УДК 621.396

А. Д. АБРАМОВ, канд. техн. наук, М. А. ВОНСОВИЧ, Т. И. МОСКАЛЕНКО, Р.В. НЕЖАЛЬСКИЙ, А. В. ФАТЕЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ F-СТАТИСТИКИ

Введение

Обнаружение сигналов и оценивание их числа (обнаружение-оценивание) в зашумленных наблюдениях является одной из актуальных задач практики использования многоканальных радиотехнических систем с программируемыми вычислительными мощностями при мониторинге окружающей среды [1, 2, 3].

Известные тесты обнаружения (максимального правдоподобия и правила, вытекающие из решения оптимизационных задач по критерию Неймана - Пирсона) теряют свою значимость, если дисперсия аддитивных помех неизвестна [1].

Указанные факторы существенно ограничивают рамки использования традиционных алгоритмов в реальных условиях многоканального приема.

В работе решение задачи обнаружения-оценивания количественного состава сигналов с неизвестными параметрами в условиях помеховой неопределенности проведено при использовании F-критерия. Синтезирована удобная в вычислительном отношении технология обработки информации, которая обеспечивает оперативность получения результата при априорной помеховой неопределенности, возможность использования табулированной статистики и управление величиной ошибки первого рода.

Изложение основного материала

Пусть апертура пеленгационной системы выполнена в виде М-элементной антенной решетки (АР). Фазовые центры приемных элементов расположены на оси 0х эквидистантно в точках $0, d, 2d, ..., (M-1)d$. Тогда для некоторой совокупности N независимых источников излучения пространственная выборка комплексных огибающих узкополосных сигналов на выходах приемных трактов антенной системы в k-й момент времени может быть задана М-мерным вектором u(k):

$$u(k) = A^N s^N(k) + n(k). \qquad (1)$$

Здесь $u(k) = [\dot{u}_1(k), \dot{u}_2(k), ..., \dot{u}_M(k)]^T$, $\dot{u}_m(k)$ – отсчет в k-й момент времени комплексной огибающей сигнала на выходе m-го приемного элемента $(m = \overline{1, M})$; $A^N = [A_1, A_2, ..., A_N]$, $A_n = [1, \dot{\lambda}_n, \dot{\lambda}_n^2, ..., \dot{\lambda}_n^{M-1}]^T$ – амплитудно-фазовое распределение поля n-го источника $(n = \overline{1, N})$ излучения, которое определяется угловыми координатами Θ_n:

$$\dot{\lambda}_n = \exp\{j 2\pi \frac{d}{\lambda} \Theta_n\} \qquad (2)$$

и геометрией решетки, $\Theta_n = \sin Q_n$, Q_n – угол между направлением на n-й источник и нормалью к апертуре АР, λ – рабочая длина волны; $s^N(k) = [\dot{s}_1(k), \dot{s}_2(k), ..., \dot{s}_N(k)]^T$, $\dot{s}_n(k)$ – комплексная амплитуда сигнала от n-го источника в k-й момент времени; $\varepsilon(k) = [\dot{\varepsilon}_1(k), \dot{\varepsilon}_2(k), ..., \dot{\varepsilon}_M(k)]^T$, $\dot{\varepsilon}_m(k)$ – гауссовский случайный процесс (шум, вносимый каналами решетки) с характеристиками $<\dot{\varepsilon}_m(k)> = 0$, $<\dot{\varepsilon}(k_1)\dot{\varepsilon}^+(k_2)> = \sigma^2 I_M \delta(k_1 - k_2)$, $m = \overline{1, M}$, „+" и „Т" – символы (соответственно) сопряжения по Эрмиту и транспонирования,

δ – символ Кронекера, I_M – единичная матрица размерности $M \times M$, σ^2 – мощность помехи. Требуется разработать процедуру, позволяющую на основании выборки $u^K = [u(1), u(2), ..., u(K)]$, определить число N сигналов при отсутствии априорных сведений об их форме, угловых параметрах, интенсивности и мощности канальных шумов.

Решение задачи проведем по критерию отношения правдоподобия (К.О.П.). Для этого введем в изложение гипотезу H_{l-1} о наличии в наблюдаемом процессе (1) $(l-1)$ сигналов с неизвестными комплексными амплитудами $\dot{E}_n(k)$ и угловыми параметрами Q_n ($n = \overline{1, l-1}$). При указанных исходных данных функция правдоподобия $P(u^K / H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1),K}, \sigma^2)$ выборки u^K, полученной после приема пачки из К независимых импульсов, относительно сложной гипотезы H_{l-1} и фиксированных $s^{(l-1),K} = [s^{(l-1)}(1), s^{(l-1)}(2), ..., s^{(l-1)}(K)]^T$, A^{l-1}, σ^2, записывается так:

$$P(\cdots) = (\pi\sigma^{2MK})^{-1} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{K} [\frac{u(k) - A^{l-1}s^{l-1}(k)]^+ \times [u(k) - A^{l-1}s^{l-1}(k)]}{\sigma^2}\right\}. \tag{3}$$

Критерий отношения правдоподобия для проверки H_{l-1} при сложной альтернативе H_l определяется статистикой T_{l-1} [1]:

$$T_{l-1} = \frac{\sup\limits_{H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1),K}, \sigma^2} P[u^K / H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1),K}, \sigma^2]}{\sup\limits_{H_l, A^l, s^{lK}, \sigma^2} P[u^K / H_l, A^l, s^{l,K}, \sigma^2]} = \left(\frac{RSS_{H_l}}{RSS_{H_{l-1}}}\right)^{MK}. \tag{4}$$

Здесь

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m, s^{mK}} \left\{\frac{1}{MK} \sum_{k=1}^{K} [u(k) - A^m s^m(k)]^+ \times [u(k) - A^m s^m(k)]\right\} - \tag{5}$$

минимальное значение нормированной невязки, соответствующее гипотезе H_m ($m = l-1, l$).

В статистике (5) прежде всего найдем точную нижнюю грань по вектору комплексных амплитуд сигналов $s^m(k)$. Известно [3, 4], что единственная экстремальная точка по $s^m(k)$ квадратичной функции, стоящей в фигурных скобках соотношения (5), достигается при

$$\hat{s}^m(k) = [(A^m)^+ A^m]^{-1} (A^m)^+ u(k). \tag{6}$$

Тогда, подставляя (6) в (5), после тождественных преобразований получаем

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m} \left\{\frac{1}{MK} \sum_{k=1}^{K} u^+(k) P_{m\perp} u(k)\right\}, \tag{7}$$

где

$$P_{m\perp} = I_m - P_m = I_m - A^m[((A^m)^+ A^m)^{-1} (A^m)^+] - \tag{8}$$

эрмитова идемпотентная матрица; P_m – проектор, заданный при помощи векторного базиса $\{A_q, q = \overline{1, M}\}$.

Для нахождения минимума по A^m невязки (7) воспользуемся спектральным разложением ортогонального проектора $P_{m\perp}$ [4, 5]:

$$P_{m\perp} = C_M \nu C_M^{+} . \tag{9}$$

Здесь $\nu = diag(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_M)$, а унитарная матрица $C_M = (C_1, C_2, ..., C_M)$ составлена из n-мерных собственных векторов C_j, соответствующих ν_j, $(j = \overline{1, M})$, причем $C_M C_M^{+} = I_M$.

С учетом (9) правую часть равенства (7) приводим к виду

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m} \left\{ \frac{1}{M} Sp(\nu C_M R C_M^{+} \nu) \right\}. \tag{10}$$

При выводе последнего соотношения введено обозначение

$$R = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} u(k) u^{+}(k) - \tag{11}$$

выборочная корреляционная матрица вектора $u(k)$.

Теорема Релея-Ритца утверждает: минимум (2.10) достигается, когда столбцы матрицы C_M совпадают с ортонормированными собственными векторами C_j, отвечающими $(M - m)$ минимальным собственным значениям λ_j $(j = \overline{m+1, M})$ матрицы R [4]. Как следствие: если верна гипотеза H_m и выполнены условия ортонормированности, то

$$RSS_{H_m} = \sum_{j=m+1}^{M} \lambda_j . \tag{12}$$

Подставив (12) в соотношение (4), получаем выражение для критической статистики T_{l-1}

$$T_{l-1} = \left(\frac{\sum_{j=l+1}^{M} \lambda_j}{\sum_{j=l}^{M} \lambda_j} \right)^{MK} . \tag{13}$$

Согласно К.О.П. гипотеза H_{l-1} отвергается при $T_{l-1} < \Pi_\alpha$, где порог Π_α выбирается по заданному уровню значимости α, и принимается в противном случае.

В практической работе целесообразно перейти от статистики T_{l-1} с помощью монотонного преобразования к хорошо табулированной статистике F_{l-1} [4]

$$F_{l-1} = \frac{2(M - l - 1)}{2} \left(T_{l-1}^{-\frac{1}{MK}} - 1 \right) = (M - l - 1) \frac{\lambda_l}{\sum_{i=l+1}^{M} \lambda_i}, \tag{14}$$

которая при выполнении H_{l-1} подчиняется F-распределению с 2 и $2(M - l - 1)$ степенями свободы.

Таким образом, в рамках критерия отношения правдоподобия гипотеза H_{l-1} принимается при $F_{l-1} \le \Pi_{l-1,\alpha}$ и отвергает H_{l-1}, если $F_{l-1} > \Pi_{l-1,\alpha}$. Порог $\Pi_{l-1,\alpha}$ определяется из таблиц F-распределения по заданному уровню значимости α(ошибка первого рода) и указанному числу степеней свободы.

Из приведенного следует, что технология обработки наблюдаемого процесса для принятия квалификационного решения о числе источников излучения сводится к следующим операциям. По принятым антенной решеткой пространственно-временным сигналам формируют по правилу (11) выборочную ковариационную матрицу R. Затем определяют совокупность $\lambda_i \ (j = \overline{1, M})$ ее собственных значений и переходят к последовательной проверке сложных гипотез $H_{l-1} \ (l = 1, 2, ...)$. Для этого вычисляют критическую статистику F_{l-1} и сравнивают ее с порогом $\Pi_{l-1,\alpha}$. При $F_{l-1} > \Pi_{l-1,\alpha}$ гипотеза H_{l-1} отвергается. Тогда переходят к проверке следующей гипотезы H_l. Если на некотором шаге, например, $m-1$, впервые $F_{m-1} \le \Pi_{m-1,\alpha}$, то выносится решение: наблюдаемый процесс обусловлен сигналами от $(m-1)$ источников излучения. Процедура проверки на этом прекращается.

Экспериментальное моделирование

Для исследования качественных показателей предложенной технологии и синтезированного теста были проведены численные статистические эксперименты. Моделировался прием девятиэлементной эквидистантной антенной решеткой с изотропными элементами сигналов от одинаковых по мощности, слабо разнесенных по углу точечных источников излучения, находящихся в дальней зоне. Межэлементное расстояние d задавалось равным λ, а случайные во времени комплексные амплитуды сигналов и собственные шумы в элементах генерировались с помощью гауссовского генератора комплексных чисел и задавались некоррелированными между собой и во времени.

Моделировались три сигнальные ситуации, отличающиеся друг от друга числом источников излучения и их угловыми разносами ΔQ: 1) $N = 1$, 2) $N = 2$. В каждой сигнальной ситуации для конкретного значения отношения сигнал/шум μ проводилось 100 независимых испытаний, а выборочная ковариационная матрица оценивалась по 100 временным выборкам входной реализации. При экспериментальных исследованиях максимальное число сигналов было принято равным 5. Под отношением сигнал/шум μ понималась величина $\mu = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$, где σ_i^2 – мощность i-го источника излучения в приемном канале АР. Материал моделирования сведен в табл. 1 - 3.

Таблица 1

Рабочие характеристики технологии при $N = 1$, $\frac{d}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1\%$

μ	$\hat{N}$						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	100	0	0	0	0	0
1	0	100	0	0	0	0	
0.9	0	100	0	0	0	0	
0.8	0	100	0	0	0	0	
0.7	0	100	0	0	0	0	
0.6	20	80	0	0	0	0	
0.5	92	8	0	0	0	0	
0.4	100	0	0	0	0	0	

0.3	100	0	0	0	0	0	

Таблица 2

Рабочие характеристики технологии при $N=2,\ \frac{d}{\lambda}=1,\ \alpha=1\%$

μ	$\hat{N}$						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	0	100	0	0	0	0,+5
1	0	8	92	0	0	0	
0.9	1	22	77	0	0	0	
0.8	18	41	41	0	0	0	
0.7	56	35	9	0	0	0	
0.6	90	9	1	0	0	0	
0.5	100	0	0	0	0	0	

Таблица 3

Рабочие характеристики технологии при $N=2,\ \frac{d}{\lambda}=1,\ \alpha=1\%$

μ	$\hat{N}$						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	0	100	0	0	0	-5,+5
1	0	3	97	0	0	0	
0.9	3	15	82	0	0	0	
0.8	17	26	57	0	0	0	
0.7	60	11	29	0	0	0	
0.6	98	0	2	0	0	0	
0.5	100	0	0	0	0	0	
0.4	100	0	0	0	0	0	
0.1	100	0	0	0	0	0	

Выводы

Проведенные теоретические и экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- синтезированное правило проверки сложных гипотез при оценке числа сигналов может работать в условиях параметрической априорной неопределенности;

- технология, реализующая тест, использует табулированную статистику и стандартные вычислительные операции, позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

Список литературы: *Богданович, В. А.* Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В. А. Богданович, А. Г. Вострецов. - М. : Физматлит, 2004. - 320 с. 2. *Волосюк, В. К.* Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / В. К. Волосюк, В. Ф. Кравченко. - М. : Физматлит, 2008. - 704 с. 3. *Литинская, Е. А.* ФАР с механоэлектрическим сканированием / Е. А. Литинская, В. С. Панько, С. В. Пеленга, Ю. П. Соломатов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2015. – №1. – С. 24-27. 4. *Кендалл, М.* Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюард. - М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. - 899 с. 5. *Справочник* по математике / Г. П. .Корн, Г. Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

Национальный аэрокосмический университет
имени Н.Е. Жуковского "ХАИ"

Поступила в редколлегию 15.10.2015