrm{I}}\left(z+\dfrac{d}{2}\right), & z\in\left[\dfrac{d}{2}-l,-\dfrac{d}{2}\right)\\ A_{\varsigma_n^{\mathrm{II}}}\cos\varsigma_n^{\mathrm{II}}\left(z+\dfrac{d}{2}\right)+B_{\varsigma_n^{\mathrm{II}}}\sin\varsigma_n^{\mathrm{II}}\left(z+\dfrac{d}{2}\right), & z\in\left[-\dfrac{d}{2},\dfrac{d}{2}\right)\end{cases}, \tag{4}$$

где $\varsigma_n^{\mathrm{I}}=\sqrt{k^2\varepsilon_1\mu_1+\beta_n^2}$, $\varsigma_n^{\mathrm{II}}=\sqrt{k^2\varepsilon_2\mu_2+\beta_n^2}$, а $A_{\varsigma^{\mathrm{I}}}$, $A_{\varsigma^{\mathrm{II}}}$, $B_{\varsigma^{\mathrm{I}}}$, $B_{\varsigma^{\mathrm{II}}}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий на поверхностях раздела сред. Применяя граничные условия и теорему Флоке, получим следующее характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма – Лиувилля в области структуры:

$$\cos k\alpha l = f(k,\beta)=\cos\varsigma^{\mathrm{II}}d\cos\varsigma^{\mathrm{I}}(d-l)+\frac{1}{2}\left(\eta\frac{\mu_2}{\mu_1}+\frac{1}{\eta}\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\sin\varsigma^{\mathrm{II}}d\sin\varsigma^{\mathrm{I}}(d-l)\,. \tag{5}$$

Здесь $\eta=\dfrac{\varsigma^{\mathrm{I}}}{\varsigma^{\mathrm{II}}}$.

Решение характеристического уравнения (5) позволяет найти собственные значения $\beta_n$ и соответствующие им собственные функции $Z_{\beta_n}$ (4).

Отметим одну особенность при решении уравнения (5). Если в уравнении параметр $\alpha$ является спектральным (случай безграничной решетки в направлении оси $Oy$), то решение уравнения (5) имеет явный вид: $k\alpha l = \arccos f(k,\beta)$. В случае задачи дифракции на ограниченной по высоте периодической структуре величина $\alpha$ не является спектральным параметром, так как является заданной по условию задачи. Спектральным параметром является
величина $\beta$, определяющая волновое число волн, распространяющихся или затухающих в направлении оси $Oy$. Определение этого числа для заданного значения параметра $\alpha$ является сложной задачей. Поэтому величину $\beta$ необходимо находить из трансцендентного уравнения (5) численно. Анализ уравнения (5) показывает, что величина $\beta$ в случае вещественных величин $\varepsilon_j$, $\mu_j$ может быть либо вещественной, либо чисто мнимой. В первом случае волны затухают вдоль оси $Oy$ слоистой структуры и являются поверхностными волнами, а во втором – распространяются без затухания.

Перейдем к анализу функции $f(k,\beta)$. Для проведения численного анализа уравнения (5) первоначально определим асимптотику этой функции. Будем использовать общепринятые обозначения множеств: $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел. Если решетка вырождается в слой ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$ $\Rightarrow n_1 = n_2 = n$), то $\eta = 1$ и, следовательно, функция $f(k,\beta)$ тождественно преобразовывается к виду $f(k,\beta) = \cos \varsigma_\beta l$ ($\varsigma_\beta^{\mathrm{I}} = \varsigma_\beta^{\mathrm{II}} = \varsigma_\beta$). Тогда корни уравнения (5) относительно спектрального параметра $\beta \in \mathbb{C}$ можно записать в явном виде: $\varsigma_{\beta_j} = \pm k\alpha + \dfrac{2\pi}{l} j$, или $k^2 n^2 + \beta_j^2 = \sqrt{\pm k\alpha + \dfrac{2\pi}{l} j}$ ($j = 0, \pm 1, \ldots$). При $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\mu_1 = -\mu_2$ ($n_1 = -n_2 \Rightarrow |n_1| = |n_2| = n$) корни уравнения (5) могут быть также представлены в явном виде: $\varsigma_{\beta_j} = \dfrac{\pm k\alpha l + 2\pi j}{2d - l}$, или $k^2 n^2 + \beta_j^2 = \sqrt{\dfrac{\pm k\alpha + 2\pi j}{2d - l}}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ . В этом случае функция $f(k,\beta)$ тождественно преобразовывается к виду $f(k,\beta) = \cos \varsigma_\beta (2d - l)$ ($\varsigma_\beta^{\mathrm{I}} = |\varsigma_\beta^{\mathrm{II}}| = \varsigma_\beta$). В общем случае ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\mu_1 = -\mu_2$) при $|\beta| \to \infty$ ($\varsigma_\beta^{\mathrm{I}}, \varsigma_\beta^{\mathrm{II}} \approx \beta$) для функции $f(k,\beta)$ имеет место асимптотическое соотношение $\left(f \to f_0\right)$:

$$f_0(k,\beta) = \cos\beta d \cos\beta(d - l) + \operatorname{sgn} n_2 \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} \sin\beta d \sin\beta(d - l).$$

В частности, для $\mu_1 = \mu_2$ получаем $f_0(k,\beta) = \cos\beta l$ и, соответственно, корни уравнения $\beta_j \approx k\alpha + \dfrac{2\pi}{l} j$ – когда $n_{1,2} > 0$. Для $n_2 < 0$ находим: $f_0(k,\beta) = \cos\beta(2d - l)$ и, соответственно, $\beta_j^2 \approx \dfrac{k\alpha l + 2\pi j}{2d - l}$.

Для определения местоположения и количества корней характеристического уравнения (5) на комплексной плоскости $\beta = \beta' + i\beta''$ проведем предварительные вычисления функции $\nu(\beta) = \left| f\left(k,\beta\right) - \cos k\alpha l \right|^2$. На рис 2 приведен график функции $\nu(\beta)$ в прямоугольной декартовой системе координат (вдоль оси абсцисс вещественные значения $\beta'$, вдоль оси ординат – мнимые значения $\beta''$) для волнового числа $k = 1.1$. График данной функции представляется посредствам изолиний функции $\nu(\beta)$. Очевидно, что нули этой функции являются корнями уравнения (5).

На рисунке показаны пять уровней изолиний функции $\nu(\beta)\equiv c_j$ ($c_{j=1,5}=0.02,\ 0.04,\ 0.06,\ 0.08,\ 0.1$). Указанные уровни близки к уровню $\nu(\beta)\equiv 0$, определяющему корни уравнения (5). Характерное распределение кривых, соответствующих этим уровням, показывает, что корни уравнения могут быть либо чисто мнимыми, либо действительными. Из рисунка также видно, что количество чисто мнимых корней уравнения (5) ограничено (на данном рисунке четыре корня), а количество действительных корней – бесконечно. Это указывает на то, что, в зависимости от параметров задачи, количество распространяющихся вдоль слоев волн ограничено (в данном случае четыре волны), а количество затухающих волн бесконечно. Кроме того, корни на плоскости попарно симметричные. Это связано с тем, что в структуре существуют волны, распространяющиеся или затухающие в одну и другую стороны оси $Oy$.

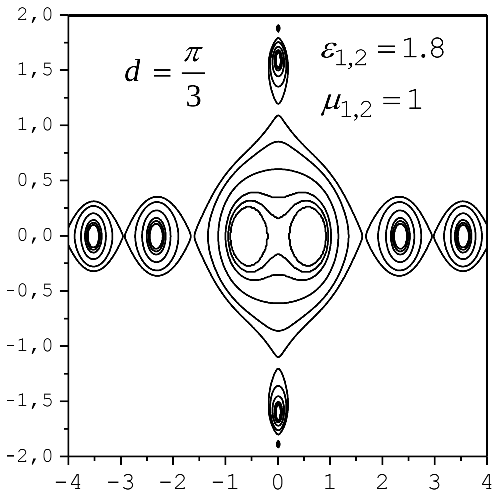


Рис. 2. Изолинии функции $\nu(\beta)$

На рис. 3 представлены зависимости функции $f(k,\beta)$ от спектрального параметра $\beta$ для значений ($k=0.55$, $\varphi=\pi/3$). Рассмотрим поведение функции $f(k,\beta)$ при действительных или чисто мнимых значениях аргумента $\beta$. При таких значениях аргумента значения функции $f(k,\beta)$ оказываются действительными. На рис. 3, *а* представлены графики функции $f(k,\beta)$ для чисто мнимых значений $\beta=i\beta''$, а на рис. 3, *б* – для действительных значений $\beta=\beta'$. Из рис. 3, *а* видно, что график функции $f(k,\beta)$ пересекает прямую $f(k,\beta)=const=\cos k\alpha l$ (прямая линия, параллельная оси абсцисс) конечное число раз. Абсциссы точек пересечения есть чисто мнимые корни уравнения (5) – их количество конечно и они расположены симметрично относительно прямой $\beta=0$.

В то же время из рис. 3, *б* видно, что график функции $f(k,\beta)$ пересекает прямую $f(k,\beta)=const=\cos k\alpha l$ бесконечное число раз. Абсциссы точек пересечения есть вещественные корни уравнения (5). При изменении углового параметра $\alpha$ положение прямой $f(k,\beta)=const=\cos k\alpha l$ изменяется вдоль оси ординат в пределах $[-1,1]$. Очевидно, что для вещественных значений параметра $\beta$ количество точек пересечения графика функции $f(k,\beta)$ и этой прямой при изменении параметра $\alpha$ остается бесконечным (рис. 3, *б*). Для чисто мнимых значений $\beta=i\beta''$ количество точек пересечения может изменяться (рис. 3, *а*) в зависимости от параметров задачи. Рис. 3 иллюстрирует, что количество мнимых

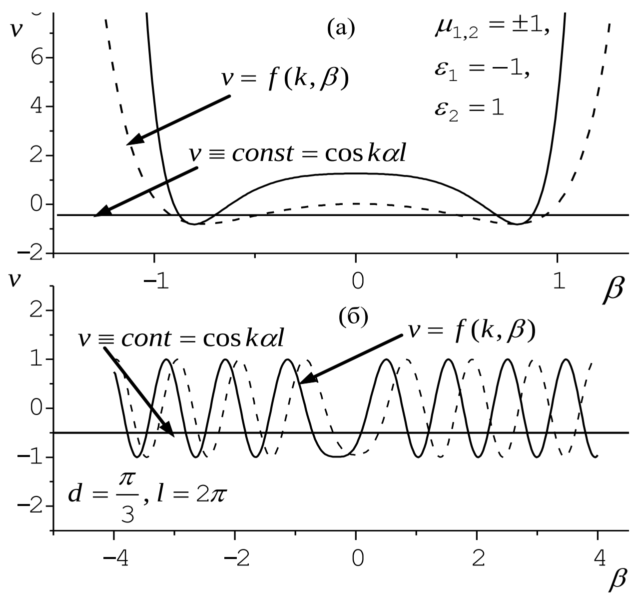


Рис. 3. Зависимость $\nu(\beta)=f(k,\beta)$ от параметра $\beta$ (а) – $\beta=i\beta''$; (б) – $\beta=\beta'$

корней уравнения (5) (количество распространяющихся волн в структуре) зависит от углового параметра $\alpha$. Значения параметров $k$ и $\beta$, при которых $\left|f(k,\beta)\right|>1$, соответствуют полосе запирания – корни уравнения (5) отсутствуют. Таким образом, найдутся такие значения
параметров $k$ и $\beta$, что, каково бы ни было значение спектрального параметра $\beta$ в этой полосе, тождество $\cos k\alpha l = f(k,\beta)$ не выполняется. Такое множество значений параметров $k$ и $\beta$ определяет полосу запирания структуры. Полосы запирания в области изменения параметра $k$ и $\beta$ возникают при разных значениях показателей преломления двух слоев решетки $n_1 \neq n_2$. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$ ($n_1 = n_2$), то структура вырождается в слой и в области изменения параметров $k$ и $\beta$ возникает единственная полоса запирания, характерная для магнитодиэлектрического слоя (волновода). Если один из элементов структуры является метаматериалом (например, $\varepsilon_2 < 0,\ \mu_2 < 0$), то имеется особый случай при $\varepsilon_1 = |\varepsilon_2|$, $\mu_1 = |\mu_2|$ ($n_1 = -n_2$). Формируется фазовая магнитодиэлектрическая решетка, в которой волновые сопротивления двух слоев одинаковы по абсолютной величине. В этом случае в области изменения параметра $k$ возникает также одна полоса запирания для значений $ikn < \beta$ (здесь $\beta = i\beta''$ – чисто мнимое число). Действительно, как было замечено выше, при $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\mu_1 = -\mu_2$ функция $f$ тождественно преобразовывается к виду $f(k,\beta) = \cos\varsigma_\beta(2d-l)$ ($\varsigma^{\mathrm{I}}_\beta = \left|\varsigma^{\mathrm{II}}_\beta\right| = \varsigma_\beta$) и, следовательно, уравнение (5) примет вид: $\cos\alpha kl = \cos\varsigma_\beta(2d-l)$. Поэтому для любого значения параметра $k$, удовлетворяющего условию $ink < \beta$, найдутся такие значения $\beta$, при которых выполняется тождество $\cos k\alpha l \equiv f(k,\beta)$. Из асимптотического соотношения для функции $f_0$ следует, что с увеличением параметра $\beta$, при $|\mu_1| = |\mu_2|$, происходит сужение полос запирания. В этом случае уравнение (5) асимптотически переходит в уравнение $\cos k\alpha l = \cos\beta(2d-l)$.

Рассмотрим случай чисто мнимых значений $\beta$. Если величина $\beta$ удовлетворяет условию $-ikn_1 \le \beta \le ikn_2$ (по предположению $|n_1| < |n_2|$), то значения величин $\varsigma^{\mathrm{I}}$, $\varsigma^{\mathrm{II}}$ являются вещественными. Поэтому функции $\cos\varsigma^{\mathrm{I}}(l-d)$, $\sin\varsigma^{\mathrm{I}}(l-d)$, $\cos\varsigma^{\mathrm{II}}d$, $\sin\varsigma^{\mathrm{II}}d$ будут осциллирующими и, следовательно, конечное количество корней может приходиться на интервал $-ikn_1 \le \beta \le ikn_1$. Значения функции $f(k,\beta)$ в этом случае вещественные. При $ikn_1 \le \beta \le ikn_2$ функции $\cos\varsigma^{\mathrm{II}}d$, $\sin\varsigma^{\mathrm{II}}d$ являются осциллирующими, а функции $\cos\varsigma^{\mathrm{I}}(d-l)$, $\sin\varsigma^{\mathrm{I}}d$ – не осциллирующими, так как величина $\varsigma^{\mathrm{II}}$ вещественная, а $\varsigma^{\mathrm{I}}$ – чисто мнимая. Следовательно, на этот промежуток также может приходиться конечное количество корней. Значения функции $f(k,\beta)$ в этом случае также будут вещественными. Вдоль мнимой оси, при $\beta < -ikn_1$ или $ikn_1 < \beta$, функция $f(k,\beta)$ монотонно и неограниченно возрастает. Следовательно, при $\beta < -ikn_1$ или $ikn_1 < \beta$ уравнение (5) может иметь не более одного корня.

Из проведенного анализа следует, что характеристическое уравнение (5) при вещественных значениях углового параметра $\alpha$ и волнового числа $k$ имеет бесконечное количество вещественных корней и может иметь ограниченное количество мнимых корней. Для этих значений аргумента $\beta$ функция $f(k,\beta)$ всегда вещественная. Очевидно, что для тех значений параметра $k$, для которых выполняется неравенство $\left|f(k,\beta)\right|>1$ функция имеет отличную от нуля мнимую составляющую. Причем, если значения функций такие, что $\left|f(k,\beta)\right|<-1$, то вещественная составляющая функции равна $\pi$, а если $\left|f(k,\beta)\right|>1$ – вещественная составляющая равна $0$. Этот случай ($\left|f(k,\beta)\right|>1$) отвечает значениям параметра $k$, для которых уравнение (5) относительно $\beta$ не имеет решений (левая часть уравнения вещественная, а правая имеет отличную от нуля мнимую составляющую), т. е. такие значения $k$ соответствуют полосе запирания.

На рис. 4 представлены дисперсионные характеристики при фиксированном значении спектрального параметра $\beta$: *а* – вещественная часть функции $u = \arccos f(k, \beta)$, *б* – мнимая часть функции $u$. Очевидно наличие полос запирания в области изменения параметра $k$. Из рис. 4(а) видно, что абсциссы точек кривой $\mathrm{Re}\, u(k)$ равны либо $0$, либо $\pi$, когда параметр $k$ лежит в полосе запирания. Таким значениям параметра $k$ отвечает отличная от нуля мнимая величина функции $u(k)$. Когда $k$ лежит вне полос запирания, мнимая составляющая функции $u(k)$ равна 0 (рис. 4, *б*). При этом ее вещественная составляющая изменяется в пределах $[0, \pi]$.

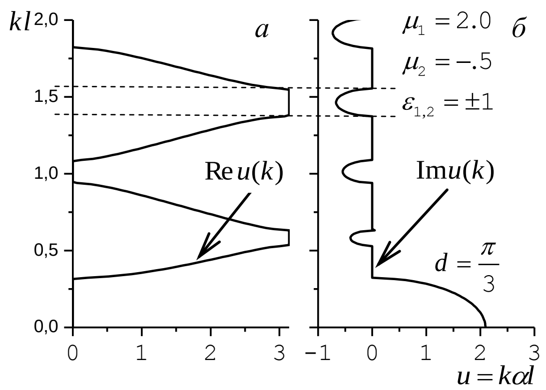


Рис. 4. Дисперсионные кривые $u = \arccos f(k, \beta)$ при $\beta = 0.5i$ и угле падения $\varphi = \pi / 3$

Для более детального анализа случая фазовой магнитодиэлектрической структуры, один из слоев которой является метаматериалом, а второй – обычной средой, проведем исследование дисперсионных характеристик на основе аналитического решения дисперсионного уравнения (5). На рис. 5 и 6 представлены дисперсионные кривые для фазовой решетки (сплошные линии) и случай обычного магнитодиэлектрического слоя (штриховые линии) для значений параметра $\beta = 0.5i$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и двух значений материальных параметров (случаи (*а*) и (*б*)). Из графиков видно отсутствие полос запирания в области изменения параметра $k$ как в одном, так и в другом случаях за исключением одной полосы запирания, характерной для магнитодиэлектрического волновода. Кроме того, видна разница в поведении дисперсионных кривых для обычного слоя и решетки с материальными параметрами $n_1 = -n_2$. С ростом параметра $k$ кривая $u(k)$ асимптотически приближается к ломаной. Действительно, при $k \to +\infty$ имеем $\left| f(k, \beta) - g_0(k) \right| \to 0$, где

$$g_0(k) = \cos kd \cos k(d - l) + \mathrm{sgn}\, n_2 \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} \sin kd \sin k(d - l)\,.$$

Далее, для слоя с $n_1 = n_2$ имеем $g_0(k) = \cos kl$ и при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $\mu_1 = \mu_2$ $n_1 = -n_2$ – $g_0(k) = \cos k(2d - l)$. Соответственно получаем $\left| u(k) - u_0(k) \right| \to 0$ $(k \to +\infty)$, где

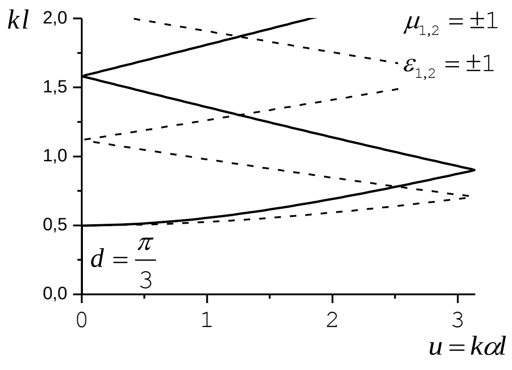


Рис. 5. Дисперсионные кривые при $\beta = 0.5i$ и угле падения $\varphi = \pi / 3$

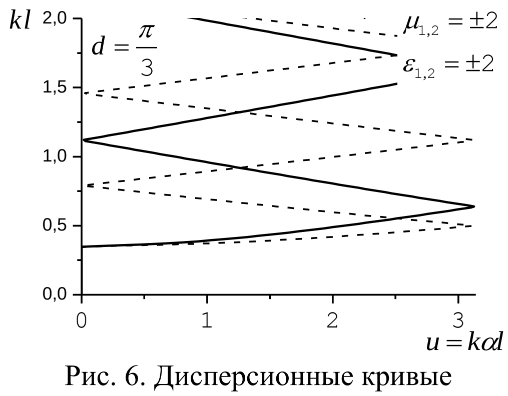


Рис. 6. Дисперсионные кривые при $\beta = 0.5i$ и угле падения $\varphi = \pi / 3$

$u_0(k) = \arccos g_0(k)$. Очевидно, что графиком этой функции является ломаная линия.

На рис. 7 представлены дисперсионные кривые $kl = u(k\alpha l)$ для решетки, один из слоев которой является метаматериалом ($n_2 = -\sqrt{|\varepsilon_2\mu_2|}$, $n_1 = -n_2$), при двух значениях продольного волнового числа: $\beta = 0.4, 2.4$ ($|\mu_1| = |\mu_2| = 1$). Как отмечалось выше, для материальных параметров $|n_1| \neq |n_2|$ в области изменения волнового числа $k$ возникают полосы запирания, ширина которых с увеличением значения параметра $\beta$ (при $|\mu_1| = |\mu_2|$) уменьшается.

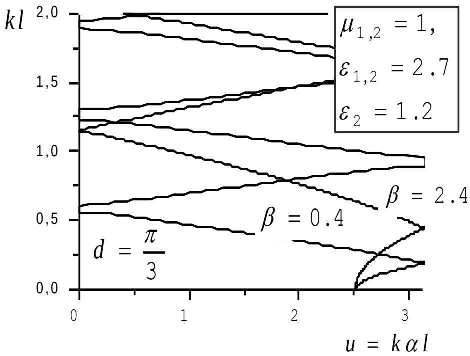


Рис. 7. Дисперсионные кривые при угле падения $\varphi = \pi / 3$

Следует также отметить частный случай, когда на дисперсионной диаграмме появляется множество полос запирания. Например, при условии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = -\mu_2$ или $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$, в одном слое существуют затухающие волны, а в другом – распространяющиеся в направлении оси $Oy$. В этом случае решетку нельзя уже считать фазовой.

Все эти особенности распространения волн в слоистых структурах необходимо учитывать при нахождении амплитудно-частотных характеристик в случае дифракции волны на ограниченной многослойной периодической структуре.

**Заключение**

Получено строгое решение задачи дифракции плоской волны на решетке из метаматериала и магнитодиэлектрика. Рассмотрены аналитическое и численное решение характеристического уравнения в задаче Штурма – Лиувилля для ограниченной слоистой периодической структуры. Проведен анализ дисперсионных характеристик для различных вариантов конфигурации решетки из магнитодиэлектрика и метаматериала. Установлено существование распространяющихся и затухающих волн вдоль слоев структуры, соответствующих вещественным и мнимым значениям спектрального параметра задачи. Исследован случай фазовой решетки для разных параметров системы и установлены особенности распространения волн в ограниченных слоистых структурах из метаматериала и магнитодиэлектрика.


**Список литературы:** 1. *Solymar, L., Shamonina, E.* Waves in Metamaterials. Oxford University Press, USA, 1st edition, 2009. 368 p. 2. *Yeh, P., Yariv, A., Hong, C.* Electromagnetic Propagation in Periodic Stratified Media. I. General Theory // J. Opt. Soc. Am. 1977. Vol. 76, No. 4. P. 423-438. 3. *Ярив, А., Юх, П.* Оптические волны в кристаллах. – М. : Мир, 1987. – 616 с. 4. *Масало, С. А., Репа, Ю. Т., Шестопалов, В. П.* Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрической решетке // Радиотехника. – 1969. – Вып. 10. – С. 15-24. 5. *Казанко, А.В., Одаренко, Е.Н. , Шматько, А.А.* Взаимодействие плоской электромагнитной волны с дифракционной решеткой из метаматериала // Вісник ХНУ імені Каразіна. Сер. Радіофізика та електроніка. – 2012. – № 1010. – Вип. 20. – С. 57-65.



*Харьковский национальный*
*университет радиоэлектроники*



*Поступила в редколлегию 15.11.2015*