

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА ПРОХОЖДЕНИЯ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ
ЧЕРЕЗ НИЖНЮЮ ПОЛУЮ ВЕНУ
ПРИ НАЛИЧИИ КАВА-ФИЛЬТРА НА УЧАСТКЕ СОСУДА**

Введение

Одной из основных проблем современной медицины является создание эффективных методов лечения и профилактики сердечно-сосудистых заболеваний. Возрастающую роль в их разработке играют методы математического моделирования для количественного расчета параметров кровотока в сосудистой сети с целью изучения влияния на гемодинамику формы имплантатов и прогнозирования результатов хирургических вмешательств.

Актуальность и постановка задачи исследований

Для профилактики тромбоэмболии легочной артерии в нижнюю полую вену устанавливают специальные имплантаты – так называемые кава-фильтры, улавливающие флотирующие тромбы. Исследование тока крови в окрестности устройства представляет большой интерес, как для оптимизации формы имплантатов, так и изучения их влияния на гемодинамику. Кава-фильтр представляет собой тонкую металлическую проволочную конструкцию.

В работе [1] воспроизводится кровоток при наличии кава-фильтра с тромбом в вене. Причем препятствие учитывается посредством уменьшения эффективного сечения сосуда, однако при этом не берется во внимание упругое воздействие имплантата на стенку сосуда. В работе [2] исследуется осесимметричная задача о течении крови вдоль артерии со стентом. Эластичные свойства стенки, полагаемой тонкостенной мембраной из нелинейного вязкоупругого материала, вычисляются через уравнение равновесия для такой оболочки. Описываемый метод приемлем только для осесимметричных задач, где толщиной стенки можно пренебречь. Таким образом, существующие методы учета влияния имплантатов на гемодинамику в модели глобального кровообращения, не использующие дополнительных численных моделей, имеют ряд ограничений и допущений [1, 2]. Указанные подходы не являются универсальными: их область применения включает только частные случаи возможных послеоперационных ситуаций. Для более точного описания влияния имплантатов на гемодинамику в данной работе предложено применить разработанную модель системы кровообращения

человека в виде согласованной длинной линии с распределенными параметрами [3 – 5]. Математическая постановка задачи основывается на решении телеграфных уравнений длинной линии [4], что обеспечивает вычислительно-эффективную технологию. Данный метод позволяет изучать гемодинамику во всем организме при наличии как одной, так и нескольких патологий или имплантатов, а также не требует от них осесимметричности.

Цель работы – разработка и численная реализация методов, позволяющих представить модель системы кровообращения человека в виде согласованной длинной линии с распределенными параметрами [3 – 5] с учетом наличия патологий или имплантатов, в частности, кава-фильтра.

Материал и результаты исследований

Для математического описания гемодинамических процессов в кровеносном сосуде, содержащем кава-фильтр, модель кровеносного сосуда в виде длинной линии длиной l

[3 – 5], разбивается на три участка: $0A_1$ – участок до места крепления кава-фильтра длиной l_{0A1} ; A_1A_2 – участок, содержащий кава-фильтр длиной l_{A1A2} ; A_2A_3 – участок после кава-фильтра длиной l_{A2A3} (рис. 1).

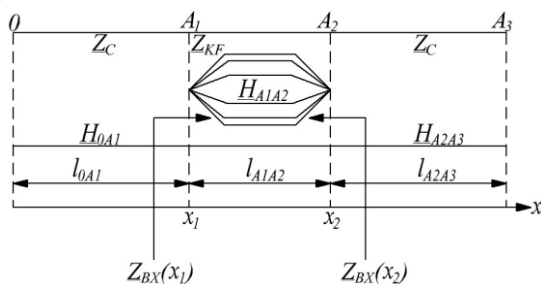


Рис. 1

Участки $0A_1$ и A_2A_3 согласно разработанной модели кровеносного сосуда в виде длинной линии характеризуются известными передаточными функциями [4]:

$$\underline{H}_{0A1}(j\omega) = H_{0A1} \cdot e^{-l_{0A1} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}}; \quad (1)$$

$$\underline{H}_{A2A3}(j\omega) = H_{A2A3} \cdot e^{-l_{A2A3} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}}; \quad (2)$$

где H_{0A1} и H_{A2A3} – коэффициенты передачи.

Рассмотрим подробнее участок кровеносного сосуда, содержащий кава-фильтр (A_1A_2).

Для обеспечения процесса кровообращения в данном сосуда необходимо, чтобы сопротивление нагрузки, представленное в общем виде как $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$, удовлетворяло двум условиям:

1. Активная часть нагрузки R_H должна равняться волновому сопротивлению линии Z_B (волновое сопротивление линии, представленное в общем виде) [6]:

$$R_H = Z_B. \quad (3)$$

2. Реактивная часть нагрузки X_H должна равняться нулю [6]:

$$X_H = 0. \quad (4)$$

Если сопротивление нагрузки удовлетворяет условиям (3) и (4), значит, участок линии согласован с нагрузкой.

Условия согласования (3) и (4) требуют, чтобы $Z_{BX}(x_1) = Z_B$, то есть $Z_{BX}(x_2) \cdot Z_B = Z_{KF}^2$.

Поскольку участок A_1A_2 неоднороден (в него входят как параметры кровеносного сосуда, так и параметры кава-фильтра), значит для математического описания гемодинамических процессов на данном участке модели длинных линий, в виде которых представлены как сам участок сосуда, так и кава-фильтр, необходимо представить в виде двух четырехполюсников с параллельным включением, так как при соединении кава-фильтра со стенкой сосуда включаются параллельно их входы и параллельно их выходы (рис. 2).

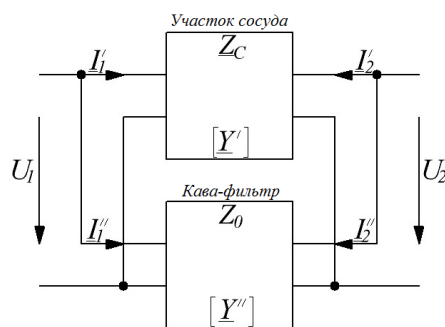


Рис. 2

Для параллельного соединения, как следует из схемы (рис. 2), удовлетворяют равенства:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1; \\ \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2; \\ \underline{U}'_1 = \underline{U}''_1 = \underline{U}_1; \\ \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2 = \underline{U}_2. \end{cases} \quad (5)$$

Используя уравнения четырехполюсника для Y -параметров, получим:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (6)$$

где $\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{bmatrix}$ – матрица параметров модели кровеносного сосуда; $\underline{Y}'' = \begin{bmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix}$ – матрица параметров модели кава-фильтра.

Как известно, в режиме 2х2-полюсника матрица передачи отрезка линии представляется в виде

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C} & \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \\ sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) & ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

По формулам перехода из A -параметров к Y -параметрам найдем искомую матрицу Y -параметров:

$$\begin{aligned} \underline{Y}' &= \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & -\frac{\Delta_A}{\underline{A}_{12}} \\ -\frac{1}{\underline{A}_{12}} & \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} & -\frac{ch^2(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) - sh^2(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \\ 1 & \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} & \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} & -\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \\ 1 & \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} & \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta_A &= \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C} & \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \\ sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) & ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \end{vmatrix} = ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \cdot ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) - \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \times \\ &\times \frac{sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C} = ch^2(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) - sh^2(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно модель кава-фильтра. В общем виде кава-фильтр представляет собой однопроводную линию передачи, покрытую диэлектриком (титаном, нитинолом и т.д.) (рис. 3).

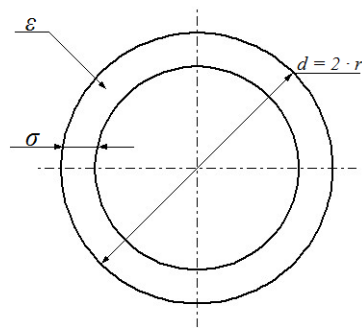


Рис. 3

Волновое сопротивление однопроводной линии передачи рассчитывается по формуле [7, 8]

$$Z_0 = 138 \cdot \lg \left(\frac{0,68 \cdot r_0}{r} \right); \quad (9)$$

где r – радиус проводника; r_0 – граничный радиус, который определяется по графику

зависимости $\frac{r}{r_0}$ от $\frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{r \cdot \sigma \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)}$ [8], где λ – длина пульсовой волны, проходящей через данный кровеносный сосуд; σ – толщина диэлектрика; ε – диэлектрическая проницаемость материала диэлектрика.

Для составления матрицы Y -параметров модели кавы-фильтра необходимо знать коэффициент передачи γ_{KF} , который определяется соотношением и является комплексной величиной:

$$\gamma_{KF} = \alpha + j\beta; \quad (10)$$

где α – коэффициент затухания, который определяется по формуле [8]

$$\alpha = 4,35 \cdot \frac{R_0}{Z_0} = 4,35 \cdot \frac{0,72}{Z_0 \cdot r \cdot \sqrt{\lambda_\phi}} = \frac{3,132}{Z_0 \cdot r \cdot \sqrt{\lambda_\phi}}; \quad (11)$$

λ_ϕ – длина волны вдоль однопроводной линии передачи, которая определяется по формуле [7, 8]:

$$\lambda_\phi = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot r_0}\right)^2}}; \quad (12)$$

где λ – длина пульсовой волны, проходящая через данный кровеносный сосуд, которая зависит от скорости распространения пульсовой волны и частоты сердечных сокращений и определяется по формуле

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f_{чсс}} = \frac{1}{f_{чсс}} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h}{\rho \cdot d}}; \quad (13)$$

где $f_{чсс}$ – частота сердечных сокращений; v_ϕ – фазовая скорость (скорость распространения пульсовой волны), которая определяется по формуле Моэнса – Кортевега [9]:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{E \cdot h}{\rho \cdot d}}; \quad (14)$$

где E – модуль упругости стенки кровеносного сосуда, который определяется как тензор деформации [10, 11]; h – толщина стенки кровеносного сосуда; d – внешний диаметр кровеносного сосуда; ρ – плотность крови.

Коэффициент фазы (волновое число) β определяется по формуле

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}. \quad (15)$$

Тогда матрица Y -параметров модели кава-фильтра представляется в виде

$$\underline{Y}'' = \begin{bmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & -\frac{ch^2((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) - sh^2((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \\ -\frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & -\frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \\ -\frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

поскольку $ch^2((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) - sh^2((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) = 1$.

Результирующая матрица Y -параметров эквивалентного четырехполюсника имеет вид

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ch(\gamma \cdot l_{A1A2})}{Z_C \cdot sh(\gamma \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & -\frac{1}{Z_C \cdot sh(\gamma \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \\ -\frac{1}{Z_C \cdot sh(\gamma \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} & \frac{ch(\gamma \cdot l_{A1A2})}{Z_C \cdot sh(\gamma \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Нахождение передаточной функции модели эквивалентного четырехполюсника осуществляется из уравнений четырехполюсников для Z -параметров (рис. 4):

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{11} + \underline{I}'_2 \cdot \underline{Z}_{12}; \\ \underline{U}_2 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{21} + \underline{I}'_2 \cdot \underline{Z}_{22}. \end{cases} \quad (18)$$

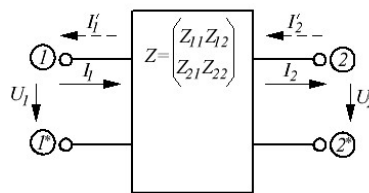


Рис. 4

При однонаправленности кровотока токи $\underline{I}'_1 = 0$ и $\underline{I}'_2 = 0$, то система уравнений (18) представляется в виде

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{11}; \\ \underline{U}_2 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{21}. \end{cases} \quad (19)$$

Из системы уравнений (19) выражается передаточная функция \underline{H}_{A1A2} :

$$\underline{H}_{A1A2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}; \quad (20)$$

где \underline{Z}_{11} и \underline{Z}_{21} – эквивалентные Z-параметры модели четырехполюсника.

По формулам перехода из Y-параметров к Z-параметрам найдем искомую матрицу Z-параметров:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y} & -\frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y} \\ -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}; \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_Y &= \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{21} = \left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right) \times \\ &\times \left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right) - \left(-\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right) \times \\ &\times \left(-\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right) = \left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2 - \\ &- \left(\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, искомые коэффициенты матрицы $[\underline{Z}]$ \underline{Z}_{11} и \underline{Z}_{21} имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)}{\left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2 - \left(\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2}; \\ \underline{Z}_{21} &= \frac{\left(-\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)}{\left(\frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2 - \left(\frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right)^2}; \quad (23) \\ \underline{Z}_{12} &= \frac{1}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} - \frac{1}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} = \\ \underline{Z}_{22} &= \frac{ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})} + \frac{ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} = \\ &= \frac{-Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) - \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{Z_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) \cdot ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) + \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \cdot ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})}. \end{aligned}$$

Передаточная функция модели кровеносного сосуда, содержащего кава-фильтр, представляется выражением

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \underline{H}_{0A1}(j\omega) \cdot \underline{H}_{A1A2}(j\omega) \cdot \underline{H}_{A2A3}(j\omega) = e^{-l_{0A1} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} \cdot \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} \cdot e^{-l_{A2A3} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} = \\ &= e^{-l_{0A1} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0} - l_{A2A3} \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} \cdot \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = e^{(-l_{0A1} - l_{A2A3}) \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} \times \\ &\times \left(\frac{-\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) - \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) \cdot ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) + \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \cdot ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для исследования процесса прохождения пульсовой волны через нижнюю полую вену в частотной области применяем следующее соотношение:

– при нормальном кровотоке:

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{U}_1 \cdot \underline{H}_{3B}(\omega) = U_1 \cdot e^{-l_{3B} \cdot \sqrt{(R_{03B} + j\omega L_{03B}) \cdot j\omega C_{03B}}}; \quad (25)$$

где U_1 – значение входного давления; R_{03B} , L_{03B} , C_{03B} – эквивалентные R_0 , L_0 , C_0 – параметры модели нижней полую вены в виде длинной линии, определяемые согласно [4]:

$$R_0 = \frac{8 \cdot \pi \cdot \eta}{S^2}; \quad L_0 = \frac{\rho}{S}; \quad C_0 = \frac{2 \cdot r \cdot S}{E \cdot h}.$$

– при наличии кава-фильтра на участке сосуда:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2^*(\omega) &= \underline{U}_1 \cdot e^{(-l_{0A1} - l_{A2A3}) \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} \times \\ &\times \left(\frac{-\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) - \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) \cdot ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) + \underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \cdot ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Восстановление выходного сигнала пульсовой волны во временной области происходит согласно выражению:

– при нормальном кровотоке:

$$U_2(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_1 \cdot \underline{H}_{3B}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U_1 \cdot e^{-l_{3B} \cdot \sqrt{(R_{03B} + j\omega L_{03B}) \cdot j\omega C_{03B}}} \cdot e^{j\omega t} d\omega; \quad (27)$$

– при наличии кава-фильтра на участке сосуда:

$$\begin{aligned} U_2^*(t) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_1 \cdot e^{(-l_{0A1} - l_{A2A3}) \cdot \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot j\omega C_0}} \cdot \left(\frac{-\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) -}{\underline{Z}_0 \cdot sh((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2}) \cdot ch(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) +} \right. \\ &\left. \frac{-\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2})}{\underline{Z}_C \cdot sh(\underline{\gamma} \cdot l_{A1A2}) \cdot ch((\alpha + j\beta) \cdot l_{A1A2})} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим участок нижней полую вены длиной 4,5 см с диаметром сечения 2 см. Кава-фильтр, выполненный из нитинола (TiNi) с диэлектрической проницаемостью 1200 [12], крепится на расстоянии 0,5 см от границы втекания ($l_{0A1} = 0,5$ см, $l_{A1A2} = 2$ см, $l_{A2A3} = 2$ см), его длина 2 см, диаметр каждой из 12 ножек 0,5 мм, а толщина – 0,1 мм. Кровь считается вязкой несжимаемой неньютоновской жидкостью с динамической вязкостью $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3}$ кг/м·с и плотностью $\rho = 1,062 \cdot 10^3$ кг/м³. В исследованиях принимается частота сердечных сокращений здорового человека в спокойном состоянии $f_{ЧСС} = 1$ Гц. Значение входного давления U_1 принимается равным -1,5 мм рт. ст. (-200 Па), что отвечает среднему давлению в нижней полую вене.

В табл. 1 приведены результаты расчетов основных параметров моделей нижней полую вены и кава-фильтра. На рис. 5 приведены графики АЧХ спектра пульсовой волны после прохождения участка нижней полую вены: a – при нормальном кровотоке $|U_2(\omega)|$,

построенном согласно выражению (25), \bar{b} – при наличии кава-фильтра $|U_2^*(\omega)|$, построенного согласно выражению (26). На рис. 6 приведены графики пульсовой волны после прохождения участка нижней полой вены: a – при нормальном кровотоке $U_2(t)$, построенном согласно выражению (27), \bar{b} – при наличии кава-фильтра $U_2^*(t)$, построенного согласно выражению (28).

Таблица 1

Модель участка нижней полой вены		Модель кава-фильтра	
Параметр	Значение	Параметр	Значение
d_B , м	$1,2 \cdot 10^{-2}$	r , м	$5 \cdot 10^{-4}$
d_H , м	$2 \cdot 10^{-2}$	σ , м	$1 \cdot 10^{-4}$
r , м	$6 \cdot 10^{-3}$	ε	1200
S , м ²	$1,131 \cdot 10^{-4}$	λ , м	3,027
h , м	$4 \cdot 10^{-3}$	λ_ϕ , м	1,689
l , м	0,045	r_0 , м	0,324
E , Па	$4,867 \cdot 10^4$	Z_0	215,957
R_0 , кг/м ⁵ ·с	$8,842 \cdot 10^6$	α , 1 / м	1,86
L_0 , кг/м ⁵	$9,372 \cdot 10^6$	β , 1 / м	2,076
C_0 , с ² /кг·м	$6,971 \cdot 10^{-9}$	γ , 1 / м	$1,86 + 2,076j$

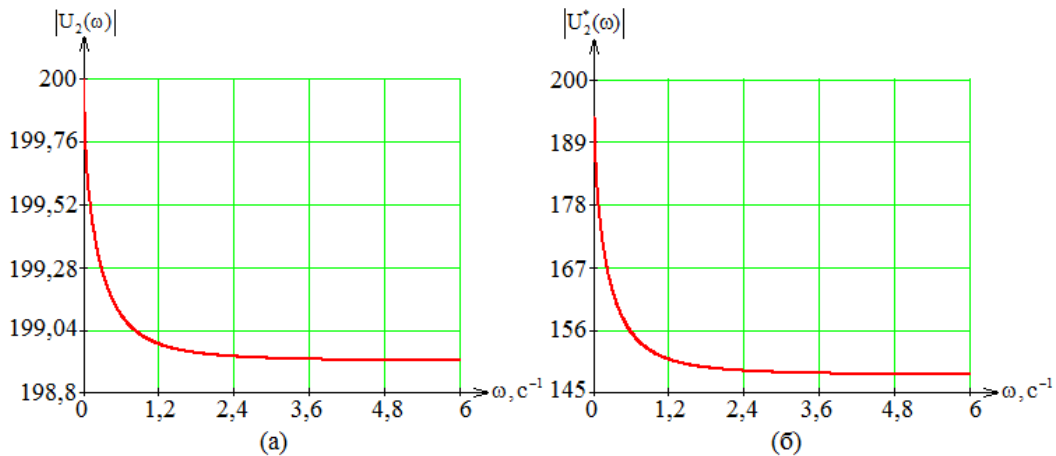


Рис. 5

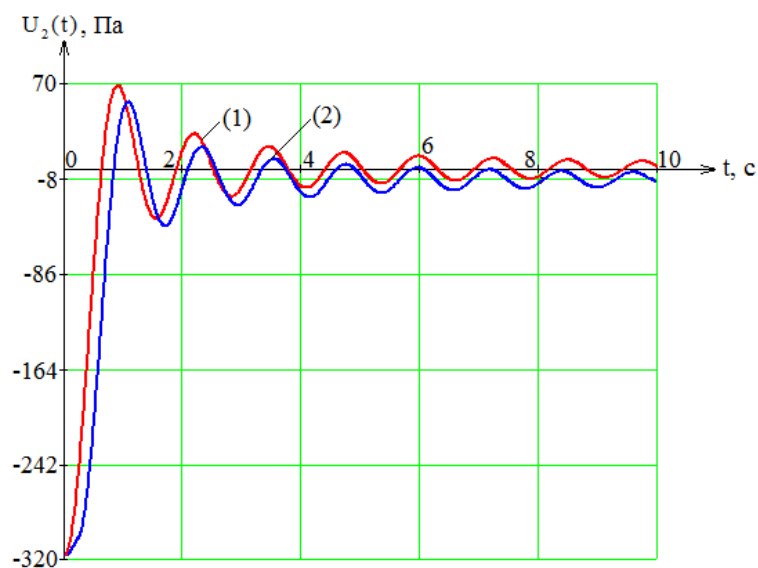


Рис. 6

Результаты статистической проверки адекватности проведенного исследования

Для подтверждения адекватности проведенного исследования вычислим двухсторонний критерий Стьюдента, рассчитанное значение $t_{эмн}$ которого должно быть большим критического значения $t_{кр}(\alpha; r)$ при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и количестве степеней свободы $r = n_1 + n_2 - 2$, где n_1 – количество экспериментальных точек на кривой 1 (рис. 6), n_2 – количество экспериментальных точек на кривой 2 (рис. 6).

Если $t_{эмн} > t_{кр}(\alpha; r)$, то различия между средними значениями экспериментальной группы 1 и экспериментальной группы 2 существенны на данном уровне значимости, что означает изменения движения крови в сосуде с наличием кава-фильтра на участке сосуда.

Эмпирическое (расчетное) значение двустороннего критерия Стьюдента $t_{эмн}$ определяется по формуле [13]

$$t_{эмн} = \frac{|M_1 - M_2|}{S_d}, \quad (29)$$

где M_1, M_2 – математическое ожидание первой и второй выборок соответственно (то есть экспериментальных значений с кривых 1 и 2 (рис. 6)) и вычисляются по формулам [13]:

$$M_1 = \frac{1}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} P_{1i}; \quad M_2 = \frac{1}{n_2} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i};$$

S_d – стандартная ошибка разности, которая при $n_1 = n_2 = n$ определяется по формуле [13]

$$S_d = \sqrt{\frac{S_1 + S_2}{n \cdot (n-1)}}; \quad (30)$$

S_1, S_2 – дисперсии первой и второй выборок соответственно, которые вычисляются по формулам [13]:

$$S_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (P_{1i} - M_1)^2; \quad S_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} (P_{2i} - M_2)^2;$$

где P_{1i} и P_{2i} – экспериментальные значения с кривых 1 и 2 (рис. 6).

В табл. 2 занесены основные экспериментальные значения с кривых 1 и 2 P_{1i} и P_{2i} при одном и том же значении времени t , результаты расчетов $M_1, M_2, S_1, S_2, S_d, t_{эмн}$, а также значение критического значения критерия Стьюдента $t_{кр}(\alpha; r)$ при $n_1 = n_2 = n = 10, r = 18$ и $\alpha = 0,05$.

Таблица 2

t, c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_{1i}, Па$	-310	60	10	-13	-10	8	7,7	2,5	-8	-8
$P_{2i}, Па$	-310	57	-10	-20	-14	-8	0	0	-8	-10
M_1	-27,08									
M_2	-33,3									
S_1	$1,103 \cdot 10^4$									
S_2	$1,061 \cdot 10^4$									
S_d	15,506									
$t_{эмн}$	3,999									
$t_{кр}(0,05; 18)$	2,101									

Поскольку $t_{эмн} > t_{кр}(\alpha; r)$, значит различия между средними экспериментальными значениями, взятыми с кривых 1 и 2 (рис. 6) существенны на данном уровне значимости α , т.е. вероятность ошибки меньше α , что является подтверждением адекватности проведенного исследования и влияния наличия кава-фильтра на участке сосуда стенки сосуда на характер кровотока.

Выводы

При нормальном кровообращении АЧХ спектра сигнала пульсовой волны практически не изменяется и являет собой плавно спадающую прямую линию, а при наличии на участке сосуда кава-фильтра идет значительное снижение значения амплитуды спектра сигнала пульсовой волны на частотах от 0 и до 2 Гц , а на частотах выше 2 Гц изменения не происходит. При этом график АЧХ представляет собой прямую линию (см. рис. 5). Наличие кава-фильтра на участке сосуда не приводит к существенному изменению формы пульсовой волны и значений кровяного давления во временной области на исследуемом участке нижней полой вены. Это объясняется тем, что давление в нижней полой вене находится в районе 0 мм рт. ст. (см. рис. 6). Однако при проведении диагностики системы кровообращения

человека необходимо учитывать наличие на участке сосуда кава-фильтра, поскольку его влияние сказывается на выходном сигнале пульсовой волны, который поступает в правое предсердие после прохождения большого круга кровообращения. Перспективой работы является повышение достоверности диагностики и клиническая апробация разработанного метода.

Список литературы: 1. *Математическое моделирование течения крови с кава-фильтрами* / Н.Б. Есикова, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. – Препринт. – М. : МАКС Пресс, 2004. – 22 с. 2. *Pontrelli G. Numerical modelling of blood flow in a stented artery* / G. Pontrelli, G. Pedrizzetti // *Wall-fluid interactions in physiological flows*. – WIT Press, 2004. Pp. 173–188. 3. *Владов С.І. Модель кровеносної системи у вигляді узгодженої довгої лінії* / С.І. Владов, В.О. Мосьпан, О.О. Юрко // *Матеріали VII Міжнар. наук.-практ. конф. «Перспективні розробки науки і техніки – 2011»*, Польща, Пшемисль, т. 43. – Біологічні науки. – С. 69–74. 4. *Владов С.І. Модель системи кровообігу людини у вигляді неоднорідної узгодженої довгої лінії з розподіленими параметрами* / С.І. Владов, В.О. Мосьпан // *Вісник Кременчуцького нац. ун-ту імені Михайла Остроградського*. – Кременчук : КрНУ, 2012. – Вип. 2/2012 (73). – С. 56–59. 5. *Владов С.І. Комплекс діагностування та вимірювання гемодинамічних показників системи кровообігу людини* / С.І. Владов // *Матеріали XI Міжнар. наук.-техн. конф. «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів»*, Кременчук, 9 – 12 лист. 2012 р. – Кременчук : КрНУ, 2012. – С. 124–125. 6. *Максимов В.М. Линии передачи СВЧ-диапазона : конспект лекций* / В.М. Максимов. – М. : Сайнс-Пресс, 2002. – С. 10–19. 7. *Маненков В.И. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: Конспект лекций* / В.И. Маненков. – Астрахань : АГТУ, 2004. – 50 с. 8. *Мосьпан В.О. Основи радіозв'язку та антенно-фідерні пристрої* / В.О. Мосьпан, С.М. Якимець. – Кременчук : КДПУ, 2004. – 273 с. 9. *Биофизика* / Ю.А. Владимиров, Д.И. Рошупкин, А.Я. Потапенко, А.И. Деев. – М. : Медицина, 1983. – С.234. 10. *Владов С.І. Визначення вектора радикального переміщення за схемою циліндричної оболонки кровеносної судини при симетричному навантаженні* / С.І. Владов, В.О. Мосьпан, О.О. Юрко // *Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Наукова індустрія європейського континенту – 2012»*, Чехія, Прага, т. 20. – Біологічні науки. – С. 22–29. 11. *Vladov S. Design of the deformed state of blood vessels* / S. Vladov, V. Mospan, O. Yurko // *Nauka i studia*. – Przemysl: Sp. z o. o. «Nauka i studia», 2013. – NR 7(75), 2013. – Pp. 72–77. 12. *Доброседова Т.К. Численное моделирование кровотока при наличии сосудистых имплантатов или патологий : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18* / Доброседова Татьяна Константиновна. – М., 2013. – 102 с. 13. *Лакин Г.Д. Биометрия* / Г.Д. Лакин. – М. : Высш. шк., 1980. – 293 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники,
Кременчугский национальный университет
имени Михаила Остроградского*

Поступила в редколлегию 11.04.2014