

АЛГОРИТМ МЕТОДА ШВАРЦА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Введение

Для элементов конструкций многих волноводных СВЧ устройств характерно скачкообразное изменение поперечного сечения регулярного волновода. Такие ступенчатые переходы применяются как составные части более сложных устройств: фильтров, преобразователей типов волн, трансформаторов импедансов и других устройств. Поэтому задачи дифракции электромагнитных волн на ступенчатых неоднородностях представляют большой практический и теоретический интерес. Такие задачи решались на основе многочисленных подходов, некоторые из которых представлены, например, в работах [1 – 5]. В работе [1] на основе метода конечных элементов решены задачи для соосного соединения прямоугольных волноводов различного поперечного сечения, а также для ступенчатых переходов в Е- и Н-плоскостях. Результаты расчетов для каждого типа неоднородностей представлены в виде графиков частотных зависимостей для коэффициентов отражения падающей волны.

Метод, заключающийся в разбиении сложной области определения поля на простые подобласти, представлен в работе [2]. Поля в каждой подобласти представляются в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующей подобласти. Используя условие непрерывности тангенциальных компонент, производят "сшивание" полей на границе двух подобластей. Решение приведено в виде частотной характеристики модуля коэффициента отражения волны H_{10} . Также предложена конструкция волноводного соединения, минимизирующая величину коэффициента отражения.

Эффективным подходом к решению задач дифракции является метод интегрального уравнения. В работе [3] на основе метода интегрального уравнения и аппарата функций Грина рассмотрена задача дифракции волны на щели конечной толщины, расположенной в поперечной плоскости волновода. В работах [4 – 5] решены задачи дифракции волны на щелях в экранах конечной толщины.

В настоящей работе рассмотрен электродинамический алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на соединении прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. Алгоритм основан на интегральной теореме векторной теории дифракции, использующей тензорную функцию Грина области определения электромагнитного поля. Полученная система интегральных уравнений для выделенных пересекающихся областей из всей сложной области определения электромагнитного поля была решена методом Шварца.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на соосном соединении прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. Интегральная теорема векторной теории дифракции в общем виде [6]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = & j\omega\mu \int_{V_{cm}} \vec{J}_{cm}(\vec{r}') \cdot \vec{G}^e(\vec{r}, \vec{r}') dV + \\ & + \oint_S \vec{n} \cdot \left[\vec{E}(\vec{r}') \times (\nabla' \times \vec{G}^e(\vec{r}, \vec{r}')) + (\nabla' \times \vec{E}(\vec{r}') \times \vec{G}^e(\vec{r}, \vec{r}')) \right] dS \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S , зависимость от времени – $\exp(-j\omega t)$.

Для идеально проводящей поверхности функция Грина должна удовлетворять следующим условиям:

$$\vec{n} \times \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')) &= 0, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in S; \\ \vec{n} \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Функцию Грина, удовлетворяющую граничным условиям (2), называют функцией первого рода, а условиям (3) – второго рода [7]. При учете граничных условий (2) для функции Грина интегральная теорема векторной теории дифракции принимает следующий вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \oint_S \vec{n} \cdot [\vec{E}(\vec{r}') \times (\nabla' \times \vec{G}^e(\vec{r}, \vec{r}'))] dS. \quad (4)$$

Всю область определения поля разбиваем на две пересекающиеся области (рис. 1). Область 1: прямоугольный волновод сечением $a_1 \times b_1$, продленный в бесконечность. Область 2: полубесконечный прямоугольный волновод сечением $a_2 \times b_2$. В области 1 при $z \rightarrow -\infty$ возбуждается волна H_{10} . Стенки волноводов считаем идеально проводящими, а входы волноводов – полностью согласованными.

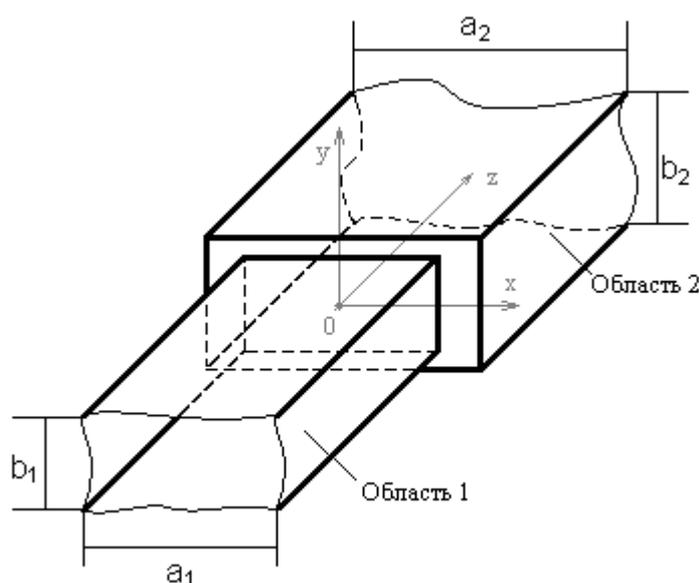


Рис. 1

Учитывая то, что в области пересечения поля одинаковы, составим следующую систему интегральных представлений для полных полей выделенных областей:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_{cm} + \int_{S_1} \vec{n}_1 \times \vec{E}_2(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 \\ \vec{E}_2(\vec{r}) = \int_{S_2} \vec{n}_2 \times \vec{E}_1(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \vec{G}_2^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_2 \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\vec{n}_i, i=1,2$ – нормаль к соответствующей поверхности интегрирования, \vec{E}_{cm} – вектор напряженности электрического поля возбуждающей волны типа H_{10} , \vec{r}, \vec{r}' – радиус-векторы точки наблюдения и точки источника соответственно, $\vec{G}_i^e, i=1,2$ – функции Грина электрического типа соответствующей области. Поверхность интегрирования S_i представляет собой поверхность стенок, продленных от стыка в бесконечность. Следовательно, интеграл в представлении для \vec{E}_1 можно преобразовать в сумму из четырех интегралов по каждой из этих стенок. После выполнения такого преобразования и конкретизации нормалей для каждой поверхности интегрирования система интегральных представлений (1) для итерации k -порядка примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_1^{(k)}(\vec{r}) &= \vec{E}_{cm} + \int_{S11} \vec{y}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 + \int_{S12} \vec{x}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 - \\ &- \int_{S13} \vec{y}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 - \int_{S14} \vec{x}_0 \times \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \vec{G}_1^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_1 \\ \vec{E}_2^{(k)}(\vec{r}) &= \int_{S2} \vec{z}_0 \times \vec{E}_1^{(k-1)}(\vec{r}') \cdot \nabla \times \vec{G}_2^e(\vec{r}, \vec{r}') dS_2 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Взаимосвязь между функциями Грина магнитного и электрического типов определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{G}_{1,2}^m &= \nabla \times \vec{G}_{2,1}^e, \\ \vec{G}_{1,2}^m &= \nabla \times \vec{G}_{2,1}^A. \end{aligned} \quad (7)$$

Нижний индекс в (7) показывает род граничных условий, которым удовлетворяет тензор Грина. Как видно из этих соотношений, в (6) можно применить функцию Грина магнитного типа \vec{G}^m . В свою очередь, для построения этой функции можно использовать тензор Грина потенциального типа \vec{G}^A , удовлетворяющий граничным условиям первого рода. Последний представляет собой диагональный тензор:

$$\vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz}^A \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Компоненты тензора (8) представим в «истокообразной» форме [8]:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \phi_{x\mu\nu}(x, y) \phi_{x\mu\nu}(x', y') f_{\mu\nu}(z, z'); \\ G_{yy} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \phi_{y\mu\nu}(x, y) \phi_{y\mu\nu}(x', y') f_{\mu\nu}(z, z'); \\ G_{zz} &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \phi_{z\mu\nu}(x, y) \phi_{z\mu\nu}(x', y') g_{\mu\nu}(z, z'); \end{aligned}$$

Поперечные собственные функции для граничных условий первого рода областей $i=1,2$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi_{x\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu}\varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \cos\left[\frac{\mu\pi}{a_i}\left(x + \frac{a_i}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{\nu\pi}{b_i}\left(y + \frac{b_i}{2}\right)\right] \\ \phi_{y\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu}\varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \sin\left[\frac{\mu\pi}{a_i}\left(x + \frac{a_i}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\nu\pi}{b_i}\left(y + \frac{b_i}{2}\right)\right] \\ \phi_{z\mu\nu}(x, y) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mu}\varepsilon_{\nu}}{a_i b_i}} \sin\left[\frac{\mu\pi}{a_i}\left(x + \frac{a_i}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{\nu\pi}{b_i}\left(y + \frac{b_i}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Здесь ε_{μ} , ε_{ν} – символы Неймана; μ , ν – индексы типов волн: для области 1 $\mu=m$, $\nu=n$, для области 2 $\mu=M$, $\nu=N$.

Функция от координат z и z' для области 1 имеет вид

$$f_{mn}(z, z') = g_{mn}(z, z') = \frac{1}{2j\gamma_{mn}} \exp(-j\gamma_{mn}|z - z'|)$$

Для области 2

$$f_{MN}(z, z') = \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \begin{cases} \exp(-j\Gamma_{MN}z)sh\Gamma_{MN}z'; z > z' \\ \exp(-j\Gamma_{MN}z')sh\Gamma_{MN}z; z < z' \end{cases}$$

$$g_{MN}(z, z') = \frac{1}{j\Gamma_{MN}} \begin{cases} \exp(-j\Gamma_{MN}z)ch\Gamma_{MN}z'; z > z' \\ \exp(-j\Gamma_{MN}z')ch\Gamma_{MN}z; z < z' \end{cases}$$

Здесь γ_{mn} , Γ_{MN} – продольное волновое число области 1 и 2 соответственно.

Применив операцию ротора к тензору, запишем функции Грина магнитного типа для областей 1 и 2 в следующем виде:

$$\vec{G}^m(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla \times \vec{G}^A(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 & G_{12}^m & G_{13}^m \\ G_{21}^m & 0 & G_{23}^m \\ G_{31}^m & G_{32}^m & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензоров определяются из следующих соотношений:

$$G_{12}^m = -\frac{\partial}{\partial z'} G_{yy}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \quad G_{13}^m = \frac{\partial}{\partial y'} G_{zz}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \quad G_{21}^m = \frac{\partial}{\partial z'} G_{xx}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \\ G_{23}^m = -\frac{\partial}{\partial x'} G_{zz}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \quad G_{31}^m = -\frac{\partial}{\partial y'} G_{xx}^A(\vec{r}, \vec{r}'); \quad G_{32}^m = \frac{\partial}{\partial x'} G_{yy}^A(\vec{r}, \vec{r}');$$

Далее, следуя правилам векторного произведения векторов и скалярного произведения тензора на вектор слева, можно получить систему интегральных представлений в удобном для расчетов виде, предварительно обозначив точки интегрирования для первой и второй области как r' и r'' , а точки наблюдения как r и r' соответственно:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') &= \int_{S_2} E_{1x}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{21}^2(\vec{r}', \vec{r}'') dS_2 \\ E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') &= - \int_{S_2} E_{1y}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{12}^2(\vec{r}', \vec{r}'') dS_2 \\ E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') &= \int_{S_2} [E_{1x}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{23}^2(\vec{r}', \vec{r}'') - E_{1y}^{<k-1>}(\vec{r}'') \cdot G_{13}^2(\vec{r}', \vec{r}'')] dS_2 \\ E_{1x}^{<k>}(\vec{r}) &= - \int_{S_{11}} E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{11} + \int_{S_{12}} [E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{21}^1(\vec{r}, \vec{r}')] dS_{12} + \\ &+ \int_{S_{13}} E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{13} - \int_{S_{14}} [E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{31}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{21}^1(\vec{r}, \vec{r}')] dS_{14} \\ E_{1y}^{<k>}(\vec{r}) &= E_{cm} + \int_{S_{11}} [E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{12}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}')] dS_{11} + \\ &+ \int_{S_{12}} E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{12} - \int_{S_{13}} [E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{12}^1(\vec{r}, \vec{r}') - E_{2x}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}')] dS_{13} - \\ &- \int_{S_{14}} E_{2y}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{32}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{14} \\ E_{1z}^{<k>}(\vec{r}) &= \int_{S_{11}} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{13}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{11} - \int_{S_{12}} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{23}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{12} - \\ &- \int_{S_{13}} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{13}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{13} + \int_{S_{14}} E_{2z}^{<k>}(\vec{r}') \cdot G_{23}^1(\vec{r}, \vec{r}') dS_{14} \end{aligned} \right.$$

Фиксируя точки наблюдения, получим систему интегральных уравнений, которая представлена в виде суммы падающей и отраженной волн

$$E_{1y}^{<k>} = E_{cm} + \sum_{m,n} R_{mn}^{<k>} \cdot \exp(\gamma_{mn}z).$$

Результаты работы

Для рассматриваемой задачи была составлена программа численного расчета на ЭВМ коэффициента отражения падающей волны. Результаты исследования сходимости алгоритма для размеров волноводов $a_1/\lambda=0.59$, $b_1=0,5a_1$, $a_2=1,45a_1$, $b_2=0,445a_2$ приведены в таблице. Число учитываемых типов волн в первой итерации составляло $M=19$, $N=18$, в последующих: $m=5$, $n=4$, $M=7$, $N=6$.

№ итерации	Модуль R_{10}	№ итерации	Модуль R_{10}
1	0,145473725438109	6	0,136397887357541
2	0,140351278004421	7	0,136399199686421
3	0,135730982206990	8	0,136399953695441
4	0,136356881662820	9	0,136399818878890
5	0,136426127884426	10	0,136399818878571

Сравнение рассчитанной зависимости модуля коэффициента отражения волны H_{10} от отношения a_1/λ с результатами из [2] показано на рис. 2. Количество итераций для каждой точки расчета, не превышает 10.

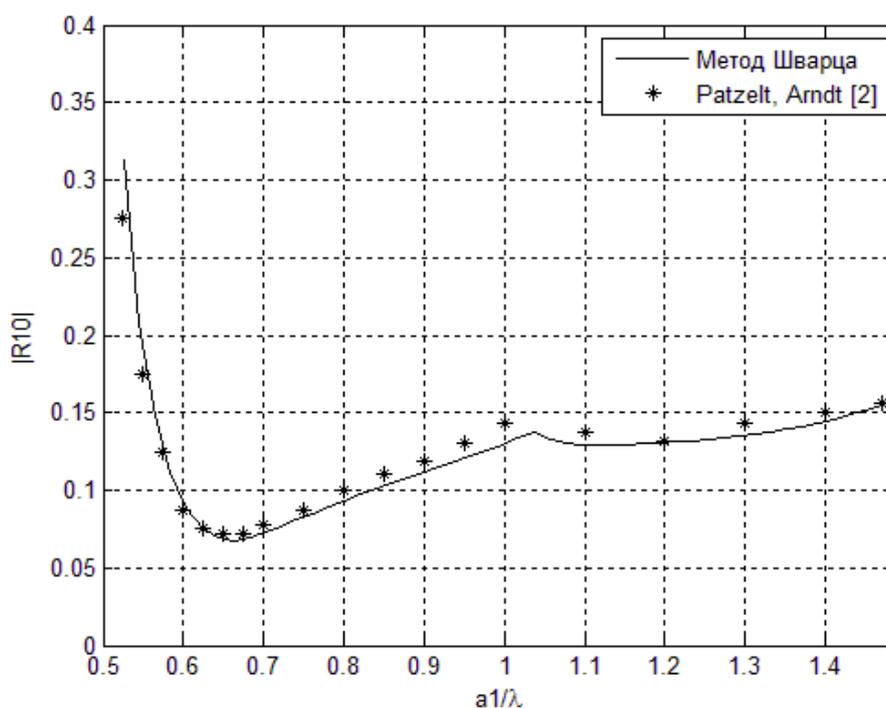


Рис. 2

Выводы

Рассмотрено построение электродинамического алгоритма решения методом Шварца задачи дифракции электромагнитной волны на соосном соединении двух прямоугольных волноводов различного поперечного сечения. Получена формула для k -й итерации определения комплексного коэффициента отражения волны H_{10} . Приведены результаты численных расчетов зависимости модуля коэффициента отражения от отношения a_1/λ и сравнение с известными данными. Представлена численная сходимость алгоритма при $a_1/\lambda=0.59$.

Список литературы: 1. Ise K., Inoue K., Koshiba M. Three-Dimensional Finite-Element Method with Edge Elements for Electromagnetic Waveguide Discontinuities // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1991. Vol. 39. № 8. pp 1289 – 1295. 2. Patzelt H., Arndt F. Double-Plane Steps in Rectangular Waveguides and their Application for Transformers, Irises, and Filters // IEEE Transactions on Micro-

wave Theory and Techniques. 1982. Vol. 30. № 5. pp 771 – 776. 3. *Stevanovic I., Crespo-Valero P., Mosig J. R.* An Integral-Equation Technique for Solving Thick Irises in Rectangular Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1982. – Vol. 30. – № 5. – pp 771 – 776. 4. *Mosig J. R.* Scattering by arbitrarily-shaped slots in thick conducting screens: an approximate solution // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2004. – Vol. 52. – pp. 2109-2117. 5. *Stevanovic I., Mosig J. R.* Efficient electromagnetic analysis of line-fed aperture antennas in thick conducting screens // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 2004. – Vol. 52. – pp. 2896 – 2903. 6. *Прохода И. Г., Дмитрюк С. Г., Морозов В. М.* Тензорные функции Грина и их приложения в электродинамике СВЧ. Днепропетровск : ДГУ, 1985. 64 с. 7. *Tai C. T.* Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. Second Edition. New York: IEEE Press, 1994. 343 p. 8. *Марков Г. Т. Васильев Е. Н.* Математические методы прикладной электродинамики. – М. : Сов. радио, 1970. – 120 с.

*Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара*

Поступила в редколлегию 04.06.2013