ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

УДК 621.391: 519.246.8

В.А.ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук, К.В. НЕТРЕБЕНКО, канд. техн. наук, И.О.ФИЛЬ

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СОСТАВНЫХ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение

В работе рассматриваются стационарные случайные процессы, которые можно представить последовательностью смежных выборок меньшей длины. При этом интерес представляют статистические связи между выборками, долгосрочное изменение их статистических характеристик. Такие задачи возникают при изучении долговременных изменений среднемесячных температур, долговременных изменений солнечной активности и т.д. Статистический анализ таких процессов обычно ограничивается анализом статистических связей между отсчетами процесса. Однако в таких случаях не менее важен долгосрочный статистический анализ совокупностей случайных процессов малой длины, которыми представляется процесс. Это представление удобно рассматривать в векторном пространстве.

Отсчеты процесса являются координатами вектора-процесса в некотором векторном пространстве [1]. Для обработки процессов используются операции векторной алгебры. Достаточно простые алгебраические взаимосвязи между процессами характерны для линейных пространств. Для описания векторов-сигналов в рамках корреляционной теории широко применяется гильбертово пространство [2], в котором определено правило перемножения векторов. Классический подход к построению гильбертовых пространств не позволяет в удобной форме строить модели рассматриваемых классов процессов.

Предложенный в работе метод анализа подобных сигналов позволяет извлекать информацию, которую часто нельзя получить обычными методами статистического анализа.

Цель работы – определение класса рассматриваемых процессов, нахождение выражений для оценок статистических характеристик второго порядка этих процессов.

Корреляционная функция составных векторных случайных процессов

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\mathrm{x}[t]$ в виде вектора $\vec{x}[t]$ в линейном пространстве, который определяется своими координатами $x[1], x[2], \ldots, x[N]$. Пусть случайный процесс $\vec{x}^{\,n}[t]$ можно представить в виде последовательности подвекторов $\vec{x}_i$, $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{M}$ одинаковой длины n с однородными статистическими свойствами. Здесь введено понятие «подвектора» $\vec{x}_i$ длиной n вектора $\vec{x}^{\,n}[t]$. Назовем такой стационарный случайный процесс «составным векторным случайным процессом» (СВСП) $\vec{x}^{\,n}[t]$. Фиксированный верхний индекс n указывает на длину подвектора. СВСП является обобщением понятия случайного процесса, в котором его отсчеты заменяется подвекторами $\vec{x}_i$ длины n. При $n = 1$ СВСП становится эквивалентным обычному стационарному процессу $\vec{x}[t]$.

Под коррелированным СВСП $\vec{x}^{\,n}[t]$ будем понимать процесс, в котором существуют статистические связи второго порядка между подвекторами $\vec{x}_i$. Если количество отсчетов N вектора некратно длине подвектора n, то в качестве M определяется целая часть этого числа, т.е. $\mathrm{M} = \lfloor N / n \rfloor$. Далее будем полагать N кратным длине подвектора n. Представим процесс $\vec{x}^{\,n}[t]$ в виде последовательности подвекторов $\vec{x}_i$: $\vec{x}^{\,n}[t] = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_M\}$. Каждый подвектор $\vec{x}^{\,n}[t]$ определяется n координатами $\vec{x}_1=\{x[1], x[2],..., x[n]\}$, $\vec{x}_2=\{x[n+1], x[n+2],..., x[2n]\}$, …, $\vec{x}_i=\{x[(i-1)n+1],..., x[in]\}$, …, $\vec{x}_{\mathrm{M}}=\{x[N-n+1],..., x[N]\}$.

Средние значения СВСП $\vec{x}^{\,n}[t]$, состоящего из подвекторов длиной n, определяются выражением

$$\bar{\bar{x}}^{\,n}=\frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{i=1}^{\mathrm{M}}\bar{\bar{x}}_i\,,\ \ \bar{\bar{x}}_i=\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}x[(i-1)n+v]\,,$$

т.е. математическим ожиданием от средних значений подвекторов. Очевидно, что среднее значение СВСП совпадает со средним значением процесса $\bar{\mathrm{x}}$

$$\bar{\mathrm{x}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x[t]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N/n}\sum_{v=1}^{n}x[(i-1)n+v]=\bar{\bar{x}}^{\,n}\,.$$

При N-некратном длине подвектора n справедливо соотношение $\bar{\mathrm{x}}\approx\bar{\bar{x}}^{\,n}$. Центрированная выборка вектора определяется следующим образом

$$\vec{x}_c^{\,n}[t]=\vec{x}^{\,n}[t]-\bar{\bar{x}}^{\,n}=\{\vec{x}_1-\bar{\bar{x}}^{\,n},\vec{x}_2-\bar{\bar{x}}^{\,n},...,\vec{x}_{N/n}-\bar{\bar{x}}^{\,n}\}.$$

Далее, для упрощения выражений, полагаем, что СВСП $\vec{x}^{\,n}[t]$ представляет собой центрированный вектор с нулевым математическим ожиданием.

Для получения статистик второго порядка СВСП необходимо скалярное произведение координат вектора заменить на скалярное произведение подвекторов. Введем скалярное произведение для подвекторов СВСП

$$(\vec{x}_i,\vec{x}_{i+k})=\sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]),$$

где k – сдвиг подвекторов, равный $1, 2, \ldots, \mathrm{M}-1$. Применяя усреднение скалярного произведения, получим формулу оценки корреляционной функции СВСП

$$R^n[k]=\frac{1}{\mathrm{M}-k}\sum_{i=1}^{\mathrm{M}-k}\sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]). \qquad (1)$$

Отсюда видно, что корреляционная функция СВСП описывает статистическую связь первого порядка между подвекторами. Выражение (1) не совпадает с известными выражениями для оценки корреляционной функции процессов. Поэтому корреляционные функции СВСП и процесса сильно отличаются и характеризуют различные статистические связи, присутствующие в процессе. Корреляционная функция СВСП учитывает статистическую связь между подвекторами СВСП, что позволяет получать новую информацию о случайном процессе, как бы в большем «масштабе». Представим выражение (1) в виде

$$R^n[k]=\frac{1}{\dfrac{N}{n}-k}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-k}(\vec{x}_i,\vec{x}_{i+k})=R^n[i,i+k]\,, \qquad (2)$$

где i – номер подвектора СВСП. При $n=1$ из выражения (1) может быть получена известная формула оценки корреляционной функции для стационарного случайного процесса

$$R[k]=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x[i]x[i+k])\,. \qquad (3)$$

Следовательно, корреляционная функция СВСП является обобщением обычной функции корреляции.

Корреляционную функцию (1) можно представить в более практичном виде

$$R^n[k]=\frac{1}{N-kn}\sum_{i=1}^{N-kn}(x[i]x[i+kn]). \tag{4}$$

Для некоторых процессов можно использовать представление в виде совокупностей двух и более подвекторов. Например, для процессов имеющих двойную квазипериодичность. Корреляционная функция в представлении СВСП в случае двух подвекторов длиной n и l описывается выражением

$$R^{n,l}[k]=\frac{1}{N-knl}\sum_{i=1}^{N-knl}(x[i]x[i+knl]).$$

Рассмотрим свойства корреляционной функции СВСП. Пусть $i,\ l$ – номера подвекторов СВСП, причем $l=i+k$. Для стационарного процесса СВСП корреляционная функция удовлетворяет соотношению, следующему из (2)

$$R^n[i,l]=R^n[i,i+k]=R^n[i-k,i]=R^n[k].$$

Так как корреляционная функция стационарного процесса не зависит от i и l, а только от сдвига k, имеем

$$R^n[k]=R^n[-k].$$

Следовательно, корреляционная функция СВСП является четной функцией.

Найдем выражение для дисперсии СВСП. При $k=0$ из (1) имеем

$$D_x^n=R^n[0]=\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}}\sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j])^2 . \tag{5}$$

Таким образом, дисперсия СВСП равна среднему от квадратов подвекторов. Выражение (5) можно привести к виду, совпадающему с определением оценки дисперсии процесса:

$$D_x^n=R^n[0]=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x^2[t]=D_{\text{x}} .$$

К этому выражению можно прийти, положив $k=0$ в выражении (4). Для анализа СВСП можно использовать нормированные значения корреляционной функции

$$r^n[k]=\frac{R_x^n[k]}{R_x^n[0]}.$$

Из этого выражения следует, что $r^n[0]=1$.

Оценки корреляционных функций некоторых случайных процессов.

Рассмотрим несколько примеров выборочных оценок корреляционной функции СВСП с периодической и квазипериодической составляющей. Для таких процессов, как правило, можно выбрать длину подвектора, равную их периоду. Поскольку синусоида не изменяется при сдвиге равном периоду, то корреляционная функция в представлении СВСП будет представлена в виде прямой линии (рис. 1). Для аддитивной смеси синусоиды и белого шума величина корреляции будет ниже. Однако сдвиг смеси на период не приведет к появлению периодической составляющей. На рис. 1 показаны корреляционные функции смеси синусоиды гауссова шума при отношениях мощности С/Ш=18 и С/Ш=1. С ростом мощности белого шума величина корреляции снижается, не изменяя форму корреляционной функции.

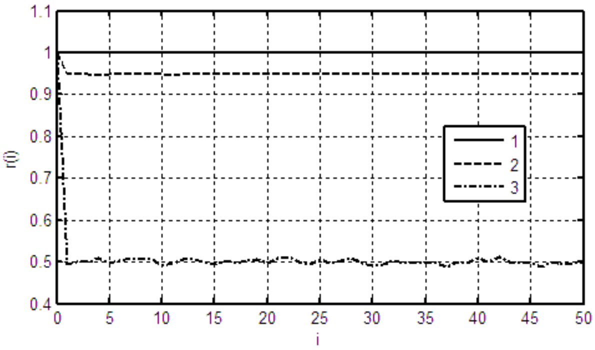

Рис. 1. Корреляционная функция синусоиды в СВСП представлении:
1 – без шума, 2 – при С/Ш=18, 3 – при С/Ш=1

Наличие в случайном процессе мощной колебательной компоненты затрудняет анализ значительных низкочастотных флуктуаций процесса. Например, в колебаниях солнечной активности присутствует выраженная низкочастотная составляющая. Она может быть выявлена использованием СВСП представления. Это наглядно видно по корреляционным функциям, представленным на рис. 2. При длине подвектора 11 отсчетов, корреляционная функция в СВСП представлении характеризует долгосрочные изменения колебаний солнечной активности. Подобную форму корреляционной функции имеют среднемесячные температуры земной поверхности. На рис. 3 показаны оценки классической корреляционной функции и для СВСП модели. Длина подвектора выбиралась равной 12 отсчетов. На величину ступеньки корреляционной функции модели СВСП влияет уровень случайных флуктуаций колебаний среднемесячных температур.

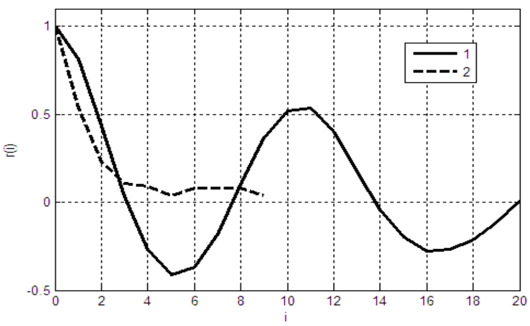

Рис. 2. Корреляционная функция
солнечной активности:
1 – классическая, 2 – в СВСП представлении.

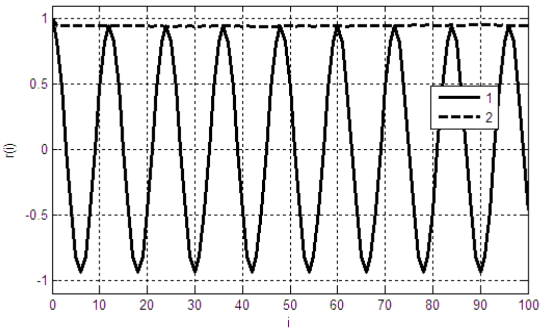

Рис. 3. Корреляционная функция
среднемесячных температур:
1 – классическая, 2 – в СВСП представлении

При использовании СВСП представления, в корреляционной функции можно устранить некоторые характеристики случайного процесса, не представляющие интерес для решения некоторой задачи. На рис. 4 представлены корреляционные шума электромоторов с приводом. Используя СВСП представление с двумя подвекторами разной длины, можно устранить из корреляционной функции колебания с периодами 2 и 15 отсчетов (рис. 4, кривая 2). Как показывают исследования, оставшиеся низкочастотные флуктуации корреляционной функции имеют существенные отличия для исправных и неисправных электродвигателей.

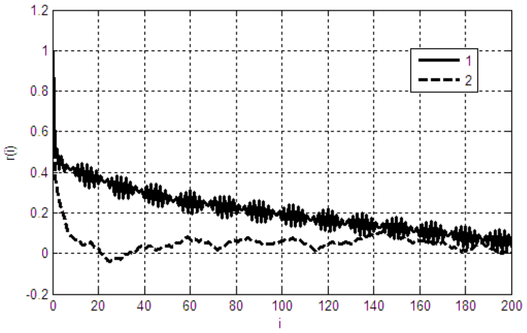

Рис. 4. Корреляционная функция звука электродвигателя:
1 – классическая, 2 – в СВСП представлении

Выводы

Использование СВСП представления случайных процессов позволяет выбором подходящей длины подвектора устранять периодические и квазипериодические составляющие в корреляционных функциях. Этот поход полезен при изучении низкочастотных флуктуаций случайного процесса, корреляционные функции которых содержат мощную периодическую составляющую. СВСП оценки корреляционных функций могут быть полезны в спектральном анализе, при синтезе моделей линейного предсказания, в задаче распознавания случайных процессов, в долгосрочном прогнозировании и других задачах.

Список литературы: 1. *Тихонов В.А., Филь И.О.* Статистическое моделирование составных векторных случайных процессов // Радиотехника. – 2011 – №165 – С. 7 – 9. 2. *Тихонов В.А., Кудрявцева Н.В., Филь И.О.* Математические модели составных векторных случайных процессов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011 – №2/4(50). – С. 17 – 20.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 15.10.2014