

АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАМАГНИЧИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Введение

В теоретических исследованиях и практических расчетах электрических цепей, содержащих нелинейную индуктивность, характеристику последней задают с помощью какой-либо аппроксимирующей функции, которая выражает зависимость между мгновенными значениями индуктивности B и напряженности H магнитного поля в сердечнике. При выборе аппроксимирующей функции исходят из следующих соображений:

- она должна иметь аналитическое выражение, т.к. его легче исследовать математически и интерпретировать полученные результаты;
- отличие аппроксимирующей функции от реальной должно быть достаточно малым;
- функция должна отвечать физике исследуемого процесса, учитывая его характерные особенности;
- вид аппроксимирующей функции должен быть простым, чтобы чрезмерно не усложнять анализ.

Эти требования достаточно противоречивы. В реальности часто приходится идти на компромисс, и решение подобной задачи является актуальным.

Вопросу аппроксимации нелинейных характеристик посвящена обширная литература [1, 2]. При определении коэффициентов аппроксимирующей функции $H=f(B)$ возникает трудность в экспериментальном получении кривой намагничивания классическими методами [3].

Цель работы - определение коэффициентов для известных аппроксимирующих функций характеристики намагничивания нелинейной индуктивности, которые бы с достаточной точностью описывали ее линейную и нелинейную части кривой.

Постановка задачи

В данном случае используем ВАХ магнитного материала для действующих значений токов и напряжений. Вывод выражений для коэффициентов и анализ проведем для следующих аппроксимаций: синус гиперболический, степенно-показательная, дробно-рациональная и степенная функции. Согласие расчетной и экспериментальной кривой будем устанавливать согласно критерию наименьших квадратов.

Исходными данными являются действующие значения тока I_k и напряжения U_k . Требуется для конкретного вида аппроксимирующей функции $H=f(B)$ минимизировать сумму

$$\sum_{k=1}^n p_k (\bar{I}_k - I_k)^2, \quad (1)$$

где \bar{I}_k – расчетное значение действующего тока; p_k – весовой коэффициент k -той точки ВАХ; n – число точек ВАХ.

Основная часть

Определим выражения коэффициентов аппроксимирующих функций по ВАХ магнитного материала.

1. Пусть нелинейная зависимость $H=f(B)$ представлена в виде гиперболического синуса

$$H = \alpha sh\beta B,$$

где α, β – постоянные коэффициенты аппроксимации, требующие определения.

После несложных преобразований получим зависимость между действующими значениями I и U в индуктивной магнитной катушке с сердечником сечением S , со средней линией l и количеством витков обмотки W

$$I = \alpha a \sqrt{I_0 2\beta q U - 1}, \quad (2)$$

где $a = \frac{l}{\sqrt{2W}}$; $q = \frac{\sqrt{2}}{SW\omega}$; ω – собственная частота.

Определим коэффициентом аппроксимации методом выбранных точек по двум значениям ВАХ – I_1, U_1 и I_2, U_2 . После преобразования находим:

$$\beta = \frac{1}{q(U_2 - U_1)} \ln\left(\frac{I_2}{I_1} 4\sqrt{\frac{U_2}{U_1}}\right), \quad \alpha = \frac{I_1}{a} \sqrt[4]{4\pi\beta q U_1} \exp(-\beta q U_1).$$

Более точные значения коэффициентов аппроксимации получаем из условия минимума суммы (1) [4].

Обозначим поправки к α_0 и β_0 , найденным по методу выбранных точек через $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ соответственно, и линеаризуем уравнение (2) относительно этих поправок. Тогда для каждой точки ВАХ можно записать условное уравнение

$$a_k \Delta\alpha + b_k \Delta\beta = l_k, \quad (3)$$

где $a_k = a \sqrt{I_0(2\beta_0 q U_k) - 1}$, $b_k = \frac{\alpha_0 U_k I_1 (2\beta_0 q U_k)}{2\sqrt{I_0(2\beta_0 q U_k) - 1}}$, $l_k = I_k - \alpha_0 a_k$.

Искомые поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ найдутся из системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} \Delta\alpha \sum_{k=1}^n p_k a_k^2 + \Delta\beta \sum_{k=1}^n p_k a_k b_k = \sum_{k=1}^n p_k a_k l_k, \\ \Delta\alpha \sum_{k=1}^n p_k a_k b_k + \Delta\beta \sum_{k=1}^n p_k b_k^2 = \sum_{k=1}^n p_k b_k l_k. \end{cases}$$

2. Переходим к аппроксимации в виде степенно-показательной функции

$$H = \alpha B e^{\beta B^2}.$$

Поступая аналогично тому, как это делалось для предыдущей аппроксимации, находим зависимость

$$I = \alpha a q U \sqrt{I_0 \beta q^2 U^2 + I_1 \beta q^2 U^2} \exp\left(\frac{\beta q^2 U^2}{2}\right).$$

Отсюда по методу выбранных точек находим приближенные значения коэффициентов α и β :

$$\beta = \frac{1}{q^2(U_2^2 - U_1^2)} \ln\left(\frac{I_2}{I_1} \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}\right); \quad \alpha = \frac{I_1}{a \sqrt{q U_1}} \sqrt[4]{\frac{\pi\beta}{2}} \exp(-\beta q^2 U_1^2).$$

Коэффициенты условных уравнений (3) имеют вид

$$a_k = a q U_k \exp\left(\frac{\beta_0 q^2 U_k^2}{2}\right) \sqrt{I_0 \beta_0 q^2 U_k^2 + I_1 \beta_0 q^2 U_k^2};$$

$$b_k = \frac{\alpha_0 a q^3 U_k^3}{2} \exp\left(\frac{\beta_0 q^2 U_k^2}{2}\right) \frac{I_0 \beta_0 q^2 U_k^2 + I_1 \beta_0 q^2 U_k^2 \left(1 - \frac{1}{2\beta_0 q^2 U_k^2}\right)}{\sqrt{I_0 \beta_0 q^2 U_k^2 + I_1 \beta_0 q^2 U_k^2}};$$

$$l_k = I_k - \alpha_0 a_k.$$

3. Дробно-рациональная аппроксимация

$$H = \frac{\alpha B}{\beta - B^2}.$$

Здесь имеем аналогично рассмотренному случаю для действующих значений I и U :

$$I = \frac{\alpha a q U}{\sqrt[4]{\beta(\beta - q^2 U^2)^3}}.$$

Приближенные значения α и β вычисляются по формулам:

$$\beta = q^2 \frac{U_2^2 - U_1^2 \sqrt[3]{\left(\frac{I_1 U_2}{I_2 U_1}\right)^4}}{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{I_1 U_2}{I_2 U_1}\right)^4}}; \quad \alpha = \frac{I_1}{a q U_1} \sqrt[4]{\beta(\beta - q^2 U_1^2)^3}.$$

Выражения для коэффициентов условных выражений имеют вид:

$$a_k = a q U_k \sqrt[4]{\beta_0(\beta_0 - q^2 U_k^2)^3};$$

$$b_k = -\frac{\alpha_0 a q U_k}{4} \left(\sqrt[4]{\beta_0^5(\beta_0 - q^2 U_k^2)^3} + 3 \sqrt[4]{\beta_0(\beta_0 - q^2 U_k^2)^7} \right);$$

$$l_k = I_k - \alpha_0 a_k.$$

Заметим, что в описанных выше трех аппроксимациях практически наилучшим образом, в смысле метода наименьших квадратов или какого-либо иного критерия точности, значения коэффициентов можно получить путем варьирования выбранных точек, которые будут задавать полосу, содержащую целиком или интересующую часть анализируемой экспериментальной кривой.

4. Степенная аппроксимация

$$H = \alpha B^{2\mu+1}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

В этом случае зависимость между I и U такова

$$I = \alpha \left(\frac{U}{g}\right)^{2\mu+1}, \quad \text{где } g = \frac{2}{q} \frac{2\mu+1}{\sqrt{a\sqrt{(4\mu+2)2}}} = \frac{2}{q} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\sqrt{a\sqrt{2\Gamma(4\mu+2)}}}.$$

Условие минимума суммы (1) дает следующее выражение

$$\alpha = \frac{g^{2\mu+1} \sum_{k=1}^n p_k U_k^{2\mu+1} I_k}{\sum_{k=1}^n p_k U_k^{4\mu+2}}.$$

5. Степенная аппроксимация с линейным членом

$$H = \alpha B^{2\mu+1} + \beta B \quad (5)$$

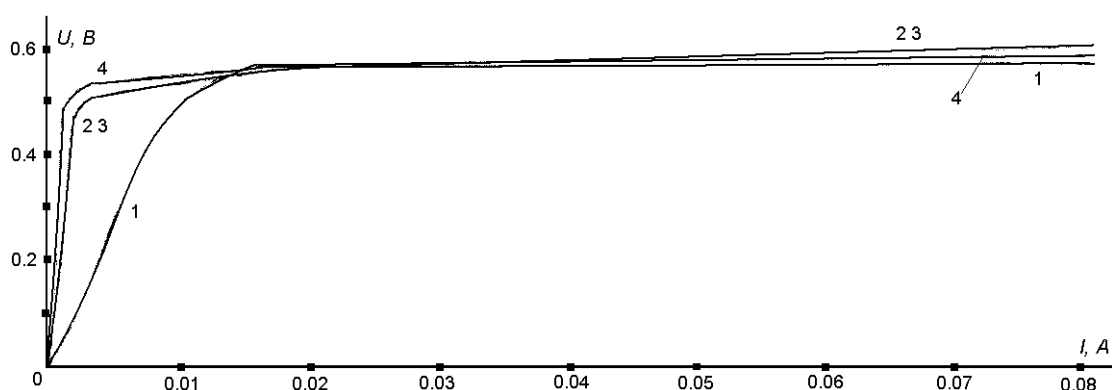
позволяет точнее согласовать расчетную и экспериментальную кривые в линейной части ВАХ по сравнению с аппроксимацией (4).

Ток I и напряжение U здесь связаны следующим образом:

$$I = a \left(\alpha \sqrt{\gamma} (qU)^{2\mu+1} + \beta qU \right) \sqrt{1 - \frac{\alpha \beta (2\sqrt{\gamma} - \eta) (qU)^{2\mu}}{(\alpha \sqrt{\gamma} (qU)^{2\mu} + \beta)^2}}. \quad (6)$$

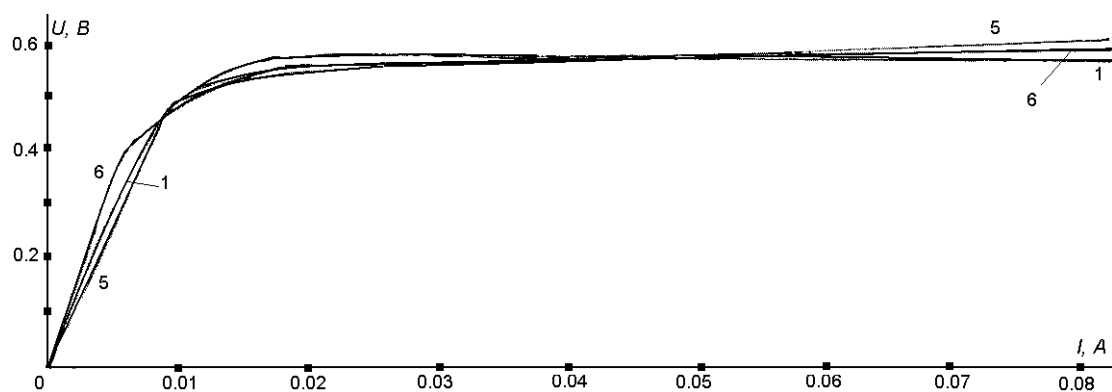
Уравнение вида (6) легко решается последовательными приближениями. Если степень двучлена (5) достаточно высока, то предпочтительнее коэффициент β определять не совместно с α , а независимо по линейной части ВАХ.

На рис. 1 приведены экспериментальная и расчетные ВАХ для каждой из рассмотренных аппроксимаций. Кривые, соответствующие аппроксимациям гиперболическим синусом и степенно-показательной функцией практически совпадают друг с другом, если коэффициенты α и β определялись по одним и тем же точкам ВАХ.



а) 1 – экспериментальная кривая;
3 – $H=1,077B \cdot \exp(30,52B^2)$;

2 – $H=0,244 \cdot 10^{-4} \operatorname{sh}(37,5B)$;
4 – $H=6,63 \cdot 10^9 B^{21}$



б) 5 – $H = \frac{7,95B}{0,22 - B^2}$;

6 – $H=5,25 \cdot 10^9 B^{21} + 66,8 B$

В случае значительного насыщения материала сердечника эти кривые хорошо согласуются с экспериментальной ВАХ в нелинейной области значительно хуже в линейной. Этот же вывод относится и к степенной аппроксимации (4), где $2\mu+1=21$. Заметно лучшее согласие с линейной частью наблюдается у кривой, соответствующей дробно-рациональной аппроксимации.

Наиболее близкой к экспериментальной оказалась кривая, которая соответствует аппроксимации степенным двучленом с линейной частью, степень которого равна 21.

Анализ полученных аппроксимаций

Исследуем спектр мгновенного тока i для каждой аппроксимации, предполагая, что магнитная индукция изменяется по гармоническому закону $B = qU \sin \omega t$. Используя разложение тока i в ряд Фурье, имеем:

- для случая гиперболического синуса –

$$i = \frac{2\alpha l}{W} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{2k+1} \beta q U \sin(2k+1)\omega t;$$

- для аппроксимации степенно-показательной функцией

$$i = \frac{\alpha l q U}{W} \exp\left(\frac{\beta q^2 U^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(I_k \frac{\beta q^2 U^2}{2} + I_{k+1} \frac{\beta q^2 U^2}{2} \right) \sin(2k+1)\omega t;$$

- для случая дробно-рациональной функции

$$i = \frac{\alpha l q U}{W \sqrt{\beta - q^2 U^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - q^2 U^2}}{q U} \right)^{2k} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - q^2 U^2}}{q U} \right)^2 \right) \sin(2k+1)\omega t;$$

- для аппроксимации степенным двучленом (5)

$$i = \frac{l q U}{W} \left(\alpha \left(\frac{q U}{2} \right)^{2\mu} C_{2\mu+1}^{\mu} + \beta \right) \sin \omega t + \frac{\alpha l}{2^{2\mu} W} (q U)^{2\mu+1} \sum_{k=1}^{\mu} (-1)^k C_{2\mu+1}^{\mu-k} \sin(2k+1)\omega t.$$

Таким образом, в спектрах всех токов присутствуют только нечетные гармоники, причем только синусная составляющая.

Выводы

По результатам проведенных исследований можно сделать выводы:

1) подробно рассмотрен метод определения коэффициентов функции, аппроксимирующей характеристику нелинейной индуктивности, по ВАХ для действующих значений тока и напряжения;

2) получены выражения коэффициентов для аппроксимаций: гиперболическим синусом, степенно-показательной, дробно-рациональной и степенной функциями. Показано, что наилучшее согласие с экспериментом показали дробно-рациональная аппроксимация и аппроксимация степенным двучленом;

3) исследован спектр мгновенного тока для каждой из аппроксимаций. Выявлено, что в спектрах всех токов присутствуют только нечетные гармоники.

Список литературы: 1. Бруевич А.М., Евтянов С.И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. – М. : Сов. радио, 1965. 2. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – К. : Наукова думка, 1980. 3. Шольц Н.И., Пискарев К.А. Ферриты для радиочастот. – М. : Энергия, 1966. 4. К расчету характеристик нелинейных индуктивностей / Зуев Н.Г., Магиденко В.Э., Титаренко А.М., Чередников П.И. – Харьков : ХИРЭ, 1984. – 16 с. (Рук. деп. в УкрНИИТИ 11.11.84. №1877 Ук-84 Деп.).

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 05.03.2015