

Міністерство освіти і науки України  
Українська інженерно-педагогічна академія

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

МІРОШНИЧЕНКО ГАЛИНА АНАТОЛІЇВНА

УДК 519.6:621.313.1

## ДИСЕРТАЦІЯ

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи  
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання  
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне  
джерело Підпис Г.А. Мірошніченко

Науковий керівник

Литвин Олег Миколайович,

доктор фізико-математичних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи  
ідентичний за змістом з іншими, поданими  
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д64.052.02

Підпис  
Печатка

Л.В. Колесник

Харків – 2019

## АНОТАЦІЯ

*Мірошніченко Г. А. Математичне моделювання процесів керування електроприводом.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки. Харків, 2019.

Дисертаційна робота присвячена математичному моделюванню процесів керування електромеханічними системами з електроприводом. В роботі досліджується наближення вектор-функцій однієї змінної в нормі  $W_2^1[0, t]$  сплайнами першого порядку для розв'язання задачі Коші у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь та задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом.

Як відомо, в задачах оптимального керування не завжди можливо знайти точні розв'язки. У зв'язку з цим виникає необхідність отримання наближених розв'язків задач оптимального керування. Тому актуальним завданням є розробка нових методів наближеного розв'язання задач оптимального керування електроприводом, які дають більш високу точність наближення.

Проведений аналіз існуючого стану чисельних методів розв'язання задач керування електроприводами показує, що методи, які дозволяють знайти оптимальне керування в нормі  $W_2^1[0, t]$ , не розглядались.

Метою даної дисертаційної роботи є розробка нового обчислювального методу розв'язання задачі оптимального керування електроприводом. Для досягнення цієї мети у дисертаційній роботі поставлено такі завдання:

- вибір та обґрунтування математичної моделі слідкуючого електроприводу;
- постановка задачі оптимального керування слідкуючим електропри-

водом, в якій математична модель об'єкта керування у вигляді системи диференціальних рівнянь та розв'язок якої дає більш високу точність наближення;

– вибір методу наближеного розв'язання задачі оптимального керування електроприводом з використанням сплайн-функцій першого порядку;

– проведення програмної реалізації запропонованого методу розв'язання задачі оптимального керування електроприводом, обчислювального експерименту, аналіз отриманих результатів та порівняння з відомими методами;

– розробка рекомендацій по використанню запропонованого в роботі методу в навчальному процесі.

Вперше запропоновано метод наближеного розв'язання задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом з використанням сплайн-функцій, в якому невідомі параметри керування знаходяться одночасно з невідомими параметрами фазових координат, що дає найкраще наближення до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0,1]$ .

Особливість методу полягає в тому, що математична модель об'єкта керування слідкуючим електроприводом представлена у вигляді системи диференціальних рівнянь та еквівалентної їй системи інтегральних рівнянь, а невідомі параметри керування  $u_j(t)$  знаходяться одночасно з невідомими параметрами фазових координат  $x_i(t)$  шляхом мінімізації відповідного функціоналу енергії, побудованого з використанням цих двох систем.

Набув подальшого розвитку метод найкращого наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0,t]$  для розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) та задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом.

Удосконалено метод розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з правими частинами у вигляді поліноміальних

функцій шляхом вибору базисних функцій  $\psi_{i,k}(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що дозволило забезпечити високу точність наближення в нормі  $L_2[0, 1]$ .

Дисертаційна робота виконувалась згідно з тематичним планом науково-дослідницьких робіт кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії. Основні результати дисертаційного дослідження отримано в межах виконання науково-дослідної роботи «Побудова математичних моделей для управління технологічними процесами» № ФН 12-5 (2012-2014 рр.) в Українській інженерно-педагогічній академії, у якій автором запропоновано метод розв'язання задачі управління динамічною системою, математична модель якої представлена у вигляді двох звичайних диференціальних рівнянь з правою частиною, яка визначає роботу двигуна, наведена постановка задачі та основні твердження запропонованого методу.

Об'єктом дослідження є процеси керування електромеханічними системами зі слідкуючим електроприводом.

Предметом дослідження є математичні моделі та обчислювальні методи розв'язання задач оптимального керування слідкуючим електроприводом.

Теоретичні дослідження базуються на: загальних методах функціонального аналізу (для побудови функціоналу, мінімум якого дозволяє отримати наближений розв'язок задачі оптимального керування електроприводом); методах обчислювальної математики (при виборі формул, що наближують фазові координати та керування із врахуванням початкових умов); теорії розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь з керуванням (для порівняння знайдених наближених розв'язків з результатами, отриманими класичними методами обчислювальної математики); методі знаходження найкращого наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0, t]$  (при виборі системи точних розв'язків однорідної задачі Коші). Для тестування запропонованого методу

використовувалась система комп'ютерної математики MathCAD, а також приклади, пов'язані з оптимальним керуванням слідкуючим електроприводом.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні нових алгоритмів та розширенні функціональних можливостей програмного продукту для розв'язання задач керування електроприводом. Отримані результати можуть бути використані при створенні пакету програм промислового значення та при конструюванні електроприводів.

Запропонований метод був застосований для наближеного розв'язання задачі оптимального керування мінімізацією витрат енергії при повороті валу двигуна на заданий кут за даний час з використанням пакету програм в системі комп'ютерної математики MathCAD. Проведено порівняльний аналіз отриманих наближених розв'язків з точними розв'язками, а також наближеними розв'язками, отриманими методом Рунге-Кутти 4-го порядку. Результати показують, що для отримання порівняльної точності з методом Рунге-Кутти, запропонований метод вимагає знаходження меншої кількості невідомих параметрів.

Запропонований метод дозволяє знаходити розв'язок задачі оптимального керування електроприводом, що є найкращим наближенням до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0,1]$ .

У дисертаційній роботі вперше метод О.М. Литвина про найкраще наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0,1]$  узагальнено на випадок розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У випадку розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь без керування, запропонований метод відрізняється від існуючих тим, що коли праві частини системи диференціальних рівнянь є поліномами, то для знаходження наближеного розв'язання системи з постійними коефіцієнтами вибір базисних функцій  $\psi_{i,k}(x) = x^k$  дозволяє отримати експоненціальну точність наближення.

У тому вигляді, який викладений в даній роботі, запропонований метод можна використовувати тільки для розв'язання задачі Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь, проте є можливість його узагальнення на випадок задачі Коші для нелінійних систем.

У першому розділі – «Огляд сучасного стану математичного моделювання електроприводів та методів наближеного розв'язання задач оптимального керування» проведено аналіз сучасного стану моделювання електроприводів та аналітичний огляд методів наближеного розв'язання задач керування. Наведено наступні класичні методи наближеного розв'язання задач оптимального керування: методи рішення крайової задачі для  $\pi$ -системи, метод варіацій у фазовому просторі, метод проєкції градієнта, метод наближеного розв'язання задач з ковзним режимом, метод повороту опорної гіперплощини.

Наведено математичні моделі електромеханічних систем у вигляді диференціальних рівнянь. Зокрема, математичну модель системи тиристорний перетворювач-двигун постійного струму незалежного збудження, математичні моделі двомасової та тримасової систем автоматичного керування, математичну модель електромеханічного слідкуючого приводу та математичну модель асинхронного двигуна, структурна схема якого побудована на основі його математичної моделі.

Другий розділі присвячений методу розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У підрозділі 2.1 наведена постановка задачі оптимального керування. У підрозділі 2.2 представлені класичні методи наближеного розв'язання задач оптимального керування. У підрозділі 2.3 викладена постановка задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У підрозділі 2.4 наведені основні твердження методу розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ 3 – «Метод чисельної реалізації математичної моделі процесу керування електроприводом» присвячений методу наближеного розв'язання

задачі керування електроприводом для функціоналу типу  $\int_0^T u^2(t)dt \rightarrow \min$ . У підрозділі 3.1 наведена постановка задачі оптимального керування електроприводом, яка зводиться до одного звичайного диференціального рівняння. У підрозділі 3.2 представлена постановка задачі керування електроприводом, що використовує систему звичайних диференціальних рівнянь. У підрозділі 3.3 наведено основні твердження методу розв'язання задачі керування електроприводом. У підрозділі 3.4 наведено порівняння запропонованого методу з методом дослідження оптимального керування в динаміці генних мереж.

У розділі 4 – «Аналіз результатів обчислювального експерименту тестування запропонованого методу» наведено чисельні приклади застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь та проведено аналіз прикладів.

Також наведено чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задач керування електроприводом. Зокрема, розв'язана задача знаходження програмної траєкторії і закону зміни координат  $u(t), x_1(t), x_2(t)$  при мінімальній витраті енергії на керування валом двигуна. Для чисельної реалізації методу, розробленого в даній роботі, використано можливості системи комп'ютерної математики MathCAD із вбудованою процедурою MINIMIZE (J,C) для мінімізації запропонованого функціоналу.

Справедливість теоретичних та практичних тверджень роботи перевірена за допомогою аналізу результатів обчислювального експерименту та правильності формулювання функціоналу, мінімум якого дає наближений розв'язок із врахуванням відповідних обмежень на керування, якщо воно є.

Для тестування запропонованого методу використовувалась система комп'ютерної математики MathCAD, а також приклади, зв'язані з оптимальним керуванням електроприводами. Проведений обчислювальний

експеримент з використанням пакету прикладних програм, створеного дисертантом у системі комп'ютерної математики MathCAD для чисельної реалізації запропонованого методу та алгоритмів, продемонстрував високу точність методу.

Результати дисертаційної роботи впроваджено: в розробках підприємства ПрАТ «Електромашина» в приладах керування електричними двигунами при їх випробуваннях; в навчальному процесі на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії у лабораторному практикумі з дисципліни «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевих знань» при підготовці студентів спеціальності «Професійна освіта. Електротехніка та електромеханіка».

*Ключові слова:* функціонал, задача керування електроприводом, задача Коші, інтерполяційні сплайни першого степеня, апроксимаційні сплайни першого порядку, системи звичайних диференціальних рівнянь, система лінійно-незалежних функцій, мінімізація витрат енергії на керування.

#### *Список публікацій*

1. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління звичайним лінійним диференціальним рівнянням // Збірник наукових праць Системи обробки інформації Харківський університет Повітряних Сил. Харків. 2005. Вип. 3(43). С. 198 – 203.

2. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів до розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2011. № 3(106). С. 105 – 113.

3. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом



мінімізації похибки правих частин в нормі  $L_2[0,1]$ // Вісник НТУ ХПІ. Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. НТУ «ХПІ». Харків. 2012. №54 (960). С. 119 – 128.

4. Lytvyn O. N., Lobanova L. S., Miroshnychenko G. A. A New Method for Solving the Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations // Journal of Automation and Information sciences/ Vol. 46. 2014. Issue 9, 46(9), P. 1–11. (Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus).

5. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про один підхід до математичного моделювання в задачах оптимального управління // Бионика интеллекта. 2014. № 2 (83). С. 74 – 78.

6. Литвин О. М., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління лінійним звичайним диференціальним рівнянням // X Міжнародна конференція ім. М. Кравчука: тези доповідей. Київ: Задруга, 2004. С. 438.

7. Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // XXXVIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2005. С. 60 – 61.

8. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // Міжнародна конференція «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)»: праці конф. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. С. 130.

9. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Міжнародний симпозіум «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)»: праці симпозіуму. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. С. 170.

10. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLI науково-практична конференція науково-

педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2008. Частина 6. С. 30.

11. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних // XLII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2009. Частина 6. С. 20.

12. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Мірошніченко Г. А. Деякі аспекти чисельної реалізації наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // IV міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»: зб. наук. праць за матеріалами конф. Кам'янець-Подільський, 2010. С. 129–136.

13. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2010. Частина 6. С. 18.

14. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Чисельне дослідження нового варіаційного методу розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика – 2010»: тези доповідей. Харків: ХНУРЕ, 2010. Том 1. С. 54 – 56.

15. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про один новий варіаційний метод розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // II Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» ІСН-2011: матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 347 – 350.

16. Lytvyn O. N., Lobanova L. S., Miroshnychenko G. A. A method for solving optimal control problems for systems of ordinary differential equations by minimizing the error of approximate right side in the norm  $W_2^1[0,1]$  // XVI International Conference «Dynamical system modeliling and stability investigation»: abstracts of conference reports. Kiev: Taras Shevchenko National University, 2013. P. 338.

17. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Першина Ю. І., Мірошниченко Г. А. Розв'язання задачі синтезу регулятора електроприводу системи тиристорний перетворювач-двигун узагальненим методом найменших квадратів // IV науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: зб. праць. Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2016. Вип. 4. С. 58 – 62.

## ABSTRACT

**Miroshnychenko Galina. Mathematical modeling of electric drive control processes.** – The manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkov National University of Radio Electronics. Kharkiv, 2019.

The thesis deals with mathematical modeling of electric drive control processes. In this paper, we use the approximation of vector-valued functions of one variable in norm  $W_2^r [0,1]$ ,  $r = 0,1$  by splines of the first degree for solving the problem rotation of the motor shaft of the electromechanical system.

As you know, it is not always possible to find precise solutions in optimal control problems. In connection with this, the need arises for obtaining approximate solutions to optimal control tasks. Therefore, the actual task is the development of new methods for the approximate solution of the problems of optimal control of the electric drive, which give a higher accuracy of approximation.

The analysis of the existing state of numerical methods for solving electric drive problems shows that methods that allow to find optimum control in the norm  $W_2^1 [0,t]$  are not considered.

The peculiarity of the method is that the mathematical model of the control object of the tracking electric drive, formulated as a system of differential equations and an equivalent system of integral equations taking into account the initial conditions of the Cauchy problem and unknown control variables, are found simultaneously with the unknown parameters of the phase coordinates by minimizing the corresponding functional constructed using these two systems.

The purpose of this dissertation work is to develop a new computational method for solving the problem of optimal control of the electric drive. In order to achieve this goal, the following tasks are set out in the dissertation:

- choice and substantiation of the mathematical model of the follower of the electric drive;
- setting of the problem of optimal control of observing electrically water, in which the mathematical model of the control object in the form of a system of differential equations and the solution of which gives a higher accuracy of approximation;
- choice of the method of an approximate solution of the problem of optimal control of the electric drive using spline-functions of the first order;
- program realization of the proposed method for solving the problem of optimal control of electric drive, computational experiment, analysis of the obtained results and comparison with known methods;
- development of recommendations for using the proposed method in the educational process.

This work is based on generalizations of the statement of O. Litvin an article by on the best approximation of a function of one variable by first-order splines in the norm to the case of vector functions that are solutions of the problem of controlling an electric drive. For the first time the method of O. N. Lytvyn generalized to the case of solving the problem of control of an electric drive under

control constraints  $\int_0^T u^2(t)dt \rightarrow \min$ .

For the first time, the method of an approximate solution to the problem of optimal control of a moving electric drive using spline functions is proposed, in which unknown control parameters  $u_j(t)$  are simultaneously with unknown parameters of the phase coordinates  $x_i(t)$ , which gives the best approximation to the exact solution in the norm  $W_2^1[0,1]$ .

The paper presents a method for constructing approximate solving of the Cauchy problem for systems of ordinary linear differential equations, as a linear combination of exact solutions of the Cauchy problem for the right sides of the

form  $\vec{\varphi}_m(x)$  with system of arbitrary linearly independent vector functions that satisfy the initial conditions of the Cauchy problem. The coefficients of the expansion are found from the condition of the best approximation (in the norm  $L_2[0,1]$  or  $W_2^1[0,1]$ ) of the right-hand sides  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  using linear combination of vector functions  $\vec{\varphi}_m(x)$ . The method was first applied to an approximate solution of the problem of the optimal control over minimization of energy consumption when the motor shaft was rotated to a given angle in a given time using a software package in the computer mathematics system MathCAD. A comparative analysis of the obtained approximate solutions with exact solutions as well as approximate solutions obtained by the Runge method of the fourth order has been carried out. The analysis of the results of the computational experiment proved high accuracy of the proposed method both in solving the Cauchy problem for a system of differential equations and in solving the problem of optimization electric drive energy.

The object of the study is the processes of controlling electromechanical systems with a monitoring electric drive.

The subject of the study is mathematical models and computational methods for solving the problems of optimal control of a moving electric drive.

For the first time, a method of approximate solving a problem of an optimal control of a tracking electric drive using spline functions is proposed, which gives the best approximation to the exact solution in the norm  $W_2^1[0, t]$ . The peculiarity of the method is that the mathematical model of the control object of the tracking electric drive, formulated as a system of differential equations, is reduced to a system of integral equations and the unknown control variables are found simultaneously with the unknown phase coordinate parameters by minimizing the corresponding energy functional.

The method of Best approximation of functions of one variable by splines of the 1st degree in the norm  $W_2^1[0, t]$  when solving the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations of the  $n$ -order ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) and the

problem of optimal control of the tracking electric drive has further developed. A comparative analysis of the obtained approximations of solutions with exact solutions, as well as approximate, obtained by the Runge-Kutta method of the fourth order has been carried out. Thus, when solving the Cauchy problem for a system of differential equations of the third order, the maximum error of approaching the exact solution in the norm  $W_2^1[0,1]$  is  $N=8$ ,  $\delta_2=10^{-10}$  and the maximum error in solving the problem using the Runge-Kutta method of the fourth order is  $\delta_3=10^{-9}$ , at  $h=0,02$ ,  $N=8$ .

The method of numerical solution of the problem of optimal control of an electric drive is proposed and studied. As a result of the research, a new solution to the problem of electric drive control has been obtained. The situations in which the method can give the best approximation in the norm  $W_2^1[0,t]$  have been examined.

The thesis deals with mathematical modeling of electric drive control processes. In this paper, we use the approximation of vector-valued functions of one variable in norm  $W_2^r[0,1]$ ,  $r=0,1$  by splines of the first degree for solving the problem of controlling the electric drive.

In the first chapter – "An overview of the current state of mathematical modeling of electric drives and methods for the approximate solution of optimal control problems", an analysis of the current state of simulations of electric drives and an analytical review of the methods of an approximate solution of control problems were made. The following classical methods for the approximate solution of optimal control problems are presented: methods for solving the boundary value problem for a  $\pi$ -system, the method of variations in the phase space, the method of projection of a gradient, the method of approximate solution of problems with sliding mode, the method of rotation of the reference hyperplane.

The second section is devoted to the method for solving the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. Section 2.1 presents the problem of optimal control. In Section 2.2, the classical methods for the approximate solution of optimal control problems are presented. Section 2.3 describes the formulation of

the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. In Section 2.4 the main assertions of the method for solving the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations are given.

Section 3 – "The method of numerical realization of the mathematical model of the electric drive control process" is devoted to the method of an approximate solution to the problem of controlling the electric drive for a functional of type  $\int_0^T u^2(t)dt \rightarrow \min$ . In subsection 3.1, the problem of optimal control of the electric drive is reduced, which reduces to one ordinary differential equation. Section 3.2 presents the problem of controlling an electric drive using a system of ordinary differential equations. In subsection 3.3, the main assertions of the method of solving the task of controlling the electric drive are given. In subsection 3.4, a comparison of the proposed method with the method of optimal control in the dynamics of gene networks is presented.

In Section 4 – "Analysis of the results of the computational experiment testing the proposed method" numerical examples of the application of the above method to the solution of the Cauchy problem for systems of ordinary linear differential equations are given and examples are analyzed.

To test the proposed algorithms, the computer mathematics system MathCAD was used, as well as examples related to the optimal control of electric drives. Also, in the work the problem of finding a program trajectory and the law of changing the phase coordinates  $u(t), x_1(t), x_2(t)$ , with minimal loss of energy for controlling the engine shaft, is solved. A computational experiment using a software package created by the dissertant in the computer mathematics system MathCAD for numerical implementation of the proposed method and algorithms demonstrated great accuracy of the method.

The method of numerical solution of the problem of optimal control of an electric drive is proposed and studied. As a result of the research, a new solution to the problem of electric drive control has been obtained. The situations in which



the method can give the best approximation in the norm  $W_2^1[0,t]$  have been examined.

To achieve the goal, an analysis was made of the current state of control methods for electromechanical systems and an analysis of numerical methods for finding an approximate solution to the problem of optimal control of electric drives, which shows that methods that allow us to find optimal control in the norm  $W_2^1[0,t]$  were not considered.

Thus, the problem of developing and investigating the method of approximate solution of the optimal control problem, which allows to find an approximate solution, which gives the best approximation, is topical.

To achieve the goal, the method of obtaining unknown parameters in the approximate solution of the electric drive control problem for a system of ordinary differential equations with control for the case when the unknown functions are in the form of splines of the 1-st degree is formulated for the first time. A general method for constructing a functional has also been developed, which is closely related to the norm of differentiated functions  $W_2^1[0,t]$ , and the minimum of which makes it possible to find an approximate solution of the problem by controlling an electric drive.

The proposed method was first used to approximate the optimal control problem by minimizing energy consumption when the motor shaft is rotated by a given angle  $\alpha_k$  for a given time  $T$ .

For the first time, it was proposed to use the computer mathematics MathCAD system with the built-in MINIMIZE (J, C) procedure for minimizing the

functional  $J$  under the control constraints  $\int_0^T (u^2(t))dt \rightarrow \min$ .

The validity of the theoretical and practical assertions of the paper is verified by analyzing the results of a computational experiment and the correctness of the formulation of the functional whose minimum gives an approximate solution with allowance for the corresponding control constraints if it is.

The results of the thesis were introduced into the educational process at the department of higher and applied mathematics of the Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy in the laboratory on the subject «Theoretical, physical and informational bases of industry knowledge» in preparing students for the specialties «Professional Education. Electronics, radio engineering and telecommunications» and «Professional education. Electrical Engineering and Electromechanics». Also, the results are implemented in the development of the enterprise «Electromashina», namely in the control devices of electric motors during their testing. The results obtained can be used to create a software package of industrial significance and when designing electric drives.

*Keywords:* functional, Cauchy problem, electric drive control problem, first-degree interpolation splines, first-degree approximation splines, systems of ordinary differential equations, system of linearly independent functions, minimization of energy consumption for control.

#### *List of publications*

1. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління звичайним лінійним диференціальним рівнянням // Збірник наукових праць Системи обробки інформації Харківський університет Повітряних Сил. Харків. 2005. Вип. 3(43). С. 198 – 203.

2. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів до розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2011. № 3(106). С. 105 – 113.

3. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі  $L_2[0,1]$  // Вісник НТУ ХПІ. Збірник

наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. НТУ «ХП». Харків. 2012. №54 (960). С. 119 – 128.

4. Lytvyn O. N., Lobanova L. S., Miroshnychenko G. A. A New Method for Solving the Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations // Journal of Automation and Information sciences/ Vol. 46. 2014. Issue 9, 46(9), P. 1–11. (Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus).

5. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про один підхід до математичного моделювання в задачах оптимального управління // Бионика интеллекта. 2014. № 2 (83). С. 74 – 78.

6. Литвин О. М., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління лінійним звичайним диференціальним рівнянням // X Міжнародна конференція ім. М. Кравчука: тези доповідей. Київ: Задруга, 2004. С. 438.

7. Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // XXXVIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2005. С. 60 – 61.

8. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // Міжнародна конференція «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)»: праці конф. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. С. 130.

9. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Міжнародний симпозиум «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)»: праці симпозиуму. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. С. 170.

10. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLI науково-практична конференція науково-

педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2008. Частина 6. С. 30.

11. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних // XLII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2009. Частина 6. С. 20.

12. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Мірошніченко Г. А. Деякі аспекти чисельної реалізації наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // IV міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»: зб. наук. праць за матеріалами конф. Кам'янець-Подільський, 2010. С. 129 – 136.

13. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2010. Частина 6. С. 18.

14. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Чисельне дослідження нового варіаційного методу розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика – 2010»: тези доповідей. Харків: ХНУРЕ, 2010. Том 1. С. 54 – 56.

15. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про один новий варіаційний метод розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // II Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» ІСН-2011: матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 347 – 350.

16. Lytvyn O. N., Lobanova L. S., Miroshnychenko G. A. A method for solving optimal control problems for systems of ordinary differential equations by minimizing the error of approximate right side in the norm  $W_2^1[0,1]$  // XVI International Conference «Dynamical system modeliling and stability investigation»: abstracts of conference reports. Kiev: Taras Shevchenko National University, 2013. P. 338.

17. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Першина Ю. І., Мірошниченко Г. А. Розв'язання задачі синтезу регулятора електроприводу системи тиристорний перетворювач-двигун узагальненим методом найменших квадратів // IV науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: зб. праць. Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2016. Вип. 4. С. 58 – 62.

## ЗМІСТ

Перелік умовних позначень, символів, одиниць, скорочень і термінів	24
ВСТУП .....	25
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ ТА МЕТОДІВ НАБЛИЖЕ- НОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.....	31
1.1 Електропривід, як об'єкт моделювання та керування .....	31
1.1.1 Рівняння руху електроприводу .....	35
1.1.2 Математичні моделі асинхронного двигуна .....	36
1.2 Математичні моделі електромеханічних систем керування, які зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь .....	44
1.2.1 Математичні моделі системи тиристорний перетворювач- двигун постійного струму незалежного збудження .....	44
1.2.2 Математичні моделі двигуна постійного струму незалежно- го збудження .....	45
1.2.3 Математична модель двомасової системи автоматичного керування .....	48
1.2.4 Математична модель трьохмасової системи автоматичного керування .....	51
1.2.5 Математична модель слідкуючого приводу.....	53
1.3 Аналітичний огляд методів наближеного розв'язання задач оптимального керування .....	55
1.4 Висновки до розділу 1.....	64
РОЗДІЛ 2 МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....	65
2.1 Постановка задачі оптимального керування .....	65
2.2 Методи наближеного розв'язання задач оптимального керування.....	68
2.3 Постановка задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.....	91
2.4 Основні твердження методу розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.....	93
2.5 Висновки до розділу 2 .....	104

РОЗДІЛ 3 МЕТОД ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ .....	105
3.1 Постановка задачі оптимального керування електроприводом, яка зводиться до одного звичайного диференціального рівняння .....	105
3.2 Постановка задачі керування електроприводом, що використовує систему звичайних диференціальних рівнянь .....	116
3.3 Основні твердження методу розв'язання задачі керування електроприводом .....	122
3.4 Порівняння запропонованого методу з методом дослідження оптимального керування в динаміці генних мереж .....	124
3.4.1 Загальна постановка задачі оптимального керування в динаміці генних мереж .....	126
3.4.2 Задача визначення допустимого стаціонарного стану .....	130
3.5 Висновки до розділу 3 .....	132
РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТЕСТУВАННЯ ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ ..	134
4.1 Приклади наближення явно заданих функцій різних класів диференціювання .....	134
4.2 Чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь .....	136
4.3 Чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі керування електроприводом .....	149
4.4 Висновки до розділу 4 .....	164
ВИСНОВКИ .....	166
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	168
Додаток А Список опублікованих праць за темою дисертації.....	177
Додаток Б Акти використання і впровадження результатів дисертаційних досліджень.....	180

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І  
ТЕРМІНІВ

АКП – автоматичний керуючий пристрій.

ДЗЗЕ – датчики зворотних зв'язків електричні.

ДЗЗМ – датчики зворотних зв'язків механічні.

ЗП – задаючий пристрій.

ЕМС – електромеханічна система.

ІМСЕ – інтерлінаційний метод скінченних елементів.

МСР – метод скінченних різниць.

Метод НІДР – метод зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Метод ЛІДР – метод зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь розв'язання крайових задач.

МСЕ – метод скінченних елементів.

МЧ – механічна частина приводу.

ОМСЕ – оптимальний метод скінченних елементів.

ТП-ДПС тиристорний перетворювач-двигун постійного струму.

ПП – підсилювача потужності.

Система ЗДР – система звичайних диференціальних рівнянь.

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

$\wedge$  – логічне „і”.

$\vee$  – логічне „або”.

$R^n$  – евклідів  $n$ -вимірний простір.



## ВСТУП

**Актуальність теми.** У теперішній час в усьому світі спостерігається тенденція до підвищення ефективності суспільної праці за рахунок посилення її електроозброєності й автоматизації виробництва. Між електроозброєністю праці і її продуктивністю існує пряма залежність: за останні десятиліття продуктивність суспільної праці в промисловості України підвищується приблизно на стільки відсотків, на скільки підвищується її електроозброєність. У зв'язку з цим велике значення для промисловості набувають питання, пов'язані з розвитком електроприводу.

Особливо актуальною проблемою керування на сучасному етапі розвитку керованого електроприводу є необхідність підвищення точності роботи слідкуючих електромеханічних систем, робототехнічних систем, систем високоточного керування приводом радіолокаційних антен, опорно-поворотними пристроями оптоелектронних систем спостереження за рухомими об'єктами в повітряному, наземному та морському просторах.

Вирішення цієї проблеми можливе в рамках теорії управління з застосуванням математичного моделювання процесів керування електроприводом та обчислювальних методів.

Основоположні результати в теорії оптимального керування отримані в роботах В. Г. Болтянського [6], А. Я. Дубовицького, О. А. Фельдбаума [78], Р. Беллмана [5], Л. С. Понтрягіна [65], R. V. Gamcrelidze [15], М. М. Красовського, Є. Ф. Міщенко, Б. М. Пшеничного [67], Дж. Варга [13], О. О. Мілютіна, С. І. Ляшка [55], В. М. Тихомирова, А. Г. Бутковського, А. О. Чікрія та інших вітчизняних та закордонних вчених. Серед сучасних робіт, присвячених розв'язанню задач математичного моделювання автоматизованих електроприводів, можна виділити роботи Б. І. Кузнецова, Л. Д. Костинюка, О. П. Чорного, Ю. М. Лаврієнка.

Як відомо, в задачах оптимального керування не завжди можливо знайти точні розв'язки. У зв'язку з цим виникає необхідність отримання

наближених розв'язків задач оптимального керування. Тому актуальним є наукове завдання – розробка нових методів наближеного розв'язання задач оптимального керування електроприводом, які дають більш високу точність наближення.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконувалась згідно з тематичним планом науково-дослідницьких робіт кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії. Основні результати дисертаційного дослідження отримано в межах виконання науково-дослідної роботи «Побудова математичних моделей для управління технологічними процесами» № ФН 12-5 (2012-2014 рр.) в Українській інженерно-педагогічній академії, у якій автором запропоновано метод розв'язання задачі управління динамічною системою, математична модель якої представлена у вигляді двох звичайних диференціальних рівнянь з правою частиною, яка визначає роботу двигуна, наведена постановка задачі та основні твердження запропонованого методу.

**Мета і задачі дослідження.** Метою даної дисертаційної роботи є розробка нового обчислювального методу розв'язання задачі оптимального керування електроприводом. Для досягнення цієї мети у дисертаційній роботі поставлено такі завдання:

- вибір та обґрунтування математичної моделі слідкуючого електроприводу;
- постановка задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом, в якій математична модель об'єкта керування у вигляді системи диференціальних рівнянь та розв'язок якої дає більш високу точність наближення;
- вибір методу наближеного розв'язання задачі оптимального керування електроприводом з використанням сплайн-функцій першого порядку;

– проведення програмної реалізації запропонованого методу розв'язання задачі оптимального керування електроприводом, обчислювального експерименту, аналіз отриманих результатів та порівняння з відомими методами;

– розробка рекомендацій по використанню запропонованого в роботі методу в навчальному процесі на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії.

*Об'єктом дослідження* є процеси керування електромеханічними системами зі слідкуючим електроприводом.

*Предметом дослідження* є математичні моделі та обчислювальні методи розв'язання задач оптимального керування слідкуючим електроприводом.

**Методи дослідження.** Теоретичні дослідження базуються на: загальних методах функціонального аналізу (для побудови функціоналу, мінімум якого дозволяє отримати наближений розв'язок задачі оптимального керування електроприводом); методах обчислювальної математики (при виборі формул, що наближують фазові координати та керування із врахуванням початкових умов); теорії розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь з керуванням (для порівняння знайдених наближених розв'язків з результатами, отриманими класичними методами обчислювальної математики); методі знаходження найкращого наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0,t]$  (при виборі системи точних розв'язків однорідної задачі Коші). Для тестування запропонованого методу використовувалась система комп'ютерної математики MathCAD, а також приклади, пов'язані з оптимальним керуванням слідкуючим електроприводом.

### **Наукова новизна одержаних результатів:**

– *вперше* запропоновано метод наближеного розв'язання задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом з використанням

сплайн-функцій, в якому невідомі параметри керування знаходяться одночасно з невідомими параметрами фазових координат, що дає найкраще наближення до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0, t]$ ;

– *набув подальшого розвитку* метод найкращого наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0, t]$  для розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) та задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом;

– *удосконалено* метод розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з правими частинами у вигляді поліноміальних функцій шляхом вибору базисних функцій  $\psi_{i,k}(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що дозволило забезпечити високу точність наближення в нормі  $L_2[0, 1]$ .

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у створенні нових алгоритмів та розширенні функціональних можливостей програмного продукту для розв'язання задач керування електроприводом. Отримані результати можуть бути використані при створенні пакету програм промислового значення та при конструюванні електроприводів.

**Впровадження результатів дисертації.** Практичне значення одержаних результатів підтверджується їх упровадженням. Результати проведених у дисертаційній роботі досліджень упроваджено в навчальному процесі на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (при викладенні дисципліни «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевих знань» для студентів та магістрів за спеціальностями «Професійна освіта. Електроніка, радіотехніка та телекомунікація» та «Професійна освіта. Електротехніка та електромеханіка»). Також отримані результати упроваджені в розробках підприємства ПрАТ «Електромашина», а саме в приладах керування електричними двигунами при їх випробуваннях.

**Особистий внесок здобувача.** Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано у 17 роботах [1–17]. Основні результати за темою дисертації

отримані особисто автором. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати: у [1, 6, 8] запропоновано метод розв'язання задачі Коші для одного звичайного диференціального рівняння з оптимальним керуванням з використанням сплайн-функцій; у [2, 14] розроблено метод наближеного розв'язання задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом та визначено програмний оптимальний процес мінімізації енергії в електроприводі; у [3, 9] подальший розвиток методу найкращого наближення функції однієї змінної апроксимаційними сплайнами 1-го порядку при розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь; [4, 10] удосконалення методу наближеного розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з правими частинами у вигляді поліноміальних функцій, що дозволяє підвищити точність наближення; у [5, 8, 13] отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих параметрів функцій  $x_i(t)$  та  $u_j(t)$  з умови мінімуму побудованого функціоналу.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: науково-практичних конференціях науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2005, 2008–2010 рр.); міжнародній конференції «Питання оптимізації обчислень» Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (Кацивелі, 2005, 2007 рр.); міжнародній науковій конференції ім. М. Кравчука (Київ, 2004 р.), міжнародній науковій конференції Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (Кам'янець-Подільський, 2010 р.); міжнародній конференції з автоматичного управління «Автоматика – 2010» (Харків, 2010 р.); всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформатика та системні науки» (Полтава, 2011 р.); міжнародній конференції «Моделювання та дослідження стійкості

динамічних систем» (Київ, 2013 р.); науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» (Львів, 2016 р.).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 17 роботах, з них 5 статей у наукових журналах, які входять до переліку фахових видань України з технічних наук, з яких 1 стаття в журналі, який включено до бази даних американського інституту наукової інформатики Томсона (ISI) та до реферативної бази даних Scopus та 12 доповідей, опублікованих у збірнику наукових праць та друкованих матеріалах конференцій і симпозіумів.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація включає вступ, чотири розділи, висновки по роботі, список використаних джерел із 103 найменувань (9 с.), 2 додатки (6 с.), 28 ілюстрацій (10 с.). Загальний обсяг роботи складає 182 сторінки, з них 146 сторінок основного тексту.

# РОЗДІЛ 1

## ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ ТА МЕТОДІВ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

### 1.1 Електропривід, як об'єкт моделювання та керування

Сучасний електропривід – це сукупність електромашин, апаратів і систем керування ними. Він є основним споживачем електричної енергії (до 60 %) і головним джерелом механічної енергії в промисловості.

Сучасний автоматизований електропривід є складною електромеханічною системою, яка управляє, наприклад, потужними, в декілька десятків тисяч кіловат, аеродинамічними трубами, де здійснюється моделювання умов, аналогічних тим, які виникають у польоті літальних апаратів, або реверсивними прокатними станами, в яких двигуни постійного струму потужністю кожен в 10000 кВт більше 1000 разів протягом 1 год, тобто приблизно за кожні 3 с, міняють свій напрям обертання, забезпечуючи автоматично плющення заготовки. Основні блоки системи управління прокатним станом реалізують: введення даних, стеження за матеріалом, реєстрацію вимірюваних даних процесу плющення, автоматичну адаптацію і оптимальне за часом регулювання процесом і інші функції. У режимі адаптації використовуються сучасні комп'ютери [10].

Автоматизація управління станами гарячого плющення за допомогою комп'ютерів дозволяє випускати продукцію високої якості. Окрім збільшення продуктивності праці і поліпшення якості продукції в результаті застосування комп'ютерів вивільняється велике число обслуговуючого персоналу.

Основним завданням автоматизованого електроприводу є автоматичне регулювання заданих параметрів електроприводу або забезпечення необхідної функції зміни заданих координат.

Автоматизований електропривід розвиває колосальні потужності для надання значної швидкості, високої маневреності і великої надійності величезним морським і океанським судам різного призначення. Нарешті, автоматизований електропривод – це силова енергетична основа потужних екскаваторів, магістрального електричного транспорту, унікальних металоріжучих верстатів, величезних радіотелескопів і т. п., керованих за допомогою систем автоматики, що забезпечують оптимальні режими роботи.

Межі використання по потужності сучасного електроприводу вельми великі – від десятків тисяч кіловат в одиничному двигуні до долей вата.

Для приводу доменних повітродувок застосовуються двигуни змінного струму потужністю до 50 МВт. Такі двигуни можуть мати частоту обертання 3000 об/хв.

У вимірювальній, інформаційній техніці, спеціальному приладобудуванні використовуються двигуни потужністю в соті долей вата.

Діапазон зміни номінальних частот обертання також має вельми широкі межі. Так, відомі безредукторні електроприводи, частота обертання яких складає одиниці і десятки оборотів в хвилину. З іншого боку, в спеціальних випробувальних стендах, прецизійних металоріжучих верстатах і в інших об'єктах в даний час застосовуються високо- і надшвидкісні (до 200000 об/хв) безконтактні електродвигуни змінного струму, керовані тиристорними перетворювачами частоти.

Системи автоматичного керування електроприводами постійного і змінного струму, в яких використовуються всі досягнення напівпровідникової техніки, а також можливості електронної обчислювальної техніки, дозволяють істотно спростити конструкції виробничих механізмів, підвищити їх точність і підняти продуктивність, тобто сприяти технічному прогресу.

Використання засобів дискретної техніки в системах керування приводами постійного струму розширює діапазон регулювання швидкості до (10000-15000) : 1 і вище.



Автоматизований електропривід – це електромеханічна система, яка складається з електродвигунного, перетворювального, передавального і управляючого пристроїв. Вони призначені для управління рухом виконавчих органів робочої машини і для приведення в рух цих органів [10].

Не можна уявити собі жодного сучасного виробничого механізму, в будь-якій області техніки, який не приводився б в дію автоматизованим електроприводом. У електроприводі основним елементом, що перетворює електричну енергію в механічну, є електричний двигун. Який найчастіше управляється за допомогою відповідних перетворювальних управляючих пристроїв з метою формування статичних і динамічних характеристик електроприводу, що відповідають вимогам виробничого механізму. Може йти не тільки про надання машині обертальної або поступальної ходи, головним чином, про забезпечення за допомогою автоматизованого електроприводу оптимального режиму роботи машин. При якому досягається найбільша продуктивність при високій точності.

Структурна схема автоматизованого електроприводу приведена на рис.

1.1. У ній є три основні елементи:

а) механічна частина приводу МЧ, що включає робочий механізм РМ, передавальний пристрій ПП, призначений для передачі механічній енергії від електродвигунного пристрою електроприводу до виконавчого органу робочої машини і для зміни виду і швидкості руху і зусилля (моменту обертання);

б) електродвигунний пристрій ЕД, призначений для перетворення електричної енергії в механічну або механічної енергії в електричну. На схемі електродвигунний пристрій (або двигун) представлений такими елементами: електромеханічним перетворювачем енергії ЕМП (на вхід подаються електричні сигнали у вигляді напруги і струму), який перетворює електричну потужність в механічну потужність, і масою ротора двигуна РД, на яку впливає момент  $M$  двигуна при кутовій швидкості  $\omega$  [10];

в) система керування СК, яка складається з силової перетворювальної частини П (перетворювача), керуючого пристрою У, задаючого пристрою ЗП і датчиків зворотних зв'язків – електричних ДЗЗЕ і механічних ДЗЗМ1 і ДЗЗМ2. Перетворювач П призначений для живлення двигуна і створення керуючої дії на нього. Він перетворює рід струму, або напругу, або частоту, або змінює інші показники якості електричної енергії, що підводиться до двигуна. Пристрій У, що управляє перетворювачем П, отримує командні сигнали від задаючого пристрою ЗП, інформацію про поточний стан електроприводу і технологічного процесу – від датчиків зворотних зв'язків. З допомогою цих датчиків струм, напруга, потужність двигуна або інші його електричні параметри, швидкість, момент або зусилля і положення (переміщення) виконавчого органу, перетворюються на пропорційні цим параметрам електричні сигнали, до яких і подаються у керуючий пристрій У. У ньому поточний стан електроприводу і технологічного процесу порівнюється із заданим і за наявності розузгодження виробляється керуючий сигнал, який впливає через перетворювач П на електропривод в напрямі усунення виниклого розузгодження з необхідною точністю і швидкодією [10].

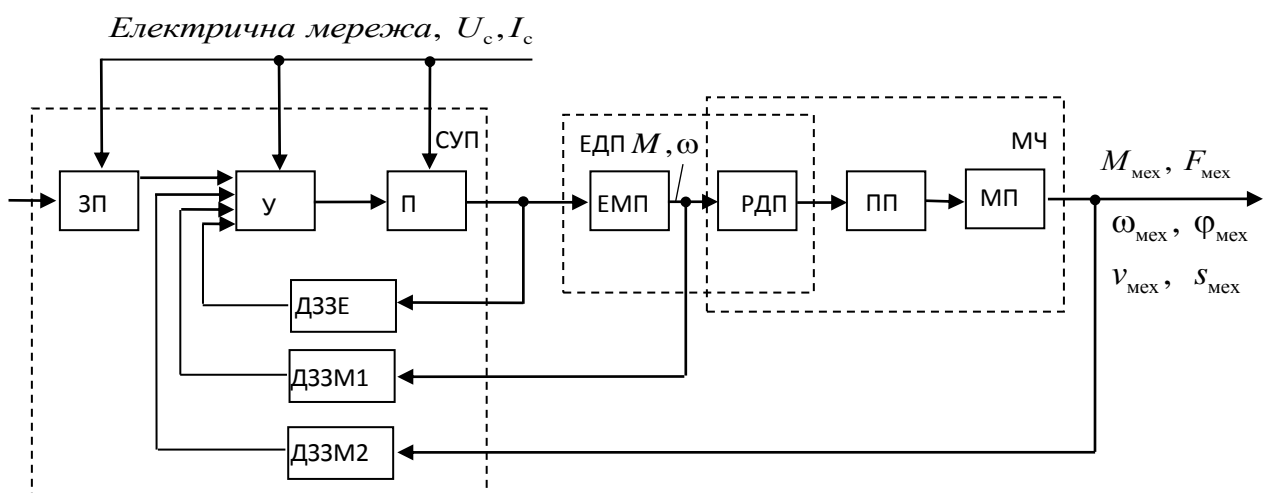


Рисунок 1.1 – Структурна схема автоматизованого електроприводу

### 1.1.1 Рівняння руху електроприводу

При умовах роботи електроприводу в сталому режимі, момент, що розвивається двигуном, рівний моменту опору механізму і швидкість приводу є постійною. Проте у багатьох випадках привід прискорюється або сповільнюється, і тоді виникає інерційна сила або інерційний момент, які двигун повинен долати, знаходячись в перехідному режимі. Таким чином, *перехідним режимом* електроприводу називають режим роботи при переході від одного сталого стану до іншого, коли змінюються швидкість, момент і струм [100].

Причинами виникнення перехідних режимів в електроприводах є або зміна навантаження, пов'язана з виробничим процесом, або дія на електропривод при управлінні ним, тобто пуск, гальмування, зміна напрямку обертання і т.п. Перехідні режими в електроприводах можуть виникнути також в результаті аварій або порушення нормальних умов електропостачання (наприклад, зміни напруги або частоти мережі, несиметрія напруги і т. п.).

Рівняння руху електроприводу повинне враховувати всі сили і моменти, що діють в перехідних режимах. При поступальній ході рушійна сила  $F$  завжди врівноважується силою опору машини  $F_c$  і інерційною силою  $m \frac{dV}{dt}$ , що виникає при змінах швидкості.

Відповідно до викладеного, рівняння рівноваги сил при поступальній ході записується так:

$$F - F_c = m \frac{dV}{dt}. \quad (1.1)$$

Аналогічне рівняння рівноваги моментів,  $H \cdot m$ , для обертального руху (рівняння руху приводу) має наступний вигляд:

$$M - M_c = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) показує, що обертаючий момент, що розвивається двигуном  $M$  врівноважується моментом опору  $M_c$  на його валу і інерційним або динамічним моментом  $J \frac{d\omega}{dt}$ . У (1.1) і (1.2) прийнято, що маса тіла  $m$  і відповідно момент інерції приводу  $J$  є постійними, що справедливо для значного числа виробничих механізмів.

*Інерційний* (динамічний) момент виявляється тільки під час перехідних режимів, коли змінюється швидкість приводу. При прискоренні приводу цей момент направлений проти руху, а при гальмуванні він підтримує рух. Інерційний момент як по значенню, так і по знаку визначається алгебраїчною сумою моментів двигуна і моменту опору.

При урахуванні сказаного про знаки моментів формула (1.2) відповідає роботі двигуна в руховому режимі при реактивному моменті опору (або при потенційному гальмуючому моменті опору). У загальному вигляді рівняння руху приводу може бути записане таким чином:

$$\pm M \mp M_c = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.3)$$

Вибір знаків перед значеннями моментів в (1.3) залежить від режиму роботи двигуна і характеру моментів опору.

### 1.1.2 Математичні моделі асинхронного двигуна у відносних одиницях

Асинхронні двигуни є найбільш розповсюдженим типом електродвигунів. На частку асинхронних двигунів припадає не менше ніж 80% всіх електродвигунів, що випускаються промисловістю. Сумарний обсяг

електроенергії, яка використовується для приведення в рух всіх приводів із асинхронними двигунами, складає більше 40% всієї споживаної електроенергії [99]. Електроприводи змінного струму та електроприводи з асинхронним двигуном у якості виконавчого органа зокрема, мають стабільний щорічний темп зростання обсягів продажу на світовому ринку, в той же час світовий попит на електроприводи постійного струму не має тенденції до збільшення.

Широке поширення асинхронних двигунів у сучасних електромеханічних системах пояснюється простотою їх конструкції, надійністю в експлуатації, невисокою вартістю і легкістю в обслуговуванні.

При цьому, в останній час найбільш пріоритетне значення, на ряду з оптимальним конструюванням асинхронних двигунів, набувають задачі оптимального моделювання електроприводів змінного струму та визначення ефективних режимів роботи [102].

Силові перетворювачі на базі мікропроцесорної техніки, котрі застосовуються як у сучасних приводах змінного, так і постійного струму, досягли дуже високого технічного рівня, який у більшості випадків дозволяє використовувати електроприводи змінного струму у тих сферах, де раніше застосовувались лише регульовані приводи постійного струму.

Таким чином, можна зазначити, що апаратне забезпечення перетворювачів частоти та мікроконтролерів, котрі використовуються у сучасних регульованих електроприводах змінного струму, є достатнім для програмної реалізації принципів керування. Крім того, на даний час широко розповсюджені електромеханічні системи з асинхронними двигунами у якості виконавчого органа, які стають найбільш імовірними об'єктами керування для регуляторів.

Основою при розробці математичної моделі асинхронного двигуна є математичний опис процесів електромеханічного перетворення енергії в електромеханічному перетворювачі [100]. Для коректного виконання компенсації динамічних властивостей окремих складових об'єкта керування за допомогою обернених моделей та математичного описання збуреного руху

системи всі розрахунки здійснені у системі відносних одиниць з рівними взаємними індуктивностями між статорними і роторними обмотками, а також між фазними обмотками ротора [59].

Принцип дії асинхронного двигуна можна описати системою диференціальних рівнянь в координатних осях  $x, y$ , що обертаються з довільною кутовою швидкістю  $\omega_k$ . Відносно нерухомої системи координат  $\alpha, \beta$  ( $\omega_k = 0$ ), ці рівняння мають наступний вигляд [72]:

$$\begin{cases} U_{sx} = I_{sx} R_s + p\Psi_{sx} - \omega_k \Psi_{sy}, \\ U_{sy} = I_{sy} R_s + p\Psi_{sy} + \omega_k \Psi_{sx}, \\ 0 = I_{rx} R_r + p\Psi_{rx} - (\omega_k - \omega) \Psi_{ry}, \\ 0 = I_{ry} R_r + p\Psi_{ry} + (\omega_k - \omega) \Psi_{rx}, \\ M = z_p \frac{m}{2} L_m (I_{sy} I_{rx} - I_{sx} I_{ry}), \end{cases} \quad (1.4)$$

де  $p$  – оператор диференціювання;

$\omega$  – кутова швидкість обертання ротора;

$U_s$  – вектор напруги статора;

$I_s, I_r$  – вектори струмів статора та ротора відповідно;

$\Psi_s, \Psi_r$  – вектори потокозчеплень статора та ротора відповідно;

$M$  – електромагнітний момент;

$R_s, R_r$  – активні опори обмоток статора та ротора відповідно;

$z_p$  – кількість пар полюсів електричної машини;

$m$  – кількість фаз;

$L_m$  – взаємна індуктивність обмоток ротора та статора;

$L_s, L_r$  – індуктивності обмоток статора та ротора відповідно.

Потокозчеплення – це фізична величина, що представляє собою сумарний магнітний потік, який зчіпляється з усіма витками котушки індуктивності.

Потокозчеплення можна записати у вигляді наступних виразів [72]:

$$\begin{cases} \Psi_{sx} = L_s I_{sx} + L_m I_{rx}, \\ \Psi_{sy} = L_s I_{sy} + L_m I_{ry}, \\ \Psi_{rx} = L_r I_{rx} + L_m I_{sx}, \\ \Psi_{ry} = L_r I_{ry} + L_m I_{sy}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для реалізації принципу векторного керування потрібно зорієнтувати систему координат, у якій записано рівняння (1.4) та (1.5) за базовим вектором потокозчеплення.

Введемо наступні базисні величини: напруга  $U_{\text{баз}}$ , струм  $I_{\text{баз}}, I_{s\text{ном}}$  – номінальний фазний струм обмотки статора,  $U_{s\text{ном}}$  – номінальна фазна напруга обмотки статора, частота  $\omega_{\text{баз}}$ , потокозчеплення  $\Psi_{\text{баз}}$ , момент  $M_{\text{баз}}$ .

З урахуванням базисних величин, введемо відносні змінні, необхідні для представлення математичних моделей асинхронного двигуна у відносних одиницях:

– для величин, що характеризують параметри керування

$$x_1 = \frac{\Psi_0}{\Psi_{\text{баз}}}, x_2 = \frac{I_{su}}{I_{\text{баз}}}, u_x = \frac{U_{su}}{U_{\text{баз}}}, y_1 = \frac{\omega}{\omega_{r\text{баз}}}, y_2 = \frac{I_{su}}{I_{\text{баз}}}, u_y = \frac{U_{sv}}{U_{\text{баз}}}; \quad (1.6)$$

– для величин, котрі можна розглядати в якості збурюючих дій

$$f_1 = \frac{\omega}{\omega_{r\text{баз}}}, f_2 = \frac{M_c}{M_{\text{баз}}}. \quad (1.7)$$

Використовуючи відносні одиниці (1.6) та (1.7), перетворимо рівняння, що описують асинхронний двигун у двофазній системі координат, орієнтованій за вектором  $\Psi_r$  [96, 97].

$$\left\{ \begin{array}{l} pI_{su} \frac{L_m R_r}{L_r^2 L_s'} \Psi_0 - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L_s'} I_{su} + \frac{1}{L_s'} U_{su} + I_{sv} \omega_k, \\ p\Psi_0 = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_0 + \frac{R_r L_m}{L_r} I_{su}, \\ pI_{sv} = -\frac{L_m}{L_r L_s'} \Psi_0 \omega - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L_s'} I_{sv} + \frac{1}{L_s'} U_{sv} - I_{su} \omega_k, \\ p\omega = \frac{3z_p L_m}{2J L_r} I_{sv} \Psi_0 - \frac{M_c}{J}. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Використовуючи рівняння (1.8) можна побудувати структурну схему асинхронного двигуна у двофазній ортогональній системі координат, орієнтованій за вектором потокозчеплення ротора, а також створити його модель у будь-якому програмному середовищі.

Структурна схема двигуна, побудована за рівняннями (1.8), представлена на рис. 1.2.

Підставивши вирази для  $\Psi_0$ ,  $I_{su}$ ,  $U_{su}$ ,  $\omega$ ,  $I_{sv}$ ,  $U_{sv}$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  з (1.6) та (1.7) до (1.8), отримаємо наступну систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} pI_{\bar{\alpha}\alpha} x_2 = \frac{L_m R_r}{L_r^2 L_s'} \Psi_{\bar{\alpha}\alpha} x_1 - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L_s'} I_{\bar{\alpha}\alpha} x_2 + \frac{1}{L_s'} U_{\bar{\alpha}\alpha} u_x + I_{\bar{\alpha}\alpha} y_2 \omega_{\bar{\alpha}\alpha} f_1, \\ p\Psi_{\bar{\alpha}\alpha} x_1 = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_{\bar{\alpha}\alpha} x_1 + \frac{R_r L_m}{L_r} I_{\bar{\alpha}\alpha} x_2, \\ pI_{\bar{\alpha}\alpha} y_2 = -\frac{L_m}{L_r L_s'} \Psi_{\bar{\alpha}\alpha} x_1 \omega_{r\bar{\alpha}\alpha} y_1 - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L_s'} I_{\bar{\alpha}\alpha} y_2 + \frac{1}{L_s'} U_{\bar{\alpha}\alpha} u_y - I_{\bar{\alpha}\alpha} x_2 \omega_{\bar{\alpha}\alpha} f_1, \\ p\omega_{r\bar{\alpha}\alpha} y_1 = \frac{3z_p L_m}{2J L_r} \Psi_{\bar{\alpha}\alpha} x_1 I_{\bar{\alpha}\alpha} y_2 - \frac{M_{\bar{\alpha}\alpha} f_2}{J}. \end{array} \right.$$



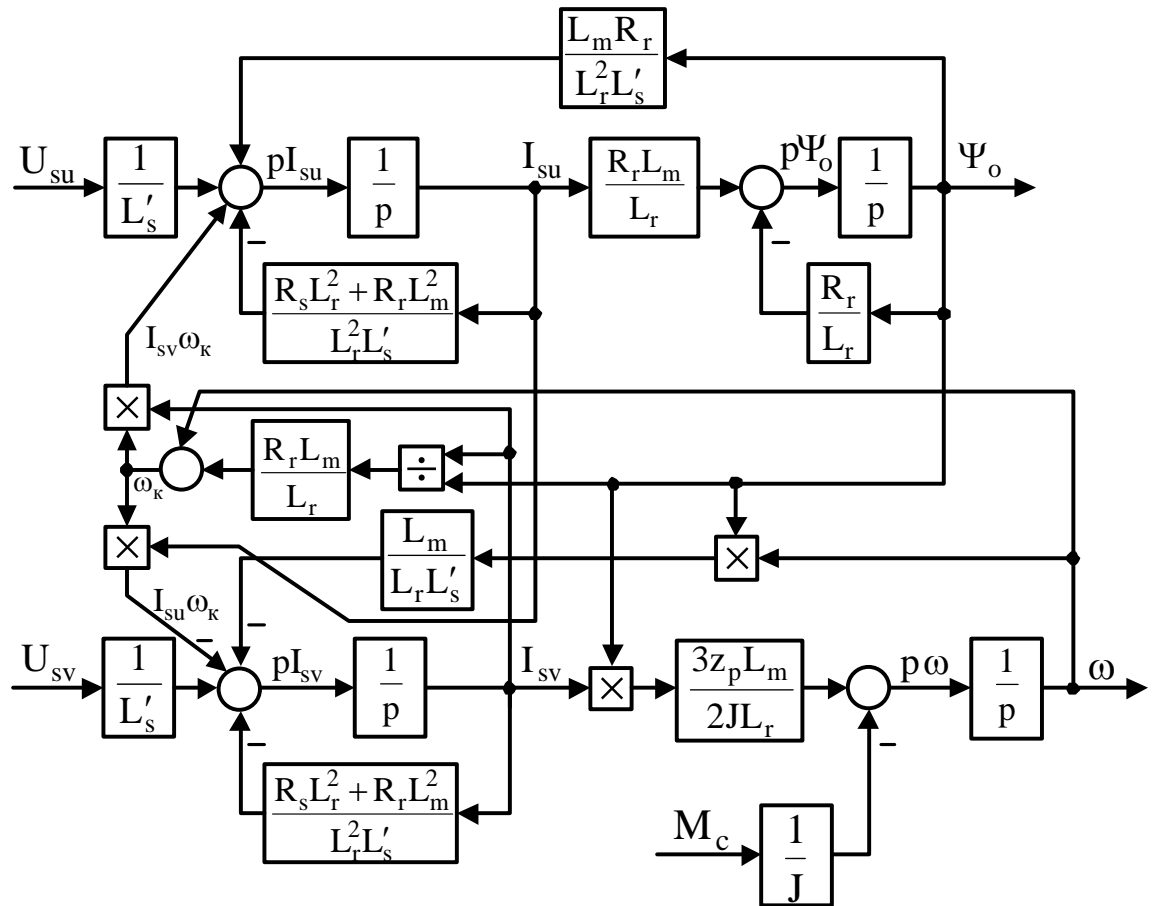


Рисунок 1.2 – Структурна схема асинхронного двигуна при орієнтації системи координат за вектором  $\Psi_r$

Перетворимо отримані рівняння, виділяючи у їх лівих частинах складові  $px_1, px_2, py_1$  та  $py_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} px_2 = \frac{L_m R_r}{L_r^2 L'_s} \cdot \frac{\Psi_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{I_{\bar{\alpha}\alpha 3}} x_1 - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L'_s} x_2 + \frac{1}{L'_s} \cdot \frac{U_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{I_{\bar{\alpha}\alpha 3}} u_x + \omega_{\bar{\alpha}\alpha 3} f_1 y_2, \\ px_1 = -\frac{R_r}{L_r} x_1 + \frac{R_r L_m}{L_r} \cdot \frac{I_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{\Psi_{\bar{\alpha}\alpha 3}} x_2, \\ py_2 = -\frac{L_m}{L_r L'_s} \cdot \frac{\Psi_{\bar{\alpha}\alpha 3} \omega_{r\bar{\alpha}\alpha 3}}{I_{\bar{\alpha}\alpha 3}} x_1 y_1 - \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L'_s} y_2 + \frac{1}{L'_s} \cdot \frac{U_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{I_{\bar{\alpha}\alpha 3}} u_y - \omega_{\bar{\alpha}\alpha 3} f_1 x_2, \\ py_1 = \frac{3z_p L_m}{2J L_r} \cdot \frac{I_{\bar{\alpha}\alpha 3} \Psi_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{\omega_{r\bar{\alpha}\alpha 3}} x_1 y_2 - \frac{M_{\bar{\alpha}\alpha 3}}{J \omega_{r\bar{\alpha}\alpha 3}} f_2, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

а також введемо наступні узагальнюючі коефіцієнти:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{R_r}{L_r}; a_{12} = \frac{R_r L_m}{L_r} \cdot \frac{I_{\bar{\sigma}a3}}{\Psi_{\bar{\sigma}a3}}; a_{21} = -\frac{L_m R_r}{L_r^2 L'_s} \cdot \frac{\Psi_{\bar{\sigma}a3}}{I_{\bar{\sigma}a3}}; a_{22} = -\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L'_s}; \\
c_2 &= \frac{1}{L'_s} \cdot \frac{U_{\bar{\sigma}a3}}{I_{\bar{\sigma}a3}}; b_{12} = \frac{3z_p L_m}{2J L_r} \cdot \frac{I_{\bar{\sigma}a3} \Psi_{\bar{\sigma}a3}}{\omega_{r\bar{\sigma}a3}}; b_{21} = -\frac{L_m}{L_r L'_s} \cdot \frac{\omega_{r\bar{\sigma}a3} \Psi_{\bar{\sigma}a3}}{I_{\bar{\sigma}a3}}; \\
b_{22} &= -\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r^2 L'_s}; \zeta_1 = \omega_{\bar{\sigma}a3}; \zeta_2 = -\frac{M_{\bar{\sigma}a3}}{J \omega_{r\bar{\sigma}a3}}; \zeta_3 = -\omega_{\bar{\sigma}a3}.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (1.9) можна представити з урахуванням узагальнюючих коефіцієнтів наступним чином [98]:

$$\begin{cases}
px_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\
px_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2u_x + \zeta_1 f_1 y_2, \\
py_1 = b_{12}x_1 y_2 + \zeta_2 f_2, \\
py_2 = b_{21}x_1 y_1 + b_{22}y_2 + c_2 u_2 + \zeta_3 f_1 x_2.
\end{cases} \quad (1.10)$$

Швидкість обертання системи координат при введенні відносних одиниць

$$\omega_k = \frac{R_r L_m}{L_r \Psi_0} I_{sv} + \omega = \frac{R_r L_m}{L_r \Psi_{\bar{\sigma}a3} x_1} I_{\bar{\sigma}a3} y_2 + \omega_{r\bar{\sigma}a3} y_1 = \frac{R_r L_m I_{\bar{\sigma}a3}}{L_r \Psi_{\bar{\sigma}a3}} \cdot \frac{y_2}{x_1} + \omega_{r\bar{\sigma}a3} y_1.$$

Тоді збурюючі дії  $f_1$  та  $f_2$  можна представити виразами

$$\left. \begin{aligned}
f_1 &= \frac{\omega_k}{\omega_{\bar{\sigma}a3}} = \frac{R_r L_m I_{\bar{\sigma}a3}}{L_r \Psi_{\bar{\sigma}a3} \omega_{\bar{\sigma}a3}} \cdot \frac{y_2}{x_1} + \frac{\omega_{r\bar{\sigma}a3}}{\omega_{\bar{\sigma}a3}} y_1 = \zeta_4 \cdot \frac{y_2}{x_1} + \zeta_5 y_1, \\
f_2 &= \frac{M_c}{M_{\bar{\sigma}a3}},
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

де

$$\zeta_4 = \frac{R_r L_m I_{\bar{\sigma}a3}}{L_r \Psi_{\bar{\sigma}a3} \omega_{\bar{\sigma}a3}}; \zeta_5 = \frac{\omega_{r\bar{\sigma}a3}}{\omega_{\bar{\sigma}a3}} = \frac{1}{z_p}.$$

Таким чином, рівняння (1.10) та (1.11) дозволяють виконати вичерпний математичний опис асинхронного двигуна у відносних одиницях у двофазній ортогональній системі координат, орієнтованій за вектором потокозчеплення ротора. Представлення величин у відносних одиницях істотно спрощує теоретичні викладки і надає наочності результатам розрахунків [97].

Структурна схема двигуна, побудована за рівняннями (1.10) та (1.11), представлена на наступному рисунку:

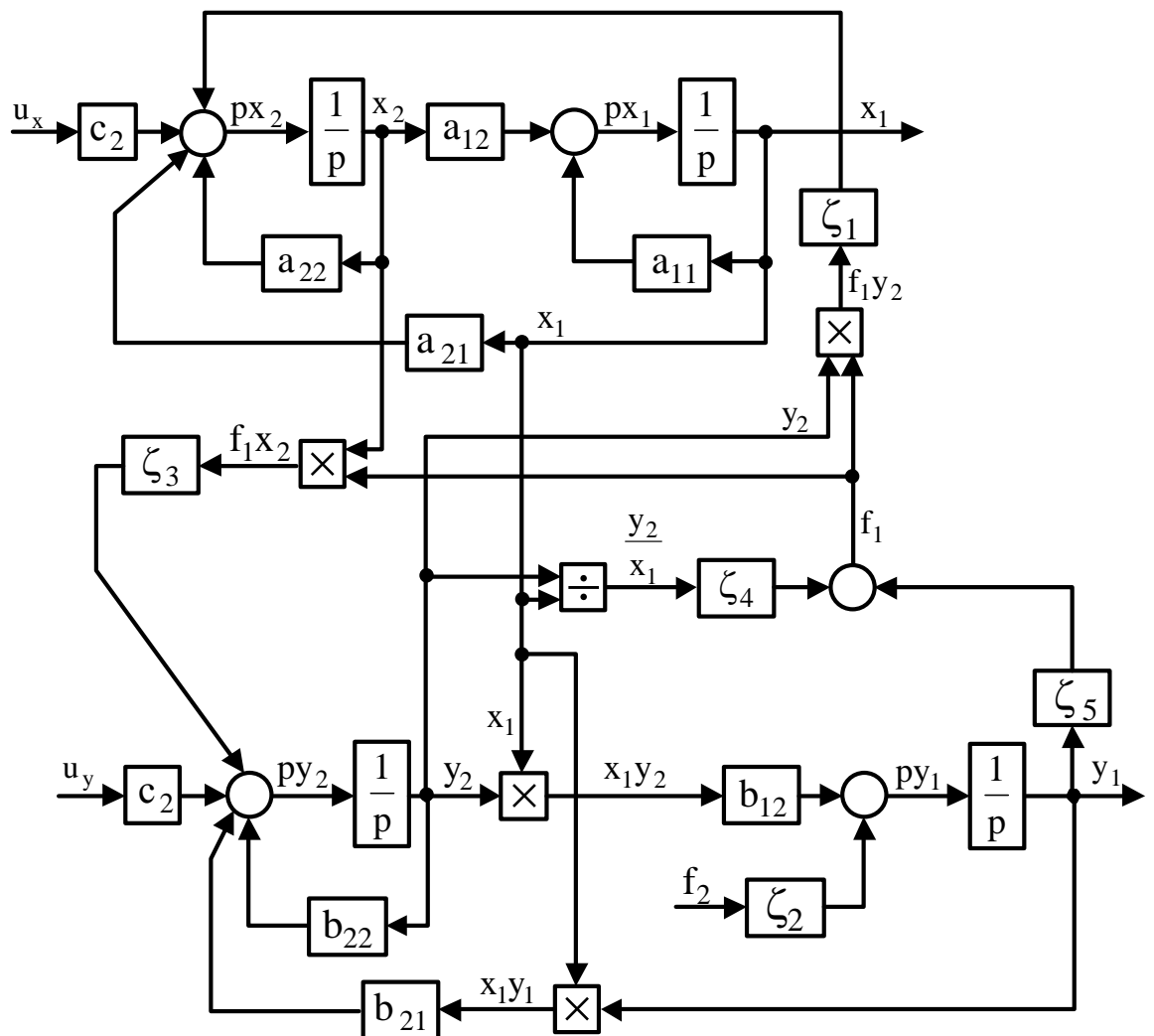


Рисунок 1.3 – Структурна схема асинхронного двигуна у відносних одиницях при орієнтації системи координат за вектором  $\Psi_r$

1.2 Математичні моделі електромеханічних систем керування, які зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь

1.2.1 Математична модель системи тиристорний перетворювач - двигун постійного струму незалежного збудження

Складемо первинні диференціальні рівняння в системі електропривода типа тиристорний перетворювач-двигун постійного струму (ТП-ДПС), не враховуючи інерційність тиристорного перетворювача і якірного ланцюга двигуна [26]. Тоді привід описується системою з астатизмом першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_m} x_2(t) + \frac{K_\delta K_{mn}}{T_m} \cdot u(t). \end{cases}$$

Введемо позначення:  $a = \frac{1}{T_m}$ ;  $b = \frac{K_\delta K_{mn}}{T_m}$ .

Тоді

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -ax_2(t) + b \cdot u(t), \text{ при } |u(t)| \leq u^*, \end{cases} \quad (1.12)$$

де  $u(t)$  – вхідна величина напруги ланцюга якоря;

$x_1(t)$  – кут обертання валу двигуна;

$x_2(t)$  – кутова швидкість якоря двигуна.

Хай  $U(t) \leq 1$ . Виберемо керування  $u(x_1, x_2)$ , яке переводить фазову точку системи (1.12) з початкового стану в начало координат  $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$  за мінімальний час. Так математична модель системи має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_d K_{mn}}{T_m} \end{bmatrix}.$$

Тоді система диференціальних рівнянь з оптимальним законом керування має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -ax_2(t) + \\ + b \cdot u * \text{sign} \left[ \left( -x_1(t) - \frac{x_2(t)}{a} + \frac{b}{a^2} \ln \left( 1 + \frac{a|x_2(t)|}{b} \right) \right) \text{sign}(x_2(t)) \right]. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.2.2 Математичні моделі двигуна постійного струму незалежного збудження, які зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь 2 та 3 порядків

Оператор об'єкта керування [20]

$$K_D(p) = \frac{K_D}{T_E T_M p^2 + T_M p + 1} = \frac{\omega_D(t)}{U_D(t)}, \quad (1.14)$$

де  $T_E$  і  $T_m$  – відповідно електромагнітна та електромеханічна постійні часу двигуна постійного струму (об'єкта керування);

$K_D$  – коефіцієнт підсилення двигуна;

$U_D$  – напруга посилення потужності.

Оператору (1.14) відповідає диференціальне рівняння

$$T_E T_M \frac{d^2 \omega_D(t)}{dt^2} + T_M \frac{d\omega_D(t)}{dt} + \omega_D(t) = K_D U_D(t) \quad (1.14)$$

або

$$\frac{d^2 \omega_D(t)}{dt^2} + \frac{1}{T_e} \frac{d\omega_D(t)}{dt} + \frac{1}{T_E T_M} \omega_D(t) = \frac{K_D}{T_E T_M} U_D(t). \quad (1.15)$$

У якості змінних стану виберемо  $\omega(t)$  – швидкість обертання вала двигуна,  $I_D(t)$  – струм у якірному ланцюзі двигуна.

$$X_1(t) = \omega_D(t),$$

$$X_2(t) = \dot{\omega}_D(t) = \dot{X}_1(t). \quad (1.16)$$

З рівняння (1.15) знайдемо

$$\dot{X}_2(t) = -\frac{1}{T_E} \dot{\omega}_D(t) - \frac{1}{T_E T_M} \omega_D(t) + \frac{K_D}{T_E T_M} U_D(t). \quad (1.17)$$

Тоді

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = 0 \cdot X_1(t) + X_2(t) + 0 \cdot U_D(t); \\ \dot{X}_2(t) = -\frac{1}{T_E T_M} X_1(t) - \frac{1}{T_E} X_2(t) + \frac{K_D}{T_E T_M} U_D(t). \end{cases} \quad (1.18)$$

Вектор виходу

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Тоді

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_E T_M} & -\frac{1}{T_E} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_D}{T_E T_M} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0. \quad (1.20)$$

Для системи автоматичного керування

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot U(t); \quad \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t). \quad (1.21)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad (1.22)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0]; \quad x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T.$$

На рис. 1.4 показана схема математичної моделі системи керування, побудованої по рівняннях (1.22).

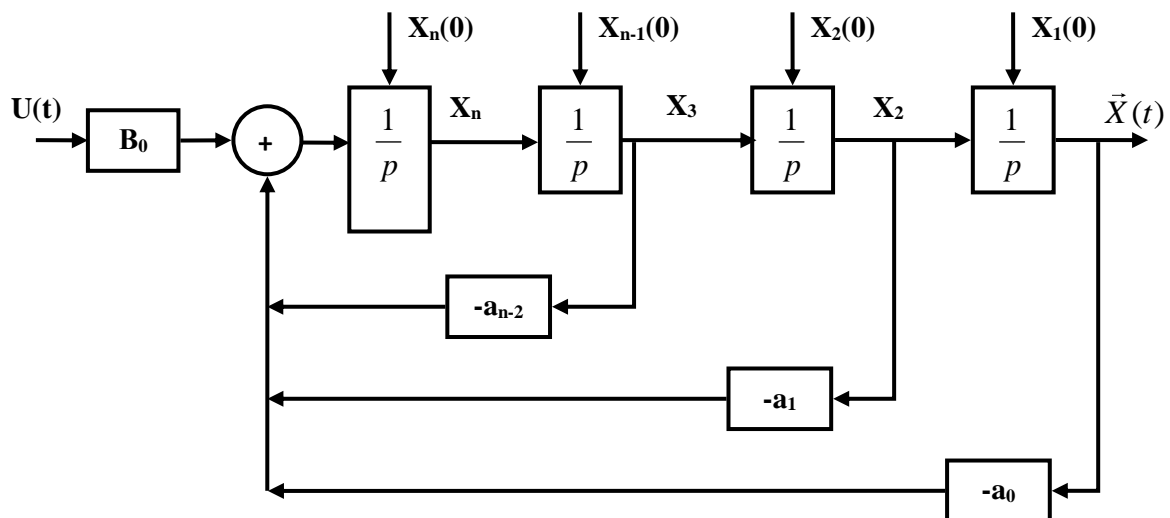


Рисунок 1.4 – Структурна схема математичної моделі системи автоматичного керування

### 1.2.3 Математична модель двомасової системи автоматичного керування

Більшість сучасних систем автоматичного керування будується за принципом зворотного зв'язку [33]. Для регулювання швидкості обертання робочого механізму  $\omega_m(t)$  система автоматичного керування включає регулятор швидкості РШ і підпорядкований йому регулятор струму (РС) (рис. 1.5).

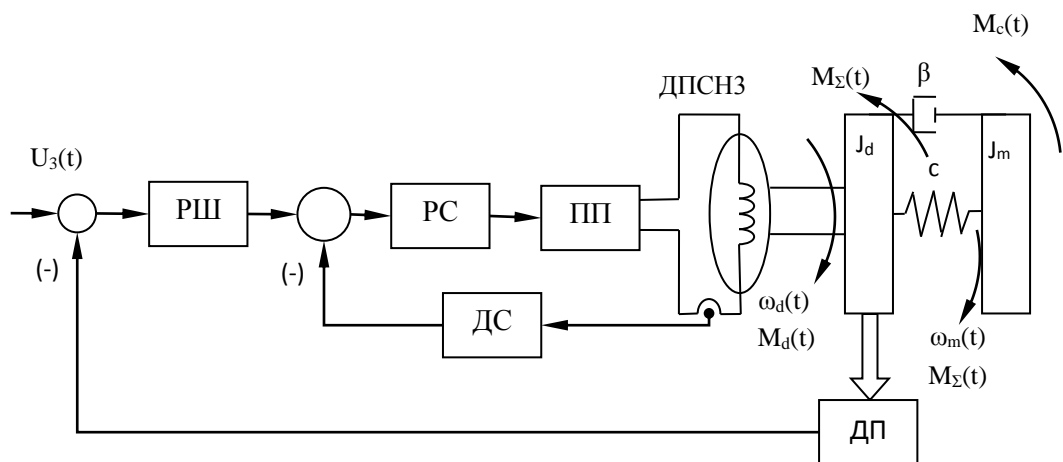


Рисунок 1.5 – Функціональна схема двомасової САК

Якірна обмотка двигуна працює від підсилювача потужності ПП (транзисторного або тиристорного), швидкість двигуна  $\omega_d(t)$  вимірюється за допомогою датчика швидкості ДШ. Вал двигуна з моментом інерції  $J_d$  механічно з'єднаний із робочим механізмом і пружним зв'язком із коефіцієнтом жорсткості  $c$ , і коефіцієнтом в'язкого тертя  $\beta$ . Приведений момент інерції робочого механізму дорівнює  $J_m$ . Система має два замкнених контурів управління: контур струму і контур швидкості двигуна. Замкнений контур струму, який настроєний на модульний оптимум, включає компенсаційну постійну часу  $T_c$  якірного ланцюга двигуна, за допомогою



пропорційно-інтегрального (ПІ) регулятора, і має одну малу некомпенсаційну постійну часу  $T_{\mu c}$  контуру струму.

Для побудови векторної матричної моделі двомасової САК необхідно основні диференціальні рівняння динаміки записати у наступному вигляді

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\beta/J_m \cdot \omega_m(t) + 1/J_m \cdot M_y(t) + \beta/J_m \cdot \omega_d(t) - 1/J_m M_c(t);$$

$$\frac{dM_y(t)}{dt} = -c \cdot \omega_m(t) + c \cdot \omega_d(t);$$

$$\frac{d\omega_d(t)}{dt} = \beta/J_d \cdot \omega_m(t) - 1/J_d \cdot M_y(t) - \beta/J_d \cdot \omega_d(t) + 1/J_d \cdot M_d(t);$$

$$\frac{dM_d(t)}{dt} = \rho(t);$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -K_n K_v / T_{\mu c} \omega_d(t) - K_v / T_{\mu c} M_d(t) - 1/T_{\mu c} \rho(t) + K_v / T_{\mu c} U_1(t) + K_n K_v / T_{\mu c} \omega_3(t);$$

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = -K_i \cdot \omega_d(t) + K_i \cdot \omega_3(t).$$

Векторно-матрична форма системи автоматичного керування має вигляд [33]

$$\dot{\vec{X}} = A \cdot \vec{X}(t) + B \cdot \vec{U}(t);$$

$$\vec{Y}(t) = C \cdot \vec{X}(t),$$

де  $A$  – матриця стану розміром  $n \times n$ ;

$B$  – матриця управління розміру  $n \times m$ ;

$C$  – матриця виходу розміру  $r \times n$ ;

$\vec{X}(t)$  – вектор стану системи розміру  $n \times 1$ ;

$U(t)$  – вектор управління розміру  $m \times 1$ ;

$\vec{Y}(t)$  – вектор виходу.

Введемо вектор стану двомасової системи автоматичного керування

$$\vec{X}(t) = \{\omega_m(t), M_y(t), \omega_d(t), M_d(t), \rho(t), U_1(t)\}^T,$$

де  $\omega_m(t)$  – швидкість обертання робочого механізму;

$M_y(t)$  – пружний момент;

$\omega_d(t)$  – швидкість обертання ротору двигуна;

$M_d(t)$  – момент двигуна;

$\rho(t)$  – ривок двигуна;

$U_1(t)$  – вихідна напруга інтегрувальної складової ПІ регулятора швидкості.

Тоді матриця стану  $A$ , управління  $B$  та виходу  $C$  приймуть наступний вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\beta}{J_m} & \frac{1}{J_m} & \frac{\beta}{J_m} & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{J_d} & -\frac{1}{J_d} & -\frac{\beta}{J_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_n k_v}{T_{\mu c}} & -\frac{k_v}{T_{\mu c}} & -\frac{1}{T_{\mu c}} & -\frac{k_v}{T_{\mu c}} \\ 0 & 0 & -k_i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{J_m} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_n k_v}{T_{\mu c}} & 0 \\ k_i & 0 \end{vmatrix}; \quad (1.31)$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

### 1.2.4 Математична модель трьохмасової системи автоматичного керування

Функціональна схема трьохмасової системи автоматичного керування (САК) має таку ж структуру, як і двомасова САК [33]. Для регулювання швидкості  $\omega_m(t)$  обертання робочого механізму САК включає регулятор швидкості РШ і підпорядкований йому регулятор струму (рис 1.6). Якірна обмотка двигуна працює від підсилювача потужності ПП (транзисторного або тиристорного), швидкість двигуна  $\omega_d(t)$  вимірюється за допомогою датчика швидкості ДШ. Вал двигуна з моментом інерції  $J_d$  механічно з'єднується з редуктором пружним зв'язком  $M_{y1}(t)$  швидкохідного вала із коефіцієнтом жорсткості  $c_1$  і коефіцієнтом в'язкого тертя  $\beta_1$ . Вал редуктора з моментом інерції  $J_p$  з'єднаний із робочим механізмом з моментом інерції  $J_m$  пружним зв'язком  $M_{y2}(t)$  тихохідного вала, а також коефіцієнтом жорсткості  $c_2$  і коефіцієнтом в'язкого тертя  $\beta_2$ .

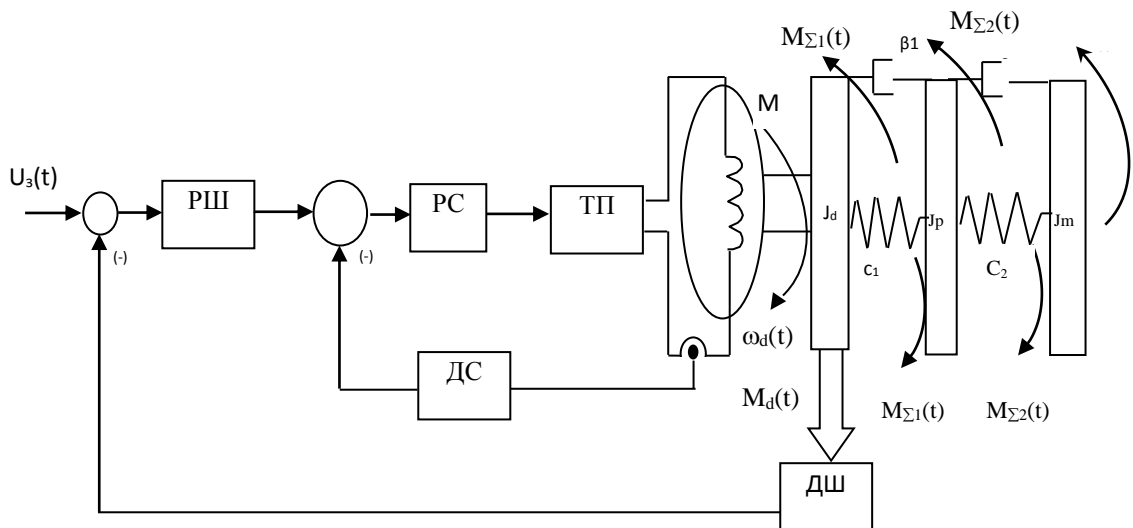


Рисунок 1.6 – Функціональна схема трьохмасової САК

Складаємо систему диференційних рівнянь трьохмасової САК:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI_{\delta}(t)}{dt} = -\alpha_T \cdot I_{\delta}(t) + K_{PC} \cdot \omega_3(t) - K_{PC} \cdot \omega_{\delta}(t); \\ \frac{d\omega_{\delta}(t)}{dt} = \frac{1}{J_{\delta}} I_{\delta}(t) - \frac{\beta_1}{J_{\delta}} \omega_{\delta}(t) + \frac{\beta_1}{J_{\delta}} \omega_p(t) - \frac{1}{J_{\delta}} M_{y1}(t); \\ \frac{d\omega_p(t)}{dt} = \frac{\beta_1}{J_p} \omega_{\delta}(t) + \left( \frac{-\beta_1 - \beta_2}{J_p} \right) \omega_p(t) + \frac{\beta_2}{J_p} \omega_m(t) + \frac{1}{J_p} M_{y1}(t) - \frac{1}{J_p} M_{y2}(t); \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{\beta_2}{J_m} \omega_p(t) - \frac{\beta_2}{J_m} \omega_m(t) + \frac{1}{J_m} M_{y2}(t) - \frac{1}{J_m} M_C(t); \\ \frac{dM_{y1}(t)}{dt} = c_1 \cdot \omega_{\delta}(t) - c_1 \cdot \omega_p(t); \\ \frac{dM_{y2}(t)}{dt} = c_2 \cdot \omega_p(t) - c_1 \cdot \omega_m(t). \end{array} \right.$$

Введемо вектор стану трьохмасової системи

$$\bar{X}(t) = \{I_{\delta}(t), \omega_{\delta}(t), \omega_p(t), \omega_m(t), M_{y1}(t), M_{y2}(t)\}^T,$$

де  $I(t)$  – струм двигуна,  $\omega_{\delta}$  – швидкість обертання ротора двигуна,  $\omega_m$  – швидкість обертання робочого механізму,  $\omega_p$  – швидкість обертання редуктора,  $M_{y1}$ ,  $M_{y2}$  – пружний момент швидкохідного і тихохідного вала.

Тоді диференціальні рівняння можна записати у векторно-матричній формі:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_T & -K_{PC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{\delta}} & -\frac{\beta_1}{J_{\delta}} & \frac{\beta_1}{J_{\delta}} & 0 & -\frac{1}{J_{\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{J_p} & -\frac{\beta_1}{J_p} - \frac{\beta_2}{J_p} & \frac{\beta_2}{J_p} & \frac{1}{J_p} & -\frac{1}{J_p} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2}{J_m} & -\frac{\beta_2}{J_m} & 0 & \frac{1}{J_m} \\ 0 & c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} K_{pc} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

де  $A$  – матриця стану,  $B$  – керування (по заданому та збуджуючому впливах) та  $C$  – виходу [33].

### 1.2.5 Математична модель електромеханічного слідкуючого приводу

Розглянемо систему керування електроприводом з редуктором (Ред), принципова схема якої приведена на рис. 1.7. В системі входом є кут повороту ротора сельсина-датчика  $\varphi_1$ , а виходом – кут повороту ротора сельсина-трансформатора  $\varphi_2$ .

При наявності кута неузгодженості  $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2$  на вихідній обмотці сельсина-трансформатора виникає напруга змінного струму, що після випрямлення у фазочутливому випрямлячі та посилення в посилювачі напруги (ПН) та посилювачі потужності (ПП) викликає обертання двигуна (М) таким чином, щоб звести  $\varepsilon$  до нуля.

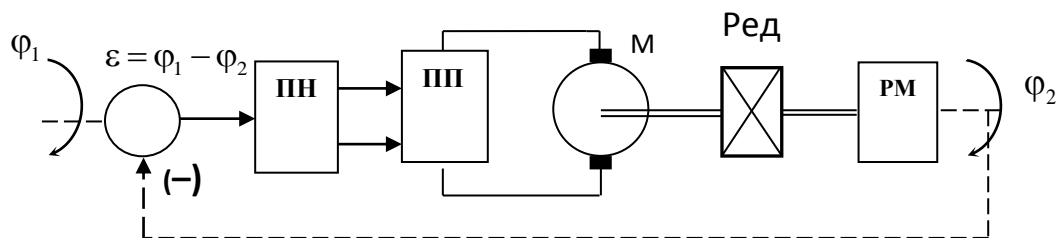


Рисунок 1.7 – Принципова схема системи керування електроприводом

Математична модель замкненого регульованого електроприводу представлена у наступному вигляді [20]:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = K_{red} \cdot X_2(t); \\ \frac{dX_2}{dt} = -\frac{1}{T_e} \cdot X_2(t) + \frac{1}{T_e} \cdot X_3(t); \\ \frac{dX_3}{dt} = -\frac{K_\varepsilon \cdot K_{nn} \cdot K_{nn} \cdot K_d}{T_m} \cdot X_1(t) - \frac{1}{T_m} \cdot X_3(t) + \frac{K_\varepsilon \cdot K_{nn} \cdot K_{nn} \cdot K_d}{T_m} \cdot U(t), \end{cases}$$

де  $T_e$  і  $T_m$  – відповідно електромагнітна та електромеханічна постійні часу двигуна постійного струму (об'єкта керування);  $K_d$  – коефіцієнт підсилення двигуна;  $K_\varepsilon$  – коефіцієнт підсилення вимірювального пристрою;  $K_{nn}$  – коефіцієнт підсилення попереднього підсилювача напруги;  $K_{red}$  – коефіцієнт передачі редуктора. У якості змінних стану виберемо:  $X_1(t)$  – кут повороту валу робочого механізму;  $X_2(t) = \frac{dX_1}{dt}$  – швидкість обертання валу двигуна,

$X_3(t) = \frac{dX_2}{dt}$  – струм якоря двигуна.

Тоді математична модель електромеханічного слідкуючого приводу в матричній формі має вигляд:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x}(t) + B \cdot \vec{U}(t),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K_{red} & 0 \\ 0 & -1/T_e & 1/T_e \\ -(K_\varepsilon \cdot K_{nn} \cdot K_{nn} \cdot K_d)/T_m & 0 & -1/T_m \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_e \cdot K_{nn} \cdot K_{mn} \cdot K_d / T_m \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = 0.$$

Алгоритмічна схема електромеханічного слідкуючого приводу наведена на рис. 1.8.

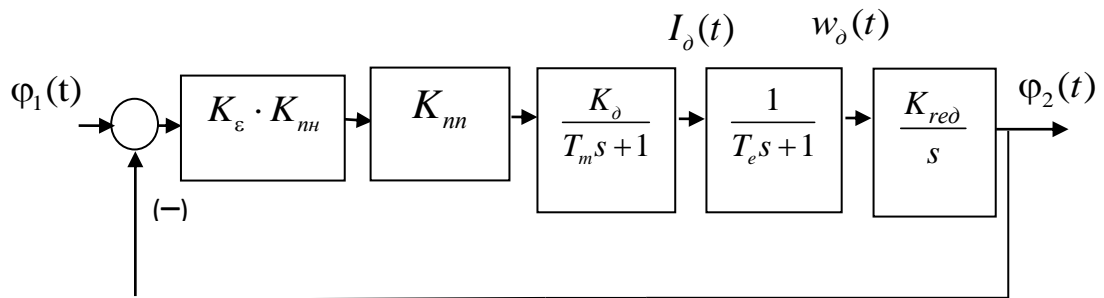


Рисунок 1.8 – Алгоритмічна схема системи керування електроприводом

За принципом слідкуючих систем працюють системи наведення. У слідкуючих системах антени радіолокаційної станції неузгодженістю є кутова помилка між радіолокаційним променем і напрямком на об'єкт; виконавчий пристрій – електропривод антени. Аналогічна проблема існує для керування становищем опорно-поворотних пристроїв оптоелектронних систем спостереження за рухомими об'єктами в повітряному, наземному та морському просторах.

### 1.3 Аналітичний огляд методів наближеного розв'язання задач оптимального керування

Задача керування диференціальними рівняннями та їх системами є однією з важливіших задач теорії керування [21]. Перші математичні задачі у вигляді крайових, початково-крайових задачі для рівнянь з частинними похідними з умовами спряження були розглянуті А.М. Тихоновим та О.А. Самарським [73]. В цій роботі ними отримані аналітичні розв'язки для деяких класів найпростіших задач.

На сьогодні значна кількість робіт (монографій та окремих статей), присвячених математичному опису та дослідженню різноманітних процесів, що протікають у багатокомпонентних середовищах. На початок 80-х років 20-го сторіччя значного розвитку отримали базові численні методи – методи скінченних елементів та методи скінченних різниць для вирішення основних класів задач математичної фізики з гладкими розв'язками. Також були розроблені методології побудови ефективних обчислювальних схем підвищеного порядку точності для таких задач.

У роботі [58] І.М. Молчанова та Л.Д. Миколаєнко отримано функціонал енергії для звичайного диференційного рівняння 2-го порядку з умовами спряження короткого слабо проникливого включення з крайовими умовами. Автори побудували схеми підвищеного порядку точності дискретизації цієї задачі та для дослідження питання існування єдиного розв'язку, що допускає розрив, дослідили клас неперервних функцій.

У роботі [21] В.С. Дейнека для двовимірного еліптичного рівняння 2-го порядку з крайовими умовами та умовами спряження (з розривним рішенням) на довільно орієнтованому внутрішньому відрізку запропонував інший підхід отримання класичного функціоналу енергії, який був оснований на використанні класу функцій, що допускають розрив на згаданому відрізку. Цей підхід був використаний ним же при доведенні теореми про існування та єдиність узагальненого розв'язку розглянутої крайової задачі.

Грунтовний виклад теоретичних і практичних аспектів чисельного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь містить колективна монографія під редакцією Дж. Холла і Дж. Уатта [79].

Відмітимо, що питання стійкості, точності, збіжності досить великої кількості методів розглянуті в монографії Х. Штеттер [82].

Зауважимо що, методи оптимізації можна поділити на детерміновані, недетерміновані і методи, які використовують комбінацію детермінованих методів з елементами випадкового пошуку. Монографії, присвячені опису теоретичних результатів і чисельних методів оптимізації, наведені в



наступних роботах [4, 5, 12, 16, 65, 37, 22, 23, 64, 67, 71, 80].

Розробка чисельних методів розв'язання найпростішого варіанту задачі одновимірної оптимізації – пошуку мінімуму функції однієї змінної – і в наступний час є актуальним завданням не тільки по причині популярності таких завдань, а й тому, що велика кількість чисельних методів оптимізації заснована, в кінцевому рахунку, на зведенні задачі до послідовності одновимірних пошуків (спусків). Класичні методи вирішення цього завдання (метод дихотомії, метод числа Фібоначчі, метод Золотого перетину) наведені в [26]. Роботи, присвячені цій проблемі, продовжують з'являтися на сторінках наукових видань [77].

Відмітимо, що до найбільш відомих результатів в проблемі підвищення ефективності чисельного інтегрування жорстких систем ЗДР відносяться наступні: Д. Дальквіст [89] ввів поняття  $A$  – стійкості методів і запропонував спосіб для дослідження методу на  $A$  – стійкість. Б.Л. Ель [90] ввів поняття стійкості, яка поширює можливості методів для збільшення кроку інтегрування в рамках необхідної точності інтегрування. Б.Л. Ель [91], С.С. Артем'єв і Г.В. Демідов [2] розвивають і удосконалюють методи типу Г. Розенброка. С.О. Фатунла [93] наводить опис нового методу з використанням експоненційних апроксимацій, С.В. Гір [92] пропонує так званий BDF – метод зворотного диференціювання, який використовує апроксимацію похідної шуканої функції на кроці інтегрування у вигляді лінійної комбінації значень функції в  $K$  точках, де  $K$  – порядок методу.

Аналіз відомих методів розв'язання задачі Коші та початково – крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними дозволяє виділити наступні методи:

- класичні методи [70], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді скінченних або нескінченних сум відомих функцій (ортогональних поліномів, тригонометричних функцій, спеціальних функцій тощо), або у вигляді сингулярних інтегралів тощо;

– метод скінченних різниць [68], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді таблиці значень у заданій системі точок області інтегрування;

– оптимальний метод скінченних елементів (ОМСЕ) [42–47], у якому координатні функції не задаються заздалегідь, а знаходяться як невідомі сталі в методі скінченних елементів – методом мінімізації функціоналу енергії, що відповідає поставленій крайовій задачі.

Вказані методи дозволяють знайти наближені розв'язки, що у все більшій мірі залежні від оператора крайовій задачі і правої частини, причому метод диференціальних рівнянь або метод інтегральних співвідношень А.О. Дородніцина можуть бути отримані як частинні випадки методу лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, оптимальний метод скінченних елементів може розглядатися, як частинний випадок методу метод зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

В роботі [48] запропоновано метод наближеного розв'язання двоточної крайової задачі для лінійного звичайного диференціального рівняння, згідно з яким наближений розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації системи лінійно незалежних функцій, а невідомі сталі знаходяться з умови найкращого наближення правої частини рівняння лінійною комбінацією функцій, що отримуються застосуванням диференціального оператора крайової задачі до наближеного розв'язку.

Згідно з відомим правилом обчислювальної математики, наближуючий оператор, що враховує більше властивостей наближуваної функції, може мати кращі апроксимативні характеристики. Це правило використовується, зокрема, при побудові алгоритмів без насичення [3, 14], у адаптивних системах методу скінченних елементів [50, 86], також у роботі [84], де базисні функції задаються, а вузли елементів згущуються навколо точок з особливостями за деяким законом тощо. В роботах [27, 29, 51] досліджувалося наближення функцій класу  $C[0,1]$  і класу  $W_2^1[0,1]$  сплайнами

першого ступеня. Зокрема, в роботі [51] доведено, що функції класу  $W_2^1[0,1]$  можна наблизити сплайнами першого порядку в нормі  $W_2^1[0,1]$  з оптимальним порядком точності на цьому класі.

У потоці робіт, зв'язаних з побудовою наближених методів рішення задач оптимального керування, можна виділити три головних напрямки [77].

Перший напрямок зв'язаний зі спробами вирішити систему рівнянь, що утворюють принцип максимуму (подібно тому, як точку мінімуму  $f(x)$  можна шукати, намагаючись прямо вирішувати рівняння  $f'(x) = 0$ ). Цьому напрямку приділено небагато уваги тому, що надійних методів на цьому шляху поки створити не вдалося. Причини невдач і можливі шляхи подолання труднощів обговорюються та експериментально перевіряються.

Другий напрямок зв'язаний з побудовою мінімізуючої послідовності траєкторій, причому як незалежний аргумент береться не керування, а фазова траєкторія (метод варіацій у фазовому просторі). При такому підході легко враховуються фазові обмеження, однак виникають інші труднощі. Цьому напрямку також приділено порівняно невелике місце, тому що написані монографії [62], [79] присвячені, в основному, саме цьому підходу.

Третій напрямок, що має найбільший літературний огляд, зв'язаний з побудовою мінімізуючої послідовності керувань. У додатку В він відображений більш детально. Це зв'язано як із природністю вибору саме керування, як незалежного аргумента, так і з тим, що розроблений метод, що застосовувався в розрахунках Федоренко Р.П. [77], відноситься саме до цього напрямку. Тут є свої складності, особливо, при рішенні задач з фазовими обмеженнями (функціоналами, що не мають похідних по Фреше), однак їх можна подолати.

Представимо загальною основні етапи розвитку чисельних методів рішення задач оптимального керування, звернувши особливу увагу на те, як труднощі реалізації уже відомих алгоритмів і зростаючі вимоги застосувань визначають структуру нових методів. Історія чисельних методів у

варіаційному численні починається з Ейлера. Саме він запропонував змінити шукану функцію сітковою, а функціонал – відповідною різницевою апроксимацією. При цьому переслідувалися теоретичні цілі, проведення необхідних для рішення задач обчислень у той час було неможливо. Надалі цей метод був забутий, і в розрахунках використовувалися методи Рітца, Гальоркіна та інші, аналогічні їм. Вони засновані на представленні шуканого рішення у виді сум (з невизначеними коефіцієнтами) деякого числа базисних функцій. Умілий підбір базису дозволяв обійтися двома-трьома функціями і приводив до результату (у досить простих задачах) ціною не дуже великого обсягу обчислень. Поява комп'ютерів зняла, до відомого ступеня, гостроту питання про число операцій, і на перше місце знову вийшов метод скінченних різниць Ейлера, завдяки його універсальності і слабкій залежності від аналітичної форми задачі. В даний час велика частина наближених методів оптимального керування так чи інакше заснована на ідеї Ейлера. Але фактично задача тільки і починається після введення різницевої апроксимації. Основне питання наближеного розв'язання в тім, як знайти мінімум в отриманій скінченновимірній задачі.

Перші методи наближеного розв'язання задач оптимального керування були методами градієнта у функціональному просторі і застосовувалися до найпростіших задач: знайти

$$\min F_0[u(\cdot)] \text{ на траєкторії системи } \dot{x} = f(x, u), x(0) = X_0. \quad (1.34)$$

В задачі (1.34) немає ні обмежень  $u \in U$ , ні умов  $f_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ . Обчислюється градієнт  $w_0(t)$  функціонала  $F_0$ , наступне керування визначається за формулою  $u(t) - sw_0(t)$ , а крок спуску  $s$  знаходиться рішенням скалярної задачі  $\min F_0[u(\cdot) - sw_0(\cdot)]$ .

Метод «штрафних функцій», запропонований уперше Р. Курантом [85] у зв'язку з рішенням варіаційних задач ще в 1943 р., дозволяє вважати метод розв'язання задачі (1.32) універсальним. Робота [85] породила могутній

літературний потік, зв'язаний з доказом узагальнення теореми про збіжність (при прагненні коефіцієнта штрафу до  $\infty$ ), з різними формами штрафних функцій (зовнішніх, внутрішніх, комбінованих, що використовують  $\ln$ ,  $\exp$  і інші функції).

Формально метод штрафних функцій вирішує всі проблеми, однак при практичній його реалізації зустрілися серйозні труднощі: повільна збіжність і ненадійність результатів. Причини цих неприємностей були зрозумілі, і прихильники методу зосередили свої зусилля на рішенні відповідних питань обчислювальної технології: розробці надійних і ефективних методів пошуку мінімуму для дуже складних, негладких, з «ярами» і «хребтами» функцій, методам підбора коефіцієнтів штрафу і тактиці їхньої зміни в процесі рішення задачі. Одночасно почав розвиватися й інший напрямок, у якому або зовсім не використовують штрафні функції, або намагаються врахувати методом штрафу як можна найменше умов. Зрозуміло, це звузило клас задач. Легко були побудовані алгоритми для задач, у яких є обмеження  $u(t) \in U$ , а інтегральних додаткових умов (зокрема, умов на  $x(T)$ ) немає. У цьому випадку після обчислення градієнта  $\omega_0(t)$  утвориться сімейство  $u(s,t) = P_U[u(t) - S\omega_0(t)]$ , де  $P_U$  – оператор проектування на множину  $U$  в скінченновимірному просторі. Далі  $S$  знаходиться так само, як у найпростішій задачі. Такі або близькі алгоритми були запропоновані (під різними назвами) багатьма і застосовувалися в працях [36], [101].

Наступним кроком був метод проекції градієнта в задачах з умовами  $F_i[u(\cdot)] = 0, i = 1, \dots, m$  причому усі функціонали  $F_i$  – диференційовні по Фреше, а умов-нерівностей  $u \in U$  у задачі немає. Одна з проблем, яка тут виникає полягає в тому, що невідомо як вибирати крок спуска  $s$ : збільшення  $s$  при зменшенні значення  $F_0$  приводить до порушення (у нелінійних задачах) умов  $F_1 = \dots = F_m = 0$ . Що стосується умов  $u \in U$ , то як стверджується в роботі [76] виникають нові труднощі. Зокрема, Брайсон, Денхем і Дрейфус [7] для задач з умовами  $\{G[x(t), i(t)] \text{ при всіх } t\}$  ввели проектування градієнта на лінійний многовид  $\{G_x \delta_x(t) + G_u \delta u(t) = 0 \text{ при } t \in [t_\alpha, t_\omega]\}$ , причому

$t_\alpha, t_\omega$  – шукані невідомі. В роботах групи Miele [94] замість явного введення в задачу гіпотези про структуру рішення ( $G(x, u) = 0$  при  $t \in [t_\alpha, t_\omega]$ ,  $G(x, u) < 0$  поза  $t \in [t_\alpha, t_\omega]$ ) з шуканими  $t_\alpha, t_\omega$  використовується перетворення Валентайна, яке в роботі [76] вважається не ефективним. Хоча, в роботі [7] метод випробували на реальній прикладній задачі, а в роботі [94] іспити проводились на простих модельних задачах.

Подальший розвиток чисельних методів був зв'язаний із прагненням врахувати, як обмеження, так і додаткові умови  $P_1 = \dots = F_m = 0$  (зазвичай вони мали форму умов на правому кінці траєкторії  $\Phi_i[x(t)] = 0$ ). Крім того, предметом особливих зусиль були обмеження у фазовому просторі ( $\Phi_i[x(t)] = 0$  при всіх  $t$ ) і обмеження загального виду ( $\Phi[x(t), i(t)] = 0$ ). Саме зв'язані з урахуванням таких умов труднощі стимулювали розвиток методів варіацій у фазовому просторі. Моїсеєвим М.М. [60–62] і його співробітниками були розроблені методи наближеного розв'язання варіаційних задач. В роботі [76] відмічаються деякі недоліки вказаних методів. До того ж на підставі оцінок числа операцій був зроблений висновок про перевагу методу локальних варіацій перед іншими ітераційними методами (метод трубки), і ця форма варіацій у фазовому просторі стала основним обчислювальним інструментом. З цими ж труднощами зв'язане повернення до методу Ейлера. Такий напрямок одержав назву «метод математичного програмування в теорії оптимального керування». Це напрямок, у якому задачу заміняють кінцево-різницевою, переписують всі обмеження задачі у вигляді обмежень на значення сіткових функцій, інтеграли замінюють сумами, і, одержавши кінцевовимірну задачу мінімізації при наявності обмежень, посилаються на можливість її розв'язання розробленими методами математичного програмування. Останні мають велику кількість статей і монографій. Але надійних методів рішення загальної задачі мінімізації немає.

Федоренко Р.П. [77] почав наближене рішення задач оптимального керування в 1962 р., коли розв'язання задач мало досить загальну постановку: з умовами  $u \in U$ ,  $P_1 = \dots = F_m[u_0] = 0$ , з функціоналами, що не мають похідних Фреше.

В основі розробленого Федоренко Р.П. методу лежать наступні положення.

1. З погляду обчислювальної математики, труднощі задачі визначаються не її формою, а диференціальними властивостями вхідних у задачу функцій. Тому не слід використовувати прийоми, що спрощують зовнішню форму задачі ціною погіршення властивостей гладкості функцій (штрафні функції, перетворення Валентайна і т.п.). Зрозуміло, це призводить до вживання більш складних алгоритмів.

2. Обчислювальні методи зв'язані з апроксимацією функціональних просторів скінченновимірними. Ефективність методу суттєво залежить від того, як використовується конкретна функціональна природа того чи іншого об'єкта. У задачі оптимального керування об'єднані об'єкти з різними функціональними властивостями: диференційовна функція  $x(t)$ , вимірні  $u(t)$ , диференціальні зв'язки, інтегральні зв'язки і функціонали, диференційовні лише по напрямках; серед останніх є функціонали типу  $\max \Phi[x(t)]$ , а є істотно інші:  $\max \Phi[x(t), u(t)]$ . Кожний з об'єктів вимагає свого підходу. На різницевого рівні відмінність між цими об'єктами, на перший погляд, стирається, і є можливість їх трактувати з однакових позицій. Саме ця точка зору лежить в основі методів математичного програмування в оптимальному керуванні [95]. Однак, при реалізації таких однакових підходів у достатньо складних задачах вона призводить до серйозних труднощів.

3. Обчислювальний апарат алгоритму повинен бути адекватним задачі. Ми маємо справу з неklasичною задачею, в умови якої входять нерівності. Тому звичайний обчислювальний апарат лінійної алгебри, орієнтований на рішення задач у термінах рівностей, недостатній, варто залучити апарат лінійного програмування. Цим робота Федоренка Р.П. [77] істотно відрізняється від основної маси алгоритмів, що так чи інакше зв'язані зі

звичним апаратом лінійної алгебри. Його застосування в некласичних задачах забезпечується за рахунок штрафних функцій, перетворення Валентайна й інших прийомів. Лінійне програмування є обчислювальний апарат для задач з нерівностями, а не метод рішення тільки економічних задач.

4. При розв'язанні задач оптимального керування виникають специфічні задачі лінійного програмування. Класичні методи рішення таких задач виявляться недостатньо ефективними.

### 1.1 Висновки до розділу 1

1. В розділі 1 наведено математичні моделі електромеханічних систем, що побудовані з використанням систем звичайних диференціальних рівнянь з оптимальним керуванням, які дозволяють вибирати керування різними об'єктами в промисловості.

2. Проведено аналіз існуючого стану чисельних методів наближеного розв'язання задач оптимального керування електроприводами. Проведений аналіз показує, що методи, які дозволяють знайти оптимальне керування в нормі  $W_2^1[0, t]$ , не розглядались.

3. Таким чином, актуальною є задача розробки і дослідження методу наближеного розв'язання задачі оптимального керування в нормі  $W_2^1[0, t]$ , який дозволяє знаходити розв'язок, що є найкращим наближенням до точного розв'язку.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [1, 6, 16].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12–16, 20 – 23, 26, 33, 36, 37, 42 – 47, 51, 55, 58, 59–62, 64, 65, 67, 68, 70, 71, 73, 76–79, 80, 82, 84, 85, 89, 90, 92 – 102].



## РОЗДІЛ 2

### МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

#### 2.1 Постановка задачі оптимального керування

Моделювання математичних співвідношень за допомогою засобів обчислювальної техніки грає важливу роль у пошуках потрібного рішення.

З моделювання можна зробити висновок про те, наскільки математичні співвідношення відповідають реальній фізичній системі, досліджувати чутливість моделі до змін параметрів і непередбачуваних обурень, порівнювати різні варіанти структури системи керування.

Оптимальною системою керування прийнято називати найкращу в сенсі деякого критерію ефективності систему [96]. Слова "найкраща система" визначаються тим технічним або економічним завданням, яке доводиться вирішувати при побудові оптимальної системи. До основних завдань при проектуванні оптимальних систем керування відносяться:

- точність системи керування як при детермінованих, так і при випадкових діях;
- швидкодія системи, що характеризується часом перехідного процесу;
- економічність;
- продуктивність;
- надійність і інші техніко-економічні показники системи керування.

Розробка якнайкращої системи, що задовольняє поставленим вимогам, є задачею синтезу оптимальної системи.

Система управління складається з об'єкту керування (ОК) і автоматичного керуючого пристрою (АКП) (рис. 2.1). На практиці зазвичай структура і параметри об'єкту управління задані, тому задача синтезу полягає у визначенні структури і параметрів оптимального керуючого пристрою. Наприклад:

а) необхідно антену радіолокаційної станції (РЛС) повернути з початкового положення з початковим азимутом  $\beta_n$  у задане кінцеве положення з азимутом  $\beta_k$ . Для цього на електродвигун, пов'язаний з антенною через редуктор, подають керуючу дію  $u(t)$  – напругу. У кожен момент часу стан антени РЛС характеризується поточними значеннями: кутом повороту  $\beta(t)$  і кутовою швидкістю  $\omega(t)$ . Ці дві величини змінюються залежно від керуючої дії – напруги  $u(t) = u$ .

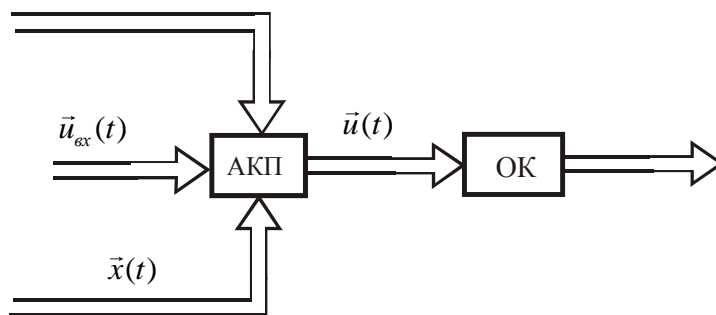


Рисунок 2.1– Структурна схема системи оптимального керування

Таким чином, змінні стану антени РЛС: кут повороту  $\beta(t)$  і кутова швидкість  $\omega(t)$  взаємозв'язані, вектор стану  $\vec{x}(t) = [\beta(t), \omega(t)]^T$ ;

б) положення літального апарату (літака) характеризується шістьма змінними стану – трьома координатами  $X, Y, Z$  – центру тяжіння і трьома кутовими координатами швидкості  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ , що визначають поворот літака щодо нерухомої системи координат з початком в центрі тяжіння. Положення можна змінювати за допомогою керма висоти, курсу, а також шляхом вимірювання тяги як по величині, так і по напрямку.

Оптимальне керування  $\vec{u}(t)$  і його реалізацію здійснюють для двох основних випадків: у першому випадку – *програмному керуванні*, оптимальне керування  $\vec{u}(t)$  формується без застосування зворотних зв'язків (розімкнена система) і є функцією часу [96]. Пристрій, що в цьому випадку управляє, по

вхідній дії  $\vec{u}_{\text{ex}}(t)$  і заданими граничними умовами, векторами, що характеризуються:  $x(t_0)$  – у момент часу  $t=t_0$  і  $x(T)$  – у момент часу  $t=T$  відповідно до вибраного критерію оптимальності формує оптимальний закон керування  $\vec{u}(t)$  (рис. 2.2).

Другий випадок – закон управління із зворотним зв'язком, відповідає замкнутій системі, функціональна схема якої показана на рис. 2.2. Тут оптимальний закон керування  $\vec{u}(t)$  формується по змінних координатах  $x_{\text{зм}}(t)$  вектора стану  $\vec{x}(t)$  і бажаним станом вектора об'єкту  $x_{\text{б}}(t)$ . На об'єкт управління поступає збурююча дія  $W(t)$ . Таким чином, закон управління із зворотним зв'язком має вигляд

$$\vec{u}(t) = \varphi[x_{\text{б}}(t), x_{\text{зм}}(t)]. \quad (2.1)$$

Складність при розв'язанні технічних задач виникає внаслідок того, що на дії, якими керують, як правило, накладаються обмеження, тобто  $|\vec{U}(t)| \leq 1$ , на змінні стани ОК вектора стану  $\vec{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  теж накладаються обмеження, пов'язані з перевантаженнями, міцністю конструкції, умовами роботи оператора і т.п.

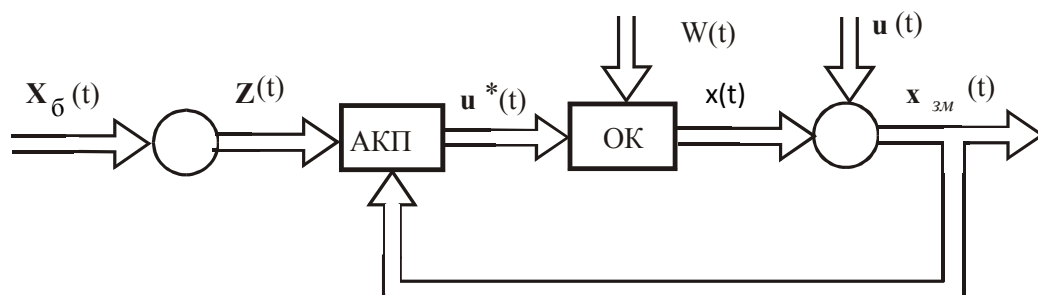


Рисунок 2.2 – Функціональна схема оптимального програмного керування із зворотним зв'язком

## 2.2 Методи наближеного розв'язання задач оптимального керування

Основними методами синтезу оптимальних систем є:

- класичні методи варіаційного числення;
- принцип максимуму;
- динамічне програмування;
- аналітичне конструювання регуляторів [32].

Наведемо класичні методи наближеного розв'язання задач оптимального керування [77]: методи рішення крайової задачі для  $\pi$ -системи, метод варіацій у фазовому просторі [14, 29, 58, 73], метод проєкції градієнта [36, 52, 94], метод наближеного розв'язання задач з ковзним режимом, метод повороту опорної гіперплощини.

**Методи рішення крайової задачі для  $\pi$ -системи.** Розглянемо наступну варіаційну задачу: на траєкторії керованої системи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), 0 \leq t \leq T; \\ x(0) &= x_0; u(t) \in U; \end{aligned} \quad (2.3)$$

мінімізувати функціонал

$$\min_{u(\cdot)} F_0[u(\cdot)] \quad (2.4)$$

при додаткових умовах

$$F_i[u(\cdot)] = 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5)$$

Усі функціонали  $F_i$  будемо вважати диференційовними, для визначеності обмежимося конструкціями виду

$$F_i[u(\cdot)] \equiv \int_0^T \Phi^i[x(t), u(t)] dt. \quad (2.6)$$

Підставляємо, якщо потрібно, у цій же формі і функціонал

$$F[u(\cdot)] \equiv \Phi[x(t')] = \int_0^T \Phi[x(t), \delta(t-t')] dt.$$

У цьому випадку принцип максимуму підтверджує існування функції  $\psi(t)$ , яка є рішенням задачі:

$$\frac{d\psi}{dt} + f_x[t]\psi = -\sum_{i=0}^m g_i \Phi_x^i(t), \psi(t) = 0, \quad (2.7)$$

визначеною з точністю до параметрів  $g_1, g_2, \dots, g_m$  ( $g_0 = -1$ ), причому оптимальне керування  $u(t)$  задовольняє умову

$$H[x(t), \psi(t), u(t)] = \max H[x(t), \psi(t), u(t)], \quad (2.8)$$

де

$$H[x, \psi, u] = \sum_{i=0}^m g_i \Phi^i[x, u] + (f(x, u), \psi). \quad (2.9)$$

Систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ -\psi f_x^*(x, u) \psi + \sum_{i=0}^m g_i \Phi_x^i(x, u), \\ H[x(t), \psi(t), u(t)] = \max H[x(t), \psi(t), u(t)]. \end{cases} \quad (2.10)$$

називають  $\pi$ -системою.

Формально  $\pi$ -система замикається кінцевими співвідношеннями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \quad (\Gamma(x) = 0), \\ \psi(T) &= 0 \quad (\Gamma_x^*(\varphi) = 0), \\ F_i[u(\cdot)] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Під формальним замиканням мається на увазі просте порівняння ступенів свободи для системи (2.10) з числом кінцевих співвідношень (2.11). Нехай з (2.10) можна однозначно визначити  $u(t)$  як функцію  $x(t), \psi(t)$  та  $g$ . Рівняння  $H[x, \psi, u^*] = \max_{u \in U} H[x, \psi, u]$  вирішується відносно  $u^*$ ;  $u^* = V(x, \psi, u)$ . Тоді система (2.10) перетворюється формально в систему  $2n$  рівнянь для  $n$  вимірних вектор-функцій  $x(t)$  та  $\psi(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f[x, V(x, \psi, g)], \\ \dot{\psi} + f_x[x, V(x, \psi, g)]\psi &= -\sum_{i=0}^m \Phi^i[x, V(x, \psi, g)]. \end{aligned}$$

множина рішень якої визначається задачею, наприклад,  $x(0), \psi(0)$  та  $g_1, \dots, g_m$ , тобто має розмір  $2m + n$ . Наявність  $2m + n$  кінцевих співвідношень (2.11) формально вважає вибір однозначним, та тим самим однозначно визначає  $x(t), u(t)$  – оптимальну траєкторію, яку треба знайти.

Таким чином, розв'язання варіаційної задачі формально зведено до розв'язання крайовій задачі для  $\pi$ -системи (2.10) – (2.11). Нажаль, на шляху розв'язання таких задач виникають значні труднощі, подолати які пока не вдалось.

**Метод варіацій у фазовому просторі.** Моїсеєвим М.М. [60–62] і його

співробітниками були розроблені метод наближеного рішення варіаційних задач, що є, власне кажучи, методом спуска у фазовому просторі. Повний і теоретично обґрунтований алгоритм М.М. Моїсеєва практично не реалізується для прикладних задач на сучасних комп'ютерах, однак ідеї, що містяться в ньому, породили згадувані вище спрощені модифікації. Останні вже реалізовані і застосовувалися на практиці, але питання їхнього обґрунтування зустрічають серйозні перешкоди [77].

Загальна схема методу. Розв'язується наступна задача оптимального керування: мінімізувати адитивний функціонал

$$F_0[u(\cdot), x(\cdot)] = \int_0^T f^0[x(t), u(t)] dt \quad (2.12)$$

на траєкторіях керованої системи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), 0 \leq t \leq T, \\ x &= \{x^1, \dots, x^n\}, f = \{f^1, \dots, f^n\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

при крайових умовах

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1, \quad (2.14)$$

враховуючи як геометричне обмеження керування

$$u(t) \in U \text{ при всіх } t \quad (2.15)$$

так і обмеження у фазовому просторі

$$u(t) \in G \text{ при всіх } t. \quad (2.16)$$

У (2.14) і (2.15) можна написати  $U(t)$ ,  $G(t)$ ;  $U$  і  $G$  вважаються обмеженими замкненими областями.

На інтервалі  $[0, T]$  вводиться рахункова сітка, для простоти рівномірна  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T; t_i = i\tau; \tau = T / N$ . У кожній крапці  $t_i$  визначається екземпляр сітки у фазовому просторі, що покриває область  $G$  з деякою густотою, обумовленої кроком у фазовому просторі; сукупність точок  $i$ -ї сітки  $\{x_j^i\}$  будемо позначати  $S^i$ . Помітимо, що індекс  $j$ , який можна вважати, наприклад  $n$ -мірним мультиіндексом, приймає по числу вузлів сітки  $S_i$   $O\left(\frac{1}{h^n}\right)$  різних значень.

Припустимо, що  $x_0 \in S^0, x_1 \in S^N$ . Обґрунтування методу почнемо з обговорення схеми наближеного розв'язання задач оптимального керування. Мається на увазі популярне в теоретичних дослідженнях зведення до задачі математичного програмування. Вводиться сітка  $t_0, \dots, t_N$ ; рівняння, функціонали та обмеження замінюються відповідними різницевиими апроксимаціями на сіткових функціях  $\{x_i\}_{i=0}^N, \{u_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$ . Так одержуємо задачу: знайти сіткову траєкторію з умов

$$\min \sum_{i=0}^{N-1} \tau f^0\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, u_{i+1/2}\right), (\min F_0[x, u]), \quad (2.17)$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, u_{i+1/2}\right), i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x_0 = X_0, x_N = X_1, x_i \in G, u_{i+1/2} \in U.$$

Відразу ж виникає традиційне питання про збіжність (при  $N \rightarrow \infty, \tau = T / N \rightarrow 0$ ) сіткового рішення задачі (2.17) до рішення вихідної задачі (2.14) – (2.15). Це питання докладно досліджене у роботі [14].

Перейдемо до питання збіжності в обчислювальній схемі М.М. Моїсеєва [60–62]. Основне ускладнення пов'язано з тим, що в разностній задачі (2.17)



точки  $x_i$  можуть приймати лише дискретні значення  $x_j^i$ , які належать сітці  $W^i$ . Тому можлива ситуація, що ні для якої пари точок з сусідніх сіток  $\{x_j^i, x_k^{i+1}\}$  не можливо побудувати з'єднуючу їх траєкторію (2.14) на малому інтервалі  $[t_i, t_{i+1}]$ . В такому разі разностна задача просто не має рішення. Щоб уникнути цієї ситуації, слід накласти певні обмеження на  $h$ -шаг сітки по фазовим координатам. Крім того, треба гарантувати розрешимість елементарної операції. Ці питання досліджувались в працях [58], [29]. Задача на збіжність чисельного розв'язку до розв'язку задачі (2.12) – (2.14) була вирішена в припущенні деяких властивостей неперервності функції Беллмана. Однак для практики розрахунків найбільш суттєвою є друга умова: кроки сітки  $h_r$  по  $r$ -й компоненті фазового простору повинні бути пов'язані з кроком сітки за часом  $\tau$  співвідношенням  $h_r = \tau^{1+p_r}$ ,  $p_r \geq 1$  – де деякі числа, які залежать від області досяжності за малий час  $\tau$  для системи (2.12).

#### **Метод варіацій у фазовому просторі. Обчислювальні схеми [77].**

Метод варіацій у фазовому просторі в тій формі, що була детально описана вище, не реалізується на сучасних комп'ютерах навіть для найпростіших задач з розмірністю фазового простору  $n > 2$ . Однак на його основі було розроблено кілька практичних алгоритмів ітераційного типу, що використовувалися для фактичного рішення реальних прикладних задач. Опишемо ці алгоритми.

*Метод локальних варіацій.* Метод, розроблений Ф.Л. Черноусько [80], являє собою найбільш широко використовувану форму методу варіацій у фазовому просторі. Метод носить ітераційний характер, кожна ітерація є переходом від деякої траєкторії до близького до неї, кращої по величині функціонала, що мінімізується. Нехай  $x(t)$  – деяка траєкторія системи  $\dot{x} = f$ , що задовольняє крайовим умовам  $x(0) = X_0$ ,  $x(T) = X_1$  і фазовим обмеженням. Цю траєкторію можна представити послідовністю точок на тимчасовій сітці

$$X_0 = x(t), x(t_1), \dots, x(t_i), \dots, x(t_N) = X_1, \quad (2.18)$$

причому перехід з точки  $x(t_i)$  у  $(x_{i+1})$  здійснюється елементарною операцією і результат його – число  $\delta F^{i+1/2} [x(t_i), x(t_{i+1})]$ . Таким чином, на траєкторії (2.18) функціонал має значення

$$F = \sum_{i=0}^{N-1} \delta F^{i+1/2} [x(t_i), x(t_{i+1})]. \quad (2.19)$$

Нехай  $i$  – це деяке ціле число,  $0 < i < N$ ; розглянемо траєкторії типу (2.18): розглядаються зміщені положення точки  $x(t_i): x(t_i) \pm h_k e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , де  $e_k$  –  $k$ -й орт у  $n$ -мірному просторі,  $h_k$  – крок по  $k$ -й компоненті фазового вектора. У сумі (2.19) при цьому змінюються тільки два доданки –  $\delta F^{i-1/2}$  та  $\delta F^{i+1/2}$ .

Перебравши в такий спосіб  $2n$  варіантів, знаходимо кращу траєкторію зі зміщеним положенням  $x(t_i)$  (рис. 2.3). Змінивши  $x(t_i)$  і суму (2.19), повторемо ту ж саму операцію над крапкою  $x(t_{i+1})$  і т.п. Поліпшивши вихідну траєкторію подібними варіаціями послідовно точок  $x(t_1), \dots, x(t_2), \dots, x(t_{N-1})$ , одержуємо нову траєкторію (рис. 2.3).

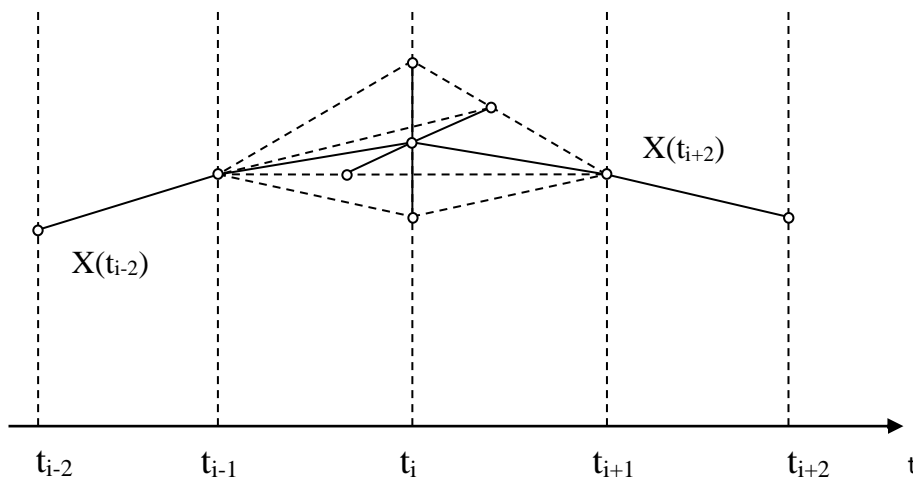


Рисунок 2.3 – Метод варіацій у фазовому просторі

**Метод проекції градієнта** [77]. Задача оптимального керування будь-якої складності, часто допускає дуже просте формулювання: знайти точку функціонального простору  $u$  з умови

$$\min_{u \in \Omega} F_0(u), \quad (2.20)$$

де  $\Omega$  – деяка область функціонального простору, а  $F_0$  – функціонал, який диференціюють по Фреше. Похідну  $F_0$  – позначимо через  $P_\Omega$ . Тоді:

$$F_0(u + \delta u) = F_0(u) + (\omega_0, \delta u) + O(\|\delta u\|^2). \quad (2.21)$$

Для рішення задачі (2.20) давно запропонований і обґрунтований (при визначених припущеннях) метод проекції градієнта. Він являє собою алгоритм побудови мінімізуючої послідовності точок  $u$ . Нехай маємо деяке  $u^k$ . Тоді, як наступне наближення береться крапка

$$u^{k+1} = P_\Omega(u^k - S\omega_0^k). \quad (2.22)$$

Тут  $S$  – скалярний параметр, крок процесу,  $\omega_0^k$  – градієнт  $F_0(u)$ , розрахований у точці  $u^k$ ,  $P_\Omega$  – оператор проектування на безліч  $\Omega$ . Для обчислення  $P$  потрібно вирішити задачу знаходження

$$\min_{y \in \Omega} \|y - z\| = \|z^* - z\|, \quad (2.23)$$

і тоді, за визначенням  $P_\Omega z \equiv z^*$ . Для того, щоб алгоритм був повністю детермінованим, залишилося вказати спосіб визначення  $S$ . Для чого

визначимо одно параметричну властивість точок  $u(s) = P_{\Omega}(u^k - s\omega_0^k)$  і вирішимо задачу одновимірної мінімізації

$$\min_s F_o[u(s)] = F_0[u(S)]. \quad (2.24)$$

Використовуємо цю загальну схему в задачі оптимального керування. При цьому зустрінуться визначені труднощі, зв'язані з фактичною реалізацією таких принципово не складних операцій, як, наприклад, проектування.

Отже, розглянемо задачу: знайти

$$\min \min F_0[u(\cdot)] \quad (2.25)$$

при умовах

$$\begin{cases} x = f(x, u), \Gamma(x) = 0, 0 < t \leq T; \\ u(t) \in U, t \in [0, T]; \\ F_i[u(\cdot)] = 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.26)$$

Усі функціонали  $F_i$  будемо вважати диференціюємими по Фреше. Відмітимо, що є принаймні два способи формулювати задачу (2.24) – (1.26) у вигляді (1.31).

1. Як елемент  $u$  абстрактної постановки задачі (1.31) беремо вимірну вектор-функцію  $u(\cdot)$ , а безліч виділяються умовами:  $u(t) \in U$  при всіх  $t$  і  $F_i[u(\cdot)] = 0, i = 1, 2, \dots, m$ . При цьому конкретні формули, що визначають  $F_i$  через  $u(\cdot)$ , містять ще і фазові координати  $x(t)$ , однозначно обумовлені крайовою задачею  $\{x = f; \Gamma(x) = 0\}$ .

Обчислення похідної здійснюється відомим образом і особливих труднощів не містить. Складніше з проектуванням. Воно зводиться при фіксованому значенні параметра  $s$  до наступної задачі: знайти

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^T \|v(t) - u^k(t) + s\omega_0^k(t)\|^2 dt \quad (2.27)$$

при умові

$$v(t) \in U \text{ при всіх } t \in [0, T], \quad (2.28)$$

при чому формули для  $F_i$  містять фазові координати, пов'язані з  $v$  крайовою задачею  $\{x = f(x, v); \Gamma(x) = 0\}$ . Ця задача в загальному випадку не легше вихідної [77].

*Метод умовного градієнта* (для задачі класичного типу). Варіація керування  $\delta u(\cdot)$  знаходиться, як рішення задачі

$$\min_{\delta u(\cdot)} \int_0^T \omega_0(t) - \delta u(t) dt, \quad (2.29)$$

при умовах

$$F_i[u(\cdot)] + \min \int_0^T \omega_1(t) \delta u(t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.30)$$

$$\int_0^T \|\delta u(t)\|^2 dt = S^2. \quad (2.31)$$

Задача розв'язується методом Лагранжа. Задачі (2.29) – (2.31) еквівалентні і відрізняються лише способом уведення кроку  $S$ . Іншими

словами, між параметрами  $S$ , що входять у ці задачі, можна встановити таку відповідність, при якій обидві дають ту саму функцію  $\delta u(t)$ .

*Метод мінімальної поправки* (для задач класичного типу). Варіація керування шукається у формі  $\delta u(t) = -S\omega_0(t) + v(t)$ , де  $v(t)$  – поправка, що компенсує викликані варіацією  $S\omega_0(t)$  порушення додаткових умов. Цю поправку варто взяти мінімальною величиною. Таким чином, приходимо до наступної задачі для визначення  $v(t)$ : знайти

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \quad (2.32)$$

при умовах

$$F_i[u(\cdot)] + \min \int_0^T \omega_1(t) [-S\omega_0(t) + v(t)] dt = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.33)$$

Задача (2.32), (2.33) еквівалентна задачам (1.30) – (1.31) у зазначеному вище змісті.

*Gradient-Restoration Algorithm* [94] (для задач класичного типу). Розроблений в останні роки, метод заснований на другому способі інтерпретації задачі оптимального керування як загальної задачі математичного програмування і зовні істотно відрізняється від приведених вище форм методу проекції градієнта. Однак, крім формальної відмінності, тут є і деяка відмінність по суті, вплив її на алгоритм рішення власне задачі оптимального керування буде обговорено нижче. Метод орієнтований в основному на задачі, в яких функціонали  $F_i[u(\cdot), x(\cdot)]$  додаткових умов сформульовані в термінах значень  $x(T)$ .

Таким чином, вихідна варіаційна задача має вигляд: знайти

$$\min_{x,u} \int_0^T f^0(x,u) dt \quad (\min F_0[x(\cdot), u(\cdot)]) \quad (2.34)$$

при умовах

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = X_0, \quad x(T) = X_1. \quad (2.35)$$

Таку форму має велика кількість прикладних задач. Узагальнемо метод. Так, не обов'язково що при  $t=0$  та при  $t=T$  були задані всі значення компонент вектора  $x$ . Розв'язання варіаційної задачі являє собою побудову деякої послідовності траєкторій.

Стандартний шаг процесу складається від деякої послідовності траєкторій, яка не розв'язана в загальному вигляді, є проблема одночасного вибору невідомих функцій  $\{u(\cdot), x(\cdot)\}$  при чому умови передбачаються виконаними з необхідною точністю) лише в кінці рішення задачі. Стандартний шаг процесу складається з переходу від деякої траєкторії до наступної  $\{u(\cdot) + \delta u(\cdot), x(\cdot) + \delta x(\cdot)\}$ ; основний його елемент – це побудова варіацій  $\{\delta u(\cdot), \delta x(\cdot)\}$ . Варіруємая траєкторія  $\{u(\cdot), x(\cdot)\}$  може або задовольняти (з заданою точністю) умовам (2.34), так наприклад

$$\int_0^T \|\dot{x} - f(x,u)\|^2 dt \leq \varepsilon, \quad (2.36)$$

і тоді працює градієнтний елемент алгоритма, або умову (2.36) порушено і тоді працює відновлюючий елемент алгоритма (Restoration Phase).

Ітераційний метод роботи з нерівностями, як з рівностями, був запропонований у [52].

**Метод послідовної лінеаризації. Задачі з функціоналами, диференційовними по Гато.** В цьому підрозділі описані розроблені Р.П. Федоренко [77] прийоми, що використовувалися в прикладних розрахунках. Вони дозволяють із прийнятними витратами машинного часу ефективно вирішувати задачі, у формулювання яких входять функціонали наступних типів:

$$F[u(\cdot)] = \max_{\varphi} [x(t)], \quad (2.37)$$

$$F[u(\cdot)] = \max_{\varphi} [x(t), u(t)], \quad (2.38)$$

$$F[(\cdot)]_{t_0} = \int_0^T [x(t), u(t)] dt. \quad (2.39)$$

Ці функціонали в загальному випадку не мають похідних Фреше; вони диференціюються лише у напрямках функціонального простору. Ця обставина робить розв'язання задач з подібним подібними функціоналами дуже складним. Формули (2.37) – (2.39) охоплюють більшість виникаючих у додатках функціоналів, що диференціюються по Гато.

*Задачі з функціоналами типу*  $\max_{\varphi} [x(t)]$ . Нехай функціонал типу (2.39) входить у додаткову умову, тобто на шукане оптимальне керування накладене обмеження, що має вид обмеження у фазовому просторі

$$F[u(\cdot)] \equiv \max_t \Phi [x(t)] \leq 0. \quad (2.40)$$

Розумний вибір варіації керування тепер має обмеження виду

$$F[u(\cdot) + \delta u(\cdot)] \leq 0, \quad (2.41)$$

яке, нажаль, не має простої форми: головна частина збільшення функціоналу



(2.37) не є лінійний функціонал. При рішенні подібних задач успішно використовувався прийом апроксимації (2.40). Саме, після інтегрування системи  $x = f(x, u)$  з невозмущеним керуванням у вузлах сітки  $\{t_n\}_{n=1}^N$  розраховувалась функціями  $\Phi_n = \Phi[x(t_n)]$  і виділялася підмножина вузлів сітки  $M$  умовою

$$t_n \in M, \text{ якщо } \Phi_n > F[u(\cdot)] - \varepsilon |F|, \varepsilon \sim 0.05, F[u(\cdot)] = \max_n \Phi_n. \quad (2.42)$$

Далі, з цієї безлічі вузлів  $M$  вибирали  $k$  точок апроксимації  $t^1, t^2, \dots, t^k$  і покладали

$$F[u(\cdot) + \delta u(\cdot)] \cong \max \left\{ \Phi[t^j] + \Phi_x \delta x(t^j) \right\}, \quad (2.43)$$

де  $\Phi_x \delta x(t^j)$  – лінійний функціонал від  $\delta u(\cdot)$  і  $k$  раз вирішивши задачу

$$\dot{\psi} + f_x^*(t)\psi = -\delta(t - t^j)\Phi_x[x(t^j)], \Gamma_x^*\psi = 0, j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.44)$$

Умову на варіацію (2.42) апроксимуємо  $k$  нерівностями

$$\Phi[x(t^j)] + \int_0^t \omega^{(j)}(t) du(t) dt \leq 0, j = 1, 2, \dots, k.$$

Ці умови вже очевидним чином вливаються в задачу лінійного програмування. Відмітимо, що функціонал, який диференціюється по Фреше, породжує лише один рядок у матриці задачі лінійного програмування і вимагає лише однократного рішення задачі типу (2.38). Що стосується крапок апроксимації, то вони вибираються з порівняно невеликого числа,

однак, не фіксується, а розміщується в залежності від профілю функції на даному етапі обчислювального процесу [77].

Саме ця «рухливість» точок апроксимації дозволяє забезпечити задовільну точність умови  $F[u(\cdot)] \leq 0$  при невеликих  $k$ , хоча безліч  $M$  при цьому включало велике,  $\sim N$  число вузлів сітки. Якщо кожному крапку  $t_n \in M$  вважати крапкою апроксимації, умова  $F[u(\cdot)] \leq 0$  буде виконана з точністю до  $O(\tau)$ .

*Задачі на  $\min \max \Phi [x(t)]$ .* Обмежимося для простоти задачею, у якій функціонал, який мінімізують, має вид (2.31), а додаткові умови сформульовані в термінах, диференціюємих по Фреше функціоналів. Техніка рішення таких задач ідентична тільки описаній. Єдина відмінність, що заслуговує пояснення зв'язано з формою задачі лінійного програмування, що визначає варіацію керування. У задачі потрібно знайти  $S_n, n = 1, N$ , з умови

$$\begin{aligned} \min_s \max_{j=1, \dots, k} \left\{ X^{0,j} + \sum_{n=1}^N S_n h_n^{0,j} \right\}, \\ X^j + \sum_{n=1}^N S_n h_n^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ s_n^- \leq s_n \leq s_n^+, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Алгоритмами рішення задач лінійного програмування здійснюється за загальною схемою [77, с. 417].

**Метод повороту опорної гіперплощини** [77]. Для рішення загальної задачі оптимального керування

$$\min F[u(\cdot)],$$

на траєкторії керованої системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \Gamma(x) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (2.46)$$

при умовах

$$F_j[u(\cdot)] = 0, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.47)$$

$$u(t) \in U \text{ при } t \in [0, T] \quad (2.48)$$

американськими математиками Ітоном і Нейштадтом був запропонований метод розв'язання, що використовує ідеї опуклого програмування. Збіжність методу була доведена при дуже істотному припущенні про строгу опуклість області досяжності.

*Визначення.* Множина точок

$$F[u(\cdot)] = \{F_0[u(\cdot)], \dots, F_m[u(\cdot)]\}$$

в  $(m+1)$ -вимірному евклідовому просторі, яка походить з усіх можливих вимірних функцій  $u(t)$ , визначених на  $[0, T]$ , що задовольняє геометричному обмеженню  $u(t) \in U$  називається областю досяжності  $D$  для задачі (2.40) – (2.42).

*Припущення.* Будемо тут припускати, що  $D(t)$  – строго опукла обмежена замкнена множина.

Варіаційна задача (2.40) – (2.42) еквівалентна наступній задачі випуклого програмування: знайти точку  $[u(\cdot)]$  функціонального простору керувань, яка відображається в точку  $\lambda \in U$  з найменшим значенням  $\lambda(e = \{1, 0, \dots, 0\})$  (рис. 2.4).

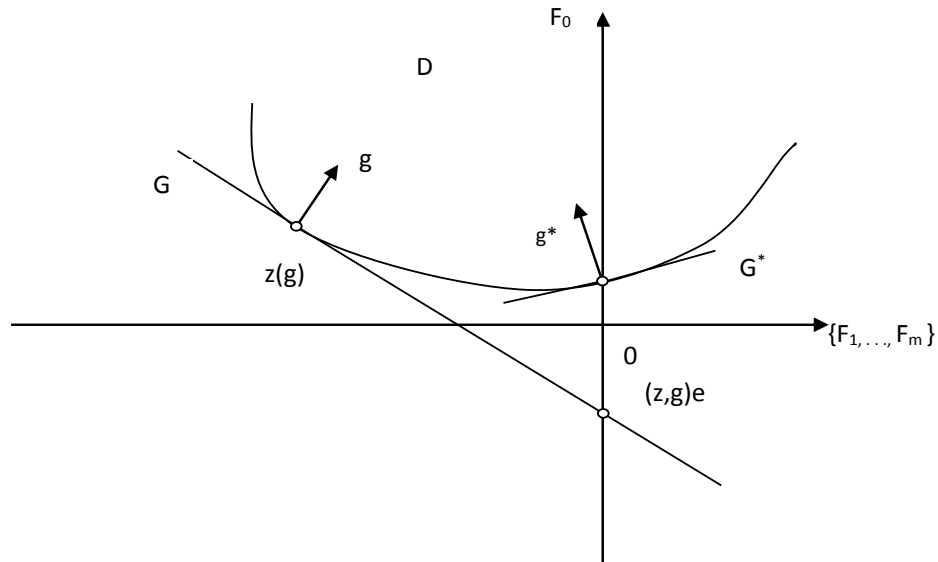


Рисунок 2.4 – Функціональний простір керувань

**Наближене розв’язання задач з ковзним режимом [77]** . Розглянемо задачу, при рішенні якої з’являється ковзний режим. Розглядається модельна керована система:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + [u(t)]^2; x^1(0) = 0, \\ \dot{x}^2 = u(t); x^2(0) = 0; 0 \leq t \leq T = 3. \end{cases} \quad (2.49)$$

Задача полягає в визначенні  $u(t)$  при умові

$$\begin{aligned} \max_{u(\cdot)} x^1(t), \\ x^2(T) = 0; |u(t)| \leq 1; x^2(t) = 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Будемо вирішувати цю задачу чисельно методом послідовної лінеаризації, використовуючи в якості вхідного наближення зображену на рис. 2.5 функцію, якій відповідає управління

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t < 1,5, \\ 1, & 1,5 \leq t < 2, \\ -1, & 2 \leq t < 3. \end{cases} \quad (2.51)$$

Знайдемо вираз для варіацій функціоналів

$$\begin{cases} \delta x^1(T) = \int_0^T [2u(t) + (T-t)] \delta u(t) dt = \int_0^T \omega_0 \delta u dt; \\ \delta x^2(T) = \int_0^T \delta u(t) dt; \\ \delta x^2(1) = \int_0^1 \delta u(t) dt; \quad \delta x^2(2) = \int_0^2 \delta u(t) dt. \end{cases}$$

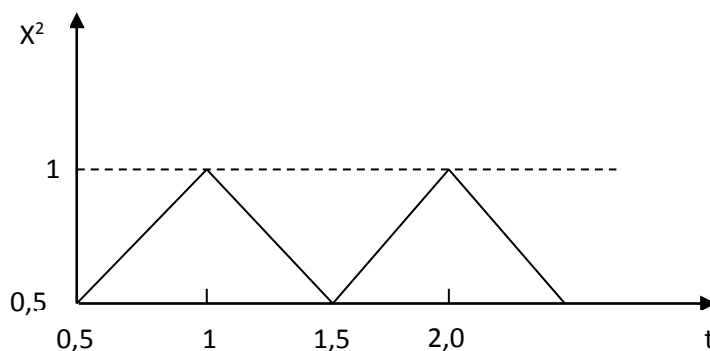


Рисунок 2.5 – Графік  $x_2(t)$

Будемо вирішувати задачу на класі кусково-постійних керувань

$$u(t) = u_{n+1/2} \quad \text{при} \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau; \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

Якщо  $N$  має достатньо велике число, ми можемо в цьому класі отримати достатньо точну апроксимацію ковзного режиму: на інтервалі

$1 < t < 2$  наближена величина буде відрізнятись від точної (відповідної ковзному режиму)  $x^2(t) = 1$  на величину, не більшу за  $\tau$ .

Проте спроба чисельного рішення задачі відразу ж виявляється безуспішною тому, що управління (2.51) є точкою (в функціональному просторі) локального максимуму достатньо віддаленою від точки глобального максимуму. Слід пояснити: це управління є точкою локального максимуму лише відносного класу малих варіацій управління. Відносно класу кінцевих варіацій управління на множині малої міри воно не буде точкою локального максимуму. В цьому можна переконатися, якщо проваріювати управління лише на двох малих інтервалах сітки. Тоді буде отримана траєкторія, яка не порушує додаткові умови, а значення функціоналу

$$x^1(T) = \int_0^T \left\{ x^2(t) + [u(t)]^2 \right\} dt$$

збільшиться, тому що  $t < 1 < 2$  зростає. Також можна зробити висновок, що в класі малих варіацій керування точка (1.52) не найкраща. З (1.52) походить очевидна структура конуса варіацій управління:

$$\delta u(t) \leq 0 \text{ якщо } t \in (0;1) \cup (1,5;2), \quad (2.52)$$

$$\delta u(t) \geq 0 \text{ якщо } t \in (1;1,5) \cup (2;3).$$

В таких умовах в класі функцій (2.52) не існує розв'язання задачі

$$\delta x^1(T) = \int_0^T \omega_0 \delta u(t) dt > 0.$$

Також можна переконатися, що для малих варіацій  $\delta u(t)$  точкою локального максимуму буде будь-яке управління, рівне  $\pm 1$  на послідовності інтервалів.

Таким чином, на шляху к достатньо точної апроксимації ковзного режиму алгоритм наближеного розв'язання, заснований на малих варіаціях, зустрине багато локальних екстремумів, в кожному з яких процес може «застрягти». Такі ситуації характерні для задач з ковзним режимом. Подолати такі труднощі можна за допомогою алгоритмів, в яких мінімізуюча послідовність управлінь будується процесом кінцевих варіацій управління на множині малої міри [77].

**Метод Ейлера** [32]. Методи рішення варіаційних задач або задач, в яких функціонали досліджуються на максимум і мінімум, сходні з методами дослідження функцій на максимум і мінімум.

Якщо диференційовна функція  $f(t)$  досягає максимуму або мінімуму в внутрішній точці  $t = t_0$  області визначення функції, то диференціал цієї функції  $df = 0$ .

Аналогічна теорема справедлива і для функціоналу. Якщо функціонал  $I[x(t)]$ , який має варіацію  $\delta I$  досягає максимуму або мінімуму при  $x = x_0(t)$ , де  $x_0(t)$  внутрішня точка області визначення функціоналу, то при  $x = x_0(t)$  приріст функціоналу  $\delta I = 0$ .

Варіаційні методи оптимального управління пов'язані з дослідженням функціоналів  $I[x(t)]$  на екстремум за допомогою відповідних приростів або варіацій цих функціоналів [31].

Дослідимо на екстремум функціонал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_k} F[t, x(t), \dot{x}(t)] dt. \quad (2.53)$$

Припустимо, що функція, яку шукають,  $x(t)$  задовольняє крайовим умовам  $x(t_0) = x_0, x(t_k) = x_k$  та проходить крізь задані точки  $A(t_0, x_0)$  та  $B(t_k, x_k)$ .

Отже, розглядається варіаційна задача з закріпленими кінцями.

Функція, яка доставляє екстремум функціоналу (2.53) є рішенням диференційного рівняння

$$\frac{\partial F[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial \dot{x}(t)} = \dot{F}_x - \frac{d}{dt} \dot{F}_x = 0. \quad (2.54)$$

Диференційне рівняння (2.54) називається рівнянням Ейлера. Воно є необхідною умовою екстремуму функціоналу (2.53) при фіксованих граничних умовах та відсутністю обмежень на координати.

Інтегральні криві рівняння Ейлера  $x = x(t, c_1, c_2)$  називаються екстремалами. Довільні сталі  $c_1, c_2$ , які входять в загальне рішення цього рівняння після інтегрування, визначаються з граничних умов  $x(t_0) = x_0, x(t_k) = x_k$ . При рішення рівняння Ейлера екстремум шукають серед неперервних гладких функцій (тобто безперервно диференційовних на інтервалі  $[t_0, t_k]$ , які належать класу  $C_1[t_0, t_k]$ ), а управління та фазові координати не мають обмежень по типу нерівностей.

Запишемо рівняння Ейлера (2.54) у вигляді

$$\dot{F}_x - \dot{F}_{xt} - \dot{F}_{xx}x(t) - \dot{F}_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}(t) = 0, \quad (2.55)$$

або

$$\dot{F}_{\dot{x}\dot{x}} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dot{F}_{xt} - \dot{F}_x = 0.$$

Диференціальне рівняння Ейлера, як випливає з (2.55), є рівнянням



другого порядку, в загальному випадку – нелінійним і нестационарним. Інтегрування такого диференціального рівняння викликає значні труднощі. Однак в ряді випадків рішення можна отримати досить просто [103].

У технічних задачах рівняння Ейлера може використовуватися не тільки для обчислення функцій, що доставляють екстремум відповідного функціоналу, але для синтезу оптимального регулятора, який автоматично здійснює рух системи по екстремалям.

**Метод Ейлера-Лагранжа.** При розв'язанні задач оптимального керування варіаційними методами виникають задачі, в яких потрібно знайти екстремум функціонала. При цьому на функції, які є аргументами цього функціоналу, крім граничних умов, яким вони повинні задовольняти, накладаються деякі додаткові умови, які називають рівняннями зв'язку. Подібні задачі називаються задачами на умовний екстремум. Рівняннями зв'язку часто є рівняння стану об'єкта керування [31]:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{U}(t).$$

Розглянемо варіаційну задачу на умовний екстремум для випадку, коли рівняння зв'язку містять похідні. Сформулюємо задачу: визначити криву

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)],$$

яка доставляє екстремум функціоналу

$$I[\bar{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_k} F[t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] dt$$

і задовольняє граничним умовам

$$x_{s_0}(t_0) = a_{s_0}, x_{s_k}(t_k) = b_{s_k} \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (2.56)$$

а також рівнянням зв'язку (рівнянням стану об'єкта)

$$\varphi_i [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.57)$$

Рівняння зв'язку (2.57) покладають незалежними, тобто ранг функціональної матриці  $\left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right]$  повинен дорівнювати  $m$ .

Сформульована задача на умовний екстремум шляхом введення спеціальних функцій  $\lambda_i(t)$  – множників Лагранжа, зводиться до задачі на безумовний екстремум наступного функціоналу:

$$I^* [\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t)] = \int_{t_0}^{t_k} F^* [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{\lambda}(t)] dt,$$

де

$$\bar{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)],$$

а

$$F^* [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{\lambda}(t)] = F [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)]. \quad (2.58)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціоналу (2.58) мають вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{x}_j} \right] = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (2.59)$$

$$\varphi_i [t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Для визначення  $n + m$  невідомих функцій  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$ , маємо систему з  $n + m$  рівнянь. Для

обчислення довільних постійних в загальному рішенні системи рівнянь (2.59) використовуються граничні умови (2.56).

Задачу з диференціальними зв'язками називають спільною задачею Лагранжа, а викладений вище метод рішень задач на умовний екстремум називається методом невизначених множників Лагранжа. Розв'язання спільної задачі Лагранжа, наведене вище, дано для випадку, коли виконується тільки перша необхідна умова мінімуму функціонала і, крім того, для завдання з закріпленими кінцями.

Всі наведені вище методи дають лише наближений розв'язок задач оптимального керування.

Відзначимо, що в той час, як у диференціальних рівняннях без керування, які будемо розглядати в розділі 2, невідомі функції можуть залежати від просторової змінної  $x$ , то у випадку задач з керуванням, які досліджені в розділі 3, як правило, невідомі функції  $y_k(t)$ ,  $u_k(t)$  залежать від часу  $t$ .

### 2.3 Постановка задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

Задача полягає в розробці і дослідженні методу знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{f}(x), \quad (2.60)$$

$$\vec{y}(0) = 0, \quad (2.61)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nm}(x) \end{pmatrix}$$

у вигляді лінійної комбінації точних розв'язків задачі Коші (2) – (3) для правих частин вигляду  $\vec{\varphi}_m(x) = \frac{d\vec{\psi}_m(x)}{dx} - A\vec{\psi}_m(x)$ , де  $\vec{\psi}_m(x)$  – система довільних лінійно незалежних вектор-функцій, які задовольняють початковій умові задачі Коші  $\vec{\psi}_m(0) = \vec{0}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Пропонується метод знаходження довільних сталих вказаної лінійної комбінації.

Означення 1. Хай  $g \in C[a, b]$ ,  $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Функція

$$S_1(x) = S_{n,k}(x) = g(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + g(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = \overline{1, n}$$

називається сплайном першого степеня (кусково-лінійним сплайном).

Цей сплайн має такі властивості ( $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ ):

$$s_{n,1}(x_k) = g(x_k), \quad k = \overline{0, n},$$

$$g(x) \in PC^1[a, b] \Rightarrow \|R_n(x)\|_\infty =: \sup_{a \leq x \leq b} |g(x) - s_{n,1}(x)| \leq \frac{\Delta}{n} \|g'\|_{L_\infty[a, b]},$$

$$g(x) \in PC^2[a, b] \Rightarrow \|R_n(x)\|_\infty \leq \frac{\Delta^2}{8} \|g''\|_\infty; \quad \|R'_n(x)\|_\infty \leq \frac{\Delta}{2} \|g''\|_\infty.$$

В роботі [51] досліджувалась оцінка похибки наближення диференціальних функцій лінійними сплайнами в нормі  $W_2^1(I)$ ,  $I = [0, 1]$ , тобто знаходились невідомі коефіцієнти  $C_k, k = \overline{0, N}$  та досліджена оцінка похибки наближення, яке виникає при умові, що  $\|f'\|_\infty < \infty$ . Зокрема, в

теоремі 1 [51] стверджується, що для сплайна 1-го степеня  $\psi(x) = \Phi_m^T(x)C$  – з властивостями

$$\|f(\cdot) - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(I)} = \inf_C \|f(\cdot) - \Phi_m^T(\cdot)C\|_{W_2^1(I)},$$

виконується нерівність

$$\|\psi\|_{\infty} \leq \lceil f \rceil + \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty}, \lceil f \rceil := \max_{0 \leq k \leq m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right|,$$

а в теоремі 2 цієї ж роботи доводиться, що для  $f(x) = S_0(x)$ , де  $S_0(x)$  є сплайном першого степеня з вузлами  $\xi_k = \frac{(k+0.5)}{m}, k = \overline{0, m-1}$  і з властивостями  $S_0\left(\frac{k}{m}\right) = 0, k = \overline{0, m}; |S_0'(x)| = 1$  у теоремі 1 виконується знак рівності.

Тут використані позначення

$$\begin{aligned} f(x) &\in W_2^1(I) \cap W_{\infty}^1(I), W_2^1(I) := \{f(x) : \|f\|_2 + \|f'\|_2 < \infty\}, \\ W_{\infty}^1(I) &:= \{f(x) : \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} < \infty\}, h(t) = (|t-1| + 2|t| + |t+1|) / 2, \\ \|f\|_p &= \|f\|_{L^p(I)} := \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty, \|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p. \end{aligned}$$

#### 2.4 Основні твердження методу розв'язання задачі Коші системою звичайних диференціальних рівнянь

Алгоритм розв'язання задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь (2.60) – (2.61) згідно з методом, що пропонується, полягає в наступному:

– вибір системи  $\{\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_N(x)\}$  лінійно-незалежних вектор-функцій, які задовольняють умови

$$\vec{\psi}_k(0) = 0; \quad \frac{d\vec{\psi}_k(x)}{dx} - A\vec{\psi}_k(x) = \vec{\phi}_k(x) \neq 0, \quad k = \overline{1, N}; \quad (2.62)$$

– представлення невідомого розв'язку задачі (2.60) – (2.61) у вигляді

$$y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_{\ell,i}(x), \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.63)$$

– знаходження невідомих сталих  $C_{i,\ell}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\ell = \overline{1, N}$  з умови як найкращого наближення вільних членів  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  диференціальних

рівнянь системи в нормі  $\|u\|_2 = \left( \int_0^1 u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$  або в нормі простору

$$W_2^1[0,1] = \left\{ u(x) : \sum_{s=0}^1 \|u^{(s)}\|_2^2 < \infty \right\}.$$

У загальному випадку вказані умови мають вигляд

$$J_r(C) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left( f_i(x) - \sum_{l=1}^N \left( C_{i,l} \frac{d\psi_{\ell,i}(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) C_{k,l} \psi_{\ell,k}(x) \right) \right)^2 dx \rightarrow \min_C, \quad r = 0.$$

$$J_r(C) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \left( f_i^{(s)}(x) - \sum_{l=1}^N \left( C_{i,l} \frac{d\psi_{\ell,i}(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) C_{k,l} \psi_{\ell,k}(x) \right)^{(s)} \right)^2 dx \rightarrow \min_C, \quad r = 1. \quad (2.64)$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції багатьох змінних, для визначення коефіцієнтів  $C_{k,i}$  ( $k = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{1, N}$ ) розкладання наближеного розв'язку по системі функцій  $\psi_{\ell,k}(x)$  отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial J_0(C)}{\partial C_{j,p}} = 2 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n \left( f_i(x) - \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d}{dx} \psi_{i,\ell}(x) - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) C_{k,\ell} \psi_{k,\ell}(x) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( -\frac{d}{dx} \psi_{j,p}(x) \cdot \delta_{i,j} + a_{i,j}(x) \psi_{j,p}(x) \right) dx = 0, j = \overline{1,n}, p = \overline{1,N}; \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial J_1(C)}{\partial C_{j,p}} = 2 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^1 \left( f_i^{(s)}(x) - \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d \psi_{\ell,i}(x)}{dx} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) C_{k,\ell} \psi_{\ell,k}^{(s)}(x) \right) \right) \cdot \left( -\psi_{j,p}^{(s+1)}(x) \cdot \delta_{i,j} + a_{i,j}^{(s)}(x) \psi_{j,p}(x) \delta_{s,1} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{i,j}(x) \psi_{j,p}^{(s)}(x) \right) dx = 0, j = \overline{1,n}, p = \overline{1,N}; \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (2.66)$$

Більш докладно, ця система має вигляд

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^1 \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \psi_{i,\ell}^{(s+1)}(x) - \sum_{k=1}^n C_{k,\ell} \left( a_{i,k}(x) \psi_{k,\ell}(x) \right)^{(s)} \right) \times \\ \times \left( -\psi_{j,p}^{(s+1)}(x) \cdot \delta_{i,j} + a_{i,j}(x) \psi_{j,p}^{(s)}(x) \right) dx = \\ = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^1 f_i^{(s)}(x) \left( -\psi_{p,j}^{(s+1)}(x) \cdot \delta_{i,j} + \right. \\ \left. a_{i,j}^{(s)}(x) \psi_{p,j}(x) \delta_{s,1} + a_{i,j}(x) \psi_{p,j}^{(s)}(x) \right) dx, j = \overline{1,n}, p = \overline{1,N}. \quad (2.67)$$

Результати розв'язання систем (2.65) – (2.67) підставляємо у формулу (2.63).

*Твердження 1.* Наближений розв'язок  $y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_{i,\ell}(x)$ ,  $i = \overline{1,n}$

має наступні властивості:

- а) точно задовольняє початковій умові (2.61) задачі Коші;
- б) точно задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_{i,N}(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) y_{k,N}(x) = f_{i,N}(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad (2.68)$$

де

$$f_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d}{dx} \Psi_{i,\ell} - \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \Psi_{k,\ell} \right), \quad i = \overline{1,n} \quad (2.69)$$

і функції  $f_{i,N}(x)$  є як найкращими наближеннями в нормі  $W_2'[0,1]$  до  $f_i(x), i = \overline{1,n}$ . Доведення твердження 1 отримується безпосередньою перевіркою виконання (2.68), (2.69).

Наведене твердження представляє новий метод розв'язання задачі (2.60) – (2.61), який полягає у тому, що її точний розв'язок пропонується наближати точними розв'язками системи (2.69) при нульових початкових умовах і не рівних нулю правих частинах.

*Твердження 2.* Припустимо, що коефіцієнти, праві частини і розв'язок системи (2.60)

$$y_i(x) \in C^\infty(R), a_{ij}(x) \in C^\infty(R), f_i(x) \in C^\infty(R), \\ i, j = 1:n$$

є аналітичними функціями. Якщо постійні  $C_{k,\ell} (k = \overline{1,n}, \ell = \overline{1,N})$  знаходяться з умови

$$J_1(C) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^1 \left[ f_k^{(s)}(x) - f_{k,N}^{(s)}(x) \right]^2 dx \rightarrow \min_C,$$

то у випадку  $\Psi_{k,\ell}(x) = x^\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$  виконуються наступні граничні співвідношення

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \max_{0 \leq s \leq 1} \left\{ |f_k(x) - f_{k,N}(x)|, |f_k'(x) - f_{k,N}'(x)| \right\} = 0,$$



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |y_k(x) - y_{k,N}(x)| = 0, k = \overline{1, n}.$$

Так, наприклад, для випадку системи, що складається з одного, двох або трьох диференціальних рівнянь, система (2.67) набуває відповідно виду, якщо розглядати задачу у просторі  $L_2[0,1]$ :

при  $n = 1$  (одне диференціальне рівняння)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{l=1}^N \left( C_{1,l} \frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{1,l} C_{1,l} \psi_l(x) \right) \cdot \left( \psi_p^{(s+1)}(x) \delta_{i,j} - a_{i,l} \psi_p(x) \right) dx = \\ & = \int_0^1 f_i(x) \left( \frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{1,j} \psi_p(x) \right) dx, p = \overline{1, N} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left( \frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{1,l} \psi_l(x) \right) \left( -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{1,j} \psi_p(x) \right) dx = \\ & = \int_0^1 f_i(x) \left( \frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{1,j} \psi_p(x) \right) dx, p = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

при  $n = 2$  (система двох диференціальних рівнянь):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{11} \psi_l(x) \right] \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11} \psi_p(x) \right] - a_{21}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) \right\} dx + \\ & + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ a_{12} \psi_l(x) \left[ \frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11} \psi_p(x) \right] + \left[ \frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{22} \psi_l(x) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times a_{21} \psi_p(x) \psi_p(x) \right\} dx = \\ & = \int_0^1 \left\{ f_1(x) \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11} \psi_p(x) \right] + f_2(x) a_{21} \psi_p(x) \right\} dx, p = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] a_{12}\psi_q(x) - a_{21}\psi_\ell(x) \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2\psi_\ell(x)\psi_q(x) + \left[ -\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_\ell(x) \right] \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x)a_{12}\psi_{\bar{i}}(x) + f_2(x) \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx, \quad q = \overline{1, N};
\end{aligned}$$

при  $n = 3$  (система трьох диференціальних рівнянь):

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. -a_{21}^2\psi_\ell(x) - a_{21}\psi_\ell(x)\psi_p(x) - a_{31}^2\psi_\ell(x)\psi_p(x) \right\} dx + \\
& \quad + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}\psi_\ell(x) \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. -a_{22} \cdot a_{21}\psi_\ell(x)\psi_p(x) - a_{32} \cdot a_{31}\psi_\ell(x)\psi_p(x) \right\} dx + \\
& \quad + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{13}\psi_\ell(x) \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. -a_{23}\psi_\ell(x)a_{21}\psi_p(x) - a_{33}a_{31}\psi_\ell(x)\psi_p(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x) \left[ -\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] + f_2(x)a_{21}\psi_p(x) + f_3(x)a_{31}\psi_p(x) \right\} dx, \quad p = \overline{1, N}; \\
& \quad + \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] a_{12}\psi_q(x) - a_{21}\psi_\ell(x) \times \right. \\
& \quad \times \left[ \frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] - a_{31}\psi_\ell(x)a_{32}\psi_q(x) \left. \right\} dx + \\
& \quad + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2\psi_\ell(x)\psi_q(x) - a_{22}\psi_\ell(x) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] - a_{32}^2\psi_l(x)\psi_q(x) \Big\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{13}a_{12}\psi_l(x)\psi_q(x) - a_{23}\psi_l(x) \times \right. \\
& \times \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] - a_{33}a_{32}\psi_l(x)\psi_q(x) \Big\} dx + \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x)a_{12}\psi_q(x) + f_2(x) \left[ -\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] + f_3(x)a_{32}\psi_q(x) \right\} dx, q = \overline{1, N}; \\
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] a_{13}\psi_r(x) - a_{21}a_{23}\psi_l(x)\psi_r(x) - \right. \\
& \quad \left. - a_{31}\psi_l(x) \left[ -\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}a_{13}\psi_l(x)\psi_r(x) - a_{22}a_{23}\psi_l(x)\psi_r(x) - \right. \\
& \quad \left. - a_{32}\psi_l(x) \left[ -\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{13}^2\psi_l(x)\psi_r(x) - a_{23}^2\psi_l(x)\psi_r(x) - \right. \\
& \quad \left. - a_{33}\psi_l(x) \left[ -\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x)a_{13}\psi_r(x) + f_2(x)a_{23}\psi_q(x) + f_3(x) \left[ -\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33}\psi_q(x) \right] \right\} dx, r = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

*Теорема 1.* Наближений розв'язок  $y_{i,N}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  має наступні властивості:

- а) точно задовольняє початкові умови (2.61) задачі Коші;
- в) точно задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$y'_{i,N}(x) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} y_{k,N}(x) + f_{i,N}(x), \quad i = \overline{1,n}; \quad (2.70)$$

де

$$f_{i,N}(x) = \sum_{\ell=0}^N \left( C_{i,\ell} \psi'_\ell - \psi_\ell \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), \quad i = \overline{1,n} \quad (2.71)$$

і сталі  $C_{k,\ell}$  ( $k, \ell = \overline{1,n}$ ) знаходяться з умови (2.64) при  $r = 0$  або при  $r = 1$ .

*Доведення.* Кожний доданок у формулі (2.63) задовольняє умову (2.61), тому всі функції, що визначаються рівністю (2.63), теж задовольняють умову (2.61), тобто твердження 1) теореми справджується. Справедливість твердження 2) перевіряється безпосередньою підстановкою виразів (2.63) для функцій  $y_{i,N}(x)$  ( $i = \overline{1,n}$ ) у рівність (2.68) і врахуванням рівностей (2.69):

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_\ell(x) + \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right); \\ \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \sum_{\ell=1}^N a_{i,k} C_{i,\ell} + \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \sum_{\ell=1}^N \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell}; \\ \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Наведена теорема свідчить, що пропонується точний розв'язок задачі (2.60) – (2.61) наближати точними розв'язками системи (2.70) при нульовій початковій умові.

Отже, розв'язання початкової задачі (2.60) – (2.61) в запропонованому методі зведено до мінімізації похибки наближення правих частин  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1,n}$  або правих частин та їх похідних за допомогою функцій

$$f_{i,N} = \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_\ell \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким чином, похибка наближення  $|y_i(x) - y_{i,N}|$  ( $i = \overline{1, n}$ ) повністю визначається похибкою наближення  $|f_i(x) - f_{i,N}|$  ( $i = \overline{1, n}$ ) або похибками наближень  $|f_i(x) - f_{i,N}|$  ( $i = \overline{1, n}$ ) і  $\left| \frac{df_i(x)}{dx} - \frac{df_{i,N}(x)}{dx} \right|$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Наведені в розділі 4 приклади підтверджують викладене.

*Теорема 2.* Припустимо, що коефіцієнти, праві частини і розв'язок системи

$$y_i(x) \in C^\infty(R), a_{ij}(x) \in C^\infty(R), f_i(x) \in C^\infty(R), i, j = \overline{1, n}$$

є аналітичними функціями. Якщо постійні  $C_{k,\ell}$  ( $k = \overline{1, n}, \ell = \overline{1, N}$ ) знаходяться з умови

$$J_1(C) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^1 [f_k^{(s)}(x) - f_{k,N}^{(s)}(x)]^2 dx \rightarrow \min_C,$$

то у випадку  $\psi_{k,\ell}(x) = x^\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots$  виконуються наступні граничні співвідношення

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ |f_k(x) - f_{k,N}(x)|, |f'_k(x) - f'_{k,N}(x)| \right\} = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |y_k(x) - y_{k,N}(x)| = 0, k = \overline{1, n}.$$

*Доведення.* Представимо праві частини системи у вигляді ряду Маклорена

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{k,j} x^j, f_{k,j} = f_k^{(j)}(0) / j!, k = \overline{1, n},$$

тоді

$$\frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot f_{k,j} \cdot x^{j-1}, k = 1:n$$

та

$$J_1(C) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=0}^{\infty} f_{k,j} x^j - \sum_{\ell=1}^N \left( C_{k,\ell} \frac{d}{dx} \psi_{k,\ell} - \sum_{j=1}^n a_{k,j} C_{j,\ell} \psi_{j,\ell} \right) \right]^2 dx + \\ + \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot f_{k,j} \cdot x^{j-1} - \sum_{\ell=1}^N \left( C_{k,\ell} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{k,\ell} - \sum_{j=1}^n C_{j,\ell} \frac{d}{dx} (a_{k,j} \psi_{j,\ell}) \right) \right]^2 dx \rightarrow \min_C.$$

Очевидно, що якщо вибрати коефіцієнти  $C_{k,l}$  не оптимально з умови, щоб

$$\frac{d^p}{dx^p} \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_{k,j} x^j - \sum_{\ell=1}^N \left( C_{k,\ell} \frac{d}{dx} \psi_{k,\ell} - \sum_{j=1}^n a_{k,j} C_{j,\ell} \psi_{j,\ell} \right) \right)_{x=0} = 0, p = 0:N,$$

то при  $N \rightarrow \infty$  отримаємо  $J_1(C) \rightarrow 0$ . Враховуючи, що при оптимальному виборі  $C_{k,l}$  значення  $J_1(C)$  може тільки зменшитися, моливо зробити висновок про те, що існує набір коефіцієнтів  $C_{k,l}$ , який забезпечує рівність

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ |f_k(x) - f_{k,N}(x)|, |f'_k(x) - f'_{k,N}(x)| \right\} = 0.$$

Якщо скористатися методом оцінки похибки наближення в нормі  $W_2^1[0,1]$  диференційованих функцій лінійними сплайнами, викладеним в роботі [51], можна довести, що одержувані наближення сплайнами першого ступеня є точними на функціях  $e_0(x) = 1$ ,  $e_1(x) = x$  і асимптотично точно наближають функцію  $e_2(x) = x^2$ . Відповідно до теоремами Коровкіна П.П. [31] такі оператори прагнуть до кожної неперервної функції, тобто стосовно нашого завдання будуть виконуватися співвідношення

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_{k,N}(x)| = 0.$$

Оскільки функції  $y_{k,N}(x)$  задовольняють однорідним початковим умовам, то різниці  $\varepsilon_k(x) = y_k(x) - y_{k,N}(x), k = \overline{1, n}$  теж задовольняють однорідним початковим умовам  $\varepsilon_k(0) = 0, k = \overline{1, n}$ . Тому при  $N \rightarrow \infty$  отримуємо  $f_k(x) - f_{k,N}(x) \rightarrow 0, k = \overline{1, n}$ , оскільки функції  $f_i(x), a_{ij}(x), i, j = \overline{1, n}$  вважаємо такими, що їх ряди Маклорена сходяться, тобто залишок

$$\sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{d^p}{dx^p} \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_{k,j} x^j - \sum_{\ell=1}^N \left( C_{k,\ell} \frac{d}{dx} \Psi_{k,\ell} - \sum_{j=1}^n a_{k,j} C_{j,\ell} \Psi_{j,\ell} \right) \right) \frac{x^p}{p!} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$N \rightarrow \infty.$$

Система диференціальних рівнянь для  $\varepsilon_k(x), k = \overline{1, n}$  може бути записана у вигляді

$$\frac{d\varepsilon_k(x)}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl} \varepsilon_l(x) + f_k(x) - f_{kN}(x), k = \overline{1, n}.$$

Ця система при  $N \rightarrow \infty$  перетвориться в систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varepsilon_k(x)}{dx} - \sum_{l=1}^n a_{kl} \varepsilon_l(x) = 0, k = \overline{1, n}.$$

У відповідність з відомою теоремою таке завдання при однорідних початкових умовах  $\varepsilon_k(0) = 0, k = \overline{1, n}$  має тривіальне, тобто тотожно рівне нулю рішення:

$$\varepsilon_k(x) \equiv 0, k = \overline{1, n}.$$

Звідки походить, що при

$$N \rightarrow \infty \quad y_k(x) - y_{k,N}(x) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} y_{k,N}(x) = y_k(x), k = \overline{1, n}.$$

Теорема 2 доведена.

## 2.5 Висновки до розділу 2

1. В розділі 2 розроблено і досліджено метод побудови наближених розв'язків задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь  $d\vec{y}/dx = A\vec{y} + \vec{f}(x)$ ,  $0 < x < 1$ , згідно з яким компоненти розв'язку  $y_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$  подаються у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно незалежних функцій  $\psi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , які задовольняють початковій умові задачі Коші. Коефіцієнти розкладу знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі  $L_2[0,1]$  або  $W_2^1[0,1]$ ) правих частин  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  із врахуванням коефіцієнтів розв'язуваної системи диференціальних рівнянь.

2. Метод, у якому мінімізується норма  $L_2[0,1]$  різниці між заданою правою частиною та нев'язкою, яка виникає при підстановці наближеного розв'язку в кожне диференціальне рівняння є точним, якщо праві частини диференціальних рівнянь системи є поліномами.

3. Цей метод дозволяє знаходити розв'язок задачі оптимального керування електроприводом, що є найкращим наближенням до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0,1]$ .

Основні результати другого розділу опубліковано у роботах [ 1, 6, 7, 15, 17].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел: [14, 29, 31, 36, 52, 58, 60–62, 73, 77, 80, 94, 96, 103].



## РОЗДІЛ 3

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ  
КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ

3.1 Постановка задачі оптимального керування електроприводом, яка зводиться до одного звичайного диференціального рівняння

Нагадаємо, що в той час, як у диференціальних рівняннях без керування, які розглядались в розділі 2, невідомі функції залежали від просторової змінної  $x$ , то у випадку задач з керуванням, які досліджені в розділі 3, як правило, невідомі функції  $y_k(t)$  ( $x_k(t)$ ) залежать від часу  $t$ .

Хай нам треба розв'язати наступну задачу: знайти функції  $y(t)$ ,  $U(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , якщо

$$y' = ay(t) + f(t) + bu(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

$$y(0) = y_0, \quad (3.2)$$

$$\int_0^T [\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)] dt \rightarrow \min, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \quad (3.3)$$

Цю задачу заміною змінної можна звести до задачі, у якій  $T = 1$ . Тому вважаємо, що  $T = 1$ .

Задачу (3.1) – (3.3) при  $T = 1$  замінимо задачею

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u, y) = & \int_0^1 [y' - ay - f(t) - bu(t)]^2 dt + \\ & + \int_0^1 \left[ y(t) - y_0 - a \int_0^t y(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \int_0^t u(\tau) d\tau \right]^2 dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T [\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)] dt. \quad (3.4)$$

Хай

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad h(t) = \frac{1}{2} [|t+1| - 2|t| + |t-1|] = \begin{cases} 0, & t \leq -1, t \geq 1, \\ 1+t, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Будемо шукати невідомі функції  $y(t)$ ,  $u(t)$  у вигляді

$$y_n(t) = y_0 h(nt) + \sum_{k=1}^n y_k h(nt - k); \quad (3.5)$$

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n U_k H(nt - k); \quad (3.6)$$

Зауважимо, що  $Supp h(t) = (-1, 1)$ ;  $Supp H(t) = [0, 1]$ .

Тому

$$Supp h(nt - k) = D_k = \{-1 < nt - k < 1\} = \left\{ \frac{k-1}{n} < t < \frac{k+1}{n} \right\},$$

$$Supp H(nt - k) = \tilde{D}_k = \{0 \leq nt - k \leq 1\} = \left\{ \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Тобто формули (3.5), (3.6) можна записувати також в іншій формі:

$$y_n(t) = (k+1-nt)y_k + (nt-k)y_{k+1}, \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \overline{k=0, n-1}; \quad (3.7)$$

$$u_n(t) = u_k, \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \overline{k=0, n-1}. \quad (3.8)$$

Підставляючи формули (3.5), (3.6) у функціонал (3.4), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left( Y = [y_1, \dots, y_n]^T, U = [U_1, \dots, U_n]^T \right): \\ J(Y, U) = & \int_0^T \left\{ y_0 \left[ (h(nt))'_t - ah(nt) \right] + \sum_{k=1}^n y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - f(t) - \right. \\ & \left. - b \sum_{k=1}^n U_k H(nt-k) \right\}^2 dt + \int_0^T \left\{ y_0 \left( h(nt) - 1 - a \int_0^t h(n\tau) d\tau \right) + \sum_{k=1}^n y_k \left[ h(nt-k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - a \int_0^t h(nt-\tau) d\tau \right] - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \int_0^t \sum_{k=1}^n U_k H(n\tau-k) d\tau \right\}^2 dt + \\ & \left. + \int_0^T \left[ \beta_1 \left( \sum_{k=0}^n y_k h(nt-k) \right)^2 + \beta_2 \left( \sum_{k=1}^n U_k H(nt-k) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min_{Y, U}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Прирівнюючи частинні похідні функціонала (3.9) по невідомим  $y_k, U_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  до нуля, отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої – це постійні величини:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(Y, U)}{\partial y_p} = 0: & \int_0^T \left[ y_0 \left[ (h(nt))'_t - ah(nt) \right] + \sum_{k=1}^n y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - \right. \\ & \left. - f(t) - b \sum_{k=1}^n u_k H(nt-k) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^n y_k \left( h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right) - \right. \\ & \left. - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \sum_{k=1}^n u_k \int_0^t H(n\tau-k) d\tau \right] \cdot \left[ h(nt-p) - ah \int_0^t (n\tau-p) d\tau \right] dt + \end{aligned}$$

$$+\beta_1 \int_0^T \sum_{k=0}^n y_k h(nt-k) \cdot h(nt-p) dt = 0; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(Y,U)}{\partial U_p} = 0: & \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left\{ \sum_{k=p}^{p+1} y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - f(t) - bu_p \right\} \times \\ & \times (-b) dt + \\ & + \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left\{ \sum_{k=p}^{p+1} y_k \left[ (h(nt-k)) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] - \int_0^t f(\tau) d\tau - bu_p \int_0^t H(n\tau-p) d\tau \right\} \times \\ & \times (-b) dt + \beta_2 U_p \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} dt = 0, \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} HH_{k,p} &= \int_0^t h(nt-k) \cdot h(nt-p) dt; \\ A_{pk} &= \int_0^T \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt; \\ B_{pk} &= \int_0^T \left[ (h(nt-k))'_t - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] \cdot \left[ h(nt-p)'_t - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt; \\ C_{pk} &= \int_0^T H(nt-k) \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt; \\ D_{kp} &= \int_0^T \left( \int_0^t H(n\tau-k) d\tau \right) \cdot \left[ h(nt-p)'_t - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

Тоді систему (3.10) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^n A_{pk} y_k - b \sum_{k=1}^n C_{pk} U_k + \sum_{k=1}^n B_{pk} y_k - b \sum_{k=1}^n D_{pk} U_k + \beta_1 \sum_{k=0}^n HH_{pk} y_k =$$

$$\begin{aligned}
&= -y_0 \int_0^T \left[ h(nt)_t' - ah(nt) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))_t' - ah(nt-p) \right] dt + \\
&+ \int_0^T f(t) \left[ (h(nt-p))_t' - ah(nt-p) \right] dt - y_0 \int_0^T \left[ h(nt)_t' - a \int_0^t h(n\tau) d\tau \right] \times \\
&\times \left[ (h(nt-p))_t' - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt + \int_0^T \left( \int_0^t f(\tau) \right) \left[ h(nt-p) - \right. \\
&\quad \left. - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt, \quad p = \overline{1, n}; \\
&-b \sum_{k=p}^{p+1} y_k \int_{p/n}^{(p+1)/n} \left[ (h(nt-k))_t' - ah(nt-k) \right] dt + \\
&\quad + b \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt + b^2 U_p \frac{1}{n} + \\
&+ (-b) \sum_{k=p}^n y_k \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left[ h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] dt + \\
&+ b \int_{\frac{p}{n}}^T \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt + b^2 U_p \int_{\frac{p}{n}}^T \int_{\frac{p}{n}}^t H(n\tau-p) d\tau dt + \beta_2 \frac{U_p}{n} = 0, \quad p = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Перепишемо ці системи у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \left( A_{pk} + B_{pk} \right) y_k - b \sum_{k=1}^n \left( C_{pk} + D_{pk} \right) U_k = -y_0 \int_0^T \left[ (h(nt))_t' \right] \times \\
&\times \left[ (h(nt-p))_t' - ah(nt-p) \right] dt + \int_0^T \left[ (h(nt-p))_t' - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt - \\
&-b \sum_{k=p}^{p+1} y_k \int_{\frac{p}{n}}^T \left[ (h(nt-k))_t' - ah(nt-k) + h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) \right] dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b \left[ \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt - \int_{p/n}^T \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt + b^2 U_p \left( \frac{1}{n} + \int_{p/n}^T \int_0^t H(n\tau - p) d\tau dt \right) \right] + \\
& + \beta_2 \frac{U_p}{n} = b \int_{\frac{p}{n}}^T \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt + b \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt, \quad p = \overline{1, n}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Наведемо приклад.

$$y' = y + \beta t + \alpha u(t), \quad y(0) = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha = 1. \quad (3.13)$$

Точний розв'язок задачі (3.13) має вигляд

$$\begin{aligned}
y &= c(t) e^t; \quad c' e^t + c e^t = c e^t + \beta t + \alpha u(t); \\
c' &= \frac{\beta t + \alpha u(t)}{e^t}; \\
c &= c(0) + \int_0^t \frac{\beta \xi + \alpha u(\xi)}{e^\xi} d\xi; \\
C(0) &= y(0);
\end{aligned}$$

Тоді точний розв'язок:

$$y = C(0) e^t + e^t \int_0^t \frac{\beta \xi + \alpha u(\xi)}{e^\xi} d\xi = e^t \int_0^t \frac{\xi + \alpha u(\xi)}{e^\xi} d\xi.$$

Задача наближеного розв'язку зводиться до мінімізації наступного функціоналу:

$$J(u) = \int_0^1 [\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)] dt \rightarrow \min.$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(u + \varepsilon \eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 \left\{ \beta_1 e^{2t} \left[ \int_0^t \frac{\beta \xi + \alpha(u(\xi) + \varepsilon \eta(\xi))}{e^\xi} d\xi \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \beta_2 [u(t) + \varepsilon \eta(t)]^2 \right\} dt \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \int_0^t \frac{\xi + \alpha u(\xi)}{e^\xi} \cdot \frac{\alpha \eta(\xi)}{e^\xi} d\xi + \beta_2 \cdot u(t)^2 \right] dt. \\ \tilde{J}(u, y) &= \int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \left( \int_0^t \frac{\xi + \alpha u(\xi)}{e^\xi} d\xi \right)^2 + \beta_2 \cdot U(t)^2 \right] dt = J(u). \end{aligned}$$

Наближене керування шукаємо у вигляді

$$\tilde{U}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} H(nt - k).$$

Тоді

$$J(\tilde{u}) = \int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \left( \int_0^t \frac{\beta \xi + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} U_{k+1} H(n\xi - k)}{e^\xi} d\xi \right)^2 + \beta_2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} U_{k+1} H(nt - k) \right)^2 \right] dt;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial U_p} = 0: & \int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \int_0^t \beta \frac{\xi + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} U_{k+1} H(n\xi - k)}{e^\xi} \cdot \left( \frac{\alpha \cdot H(n\xi - (p-1))}{e^\xi} \right) d\xi + \right. \\ & \left. + \beta_2 \cdot U_p H(nt - (p-1)) \right] dt = 0, \quad p = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \alpha 2 \int_0^t \frac{H(n\xi - (p-1))}{e^{2\xi}} d\xi + \beta_2 H(nt - (p-1)) \right] dt U_p =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \beta_1 e^{2t} \alpha \int_0^t \frac{\xi H(n\xi - (p-1))}{e^{2\xi}} d\xi, \quad p = \overline{1, n}; \\
U_P &= \frac{\int_0^1 \beta_1 e^{2t} \alpha \int_0^t \frac{\beta \xi \cdot H(n\xi - (p-1))}{e^{2\xi}} d\xi}{\int_0^1 \left[ \beta_1 e^{2t} \alpha \int_0^t \frac{H(n\xi - (p-1))}{e^{2\xi}} d\xi + \beta_2 H(nt - (p-1)) \right] dt}.
\end{aligned}$$

Запис сплайнів для програмної реалізації задачі оптимального керування електроприводом, що використовує одне звичайне диференціальне рівняння. Для одного диференціального рівняння

$$y' = y + u + t, \quad y(0) = 1$$

запишемо сплайн у вигляді

$$S(x, N, k, j) = \begin{cases} N_{k,j} \frac{x - X_{k+1}}{X_k - X_{k+1}} + N_{k+1,j} \frac{x - X_k}{X_{k+1} - X_k}, & X_k \leq x < X_{k+1}; \\ N_{n+1,j}, & x = X_{n+1} \wedge k = n \quad x_1 = 0; X_{n+1} = 1. \end{cases}$$

$$PS(x, N, k, j) = \begin{cases} \frac{N_{k+1,j} - N_{k,j}}{X_{k+1} - X_k}, & X_k \leq x < X_{k+1}; \\ 0, & x = X_{n+1} \wedge k = n. \end{cases}$$

$$z(x, N, j) = \sum_{k=1}^n S(x, N, k, j);$$

$$Pz(x, N, j) = \sum_{k=1}^n PS(x, N, k, j);$$

$$SS(x, N, k) = \begin{cases} N_{k,2} \frac{x - XX_{k+1}}{XX_k - XX_{k+1}} + N_{k+1,2} \frac{x - XX_k}{XX_{k+1} - XX_k}, & XX_k \leq x < XX_{k+1}; \\ N_{m+1,2}, & x = XX_{m+1} \wedge k = m. \end{cases}$$

Тут вузли для фазової координати та вузли для керування позначені



$X$  і  $XX$ :

$$zz(x, N, j) = \sum_{k=1}^m SS(x, N, k);$$

$$J(N) = \int_0^1 \left\{ a(Pz(t, N, 1) - z(t, N, 1) - zz(t, N) - t)^2 + \right. \\ \left. + b(z(t, N, 1)^2 + (zz(t, N))^2) \right\} dt \rightarrow \min.$$

З двовимірного масиву зробимо одновимірний шляхом перенумерації  
( $j = 1$  фазова координата):

$$S(x, N, k) = \begin{cases} N_k \frac{x - X_{k+1}}{X_k - X_{k+1}} + N_{k+1} \frac{x - X_k}{X_{k+1} - X_k}, & X_k \leq x < X_{k+1}; \\ N_{n+1}, & x = X_{n+1} \wedge k = n. \end{cases}$$

$$PS(x, N, k) = \begin{cases} \frac{N_{k+1} - N_{k,j}}{X_{k+1} - X_k}, & X_k < x < X_{k+1}; \\ 0, & x = X_{n+1} \wedge k = n. \end{cases}$$

$$z(x, N) = \sum_{k=1}^n S(x, N, k);$$

$$Pz(x, N) = \sum_{k=1}^n PS(x, N, k);$$

$$SS(x, N, k) = \begin{cases} N_{n+k} \frac{x - XX_{k+1}}{XX_k - XX_{k+1}} + N_{n+k+1} \frac{x - XX_k}{XX_{k+1} - XX_k}, & XX_k \leq x < XX_{k+1}; \\ N_{n+m+1}, & x = XX_{m+1} \wedge k = m; \end{cases}$$

$$zz(x, N) = \sum_{k=1}^m SS(x, N, k);$$

$$J(N) = \int_0^1 \left\{ a(Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t)^2 + \right. \\ \left. + b(z(t, N)^2 + (zz(t, N))^2) \right\} dt \rightarrow \min_N.$$

Всього  $n + m + 2$  значень  $N$ .

$$\frac{\partial J}{\partial N_j} = 2 \int_0^1 \left\{ a(Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial P_z}{\partial N_j} - \frac{\partial z}{\partial N_j} - \frac{\partial zz}{\partial N_j} + b(z(t, N) + zz(t, N)) \right) \times \left( \frac{\partial z}{\partial N_j} - \frac{\partial zz}{\partial N_j} \right) \right\} dt = 0.$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial N_j} = \begin{cases} \frac{1}{X_j - X_{j-1}}, & X_{j-1} \leq x < X_j; \\ -\frac{1}{X_{j+1} - X_j}, & X_j \leq x < X_{j+1}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial N_j} = \begin{cases} \frac{x - X_{j-1}}{X_j - X_{j-1}}, & X_{j-1} \leq x < X_j \\ -\frac{1}{X_j - X_{j-1}}, & X_j \leq x < X_{j+1}. \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq n; \frac{\partial P_z}{\partial N_j} = 0; \frac{\partial z}{\partial N_j} = 0, \text{ якщо } n+1 \leq j \leq n+m+1,$$

$$\frac{\partial zz}{\partial N_j} = 0, \text{ якщо } 1 \leq j \leq n.$$

$$\frac{\partial zz}{\partial N_{j+k}} = \begin{cases} \frac{x - X_{k+1}}{XX_k - XX_{k+1}}, & XX_k \leq x < XX_{k+1}; \\ \frac{x - XX_{k-1}}{XX_k - XX_{k-1}}, & XX_{k-1} \leq x < XX_k; \end{cases}$$

$$k = \overline{1, m+1} \text{ або } n+2 \leq j \leq n+m+2;$$

$$\Delta_1 = X_j - X_{j-1};$$

$$\Delta_2 = XX_j - XX_{j-1};$$

$$SS(x, N, k) = \begin{cases} \frac{(X_{k+1} - x)}{\Delta_1} N_k + \frac{x - X_k}{\Delta_1} N_{k+1}, & X_k \leq x \leq X_{k+1}; \\ 0, & x < X_k; x > X_{k+1}; \end{cases}$$

$$PS(x, N, k) = \begin{cases} \frac{N_{k+1} - N_k}{\Delta_1}, & X_k < x < X_{k+1}; \\ 0, & x \leq X_k; x > X_{k+1}; \end{cases}$$

$$SS(x, N, k) = \begin{cases} \frac{(XX_{k+1} - x)}{\Delta_2} N_{n+k} + \frac{x - XX_k}{\Delta_2} N_{n+k+1}, & XX_k \leq x \leq X; \\ 0, & x < XX_k; x > X_{k+1}. \end{cases}$$

Запишемо необхідні умови екстремума функції  $J(N)$  більш детально:

$$\begin{aligned} & a \int_0^1 [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \left( \frac{\partial Pz}{\partial N_j} - \frac{\partial z}{\partial N_j} \right) dt - \\ & - a \int_0^1 [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \frac{\partial zz}{\partial N_j} dt + \\ & + b \int_0^1 [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{\partial z}{\partial N_j} dt + b \int_0^1 [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{\partial zz}{\partial N_j} dt = 0, \quad j = \overline{1, n+1}; \\ & a \int_{XX_{k-1}}^{XX_k} [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \frac{t - XX_{k+1}}{\Delta_2} dt - \\ & - a \int_{XX_k}^{XX_{k+1}} [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \frac{XX_{k+1} - t}{\Delta_2} dt + \\ & + b \int_{XX_{k-1}}^{XX_k} [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{t - XX_{k-1}}{\Delta_2} dt + b \int_{XX_k}^{XX_{k+1}} [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{XX_{k+1} - t}{\Delta_2} dt = 0; \\ & a \int_{X_{j-1}}^{X_j} [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \left( \frac{1}{\Delta_1} - \frac{t - X_{j-1}}{\Delta_1} \right) dt + \\ & + a \int_{X_j}^{X_{j+1}} [Pz(t, N) - z(t, N) - zz(t, N) - t] \left( -\frac{1}{\Delta_1} - \frac{t - X_{j+1}}{\Delta_1} \right) dt + \\ & + b \int_{X_{j-1}}^{X_j} [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{t - X_{j-1}}{\Delta_1} dt + b \int_{X_j}^{X_{j+1}} [z(t, N) + zz(t, N)] \frac{X_{j+1} - t}{\Delta_1} dt = 0, \\ & j = \overline{n+2, n+m+2}, \quad (k = \overline{1, m+1}). \end{aligned}$$

### 3.2 Постановка задачі керування електроприводом, що використовує систему звичайних диференціальних рівнянь

На даний час існують методи наближеного розв'язання задачі керування електроприводом системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь, основані на заміні системи диференціальних рівнянь системою різницевих рівнянь. В даній роботі – вперше пропонується розв'язання задачі керування системою диференціальних рівнянь.

Пропонується новий метод наближеного знаходження функцій  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  та функцій  $u_1(t), \dots, u_n(t)$ .

Нехай рух об'єкта описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) + Du(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3.14)$$

$$y_i(0) = y_{i0}; \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.15)$$

$$\int_0^T (y^T B y + u^T C u) dt = \min, \quad (3.16)$$

де  $f(t) = (f_1(t) \dots f_n(t))^T$ ,

$\vec{y}(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))^T$  – невідомий вектор розв'язків,

$\vec{u}(t) = (u_1(t) \dots u_n(t))^T$  – невідомий вектор керування,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ – задані матриці.}$$

Задачу (3.14) – (3.16) заміною змінної  $t = \tau T, 0 \leq \tau \leq 1$  можна звести до задачі, у якій  $T = 1$ . Крім того, заміною  $y_i(t) = y_{i0} + w_i(t), i = \overline{1, n}$  задачу (3.14) – (3.16) можна звести до задачі з однорідними початковими умовами (3.15)

відносно функцій  $w_i(t)$ . Коли  $y_{i0} = 0$ , виконаємо ці заміни більш детально. В детальному записі система (3.14) може бути записана у вигляді

$$y_i'(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k(t) + f_i(t) + U_i(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.17)$$

Підставляючи

$$y_i(t) = y_i(\tau T) = \tilde{y}_i(\tau), \quad y_i'(t) = \tilde{y}_i'(\tau) T^{-1}, \quad \tilde{u}_i(\tau) = u_i(\tau T), \quad i = \overline{1, n}$$

у систему (3.17), отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i'(\tau) &= T \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{y}_k(\tau) + T f_i(\tau T) + T U_i(\tau T) = \\ &= \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{y}_k(\tau) + \tilde{f}_i(\tau) + \tilde{u}_i(\tau), \quad 0 < \tau < 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \tilde{a}_{ik} &= T a_{ik}, \quad \tilde{u}_i(\tau) = T u_i(\tau T), \quad T f_i(\tau T) = \tilde{f}_i(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким чином, ми звели систему диференціальних рівнянь до аналогічної системи на інтервалі  $[0,1]$ . При цьому умова (3.16) запишеться в наступному вигляді

$$\begin{aligned} G(y, u) &= \int_0^T (y^T B y + u^T C u) dt = \\ &= \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i(t) y_j(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} u_i(t) u_j(t) \right] dt = \min \Rightarrow \\ \tilde{G}(\tilde{y}, \tilde{u}) &= T \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \tilde{y}_i(\tau) \tilde{y}_j(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{u}_i(\tau) \tilde{u}_j(\tau) \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (\tilde{y}^T \tilde{B} \tilde{y} + \tilde{u}^T \tilde{C} \tilde{u}) dt = \min_{\tilde{y}, \tilde{u}};$$

$$\tilde{B} = TB; \tilde{C} = TC. \quad (3.19)$$

Таким чином, будемо вважати, що  $T = 1$ ,  $y_{i0} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  у задачі (3.14) – (3.16).

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (3.14) – (3.16) при  $T = 1$ ,  $y_{i0} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  у вигляді

$$\tilde{y}_i(t) = \sum_{p=1}^{M_1} Z_{ip} h_p(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.20)$$

$$\tilde{u}_i(t) = \sum_{q=1}^{M_2} W_{iq} H_q(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

де

$$h_p(t) = h(M_1 t - p); \quad (3.22)$$

$$H_1(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 - \frac{1}{M_2}; \\ 0, & t \geq \frac{1}{M_2}; \end{cases} \quad (3.23)$$

$$H_q(t) = \chi_{\left[\frac{q-1}{M_2}, \frac{q}{M_2}\right)}(t), \quad 1 \leq q \leq M_2 - 1,$$

$$H_{M_2}(t) = \begin{cases} 1, & 1 - \frac{1}{M_2} \leq t, \\ 0, & t < 1 - \frac{1}{M_2}, \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} [|t-1| - 2|t| + |t+1|], \quad \chi_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 0, & t < a, t \geq b; \\ 1, & a \leq t < b. \end{cases}$$

Звертаємо увагу на те, що формулу (3.20) можна переписати у наступному вигляді

$$\tilde{y}_i(t) = Z_{ip}(p+1 - M_1 t) + Z_{i,p+1}(M_1 t - p), \quad \frac{p}{M_1} \leq t \leq \frac{p+1}{M_1}, \quad p = \overline{0, M_1 - 1},$$

а формулу (3.21) – у вигляді

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} W_{i,t}, & 0 \leq t < \frac{1}{M_2}, \\ W_{i,q}, & \frac{q}{M_2} \leq t < \frac{q+1}{M_2}, \quad q = \overline{1, M_2 - 1}, \\ W_{i,M_2}, & 1 - \frac{1}{M_2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Інтегруючи обидві частини системи диференціальних рівнянь (3.18) при  $y_{i0} = 0$ , можемо записати

$$\tilde{y}_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \int_0^t \tilde{y}_k(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{u}_i(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.24)$$

Будемо знаходити наближений розв'язок поставленої задачі (3.14) – (3.16) з умови мінімуму функціоналу (при  $T = 1$ ,  $y_{i0} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

$$J(\tilde{y}, \tilde{u}) = \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{y}'_i(t) - \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{y}_k(t) - \tilde{f}_i(t) - \tilde{u}_i(t)) \right]^2 dt + \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i(t) - \sum_{k=1}^n a_{ik} \int_0^t \tilde{y}_k(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{u}_i(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) d\tau) \right]^2 dt$$

$$-\int_0^t f_i(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{u}_i(\tau) d\tau]^2 dt + \gamma \int_0^1 [\tilde{y}(t)^T \tilde{B} \tilde{y}(t) + \tilde{u}(t)^T \tilde{C} \tilde{u}(t)] dt \rightarrow \min_{\tilde{y}, \tilde{u}}, \quad (3.25)$$

де  $\gamma > 0$ ,  $\gamma$  – деякий параметр.

Підставляючи формули (3.20), (3.21) у (3.25), отримаємо

$$\begin{aligned} J(Z, U) = & \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^{M_1} Z_{kj} h(M_1 t - j) - \sum_{j=1}^n a_{kji} \int_0^t Z_{kj} h(M_1 \tau - j) d\tau - \int_0^t \tilde{f}_k(\tau) d\tau - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^t \sum_{j=1}^{M_2} U_{kj} \chi_j(\tau) d\tau \right]^2 dt + \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^{M_1} Z_{kj} (h(M_1 t - j)) \right]' - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n a_{ki} \left[ \sum_{j=1}^{M_1} Z_{ij} h(M_1 t - j) \right] - f_k(t) - \sum_{j=1}^{M_2} U_{kj} \chi_j(t) \right]^2 dt \left. \right\}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Прирівнюємо до нуля похідні від функціоналу  $J(z, u)$ , визначеного рівністю (3.26) за змінними  $Z_{m,\mu}$ ,  $m = \overline{1, n}$ ;  $\mu = \overline{1, M_1}$ .

Отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(Z, U)}{\partial Z_{m,\mu}} = & 0: \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^{M_1} Z_{kj} h\left(\frac{nt}{T} - j\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^n a_{ki} \int_0^t \left[ \sum_{j=1}^{M_1} Z_{ij} h\left(\frac{n\tau}{T} - j\right) \right] d\tau - \int_0^t \sum_{j=1}^N U_{kj} \chi_j(\tau) d\tau \right] \times \right. \\ & \times \delta_{m,k} \left[ h\left(\frac{nt}{T} - \mu\right) - a_{km} \int_0^t h\left(\frac{N\tau}{T} - \mu\right) d\tau \right] dt + \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^N y_{kj} \left( h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \right) \right]' - \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \left[ \sum_{j=1}^N y_{ij} h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \right] - \sum_{j=1}^N U_{kj} \chi_j(t) \right] \times \\ & \times \delta_{m,k} \left[ h\left(\frac{nt}{T} - \mu\right) \right]'_t - a_{km} h\left(\frac{nt}{T} - \mu\right) \left. \right] dt + \frac{\partial G}{\partial Z_{m\mu}} = 0, m = \overline{1, n}; \mu = \overline{1, M_1}. \quad (3.27) \end{aligned}$$



Аналогічно, прирівнюючи до нуля похідні від функціоналу (3.26) за змінними  $U_{m,\mu}$ ,  $m = \overline{1,n}$ ;  $\mu = \overline{1,M_2}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial U_{m,\mu}} = 0: & \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^T \left[ \sum_{j=1}^N y_{mj} h\left(\frac{nt}{T} - j\right) - \sum_{i=1}^n a_{mi} \int_0^t \left[ \sum_{j=1}^N y_{ij} h\left(\frac{n\tau}{T} - j\right) \right] d\tau - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^t \sum_{j=1}^N U_{kj} \chi_j(\tau) d\tau \right] \times \left( - \int_0^t \chi_\mu(\tau) d\tau \right) + \int_0^T \left[ \sum_{j=1}^N y_{mj} \left( h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \right) \right]' - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n a_{mi} \left[ \sum_{j=1}^N y_{ij} h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \right] - \sum_{j=1}^N U_{mj} \chi_j(t) \right] \times [-\chi_\mu(t)] dt = 0, \quad m = \overline{1,n}; \mu = \overline{1,M_2}. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Тут використані позначення

$$\begin{aligned} \delta_{m,k} &= \begin{cases} 1, m = k, \\ 0, m \neq k; \end{cases} \\ \chi_{[t_{\mu-1}, t_\mu]}(t) &= \begin{cases} 0, t < t_{\mu-1}, t > t_\mu; \\ 1, t_{\mu-1} \leq t \leq t_\mu; \end{cases} \\ \int_0^t \chi_\mu(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0, t \leq t_{\mu-1}, \\ t - t_{\mu-1}, t_{\mu-1} < t < t_\mu, \\ t_\mu - t_{\mu-1}, t \geq t_\mu. \end{cases} \end{aligned}$$

У більш детальному записі система (3.28) має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial U_{m,\mu}} = 0: & \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^{M_1} y_{mj} h\left(\frac{Nt}{T} - j\right) - \sum_{i=1}^n a_{mi} \int_0^t \sum_{j=1}^{M_1} y_{ij} h\left(\frac{N\tau}{T} - j\right) - \int_0^t \sum_{j=1}^{M_2} u_{mj} \chi_j(\tau) d\tau \right] \times \\ & \times (-(t - t_{\mu-1})) dt + \\ & + \int_{t_\mu}^1 \left[ \sum_{j=1}^n y_{mj} h\left(\frac{Nt}{T} - j\right) - \sum_{i=1}^n a_{mi} \int_{j=1}^{M_1} y_{ij} h\left(\frac{N\tau}{T} - j\right) d\tau - \int_0^t \sum_{j=1}^{M_2} U_{mj} \chi_j(\tau) d\tau \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (t_\mu - t_{\mu-1}) dt + \\
& + \int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} \left[ \sum_{j=1}^{M_1} y_{mj} \left( h\left(\frac{Nt}{T} - j\right) \right)'_t - \sum_{i=1}^n a_{mi} \sum_{j=1}^{M_1} y_{ij} h\left(\frac{Nt}{T} - j\right) - U_{m\mu} \right] (-dt) + \\
& + \left( \int_0^T (\bar{y}^T A \bar{y} + \bar{U}^T B \bar{U}(\tau)) d\tau'_{U_{m\mu}} = \right. \\
& = \int_0^T \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} \left( \sum_{j=1}^{M_2} U_{kj} \chi_j(t) \right) \left( \sum_{j=1}^{M_2} U_{ij} \chi_j \right) U_{m\mu} dt = \\
& = \int_0^T \sum_{i=1}^n b_{mi} \sum_{j=1}^n U_{m\mu} U_{ij} \chi_j(t) dt. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Для ефективного розв'язання цієї системи необхідно знайти наступні інтеграли

$$\begin{aligned}
& \int_0^T h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \cdot \left( \int_0^t \chi_\mu(\tau) d\tau \right) dt; \\
& \int_0^T \int_0^t \chi_j(\tau) d\tau \cdot \left( \int_0^t \chi_\mu(\tau) d\tau \right) dt; \\
& \int_0^T \left( h\left(\frac{nt}{T} - j\right) \right)'_t \cdot \chi_\mu(t) dt.
\end{aligned}$$

Системи (3.28), (3.29) можуть бути розв'язані яким-небудь відомим методом.

### 3.3 Основні твердження методу розв'язання задачі керування електроприводом

Апроксимація сплайнами першого порядку методом найменших квадратів у інтегральній формі досліджувалася в працях [28, 84]. Зокрема, в цих працях доведено такі твердження.

*Твердження 1.* [84, р. 141-157; 28, с. 21-23] Норма оператора  $S_m : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , який ставить у відповідність кожній неперервній функції  $f(t) \in C(I)$ ,  $I = [0,1]$  сплайн

$$S_m f(t) = S_m(t, C) := C_k \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} + C_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k},$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1}, k = \overline{0, m-1}$$

з  $m+1$  різними вузлами  $t_k, k = \overline{0, m}$ , задовольняє співвідношення  $\|S_m f\|_{C(I)} \leq 3 \|f\|_{C(I)}$ , якщо коефіцієнти  $C_k, k = \overline{0, m}$  сплайна  $S_m$  знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\int_0^1 (f(t) - S_m^*(t))^2 dt = \min_C \int_0^1 (f(t) - S_m(t))^2 dt.$$

В роботі [51] вперше знайдено точну оцінку похибки наближення функції

$$f(t) \in W_2^1(I) \cap W_\infty^1(I)$$

сплайнами першого порядку, якщо коефіцієнти  $C_k, k = \overline{0, m}$  сплайна знаходяться з умови

$$\int_0^1 (f(t) - S_m^*(t))^2 dt + \int_0^1 \left( \frac{df(t)}{dt} - \frac{dS_m^*(t)}{dt} \right)^2 dt = \min_C \int_0^1 \left[ (f(t) - S_m(t, C))^2 + \left( \frac{df(t)}{dt} - \frac{dS_m(t, C)}{dt} \right)^2 \right] dt.$$

*Твердження 2.* [51] Якщо  $\psi(t) = \Phi_m^T(t)C$  – сплайн 1-го степеня з властивостями

$$\|f(\cdot) - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(I)} = \inf_C \|f(\cdot) - \Phi_m^T(\cdot)C\|_{W_2^1(I)},$$

то

$$\|\psi\|_{\infty} \leq \lceil f \rceil + \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty} \lceil f \rceil := \max_{0 \leq k \leq m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right|, \forall f \in W_2^1(I). \quad (3.30)$$

*Твердження 3.* [51] Для функції  $S_0(x)$ , яка є сплайном першого степеня з вузлами

$$\xi_k = \frac{k + 0.5}{m}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

і з властивостями

$$S_0\left(\frac{k}{m}\right) = 0, \quad k = \overline{0, m}; \quad |S_0'(x)| = 1,$$

у нерівності (3.30) отримується рівність.

3.4 Порівняння запропонованого методу з методом дослідження оптимального керування в динаміці генних мереж

Генна мережа – група генів, пов'язаних між собою регуляторними зв'язками і відповідальних за виконання певної функції організму [63]. До складу мережі входять також: молекули рибонуклеїнової кислоти і білки, які кодуються цими генами, гормони і інші сигнальні молекули, які здійснюють перемикання функції генних мереж у відповідь на зовнішні впливи; різні метаболіти та ін. [35]. Нормальне функціонування генної мережі забезпечується узгодженою взаємодією всіх її ланок і в просторі і в часі, а також її здатністю адекватно сприймати і переробляти зовнішні сигнали [35]. Порушення в окремій ланці генної мережі може викликати глобальне порушення її функціонування і приводити до складних патологій. У

практичній медицині лікування хвороби, тобто корекція порушення функціонування певної генної мережі, найчастіше відбувається фармакологічним способом.

Однак генні мережі складаються з дуже великого числа елементів, пов'язаних між собою складними нелінійними зв'язками. Тому фармакологічні впливи, що забезпечують нормалізацію функції генної мережі по її критичній змінній, можуть викликати суттєві відхилення від норми інших змінних, тобто мати небажані побічні ефекти. Корекція порушення функціонування генної мережі може бути визнана допустимою тільки в тому випадку, якщо за допомогою її вдається не тільки відновити основну функцію генної мережі, але і мінімізувати побічні ефекти. Отже, завдання фармакологічної корекції функціонування генної мережі є завданням оптимального управління, рішення якої проводиться прямим методом [18]: вихідна задача зводиться до задачі пошуку оптимального рішення в скінченномірному просторі параметрів [83]. Раніше задачі динамічного керування стосовно до генних мереж не формулювалися. Робота [63] частково заповнює цю прогалину. У ній сформульовані задачі оптимального керування динамікою функціонування генних мереж. У разі якщо генна мережа працює не належним чином (через мутації, хвороби, патогенний вплив зовнішнього середовища та ін.), ми можемо зовнішніми впливами (генною терапією, ліками та ін.) змусити її працювати нормальним чином. Часто генна мережа повинна стабілізувати деякі показники, тобто залишатися в стані рівноваги (точці спокою). У цьому випадку необхідно, по-перше, з'ясувати чи існує у «мутанта» системи (патологічному варіанті генної мережі) стаціонарний стан, відповідний нормі або близький до неї, і, по-друге, знайти допустиме керування (фармакологічний вплив), що переводить пошкоджену генну мережу в стан норми або близький до неї.

### 3.4.1 Загальна постановка задачі оптимального керування в динаміці генних мереж

В рамках прийнятих уявлень [53] функціонування будь-якої генної мережі (ГМ) описується системою звичайних диференціальних рівнянь для векторної функції  $\vec{V}(t) \in \Omega$  з числом компонент  $n$ , яка описує стан ГМ в часі. Компоненти цієї функції будемо називати змінними стану ГМ, а  $\Omega$  – простором станів. Коефіцієнти в системі звичайних диференціальних рівнянь (вектор параметрів  $\vec{a}$ ), визначають взаємодії елементів системи між собою і з зовнішнім середовищем: синтез і руйнування елементів, інтенсивності введення деяких компонент із зовнішнього середовища або їх виведення в зовнішнє середовище. Нехай деякі значення  $\vec{a}_*$  відповідають врівноваженому стану генної мережі.

Це означає, що існує хоча б одне нетривіальне рішення  $\vec{V}_*$  серед позитивних величин  $\vec{V}_i, i = \overline{1, n}$ , яке забезпечує виконання  $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$ . Це стан будемо вважати нормальним і рішення назвемо базовим. Позначимо через  $t$  час релаксації самого повільного процесу і виконаємо нормування величин за допомогою  $\vec{w} = \frac{\vec{V}}{\vec{V}_*}, \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\vec{a}_*}, \tau = \frac{t}{T}$ . Простір нормованих станів будемо позначати  $\vec{\Omega}$ , так що  $\vec{w} \in \vec{\Omega}$ . Цей прийом дозволяє:

а) при фіксованих значеннях безрозмірних комплексів, що стоять множниками перед змінними в правих частинах диференціальних рівнянь, описувати еволюцію генної мережі одним і тим же рішенням для різних базових (початкових) станів;

б) підвищити точність обчислень на комп'ютері.

Нормовані рівняння динаміки генної мережі можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = \vec{\phi}(\vec{w}, \vec{\alpha}), \tau \in [0, \tau_k].$$

Нехай компоненти нормованого вектора  $\vec{a}$  розбиті на три групи (це розбиття залежить від конкретної досліджуваної ситуації):

а)  $\alpha_k, k \in K$  – множина номерів параметрів, які задають стан генної мережі при мутаціях;

б)  $\alpha_l, l \in L$  – множина номерів параметрів, які використовуються в якості управлінь; в подальшому ці параметри позначені через  $\vec{u}(t)$  – вектор-функція управління розмірності  $L$ , компоненти якої є кусково-безперервними функціями;

в)  $\alpha_m, m \in M$  – множина номерів інших параметрів, які залишаються без змін, тобто  $a_m = 1$ .

Очевидно, що внаслідок нормування рівняння  $\vec{\phi}(\vec{w}, 1) = 0$  мають нормоване рішення  $\vec{w} = 1$  (базова точка).

Запишемо рівняння динаміки генної мережі, використовуючи позначення введених підгруп нормованих параметрів  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{w}}{d\tau} &= \vec{\phi}(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u}); \\ \vec{\lambda} &= \alpha_k \bigcup_{k \in K, m \in M} \alpha_m; \vec{u} \in D = \{ \vec{u} : \vec{u}^{\min} \leq \vec{u}(\tau) \leq \vec{u}^{\max} \}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тут додатково введена множина  $D$ , що задає область допустимих значень керувань [63].

Отже, задача оптимального керування в динаміці генних мереж ставиться таким чином:

задані:

–  $a_k$  – визначають мутантних стан;

–  $a_m = 1$ ;

–  $B$  – околиця базової точки;

–  $D$  – множина допустимих значень керувань.

Задача: в просторі станів за допомогою керування  $\vec{u}(\tau)$  системою (3.31) перевести точку з деякого початкового мутантного стану (не обов'язково стаціонарного) в завдану околицю базової точки при функціональних обмеження на перехідний процес и умови мінімуму деякого функціоналу  $F$ .

Формальний запис задачі:

$$\begin{aligned} \vec{w}(\tau_0) \Rightarrow \vec{u}(\tau) \Rightarrow \vec{w}(\tau_k) \in B = \{w_i : |w_i - 1| \leq \Delta_i, i = \overline{1, n}\}; \\ \vec{\Psi}(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u}) \leq 0; \vec{\Phi}(\tau_k) = \vec{\Phi}(\vec{w}(\tau_k), \vec{\lambda}, \vec{u}(\tau_k)) = 0, \\ \vec{\lambda} = \alpha_k \bigcup_{k \in K, m \in M} \alpha_m; \vec{u} \in D = \{\vec{u} : \vec{u}^{\min} \leq \vec{u}(\tau) \leq \vec{u}^{\max}\}; \\ F(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) \Rightarrow \min_{\vec{u}(\tau), \tau_k} \tau_k \in [0, T_{\max}]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Функції  $\vec{\Phi}(*), \vec{\Phi}(*), F(*)$  неперервні за сукупністю змінних. Тут вектор-функція  $\Psi$  визначає функціональні обмеження на перехідний процес, а умова  $\vec{\Phi}(\tau_k) = 0$  означає, що кінцева точка  $\vec{w}(\tau_k)$  є стаціонарною.

Ми використовуємо метод «штрафних» функцій, тобто конструюється складовий функціонал, що включає заданий функціонал і функціонал, який контролює відхилення обмежень із заданою точністю. Складовий функціонал формується таким чином:

$$\Phi = F \cdot \left[ 1 + \sum_{j=1}^q \frac{\delta_j}{\varepsilon_j^2} (\langle \Psi \rangle_{1j}^2 + \langle \Psi \rangle_{2j}^2) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{j+1}}{\varepsilon_{j+1}^2} (\eta_i + |\eta_i|)^2 \right]. \quad (3.33)$$

Тут



$$\langle \Psi \rangle_{1i} = \frac{1}{T_{1j} \Omega_{1j}} \int \Psi_{1j}(\tau) d\tau \tau \Omega_{1j} = \{ \tau : \Psi_{1j}(\tau) > 0, \tau \in [0, \tau_k] \};$$

$$\langle \Psi \rangle_{2i} = \frac{1}{T_{2j} \Omega_{2j}} \int \Psi_{2j}(\tau) d\tau \tau \Omega_{2j} = \{ \tau : \Psi_{2j}(\tau) > \langle \Psi_{1j} \rangle, \tau \in [0, \tau_k] \};$$

$$\eta_i = |w_i(\tau_k) - 1| - (\Delta_i - \varepsilon_i),$$

де  $q$  – число функціональних обмежень у вигляді нерівностей;

$\varepsilon$  – масив, компоненти якого містять необхідні точності виконання обмежень відповідних нерівностей;

$\delta$  – масив, компоненти якого є коефіцієнтами штрафу з регульованими в процесі пошуку значеннями;

$T_1, T_2$  – заходи множин  $\Omega_1, \Omega_2$ .

Додаткове включення в складовою функціонал значення  $\langle \Psi \rangle_2$  необхідно для забезпечення рівномірної точності виконання обмежень на всій траєкторії перехідного процесу. Друга сума в (3.33) контролює належність кінцевої точки траєкторії заданої області.

Для опису функцій керування  $\vec{u}(\tau)$  в формі  $LL$  – апроксимації кривої, будується кусково-лінійний каркас, що задається точками розбиття  $\tau_j, j = \overline{1, k'}$ ,  $\tau_{k'} \leq \tau_k$  інтервалу інтегрування і відповідними значеннями функцій  $\vec{u}_j = \vec{u}(\tau_j)$ . Інтервал  $[0 \leq \tau_{k'}]$  назвемо активним (прийнято  $\tau_0 = 0$ ), відповідно  $[\tau_k, \tau_{k'}]$  – пасивним. На пасивному інтервалі значення керувань постійні і рівні  $\vec{u}(\tau) = \vec{u}(\tau_{k'})$ , на активному інтервалі вони змінні. Час закінчення перехідного процесу  $\tau_k$  визначається з умови  $\varphi(\tau_k) = 0$ . Варіації керуючих функцій  $\vec{u}(\tau)$  визначаються варіаціями параметрів  $\{ \tau_j, \vec{u}_j \}$ . В якості функціоналу приймається повний час перехідного процесу  $F = \tau_k$ .

Можуть бути задані різні початкові точки  $\vec{w}(\tau_0)$ :

а) мутантний стаціонарний стан;

- б) базовий стаціонарний стан;
- в) довільна нерівноважна точка.

У разі (б) рух виникає внаслідок стрибкоподібного зміни параметрів  $\alpha_k \neq 1$  в початковий момент часу.

Сформульована задача належить до класу задач нелінійного програмування – мінімізація функціоналу при заданих нелінійних обмеженнях, записаних у вигляді системи рівностей і/або нерівностей. Ефективність роботи алгоритмів пошуку оптимального рішення істотно залежить від способу врахування обмежень [63]. Ми використовуємо варіант методу «штрафних» функцій, тобто конструюється складовою функціонал, що включає заданий функціонал і функціонал, який контролює відхилення обмежень із заданою точністю. Використовувана модифікація суттєво зменшує ступінь «овражності» мінімізуемого функціоналу.

Однак перш необхідно встановити існування необхідного стаціонарного стану, яке може бути визначено з рішення наступної задачі нелінійного програмування.

### 3.4.2 Задача визначення допустимого стаціонарного стану [63]

Задані:

- деякі значення  $\alpha_k$  параметрів з безлічі  $K$ ;
- околиця  $B$  базовій точки  $\vec{w} = 1$ ;
- область  $D$  допустимих значень керувань  $\vec{u}$ ;
- точність  $\varepsilon$  виконання умов стаціонарності в сукупності;

– функціонал  $F(\vec{w}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i^2(\vec{w}, \vec{u})$ .

Потрібно знайти такі  $\vec{w}, \vec{u}$ , що

$$F(\vec{w}, \vec{u}) = \min_{\vec{w} \in B, \vec{u} \in D} F(\vec{w}, \vec{u}) \leq \varepsilon_0.$$

Якщо необхідна точність  $\varepsilon_0$  не досягається, необхідно розширити множину  $B$  за допомогою збільшення або зменшення допустимих значень компонент параметрів стану, що досягли граничних значень, і продовжити пошук рішення. Очевидно, що в загальному випадку розв'язок цієї задачі не єдиний. Однак для подальшого вирішення задач оптимального управління придатне будь-яке. Отримане значення керування використовується при побудові початкового наближення в задачі оптимального керування, приймається  $\tilde{u} = \bar{u}(\tau_k)$ , тому це значення керування забезпечує належність кінцевої точки пасивної ділянки траєкторії заданої області.

Для розв'язання даного завдання в роботі [63] створено пакет програм «генна МЕРЕЖА». Пакет дозволяє:

- а) вводити і редагувати дані математичної моделі;
- б) вводити і редагувати параметри комплексу ПОШУК;
- в) проводити розрахунок першого етапу виконання задачі визначення допустимого стаціонарного стану;
- г) знаходити кусково-лінійні керування для вирішення задачі другого етапу, сформульованого в співвідношеннях (3.29);
- д) виводити результати розрахунків у вигляді числових таблиць і графіків.

Таким чином, в математичній моделі Мікуличева Ю.В. [63]

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = \vec{\Phi}(\vec{w}, \vec{\alpha}), \tau \in [0, \tau_k]$$

вважається, що  $\alpha$  складається з трьох груп нормованого вектора  $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$  і лише  $\alpha_m$  може використовуватись для управління. Зауважимо, що для такої системи звичайних диференціальних рівнянь можна перейти в довільній системі звичайних диференціальних рівнянь з керуванням, якщо керування визначається вектор-функцією з компонентами  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ .

Якщо керуючі функції  $u_i(t)$  шукати у вигляді деякої лінійної комбінації базисних функцій, наприклад, сплайни першого степеня або кусково-сталі функції тощо, то в результаті приходимо до математичної моделі, в якій керуючі функції будуть залежати тільки від деякої сукупності невідомих параметрів  $\alpha_k$ , які ми позначаємо через  $d_{i,p}$ .

Таким чином ми отримаємо математичну модель

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = \vec{\phi}(\vec{w}, \vec{\alpha}), \tau \in [0, \tau_k].$$

Якщо ми крім керування представимо невідомі  $y_i(t), i = \overline{1, n}$  також у вигляді лінійної комбінації

$$\tilde{y}_i(\tau) = \sum_{p=1}^{M_1} c_{i,p} h_p(\tau); \tilde{u}_j(\tau) = \sum_{q=1}^{M_2} d_{j,q} h_q(\tau),$$

то отримаємо запропонований в даній роботі метод.

### 3.5 Висновки до розділу 3

1. Важливою проблемою математичного моделювання процесів керування електроприводом, яка не розв'язана в загальному вигляді, є проблема одночасного вибору невідомих функцій  $y_k, k = \overline{1, n}$  та невідомих керувань  $u_k, k = \overline{1, n}$  з умови мінімуму функціоналу витрат енергії. Вигляд такого функціоналу запропонований в даному розділі.

2. Наближений розв'язок задачі керування електроприводом для систем ЗДР з керуванням, у якому задача зводиться до мінімізації норми  $W_2^1[0,1]$  при вказаних обмеженнях на керування, приводить до наближених розв'язків, які

точно задовольняють початковим умовам, вказаним обмеженням та наближено задовольняють диференціальним рівнянням системи. Метод демонструє достатню для практичного використання точність.

Основні результати третього розділу опубліковано у роботах [2, 4, 5, 10, 11, 12, 16].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел: [18, 28, 35, 51, 53, 63, 83, 84].

## РОЗДІЛ 4

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ  
ТЕСТУВАННЯ ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ

4.1 Приклади наближення явно заданих функцій різних класів диференціювання

Наведемо результати наближення функцій, які належать різним класам диференційованості без припущення, що вони є розв'язками систем диференціальних рівнянь. Приклад 1:

$$y_0(t) \in C[0,1], y_0(t) = \begin{cases} 4t^2, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 4(t-1)^2, & \text{якщо } 0.5 < t \leq 1, \end{cases}$$

максимальна похибка наближення функції  $y = x^2$  сплайном першого степеня при  $n = 30$  дорівнює 0.50507276.

Приклад 2:

$$y_1(t) \in C^1[0,1], y_1(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{3} + \frac{t}{5}, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{(t-1)^3}{3} + \frac{t}{5} + \frac{1}{12}, & \text{якщо } 0.5 < t \leq 1, \end{cases}$$

максимальна похибка наближення сплайном першого степеня при  $n = 10$  дорівнює 0.0000322.

Приклад 3:

$$y_2(t) \in C^\infty[0,1], y_2(t) = t^2(1-t).$$

Максимальна похибка наближення функції  $y = x^2(1-x)$  сплайном при  $n = 10$  дорівнює 0.04358334. Максимальна похибка наближення функції  $y = x^2(1-x)$  сплайном при  $n = 20$  дорівнює 0.02336951.

Графіки функцій та їх наближення прикладів 1–3 наведено на рис. 4.1.

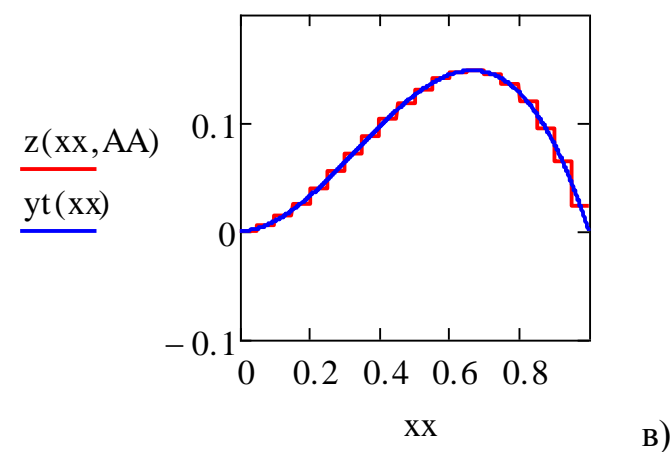
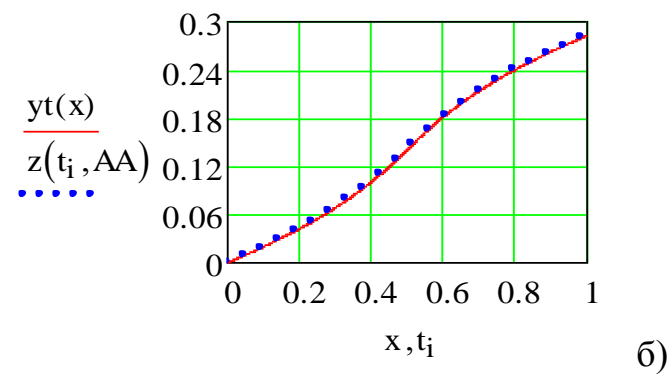
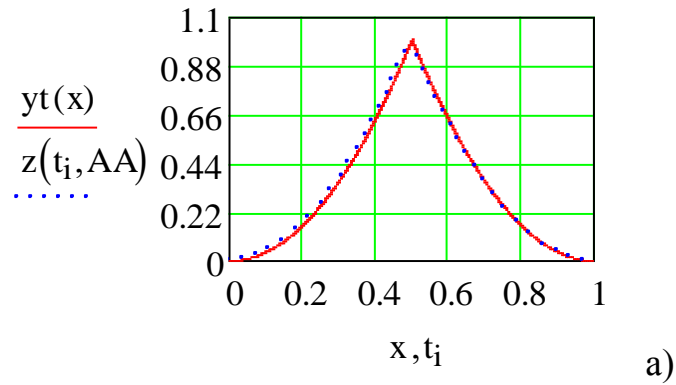


Рисунок 4.1 – Графіки наближення функцій: а) неперервна, б) диференційовна, в) двічі диференційована

4.2 Чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь

Наведемо чисельні приклади, що ілюструють застосування запропонованого методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Відзначимо, що у всіх приведених прикладах невідомі постійні знаходилися з умови як найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи в нормах простору  $L_2[0,1]$  і  $W_2^r[0,1], r \in \{0,1\}$ . Наближений розв'язок знаходився на відрізку  $[0,1]$ .

Максимальна похибка наближення до точного розв'язку  $\delta_1$  визначалася для випадку, коли постійні в формулі

$$y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_{\ell,i}(x), \quad i = \overline{1,n};$$

знаходилися з умови найкращого наближення правих частин  $f_i(x), i = \overline{1,n}$  виразами

$$\sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d}{dx} \psi_{\ell,i}(x) - \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \psi_{\ell,k}(x) \right), \quad i = \overline{1,n} \quad \text{у нормі} \quad \|u\|_2 = \left( \int_0^1 u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Максимальна похибка наближення до точного розв'язку  $\delta_2$  визначалася для випадку, коли постійні в

$$y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_{\ell,i}(x), \quad i = \overline{1,n};$$



знаходилися з умови найкращого наближення правих частин  $f_i(x), i = \overline{1, n}$  і їх похідних  $\frac{df_i(x)}{dx}, i = \overline{1, n}$  відповідно виразами

$$\sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d}{dx} \Psi_{\ell,i}(x) - \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \Psi_{\ell,k}(x) \right), i = \overline{1, n},$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{\ell=1}^N \left( C_{i,\ell} \frac{d\Psi_{\ell,i}(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k}(x) C_{k,\ell} \Psi_{\ell,k}(x) \right), i = \overline{1, n}$$

у нормі простору  $W_2^1[0,1] = \left\{ u(x) : \sum_{s=0}^1 \|u^{(s)}\|_2^2 < \infty \right\}$ .

Максимальна похибка наближення до точного розв'язку  $\delta_3$  визначалася для випадку, коли розв'язок задачі знаходили методом Рунге-Кутти з кроком  $h$ .

*Приклад 4.* Знайдемо запропонованим методом наближений розв'язок задачі

$$y' - 2y = 6x \cos 6x + (1 - 2x) \sin 6x, \quad y(0) = 0.$$

Її точний розв'язок  $y(x) = x \sin 6x$ .

Для розв'язання цієї задачі вибиралася система  $\Psi_{k,i}(x) = x^k, i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$

При  $N = 10$  похибка наближення до точного розв'язку дорівнювала  $7,6066 \cdot 10^{-6}$  для випадку, коли коефіцієнти  $C_{i,\ell}, \ell = \overline{1, N}, i = 1$  знаходилися з умови найкращого наближення правої частини в нормі  $L_2[0,1]$  і  $4,4924 \cdot 10^{-6}$  в нормі  $W_2'[0,1]$ . Похибка розв'язку, отриманого методом Рунге-Кутти при  $h = 0.04$  склала  $3,5974 \cdot 10^{-6}$ .

Графіки точного  $yt(x)$  і наближеного  $y_N(x)$  розв'язків задачі прикладу 4 наведені на рис. 4.2.

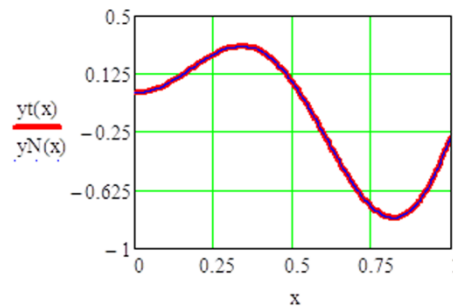


Рисунок 4.2 – Графіки точного  $yt(x)$  і наближеного  $y_N(x)$  розв'язків задачі прикладу 4

*Приклад 5.* В цьому прикладі розглядалася задача

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{1+x} y_1 + 2y_2 + 2 - e^{-x} \sin x - \frac{e^{-x} \sin x}{x+1} - e^{-x} \cos x; \\ y_2' = 4y_1 + \frac{1}{1+x^2} y_2 - \frac{e^{-x} \cos x - 1}{x^2 + 1} - e^{-x} \cos x - 5e^{-x} \sin x; \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, \end{cases}$$

з точним розв'язком

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} \sin x; \\ y_2(x) &= e^{-x} \cos x - 1. \end{aligned}$$

Для розв'язання цієї задачі вибиралася система лінійно-незалежних функцій

$$\Psi_{k,i}(x) = x^k, \quad i=1,2; \quad k=1,2,\dots$$

Максимальне відхилення наближеного розв'язку при  $N = 8$  від точного складає відповідно  $1,4632 \cdot 10^{-6}$  для  $y_1(x)$  і  $1,4784 \cdot 10^{-8}$  для  $y_2(x)$  з умови найкращого наближення правої частини в нормі  $L_2[0,1]$  і відповідно  $8,8218 \cdot 10^{-10}$  для  $y_1(x)$  і  $1,3802 \cdot 10^{-9}$  для  $y_2(x)$  в нормі  $W_2'[0,1]$ .

Максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого методом Рунге-Кутти при  $h = 0,005$  від точного розв'язку, складає відповідно  $2,5284 \cdot 10^{-9}$  і  $3,6477 \cdot 10^{-9}$ .

Графіки точних  $y_{1t}(x), y_{2t}(x)$  і наближених  $y_{1,N}(x), y_{2,N}(x)$  розв'язків задачі прикладу 5 наведені на рис. 4.3.

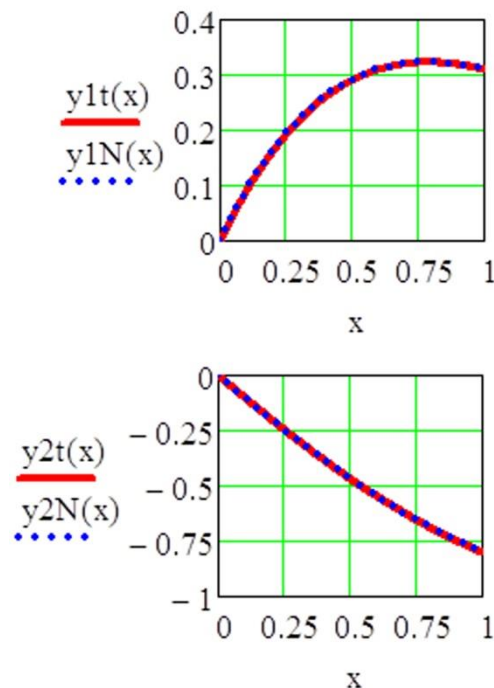


Рисунок 4.3 – Графіки точних  $y_{1t}(x), y_{2t}(x)$  і наближених  $y_{1,N}(x), y_{2,N}(x)$  розв'язків задачі прикладу 5

*Приклад 6.* Запропонованим методом знаходився наближений розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_1' = x^2 y_1 + x^3 y_2 + f_1(x), \\ y_2' = x y_1 + x^2 y_2 + f_2(x), \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0,$$

точний розв'язок якої

$$y_1(x) = 10x^2 e^{-4x},$$

$$y_2(x) = 5x e^{-4x}.$$

Максимальне відхилення наближеного розв'язку при  $N = 10$  від точного складає відповідно  $8,0537 \cdot 10^{-3}$  для  $y_1(x)$  і  $5,6677 \cdot 10^{-6}$  для  $y_2(x)$  з умови найкращого наближення правої частини в нормі  $L_2[0,1]$  і відповідно  $1,1228 \cdot 10^{-5}$  для  $y_1(x)$  і  $3,0246 \cdot 10^{-7}$  для  $y_2(x)$  в нормі  $W_2'[0,1]$ .

Максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого методом Рунге-Кутти при  $h = 0,04$  від точного розв'язку складає відповідно  $2,2148 \cdot 10^{-6}$  і  $9,1988 \cdot 10^{-7}$ .

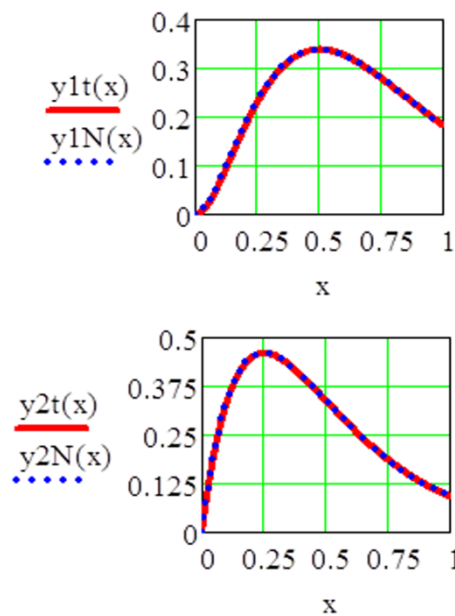


Рисунок 4.4 – Графіки точних  $y_{1t}(x)$ ,  $y_{2t}(x)$  і наближених

$y_{1,N}(x)$ ,  $y_{2,N}(x)$  розв'язків задачі прикладу б

Приклад 7. Знайдемо запропонованим методом наближений розв'язок задачі

$$y' + y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 3x^2 + x^3, y(0) = 0.$$

Точний розв'язок

$$yt(x) = \frac{1}{2} \sin x + x^3.$$

Для рішення цієї задачі вибиралася система  $\psi_k(x) = x^k, k = 1, 2, \dots$

При  $N = 8$  похибка наближення  $2,944 \cdot 10^{-8}$  в нормі  $L_2[0,1]$ ,  $4,213 \cdot 10^{-9}$  в нормі  $W_2'[0,1]$ . При рішенні методом Рунге-Кутти при  $M = 50$  похибка дорівнює  $5,441 \cdot 10^{-9}$ .

На рисунку 4.5 представлені графіки точного і наближеного розв'язків задачі прикладу 7.

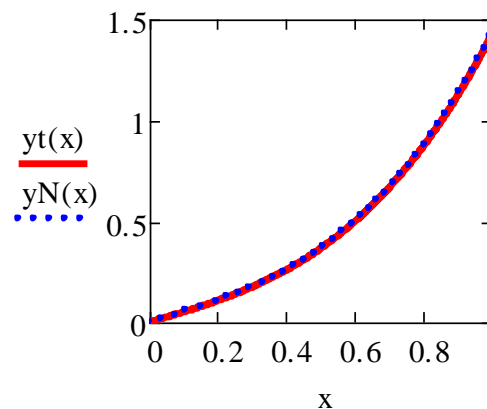


Рисунок 4.5 – Графіки точного  $yt(x)$  і наближеного  $yN(x)$  розв'язку задачі з прикладу 7

Приклад 8. Знайдемо запропонованим методом наближений розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 8x^3 + 6x^2 - 21x + 3; \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + 5 - x^2 - 11x^3; \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Точний розв'язок

$$y_{t_1}(x) = 3x - 4x^2 + 2x^3,$$

$$y_{t_2}(x) = 5x + 2x^2 - 5x^3.$$

Для рішення цієї задачі вибиралася система  $\Psi_k(x) = x^k, k = 1, 2, \dots$

Наближений розв'язок при  $N = 8$  співпадає з точним з точністю  $10^{-14}$ . Відхилення наближеного розв'язку, отриманого методом Рунге-Кутти при  $h = 0,01$  від точного розв'язку складає відповідно  $4,842 \cdot 10^{-8}$  для  $y_1(x)$  і  $2,464 \cdot 10^{-8}$  для  $y_2(x)$ .

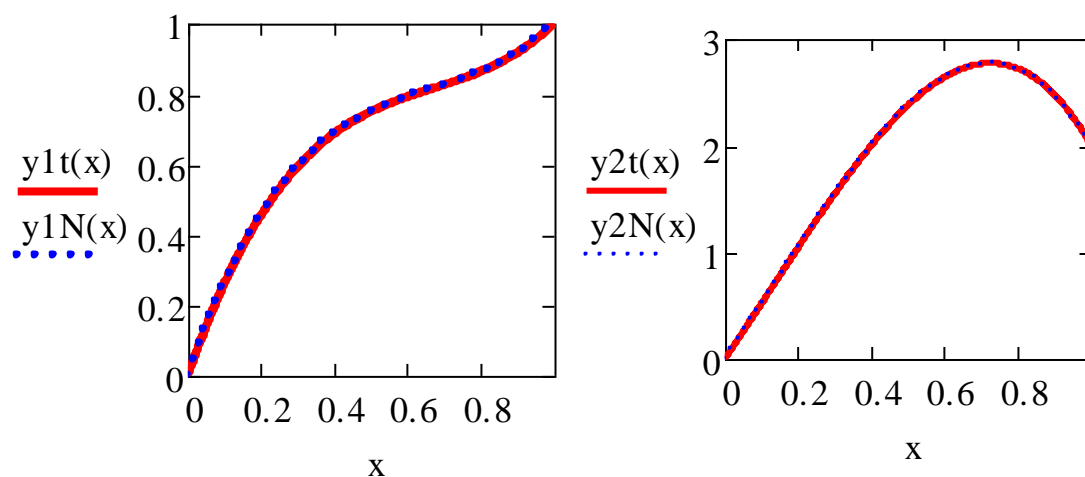


Рисунок 4.6 – Графіки точних  $y_{1t}(x), y_{2t}(x)$  і наближених  $y_{1N}(x), y_{2N}(x)$  розв'язків задачі прикладу 8

Приклад 9. Знайдемо рішення задачі Коші для системи

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 3y_3 + 2 - x; \\ y_2' = -y_1 + 1; \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + 1 - x; \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0,$$

$$\Psi_k(x) = x^k.$$

Точний розв'язок

$$y_{1r}(x) = e^x + \sin x - \cos x,$$

$$y_{2r}(x) = -e^x + \cos x + \sin x + x,$$

$$y_{3r}(x) = \sin x - \cos x + 1.$$

Максимальне відхилення наближеного розв'язку при  $N = 8$  від точного складає відповідно:

- для  $y_1(x) - 5,850 \cdot 10^{-9}$ ;
- для  $y_2(x) - 9,544 \cdot 10^{-10}$ ;
- для  $y_3(x) - 2,191 \cdot 10^{-10}$ .

Максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого методом Рунге-Кутти при  $h = 0,02$  від точного розв'язку складає відповідно:

- для  $y_1(x) - 5,413 \cdot 10^{-9}$ ;
- для  $y_2(x) - 3,935 \cdot 10^{-9}$ ;
- для  $y_3(x) - 1,849 \cdot 10^{-9}$ .

Відзначимо, що в прикладах 8 і 9 отримана висока точність пов'язана з тим, що праві частини систем диференціальних рівнянь є поліномами, що говорить про природність вибору базисних функцій у вигляді системи степеневих функцій.

Графіки точних  $y_{1t}(x), y_{2t}(x), y_{3t}(x)$  і наближених  $y_{1N}(x), y_{2N}(x), y_{3N}(x)$  розв'язків задачі прикладу 9 наведені на рис. 4.7.

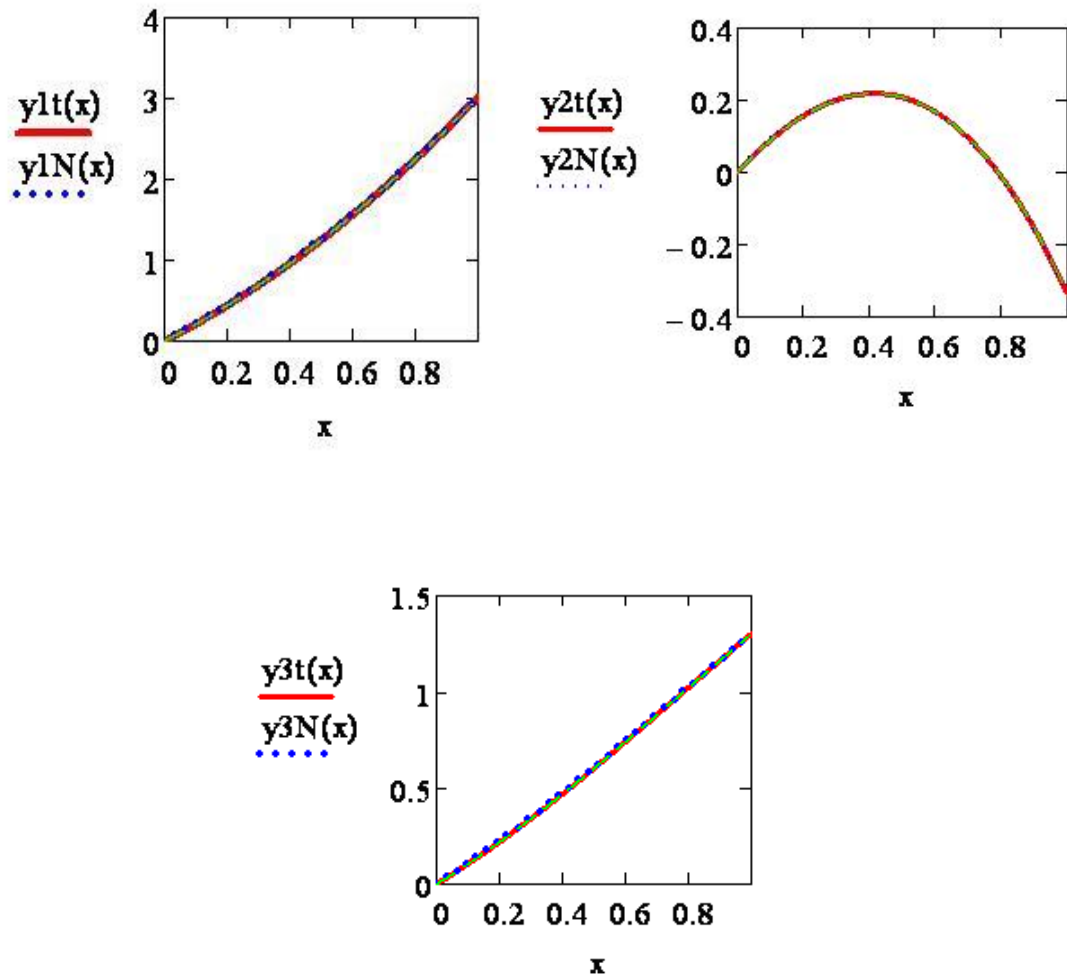


Рисунок 4.7 – Графіки точного  $y_{1t}(x), y_{2t}(x), y_{3t}(x)$  і наближеного  $y_{1N}(x), y_{2N}(x), y_{3N}(x)$  розв'язків задачі прикладу 9

*Приклад 10.* Знайдемо наближений розв'язок запропонованим методом задачі

$$y' + y = e^{-x}(2x + 1), \quad (4.1)$$

$$y(0) = 1, \quad (4.2)$$



точний розв'язок якої має вигляд  $y(x) = (x^2 + x)e^{-x}$ , використовуючи систему функцій  $\psi_k(x) = x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Наближений розв'язок знаходили у вигляді  $y_N(x) = \sum_{\ell=1}^N C_\ell \psi_\ell(x)$ . Сталі розкладу  $C_\ell$ ,  $\ell = \overline{1, N}$  визначались з умови найкращого наближення правої частини рівняння (4.3):

$$J(C) = \int_0^1 \left( f(x) - \sum_{\ell=1}^N C_\ell \left( \frac{d\psi_\ell}{dx} + \psi_\ell(x) \right) \right)^2 dx \rightarrow \min_C.$$

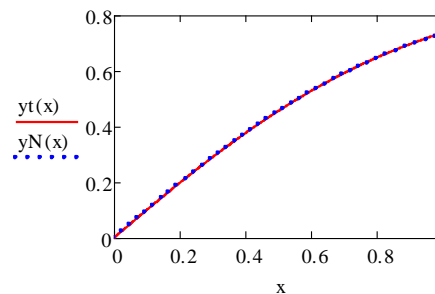


Рисунок 4.8 – Графічне зображення точного ( $y_t(x)$ ) і наближеного ( $y_N(x)$ ) розв'язків

Чисельні розрахунки показали, що при  $N = 8$  похибка наближення розв'язку задачі (4.1) – (4.2) склала  $\varepsilon = 1,560 \cdot 10^{-8}$ . На рис. 4.8 подано точний  $y_t(x)$  і наближений  $y_N(x)$  розв'язки задачі (4.1) – (4.2).

*Приклад 11.* Запропонованим методом знаходився наближений розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 6\cos 2x - 6\sin 2x + 6\sin 3x, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 4\sin 3x - 9\sin 2x - 6\cos 3x, \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$y_1(x) = 3\sin 2x, \quad y_2(x) = -2\sin 3x.$$

Для побудови наближеного розв'язку використовувалась система функцій  $\psi_k(x) = \sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . З точністю до  $10^{-12}$  розв'язок, отриманий запропонованим методом при  $N = 3$ , співпадає з точним розв'язком.

Для порівняння відмітимо, що максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого за методом Рунге-Кутти четвертого порядку з кроком  $h = 0,01$ , від точного розв'язку склало відповідно  $\varepsilon_1 = 4,238 \cdot 10^{-7}$  для  $y_1(x)$  і  $\varepsilon_2 = 4,239 \cdot 10^{-7}$  для  $y_2(x)$ . Рис. 4.9 ілюструє якість наближення розв'язку розглядуваної задачі ( $y1t(x)$ ,  $y2t(x)$  – точні значення шуканих функцій,  $y1N(x)$ ,  $y2N(x)$  – їх наближені значення, знайдені запропонованим методом).

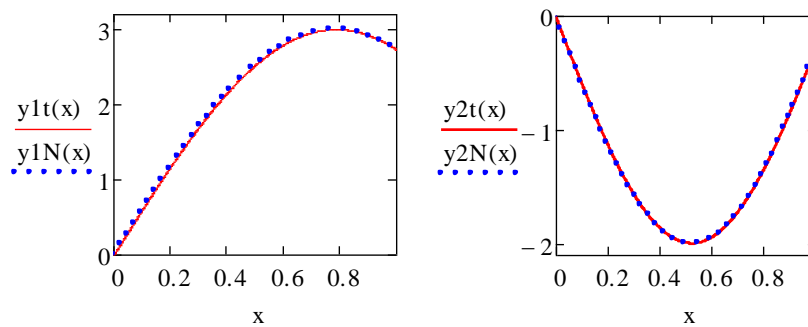


Рисунок 4.9 – Графічний вигляд точного ( $y_1t(x)$ ,  $y_2t(x)$ ) і наближеного ( $y_1N(x)$ ,  $y_2N(x)$ ) розв'язків

*Приклад 12.* В прикладі 12 запропонованим методом розв'язувалась задача

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + \sqrt{1+x^2}; \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - \sqrt{1+x^2}; \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0.$$

Використовувалась система функцій  $\psi_k(x) = x^k, k = 1, 2, \dots, N$ . Похибка наближення при  $N = 8$  правої частини першого рівняння системи склала  $\varepsilon_1 = 1,434 \cdot 10^{-4}$ ; для другого рівняння вона склала  $\varepsilon_2 = 7,056 \cdot 10^{-6}$ .

Максимальне відхилення наближеного розв'язку ( $N = 8$ ) від розв'язку, отриманого за методом Рунге-Кутти з кроком  $h = 0,01$ , склало відповідно  $2,229 \cdot 10^{-6}$  для  $y_1(x)$  і  $2,377 \cdot 10^{-8}$  для  $y_2(x)$ . Рис. 4.10 ілюструє якість наближення правих частин диференціальних рівнянь розглядуваної системи.

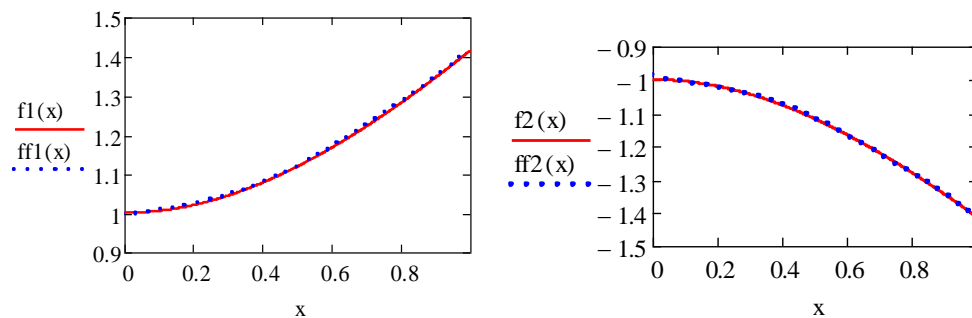


Рисунок 4.10 – Графічне зображення правих частин  $(f_1(x), f_2(x))$  рівнянь системи і їх наближення  $(ff_1(x), ff_2(x))$

*Аналіз прикладів 10 – 12.* Наведено чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь, в тому числі і одного диференціального рівняння. Зазначимо, що в наведених прикладах невідомі сталі знаходилися з умови найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи в нормі простору  $L_2[0,1]$ . Наближений розв'язок знаходився на відрізку  $[0,1]$ .

Таблиця 4.1 – Зведена таблиця результатів розв’язання запропонованим методом задачі Коші для одного і систем двох та трьох диференціальних рівнянь

№ за да чи	Формулювання задачі	Максимальна похибка наближення в нормі $L_2[0,1]$	Максимальна похибка наближення в нормі $W_2^1[0,1]$	Максимальне відхилення від точного рішення при розв’язанні задачі методом Рунге-Кутти з кроком $h$
1	2	3	4	5
1.	$y' + y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 3x^2 + x^3$ $y(0) = 0$	$2,944 \cdot 10^{-8}$	$4,213 \cdot 10^{-9}$	–
2.	$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 + 8x^3 + \\ + 6x^2 - 21x + 3; \\ y'_2 = 3y_1 - y_2 + 5 - \\ - x^2 - 11x^3; \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \end{cases}$	Наближене рішення ( $N = 3$ ) співпадає с точним рішенням	–	$4,842 \cdot 10^{-8}$ для $y_1(x)$ $2,464 \cdot 10^{-8}$ для $y_2(x)$ $h = 0,01$
3.	$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 + \\ + 2 - x; \\ y'_2 = -y_1 + 1; \\ y'_3 = y_1 + y_2 - y_3 + \\ + 1 - x \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$	$1,123 \cdot 10^{-8}$ для $y_1(x)$ $7,458 \cdot 10^{-8}$ для $y_2(x)$ $4,873 \cdot 10^{-8}$ для $y_3(x)$	$5,850 \cdot 10^{-9}$ для $y_1(x)$ $9,544 \cdot 10^{-10}$ для $y_2(x)$ $2,191 \cdot 10^{-10}$ для $y_3(x)$	$5,413 \cdot 10^{-9}$ для $y_1(x)$ $3,935 \cdot 10^{-9}$ для $y_2(x)$ $1,849 \cdot 10^{-9}$ для $y_3(x)$ $h = 0,02$

Продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5
4.	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 4e^x - \\ -\cos x - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 \\ y_2' = -y_1 + x^2 - 6x - 1 - \\ -\sin x \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + 4e^x - \\ -\cos x - x^3 - x^2 - 1 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0 \end{cases}$	$4,308 \cdot 10^{-7}$ для $y_1(x)$  $4,378 \cdot 10^{-8}$ для $y_2(x)$  $6,863 \cdot 10^{-9}$ для $y_3(x)$	$5,540 \cdot 10^{-8}$ для $y_1(x)$  $8,911 \cdot 10^{-9}$ для $y_2(x)$  $1,092 \cdot 10^{-9}$ для $y_3(x)$	$2,432 \cdot 10^{-8}$ для $y_1(x)$  $1,329 \cdot 10^{-8}$ для $y_2(x)$  $1,601 \cdot 10^{-8}$ для $y_3(x)$  $h = 0,025$
5.	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - 8x^4 + \\ + 19x^3 + 10x + 2 \\ y_2' = -y_1 + 5x^4 + 4x^2 - 2x \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - 4x^4 + \\ + 3x^3 + x^2 + 4x + 6 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0 \end{cases}$	Наближене рішення  ( $N = 4$ )  співпадає с точним рішенням		$3,611 \cdot 10^{-9}$ для $y_1(x)$  $1,737 \cdot 10^{-9}$ для $y_2(x)$  $8,639 \cdot 10^{-10}$ для $y_3(x)$  $h = 0,01$

Зазначимо, що у диференціальних рівняннях без керування, які розглядаються у розділі 4, невідомі функції залежать від просторової змінної  $x$ , а у випадку розв'язання задачі керування електроприводом, фазові координати позначені через  $x_k(t)$  та невідомі функції керування –  $u_k(t)$ .

4.3 Чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі керування електроприводом

Нехай рух об'єкта описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{l=1}^r b_{il} u_l + f_i(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (4.3)$$

або в векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + f,$$

де  $x = x(t) - n$  - вимірний вектор координат стану об'єкта,

$u = u(t) - r$  - вимірний вектор управління,

$A_{n \times n}$  і  $B_{n \times r}$  - матриці коефіцієнтів.

Потрібно знайти керування  $u(t)$  і відповідну йому траєкторію  $x(t)$ , на яких функціонал

$$J(x, u) = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^r r_j u_j^2 \right) dt, \quad (4.4)$$

де  $q_i \geq 0, r_j > 0$  - задані вагові коефіцієнти, досягає мінімуму. При цьому повинні задовольнятися граничні умови

$$x_i(0) = x_{i,0}; \quad x_i(T) = x_{i,1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

На координати вектора стану об'єкта  $x(t)$  і вектора управління  $u(t)$  обмеження не накладаються.

Введемо заміну змінних  $t = T \cdot \tau, 0 \leq \tau \leq 1, \tilde{x}_i(\tau) = x_i(T \cdot \tau)$ .

При цьому

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dx_i(T\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T} \frac{d\tilde{x}_i(\tau)}{d\tau},$$

і задача (4.4) – (4.5) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{x}_k + \sum_{l=1}^r \tilde{b}_{il} \tilde{u}_l + \tilde{f}_i(\tau), \quad i = \overline{1, n};$$

$$\tilde{x}_i(0) = x_{i,0}; \quad \tilde{x}_i(1) = x_{i,1}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \tilde{x}_i^2 + \sum_{j=1}^r \tilde{r}_j \tilde{u}_j^2 \right) d\tau,$$

$$\tilde{a}_{ik} = Ta_{ik}, \quad \tilde{b}_{il} = Tb_{il}, \quad \tilde{q}_j = Tq_j; \quad \tilde{r}_j = Tr_j, \quad \tilde{f}_i(\tau) = Tf_i(T\tau),$$

$$(i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n}; l = \overline{1, r}; j = \overline{1, r}).$$

Проінтегруємо обидві частини диференціальних рівнянь по відрізьку  $[0, t]$ :

$$\tilde{x}_i(t) = x_{i,0} + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \int_0^t \tilde{x}_k(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^r \tilde{b}_{il} \int_0^t \tilde{u}_l(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}.$$

Будемо апроксимувати фазові координати  $\tilde{x}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  і координати вектора керування  $\tilde{u}_j(\tau)$ ,  $j = \overline{1, r}$  сплайнами першого порядку:

$$\tilde{x}_i(\tau) = \sum_{p=1}^{M_1} c_{i,p} h_p(\tau); \quad \tilde{u}_j(\tau) = \sum_{q=1}^{M_2} d_{j,q} h_q(\tau),$$

де

$$h(\tau) = \frac{1}{2} (|\tau - 1| - 2|\tau| + |\tau + 1|), \quad h_p(\tau) = h(M_1\tau - p); \quad h_q(\tau) = h(M_2\tau - q).$$

Коефіцієнти  $c_{i,p}$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $p = \overline{1, M_1}$ ),  $d_{j,q}$  ( $j = \overline{1, r}$ ,  $q = \overline{1, M_2}$ ) згідно з методом найменших квадратів в інтегральній формі знайдемо, мінімізуючи функціонал

$$\begin{aligned}
 J(\tilde{x}, \tilde{u}) = & \gamma_1 \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n \left( \tilde{x}_i'(t) - \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{x}_k(t) - \sum_{l=1}^r \tilde{b}_{il} \tilde{u}_l(t) - \tilde{f}_i(t) \right)^2 \right] dt + \\
 & + \gamma_2 \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n \left( \tilde{x}_i(t) - x_{i,0} - \sum_{k=1}^n \int_0^t \tilde{a}_{ik}(\tau) \tilde{x}_k(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^r \int_0^t \tilde{b}_{il}(\tau) \tilde{u}_l(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) d\tau \right)^2 \right] dt + \\
 & + \gamma_3 \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \tilde{x}_i^2 - \sum_{j=1}^r \tilde{r}_j \tilde{u}_j^2 \right) dt,
 \end{aligned}$$

де  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 \geq 0$ ,  $\gamma_3 > 0$  – деякі параметри,  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ .

*Приклад 13.* Розглянемо одновимірну стаціонарну лінійну систему автоматичного регулювання, якій відповідає диференціальне рівняння [26]

$$\frac{dx}{dt} = x + u + f(t);$$

вважається, що об'єкт регулювання знаходиться під впливом збурюючої дії  $f(t) = t$ ,  $t$  – час.

Знаходимо оптимальне керування і відповідний стан системи при початковій умові  $x(0) = 1$ . В якості критерія, що характеризує якість процесу керування, визначимо квадратичний функціонал

$$J(x, u) = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min_{x, u}.$$



На рис. 4.11 зображено графічно результати порівняння наближено знайдених  $\tilde{x}_1(t), \tilde{u}(t)$  запропонованим методом при  $M_1=10, M_2=10$  з ТОЧНИМИ

$$x(t) = \frac{1}{2}(3e^{-\sqrt{2}t} - t - 1), u(t) = \frac{1}{2}(-3(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} - t).$$

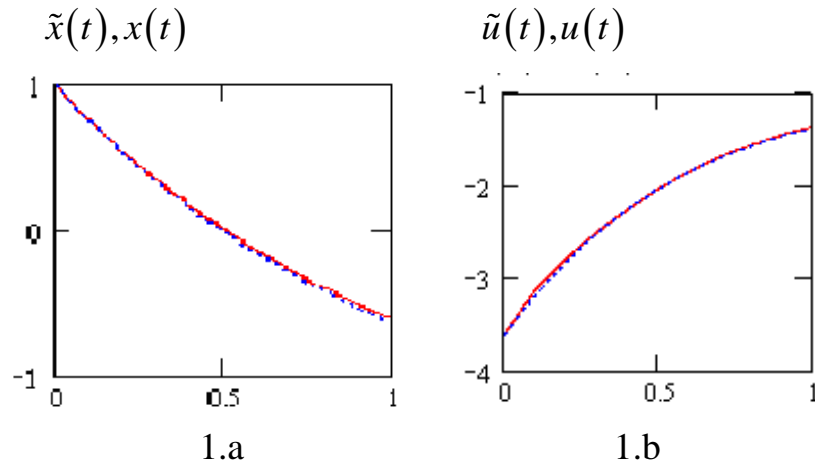


Рисунок 4.11 – Порівняння залежності фазової координати  $\tilde{x}(t)$  з точною  $x(t)$  (1.a) та оптимального керування  $\tilde{u}(t)$  з точним  $u(t)$  (1.b):

$x(t), u(t)$  – суцільна лінія,  $\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)$  – пунктирна лінія

*Приклад 14* (для тестування запропанованого методу). Знайти функції  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  і функції,  $u_1(t)=0$  та  $u_2(t)$ , які є розв'язком наступної задачі керування електроприводом

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t); \end{cases} \quad (4.6)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

при початкових умовах ( $b$  – невідоме)

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 1, \\x_2(0) &= b\end{aligned}\tag{4.8}$$

та умові

$$J(x, u) = \int_0^T [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r u_2(t)^2] dt \rightarrow \min_{x, u}.\tag{4.9}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \dot{x}_2, \\ \ddot{x}_1(t) &= u_2(t).\end{aligned}$$

Підставимо у це рівняння замість  $\dot{x}_2$  функцію  $u_2(t)$ .

Таким чином треба знайти  $x_1(t)$ , як розв'язок задачі

$$\ddot{x}_1(t) = u_2(t), \quad x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = x_2(0) = b.$$

Шукаємо загальний розв'язок методом варіації довільних сталих

$$\begin{aligned}x_1 &= c_0(t) + c_1(t)t; \\ \dot{x}_1 &= \dot{c}_0(t) + \dot{c}_1(t)t + c_1(t).\end{aligned}$$

Підставляємо в  $\ddot{x}_1 = u_2$ . Згідно з методом варіації довільних сталих, покладемо

$$\dot{c}_0(t) + \dot{c}_1(t)t = 0.$$

В результаті отримаємо  $\dot{x}_1 = c_1(t)$ . Продиференціюємо це рівняння

$$\ddot{x}_1 = \dot{c}_1(t).$$

В результаті для знаходження  $c_1(t)$  отримаємо, враховуючи, що  $\ddot{x}_1(t) = u_2(t)$ ,

$$\dot{c}_1(t) = u_2(t).$$

Звідки

$$c_1 = k + \int_0^t u_2(\tau) d\tau.$$

Таким чином для  $c_1(t)$  отримаємо

$$c_1' = u_2(t) \Rightarrow c_1 = k + \int_0^t u_2(\tau) d\tau = \begin{cases} k + \int_0^t 1 d\tau = k + t, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ k + \frac{1}{2} - \int_{1/2}^t 1 d\tau = k + 1 - t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$c_1(t) = \begin{cases} k + t, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ k + 1 - t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Далі, для  $x_2(t)$  теж отримаємо

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = c_1(t) = \begin{cases} k + t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ k + 1 - t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Враховуючи, що  $x_2(0) = b$ , для  $k$  отримаємо

$$x_2(0) = b \Rightarrow k = b.$$

Тобто

$$x_2(t) = \begin{cases} b+t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ b+1-t, \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Для знаходження  $x_1(t) = c_0(t) + tc_1(t)$ , нам треба знайти  $c_0(t)$  із врахуванням того, що  $\dot{c}_0(t) + \dot{c}_1(t)t = 0$ .

В результаті можна написати наступний ланцюжок рівностей:

$$\dot{c}_1(t) = u_2(t).$$

Так

$$\dot{c}_0(t) = -\dot{c}_1(t)t \Rightarrow \dot{c}_0(t) = -tu_2(t) = \begin{cases} -t, 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ t, \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$c_0(t) = c_2 - \int_0^t tu_2(t) dt = \begin{cases} c_2 - \frac{t^2}{2}, 0 \leq t < \frac{1}{2}, c_2 = const; \\ c_2 - \frac{2}{8} + \frac{t^2}{2}, \frac{1}{2} \leq t < 1, c_2 = const. \end{cases}$$

Таким чином для  $x_1(t)$  отримаємо

$$x_1(t) = c_0(t) + tc_1(t) = \begin{cases} c_2 - \frac{t^2}{2}, 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c_2 - \frac{2}{8} + \frac{t^2}{2}, \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} + t \begin{cases} k+t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k+1-t, \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_2 - \frac{t^2}{2} + t(k+t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ c_2 - \frac{2}{8} + \frac{t^2}{2} + t(k+1-t), & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

Враховуючи, що  $x_1(0) = 1$  для сталої  $c_2$ , знаходимо  $c_2 = 1$ .

Таким чином, загальний розв'язок задачі Коші (4.6) – (4.7) має вигляд

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2} + t(b+t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ \frac{6}{8} + \frac{t^2}{2} + t(b+1-t), & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} (b+t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ (b+1-t), & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Підставимо ці формули у функціонал  $J(x, u)$ .

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} J(x, u) = G(b) &= \int_0^T [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r u_2^2] dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ q_1 \left[ 1 - \frac{t^2}{2} + t(b+t) \right]^2 + q_2 (b+t)^2 + r(1)^2 \right\} dt + \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ q_1 \left[ \frac{6}{8} + \frac{t^2}{2} + t(b+1-t) \right]^2 + q_2 (b+1-t)^2 + r(-1)^2 \right\} dt, \\ \frac{dG(b)}{db} = 0 &\Rightarrow 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ q_1 \left[ 1 - \frac{t^2}{2} + t(b+t) \right] t + q_2 (b+t) \right\} dt + \end{aligned}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ q_1 \left[ \frac{6}{8} + \frac{t^2}{2} + t(b+1-t) \right] t + q_2(b+1-t) \right\} dt = 0.$$

При  $q_1 = 1, q_2 = 1, r = 1$  розв'язок цього рівняння відносно змінної  $b$  дорівнює:  $b = -0.629$ .

Таким чином, для тестування запропонованого методу маємо наступну задачу: знайти функції  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  і функції  $u_1(t) = 0$  та  $u_2(t)$ , які є розв'язком наступної задачі

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

при початкових умовах  $b = -0.629$  та умові ( для  $q_1 = 1, q_2 = 1, r = 1$  )

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \\ x_2(0) &= b, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$J(x, u) = \int_0^T \left[ q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r u_2(t)^2 \right] dt \rightarrow \min_{x, u}.$$

Запишемо цю задачу у матричній формі

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Du(t) + f(t), \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ f(t) &= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Точний розв'язок цієї задачі визначається формулами (4.10) – (4.11) при  $b = -0.629$ .

*Приклад 14.* Застосовуючи викладений метод, визначимо програмний оптимальний процес, при якому мінімізується розсіювана енергія – інтеграл по часу від квадрату управляючої дії. Розглянемо систему другого порядку, яка складається з двох послідовно з'єднаних ідеальних інтегруючих ланок. Ця задача має з наступну математичну постановку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$x_i(0) = x_{i,0}; x_i(T) = x_{i,1}, (i = 1, 2);$$

$$J(u) = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min_u, \quad (4.14)$$

що є задачею із закріпленими кінцями і фіксованим часом.

Припускаємо, що  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$ .

Шукаємо невідомі функції  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{u}(t)$  у вигляді

$$\tilde{x}_i(t) = \sum_{k=1}^n S_{i,k}(t), i = 1, 2,$$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=1}^n S_{3,k}(t);$$

$$S_{j,k}(t) = C_{j,k} \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} + C_{j,k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, t_k \leq t \leq t_{k+1}, j = \overline{1, 3},$$

$$S_{j,k}(t) = 0, t \leq t_k \vee t > t_{k+1}.$$

Сталі  $C_{j,k}$  ( $j = \overline{1, 3}; k = \overline{1, n}$ ) знайдемо, мінімізуючи функціонал

$$J_1(\tilde{x}, \tilde{u}) = \gamma_1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{T} \tilde{x}'_1(t) - \tilde{x}_2(t) \right)^2 + \left( \frac{1}{T} \tilde{x}'_2(t) - \tilde{u}(t) \right)^2 \right] dt +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_2 \int_0^1 \left[ \left( \tilde{x}_1(t) - x_{1,0} - T \int_0^t \tilde{x}_2(\tau) d\tau \right)^2 + \left( \tilde{x}_2(t) - x_{2,0} - T \int_0^t \tilde{u}(\tau) d\tau \right)^2 \right] dt + \\
& +\gamma_3 T \int_0^1 \tilde{u}^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Розглядуваній задачі можна надати наступну фізичну інтерпретацію: треба повернути вал двигуна на заданий кут  $\alpha_k$  за даний час  $T$  при мінімальній витраті енергії на керування, яке характеризується функціоналом (4.14).

З огляду на це проведені чисельні розрахунки при наступних вхідних даних [32, с. 139]:  $T = 5c$ ;  $x_{1,0} = 0$ ;  $x_{2,0} = 10$  рад/с;  $x_{1,1} = 50$  рад;  $x_{2,1} = 0$ . Відрізок часу  $[0,1]$  поділявся на  $N = 20$  частин, тобто  $t_k = 0,1 \cdot (k-1)$ ,  $(k = \overline{1, N+1})$ .

Зазначимо, що в цьому прикладі розв'язана задача програмного керування. Технічна реалізація якого керування показана на рисунку 4.12. На вхід розімкнутої системи, що складається з двох послідовно включених інтеграторів, подається вхідний сигнал  $U^*(t)$ . Цей сигнал виробляється програмним годинниковим механізмом (программатором). У момент  $t=0$  годинник запускаються і у відповідності з його ходом змінюється сигнал  $U^*(t)$  так, як показано на рис. 4.12. В момент  $t = t_k$  годинник вимикають та

$$U^*(t) \Big|_{t=t_k} = 0.$$

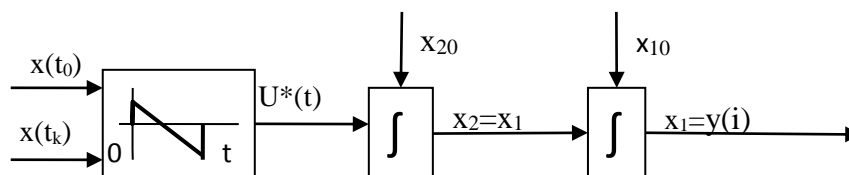


Рисунок 4.12 – Технічна реалізація оптимального програмного керування



Результати чисельних розрахунків наведені в таблицях 4.2, 4.3 і на рис. 4.13 – 4.15.

Таблиця 4.2 – Порівняння точного і наближеного значень оптимального керування на відрізку  $[0,1]$  при  $N = 20$

№ з/п	Час $t$	Точний розв'язок $u(t)$	Наближений розв'язок $\tilde{u}(t)$	Відносна похибка $\left  \frac{u(t) - \tilde{u}(t)}{u(t)} \right $
1	2	3	4	5
1	0.00	4.0	4.00000	0.000000
2	0.05	3.4	3.39995	0.000015
3	0.10	2.8	2.79989	0.000037
4	0.15	2.2	2.19994	0.000027
5	0.20	1.6	1.59998	0.000012
6	0.25	1.0	0.99999	0.000010
7	0.30	0.4	0.40000	0.000000
8	0.35	-0.2	-0.19999	0.000005
9	0.40	-0.8	-0.79999	0.000003
10	0.45	-1.4	-1.39998	0.000014
11	0.50	-2.0	-1.99996	0.000019
12	0.55	-2.6	-2.59990	0.000037
13	0.60	-3.2	-3.19985	0.000048
14	0.65	-3.8	-3.79972	0.000073
15	0.70	-4.4	-4.39960	0.00009
16	0.75	-5.0	-4.99939	0.000122
17	0.80	-5.6	-5.59918	0.000147
18	0.85	-6.2	-6.19885	0.000186
19	0.90	-6.8	-6.79852	0.000217
20	0.95	-7.4	-7.39819	0.000244
21	1.0	-8.0	-7.99787	0.000267

Таблиця 4.3 – Порівняння точного і наближеного значень фазової координати  $x_1(t)$  на відрізку  $[0,1]$  при  $N = 20$

№ з/п	Час $t$	Точний розв'язок $x_1(t)$	Наближений розв'язок $\tilde{x}_1(t)$	Відносна похибка $\left  \frac{x_1(t) - \tilde{x}_1(t)}{x_1(t)} \right $
1	2	3	4	5
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.05	2.61875	2.72499	0.04057
3	0.10	5.45000	5.44999	0.000001
4	0.15	8.45625	8.52501	0.008132
5	0.20	11.6000	11.60003	0.000002
6	0.25	14.84375	14.87502	0.002106
7	0.30	18.15000	18.150004	0.000000
8	0.35	21.48125	21.47499	0.000291
9	0.40	24.80000	24.79998	0.000001
10	0.45	28.06875	28.02501	0.001558
11	0.50	31.25000	31.25004	0.000001
12	0.55	34.30625	34.22492	0.002371
13	0.60	37.20000	37.19979	0.000005
14	0.65	39.89375	39.77499	0.002977
15	0.7	42.35000	42.35017	0.000004
16	0.75	44.53125	44.37536	0.003501
17	0.80	46.4000	46.40056	0.000012
18	0.85	47.91875	47.72515	0.00404
19	0.90	49.05000	49.04975	0.000005
20	0.95	49.75625	49.50534	0.005043
21	1.0	50.00000	49.96094	0.000781

З таблиць 4.2, 4.3 робимо висновок, що максимальна похибка не перевищує 0,04. Аналогічну точність було отримано при  $N = 20$  також і для  $\tilde{x}_2(t)$ . Про достатню точність свідчать як дані, наведені в табл. 4.2, 4.3, так і на рисунках 4.13 – 4.15.

На рисунках 4.13 – 4.15 показано порівняння залежності оптимального керування  $\tilde{u}(t)$  (рис. 4.13) та відповідних йому фазових координат  $\tilde{x}_1(t)$  (рис. 4.14) і  $\tilde{x}_2(t)$  (рис. 4.15) з точними  $u(t), x_1(t), x_2(t)$ :  $x_1(t), x_2(t), u(t)$  – суцільна лінія;  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{u}(t)$  – пунктирна лінія.

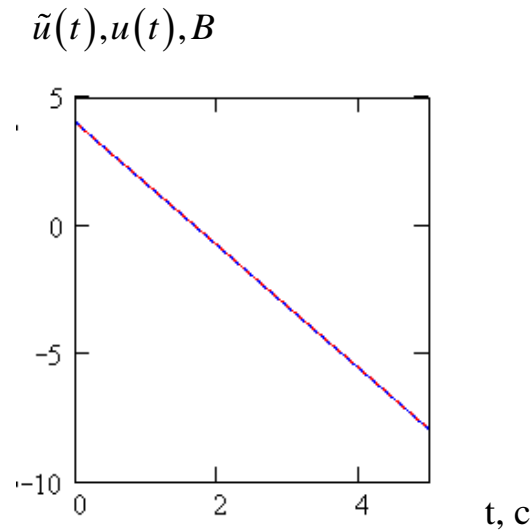


Рисунок 4.13 – Порівняння залежності оптимального керування  $\tilde{u}(t)$  з точним  $u(t)$

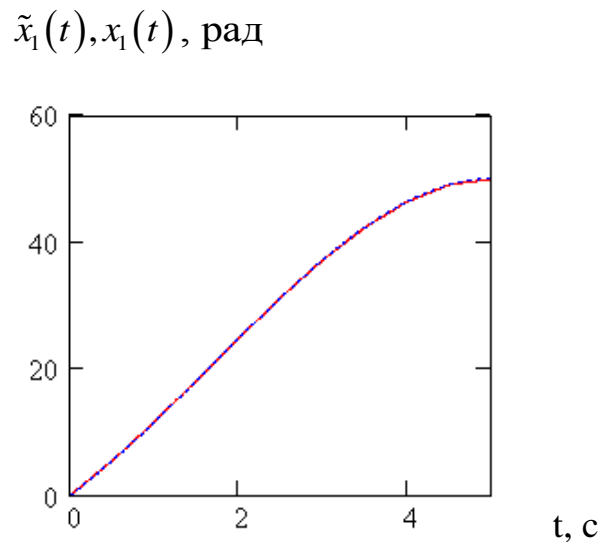


Рисунок 4.14 – Порівняння залежності фазової координати (кута поворота валу двигуна)  $\tilde{x}_1(t)$  з точною  $x_1(t)$

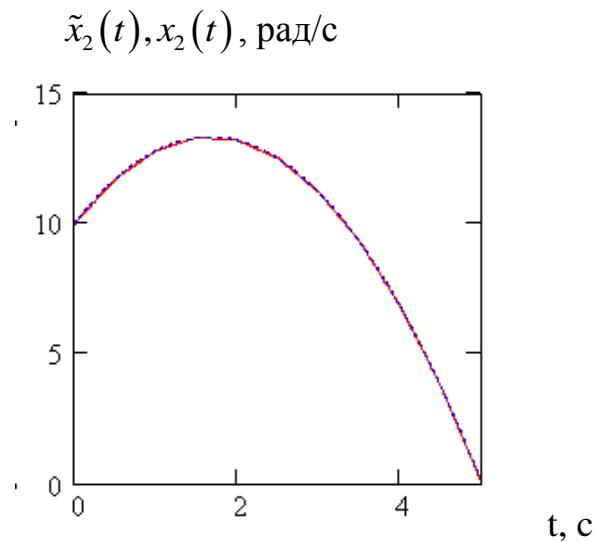


Рисунок 4.15 – Порівняння залежності фазової координати  $\tilde{x}_2(t)$  (кутова швидкість) з точною  $x_2(t)$

#### 4.4 Висновки до розділу 4

1. В розділі 4 наведено чисельні приклади для запропонованого методу побудови наближених розв'язків задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь  $d\vec{y}/dx = A\vec{y} + \vec{f}(x)$ ,  $0 < x < 1$ , згідно з яким компоненти розв'язку  $y_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$  подаються у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно – незалежних функцій  $\psi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , які задовольняють початковій умові задачі Коші. Коефіцієнти розкладу знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі  $L_2[0, 1]$  або  $W_2^1[0, 1]$ ) правих частин  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  розглядуваної системи.

2. Аналіз результатів обчислювального експерименту, проведеного на основі створеного пакету програм в системі MATCAD, дозволяє зробити наступні висновки:

а) якщо праві частини СЗДР є поліномами змінної  $x$ , то для знаходження наближеного розв'язання системи з постійними коефіцієнтами вибір базисних функцій  $\psi_{i,k}(x) = x^k$  дає експоненціальну точність;

б) якщо система диференціальних рівнянь загального вигляду, тобто із змінними коефіцієнтами, то вибір базисних функцій  $\psi_{i,k}(x)$  відповідно до запропонованого методу може бути здійснений оптимально;

в) якщо базисні функції вибираються різними для різних компонент  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , то можна одержати точний розв'язок для правих частин, які є деяким наближенням до заданих правих частин;

г) одна з основних переваг цього методу полягає у тому, що ми в результаті одержуємо розв'язок в аналітичному вигляді;

д) у тому вигляді, який викладений в даній роботі, метод можна використовувати тільки для розв'язання задачі Коші для систем ЛДР, проте є можливість його узагальнення на випадок задачі Коші для нелінійних систем;

е) приклади ілюструють високу точність наближених розв'язків, одержаних запропонованим методом. Наведені приклади свідчать, що точність наближення залежить від властивостей розв'язку: вона більша, якщо розв'язок є монотонним на відріжку  $[0,1]$  в порівнянні з розв'язком, характер поведінки якого на цьому відріжку змінюється з монотонного зростання на монотонне спадання і навпаки.

3. Дослідження, проведене в даній дисертаційній роботі дозволяє підвищити точність обчислень і понизити обчислювальне навантаження, не вимагаючи підвищення потужності апаратної складової обчислювальної системи. Запропонований метод дає можливість знаходити розв'язок задачі оптимального керування електроприводом, що є найкращим наближенням до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0,1]$ . Похибка наближення складає 0,04.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у роботах [2, 3, 4, 5, 7, 8].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел: [26, 32].

## ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження для підвищення точності обчислень при розв'язанні задач оптимального керування електроприводами розроблено новий обчислювальний метод наближеного розв'язання задачі мінімізації витрат енергії в електроприводі.

На підставі отриманих результатів дисертаційної роботи можна зробити такі висновки.

1. Уперше запропоновано метод наближеного розв'язання задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом з використанням сплайн-функцій, що дає найкраще наближення до точного розв'язку в нормі  $W_2^1[0, t]$ . Особливість методу полягає в тому, що математична модель об'єкта керування слідкуючим електроприводом представлена у вигляді системи диференціальних рівнянь та еквівалентної їй системи інтегральних рівнянь, а невідомі параметри керування  $u_j(t)$  знаходяться одночасно з невідомими параметрами фазових координат  $x_i(t)$  шляхом мінімізації відповідного функціоналу енергії, побудованого з використанням цих двох систем.

2. Набув подальшого розвитку метод найкращого наближення функції однієї змінної сплайнами 1-го порядку в нормі  $W_2^1[0, t]$  при розв'язанні задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) та задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом. Проведено порівняльний аналіз отриманих наближених розв'язків з точними розв'язками, а також наближеними, отриманими методом Рунге-Кутти 4-го порядку. Результати показують, що для отримання порівняльної точності з методом Рунге-Кутти, запропонований метод вимагає знаходження меншої кількості невідомих параметрів.

3. Удосконалено метод розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з правими частинами у вигляді поліноміальних функцій шляхом вибору базисних функцій  $\psi_{i,k}(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

що дозволило забезпечити високу точність наближення в нормі  $L_2[0,1]$  в порівнянні з існуючими методами.

4. Уперше запропонований метод був застосований для наближеного розв'язання задачі оптимального керування слідкуючим електроприводом з використанням пакету програм у системі комп'ютерної математики MathCAD. Аналіз результатів підтвердив високу точність розробленого методу.

5. Результати дисертаційної роботи впроваджено: в розробках підприємства ПрАТ «Електромашина» в приладах керування електричними двигунами при їх випробуваннях; в навчальному процесі на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії у лабораторному практикумі з дисципліни «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевих знань» при підготовці студентів спеціальностей «Професійна освіта. Електроніка, радіотехніка та телекомунікація» та «Професійна освіта. Електротехніка та електромеханіка». Отримані результати можуть бути використані при створенні пакетів програм промислового значення та при конструюванні електроприводів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров Е.Е. Голуб А.П., Костенко Ю. Т., Кузнецов Б.И., Соляник В.П. Теория автоматического управления: навч. посіб. Том 3. Харків: НТУ «ХП», 2002. 195 с.
2. Артемьев С.С., Демидов Г.В. А – устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1975. С. 214 – 220.
3. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва: физ. мат. лит., 1986. 744с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва, 1987. 598 с.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ. 1960. 400 с.
6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. Москва, 1966. 307 с.
7. Брайсон А.Е., Денхем В.Ф., Дрейфус С. Задачи оптимального управления с ограничениями типа неравенств (I, II) // Ракетная техника и космонавтика (AIAA - Journal), I, 1963, №11, р. 107–115; II, 1964, № 1, р. 25 – 34.
8. Будак Б.М., Беркович Е.М., Соловьева Е.Н. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1969. №3, С. 522 – 547.
9. Бурулько Л.К. Математическое моделирование электромеханических систем: учеб.пособие / Томский политехнический университет, 2014. 104 с.
10. Василець Т. Ю. Комп'ютеризовані системи управління електроприводами сучасних електромеханічних систем: навч.-метод. посіб. Ч. 1 / Укр. інж.-пед. акад. Харків, 2016. 107 с.
11. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва, 1988. 552 с.



12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Москва 1981. 400с.
13. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
14. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности // Киев: ин-т матем. НАНУ, 2004. 499 с.
15. Гамкрелидзе (Gamcrelidze R.V.) On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control // SIAM J. Control. 1965. N 3. P. 106–128.
16. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейноквадратичные дифференциальные игры. Киев, 1994. 320 с.
17. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М. : Изд - во МГУ, 1978. 207 с.
18. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Пер. с англ. М. "Мир". 1969. 380 с.
19. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
20. Голубь А.П., Кузнецов Б.И., Соляник В.П., Чаусов А.А. Системы управления электроприводами: учебн. пособ. Донецк, 2001. 272 с.
21. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами, Киев. Наукова думка. 2005. 362 с.
22. Дейнеко В.С., Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев. Наукова думка, 2001. 342 с.
23. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределённых систем и оптимальное управление. Киев: Наукова думка, 2007. 702 с.
24. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределёнными системами. Киев: Наукова думка, 2003. — 505с.

25. Дейнека В.С. Численное решение краевой задачи, допускающей разрыв решения. Доклады АН УССР. Сер. А. 1982. №11. С. 28–31.
26. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. Под редакцией Е.П. Попова. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. 336с.: ил.
27. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.
28. Каюмов А.Р. О задаче наилучшего среднеквадратического приближения  $L$  – сплайнами 2-го порядка // Труды международной науч. конф. «Теория приближения». Екатеринбург, 2000. с. 21–23.
29. Корнійчук Н.П. Сплайны в теории приближения. Москва: Наука, 1984. 350 с.
30. Коробов В.И. О сходимости одного варианта метода динамического программирования для задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1968, 8, №2. с. 429–435.
31. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближения. Москва. Физматгиз, 1995. 211 с.
32. Кузнецов Б.И., Богаенко И.Н. Оптимальные системы управления электроприводами / Киев: Вища школа, 1995. 210 с.
33. Курцева Л. Б., Антоненко Н. С. Проектування пристроїв та систем автоматики і управління // Метод. вказ. до лаб. робіт для студ. заочної форми навч. напряму підготовки 6.050201 Системна інженерія / Укр. інж.-пед. акад. Харків, 2012. 44 с.
34. Курцева Л.Б. Моделювання та оптимізація автоматизованих систем управління. Частина I. Навчальний посібник / Укр. інж.-пед. акад. Харків, 2012. 102 с.
35. Колчанов Н.А., Ананько Е.А., Колпаков Ф.А., Подколотная О.А., Игнатъева Е.В., Горячкова Т.Н., Степаненко И.Л. Генные сети // Молек. биол. 2000. С. 34.

36. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1962, 2, №6. с. 1132–1138.
37. Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Специализированный комплекс программ оптимизации. Препринт ИТПМ СО АН СССР № 15, 1985.
38. Латыпов А.Ф. Об одной модификации метода наискорейшего спуска // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. 1974. Т. 2. № 8. С. 87–89.
39. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. Москва. Наука. 1968. 180 с.
40. Леончук П.М. О численном решении задач оптимальных процессов с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1964, 4, №6. с. 1112–1116.
41. Леончук П.М. и др. О численном решении задачи оптимального управления ядерными реакторами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1965, 5, №3. с. 559–560.
42. Литвин О.М. Оптимальні схеми методу скінченних елементів, точні на класі задач // Доповіді академії наук України. Київ: Наукова думка, 1992. С. 31–36.
43. Литвин О.Н. Оптимальные схемы МКЭ. Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев: Наук. думка, 1978. С. 160–165.
44. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ. 2-я респ. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Тез. докл. Киев: КГУ, 1978. С. 21–22.
45. Литвин О.Н. О построении оптимальных схем МКЭ // Динамика и устойчивость сложных систем. Киев: Наук. думка, 1981. С. 116–128.
46. Литвин О.М. Побудова оптимальних схем методу скінченних елементів // Доп. АН УРСР. Сер. А. Динамика и устойчивость сложных систем. 1982. №6. С. 14–18.

47. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов. Дифференц. уравнения. 1984, 20, №4. С. 677–683.
48. Литвин О.М. Новий метод розв'язання двоточкових крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Вісник НТУ ХП. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ "ХП". 2012, №27. С. 114–117.
49. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ: Наук. думка, 2005. 333 с.
50. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Х.: Основа, 2002. 544с.
51. Литвин О. М. Про оцінку похибки наближення диференційовних функцій лінійними сплайнами в нормі  $W_2^1(I)$ ,  $I=[0,1]$  // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. 2005. №7. С. 22–26.
52. Латыпов А.Ф. Об одной модификации метода наискорейшего спуска // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. 1974. Т. 2. № 8. С. 87–89.
53. Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Ратушный А.В. и др. Обобщенный химико-кинетический метод моделирования генных сетей // Молекуляр. биология. 2001. 35 с.
54. Ляпунов С.В. Построение профилей минимального волнового сопротивления// Уч. зап. ЦАГИ. 1986. № 4. С. 1–7.
55. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка. 1991.
56. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. 1977.
57. Мельц И.О. Применение метода динамического программирования. Автоматика и телемеханика, 1968, №1. с. 79.
58. Молчанов И.Н., Николаенко Л.Д. Вариационный метод в некоторых краевых задачах с разрывными решениями // Численный анализ. 1975. С. 71–83.

59. Моделирование асинхронных электроприводов с тиристорным управлением / Л. П. Петров, В. А. Ладензон, Р. Г. Подзолов, А. В. Яковлев. Москва. Энергия, 1977. 200 с.
60. Моисеев Н.Н. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений Журн. вычисл. матем. и матем. физики. I, 1964, 4, №3, II, 1965, 5, № 1.
61. Моисеев Н.Н. Численные методы теории оптимального управления, использующие вариации в пространстве состояний. Кибернетика, 1966. 5, №3. С. 1–23.
62. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. Москва. Наука, 1971.
63. Никуличев Ю.В., Латыпов А.Ф. Численные методы решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многосвязных интерполяционных полиномов Эрмита / Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Том 47, номер 2. С. 234–244.
64. Новиков В.А., Новиков Е.А. Два эффективных алгоритма численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИТПМ СО АН СССР. № 5, 84, 1984.
65. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1969. 384 с.
66. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. Пер. с англ. Москва. Мир. 1974. 376 с.
67. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука. 1980. 187с.
68. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Чернооруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. Москва. Наука, 1979.
69. Растрингин Л.А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. Рига: Зинатне, 1965. 211с.

70. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552с.
71. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование // Идеи. Методы. Примеры. Москва. ФИЗМАТЛИТ, 2005. 320с.
72. Слежановский О. В. Системы подчиненного регулирования электроприводов переменного тока с вентильными преобразователями / О. В. Слежановский, Л. Х. Дацковский, И. С. Кузнецов, Е. Д. Лебедев, Л. М. Тарасенко. Москва, 1983. 256 с.
73. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва, 1966. 724 с.
74. Трухаев Р.И., Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач. Изд. ЛГУ, 1971.
75. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Москва: Наука, 1967.
76. Федоренко Р.П. Итерационное решение задач линейного программирования// Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1970, 10, №4, с. 895–907.
77. Федоренко Р.П. Приближённое решение задач оптимального управления. Главная редакция физ.-мат. литературы. Москва. Наука, 1978. 488 с.
78. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. Москва. Наука. 1966. 625с.
79. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва. Мир, 1979. 312 с.
80. Черноушко Ф.Л., Баничук В.П. Вариационные задачи механики и управления. Москва, 1971.
81. Чуян О.Р. Оптимальный одношаговый алгоритм максимизации дифференцируемых функций. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т. 26. №3, С. 381–387.

82. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва. Мир, 1978. 464 с.
83. Cêa Jean. Optimisation théorie at algorithmes. Paris, DUNOD, 1971.
84. Ciesielski Z. Properties of the orthonormal Franklin system / *Studia Math.* 1963. 23 №2. P. 141–157.
85. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, 49, p. 1–23.
86. Diaz A.R., Kikuchi N., Taylor J.E. A method of grid optimization for finite element method// *Comp. methods in applied mechanics and engineering.* V. 41, 1983. P. 29–45.
87. Hicks R.M., Vanderplaats G.N. Design of low - speed airfoils by numerical optimization // *SAE Pap.* 740524. 1975.
88. Johnson R.R., Hicks R.M. Application of numerical optimization to the design of advanced supercritical airfoils // *NACA CP.* № 2045. 1079.
89. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // *BIT*, 3, p. 27–43. 1963.
90. Ehle B.L. High order A-stable methods for the numerical solution of system of D.E's // *BIT.* 8. Pp. 276–278. 1968.
91. Ehle B.L. On Pade approximation to the exponential function and A – stable methods for the numerical solution of initial value problems. University of Waterloo Dept. Applied Analysis and Computer Science, Research Rep. № CSRR 2010. 1969.
92. Gear C.W. The automatic integration of ordinary differential equations // *Comput. and Structures.* 1985. V. 20. № 6. P. 915–920.
93. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Third Edition. Academic Press, San Diego, CA, 1993.
94. Миль (Miele A.) Recent Advances in Gradient- Algorithm for Optimal Control Problems. *JOTA*, 1975, 17, № 516.
95. Табак, Кью (Tabak D., Kuo B. C.) Optimal Control by Mathematical Programming. New Jersey: Prentice-Hall Inc. Engewood Cliffs, 1971.

96. Sheremet O. Development of a mathematical apparatus for determining operator images of the desired quantized transition functions of finite duration / O. Sheremet, O. Sadovoy // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. 2/2 (80). P. 51–58.

97. Sheremet O. The method of automatic control systems synthesis on the base of discrete time equalizer / O. Sheremet, O. Sadovoy // Scientific bulletin of NMU. Dnipro: National mining university, 2017. №4 (160) P. 99 – 104.

98. Sheremet O. Decomposition and linearization of asynchronous motor mathematical models in relative units / O. Sheremet // Electromechanical and energy saving systems. Kremenchuk: KrNU, 2017. № 2/2017 (38). P. 18 – 25.

99. Фираго Б. И. Регулируемые электроприводы переменного тока / Б. И. Фираго, Л. Б. Павлячик. Минск: Техноперспектива, 2006. 363 с.

100. Ключев В.И. Теория электропривода: Учебник для ВУЗов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 560 с.

101. Крылов И.А. Численное решение задачи об оптимальной стабилизации исходников. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1968, 8, №1.

102. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для ВУЗов. Москва, Высш. шк., 2001. 327 с.

103. Гнанский Л.С., Каменский Г.А., Эльцгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. Москва. Наука, 1969. 507 с.



## Додаток А

## Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління звичайним лінійним диференціальним рівнянням // Збірник наукових праць Системи обробки інформації Харківський університет Повітряних Сил. Харків. 2005. Вип. 3(43). С. 198 – 203.
2. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів до розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2011. № 3(106). С. 105 – 113.
3. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі  $L_2[0,1]$  // Вісник НТУ ХПІ. Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. НТУ «ХПІ». Харків. 2012. №54 (960). С. 119 – 128.
4. Lytvyn Oleg N., Lobanova Lyudmila S., Miroshnychenko Galina A. A New Method for Solving the Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations // Journal of Automation and Information sciences. 2014. Volume 46, Issue 9, 46(9). P. 1–11. (Входить до міжнар. наукометричної бази Scopus).
5. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі  $L_2[0,1]$  // Вісник НТУ ХПІ. Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. НТУ «ХПІ». 2012. №54 (960). С. 119 – 128.
6. Литвин О. М., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління лінійним звичайним диференціальним рівнянням // X Міжнародна конференція ім. М. Кравчука: тези доповідей. Київ: Задруга, 2004. С. 438.

7. Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // XXXVIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2005. С. 60 – 61.

8. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про використання інтерполяційних сплайнів до розв'язання задачі управління // Міжнародна конференція «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)»: праці конф. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. С. 130.

9. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один новий метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Міжнародний симпозіум «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)»: праці симпозіуму. Київ: Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. С. 170.

10. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLI науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2008. Частина 6. С. 30.

11. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Чаусова Г. А. Про один метод наближеного розв'язання задачі управління системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь // XLII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2009. Частина 6. С. 20.

12. Литвин О. М., Лобанова Л.С., Мірошніченко Г. А. Деякі аспекти чисельної реалізації наближеного розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // IV міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»: зб. наук. праць за матеріалами конф. Кам'янець-Подільський, 2010. С. 129 –136.

13. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про використання апроксимаційних сплайнів розв'язання задачі управління системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь // XLIII науково-

практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії: тези доповідей. Харків: УПА, 2010. Частина 6. С. 18.

14. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Чисельне дослідження нового варіаційного методу розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика – 2010»: тези доповідей. Харків: ХНУРЕ, 2010. Том 1. С. 54 – 56.

15. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошніченко Г. А. Про один новий варіаційний метод розв'язання задач оптимального управління системами звичайних диференціальних рівнянь // II Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» ІСН-2011: матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 347 – 350.

16. Lytvyn O. N., Lobanova L. S., Miroshnychenko G. A. A method for solving optimal control problems for systems of ordinary differential equations by minimizing the error of approximate right side in the norm  $W_2^1[0,1]$  // XVI International Conference «Dynamical system modeliling and stability investigation»: abstracts of conference reports. Kiev: Taras Shevchenko National University, 2013. P. 338.

17. Литвин О. М., Лобанова Л. С., Першина Ю. І., Мірошніченко Г. А. Розв'язання задачі синтезу регулятора електроприводу системи тиристорний перетворювач-двигун узагальненим методом найменших квадратів // IV науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: зб. праць. Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2016. Вип. 4. С. 58 – 62.

Додаток Б  
Акти використання і впровадження результатів  
дисертаційних досліджень

Міністерство освіти  
і науки України



Ministry of Education  
And Science of Ukraine

**УКРАЇНСЬКА  
ІНЖЕНЕРНО-  
ПЕДАГОГІЧНА  
АКАДЕМІЯ**

Тел.: (057)731 28 62; факс:  
(057)731 32 36

**UKRAINIAN  
ENGINEERING  
PEDAGOGICS  
ACADEMY**

вул. Університетська, 16,  
м. Харків, 61003, Україна

E-mail: [rektor@uipa.edu.ua](mailto:rektor@uipa.edu.ua)  
<http://uipa.edu.ua>

Universytets'ka str. 16,  
Kharkiv, 61003. Ukraine

Код ЄДРПОУ 02071228

Від 1. 11. 17 № 106-04-128

На № \_\_\_\_\_



ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи  
д.пед.н., професор

М.І. Лазарев

### АКТ

#### про впровадження результатів кандидатської дисертації Мірошниченко Галини Анатоліївни «Математичне моделювання процесів керування електроприводом» в Українській інженерно-педагогічній академії

Комісія, створена проректором з наукової роботи Лазаревим М.І., у складі: Литвин О.М. - голова, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики; Першина Ю.І. - доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої та прикладної математики; Канюк Г.І. - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теплоенергетики і енергозберігаючих технологій розглянула матеріали стосовно запровадження результатів кандидатської дисертації Мірошниченко Г.А. «Математичне моделювання процесів керування електроприводом» і встановила:

1. Результати дисертаційної роботи Мірошниченко Г.А. використовувались у рамках науково-дослідної роботи «Побудова математичних моделей для управління технологічними процесами» №ФН 12-5 на кафедрі Систем управління технологічними процесами і об'єктами в Українській інженерно-педагогічній академії.

2. Запропонований в дисертаційній роботі метод чисельного розв'язання задач керування електроприводом та розроблене програмне забезпечення ефективно використані на кафедрі Вищої та прикладної математики у лабораторному практикумі з дисципліни «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевих знань» при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальностями «Професійна освіта. Електроніка, радіотехніка та телекомунікація» та «Професійна освіта. Електротехніка та електромеханіка». Вони включені до складу методичних вказівок з дисципліни «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевих знань» в додаток до лабораторної роботи за темою «Апроксимація експериментальних залежностей методом найменших квадратів».

#### Голова комісії

д.ф.-м.н., проф.,  
зав. кафедри вищої та прикладної математики

О.М. Литвин

#### Члени комісії

д.ф.-м.н., професор кафедри  
вищої та прикладної математики

Ю.І. Першина

д.т.н., професор,  
завідувач кафедри теплоенергетики  
і енергозберігаючих технологій

Г.І. Канюк

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис  
Печатка

Л.В. Колесник

ПОГОДЖЕНО

Проректор з наукової роботи  
д.пед.н., професор

М.І. Лазарев

2017 р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор технічний

ПАТ «Електромашина»

Ю.А. Глущенко

«22» листопада 2017 р.

**АКТ № 01/11/2017**

про використання результатів дисертаційної роботи  
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук  
Мірошніченко Галини Анатоліївни

Цей акт складений в тому, що результати дисертаційної роботи  
Мірошніченко Галини Анатоліївни «Математичне моделювання процесів  
керування електроприводом» впроваджені в розробках підприємства, а саме:

- прилади керування електричними двигунами при їх випробуваннях.

Акт складений для подання до спеціалізованої вченої ради по захисту  
дисертаційних робіт та не є підставою для фінансових розрахунків.

Начальник СКБ  
ПАТ «Електромашина»

Дзеніс С.Є.

Начальник КБ  
ПАТ «Електромашина»

Варванський А.Ю.

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис  
Печатка

Л.В. Колесник