

## ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИМПЕДАНС Т-ОБРАЗНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

### Введение

В ряде устройств СВЧ используются различные периодические структуры (полосовые и режекторные фильтры, фильтры гармоник, направленные ответвители и т.д.) в качестве основных элементов, влияющих на их работу [1].

Существующий математический аппарат позволяет определять поля на поверхности таких структур, но требует довольно сложных вычислений. Однако для практики часто необходимо знать общие закономерности прохождения волны через такие структуры. Одним из таких подходов является метод эквивалентных импедансных граничных условий [2], позволяющий заменить сложную поверхность раздела двух сред ее поверхностным импедансом. Точность этого метода существенно зависит от строгости вычисления поверхностного импеданса ячейки периодической структуры.

### Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим бесконечный прямоугольный волновод сечением  $a \times b$ , в узкой стенке которого имеется отверстие, являющееся апертурой бокового волновода сечением  $d \times b$ , нагруженного на согласованную нагрузку. Рассматриваемая структура изображена на рис. 1.

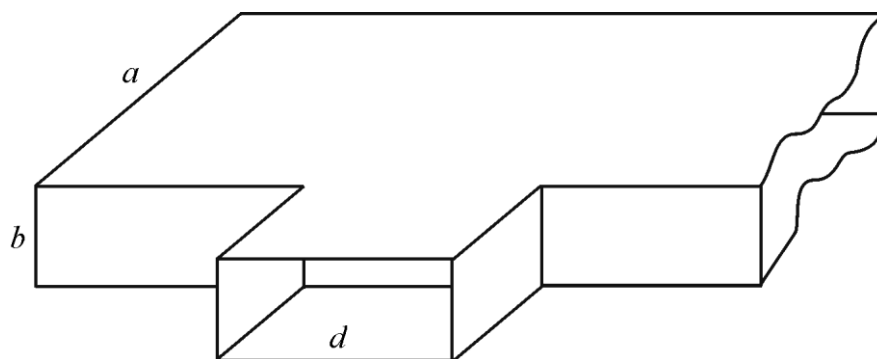


Рис. 1

Для описания электродинамических свойств такой структуры удобно ввести интегральный параметр – эквивалентный поверхностный импеданс  $\dot{Z}_{\dot{y}\dot{e}\dot{a}}$  [3].

Исходя из энергетических соотношений можно записать:

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \dot{Z}_{\text{экв}} \int_0^d \int_0^b |\dot{H}_{\perp}|^2 dz dy, \quad (1)$$

где средняя мощность, проходящая через поперечное сечение прямоугольного отверстия размером  $d \times b$  определяется из формулы

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \int_0^d \int_0^b [\dot{E}, \dot{H}^*] \cdot \vec{x}_0 dz dy. \quad (2)$$

В формуле (2)  $\dot{E}$  и  $\dot{H}^*$  – амплитуды напряженности электрического и магнитного поля на поверхности отверстия.

Приравнявая (1) и (2), получим выражение для расчета эквивалентного поверхностного импеданса прямоугольного отверстия:

$$\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}} = \frac{\int_0^b \int_0^d [\dot{E}, \dot{H}^*] \bar{x}_0 dz dy}{\int_0^b \int_0^d |\dot{H}_\perp|^2 dz dy}. \quad (3)$$

Будем считать, что по основному волноводу могут распространяться волны типа  $TE_{m0}$ .

Тогда, исходя из геометрии задачи, следует, что на отверстии также возбуждаются волны типа  $TE_{m0}$ , составляющие которых можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \dot{E}_{m0} \sin(\psi_z z) e^{-j\gamma_m(x-a)} \\ \dot{H}_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dot{E}_{m0} \gamma_m}{\omega \mu_0} \sin(\psi_z z) e^{-j\gamma_m(x-a)} \\ \dot{H}_x &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j \dot{E}_{m0} m \pi}{d} \cos(\psi_z z) e^{-j\gamma_m(x-a)} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где  $\dot{E}_{m0}$  – комплексная амплитуда  $TE_{m0}$  волны, возбуждаемой на прямоугольной щели бокового волновода;  $\psi_z = \frac{m\pi}{d}$  – поперечное волновое число вдоль координаты  $z$ ;

$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$  – продольное волновое число бокового волновода;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число в свободном пространстве;  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\omega$  – частота волны в свободном пространстве.

Подставляя в (3) значения соответствующих векторов напряженности поля  $\dot{E}_y$  и  $\dot{H}_z$  (4), получим

$$\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}} = \frac{\omega \mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} |\dot{E}_{m0}|^2 \gamma_m^* e^{-j(\gamma_m - \gamma_m^*)(x-a)} \int_0^b \int_0^d \sin^2(\psi_z z) dz dy}{\sum_{m=1}^{\infty} |\dot{E}_{m0}|^2 |\gamma_m|^2 e^{-j(\gamma_m - \gamma_m^*)(x-a)} \int_0^b \int_0^d \sin^2(\psi_z z) dz dy}. \quad (5)$$

Выполнив вычисления в (5), получим

$$\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}} = \frac{\omega \mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} |\dot{E}_{m0}|^2 \gamma_m^*}{\sum_{m=1}^{\infty} |\dot{E}_{m0}|^2 |\gamma_m|^2}. \quad (6)$$

Знаменатель выражения (6) всегда является положительным числом. На частотах меньших критического значения все слагаемые в числителе мнимые положительные числа. Значения  $\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}}$  при этом имеет индуктивный характер, а его величина определяется соотношением амплитуд  $\dot{E}_{m0}$  волн  $TE_{m0}$ , возбуждаемых на отверстии.

На частотах больших критического значения числитель представляет сумму слагаемых от распространяющихся и нераспространяющихся волн. Числитель при этом представляет

собой величину с положительной действительной и мнимой частью. Значения  $\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}}$  при этом имеет комплексный характер.

В предельном случае, когда в волноводе может возбуждаться только один тип волны,  $\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}}$  принимает вид [4]:

$$\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}} = \frac{\omega\mu_0}{\gamma_m}. \quad (7)$$

Для количественной оценки значения  $\dot{Z}_{y\hat{e}\hat{a}}$  необходимо знать амплитуды волн, которые возбуждаются на отверстии волной, распространяющейся в первичном прямоугольном волноводе. Вычислить эти амплитуды можно при решении дифракционной задачи.

### Дифракция волны $H_{10}$ на Т-образном соединении прямоугольных волноводов в $H$ – плоскости

Задача о рассеивании волны  $H_{10}$  решается методом частичных областей при условии  $\partial/\partial y=0$ . Решение уравнения Гельмгольца в подводящих волноводах (области I – III, рис.2) представим в виде [5]:

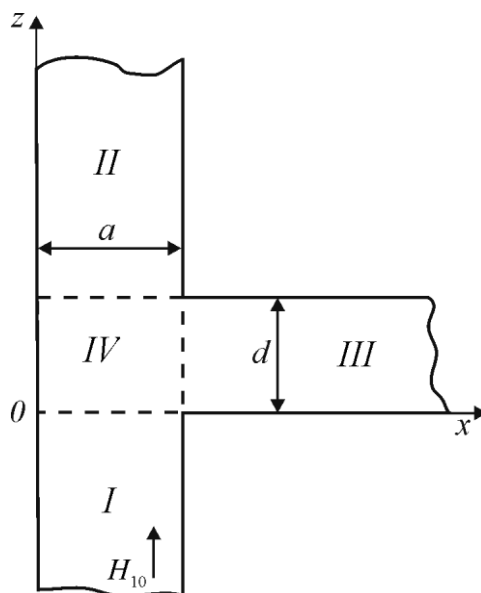


Рис. 2

$$E_y^I = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\Gamma_1 z} + \sum_{p=1}^{\infty} R_p \sin \psi_p(x) e^{j\Gamma_p z}; \quad (8)$$

$$E_y^{II} = \sum_{p=1}^{\infty} T_p \sin \psi_p(x) e^{-j\Gamma_p(z-d)}; \quad (9)$$

$$E_y^{III} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{m0} \sin \psi_m(z) e^{-j\gamma_m(x-a)}, \quad (10)$$

В области связи решением уравнения Гельмгольца является суперпозиция полей, пересекающихся волноводов:

$$E_y^{IV} = \sum_{p=1}^{\infty} \sin \psi_p(x) \left[ A_p e^{j\Gamma_p z} + B_p e^{-j\Gamma_p z} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \psi_m(z) \frac{\sin \gamma_m x}{\sin \gamma_m a}, \quad (11)$$

где  $R_p, T_p, E_{m0}, A_p, B_p, C_m$  – неизвестные амплитуды волн в областях (I – IV);  $E_0$  – амплитуда падающей волны  $H_{10}$ ;  $\psi_p(x) = \frac{p\pi x}{a}$ ,  $\psi_m(z) = \frac{m\pi z}{d}$  – поперечные функции основного и бокового волноводов соответственно;  $\Gamma_p = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi p}{a}\right)^2}$ ,  $\gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2}$  – продольное волновое число основного и бокового волноводов соответственно;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число в свободном пространстве;  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве;  $a, d$  – ширина главного и бокового волноводов.

Составляющие магнитного поля пропорциональны производным по компонентам  $x, z$  и имеют вид:

$$H_x^I = -\frac{E_0 \Gamma_1}{\omega \mu_0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j \Gamma_1 z} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R_p \Gamma_p}{\omega \mu_0} \sin \psi_p(x) e^{j \Gamma_p z}, \quad (12)$$

$$H_x^{II} = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{T_p \Gamma_p}{\omega \mu_0} \sin \psi_p(x) e^{-j \Gamma_p (z-d)}, \quad (13)$$

$$H_z^{III} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{m0} \gamma_m}{\omega \mu_0} \sin \psi_m(z) e^{-j \gamma_m (x-a)}, \quad (14)$$

$$H_x^{IV} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma_p \sin \psi_p(x)}{\omega \mu_0} \left[ A_p e^{j \Gamma_p z} - B_p e^{-j \Gamma_p z} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{m\pi \cos \psi_m(z) \sin \gamma_m x}{j \omega \mu_0 d \sin \gamma_m a}, \quad (15)$$

$$H_z^{IV} = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi \cos \psi_p(x)}{j \omega \mu_0 a} \left[ A_p e^{j \Gamma_p z} + B_p e^{-j \Gamma_p z} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\gamma_m \sin \psi_m(z) \cos \gamma_m x}{j \omega \mu_0 \sin \gamma_m a}, \quad (16)$$

Используя условия сшивания полей на границах раздела областей  $z=0, z=d$  и  $x=a$ , получим систему функциональных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \sin \psi_p(x) \left( R_p - [A_p + B_p] \right) = -E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ \sum_{p=1}^{\infty} \Gamma_p \sin \psi_p(x) \left( R_p - [A_p - B_p] \right) - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{m\pi \sin \gamma_m x}{j d \sin \gamma_m a} = E_0 \Gamma_1 \sin \frac{\pi x}{a} \\ \sum_{p=1}^{\infty} \sin \psi_p(x) \left( T_p - [A_p e^{j \Gamma_p d} + B_p e^{-j \Gamma_p d}] \right) = 0 \\ \sum_{p=1}^{\infty} \Gamma_p \sin \psi_p(x) \left( T_p + [A_p e^{j \Gamma_p d} - B_p e^{-j \Gamma_p d}] \right) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{m\pi (-1)^m \sin \gamma_m a}{j d \sin \gamma_m a} = 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \psi_m(z) (C_m - E_{m0}) = 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \sin \psi_m(z) (C_m \operatorname{ctg} \gamma_m a + j E_{m0}) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi (-1)^p}{a} \left[ A_p e^{j \Gamma_p z} + B_p e^{-j \Gamma_p z} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

Входящие в эту систему координатные функции  $\psi_p(x)$  и  $\psi_m(z)$  являются на интервале  $[0, a]$  и  $[0, d]$  ортогональными. Учитывая это и выполняя математические преобразования, сведем (17) к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_m$ :

$$C_n \gamma_n (\operatorname{ctg} \gamma_n a + j) + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \tilde{S}_{pm} + \frac{E_0 \Gamma_1 \delta_{p1}}{\Gamma_p} \right) F_{np}^+ + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \tilde{W}_{pm} F_{np}^- \right) = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$S_{nm} = \frac{2mn\pi^2 (-1)^n}{jd \left( (\gamma_m a)^2 - (n\pi)^2 \right)}, \quad W_{nm} = \frac{2mn\pi^2 (-1)^{n+m}}{jd \left( (\gamma_m a)^2 - (n\pi)^2 \right)},$$

$$F_{np}^- = \frac{2pn\pi^2 (-1)^p \left( (-1)^n e^{j\Gamma_p d} - 1 \right)}{a \left( (\Gamma_p d)^2 - (n\pi)^2 \right)}, \quad F_{np}^+ = \frac{2pn\pi^2 (-1)^p \left( (-1)^n e^{-j\Gamma_p d} - 1 \right)}{a \left( (\Gamma_p d)^2 - (n\pi)^2 \right)},$$

$\delta_{np}$  – символ Кронекера,

Представим систему (18) в общем виде:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m U_{nm} = -E_0 F_{n1}^+, \quad (19)$$

где  $U_{nm} = \sum_{p=1}^{\infty} \left( \tilde{W}_{pm} F_{np}^- + \tilde{S}_{pm} F_{np}^+ + \gamma_n (\operatorname{ctg} \gamma_n a + j) \delta_{nm} \right)$ .

Матричные элементы системы уравнений (19) удовлетворяют условию квадратичной сходимости, так что решение последней может быть получено с любой степенью точности методом редукции [5].

Неизвестные  $R_m$ ,  $T_m$ ,  $E_{m0}$  легко выражаются через коэффициенты  $C_m$ :

$$\begin{cases} R_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_m (\tilde{W}_{nm} + \tilde{S}_{nm}) \\ T_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left( \tilde{W}_{nm} e^{j\Gamma_n d} + \tilde{S}_{nm} e^{-j\Gamma_n d} \right) + E_0 e^{-j\Gamma_1 d} \delta_{n1} \\ E_{n0} = C_n \end{cases} \quad (20)$$

### Анализ численных результатов

Численное решение системы (20) методом редукции было проведено на ЭВМ в среде MatLab. Одновременно исследовался вопрос о сходимости алгоритма.

Анализ внутренней сходимости коэффициента прохождения показал, что для получения высокой точности результатов (не хуже 0,2 %) достаточно ограничиться порядком редукции  $N = 5$  и индексом суммирования  $p = 10$ .

На рис. 3 – 4 представлены зависимости действительной и мнимой частей нормированных эквивалентного поверхностного импеданса  $\tilde{Z}_{y\hat{e}a} = \dot{Z}_{y\hat{e}a} / Z_0$  от параметра  $a/\lambda$  при различных соотношениях  $d/a$ . В данном случае  $Z_0 = 120\pi \text{ Ом}$  – сопротивление свободного пространства.

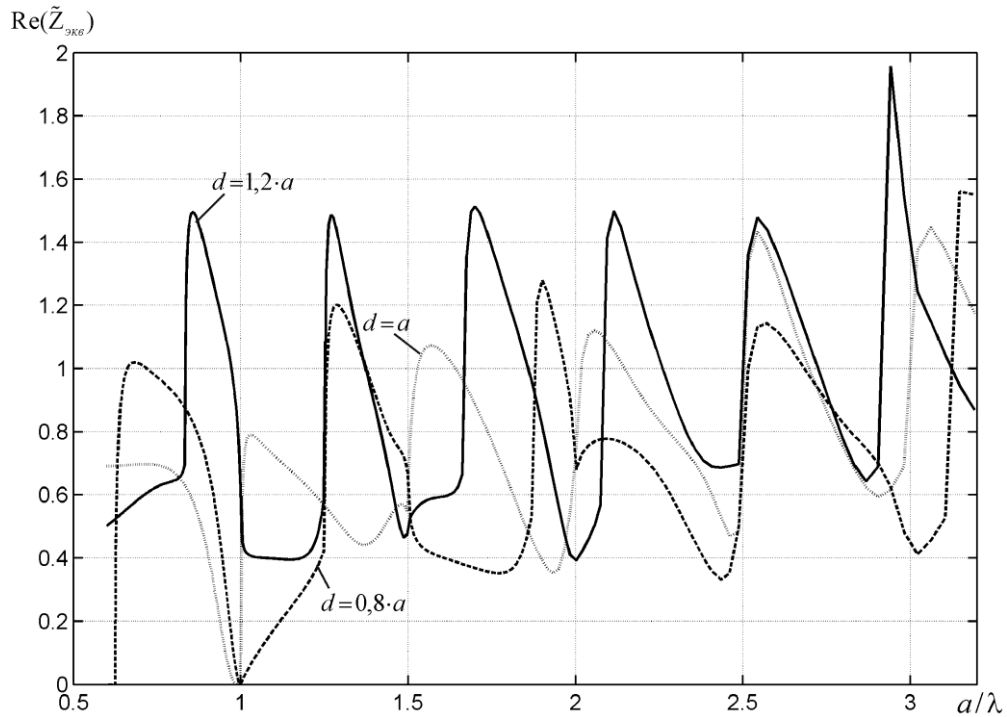


Рис. 3

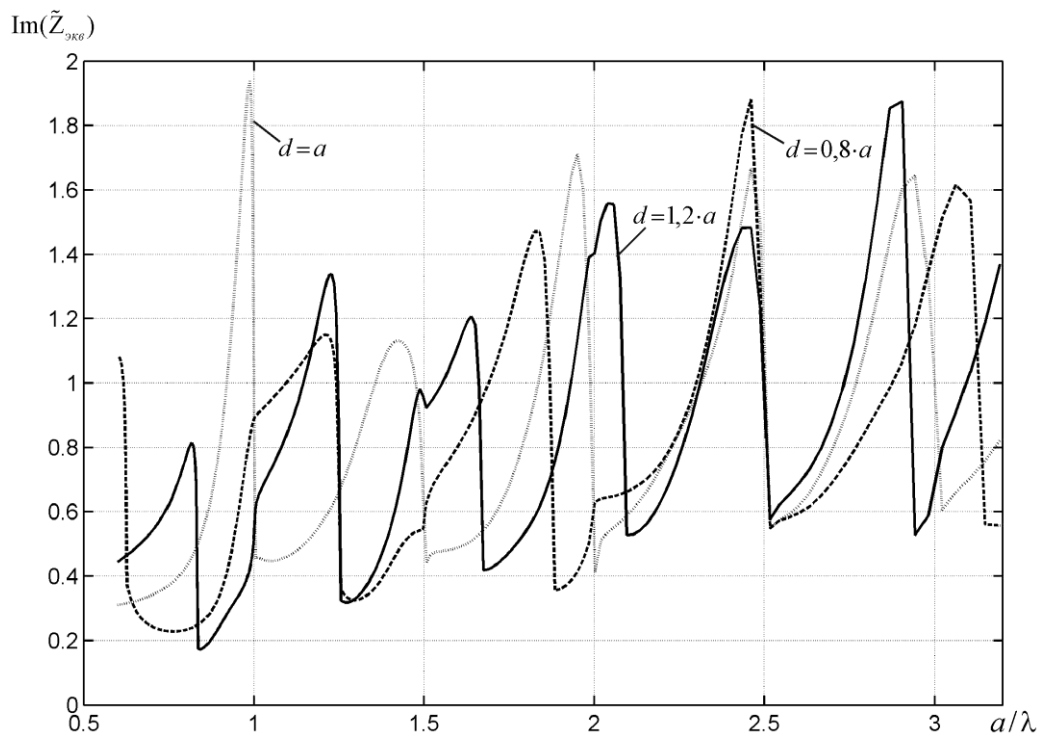


Рис. 4

Приведенные на рис.3 и 4 характеристики имеют осциллирующий характер с большими отклонениями от среднего значения, что свидетельствует о резонансном характере поверхностного импеданса. Аналогично можно сказать и о коэффициенте прохождения волны  $H_{10}$  из области  $I$  в область  $II$  (рис.5). Сравнивая частотные зависимости поверхностного импеданса и коэффициента прохождения можно отметить, что максимальное значение коэффициент прохождения принимает при тех значениях  $a/\lambda$ , при которых активная составляющая импеданса минимальна и, следовательно, отвлечение мощности в область  $III$  незначительно. При максимальных значениях активной составляющей эквивалентного поверхностного импеданса резко увеличивается отток мощности в область  $III$ , что и приводит к падению коэффициента прохождения.

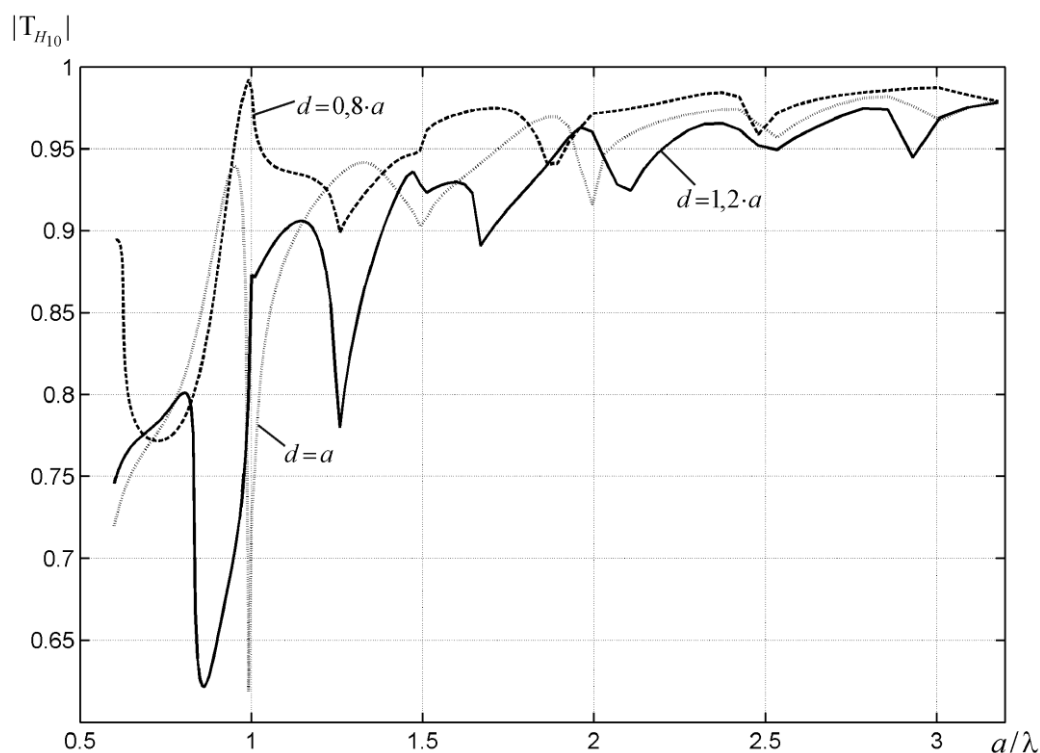


Рис.5

Как следует из приведенных рисунков, для значений,  $a/\lambda > 2$  поле прошедшей волны начинает формироваться по квазиоптическому принципу. Поверхностный импеданс и коэффициент прохождения хоть и имеют осциллирующий характер, но поверхностный импеданс в этом случае приближается к некоторому постоянному значению, зависящему от величины  $d$ , а коэффициент прохождения стремится к единице.

### Выводы

Методом частичных областей в широком диапазоне изменения параметров вычислен комплексный поверхностный импеданс отверстия связи Т-соединения двух прямоугольных волноводов. Численный анализ параметров структуры показал, что поверхностный импеданс и коэффициент прохождения в диапазоне частот более двух октав имеют резонансный характер. При этом коэффициент передачи имеет минимальное значение в случаях, когда действительная часть поверхностного импеданса максимальна.

Данное решение задачи позволяет по вычисленным значениям эквивалентного поверхностного импеданса рассчитывать структуры с большим количеством отверстий связи и на их основе оптимизировать параметры СВЧ фильтров гармоник.

**Список литературы:** 1. *Маттей Д.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т.* Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи ; пер. с англ. ; под ред. Л.В. Алексеева, Ф.В. Кушнера. – М. : Связь, 1971. – Т.1. – 439 с.; 1972. – Т.2. – 493 с. 2. *Леонтович М.А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1948. – С.5 – 12. 3. *Цалиев Т.А., Черенков В.С.* Возбуждение одиночной канавки и эквивалентный поверхностный импеданс ребристых структур // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т.30, №9. – С.1689 -1694. 4. *Кисунько Г.В.* Электродинамика полых систем. – Л. : Изд-во ВКАС, 1949. – 426 с. 5. *Рудь Л.А.* Дифракция волн на Т-образном соединении прямоугольных волноводов в Н-плоскости // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т.27, №9. – С.1711 – 1719

*Запорожский национальный  
технический университет*

*Поступила в редколлегию 11.03.2014*