

Шифр «MST MVT»

МУЛЬТИВАРІАНТНЕ ТЕСТУВАННЯ ЦІЛЬОВОЇ СТОРІНКИ САЙТУ

Анотація

Актуальність роботи. Діяльність кожної компанії направлена на отримання прибутку. В умовах, коли значна частина цільової аудиторії здобуває інформацію про продукти та послуги через інтернет і робить покупки онлайн, кожній компанії важливо мати ефективний сайт. З метою збільшення прибутку сайт компанії підлягає постійній оптимізації. Об'єктом оптимізації є коефіцієнт конверсії – процент відвідувачів сайту, які виконали певну цільову дію, що є бажаною для власника сайту. Одним із способів оптимізації коефіцієнту конверсії є проведення мультिवаріантного тестування. Побудова адекватної математичної моделі мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту є актуальною задачею електронної комерції.

Мета роботи. Побудова математичних моделей мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту при частотному та байєсівському методах статистичного оцінювання, на яких базуються сучасні системи прийняття рішень та аналізу даних.

Завдання роботи. Розробка алгоритмів мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту. Створення програмного забезпечення мультिवаріантного тестування та візуалізації виконання цільової дії відвідувачами під час тестування.

Методика дослідження. В роботі застосовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики, статистичного моделювання, програмування на мові R.

Загальна характеристика роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури. Повний обсяг роботи становить 30 сторінок. В роботі 12 рисунків, 2 таблиці. Список використаної літератури складається з 9 найменувань.

Зміст

Вступ.....	3
Розділ 1. Математична модель частотного тестування.....	4
1.2. Z -критерій для двох часток	4
1.3. Число унікальних відвідувачів, необхідне для тестування.....	5
1.4. Реалізація А/В тестування.....	5
1.5. Реалізація мультиваріантного тестування.....	8
Розділ 2. Математична модель байєсівського тестування	14
2.1. Математична постановка задачі	14
2.2. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей	15
2.3. Обчислення ймовірності $P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\}$	16
2.4. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$	17
2.5. Реалізація байєсівського тестування	19
Список використаної літератури	29

ВСТУП

Оптимізація цільової сторінки – процес вдосконалення елементів цільової сторінки з метою максимізації коефіцієнту конверсії. На цільовій сторінці сайту обирається декілька елементів та створюються їхні модифікації. Далі утворюються усі можливі комбінації модифікацій цих елементів, тим самим створюються варіації сторінки. Потік відвідувачів рівномірно розподіляється між варіаціями цільової сторінки. Кожному відвідувачу пропонується до перегляду одна з таких варіацій та відслідковується поведінка відвідувача: відвідувач виконав цільову дію чи ні. При мультिवаріантному тестуванні одночасно тестуються усі можливі комбінації елементів цільової сторінки, що дозволяє оцінити вплив кожного елементу та їх взаємодію на коефіцієнт конверсії. За результатами тестування обирають варіацію цільової сторінки (оптимальну комбінацію елементів), яка здобула найбільший коефіцієнт конверсії. Математичною основою мультिवаріантного тестування є теорія ймовірностей та математична статистика.

В роботі використовується термінологія електронної комерції. Цільова сторінка – сторінка, на яку переходить відвідувач, залучений за допомогою реклами, систем пошуку, поштової розсилки. Заклик до дії – елемент цільової сторінки (кнопка, текстове посилання, зображення), який спонукає відвідувача на цільову дію. Цільова дія – дія відвідувача, яка значуща для власника сайту (скачування безкоштовного контенту, реєстрація, підписка на розсилку, покупка товару, заказ послуги). Унікальний відвідувач – відвідувач з унікальними характеристиками (IP-адреса, браузер, реєстраційні дані), який зайшов на цільову сторінку протягом деякого проміжку часу (доба/тиждень/місяць). Користувач – відвідувач, який взаємодіє з цільовою сторінкою. Оригінальна сторінка – базовий варіант цільової сторінки. Варіація – альтернативний варіант цільової сторінки. Конверсія – цільова дія, яку відвідувач виконав на сторінці сайту. Коефіцієнт конверсії – відношення числа конверсій до загальної кількості відвідувачів.

Розділ 1. Математична модель частотного тестування

1.1. Постановка задачі

Нехай в m групах відвідувачів проводяться незалежні випробування Бернуллі з імовірністю успіху p_1, \dots, p_m в кожній групі в одному випробуванні. Імовірності успіху p_1, \dots, p_m невідомі. Нехай перша група є базовою (baseline). Відносно невідомих параметрів висувуються нульові гіпотези $H_0^{ij}: p_i = p_j$, $i = 1, j = 2, \dots, m$ – базова та j -та групи мають однакову ймовірність успіху (базова група та j -та група мають однакові коефіцієнти конверсії). Альтернативні гіпотези двосторонні: $H_0^{ij}: p_i \neq p_j$. Необхідно за реалізаціями вибірок з розподілів Бернуллі з параметрами p_1, \dots, p_m дійти висновку – відхиляти $H_0^{ij}: p_i = p_j$ чи ні.

1.2. Z-критерій для двох часток

Частоти успіхів $\hat{p}_i = \mu_i/n_i, \hat{p}_j = \mu_j/n_j$ є незміщеними, спроможними оцінками параметрів p_i, p_j . В якості об'єднаної частоти успіху виступає оцінка

$$\hat{p} = \frac{\hat{p}_i n_i + \hat{p}_j n_j}{n_i + n_j}.$$

Для перевірки нульових гіпотез скористаємося z-критерієм. Якщо гіпотезу $H_0^{ij}: p_i = p_j$ відхиляти при

$$Z = \frac{|\hat{p}_i - \hat{p}_j|}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}} \geq z_{1-\alpha/2},$$

або, що те ж саме при

$$\hat{p}_i - \hat{p}_j \notin \left(-z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}, z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \right),$$

або, що те ж саме при

$$p_{ij} = P\{Z \geq z | H_0^{ij}\} = 2(1 - N_{0,1}(z)) \leq \alpha,$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю α гіпотеза буде відхилятися, коли вона справедлива (альтернатива двостороння $H_0^{ij}: p_i \neq p_j$), $z_{1-\alpha/2} - (1 - \alpha/2)$ – квантиль стандартного нормального розподілу.

1.3. Число унікальних відвідувачів, необхідне для тестування

Мінімальний обсяг вибірки для групи, який забезпечує задані ймовірність помилки першого роду α , потужність критерію $1 - \beta$, різницю коефіцієнтів конверсії θ та базовий коефіцієнт конверсії \hat{p} при перевірці простої гіпотези $H_0^{ij}: p_i = p_j$ проти простої альтернативи $H_1^{ij}: p_i \neq p_j$:

$$n \approx \frac{2(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{\theta^2}.$$

Число унікальних відвідувачів, необхідне для проведення тестування, дорівнює tn .

1.4. Реалізація А/В тестування

Розглянемо частинний випадок мультिवаріантного тестування – А/В-тестування. При А/В тестуванні першій (базовій) групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку А, другій (експериментальній) групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку В (варіацію сторінки А). Для збереження чистоти експерименту необхідно ідентифікувати відвідувачів під час А/В тестування та при повторних відвідуваннях сайту пропонувати їм до перегляду ту саму сторінку А або В, яку вони бачили попереднього разу.

Висувається нульова гіпотеза про однаковий рівень конверсії в обох групах $H_0^{12}: p_1 = p_2$. Моделюється потік відвідувачів. Кожен відвідувач з імовірністю $1/2$ може потрапити до першої групи й з імовірністю $1/2$ може потрапити до другої групи. Після того, як відвідувач опинився в одній

із двох груп, моделюється його поведінка. Поведінка відвідувача однозначно визначається двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в першій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю p_1 . Якщо відвідувач опинився в другій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю p_2 . Для перевірки гіпотези $H_0^{12}: p_1 = p_2$ скористаємося z -критерієм для двох часток.

Спочатку проведемо А/А тестування, тобто порівняємо одну й ту ж цільову сторінку з метою перевірки точності інструменту тестування.

На рисунку 1.4.1 зображено результат реалізації А/А тестування при параметрах $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,1$. Знаходження траєкторії в межах довірчого інтервалу означає невідхилення нульової гіпотези $H_0^{12}: p_1 = p_2$. Коефіцієнти конверсії в першій та другій групах однакові.

На рисунку 1.4.2 зображено результат реалізації А/А тестування при параметрах $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,1$. Перетин траєкторією межі довірчого інтервалу – помилка першого роду (нульова гіпотеза $H_0^{12}: p_1 = p_2$ відхиляється, коли вона справедлива).

На рисунку 1.4.3 зображено результат реалізації А/В тестування при параметрах $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,1$, $\theta = 0,02$. Мінімальне число унікальних відвідувачів базової групи дорівнює

$$n \approx \frac{2(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{\theta^2} = \frac{2(1,96 + 0,84)^2 \cdot 0,1 \cdot 0,9}{0,02^2} = 3532.$$

Знаходження траєкторії поза межами довірчого інтервалу при мінімальному числі унікальних відвідувачів $n = 3532$ в одній із груп означає відхилення гіпотези $H_0^{12}: p_1 = p_2$. Коефіцієнти конверсії в першій та другій групах різні.

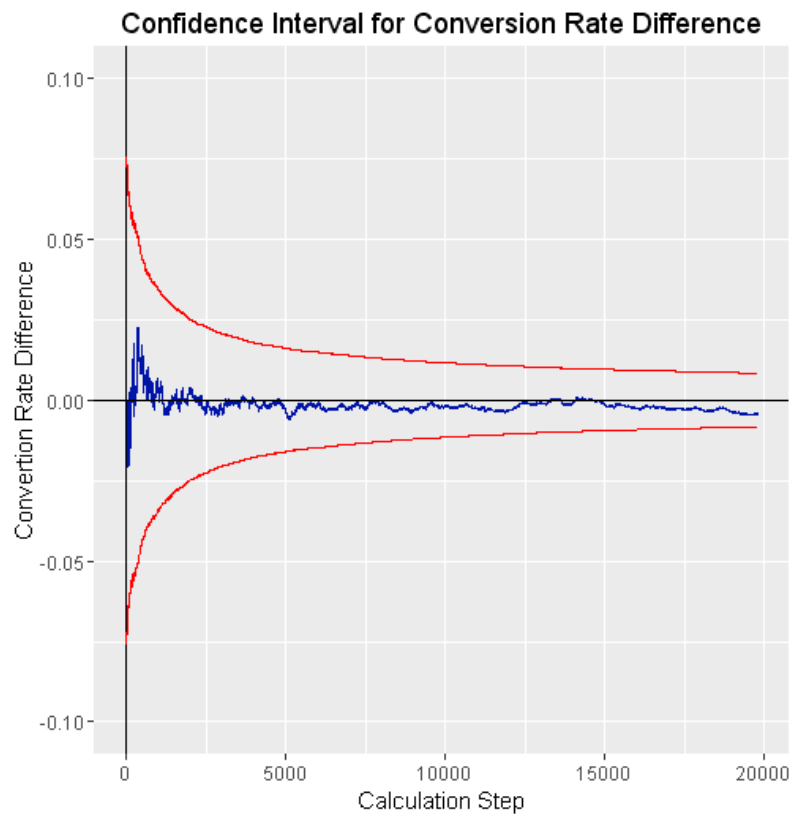


Рис. 1.4.1. Довірчий інтервал для різниці коефіцієнтів конверсії

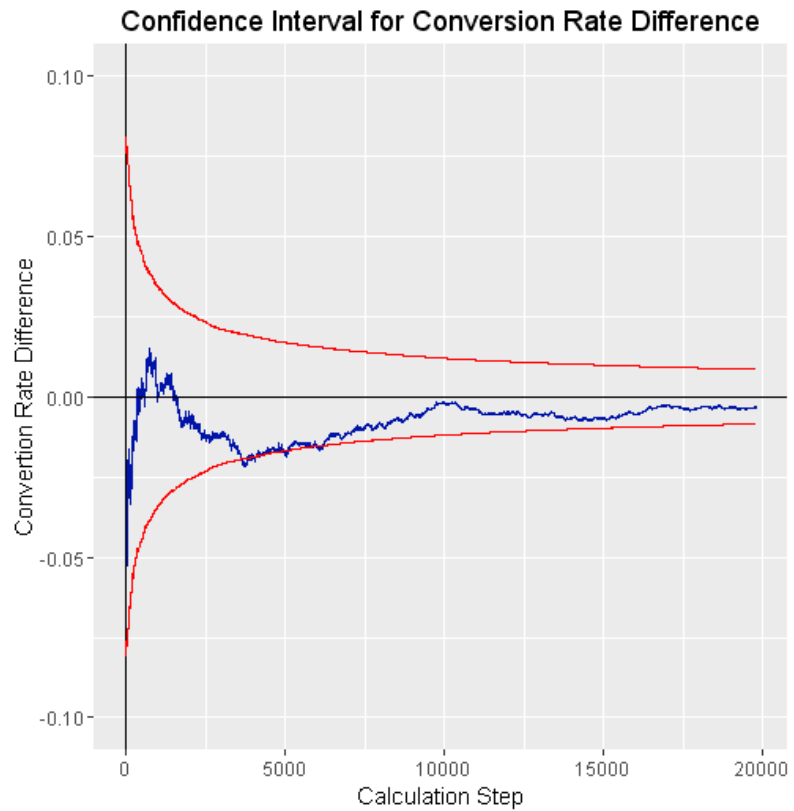


Рис. 1.4.2. Довірчий інтервал для різниці коефіцієнтів конверсії

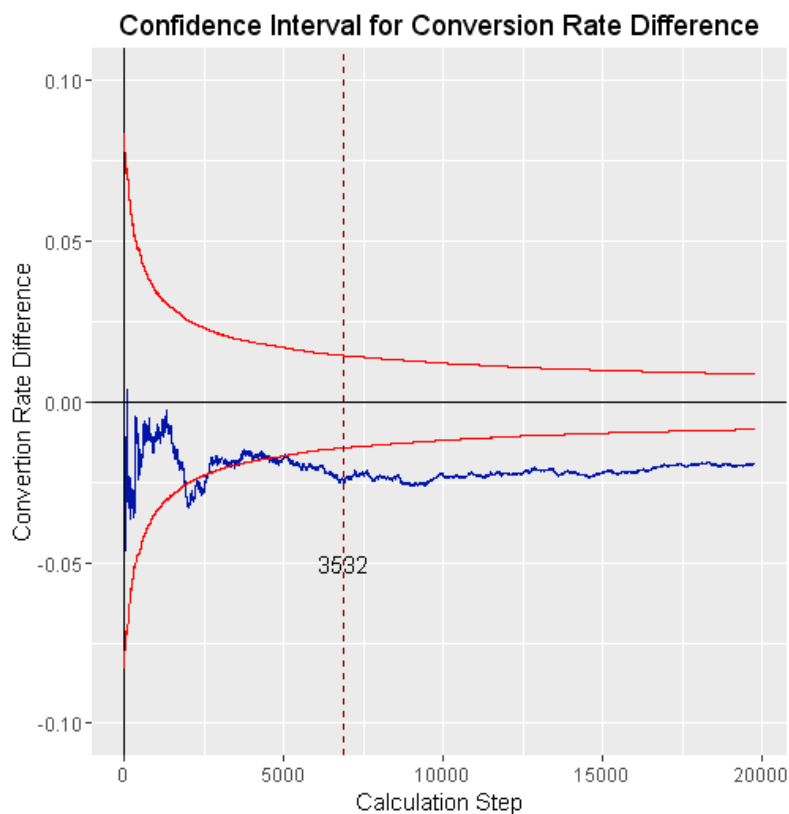


Рис. 1.4.3. Довірчий інтервал для різниці коефіцієнтів конверсії

1.5. Реалізація мультिवаріантного тестування

При мультिवаріантному тестуванні одночасно тестуються усі можливі комбінації елементів сторінки та оцінюється вплив кожного елементу та їх взаємодія на рівень конверсії. Групам відвідувачів для перегляду пропонують сторінки A_1, A_2, \dots, A_m . Для збереження чистоти експерименту необхідно ідентифікувати відвідувачів під час тестування та при повторних відвідуваннях сайту пропонувати їм до перегляду ту саму сторінку, яку вони бачили попереднього разу.

Висувається $m - 1$ нульова гіпотеза про однаковий рівень конверсії в базовій та j -тій групах, $j = 2, \dots, m$. Моделюється потік відвідувачів сайту. Кожен відвідувач з імовірністю $1/m$ може потрапити на одну зі сторінок. Після того, як відвідувач опинився на одній із сторінок, моделюється його поведінка. Поведінка відвідувача однозначно визначається двома подіями: успіх –

відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувачу запропоновано для перегляду сторінка A_i , то подія успіх відбувається з імовірністю p_i .

При перевірці однієї нульової гіпотези $H_0^{ij}: p_i = p_j$ ймовірність помилки першого роду обмежена зверху рівнем значущості α . Тоді при одночасній перевірці $m - 1$ нульових гіпотез $H_0^{ij}: p_i = p_j$ ймовірність припустити принаймні одну помилку першого роду обмежена зверху величиною $1 - (1 - \alpha)^{m-1}$, яка стає досить великою при достатньо малих m . Для усунення цього ефекту – ефекту множинних порівнянь – використовується низка статистичних процедур, які різняться своєю потужністю та умовами застосування в різних ситуаціях.

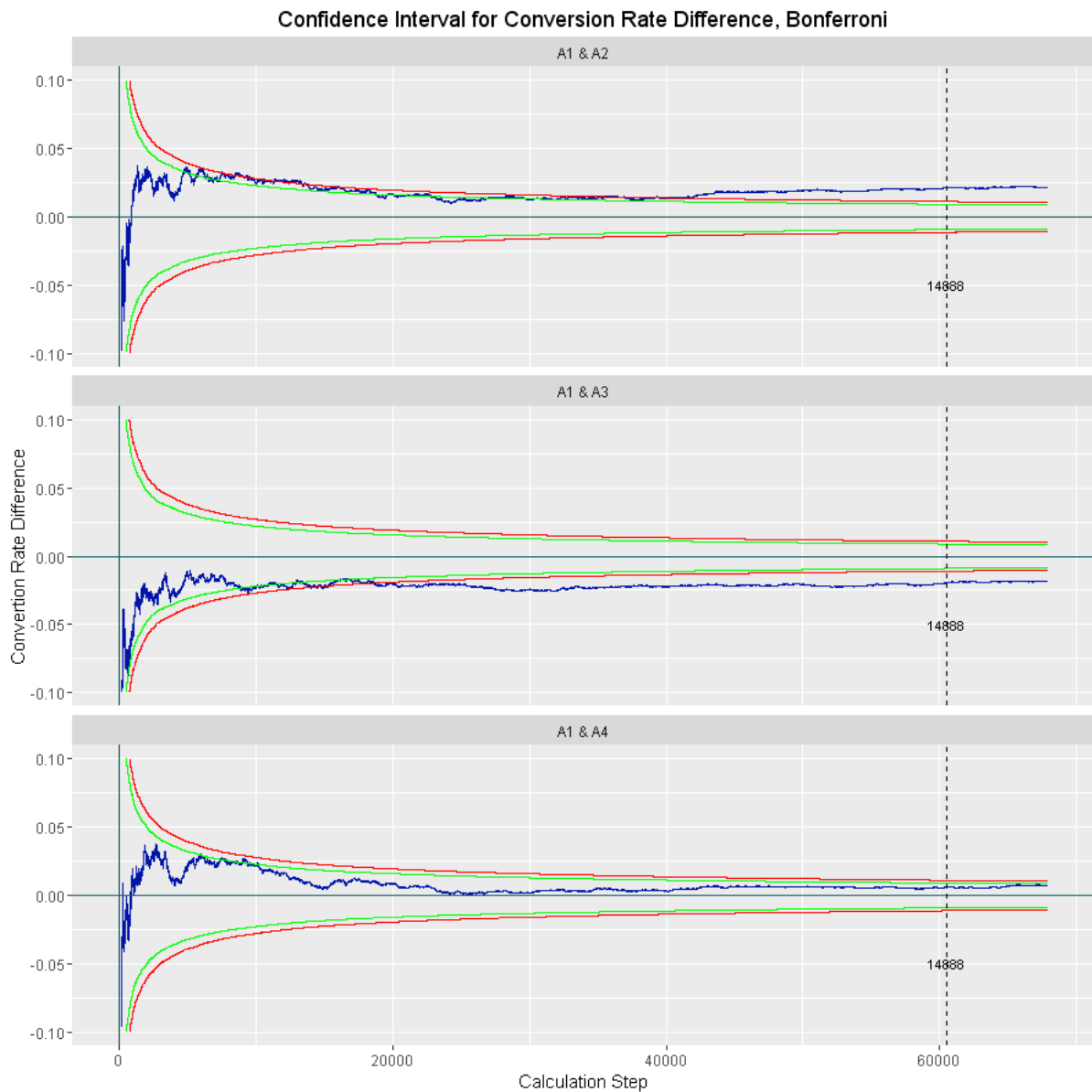
На рис. 1.5.1 зображено реалізацію мультиваріантного тестування при таких параметрах: $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,2$, $\theta = 0,015$. Для контролю $FWER$ використано метод Бонферроні ($\alpha_i = 0,05/3$, $i = 1,2,3$). Мінімальне число унікальних відвідувачів базової групи є розв'язком рівняння:

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(1 - N_{0;1} \left(z_{1-\alpha_i/2} - \frac{\theta}{SE} \right) \right) = 1 - \beta.$$

Знаходження різниці коефіцієнтів конверсії поза межами довірчого інтервалу при числі відвідувачів $n = 14888$ означає відхилення гіпотези H_0^{ij} . Довірчі інтервали з поправкою Бонферроні зображено червоним кольором. Довірчі інтервали без поправки зображено зеленим кольором.

Метод Бонферроні – універсальний метод, він не залежить від характеру гіпотез, що перевіряються, та їх взаємозв'язків. Але цей метод має суттєвий недолік: потужність методу знижується, якщо число статистичних гіпотез, що перевіряються, збільшується.

На рис. 1.5.2 зображено реалізацію мультиваріантного тестування при таких параметрах: $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,2$, $\theta = 0,015$. Для контролю $FWER$ використано метод Шидака ($\alpha_i = 1 - (1 - 0,05)^{1/3}$, $i = 1,2,3$).

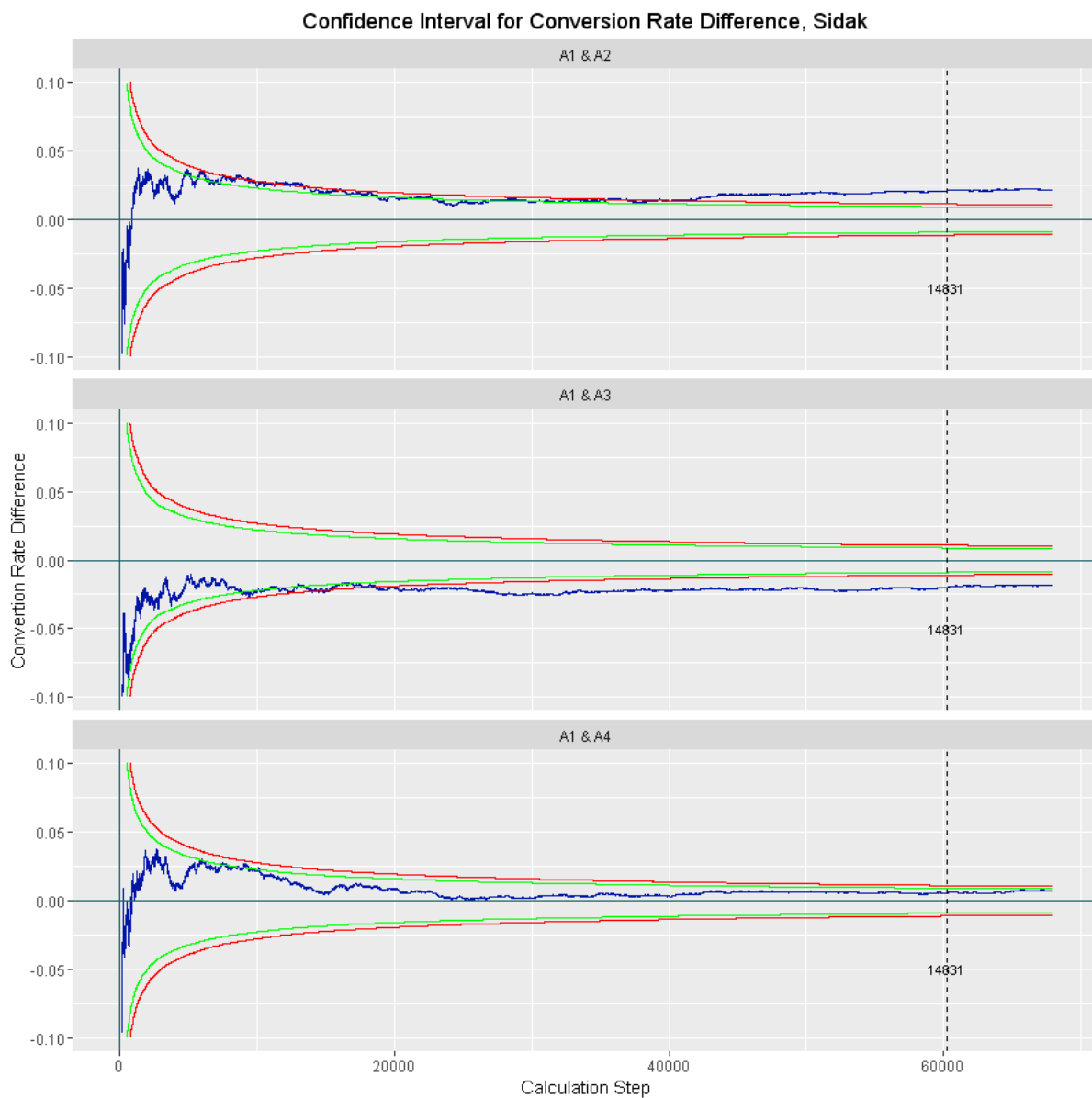


1.5.1. Довірчі інтервали для різниці коефіцієнтів конверсії

Мінімальне число унікальних відвідувачів базової групи є розв'язком рівняння:

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(1 - N_{0;1} \left(z_{1-\alpha_i/2} - \frac{\theta}{SE} \right) \right) = 1 - \beta.$$

Знаходження різниці коефіцієнтів конверсії поза межами довірчого інтервалу при числі відвідувачів $n = 14831$ означає відхилення гіпотези H_0^{ij} . Довірчі інтервали з поправкою Шідака зображено червоним кольором. Довірчі інтервали без поправки зображено зеленим кольором.



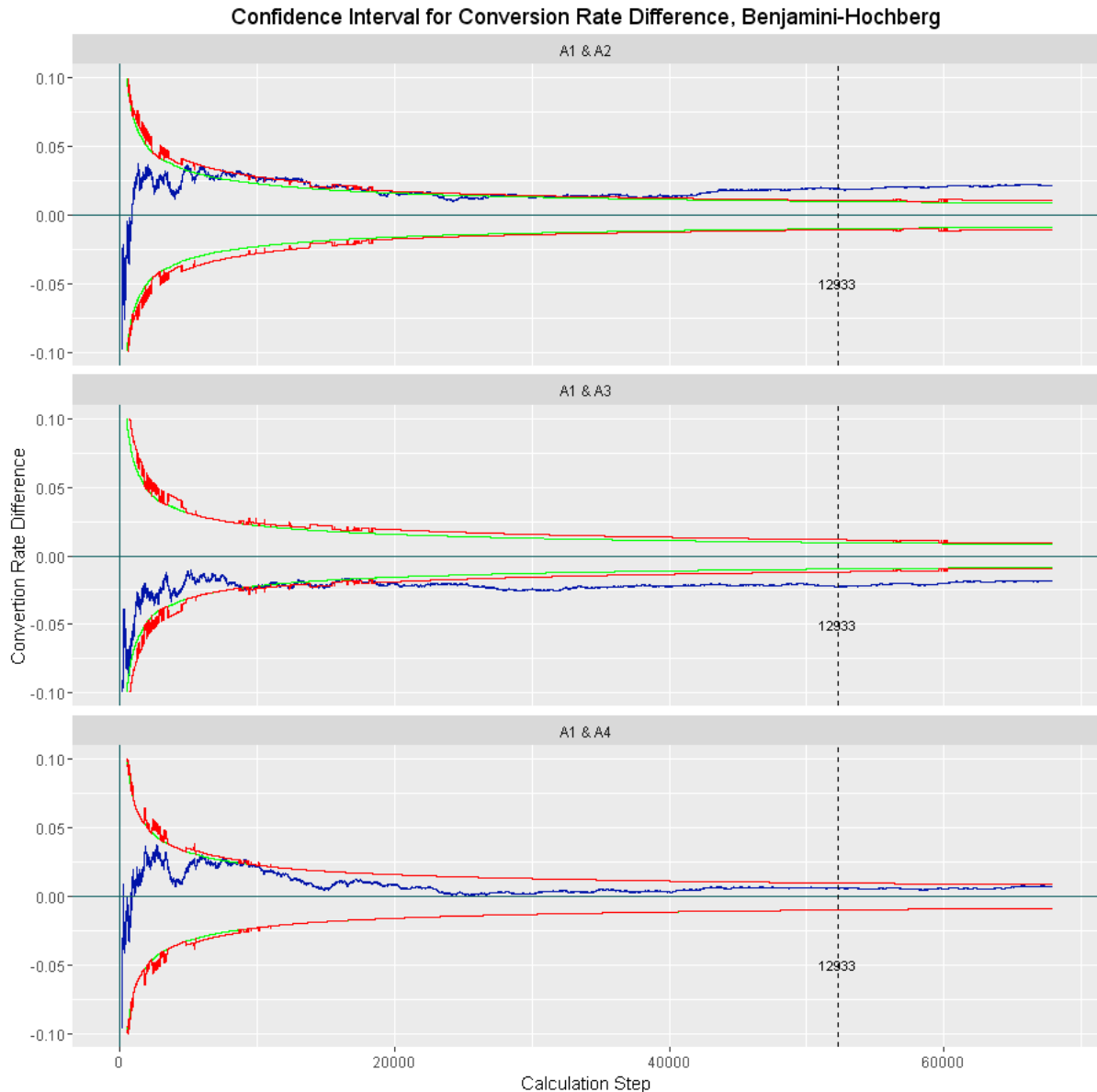
1.5.2. Довірчі інтервали для різниці коефіцієнтів конверсії

На рис. 1.5.3 зображено реалізацію мультिवаріантного тестування при таких параметрах: $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,2$, $\theta = 0,015$. Для контролю False Discovery Rate було використано поправку Бенджаміні-Хохберга ($\alpha_1 = 0,05/3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 0,05/3$, $\alpha_3 = 0,05$). Мінімальне число унікальних відвідувачів базової групи є розв'язком рівняння:

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(1 - N_{0,1} \left(z_{1-\alpha_i/2} - \frac{\theta}{SE} \right) \right) = 1 - \beta.$$

Знаходження різниці коефіцієнтів конверсії поза межами довірчого інтервалу при числі відвідувачів $n = 12933$ означає відхилення гіпотези H_0^{ij} . Довірчі

інтервали з поправкою Бенджаміні-Хохберга зображено червоним кольором. Довірчі інтервали без поправки зображено зеленим кольором. Довірчі інтервали не є монотонними, це пов'язано зі статистичною процедурою методу.



1.5.3. Довірчі інтервали для різниці коефіцієнтів конверсії

Результати тестування при параметрах $\beta = 0,2$, $\hat{p} = 0,2$, $\theta = 0,015$ наведено в таблиці 1.5.1. Статистична значущість Statistical Significance – це імовірність того, що різниця в коефіцієнтах конверсії між базовою та j -тою варіацією цільової сторінки не випадкова.

Переможцем є варіація цільової сторінки обрана згідно з метрикою Improvement (покращення – це відносна різниця у вдосконаленні варіації цільової сторінки відносно базового варіанту цільової сторінки):

$$Improvement = \frac{Variation\ Conv.\ Rate\ \% - Baseline\ Conv.\ Rate\ \%}{Baseline\ Conv.\ Rate\ \%}$$

Таблиця 1.5.1. Результати мультиваріантного тестування

Hypothesis	Conv.Rate	Improvement	Multiple Comparison Adjustment Method		
			Bonferroni	Šidák	Benjamini Hochberg
			Statistical Significance		
H_0^{12}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_2 = 0,2249$	8,75 %	0,9972	-	-
H_0^{13}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_3 = 0,1852$	-10,44 %	0,9998	-	-
H_0^{14}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_4 = 0,2132$	3,09 %	0,3059	-	-
H_0^{12}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_2 = 0,2249$	8,75 %	-	0,9998	-
H_0^{13}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_3 = 0,1852$	-10,44 %	-	0,9973	-
H_0^{14}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_4 = 0,2132$	3,09 %	-	0,4541	-
H_0^{12}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_2 = 0,2249$	8,75 %	-	-	0,9991
H_0^{13}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_3 = 0,1852$	-10,44 %	-	-	0,9999
H_0^{14}	$\hat{p}_1 = 0,2068$ $\hat{p}_4 = 0,2132$	3,09 %	-	-	0,7686

Переможцем стала варіація цільової сторінки з коефіцієнтом конверсії 22,49% та покращенням 8,75%. Множинні порівняння із застосуванням методу Бенджаміні-Хохберга призводять до найменших допустимих помилок при відхиленні нульових гіпотез H_0^{ij} , а саме 0,0009; 0,0001 для гіпотез H_0^{12} , H_0^{13} відповідно.

Розділ 2. Математична модель байєсівського тестування

2.1. Математична постановка задачі

Нехай в трьох групах відвідувачів (А, В та С) проводяться незалежні випробування Бернуллі з імовірностями успіху $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ в кожній групі в одному випробуванні. Ймовірності успіху (коефіцієнти конверсії) $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ невідомі випадкові величини.

Щільність $p(\theta_A)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A , щільність $p(\theta_B)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B , щільність $p(\theta_C)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C , щільність $p(\theta_A|x_1, x_2, \dots, x_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A за умови заданого вибіркового вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, щільність $p(\theta_B|y_1, y_2, \dots, y_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B за умови заданого вибіркового вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, щільність $p(\theta_C|z_1, z_2, \dots, z_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C за умови заданого вибіркового вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Функція втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$ характеризує втрати внаслідок неправильно прийнятого рішення щодо вибору варіанту сторінки для розміщення на сайті. Функція втрат дорівнює

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \max \{ \theta_B - \theta_A, \theta_C - \theta_A, 0 \}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А,

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) = \max \{ \theta_A - \theta_B, \theta_C - \theta_B, 0 \}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В,

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) = \max \{ \theta_A - \theta_C, \theta_B - \theta_C, 0 \}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С.

Необхідно знайти точкові байєсівські оцінки $\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C$ імовірностей успіху $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ відносно функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$.

Обчислити ймовірності $P\{\theta_A > \max \{ \theta_B, \theta_C \}\}$, $P\{\theta_B > \max \{ \theta_A, \theta_C \}\}$, $P\{\theta_C > \max \{ \theta_A, \theta_B \}\}$.

2.2. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей

Нехай в групі А проводяться незалежні випробування Бернуллі з двома наслідками: $\{x = 1\}$ – успіх, $\{x = 0\}$ – неуспіх. Число успіхів в одному випробуванні має розподіл Бернуллі з параметром θ_A :

$$P(x, \theta_A) = \theta_A^x (1 - \theta_A)^{1-x}, x = 0, 1; 0 < \theta_A < 1.$$

Функція максимальної правдоподібності задається рівністю

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A) &= \theta_A^{x_1} (1 - \theta_A)^{1-x_1} \dots \theta_A^{x_n} (1 - \theta_A)^{1-x_n} = \\ &= \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

Апріорна інформація щодо імовірності успіху θ_A задана щільністю бета-розподілу з параметрами (a, b) :

$$p(\theta_A) = \frac{\theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1}}{B(a, b)}, 0 \leq \theta_A \leq 1.$$

Згідно з теоремою Байеса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A дорівнює

$$\begin{aligned} p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{p(\theta_A) p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A)}{\int_0^1 p(\theta_A) p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A) d\theta_A}, \\ p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1} \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^1 \theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1} \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} d\theta_A}, \\ p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\theta_A^{a + \sum_{i=1}^n x_i - 1} (1 - \theta_A)^{b + n - \sum_{i=1}^n x_i - 1}}{B(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i)}, \end{aligned}$$

отже, апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A – щільність бета-розподілу з параметрами (\tilde{a}, \tilde{b}) :

$$p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\theta_A^{\tilde{a}-1} (1 - \theta_A)^{\tilde{b}-1}}{B(\tilde{a}, \tilde{b})},$$

де

$$\tilde{a} = a + \sum_{i=1}^n x_i, \quad \tilde{b} = b + n - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Аналогічно, розглянувши незалежні випробування Бернуллі з наслідками $\{y = 1\}$ – успіх, $\{y = 0\}$ – неуспіх в групі В та $\{z = 1\}$ – успіх, $\{z = 0\}$ – неуспіх в групі С отримуємо, що апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B – щільність бета-розподілу з параметрами (\tilde{c}, \tilde{d}) :

$$p(\theta_B | y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\theta_B^{\tilde{c}-1} (1 - \theta_B)^{\tilde{d}-1}}{B(\tilde{c}, \tilde{d})},$$

де

$$\tilde{c} = c + \sum_{i=1}^n y_i, \quad \tilde{d} = d + n - \sum_{i=1}^n y_i,$$

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C – щільність бета-розподілу з параметрами (\tilde{e}, \tilde{f}) :

$$p(\theta_C | z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\theta_C^{\tilde{e}-1} (1 - \theta_C)^{\tilde{f}-1}}{B(\tilde{e}, \tilde{f})},$$

де

$$\tilde{e} = e + \sum_{i=1}^n z_i, \quad \tilde{f} = f + n - \sum_{i=1}^n z_i.$$

2.3. Обчислення ймовірності $P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\}$

Спільна щільність розподілу ймовірностей успіхів в трьох групах А, В, С дорівнює добутку щільності розподілу ймовірності успіху в групі А, щільності розподілу ймовірності успіху в групі В та щільності розподілу ймовірності успіху в групі С:

$$p(\theta_A, \theta_B, \theta_C; a, b, c, d, e, f) = p(\theta_A; a, b)p(\theta_B; c, d)p(\theta_C; e, f).$$

Обчислимо ймовірність того, що ймовірність успіху в групі С більша за ймовірності успіху в групі А та групі В:

$$\begin{aligned} P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} &= P\{\theta_C > \theta_A, \theta_C > \theta_B\} = \\ &= P\{\theta_C - \theta_A > 0, \theta_C - \theta_B > 0\} = 1 - P\{\theta_B > \theta_C\} - P\{\theta_A > \theta_C\} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)}.$$

2.4. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$

Математичне сподівання (середнє значення) функції втрат дорівнює

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, A) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А,

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, B) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В,

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, C) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С.

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А:

$$\begin{aligned} & ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \\ &= \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c+1, d)) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, c, d)) - \\ & - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+1+i, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c+1, d)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f)) + \\ & + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a+1, b, c+i, d+f)) + \\ & + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f)) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) - \\ & - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+1+i, b+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+1+i, b+f, c, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(c+i, d+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a, b, c+i, d+f)) - \\
& - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i, d+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a+1, b, c+i, d+f)).
\end{aligned}$$

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В:

$$\begin{aligned}
ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) & = \\
& = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} h(a+1, b, c, d) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) + \\
& + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i+1, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+i+1, b+f, c, d)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} h(a, b, c+1, d) + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, e, f)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c+1, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f)) - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, e, f)) - \\
& - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \\
& + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c+1, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(c+i, d+f)}{B(c, d)(i+f)B(i+1, f)} (1 - h(a, b, c+i, d+f)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i+1, d+f)}{B(c+1, d)(i+f)B(i+1, f)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f))
\end{aligned}$$

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С:

$$\begin{aligned}
 ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) = & \\
 = & \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} h(a+1, b, c, d) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) + \\
 & + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i+1, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+i+1, b+f, c, d)) - \\
 & - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, c, d)) + \\
 & + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f)) - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, c, d)) - \\
 & - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \\
 & + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c+1, d)) - \\
 & - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i+1, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f)) - \\
 & + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \sum_{j=0}^{c+i-1} \frac{B(c+i, d+f)B(a+j, d+f+b)}{B(a, b)(i+f)B(i+1, f)B(c, d)(j+d+f)B(j+1, d+f)}.
 \end{aligned}$$

2.5. Реалізація байєсівського тестування

При А/В/С тестуванні першій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку А, другій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку В, третій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку С.

Для збереження чистоти експерименту необхідно ідентифікувати відвідувачів під час тестування та при повторних відвідуваннях сайту пропонувати їм до перегляду ту саму сторінку А, або В, або С, яку вони бачили попереднього разу.

Моделюється потік відвідувачів. Кожен відвідувач з імовірністю 1/3 може потрапити до першої групи, з імовірністю 1/3 може потрапити до другої

групи, з імовірністю $1/3$ може потрапити до третьої групи. Після того, як відвідувач опинився в одній із трьох груп, моделюється його поведінка. Поведінка відвідувача однозначно визначається двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в першій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_A . Якщо відвідувач опинився в другій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_B . Якщо відвідувач опинився в третій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_C .

Апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_A подана щільністю бета-розподілу з параметрами (a, b) , апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_B подана щільністю бета-розподілу з параметрами (c, d) , апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_C подана щільністю бета-розподілу з параметрами (e, f) .

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{a} = a + x_i, \quad \tilde{b} = b + (1 - x_i),$$

де x_i – число успіхів в одному випробуванні ($x_i = 0$ або 1),

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{c} = c + y_i, \quad \tilde{d} = d + (1 - y_i),$$

де y_i – число успіхів в одному випробуванні ($y_i = 0$ або 1),

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{e} = e + z_i, \quad \tilde{f} = f + (1 - z_i),$$

де z_i – число успіхів в одному випробуванні ($z_i = 0$ або 1).

Імовірність того, що ймовірність успіху в групі А більша за ймовірності успіху в групі В та групі С дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 1 - P\{\theta_B > \theta_A\} - P\{\theta_C > \theta_A\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{c-1} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{B(i+j+a, b+d+f)}{(d+i)(f+j)B(1+i, d)B(1+j, f)B(a, b)}.$$

Ймовірність того, що ймовірність успіху в групі В більша за ймовірності успіху в групі А та групі С дорівнює

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 1 - P\{\theta_A > \theta_B\} - P\{\theta_C > \theta_B\} + \\ + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{B(i+j+c, b+d+f)}{(b+i)(f+j)B(1+i, b)B(1+j, f)B(c, d)}.$$

Ймовірність того, що ймовірність успіху в групі С більша за ймовірності успіху в групі А та групі В дорівнює

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 1 - P\{\theta_A > \theta_C\} - P\{\theta_B > \theta_C\} + \\ + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)}.$$

Математичні сподівання функцій втрат порівнюються із рівнем допустимих втрат ε після кожного відвідування сторінки А або В або С. Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) \leq \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) > \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі А, обирається для розміщення на сайті.

Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) \leq \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) > \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті.

Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) \leq \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі С, обирається для розміщення на сайті.

На рисунках 2.5.1–2.5.5 зображено процес реалізації тестування.

На рисунку 2.5.1 наведені апріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена

блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,33,$$

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,33,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,33.$$

На рисунку 2.5.2 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 7, b = 3$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 6, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 5$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,39,$$

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,6,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,01.$$

На рисунку 2.5.3 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 9, b = 5$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 7, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 9$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,22,$$

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,778,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,002.$$

На рисунку 2.5.4 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 13, b = 6$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 10, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 10$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,151,$$

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,848,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,001.$$

На рисунку 2.5.5 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 16, b = 9$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 14, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 7, f = 17$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\hat{\theta}_A > \max\{\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C\}\} = 0,03,$$

$$P\{\hat{\theta}_B > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_C\}\} = 0,97,$$

$$P\{\hat{\theta}_C > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B\}\} = 9,65 \cdot 10^{-6}.$$

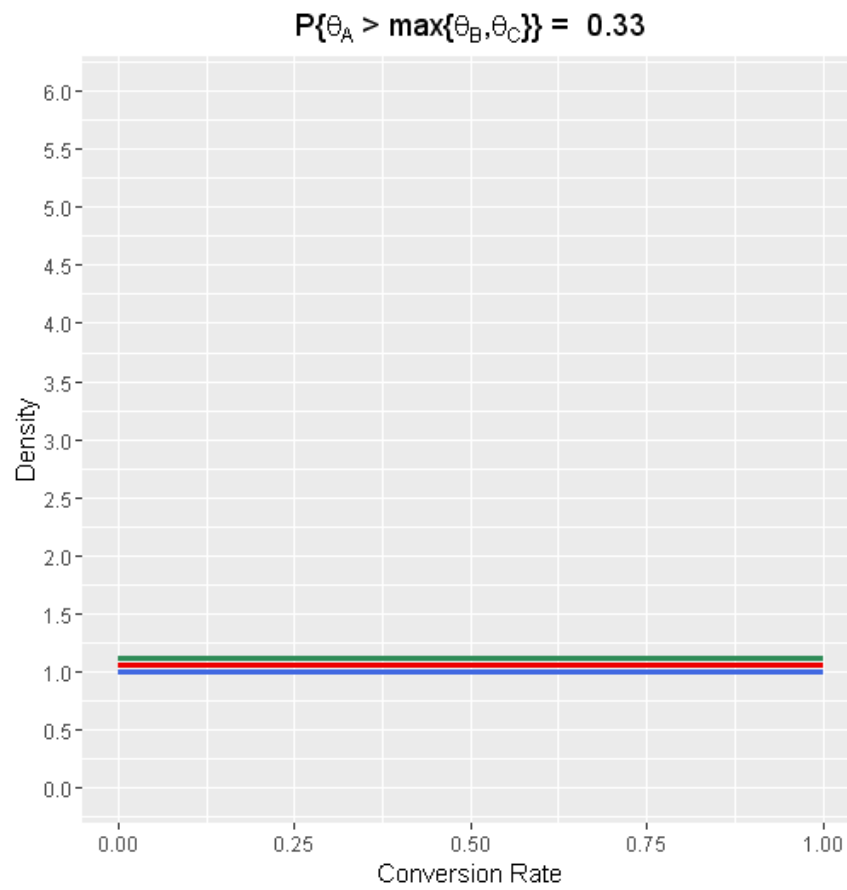


Рис. 2.5.1. Апріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

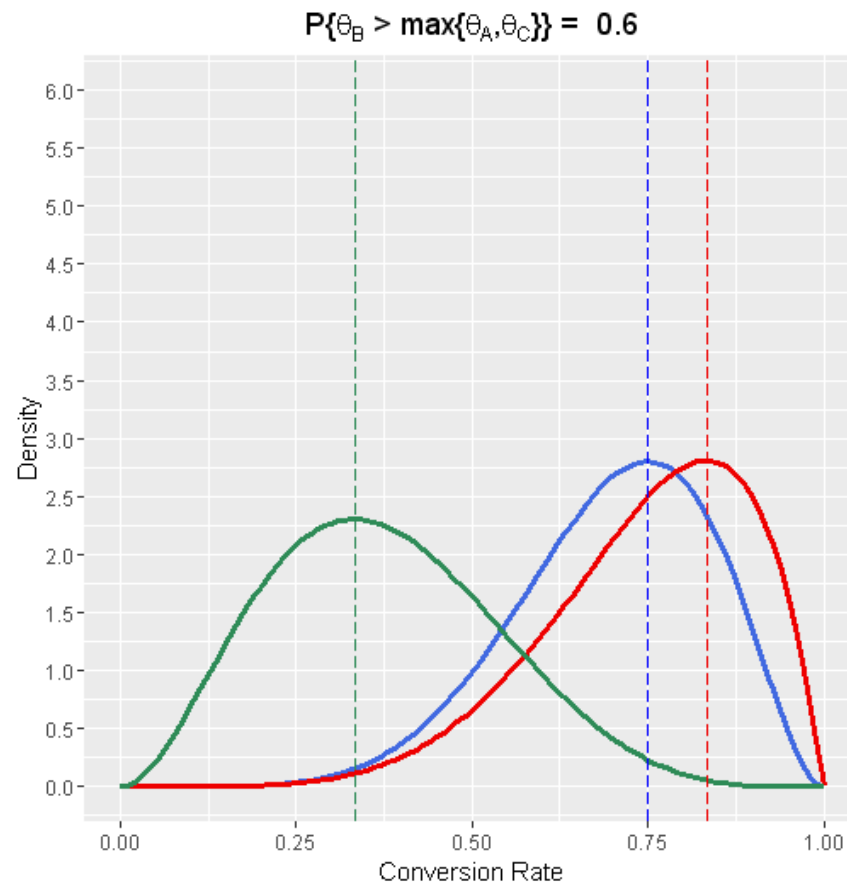


Рис. 2.5.2. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

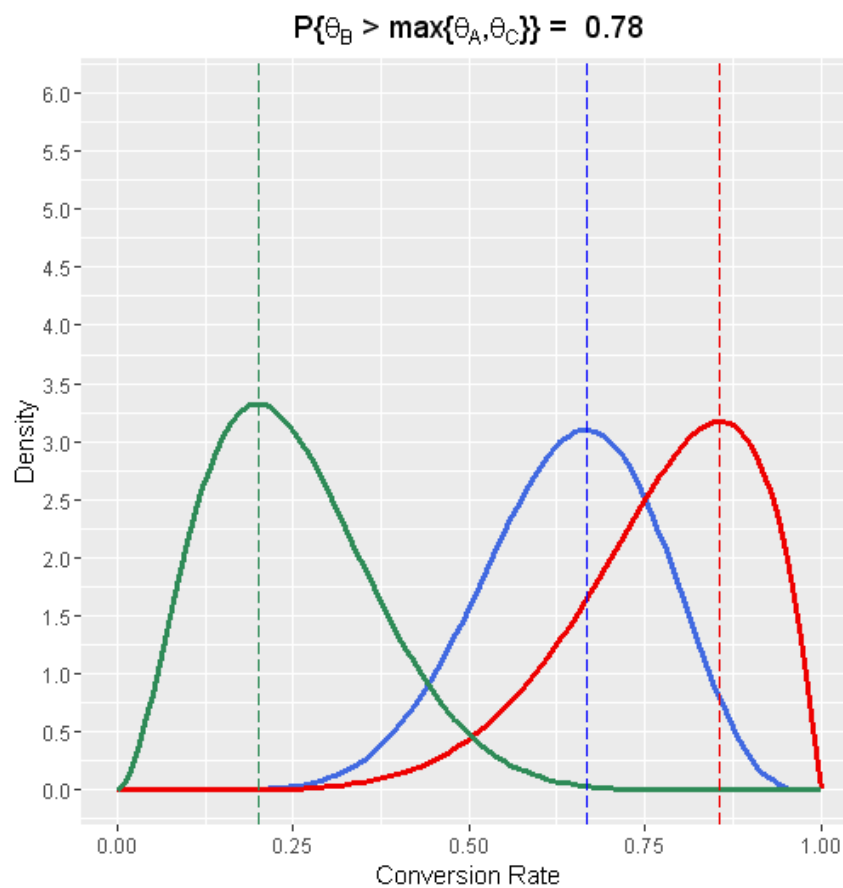


Рис. 2.5.3. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

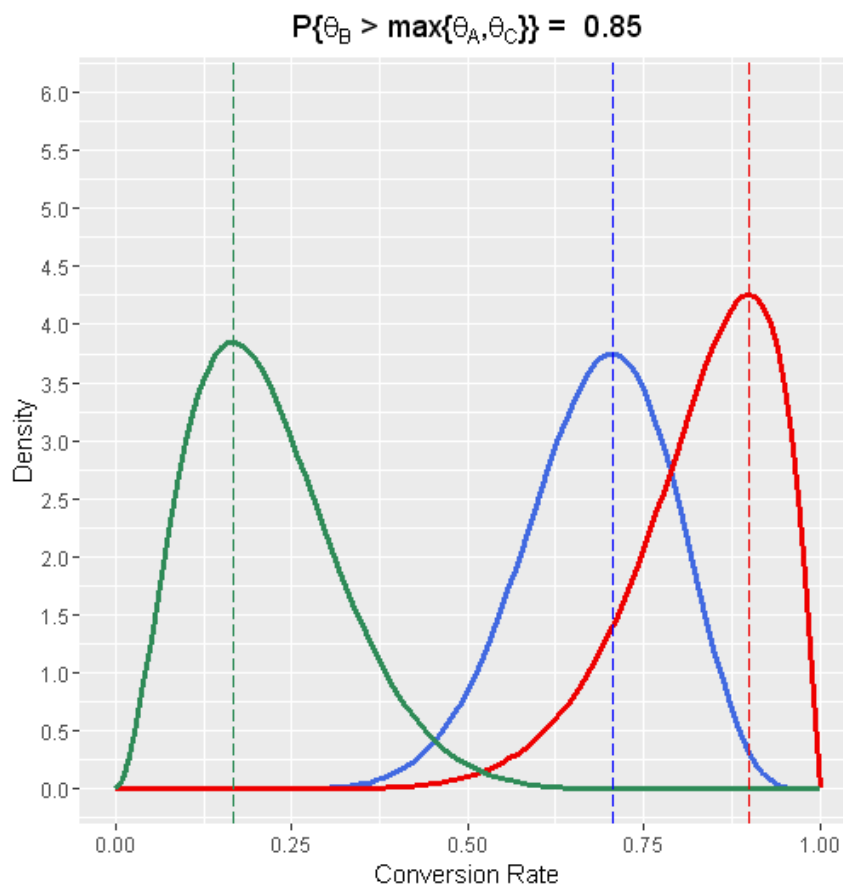


Рис. 2.5.4. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

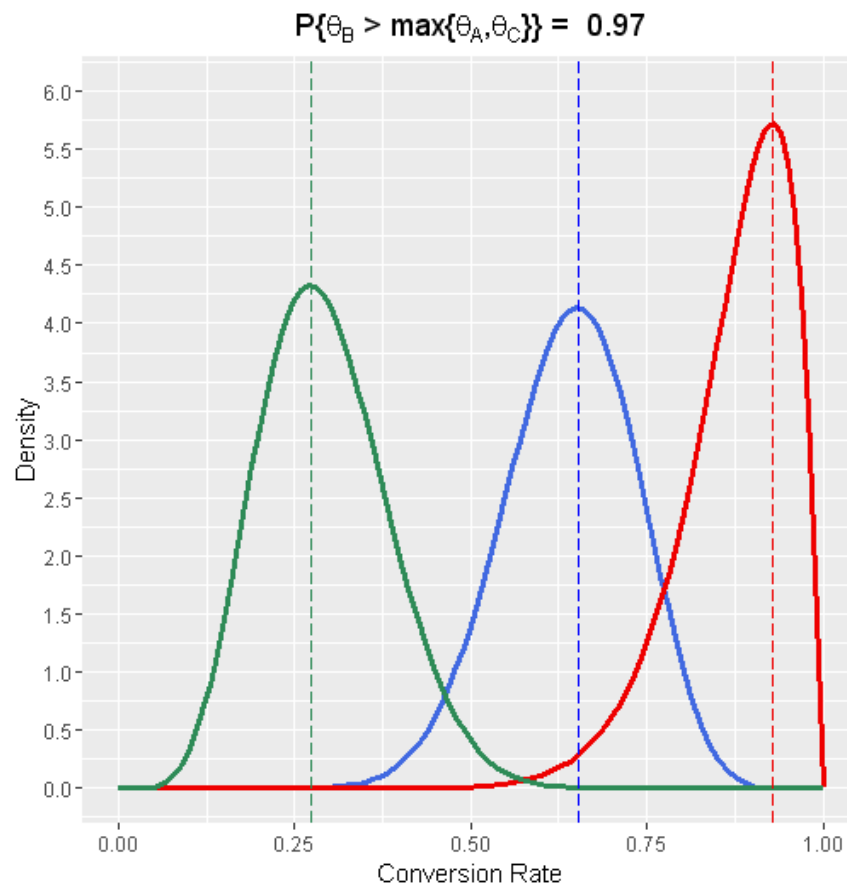


Рис. 2.5.5. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

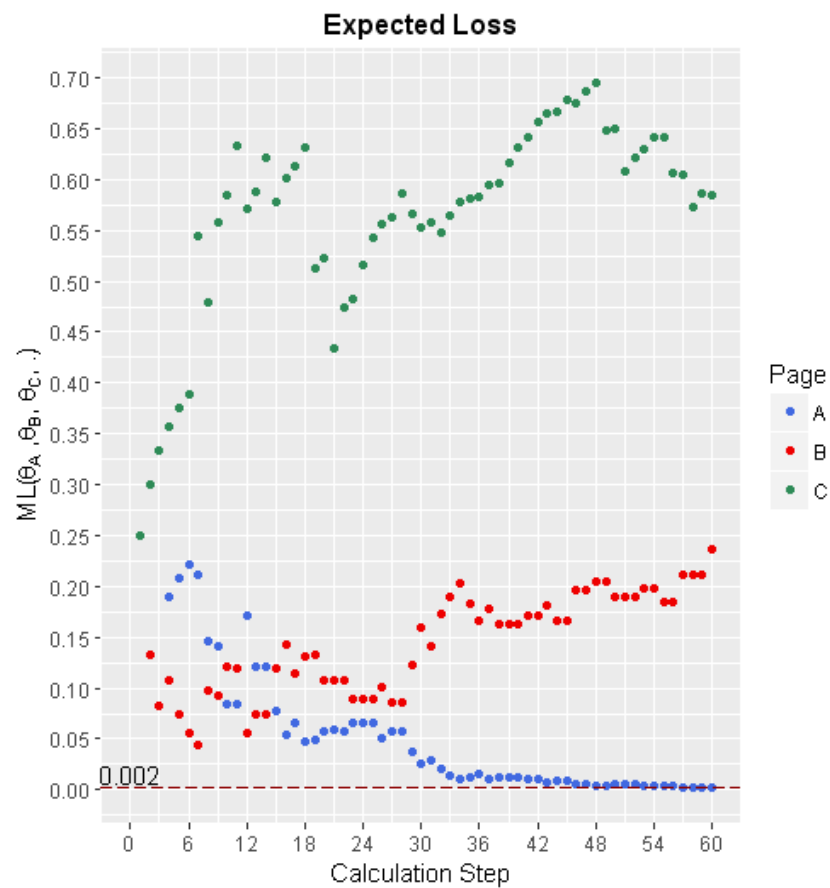


Рис. 2.5.6. Математичні сподівання функцій втрат на кожному кроці

Таблиця 2.5.1. Результати байєсівського А/В/С тестування

Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_A		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_B		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_C		Точкова оцінка ймовірності успіху θ_A	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_B	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_C
a	b	c	d	e	f	мода	мода	мода
1	1	1	1	1	1	–	–	–
2	1	1	1	1	1	1	–	–
3	1	1	1	1	1	1	–	–
3	1	2	1	1	1	1	1	–
4	1	2	1	1	1	1	1	–
5	1	2	1	1	1	1	1	–
5	1	2	1	1	2	1	1	0
5	2	2	1	1	2	0,8	1	0
5	2	2	1	1	3	0,8	1	0
5	2	3	1	1	3	0,8	1	0
5	2	3	1	1	4	0,8	1	0
5	2	3	2	1	4	0,8	0,67	0
5	2	4	2	1	4	0,8	0,75	0
5	2	4	2	1	5	0,8	0,75	0
5	3	4	2	1	5	0,67	0,75	0
5	3	5	2	1	5	0,67	0,8	0
6	3	5	2	1	5	0,71	0,8	0
6	3	6	2	1	5	0,71	0,83	0
6	3	6	2	2	5	0,71	0,83	0,2
7	3	6	2	2	5	0,75	0,83	0,2
7	3	6	2	3	5	0,75	0,83	0,33
7	3	6	2	3	6	0,75	0,83	0,28
8	3	6	2	3	6	0,77	0,83	0,28
8	3	6	2	3	7	0,77	0,83	0,25
8	3	6	2	3	8	0,77	0,83	0,22
8	3	7	2	3	8	0,77	0,85	0,22
9	3	7	2	3	8	0,8	0,85	0,22
9	3	7	2	3	9	0,8	0,85	0,2
9	4	7	2	3	9	0,72	0,85	0,2
9	5	7	2	3	9	0,67	0,85	0,2
10	5	7	2	3	9	0,69	0,85	0,2
10	6	7	2	3	9	0,64	0,85	0,2
10	6	8	2	3	9	0,64	0,87	0,2
10	6	9	2	3	9	0,64	0,88	0,2
11	6	9	2	3	9	0,67	0,88	0,2
12	6	9	2	3	9	0,68	0,88	0,2
12	6	10	2	3	9	0,68	0,9	0,2
13	6	10	2	3	9	0,7	0,9	0,2
13	6	10	2	3	10	0,7	0,9	0,18
13	6	10	2	3	11	0,7	0,9	0,16
13	6	11	2	3	11	0,7	0,91	0,16
13	6	11	2	3	12	0,7	0,91	0,15
13	6	12	2	3	12	0,7	0,92	0,15
14	6	12	2	3	12	0,72	0,92	0,15
14	6	12	2	3	13	0,72	0,92	0,14

Таблиця 2.5.1. Результати байєсівського А/В/С тестування (продовження)

Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_A		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_B		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_C		Точкова оцінка ймовірності успіху θ_A	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_B	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_C
a	b	c	d	e	f	мода	мода	мода
14	7	12	2	3	13	0,68	0,92	0,14
14	7	12	2	3	14	0,68	0,92	0,13
14	7	13	2	3	14	0,68	0,92	0,13
14	7	13	2	4	14	0,68	0,92	0,19
15	7	13	2	4	14	0,7	0,92	0,19
15	7	13	2	5	14	0,7	0,92	0,23
15	7	13	2	5	15	0,7	0,92	0,22
15	7	14	2	5	15	0,7	0,93	0,22
15	7	14	2	5	16	0,7	0,93	0,21
16	7	14	2	5	16	0,71	0,93	0,21
16	7	14	2	6	16	0,68	0,93	0,25
16	8	14	2	6	16	0,68	0,93	0,25
16	8	14	2	7	17	0,68	0,93	0,28
16	8	14	2	7	17	0,68	0,93	0,27
16	9	14	2	7	17	0,65	0,93	0,27

В А/В/С тестуванні взяли участь 23 відвідувачі групи А, 14 відвідувачів групи В, 22 відвідувачі групи С. А/В/С тестування закінчилося за таких середніх значень функцій втрат:

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) = 0,237 > \varepsilon = 0,002,$$

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) = 0,002 \leq \varepsilon = 0,002,$$

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) = 0,585 > \varepsilon = 0,002,$$

отже, варіант сторінки, який пропонували для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті. Імовірність того, що коефіцієнт конверсії в одній групі більший за коефіцієнти конверсії в двох інших групах дорівнює

$$P\{\hat{\theta}_A > \max\{\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C\}\} = 0,03,$$

$$P\{\hat{\theta}_B > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_C\}\} = 0,97,$$

$$P\{\hat{\theta}_C > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B\}\} = 9,65 \cdot 10^{-6}.$$

Байєсівська точкова оцінка ймовірності успіху θ_B дорівнює $\hat{\theta}_B = 0,93$.

Байєсівський довірчий інтервал для ймовірності успіху θ_B має вигляд

$$P\{0,68 \leq \theta_B \leq 0,98\} = 0,95.$$

Висновки

Усі результати, здобуті в роботі, є новими. Вивчено математичні моделі мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту при частотному та байєсівському методах статистичного оцінювання.

Особливості частотного підходу при проведенні мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту:

- коефіцієнт конверсії є детермінованою величиною;
- теоретичні результати працюють на практиці за великої кількості відвідувачів сайту;
- кожна нульова гіпотеза про однакові коефіцієнти конверсії сторінок вимагає тривалих експериментів з підбору значень параметрів для обчислення числа унікальних відвідувачів, необхідних для проведення тестування.

Отже, мультिवаріантне тестування за частотного підходу коштовне та потребує часу.

Особливості байєсівського підходу при проведенні мультिवаріантного тестування цільової сторінки сайту:

- коефіцієнт конверсії є випадковою величиною;
- теоретичні результати працюють на практиці за малої кількості відвідувачів сайту;
- здобуто аналітичний вигляд імовірності того, що коефіцієнт конверсії однієї варіації цільової сторінки вищий за коефіцієнти конверсії інших варіацій цільової сторінки.
- здобуто аналітичний вигляд математичного сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групам відвідувачів.

Практичне значення одержаних результатів. Запропоновану байєсівську математичну модель та алгоритм моделювання рекомендується застосовувати для тестування елементів цільової сторінки. Тестування проводиться швидко, що сприяє заощадженню витрат і оптимізації доходів.

Список використаної літератури

1. C. Stucchio Bayesian A/B Testing at VWO, Whitepaper, Visual Website Optimizer, 2015.
2. E. Miller Formulas for A/B Testing [Електрон. ресурс] // URL: <https://www.evanmiller.org/bayesian-ab-testing.html>
3. Айвазян С.А. Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная Эконометрика. – 2008. – №1. – С. 93–130.
4. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974.
5. Закс Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
6. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980.
7. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 328 с.
8. Турчин В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Днепр, Издательство «Лира». – 2018. – 752 с.
9. Хей Дж. Введение в методы байесовского статистического вывода. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 335 с.