

Міністерство освіти і науки України
Українська інженерно-педагогічна академія

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЧОРНА ОЛЕНА СЕРГІЇВНА

УДК 519.876.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ
СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН МЕТОДАМИ ІНТЕРЛІНАЦІЇ
МАТРИЦЬ-ФУНКЦІЙ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Підпис О.С. Чорна

Науковий керівник:

Литвин Олег Олегович, доктор фізико-математичних наук, доцент

Цей примірник дисертаційної роботи
ідентичний за змістом з іншими, поданими
до спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02

Вчений секретар спецради Д64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Чорна О.С. Математичне моделювання просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання і обчислювальні методи». – Українська інженерно-педагогічна академія. Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2018.

У дисертаційній роботі запропоновано рішення актуальної науково-практичної задачі розробки математичної моделі просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць функцій. Об'єктом дослідження в роботі виступає процес відновлення просторового розподілу щільності сукупності корисних копалин як тривимірної функції між системою нерівномірно розміщених просторових кривих у вертикальних площинах.; предметом дослідження – інтерлінаційні методи побудови математичних моделей просторового розподілу сукупності корисних копалин між заданими похилими свердловинами.

Методи дослідження основані на використанні теорії функціонального аналізу (для дослідження та розробки методів оцінки запасів корисних копалин), обчислювальної математики (для отримання вигляду базисних поліномів (або сплайнів) на системі просторових неперетинних кривих), теорії наближення функцій кількох змінних з використанням інтерлінації функцій (для побудови математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за даними просторових кривих). В основі чисельної реалізації лежить інтерлінація функцій 3-х змінних з використанням даних системи просторових неперетинних кривих у вертикальних площинах.

В роботі розроблені і досліджені методи відновлення матричної функції від трьох змінних між заданою системою ліній, які описують задану систему

свердловин; з цього методу як частинний випадок впливає метод відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему свердловин методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних.

Сформульовані і доведені теореми про те, що оператори інтерлінації матричних функцій трьох змінних мають сліди цієї матричної функції в точках кожної із заданих ліній. В роботі проведено теоретичне порівняння методів інтерлінації матричних функцій, і вироблені рекомендації про те, які допоміжні функції в операторах матричних функцій краще використовувати.

Побудовано матричну математичну модель просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових кривих у вертикальних площинах за даними просторових неперетинних кривих методами інтерлінації функцій трьох змінних.

Запропоновано подальший розвитку методів відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему похилих свердловин методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних.

На основі запропонованих в дисертації математичних моделей розподілу корисних копалин вдосконалено метод оцінки запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин.

Розроблені математичні моделі і методи розв'язання задачі відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин як тривимірної функції методами інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних просторових кривих дозволяє значно приблизитись до загальної моделі розподілу досліджуваних об'єктів. Розроблені модифікації методів дозволяють на основі інформації про наявність об'єкту відновлювати відповідний шар тієї чи іншої корисної копалини.

Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та методи відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин впроваджені: у

держбюджетній науково-дослідній роботі, що виконувалася в рамках плану науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії.

Дана розробка може бути використана також при знаходженні оцінки запасів корисних копалин з урахуванням результатів буріння похилих свердловин, та проектуванні гірничих підприємств.

У роботі введено визначення просторової кривої та обрано для дослідження один з чотирьох типів похилих свердловин. Наведено опис кожного з видів кривих, що описують похилу свердловину.

У роботі пропонуються та досліджуються математичні моделі для опису структури залягання корисних копалин за допомогою аналізу розміщення просторових кривих. Математичним апаратом для опису математичних моделей є математичний апарат інтерлінації функцій трьох змінних.

За даними з кернів розглянутих типів похилих свердловин побудовано математичні моделі просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою рівномірно розміщених у просторі неперетинних кривих (похилих свердловин) за допомогою поліноміальної та сплайн-інтерлінації невідомої функції трьох змінних.

Розміщення просторових кривих є нерегулярним, тобто їх координати не мають явного аналітичного зв'язку. Як відомо, в цьому випадку задача побудови інтерполяційного поліному може не мати єдиного розв'язку. Тому побудовано та досліджено математичні моделі відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових неперетинних кривих методами інтерлінації функцій трьох змінних, які відрізняються високою точністю й імовірністю використання даних по кожній просторовій кривій, в залежності від глибини z , для рівномірно й нерівномірно розміщених у просторі неперетинних кривих.

У роботі побудовано математичні моделі просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою неперетинних просторових кривих за допомогою інтерлінації функцій з використанням дробно-

раціональних допоміжних функцій; математичні моделі просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул Д. Шепарда; побудовано математичні моделі просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул О.М. Литвина.

Аналіз побудованих математичних моделей показав необхідність побудови математичної моделі просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих.

Оператор інтерлінації, що запропонований у дисертаційній роботі дозволяє обчислювати значення функції від трьох змінних між кривими, якщо інформація про функцію задана слідами в цих кривих. При цьому, якщо розподіл визначається неперервною функцією, яка є поліномом степеня n за змінними x та y при кожному z , то оператор інтерлінації точно буде відновлювати таку функцію.

Результати, які наведені в роботі (4 розділ) містять деякі застосування інтерлінації функцій та чисельну реалізацію запропонованих методів; наведено обґрунтовані переваги її впровадження.

У роботі проведено обчислення запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин.

На підставі проведених досліджень і практичної реалізації представлених методів інтерлінації функцій розроблено методичне та програмне забезпечення, що використовується в навчальному процесі при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальністю «Нафтогазова справа» Української інженерно-педагогічної академії

Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 18 роботах: з них 7

статей (5 – у наукових журналах та збірниках наукових праць, які входять до переліку фахових видань України з фізико-математичних наук, 1 – у науковому журналі, який зазначений в переліку фахових видань України з технічних наук, 1 – у міжнародному науковому журналі); 11 – матеріали наукових конференцій.

Ключові слова: математичне моделювання, просторовий розподіл, методи інтерлінації, матриці-функції, сукупність корисних копалин, похилі свердловини, функції від трьох змінних.

Список публікацій здобувача

1. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 1. С. 61-67.

2. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 4. С. 39-48.

3. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Проблеми машинобудування. 2014. Том 17. Вип. 2. С. 33-39.

4. Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математичне моделювання тривимірного розподілу корисних копалин за даними про них в системі похилих свердловин // Бионика интеллекта. 2014. № 2(83). С. 83-87.

5. Черная Е.С. Вычислительная реализация метода восстановления 3D распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами с использованием линейной сплайн-интерлинации // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2015. Вып. 39. №11(208). С. 167-172.

6. Литвин О.М., Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу вмісту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерлінації функцій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6(1178). С. 46-50.

7. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій // Бионика интеллекта. 2017. № 2(89). С. 37-42.

8. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 163-166.

9. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної інтерлінації функції // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. С. 94-95.

10. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функції лінійних за змінними x та y // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2011. С. 93.

11. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y : тези доповідей. Харків: УПА, 2011. С. 12-13.

12. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу корисних копалин кори землі за

допомогою даних з кернів свердловин та інформації про розподіл на поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2012) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. С. 179-181.

13. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання 3D розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Інформатика та системні науки (ІСН-2013) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2013. С. 192-195.

14. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Про побудову операторів інтерлінації функцій трьох змінних між системою кривих у просторі та її застосування при розвідці корисних копалин з використанням похилих свердловин// Питання оптимізації обчислень (ПОО-ХЛ): матеріали і конференції. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2013. С. 148-149.

15. Черная Е.С. Методы построения математических моделей распределения полезных ископаемых на системе наклонных скважин. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. Part 2. М.:МІЕМ NRU HSE, 2013, P. 444-450.

16. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2014. С.315-319.

17. Lytvyn O.O., Shtepa N.I., Denisova O.I., Chorna O.S. Internal Earth structure renewal by means of core in inclined boreholes analysis. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. М.:МІЕМ NRU HSE, 2014, P. 655-663.

18. Литвин О.О., Чорна О.С. Інтерлінація функцій в математичному моделюванні просторового розподілу деякої сукупності корисних копалин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2016. С. 189-193.

ABSTRACT

Chornaya O.S. Mathematical modeling of spatial distribution of aggregate of minerals by methods of interconnection of matrix-functions. – Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

The dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on the specialty 01.05.02 «Mathematical modeling and computational methods». – Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy. Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2018.

In dissertation work the decision of the actual scientific and practical task of development of a mathematical model of spatial distribution of mineral resources by methods of intermingling of matrices of functions is proposed. The object of research in work is the process of restoration of the spatial distribution of the density of the investigated object between a system of unevenly spaced curves in vertical planes; the subject of the study is the mathematical modeling of the spatial distribution of the aggregate of minerals between the given spatial curves, each of which lies in the corresponding vertical plane, the interconnections of the functions of the three variables.

The research methods are based on the use of the theory of functional analysis (for the study and development of methods for assessing mineral reserves), computational mathematics (for obtaining the form of basis polynomials (or splines) on the system of spatial noncontinuous curves), the theory of approximation of the functions of several variables using the interpolation of functions (for the construction of mathematical models for restoring the distribution of the density of the investigated object according to the data of the spatial curves). The basis of the numerical implementation is the interconnection of the functions of 3 variables using the data of the system of spatial non-intersecting curves in vertical planes; SCM MATHCAD 15 when testing the developed algorithms.

In this work, methods for the restoration of a matrix function from 3 variables

between a given system of lines that describe a given well system are developed and investigated; From this method, as a partial case, follows the method of restoring the function of 3 variables between the system of given lines describing the well system using polynomial, global, and spline-interpolation functions of 3 variables.

Formulated and proved theorems that the operators of the interpolation of matrix functions of 3 variables have traces of this matrix function at the points of each given line.

In the paper, the theoretical comparison of the methods of interpolating matrix functions is carried out, and recommendations are made on which auxiliary functions in matrix functions operators are better to use.

A matrix mathematical model of the spatial distribution of the density of the investigated object between a system of spatial curves in vertical planes according to the data of spatial noncontinuous curves by methods of interpolating of functions of three variables is constructed.

Further development of the methods of restoring the function of 3 variables between the system of predetermined lines describing the system of inclined wells by the methods of polynomial, global and spline-interpolation of functions of 3 variables is proposed.

Based on the mathematical models of mineral resources proposed in the dissertation, the method of estimating mineral reserves according to the data from the cores of inclined wells has been improved.

The scientific results of the dissertation work are the further development of the methods of interpolating functions. The practical significance of the obtained theoretical results of the dissertation work is confirmed by the application of the theory of interpolation of functions of 3 variables to the solution of the problems of restoring the spatial distribution of the density of objects between the system of spatial curves in vertical planes.

This development can be effectively used, for example, also when finding the estimation of mineral resources taking into account the results of drilling of inclined wells, and the design of mining enterprises.

In the paper, the definition of the spatial curve was introduced and one of the four types of inclined wells was selected for study. A description of each of the types of curves describing a sloping well is given.

The mathematical models for describing the structure of deposits of minerals are proposed and studied using the analysis of space curves placement. A mathematical apparatus for describing mathematical models is a mathematical apparatus for interlinations of functions of three variables.

According to the data from the cores of the types of inclined wells considered, the mathematical models of the spatial distribution of the density of the investigated object between the system of evenly spaced non-crosswise curves (inclined wells) were constructed using polynomial and spline interpolation of an unknown function of 3 variables.

The placement of spatial curves is irregular, that is, their coordinates have no explicit analytical connection. As you know, in this case the task of constructing an interpolation polynomial may not have the only solution. Therefore, mathematical models of restoration of the distribution of the density of the investigated object between the system of spatial noncontinuous curves by methods of the interlineation of functions of three variables, which have high accuracy and the probability of using data for each spatial curve, depending on the depth, for uniformly and unevenly spaced non-intersecting spaces are constructed and investigated. curves

The mathematical models of the spatial distribution of the density of the investigated object between the system of non-intersecting spatial curves with the help of the interlinations of functions using fractional-rational auxiliary functions are constructed in the work; mathematical models of the spatial distribution of the density of the investigated object by means of the interlining of functions of 3 variables between non-intersecting curves unevenly spaced in space with the use of generalized global interpolation formulas D. Shepard; mathematical models of the spatial distribution of the density of the investigated object are constructed by means of the interlineation of functions of 3 variables between non-intersecting curves unevenly spaced in space with the use of generalized global interpolation formulas

O. M. Lytvyn. An analysis of the constructed mathematical models showed the necessity of constructing a mathematical model of the spatial distribution of minerals in terms of the methods of interlacing matrix-functions, each component of which depends on three variables on the system of curves.

The interlacing operator proposed in the dissertation allows you to calculate the value of a function from the three variables between the curves if the information about the function is given by the traces in these curves. In this case, if the distribution is determined by a continuous function, which is a polynomial of degree for variables and for each, then the interlocation operator will definitely restore such a function.

The results presented in this paper (section 4) contain some applications of the function's interlining and the numerical implementation of the proposed methods; The justified advantages of its implementation are given.

In the work, the calculation of mineral resources based on the data from the core of inclined wells.

Based on the research carried out and the practical implementation of the presented methods of function interlination, the methodical and software tools used in the educational process for the preparation of students and masters studying in the specialty "Nauvogazov case" of the Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy

The materials of the thesis are sufficiently detailed in 18 papers: 7 of them (6 in scientific journals and collections of scientific works, which are included in the list of professional editions of Ukraine in physical and mathematical sciences, 1 in international scientific journal, 11 - materials of scientific conferences.

Keywords: mathematical modeling, spatial distribution, methods of interlination, matrix-function, aggregate of minerals, inclined wells, functions of three variables.

List of publications of the applicant

1. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно

розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 1. С. 61-67.

2. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 4. С. 39-48.

3. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Проблеми машинобудування. 2014. Том 17. Вип. 2. С. 33-39.

4. Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математичне моделювання тривимірного розподілу корисних копалин за даними про них в системі похилих свердловин // Бионика интеллекта. 2014. № 2(83). С. 83-87.

5. Черная Е.С. Вычислительная реализация метода восстановления 3D распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами с использованием линейной сплайн-интерлинации // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2015. Вып. 39. №11(208). С. 167-172.

6. Литвин О.М., Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу вмісту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерлінації функцій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6(1178). С. 46-50.

7. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій // Бионика интеллекта. 2017. № 2(89). С. 37-42.

8. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали

конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 163-166.

9. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної інтерлінації функції // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. С. 94-95.

10. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функції лінійних за змінними x та y // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2011. С. 93.

11. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y : тези доповідей. Харків: УПА, 2011. С. 12-13.

12. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу корисних копалин кори землі за допомогою даних з кернів свердловин та інформації про розподіл на поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2012) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. С. 179-181.

13. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання 3D розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Інформатика та системні науки (ІСН-2013) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2013. С. 192-195.

14. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Про побудову операторів інтерлінації функцій трьох змінних між системою кривих у просторі та її застосування при розвідці корисних копалин з використанням похилих свердловин// Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL): матеріали і

конференції. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2013. С. 148-149.

15. Черная Е.С. Методы построения математических моделей распределения полезных ископаемых на системе наклонных скважин. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. Part 2. М.:МИЕМ NRU HSE, 2013, P. 444-450.

16. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2014. С.315-319.

17. Lytvyn O.O., Shtepa N.I., Denisova O.I., Chorna O.S. Internal Earth structure renewal by means of core in inclined boreholes analysis. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. М.:МИЕМ NRU HSE, 2014, P. 655-663.

18. Литвин О.О., Чорна О.С. Інтерлінація функцій в математичному моделюванні просторового розподілу деякої сукупності корисних копалин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2016. С. 189-193.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ.....	18
ВСТУП.....	20
1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ПО ТЕМІ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	31
1.1 Математичне моделювання в задачах дослідження сукупності корисних копалин.....	31
1.2 Огляд математичних методів і алгоритмів побудови траєкторії кривих у вертикальних площинах.....	40
1.3 Методи оцінки запасів сукупності корисних копалин.....	44
1.4 Висновки по розділу та постановка задач дисертаційного дослідження	54
2 ОПЕРАТОРИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ ЗІ СЛІД ІНТЕРЛІНАНТІВ.....	57
2.1 Проектування просторової кривої заданого вигляду.....	57
2.2 Математичне моделювання розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою поліноміальних інтерлінінтів на системі неперетинних ліній.....	64
2.2.1 Оператори інтерлінації функцій на системі неперетинних кривих, розміщених в одній площині.....	66
2.2.2 Оператори інтерлінації функцій на системі неперетинних кривих, розміщених довільним чином.	71
2.3 Методи узагальнень глобальної формули Шепарда для системи неперетинних кривих.	77
2.4 Методи узагальнень глобальної інтерполяційної формули О.М.Литвина для системи неперетинних кривих.....	86
2.5. Оператори наближення функцій з використанням сплайн-інтерлінації функцій.....	92
2.5.1 Алгоритм побудови операторів сплайн-інтерлінації функцій.....	93
2.5.2 Оператори сплайн-інтерлінації функцій на системі неперетинних кривих у вертикальних площинах.....	95
2.6 Висновки по розділу.....	102
3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ	

СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН МЕТОДАМИ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ.....	104
3.1 Теоретичні твердження.....	104
3.2 Оператори інтерлінації функцій на системі кривих, розміщених в одній площині	114
3.3 Висновки по розділу.....	118
4 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ	120
4.1 Результат побудови інтерлінаційних операторів для нерівномірно розміщених просторових кривих	120
4.2 Моделювання родовищ і оцінка запасів	126
4.3 Обчислення запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин.....	128
4.4 Висновки по розділу.....	134
ВИСНОВКИ	135
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.	137
ДОДАТОК А. Елементи бурової свердловини, історичні умови і призначення похило спрямованих свердловин.....	148
ДОДАТОК Б. Результат побудови інтерлінаційних операторів для нерегулярно розміщених похилих свердловин.....	158
ДОДАТОК В. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи.....	164
ДОДАТОК Г. Список власних публікацій.....	166

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

\forall	– квантор загальності «для всіх»;
\exists	– квантор існування «існує»;
$\exists!$	– існує і єдиний;
\Rightarrow	– впливає;
\Leftrightarrow	– еквівалентно;
\wedge	– логічне «і» ;
\vee	– логічне «або» ;
R	– множина дійсних чисел $x \in R \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$;
R^n	– евклідов n - вимірний простір $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \Leftrightarrow x_i \in R, i = \overline{1, n}$;
N	– множина натуральних чисел, $N = \{1, 2, \dots\}$;
$\overset{0}{N}$	– $N \cup \{0\}$;
\emptyset	– пуста множина;
$\{x : P_x\}, \{x P_x\}$	– сукупність елементів x з властивістю P_x ;
$x \in A$	– елемент x належить множині A ;
$x \notin A, \overline{x \in A}$	– елемент x не належить множині A ;
$A \cap B$	– переріз множин A і B (їхня спільна частина);
$A \cup B$	– об'єднання множин A і B ;
$A \subset B$	– множина A є частиною множини B ;
$A \setminus B$	– $\{x \in A : x \notin B\}$ різниця множин A і B ;
\overline{A}	– замикання множини A ;
$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$	– символ Кронекера, $\delta_{i,i} = 1, \delta_{i,j} = 0$, якщо $i \neq j$;
I	– тотожний оператор;
$C(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \in R^n$;
$C^r(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \in R^n$ разом із частинними

похідними порядку r ;

$C^{(r,m,n)}(G)$ – простір функцій, неперервних у $G \subset R^3$ разом із частинними похідними порядку r по першій змінній, m – по другій, n – по третій;

АСУ – автоматизовані системи управління;

ММ – математична модель;

ЕОМ – електронна обчислювальна машина.

ВСТУП

В різних галузях обчислювальної математики знаходять застосування оператори, які відновлюють функції n змінних за їхніми слідами та слідами їхніх нормальних похідних до заданого порядку N на M m -вимірних поверхнях в R^n . Операція побудови вказаних операторів (для $m=0, n \geq 1$) названо інтерлінацією функцій. За останні десятиліття теорія інтерлінації функцій була застосована під час побудови структур наближених розв'язків граничних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку областей складної форми [1].

Неперервно розміщені у просторі експериментальні дані використовуються у багатьох областях для відновлення неперервних поверхонь. У цих нерегулярно розміщених точках можуть бути задані значення різної фізичної, хімічної тощо природи.

В середині ХХ століття були закладені основи математичного моделювання родовищ. Значний вклад в цей розвиток внесли В.М. Крейтер, Д.Кріг, Ж. Матерон, М. Давід та ін. [2-5]. У більшості цих робіт вміст сполуки в будь-якому об'ємі надр $V(x, y, z)$, що знаходиться в межах рудного тіла, розглядався як величина випадкова, яка до проведення вичерпного опробування може бути оцінена лише з деякою вірогідністю. При цьому, можна задати розподіл вірогідностей $Fv(c)$, які відповідають різним по величині значенням цього вмісту, а величину об'єму $V(x, y, z)$ – прийняти від'ємною – від об'єма проби (або її частини) до об'єма блока тощо [6].

Актуальність теми. Розвиток мінерально-сировинної бази України потребує удосконалення існуючих геохімічних методів пошуку корисних копалин; розробки нових теоретичних основ як фундаменту для розвитку та створення системи новаторських, більш економічних та ефективних методів пошуку корисних копалин; аналітичного апарату обробки рядів експериментальних даних, що характеризуються невизначеністю не тільки у

вихідних даних і описі об'єкта, а й в одержуваних результатах через помилки вимірювання і обробки.

Геоінформаційні системи відрізняються від інших інформаційних систем саме тим, що володіють ефективними можливостями аналізу просторових даних і на його основі виконують просторове моделювання об'єктів і явищ [7].

Розвинені геоінформаційні системи містять багатий набір різноманітних аналітичних засобів для проведення операцій з географічними об'єктами. Наприклад, система ArcGIS (ESRI) включає доступні в освоєнні модулі Spatial Analyst, 3D Analyst, Network Analyst, Geostatistical Analyst і багато засобів геопроектингу. При цьому аналітичні засоби можуть бути як загального, так і спеціального призначення [7].

Відзначимо, що значний вклад в розвиток дослідження просторового розподілу щільності досліджуваних об'єктів внесли Е. Мітчел [8]; О.М. Литвин [9] – [11],[20]-[31], А.В. Анциферов [13], Richard C. Selley [14], D. Gubbins [15], G. Nolet [16], James G. Berryman [17], С.В.[Шаклеин 18], D. Shepard [19], М.Я.Азаров, Ю.Н.Воскресенський, А.А. Глухов, О.О. Литвин, Н. І. Штепа [20-28] та інші.

Не дивлячись на значні успіхи в відновленні неперетинних поверхонь, існує велика кількість недосліджених задач. Безпосереднє використання інформації про розподіл щільності досліджуваного об'єкту засобами інтерлінації функцій, що досліджені для системи вертикальних ліній, не можуть бути застосовані на системі кривих у вертикальних площинах.

Ефективне вирішення сучасних завдань вимагає використання нових математичних методів, які враховують можливості сучасних комп'ютерів і навіть те, в якому вигляді задається вихідна інформація (сліди функції, проекції, знімки, томограми тощо).

Таким чином, актуальною є задача розробки та дослідження нових методів побудови математичних моделей розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних на системі кривих у вертикальних площинах.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова математичних моделей просторового розподілу сукупності корисних копалин на основі даних свердловинного буріння методами інтерлінації матриць-функцій.

Для досягнення сформульованої мети в дисертаційній роботі необхідно вирішити такі задачі:

побудувати математичні моделі просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції між системою рівномірно розміщених у просторі неперетинних кривих за допомогою поліноміальної та сплайн-інтерлінації;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції між системою неперетинних просторових кривих за допомогою інтерлінації функцій з використанням дробно-раціональних допоміжних функцій;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул Д. Шепарда;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул О.М. Литвина;

– побудувати математичну модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих;

– зробити оцінку об'єму запасів корисних копалин;

– перевірити ефективність запропонованих моделей за допомогою обчислювального експерименту на основі створених дисертантом програм, які

реалізують вказані вище методи побудови математичних моделей.

Об'єкт дослідження – процес відновлення просторового розподілу щільності сукупності корисних копалин як тривимірної функції між системою нерівномірно розміщених просторових кривих у вертикальних площинах.

Предмет дослідження – інтерлінаційні методи побудови математичних моделей просторового розподілу сукупності корисних копалин між заданими похилими свердловинами.

Методи дослідження. Теоретичні дослідження опираються на загальні методи функціонального аналізу (для дослідження та розробки методів оцінки запасів корисних копалин), обчислювальної математики (для отримання вигляду базисних поліномів (або сплайнів) на системі просторових неперетинних кривих), теорії наближення функцій кількох змінних з використанням інтерлінації функцій (для побудови математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за даними просторових кривих). В основі чисельної реалізації лежить інтерлінація функцій трьох змінних з використанням даних системи просторових неперетинних кривих у вертикальних площинах.

Наукова новизна одержаних результатів. У рамках вирішення завдань дисертаційного дослідження отримані такі наукові результати, що виносяться на захист:

– уперше розроблено і досліджено метод відновлення матричної функції від трьох змінних між заданою системою ліній, які описують задану систему свердловин; з цього методу як частинний випадок впливає метод відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему свердловин методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних; проведено теоретичне порівняння методів інтерлінації матричних функцій, і вироблені рекомендації про те, які допоміжні функції в операторах матричних функцій краще використовувати;

– уперше сформульовані і доведені теореми про те, що оператори інтерлінації матричних функцій трьох змінних мають сліди цієї матричної

функції в точках кожної із заданих ліній;

– уперше побудовано матричну математичну модель просторового розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових кривих у вертикальних площинах за даними просторових неперетинних кривих методами інтерлінації функцій трьох змінних;

– набули подальшого розвитку методи відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему похилих свердловин методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних, що на відміну від попередніх підходів надає можливість на основі інформації про наявність об'єкту відновлювати відповідний шар тієї чи іншої корисної копалини;

– вдосконалено метод оцінки запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин на основі запропонованих в дисертації математичних моделей їх розподілу, що надає можливості для оптимізації вибору напрямків видобутку корисних копалин.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані особисто дисертантом. У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать такі результати: в [30] запропоновано метод моделювання просторового розподілу корисних копалин за допомогою сплайн-інтерлінації на системі похилих свердловин, розміщених, як в одній площині, так і довільним чином; досліджено властивості побудованих математичних моделей; в [32] проведено доведення лем і теорем про властивості узагальнених на тривимірний випадок формул О.М. Литвина і Д. Шепарда, а також проведено тестування і аналіз отриманих чисельних результатів, проведено обчислювальний експеримент по побудові математичних моделей розподілу щільності об'єктів та на основі даних просторових неперетинних кривих; в [33] отримано оператор інтерлінацій функцій трьох змінних між системою просторових кривих, та проведено доведення основних теорем; в [34] розроблено методи побудови тривимірної моделі розподілу корисних копалин на основі даних у кожній точці заданої

системи похилих свердловин і методів інтерлінації функцій трьох змінних, а також проведено тестування і аналіз отриманих чисельних результатів, проведено обчислювальний експеримент по побудові математичних моделей розподілу щільності об'єктів та на основі даних просторових неперетинних кривих; в [35] запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами; в [36] побудовано відповідні оператори інтерлінації матриць-функцій, доведено теореми про їх інтерлінаційні та наближуючі властивості; в [37, 39, 40] отримано математичне означення просторової кривої, введено оператори сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних на системі просторових кривих, а також покроковий метод побудови цих операторів; в [38] запропоновано метод побудови математичної моделі відновлення розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції у вертикальних площинах з використанням інтерлінації функцій між системою довільних неперетинних просторових кривих, що оснований на використанні обмежених дробово-раціональних допоміжних функцій, і який інтерлінує невідомий розподіл в кожній з просторових кривих; в [41] отримано оператор інтерлінації функцій трьох змінних, який дозволяє відновлювати розподіл щільності корисних копалин як тривимірної функції у вертикальних площинах між просторовими кривими; в [42] сформульовано леми і теореми про властивості узагальнених на тривимірний випадок формул О.М. Литвина і Д. Гепарда; в [43] отримано узагальнену глобальну формулу Д. Шепарда для системи просторових кривих; в [44] запропоновано оператор інтерлінації матричної функцій кожна компонента якої залежить від трьох змінних на вказаній системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх просторових кривих, введено та досліджено допоміжні функції.

Статті [31, 32, 33, 34, 36, 37] та тези доповідей [33-44, 48] опубліковані

спільно із Литвином Олегом Олеговичем, особистий внесок Литвина О.О. наведено в його дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук [49].

Усі співавтори із зазначеним особистим внеском здобувача згодні.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися на таких міжнародних конференціях і форумах:

– II, III, IV, V, VII Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформатика та системні науки» ІСН (Україна, м. Полтава, 2011-2014 рр., 2016 р.);

– молодіжній математичній школі «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)» (Україна, м. Кацивелі, 2011 р.);

– XLIV науково-практичній конференції науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії (Україна, м. Харків, 2011 р.);

– Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)» (Україна, Київ, 2013 р.);

– International Scientific and Practical Conference Innovative Information Technologies (Чехія, м. Прага, 2013, 2014 рр).

На підставі проведених досліджень і практичної реалізації представлених методів та інформаційних технологій розроблено методичне та програмне забезпечення, що використовується в навчальному процесі Української інженерно-педагогічної академії при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальністю «Нафтогазова справа».

Теоретичне значення роботи. Дисертантом розроблений новий метод побудови просторового розподілу щільності корисних копалин, який полягає в застосуванні апарату інтерлінації функцій, який дозволяє побудувати просторові математичні моделі відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин між системою просторових кривих у вертикальних площинах. Запропонований метод побудови просторового розподілу щільності сукупності корисних копалин для функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ із

заданими слідами $F_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$ на системі просторових неперетинних кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M}$$

може бути застосований для випадку довільного розміщення вказаних неперетинних просторових кривих.

Всі теоретичні результати подані у вигляді визначень, теорем, властивостей, описів алгоритмів, що в значній частині приводяться вперше.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені математичні моделі і методи розв'язання задачі відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин як тривимірної функції методами інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних просторових кривих дозволяє значно приблизитись до загальної моделі розподілу досліджуваних об'єктів. Розроблені модифікації методів дозволяють на основі інформації про наявність об'єкту відновлювати відповідний шар тієї чи іншої корисної копалини.

Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та методи відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин впроваджені: у держбюджетній науково-дослідній роботі, що виконувалася в рамках плану науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії; в навчальному процесі при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальністю «Нафтогазова справа» Української інженерно-педагогічної академії.

Дана розробка може бути використана також при знаходженні оцінки запасів корисних копалин з урахуванням результатів буріння похилих свердловин, та проектуванні гірничих підприємств.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалася на кафедрі вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії. Як виконавець здобувач проводив дослідження у рамках держбюджетної теми № 13-01 «Розробка та дослідження нового методу розвідки і розробки родовищ корисних копалин на основі інтерлінації функцій», яка входить до плану НДР кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно- педагогічної академії (держбюджетна тема № ДР 0109U008661, 2012-2015).

Публікації. Матеріали дисертації достатньо повно опубліковані у 18 роботах, з них 7 статей (5 – у наукових журналах та збірниках наукових праць, які входять до переліку фахових видань України з фізико-математичних наук [31, 32, 33, 34, 37], 1 – у науковому журналі, який зазначений в переліку фахових видань України з технічних наук [36], 1 – у міжнародному науковому журналі [35], 11 – матеріали наукових конференцій [30,38-46, 48]).

Структура дисертації. Дисертація включає вступ, чотири розділи, висновки по роботі, список використаних джерел із 104 найменувань (10 с.), 4 додатки (24 с.), 23 ілюстрації (24 с.). Загальний обсяг роботи складає 170 сторінок, з них 133 сторінок основного тексту.

У *першому розділі* на базі вивчення літературних джерел проведено аналіз предметної області. Розглянуто питання побудови математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових неперетинних кривих. Зроблено огляд математичних методів і алгоритмів побудови траєкторії кривих у вертикальних площинах та методів оцінки запасів сукупності корисних копалин, а також наведена постановка задачі на дослідження.

У *другому розділі* введено визначення просторової кривої та обрано для дослідження один з чотирьох типів похилих свердловин. Наведено опис кожного з видів кривих, що описують похилу свердловину.

У роботі побудовані математичні моделі відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою інтерлінації функцій

$f(x, y, z)$ між системою нерівномірно розміщених неперетинних просторових кривих $(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$ з використанням кусково-лінійних або кусково-квадратичних за змінними x, y допоміжних функцій та даних просторових кривих Γ_k . Побудована математична модель відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за даними неперетинних просторових кривих та інтерлінації функцій трьох змінних узагальненими поліномами між системою рівномірно розміщених просторових кривих.

У роботі подано методи узагальнень глобальної формули Д. Шепарда та глобальної формули О.М. Литвина для системи неперетинних кривих. За допомогою даного методу можливе відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту з використанням даних просторових кривих.

Всі теоретичні твердження розділу 2 доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм у системах комп'ютерної математики MATHCAD. Вказані програми наведені з детальним описом в Додатках до дисертації.

У *третьому розділі* досліджено застосування теорії інтерлінації функцій 3-х змінних до розв'язання технічних задач таких, як відновлення в кожній точці (x, y, z) між заданою системою просторових кривих Γ_k за даними матриці-функції за змінною z , де z – глибини просторової кривої, $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}$, яке має велике практичне значення на сьогоднішній день.

Очевидними стали відсутність простих розв'язків задачі моделювання, недостатність жорстких, нехай навіть розгорнутих, багаторівневих схем моделювання. У такій ситуації доцільніше виробити системний підхід - спробувати знайти і зафіксувати не каркас майбутньої моделі, а основні принципи її побудови, створити єдине середовище моделювання, здатне вмістити те цінне, що вже є або з'явиться в окремих технологічних моделях.

У роботі вперше побудовано математичну модель просторового

розподілу щільності об'єктів, заданих своїми слідами лише у заданій системі просторових кривих, кожна з яких лежить у відповідній вертикальній площині, і які не перетинаються одна з одною.

У *четвертому розділі* наведені деякі застосування інтерлінації функцій та чисельна реалізація запропонованих методів; обґрунтовані переваги її впровадження.

У роботі проведено обчислення запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ПО ТЕМІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичне моделювання в задачах дослідження сукупності корисних копалин

Моделювання широко використовуються в різних сферах людської діяльності, особливо в сферах проектування і управління, де особливими є процеси ухвалення ефективних рішень на основі отримуваної інформації.

Модель завжди будується з певною метою, яка робить вплив на те, які властивості об'єктивного явища виявляються істотними, а які – ні. Модель є як би проекцією об'єктивної реальності під певною точкою зору. Іноді залежно від цілей можна отримати ряд проекцій об'єктивної реальності, таких що вступають в протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, у яких кожна проекція виділяє істотне для певної мети з множини несуттєвої.

Метою моделювання є отримання, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем [50].

Математичне моделювання – це засіб вивчення реального об'єкту, процесу або системи шляхом їх заміни математичною моделлю, зручнішою для експериментального дослідження за допомогою ЕОМ.

Математична модель є наближеним представленням реальних об'єктів, процесів або систем, вираженим в математичних термінах і зберігаючим істотні риси оригіналу. Математичні моделі в кількісній формі, за допомогою логіко-математичних конструкцій, описують основні властивості об'єкту, процесу або системи, його параметри, внутрішні і зовнішні зв'язки.

У загальному випадку математична модель реального об'єкту, процесу або системи представляється у вигляді системи функціоналів

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0,$$

де X – вектор вхідних змінних, $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]^t$,

Y – вектор вихідних змінних, $Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_N]^t$,

Z – вектор зовнішніх дій, $Z = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_N]^t$,

t – координата часу.

Побудова математичної моделі полягає у визначенні зв'язків між тими або іншими процесами і явищами, створенні математичного апарату, що дозволяє виразити кількісно і якісно зв'язок між тими або іншими процесами і явищами, між тими, що цікавлять фахівця фізичними величинами, і чинниками, що впливають на кінцевий результат [52].

Математичне моделювання займає провідне місце в гірничо-економічному аналізі. Цей метод дає можливість вибирати оптимальні режими роботи гірничотехнічного устаткування, визначати найкращі параметри реконструкції тих, що діють і будівництва нових гірничодобувних підприємств, вирішувати завдання комплексного розвитку гірничодобувних регіонів. Математичне моделювання в гірській справі застосовується як в плануванні і проектуванні, так і в управлінні, де є основним елементом при розробці АСУ. Математичне моделювання гірського виробництва удосконалюється у напрямі динамізації моделей і введення в них зворотних зв'язків, визначення раціональної математичної форми моделей, розробки методів їх адекватного дослідження на ЕОМ, визначення необхідної міри деталізації моделей, обліку принципів системного підходу і чинника надійності при моделюванні.

Результати тих або інших регіональних досліджень стають найбільш інформативними тоді, коли вони отримані на основі вивчення природного об'єкту в цілому, в нашому випадку – кернів свердловинного буріння [53].

Керн – колонка породи, що утворюється в результаті кільцевого руйнування забою свердловини. Від слова " колонка" сталося і найменування колонкового буріння.

Безкернаве буріння – буріння, при якому гірська порода руйнується по усій площі забою.

Колонкове буріння – буріння, при якому гірська порода руйнується по кільцевому забою зі збереженням керна.

У додатку Б наведено елементи бурової свердловини, історичні умови і призначення похило спрямованих свердловин.

Модель, що не враховує місця і ролі описуваного родовища в загальній структурі керна, неминуче буде однобокою, якщо не помилковою, в певних базових положеннях.

Таким чином, модель, створена без врахування результатів регіонального узагальнення накопиченої інформації, є, по-перше, неповною, оскільки виходить з уявлення про абсолютну унікальність родовища і тим самим різко скорочує інформаційну базу для узагальнення, концентрується на свідомо неповних вибірках даних виключно по досліджуваному об'єкту, допускає «пропуски» покладів і ін., по-друге, не завжди вірною, оскільки допускає невірні концептуальні моделі будови окремих покладів навіть на стадії високої вивченості.

Спроби розробки досить комплексних технологічних моделей в минулому вже робилися, проте особливих успіхів не принесли. Абсолютно очевидною стали відсутність простих рішень задачі моделювання, недостатність жорстких, нехай навіть розгорнутих, багаторівневих схем моделювання. У такій ситуації доцільніше виробити системний підхід – спробувати знайти і зафіксувати не каркас майбутньої моделі, а основні принципи її побудови, створити єдине середовище моделювання, здатне вмістити те цінне, що вже є або з'явиться в приватних технологічних моделях [55]. Існуючі моделі технологічних і інших процесів у вугільній шахті відрізняються крайньою різноманітністю в постановках, використовуваному математичному апараті, а також використовуваних засобах розробки і реалізації, і спроба прямого їх об'єднання (при скільки завгодно хорошій концепції) була б нереальна. Рівень, на якому повинне здійснюватися

стикування моделей, має бути глибшим, ніж просте узгодження входів і виходів.

Універсального розрахункового алгоритму, що описує морфологію покладу не існує. Завдання побудови об'ємних моделей складчастих структур є інваріантним.

Побудова достовірної моделі можлива тільки шляхом залучення додаткової (апріорною) інформації. Тому оптимальним видається наступний шлях геометризації складчастих порушень:

- формується інформаційна модель складки (точки підперерізу, об'єктів, що належать базовому класу: точка геологічних спостережень);
- використовуючи стандартні математичні методи апроксимації і інтерполяції отримують спрощену модель складки;
- початкова модель піддається комп'ютерній трансформації виходячи з представлень фахівця, що не формалізуються. В ході рішення цієї задачі інформація про пликативне порушення не відособляється в геологічній базі даних (приміром в геологічних колонках бурових свердловин).

Для автоматизованої побудови пликативних структур розроблені і програмно реалізовані наступні алгоритми:

- а) формування масиву початкових даних по свердловинах/точках геологічних спостережень;
- б) розбиття масиву початкових даних на маркіруючі шари;
- в) виділення як окремого шару так і будь-якої довільної пачки шарів;
- г) вибору методу інтерполяції/екстраполяції початкових даних;
- д) побудови моделей поверхонь маркірованих шарів методами:
 - 1) найменших квадратів;
 - 2) сплайн функції;
 - 3) найближчого району;
 - 4) триангуляції;
 - 5) крайгинга;
 - 6) поверхонь Шепарда;

- 7) поліноміальній регресії;
- 8) згладжування по радіусах впливу вихідних точок.

Математичне моделювання, тобто вирішення геофізичних завдань за допомогою математики, настільки складне, що тут використовуються передові її досягнення і найвищий рівень комп'ютеризації. На геофізичних завданнях неабиякою мірою удосконалюється математичний апарат. Математичне вирішення прямих завдань, тобто визначення параметрів фізичного поля по відомих фізичних властивостях, розмірах і формі геологічних об'єктів, хоча інколи дуже складно, але однозначно. У той же час, один і той же розподіл параметрів фізичного поля може відповідати різним співвідношенням фізичних властивостей і розмірів геологічних об'єктів. Іншими словами, математичне рішення зворотної задачі геофізики (як і взагалі математичної фізики), тобто визначення розмірів геологічних об'єктів і властивостей порід, що складають їх, по полю, не лише значно складніше, але і, як правило, неоднозначно [53].

Геологи, проектувальники й будівельники повинні оцінювати кожне родовище як комплекс корисних копалин. Дійсно, поряд із основною сировиною (вугіллям, залізними, мідними рудами тощо) всі складові речовини як у рудному тілі, так і в розкривних та вмісних породах, можуть бути корисними для народного господарства. Адже супутні компоненти (будівельні, хімічні та ін.) за вартістю часто рівноцінні основній корисній копалині. У той же час розкривні та вмісні породи часто вважаються відходами гірничодобувних підприємств і їх, як правило, складають у відвали.

Площі під відвалами бувають значно більшими, ніж площі власне кар'єрних розробок. За деякими оцінками, при видобуванні корисних копалин щорічно на поверхню Землі виймається 150 млрд. так званих "пустих" порід. На початку XXI ст. загальна кількість піднятих на поверхню порід зросла у 4-6 разів. Із цієї величезної маси реалізується у вигляді продукції (тобто іде у виробництво) не більше 5%. Це демонструє

потенційні можливості добувної промисловості при комплексній експлуатації родовищ [55].

За рахунок комплексної розробки покладів в Україні виготовляють вапнякові добрива, формувальні матеріали для лиття, шляховий і будівельний щебінь, цеглу тощо. При комплексній оцінці деякі родовища, які раніше вважалися непромисловими, переводяться в економічно рентабельні, оскільки містять певні дефіцитні для України супутні компоненти - апатити, фосфорити, боксити.

Однак, повністю використовувати відвали як сировинні ресурси при нинішньому рівні розвитку науки і виробництва неможливо, тому площі під відвалами, як і всі землі порушені гірничими роботами, повинні рекультивуватися.

Однією із основних вимог до розробки родовищ корисних копалин є застосування найбільш раціональних і ефективних методів вилучення сировини з надр. Справа в тім, що через не досить досконалі методи добування частина розвіданих запасів корисних копалин залишається в забоях і кар'єрах. Серед них - кам'яне і буре вугілля, залізні руди, калійні солі та інші види сировини. Боротьба за зменшення цих втрат є важливою ланкою охорони надр. Цьому сприяють такі заходи як удосконалення організації робіт, впровадження нових технологій видобутку [55].

Скажімо, при розробці нафтових родовищ значна кількість нафти залишається в надрах. Застосування нових фізико-хімічних і теплових методів підтримування пластового тиску в процесі експлуатації нафтових родовищ дало змогу збільшити видобуток нафти на 10-25%. Проводиться також вторинне добування нафти на старих відпрацьованих родовищах за допомогою обводнення, нагнітання газу, пари, теплових методів впливу на пласт (вогневе витіснення нафти) тощо.

Більшість видів мінеральної сировини багатоконпонентні. Це, зокрема, руди чорних і кольорових металів, нафта, газ, вугілля, горючі сланці, солі тощо. іноді буває так, що загальна цінність супутніх елементів

перевищує вартість основної сировини. Повнота вилучення супутніх компонентів визначає ступінь комплексності використання даної сировини.

На ділянках, де виявлено ознаки корисних копалин, здійснюють пошуково-розвідувальні роботи. Якщо вони підтвердили наявність значних скупчень цих копалин, то розпочинають наступний етап робіт – РОЗВІДКУ.

Розвідка необхідна для того, щоб визначити форму і розміри тіл, вміст у них корисних копалин, розподіл рудних мінералів, підрахувати середній вміст корисних компонентів і загальні запаси, тобто загальну масу (в тоннах або кілограмах) кожного металу в родовищі.

Розвідувальні роботи починають зі складання детальної геологічної карти родовища. Потім здійснюють гірничі роботи і буріння свердловин.

Якщо рудні тіла розташовані близько до поверхні і покриті тонким шаром наносних порід і ґрунту, то копають на певній відстані одна від одної канави глибиною 1-3 м, а іноді й більше; якщо товщина наносів становить 5-10 м і більше (до 30-40 м), то копають вертикальні виробки прямокутної форми – шурфи.

Розвідка глибших горизонтів рудних тіл здійснюється за допомогою великих вертикальних виробок – шахт. Якщо рудне тіло розташоване на крутому схилі, то його розвідують за допомогою горизонтальної гірничої виробки, яка має вихід на поверхню, – штольні.

Для розвідки найглибших частин родовищ використовують переважно буріння свердловин спеціальною (колонковою) трубою з коронкою, зміцненою на кінці алмазами або твердим сплавами. Обертаючись, труба поступово заглиблюється в породи, а всередині труби залишається круглий стовпчик породи – керн. За ним визначають, які породи є на тій чи іншій глибині, вміст у них корисних компонентів тощо. На рудних родовищах свердловини бурять до глибини 1000 м і більше. В разі розвідки нафтових і газових родовищ вони досягають 3-4 км і більше [56].

Пласти простої будови характеризуються однорідним складом і

відсутністю в них прошарків інших порід. Складні пласти представлені декількома верстами вугілля, розділеними прошарками інших порід. Характерною особливістю дуже складних пластів є перешарування вугільних прошарків інших порід.

У асоціації з вугільними верстами в будові складних та дуже складних пластів здебільшого беруть участь пісковіково–глинисті та перехідні за складом вуглисті породи.

За характером будови більшість вугільних родовищ подібні, в зв'язку з чим їх типовий розріз можна представити в наступному вигляді: біля підніжжя вугільних пластів залягають аргіліти або алевроліти, рідко пісковики, вище розташовуються власне вугільні пласти, які, як правило перекриваються пісковиками глинистими сланцями, вапняками, мергелями, іноді – каолінітами. Вугільні пласти містять конкреції ні включення піриту, сидериту, а також вапняків або торфо-доломітові тіла округлої, неправильної форми (рисунок 1.1).

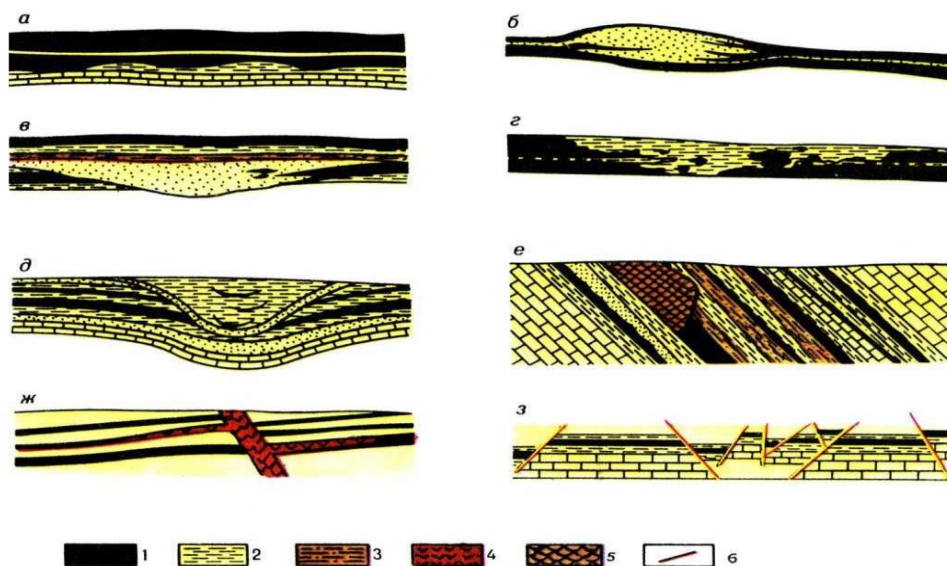


Рисунок 1.1 – Ускладнення морфології і залягання вугільних пластів в результаті: а)нерівностей ложа торфовища; б)впровадження у вугілля піщаників; г)розмивів; д)карстових просілів в породах, що підстиляють вугленосні відкладення; е)вигорання вугілля; ж)впровадження магматичних тіл; з)мелкоамплитудной тектонічною порушеності;
1)вугілля, 2)глина, 3)алевроліт, 4)магматичні породи,
5)<<горельники>>, 6)розривні порушення

Для вугільних родовищ характерним є велика різноманітність умов залягання, які зумовлюють спосіб і системи розробки.

Геометризації підлягають такі основні показники: форма покладу, потужність пласта, вміст золи, структурні показники пласта і вміщуючих порід, насамперед порід покрід покрівлі. Провідним елементом графічної моделі вугільних родовищ служить гіпсометричний план підосви або покрівлі пласта.

Підрахунок запасів корисної копалини є важливою і відповідальною операцією, яка завершує всебічне вивчення родовища і визначає його промислову цінність. Підрахунок запасів підпорядкований основній вимозі – строгому обліку багатств надр, раціональному і комплексному їх використанню [59].

Підрахунок запасів здійснюють на кожній стадії розвідки і розробки родовища. Він є заключним етапом проведення геологорозвідувальних робіт.

Підрахунок запасів проводять з метою:

- оцінки родовища і обґрунтування проекту підприємства;
- обґрунтування експлуатаційних кошторисів, виробничих і капітальних затрат;
- обліку руху запасів і планування видобутку;
- проведення практичних розрахунків при експлуатації родовища.

Основні завдання підрахунку запасів полягають у визначенні:

- кількості корисної копалини в надрах з поділом її за сортами і категоріями розвіданості;
- якості корисної копалини;
- технологічних властивостей корисної копалини;
- геологічних і гірничотехнічних умов залягання, які визначають правильний вибір способу і послідовність його відпрацювання;
- ступеня достовірності параметрів, які характеризують кількість і

якість корисної копалини і її промислову цінність.

У даній роботі вважається справедливою наступна гіпотеза: вважаються відомими функції $\gamma_k(z), k = \overline{1, N}$ у залежності від глибини z , у кожній просторовій кривій $\Gamma_k(z), k = \overline{1, N}$.

У роботі пропонуються та досліджуються математичні моделі для опису структури залягання корисних копалин за допомогою аналізу розміщення похилих свердловин. Математичним апаратом для опису математичних моделей є математичний апарат інтерлінації функцій трьох змінних.

1.2 Огляд математичних методів і алгоритмів побудови траєкторії кривих у вертикальних площинах

У [59-63] досліджено декілька методів і алгоритмів побудови траєкторії просторових кривих. В процесі дослідження в окремих точках кривих вимірюються глибина I , кут u і азимут a (де азимут – це кут між площиною меридіана точки спостереження і вертикальною площиною, що проходить через цю точку і спостережуваний об'єкт). В результаті отримуємо масив $\{I_i, u_i, a_i\}, i = 0, 1, 2, \dots, N$, де N – число вимірів (число точок виміру), i – порядковий номер точки виміру. Завдання побудови траєкторії просторової кривої полягає в тому, щоб за відомим масивом визначити координати відповідних точок в прямокутній системі координат XYZ , пов'язаній з вершиною просторової кривої.

У простих методах для визначення приростів координат використовуються результати виміру кута і азимута в двох сусідніх крапках (двоточкові методи). У точніших і відповідно складніших методах використовуються результати вимірів за більшим числом крапок.

Розглянемо основні методи визначення координат, приведені у вітчизняній і зарубіжній літературі.

Введемо до розгляду дві основні групи кривих. До першої відносяться

криві звичайного типу, що представляють криву лінію, розташовану в одній вертикальній площині, тобто плоскі профілі; до другої – профілі просторового типу, що представляють просторову криву лінію [62-63].

Основні типи плоских профілів наведені на рисунках 1.2.

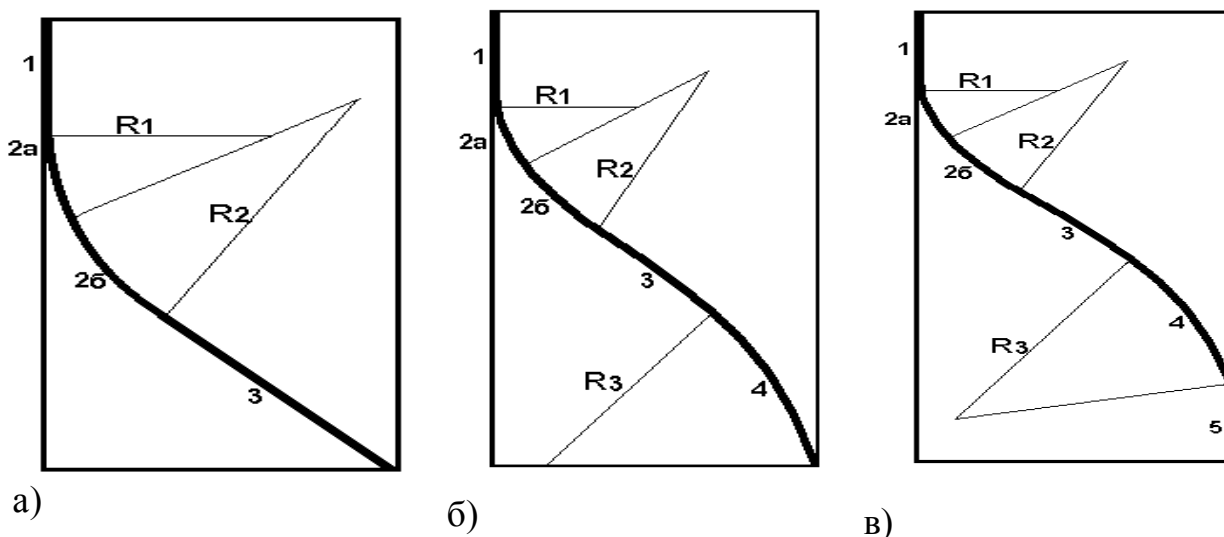


Рисунок 1.2 – Профілі свердловин: а) трьохінтервальний профіль; б) чотирьохінтервальний профіль; в) п'ятиінтервальний профіль

Профіль першого типу – трьохінтервальний (рисунок 1.2, а) – складається з трьох ділянок: вертикального – 1, ділянки набору кута – 2 і прямолінійно-похилої ділянки – 3. Характерною особливістю є включення ділянки набору кута неорієнтованими компонованнями в ділянку 2, тобто ділянка набору кута складається з двох: на першому (2а) проводиться набір кута з отклонітеля (орієнтовано), на другому (2б) – набір кута неорієнтованими компонованнями.

Профіль другого типу (рисунок 1.2, б) – чотирьохінтервальний – складається з чотирьох ділянок: вертикального – 1, набору кута – 2, стабілізації – 3 і зменшення кута – 4.

Профіль третього типу – п'ятиінтервальний (рисунок 1.2, в) – складається з п'яти ділянок: верхнього вертикального – 1, набору кута – 2, прямолінійно похилого – 3, зниження кута – 4 і нижнього вертикального – 5, що дозволяє при перетині стволом декількох продуктивних горизонтів

експлуатувати будь-який з них зі збереженням загальної сітки розробки.

Розрахунок профілів звичайного типу зводиться до визначення максимального кута кривої, горизонтальної та вертикальної проєкцій і довжини кожної з ділянок, що входять до складу даного профілю, а також загальної довжини кривої і загального відходу від вертикалі.

Вихідними даними для розрахунку профілю є:

- H – проектна глибина;
- h – глибина похилої ділянки;
- A – проектний зсув від вертикалі;
- i_1, R_1 – інтенсивність і радіус на ділянці набору кута;
- i_2, R_2 – інтенсивність і радіус на ділянці неорієнтованого набору;
- i_3, R_3 – інтенсивність і радіус на ділянці зменшення кута;
- α_0 – кут набору кривизни;
- h_6 – глибина другої вертикальної ділянки;
- α_k – кут в кінці ділянки зменшення кута;
- R_{don} – радіус кола допустимого відхилення від проектної точки в

горизонтальній площині.

Профіль розраховують по ділянках зверху вниз (рисунок 1.3).

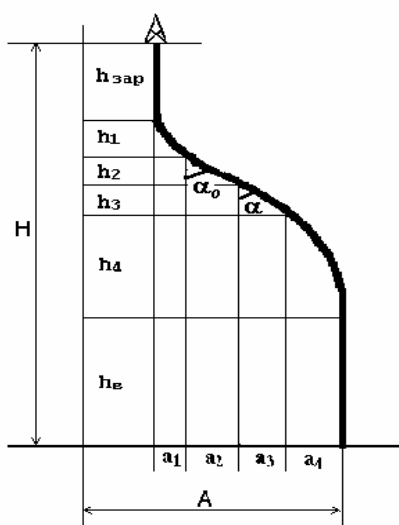


Рисунок 1.3 – Профіль

Розрахунок профілю полягає у визначенні проекцій ділянок на вертикальну і горизонтальну осі і довжини ділянки по стовбуру:

– a_1, h_1, l_1 – горизонтальне зміщення, вертикальна проекція і довжина по стовбуру на ділянці набору кута;

– a_2, h_2, l_2 – горизонтальне зміщення, вертикальна проекція і довжина по стовбуру на ділянці неорієнтованого набору кута;

– a_3, h_3, l_3 – горизонтальне зміщення, вертикальна проекція і довжина по стовбуру на ділянці стабілізації кута;

– a_4, h_4, l_4 – горизонтальне зміщення, вертикальна проекція і довжина по стовбуру на ділянці зменшення кута.

Основним розрахунковим параметром такого роду кривої є кут α в кінці ділянки похилої частини або в кінці ділянки неорієнтованого набору кута, якщо він включений в криву. Таким чином, α - максимальний кут. Величина цього кута в основному визначає зміщення кінцеві частини від вертикалі.

При проектуванні кривої повинна виконуватися умова:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum a_i \pm R_{don}. \quad (1.1)$$

Кут α знаходиться підбором, тобто, змінюючи значення кута α , домагаються виконання умови (1.1), або за формулою:

$$\alpha = \arccos \frac{R_1(R_1 - A) + H_{1,2} \sqrt{H_{1,2}^2 + A^2 + 2AR_1}}{(R_1 - A)^2 + H_{1,2}^2}, \quad (1.2)$$

де $H_{1,2} = h_1 + h_2$.

$$\frac{R - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.3)$$

Основні розрахункові формули для визначення проєкцій ділянок наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Основні розрахункові формули

Назва розрахункової величини, одиниці вимірювання	Формула
Довжина викривленої ділянки, m	$l = (\alpha_{\text{кон}} - \alpha_{\text{нач}}) / i$
Горизонтальна проєкція викривленої ділянки, m	$a = R(\cos\alpha_{\text{нач}} - \cos\alpha_{\text{кон}})$
Вертикальна проєкція викривленої ділянки, m	$h = R(\sin\alpha_{\text{кон}} - \sin\alpha_{\text{нач}})$
Довжина прямолінійно-нахиленої ділянки, m	$l = h / \cos\alpha$
Зв'язок вертикальної та горизонтальної проєкцій прямолінійно-нахиленої ділянки, m	$a = h \operatorname{tg}\alpha$
Кут в кінці ділянки набору кривизни, град	$\alpha_{\text{кон}} = \arcsin(\sin\alpha_{\text{нач}} - h / R)$

1.3 Методи оцінки запасів сукупності корисних копалин

Загально відомим є метод дослідження функцій, що ґрунтується на аналізі просторових кривих, розміщених в різних точках деякої поверхні. В роботах [20-25] запропоновано і досліджено загальний метод побудови просторових математичних моделей відновлення функцій на основі даних просторових кривих та інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$. У вказаних роботах істотно використовувалось припущення про те, що всі криві вертикальні.

У роботі [26] дано визначення інтерлінації функцій. У теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), n \geq 2$, в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню та деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами й слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N на M точках m -вимірних ($0 \leq m \leq n$) поверхонь в \mathbb{R}^n , $M \geq 2$ (з метою уніфікації тверджень будемо вважати точки нульвимірними поверхнями, а лінії – одновимірними поверхнями) [27-30]. У випадку $m = 0, n \geq 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках

(полюсах) і такі оператори наближення називаються операторами *інтерполяції* (*inter* – між, *pol* – полюс, точка).

Означення [26 , с.65]. У випадку $m=1, n \geq 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ та слідами її частинних похідних $\frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, |s| = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq |s| \leq N$, на M лініях і такі оператори будемо називати операторами інтерлінації (*inter* – між, *line* – лінія).

У [26] було показано, що на практиці рідко можна зустріти систему кривих, розміщених на поверхні регулярно, тобто у вигляді

$$\Gamma_{k,l} : \{(x, y, z) : (x, y, z) = (X_k, Y_l, z), -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n} .$$

Але в деяких випадках, наприклад при дослідженні вмісту кори Землі в пустелі, в шельфі неглибокого моря тощо, якщо немає ніякої додаткової інформації про розподіл корисних копалин в досліджуваній області, природним є вибір системи свердловин так, щоб вони були розміщені на поверхні регулярно.

Введемо декілька означень.

Внутрішній контур – це лінія, яка з'єднує крайні розвідувальні виробки, які зустріли корисну копалину промислової кондиції за вмістом і потужністю.

Зовнішній контур – це контур, який проходить через точки природної межі поширення корисної копалини. Часто – це лінія, де потужність дорівнює нулю. Тому її ще називають *нульовим контуром*.

Площу між внутрішнім і зовнішнім контурами називають *міжконтурною смугою*.

Побудова внутрішнього контуру не викликає ніяких труднощів. Для його побудови з'єднують крайні свердловини, які зустріли корисну копалину. *Побудова ж зовнішнього контуру* є складною задачею, оскільки потребує знання геологічних особливостей родовища і наявності достатніх

розвідувальних даних [65-66].

Залежно від взаємного розташування рудних і безрудних свердловин лінію зовнішнього контуру можна побудувати шляхом інтерполяції або екстраполяції (рисунок 1.4).

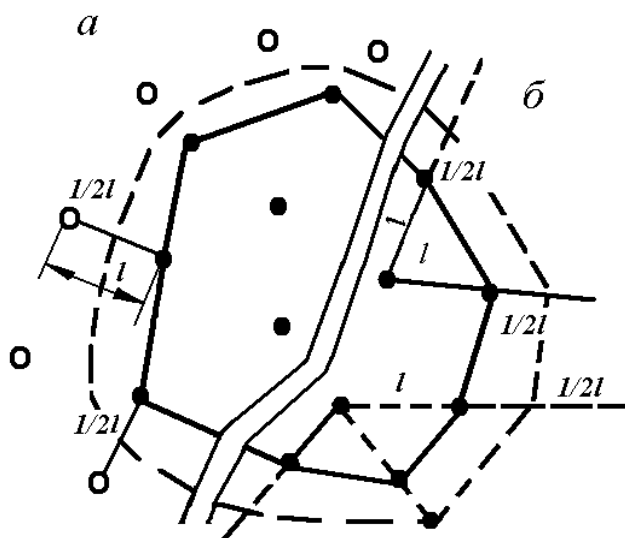


Рисунок 1.4 – Побудова зовнішнього контуру:
a – методом інтерполяції; *б* – методом екстраполяції

Основним параметром підрахунку запасів в об'ємній або масовій мірі є площа поширення покладу чи окремих його частин. Тому визначення площі є постійною операцією при підрахунку запасів будь-яким способом.

Поверхні, площі яких підлягають визначенню, можуть бути плоскими і топографічними. Контури площ, які визначають, можуть бути ламаними або кривими лініями. Очевидно, що спосіб визначення площі зумовлюється характером поверхні покладу, формою обмежуючого контуру і способом підрахунку запасів.

Площу плоского контуру можна визначити одним із таких способів: аналітичним, геометричним – за формулами геометрично правильних фігур, планіметром, курвіметром і палеткою з паралельними лініями, палеткою точковою або квадратною.

Розглянемо суть кожного з названих способів.

Аналітичний спосіб. Аналітично площу визначають за координатами x, y кутових точок контуру. На рисунку 1.5 – це вершини 1-4 чотирикутника. Площа цієї фігури дорівнює алгебраїчній сумі площ трапецій, основами яких є ординати точок, а висотами – різниці абсцис. Площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту. Враховуючи це, маємо:

$$S = \frac{1}{2} \left[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + \dots + (x_{n-1} - x_n)(y_{n-1} - y_n) + (x_n - x_1)(y_n - y_1) \right],$$

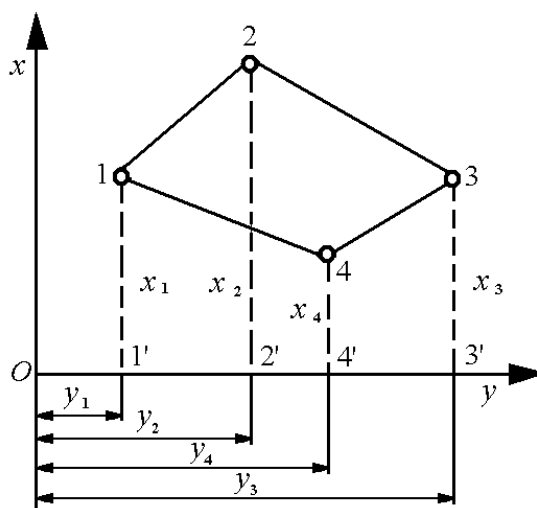


Рисунок 1.5 – Аналітичний спосіб визначення площ

У практиці підрахунку запасів родовищ твердих корисних копалин застосовують більше 20 способів. Із них найпоширенішими є такі:

- середнього арифметичного;
- геологічних блоків;
- експлуатаційних блоків;
- розрізів (вертикальних і горизонтальних);
- багатокутників;
- трикутників;
- ізоліній;

- ізогіпси;
- середнього кута падіння;
- ділянок однакових кутів падіння.

При підрахунку запасів способом середнього арифметичного рудне тіло, обмежене складними поверхнями (рисунок 1.6, а) прирівнюють до покладу з постійною середньою потужністю (рисунок 1.6, б).

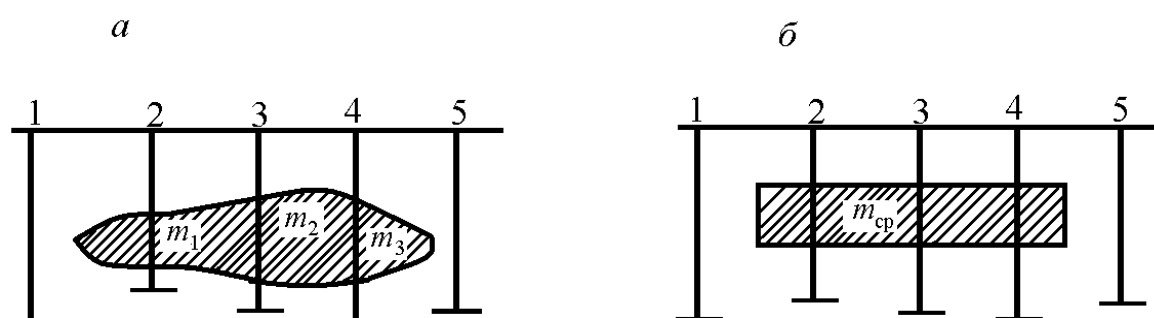


Рисунок 1.6 – Підрахунок запасів способом середнього арифметичного

Запаси корисної копалини в об'ємній і масовій мірах, корисного компонента у масовій мірі підраховують за формулами:

$$V_1 = S_1 m_{1cp}, \text{ м}^3; Q_1 = V_1 \gamma_{1cp}, \text{ м}^3; P_1 = \frac{Q_1 c_{1cp}}{100}, \text{ м}; \quad (1.4)$$

$$V_2 = S_2 m_{2cp}, \text{ м}^3; Q_2 = V_2 \gamma_{2cp}, \text{ м}^3; P_2 = \frac{Q_2 c_{2cp}}{100}, \text{ м},$$

(1.5)

де V_1, Q_1, P_1 – відповідно об'єм, маса корисної копалини і маса корисного компонента в межах внутрішнього контуру S_1 ;

$m_{1cp}, \gamma_{1cp}, c_{1cp}$ – середні значення відповідно потужності, густини і вмісту корисного компонента в межах внутрішнього контуру S_1 ; середню потужність визначають за формулою:

$$m_{1cp} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n}, \text{ М}, \quad (1.6)$$

де m_i – потужність, виміряна в розвідувальних точках;

n – кількість визначень показника (кількість розвідувальних точок);

V_2, Q_2, P_2 – відповідно об'єм, маса корисної копалини і маса корисного компонента в межах міжконтурної смуги S_2 ; середню потужність визначають за формулою:

$$m_{2cp} = \frac{m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k}{2k}, \text{ М}, \quad (1.7)$$

де m'_i – значення потужності покладу в розвідувальних точках, розташованих на лінії внутрішнього контуру;

k – кількість розвідувальних точок на лінії внутрішнього контуру.

Основною перевагою розглянутого способу є простота обчислень і графічних побудов, які супроводжують підрахунок. *Недоліком* є неможливість поділу підрахованих запасів на групи і категорії за сортами корисної копалини, розвіданістю та іншими показниками. Оскільки спосіб наближений, то його частіше застосовують для загальних прикидок кількості руди і металу.

Спосіб багатокутників називають також способом найближчих районів або способом А. К. Болдирьова за ім'ям професора Петроградського гірничого інституту, який в 1914 р. запропонував його для підрахунку запасів. Суть цього способу полягає у виділенні навколо кожної точки перетину корисної копалини розвідувальною виробкою ділянки, всі точки якої ближчі до цієї виробки, ніж до будь-якої іншої. Тому цей спосіб і називають способом найближчого району. При цьому вся розвідувана площа розбивається на окремі ділянки за кількістю розвідувальних виробок так, щоб до кожної виробки відійшла найближча до неї частина покладу. Припускають, що на всій найближчій площі, яка тяжіє до даної виробки, потужність, густина і вміст корисної копалини залишаються незмінними і рівними показникам,

одержаним в цій виробці.

Для виділення таких ділянок користуються наступною теоремою геометрії.

Теорема. Перпендикуляр, проведений через середину відрізка прямої лінії, є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Тому будь-яка точка, яка лежить праворуч від перпендикуляра CD, розташована ближче до точки B, ніж до A і навпаки, будь-яка точка, розташована ліворуч від цього перпендикуляра, лежатиме ближче до точки A, ніж до точки B (рисунок 1.7).

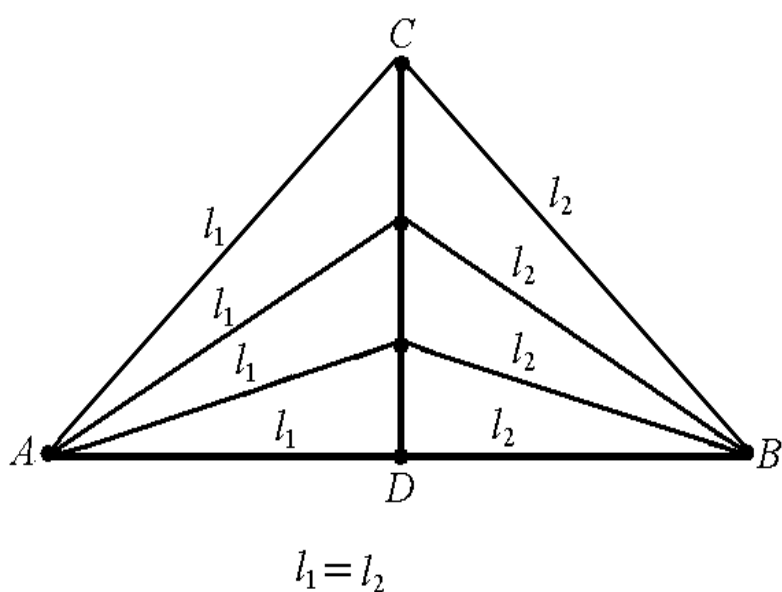


Рисунок 1.7 – Перпендикуляр до центра відрізка АВ

Для використання цього положення при підрахунку запасів виконують такі графічні побудови.

На плані підрахунку запасів, де нанесені всі розвідувальні виробки, кожену виробку з'єднують прямими лініями з найближчими до неї сусідніми виробками (рисунок 1.8). Через середини одержаних відрізків проводять перпендикуляри, які перетинаючись між собою, утворюють навколо кожної виробки багатокутник. Будь-яка точка площі цього багатокутника знаходиться ближче до даної виробки, ніж до інших (рисунок 1.8).

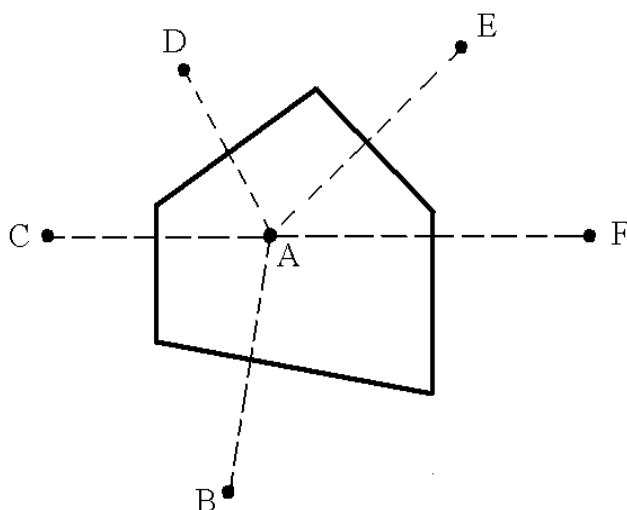


Рисунок 1.8 – Побудова багатокутника, який тяжіє до виробки А

Розглянутим способом вся площа на плані розбивається на багатокутники (рисунок 1.9, а), а поклад – на багатогранники, запаси яких і підраховують. Основами і висотами багатогранних призм служать відповідно найближчі площі біля виробок в формі багатокутників і вертикальні потужності в цих виробках. Отже, внаслідок виконаних побудов тіло корисної копалини ніби перетворюється в групу зімкнених багатогранних призм (рисунок 1.9, б).

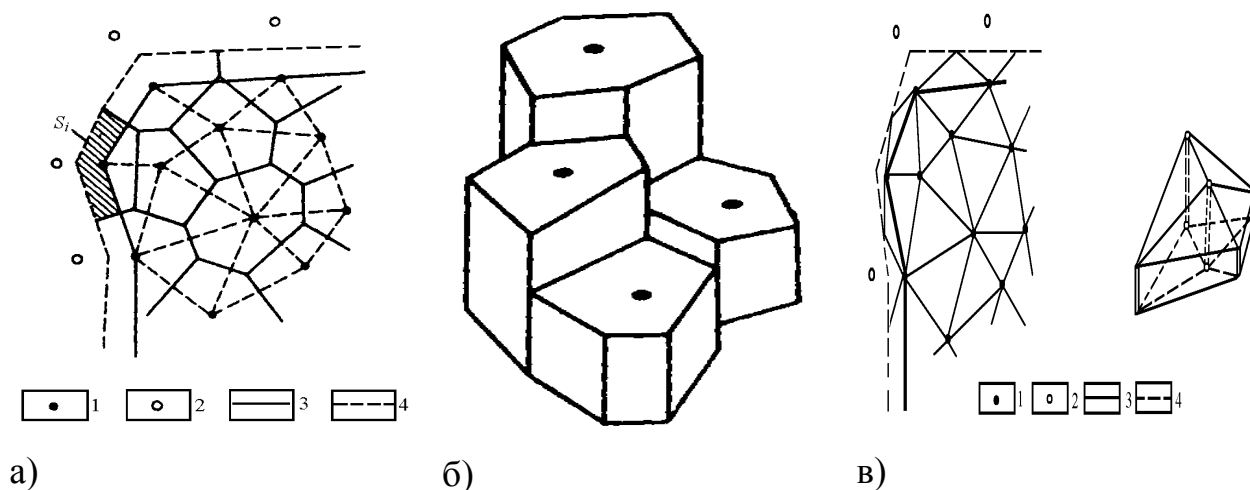


Рисунок 1.9 – Побудова багатокутників в межах розвідуваного контуру: 1а – рудні свердловини; 2а – безрудні свердловини; 3а – внутрішній контур; 4а – зовнішній контур; б) схема перетворення покладу в групу зімкнених прямих багатогранних призм; в) Схема підрахунку запасів способом трикутників: 1 – рудні розвідувальні виробки; 2 – безрудні розвідувальні виробки; 3 – внутрішній контур; 4 – зовнішній контур

Запаси по кожній такій призмі обчислюють за відомими формулами:

$$Q_i = S_i m_i \gamma_i; \quad P_i = Q_i c_i.$$

Запаси по всій ділянці визначають як суму запасів окремих призм:

$$Q = \Sigma Q_i; \quad P = \Sigma P_i.$$

Головним достоїнством розглянутого способу є його простота і швидкість обчислювальних операцій. Проте він має і недоліки:

- підрахунок запасів цим способом потребує дуже багато складних графічних побудов;
- проведення нової виробки в межах площі з уже підрахованими запасами не дає змогу поповнити підрахункове креслення, а потребує знову перекреслювати значну його частину;
- фігури, за якими проводять підрахунок запасів, надзвичайно спотворюють природну морфологію покладу. З цієї точки зору такий спосіб є дуже ненатуральним і нелогічним;
- багатогранні призми, за якими проводять підрахунок запасів, за своєю формою не можуть бути експлуатаційними ділянками і тому в подальшому при проектуванні гірничих робіт і плануванні видобутку часто доводиться проводити перерахування іншими способами;
- спосіб не надає можливості впевнено виділити сорти корисної копалини в процесі підрахунків, особливо це стосується родовищ з нерівномірним розподілом компонентів.

При підрахунку запасів *способом трикутників* всі розвідувальні виробки на плані в межах підраховуваного контуру з'єднують прямими. Причому ці лінії мають не перетинатися. Внаслідок цього одержують сітку зімкнених трикутників (рисунок 1.9, в). Якщо уявно через сторони цих трикутників

перпендикулярно до площини проєкції провести площини, то увесь поклад розіб'ється на сукупність зімкнених прямих косозрізаних трикутних призм, (рисунок 1.9, в) загальний об'єм яких рівновеликий об'єму тіла корисної копалини. Довжини ребер цих призм визначаються потужністю покладу, зафіксованою у відповідних виробках.

Запаси руди в кожній призмi обчислюють за формулою:

$$Q_i = V_i \gamma_i,$$

де $V_i = \frac{1}{3} S_i (m'_i + m''_i + m'''_i)$ – об'єм тригранної призми;

S_i – площа основи цієї призми;

m'_i, m''_i, m'''_i – потужності по виробках, які утворюють призму;

γ_i – середня густина корисної копалини.

Запаси металу в призмi обчислюють за формулою:

$$P_i = \frac{1}{3} Q_i (c'_i + c''_i + c'''_i),$$

де c'_i, c''_i, c'''_i – вміст металу по окремих виробках i -ої призми (у масовій мірі або у відсотках).

Загальний запас руди Q і металу P в покладі одержують додаванням запасів окремих призм.

Даний спосіб має такі недоліки:

– фігури, запаси в яких підраховують, не відповідають природним формам тіл корисних копалин, які при цьому спотворюються;

– трикутники не відповідають формам експлуатаційних блоків (ділянок), тому в процесі проектування доводиться проводити перерахунок запасів іншим способом;

– громіздкість обчислень за умови великої кількості виробок. При цьому кожна виробка приймає участь в підрахунках не менше трьох разів, а зазвичай – 5÷7 разів. Тому обсяг обчислень тут в 5÷15 разів більший, ніж способами середнього арифметичного або багатокутників.

1.4 Висновки по розділу та постановка задач дисертаційного дослідження

Проаналізувавши сучасну вітчизняну та зарубіжну літературу з питань побудови математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових неперетинних кривих було зроблено такі висновки:

– на даний час не існує аналітичних методів побудови тривимірних математичних моделей відновлення розподілу щільності корисних копалин між системою просторових неперетинних кривих на основі аналізу похилих свердловин;

– актуальною є задача побудови просторових математичних моделей відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин між системою похилих свердловин для випадку, коли інформацію про функцію розподілу $f(x, y, z)$ задано на M просторових кривих;

– сучасні методи дослідження просторових математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових неперетинних кривих показують, що зміна азимута між сусідніми точками виміру може бути великою, що приведе до методичних помилок визначення приросту координат. Тому є актуальною розробка методів, які цих помилок визначення приросту координат давати не будуть;

– розміщення просторових кривих є нерегулярним, тобто їх координати $(x_k(z), y_k(z), z)$, $k = \overline{1, M}$ не мають явного аналітичного зв'язку. Як відомо, в цьому випадку задача побудови інтерполяційного поліному може не мати єдиного розв'язку. Тому актуальною є задача побудови та дослідження

математичних моделей відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту між системою просторових неперетинних кривих методами інтерлінації функцій трьох змінних, які відрізняються високою точністю й імовірністю використання даних по кожній просторовій кривій, в залежності від глибини z , для рівномірно й нерівномірно розміщених у просторі неперетинних кривих.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі наукові та практичні задачі:

– побудувати математичні моделі просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції між системою рівномірно розміщених у просторі неперетинних кривих за допомогою поліноміальної та сплайн-інтерлінації;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції між системою неперетинних просторових кривих за допомогою інтерлінації функцій з використанням дробно-раціональних допоміжних функцій;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул Д. Шепарда;

– побудувати математичну модель просторового розподілу щільності корисних копалин як тривимірної функції за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних між нерівномірно розміщеними у просторі неперетинними кривими з використанням узагальнених глобальних інтерполяційних формул О.М. Литвина;

– побудувати математичну модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих;

– зробити оцінку об'єму запасів корисних копалин;

– перевірити ефективність запропонованих моделей за допомогою обчислювального експерименту на основі створених дисертантом програм, які реалізують вказані вище методи побудови математичних моделей.

Основні результати першого розділу опубліковано в роботах [47-48].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1-30, 52-70].

2 ОПЕРАТОРИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ ЗІ СЛІДАМИ НА СИСТЕМІ НЕПЕРЕТИННИХ ЛІНІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ, УЗАГАЛЬНЕНО-ПОЛІНОМІАЛЬНИХ, ГЛОБАЛЬНИХ ТА СПЛАЙН-ІНТЕРПЛАНТІВ

2.1 Проектування просторової кривої заданого вигляду

Проектування просторової кривої починається з вибору конфігурації профілю (рисунок 2.1).

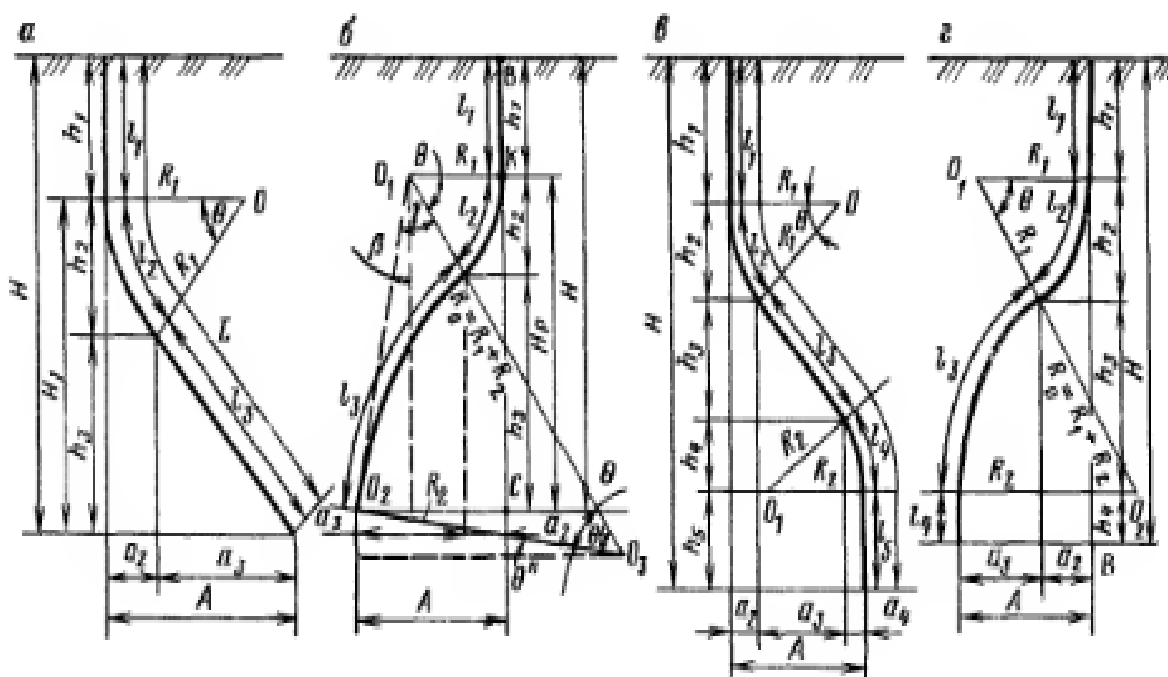


Рисунок 2.1 – Деякі види просторових кривих
1 – вертикальний, 2 – збільшення зенітного кута, 3 – зменшення зенітного кута, 4 – стабілізація

Для опису кривих будемо використовувати термінологію, що запропонована Калініним О.Г. [55].

У загальному випадку профіль похилої свердловини може містити наступні ділянки: вертикальну, ділянку набору кута, прямолінійну ділянку, де кут стабілізовано (ділянка стабілізації), ділянка зменшення кута. Звичайний профіль являє собою криву лінію, розташовану в одній вертикальній площині.

Однак у ряді випадків задається профіль просторового типу, що представляє собою просторову криву лінію.

Розглянемо більш детально перший профіль з наведених на рисунку 2.1 просторових кривих. В якості основної системи координат, в якій задається проектне положення кривої, в декартовій системі координат, де вісь OZ спрямована в бік, протилежний дії вектора сили тяжіння.

Означення: Будемо вважати просторовою кривою множину точок наступного вигляду

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M},$$

де $X_k(z), Y_k(z)$ – не є сталими.

Для спрощення вважаємо, що всі точки конкретної кривої Γ_k лежать в одній вертикальній площині.

Позначимо через $f(x, y, z)$ функцію розподілу щільності досліджуваного об'єкту в точці з координатами (x, y, z) , яку вважатимемо відомою лише в точках вказаної системи кривих. Тобто вважаємо відомими функції

$$f_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z), -H_1 \leq z \leq 0, k = \overline{1, M},$$

де функції $f_k(z)$ вважаються отриманими унаслідок аналізу просторових кривих [31].

Нехай нам відома глибина H , на якій вертикальна частина просторової кривої має скривлення. Напишемо параметричне рівняння просторової кривої, яка починається з точки $M_k(x_k, y_k, 0)$ на поверхні.

У якості основної системи координат, в якій задається проектне положення кривої, прийнята декартова система координат, де вісь OZ

спрямована в бік, протилежний дії вектора сили тяжіння.

Введемо допоміжну систему координат $O'X'Y'Z'$, осі якої паралельні осям $OXYZ$, а центр знаходиться в точці

$$O'(x_k, y_k, -H) = O'(X_k(-H), Y_k(-H), -H).$$

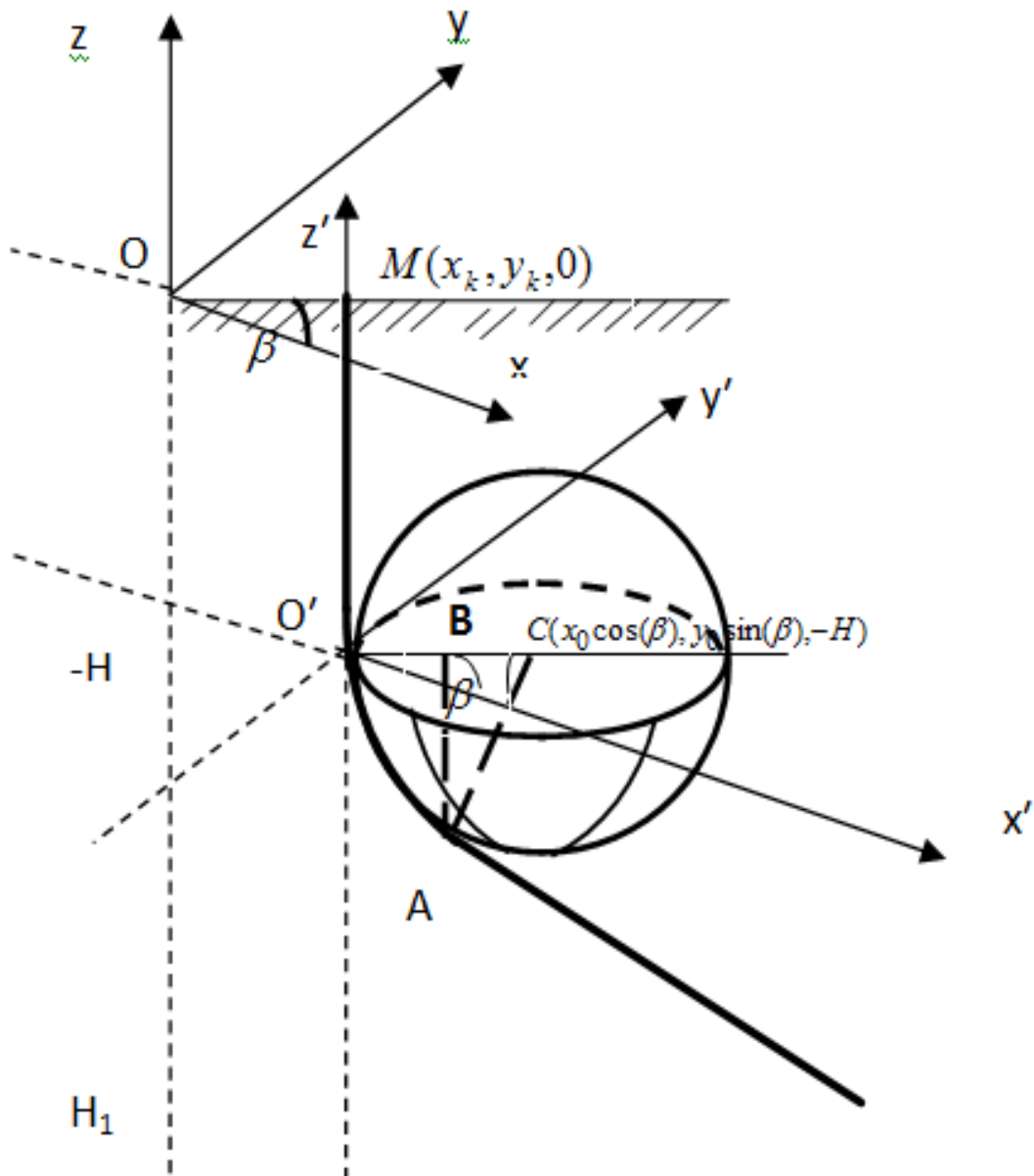


Рисунок 2.2 – Просторова крива

Рівняння площини, що проходить через точку з координатами $(x_k, y_k, 0)$

та вісь $O'Z' \parallel OZ$ під кутом β до площини $O'X'Y'$ має вигляд (рисунок 2.2).

$$(x - x_k) \sin(\beta) - (y - y_k) \cos(\beta) = 0.$$

Точки M_k, O', A, B, C, D лежать в одній площині.

Запишемо формули перетворення координат при повороті координатних осей:

$$x' = (x - x_k) \cos(\beta) - (y - y_k) \sin(\beta);$$

$$y' = (y - y_k) \cos(\beta) - (x - x_k) \sin(\beta).$$

Якщо $\angle ACO' = \alpha$, а $\beta = \angle(X'O'C)$ визначимо координати точки C , яка є центром кола, на яке спирається скривлення просторової кривої (рисунок 2.2). Точка C буде мати координати

$$C(x_k + R \cos \beta, y_k + R \sin \beta, -H).$$

Рівняння сфери з центром в точці C і радіусом R буде мати наступний вигляд:

$$(x - x_k - R \cos \beta)^2 + (y - y_k - R \sin \beta)^2 + (z + H)^2 = R^2.$$

Задамо параметричне рівняння просторової кривої, як рівняння кривої, яка лежить на вказаній сфері

$$\begin{cases} x - x_k - R \cos \beta = R \cos \beta \cos \alpha; \\ y - y_k - R \sin \beta = R \cos \beta \sin \alpha; \\ z + H = R \sin \alpha. \end{cases}$$

Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle ABC$. Визначимо координати точок B, C, A . Точку A – є точкою переходу ділянки набору зенітного кута кривої до її прямолінійної ділянки. Точка B – точка перетину перпендикуляру від точки A до діаметру кола, на яке спирається скривлення просторової кривої (рисунок 2.2).

$$\text{Якщо } \angle ACB = \alpha, \text{ а } \angle ABC = \frac{\pi}{2},$$

то

$$AB = AC \sin \alpha = R \sin \alpha,$$

$$z - (-H) = R \sin(\alpha);$$

$$z + H = R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{z + H}{R} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right);$$

$$x_A = x_B = x_k + (R - R \cos \alpha) \cos \beta = x_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \cos \beta \right);$$

$$y_A = y_k + (R - R \cos \alpha) \sin \beta = y_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \sin \beta \right);$$

$$A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{cases} x_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \cos \beta \right); \\ y_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \sin \beta \right), \text{ , } -H_1 \leq z \leq -H, H_1 - H \leq R; \\ z; \end{cases}$$

$$\hat{A} \left(x_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \cos \beta \right), y_k + \left(R - R \cos\left(\arcsin\left(\frac{z + H}{R}\right)\right) \sin \beta \right), -H \right)$$

Параметричне рівняння прямої може бути записане наступним чином:

$$\begin{cases} x = x_A + m(z - H_1); \\ y = y_A + n(z - H_1); \\ z = z. \end{cases}$$

Знайдемо $x(z)'_z$ та $y(z)'_z$:

$$\begin{aligned} x(z)'_z &= \left[x_k + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \cos \beta \right) \right]'_z = \\ &= R \sin \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right)'_z \cos \beta = \\ &= R \frac{z+H}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z+H}{R} \right)^2}} \left(\frac{z+H}{R} \right)'_z \cos \beta = \\ &= \frac{z+H}{\sqrt{1 - \left(\frac{z+H}{R} \right)^2}} \frac{\cos \beta}{R}. \end{aligned}$$

При $z = H_1$ отримаємо:

$$x'(z)|_{z=H_1} = \frac{-H_1 + H}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1 + H}{R} \right)^2}} \frac{\cos(\beta)}{R}.$$

$$\begin{aligned} y(z)'_z &= \left[y_k + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \sin \beta \right) \right]'_z = \\ &= R \sin \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right)'_z \sin \beta = \end{aligned}$$

$$= R \frac{z+H}{R} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z+H}{R}\right)^2}} \left(\frac{z+H}{R}\right)'_z \sin \beta = \frac{z+H}{\sqrt{1-\left(\frac{z+H}{R}\right)^2}} \frac{\sin \beta}{R}.$$

При $z = H_1$ отримаємо

$$y'(z)|_{z=H_1} = \frac{-H_1+H}{\sqrt{1-\left(\frac{-H_1+H}{R}\right)^2}} \frac{\sin(\beta)}{R}.$$

Отже

$$m = x'(z)_z = \frac{-H_1+H}{\sqrt{1-\left(\frac{-H_1+H}{R}\right)^2}} \frac{\cos(\beta)}{R},$$

$$n = y'(z)_z = \frac{-H_1+H}{\sqrt{1-\left(\frac{-H_1+H}{R}\right)^2}} \frac{\sin(\beta)}{R}.$$

Запишемо параметричне рівняння кривої.

$$\begin{cases} x = x_k + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \cos \beta}{\sqrt{1-\left(\frac{-H_1+H}{R}\right)^2} R}; \\ y = y_k + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \sin \beta}{\sqrt{1-\left(\frac{-H_1+H}{R}\right)^2} R}; \\ z = z. \end{cases}$$

Перевірка отриманих результатів зроблена за допомогою засобів MathCad (Додаток В).

2.2 Математичне моделювання розподілу щільності досліджуваного об'єкту за допомогою поліноміальних інтерліантів на системі неперетинних кривих

У теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню і деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку $N (N \geq 0)$ на $M (M \geq 1)$, m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхнях в \mathbf{R}^n . З метою уніфікації тверджень будемо вважати точки нуль-вимірними поверхнями, а лінії – одновимірними поверхнями. У випадку $m = 0, n \geq 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках (полюсах), і такі оператори наближення називаються операторами інтерполяції (inter – між, pol – полюс, точка) для $M \geq 2$. У випадку $m = 1, n \geq 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ та слідами її частинних похідних

$$\frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, |s| = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq |s| \leq N,$$

на M лініях, і такі оператори будемо називати операторами інтерлінації (inter – між, line – лінія) [10].

У зарубіжній літературі для операторів інтерлінації використовується декілька назв. Найпоширенішою є назва «blending function interpolation» – «мішана інтерполяція функцій».

Враховуючи, що інтерлінація є природним узагальненням інтерполяції, в теорії інтерлінації використовуємо термінологію з теорії інтерполяції (інтерполуюча функція – інтерлінуюча функція, вузли інтерполяції – лінії

інтерлінації тощо) [9].

Вважаємо, що інформація про розподіл задана на системі як вертикальних ліній, так і просторових кривих спеціальної форми.

Введемо математичне визначення просторової кривої спеціальної форми.

Означення. Будемо вважати просторовою кривою спеціальної форми (похилою свердловиною) множину точок такого вигляду

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M},$$

де $X_k(z), Y_k(z)$ – функції, що задовольняють умови $r'_k(z) < 0$;

$$r_k = \sqrt{(X_k(z) - X_k(0))^2 + (Y_k(z) - Y_k(0))^2} \text{ (рисунок 2.3).}$$

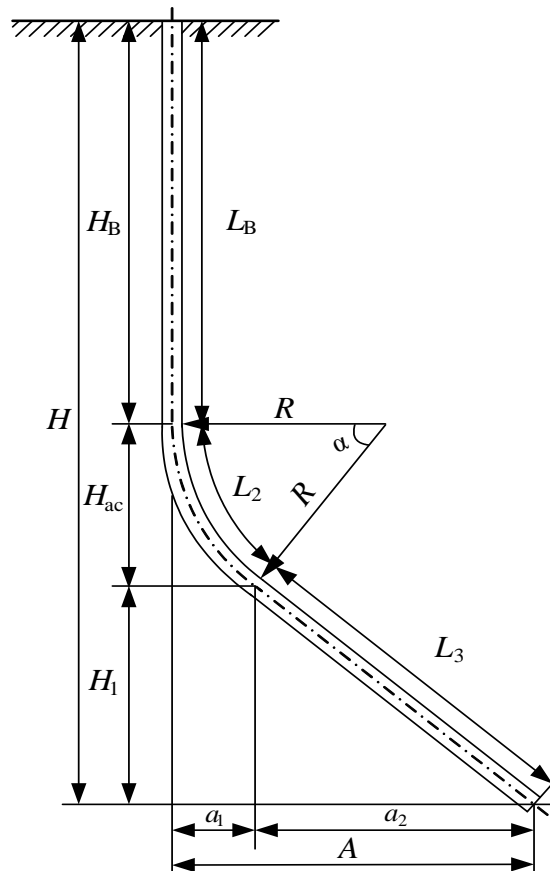


Рисунок 2.3 – Графічне зображення просторової кривої спеціальної форми

Таким чином, у даному означенні кривої ми свідомо вважаємо, що множина точок, які належать кривій, є у своїй сукупності деякою лінією.

2.2.1 Оператори інтерлінації функцій на системі кривих, розміщених в одній площині

Припустимо, що система ліній розміщена таким чином, що кожна з них може бути кривою лінією лише в площині $y = Y_l = \text{const}$, $l = \overline{1, n}$, $x = x_k(z)$, $k = \overline{1, m}$.

Вважаємо, що всі вертикальні частини вказаних типів кривих належать одній вертикальній площині, а скривлені частини можуть лежати в площині перпендикулярній до заданої.

Зауважимо, крім того, що в даній роботі виключається випадок горизонтальних ліній, у яких при фіксованому значенні $z = -H_1$, система точок у лінії лежить у горизонтальній площині (рисунок 2.4).

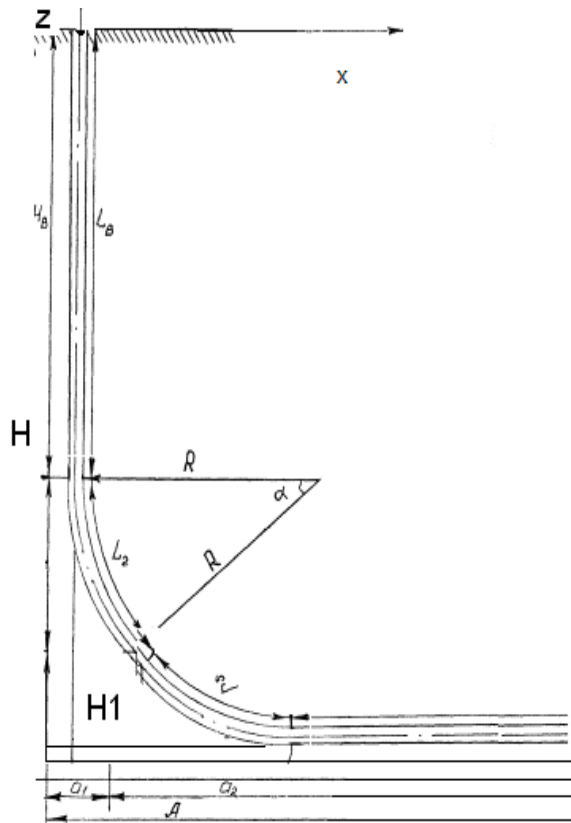


Рисунок. 2.4 – Графічне зображення горизонтальної свердловини

Хай $s_{1k}(x, z), k = \overline{1, m}$, $s_{2l}(y), l = \overline{1, n}$ базисні функції, які визначаються формулами (нижче $X_k = X_k(z)$)

$$s_{1k}(x, z) = \frac{(x - X_1)(x - X_2) \dots (x - X_{k-1})(x - X_{k+1}) \dots (x - X_m)}{(X_k - X_1)(X_k - X_2) \dots (X_k - X_{k-1})(X_k - X_{k+1}) \dots (X_k - X_m)};$$

$$s_{2l}(y) = \frac{(y - Y_1)(y - Y_2) \dots (y - Y_{l-1})(y - Y_{l+1}) \dots (y - Y_n)}{(Y_l - Y_1)(Y_l - Y_2) \dots (Y_l - Y_{l-1})(Y_l - Y_{l+1}) \dots (Y_l - Y_n)}.$$

Лема 1. Базисні функції $s_{1k}(x) = s_{1k}(x, z)$, $s_{2l}(y)$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, n}$ мають такі властивості

$$s_{1k}(X_p(z), z) = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, m}; s_{2l}(Y_q) = \delta_{l,q}, l, q = \overline{1, n}; G = [X_1, X_m] \times [Y_1, Y_n]. \quad (2.1)$$

Доведення цієї леми можна провести за допомогою безпосередньої підстановки у формули s_{1k} , s_{2l} замість змінних x та y відповідних функцій.

Теорема 2.1. Оператор

$$O_{mn}f(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n s_{1k}(x, z) s_{2l}(y) f_{k,l}(z)$$

є оператором інтерлінації функції $f(x, y, z)$ на системі кривих $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_l = \text{const}, z, -H \leq z \leq 0\}$, $k = \overline{1, m}$; $l = \overline{1, n}$

$$O_{mn}f(X_p(z), Y_q, z) = f(X_p(z), Y_q, z) = f_{p,q}(z), p = \overline{1, M}; q = \overline{1, N}.$$

Оператор $O_{mn}f(x, y, z)$ є оператором поліноміальної інтерполяції функції за двома змінними x та y для кожного фіксованого z .

Доведення. Враховуючи властивості (2.1) для базових функцій

$$s_{1k}(X_q(z), z) = \delta_{kp}, 1 \leq k, q \leq m, s_{2l}(Y_q) = \delta_{ql}, 1 \leq q, l \leq n,$$

можна записати

$$\begin{aligned} O_{mn}f(X_p(z), Y_q, z) &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N s_{1k}(X_p(z), z) s_{2l}(Y_q) f_{k,l}(z) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \delta_{k,p} \delta_{l,q} f_{k,l}(z) = f_{p,q}(z), p = \overline{1, M}, q = \overline{1, N}, -H \leq z \leq 0. \end{aligned}$$

Таким чином, перша частина теореми 1 доведена.

Для доведення другої частини теореми 1 достатньо зауважити, що при фіксованому z базисні функції $s_{1k}(x, z)$, $s_{2l}(y)$, $k = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, N}$ є базисними поліномами лагранжевої інтерполяції за змінними x та y відповідно.

Теорема 2.1 доведена.

Теорема 2.2. Нехай $f(x, y, z) \in C^{\mu, \nu, 0}(D)$, де $D \in R^3$ – область, якій належать всі криві. Тоді залишок інтерлінації $R_{mn}f(x, y, z) = |f(x, y, z) - O_{mn}f(x, y, z)|$ можна подати так

$$\begin{aligned} R_n f(x, y, z) &= \\ &= \sum_{k=1}^n s_{1,k}(x, z) \int_{X_k(z)}^x \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} f(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} d\xi + \\ &+ \sum_{l=1}^n s_{2,l}(y) \int_{Y_l}^y \frac{\partial^\nu}{\partial \eta^\nu} f(x, \eta, z) \frac{(Y_l - \eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\eta - \end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m s_{1,k}(x,z) s_{2,l}(y) \int_{X_k(z)}^x \int_{Y_l}^y f^{(\mu,\nu,0)}(\xi,\eta,z) \frac{(X_k(z)-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \frac{(Y_l-\eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\xi d\eta$$

$$1 \leq \mu \leq m, 1 \leq \nu \leq n.$$

Доведення. Скористаємося тотожностями $(\forall y, z)$ [10, 13]

$$R_{mm}f(x, y, z) = (R_1 + R_2 - R_1 R_2) f(x, y, z),$$

де

$$\begin{aligned} R_1 f(x, y, z) &= |f(x, y, z) - L_M f(x, y, z)| = \\ &= \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \int_{X_k(z)}^x \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} f(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} d\xi, \end{aligned}$$

$$L_M f = \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) f(x_k, y, z),$$

$$R_2 f(x, y, z) = |f(x, y, z) - L_N f(x, y, z)| = \sum_{l=1}^N s_{2,l}(y) \int_{Y_l}^{y_0} \frac{\partial^\nu}{\partial \eta^\nu} f(x, \eta, z) \frac{(Y_l - \eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\eta,$$

$$L_N f = \sum_{i=1}^N s_{2,i}(y) f(x, Y_i, z).$$

$$f(x, y, z) = \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) f(x, y, z), \left[L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!} \right]_{u=x} = 0, 1 \leq \mu \leq M-1,$$

які є узагальненнями відповідних тотожностей [13] на випадок, коли базисні функції $s_{1k}(x, z)$ залежать не тільки від змінної x , але також від параметра z .

Вище в записі $L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!}$ вважається, що оператор L_M діє на змінну x .

Скористаємося також тотожностями, які перевіряються інтегруванням частинами

$$f(x, y, z) = f(X_k(z), y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} f^{(\mu)}(x, y, z) \frac{(X_k(z) - x)^\mu}{(\mu)!} + \\ + \int_{X_k(z)}^x f^{(r)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi, \quad k = \overline{1, M}.$$

Тоді можна написати послідовність тотожностей

$$f(x, y, z) = \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) f(x, y, z) = \\ = \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \left[f(X_k(z), y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} f^{(\mu, o, o)}(x, y, z) \frac{(X_k(z) - x)^\mu}{\mu!} + \right. \\ \left. + \int_{X_k(z)}^x f^{(r, o, o)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi - \right] = \\ = L_M f(x, y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} f^{(\mu, o, o)}(x, y, z) \left[L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!} \right]_{u=x} + \\ + \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \int_{X_k(z)}^x f^{(r, o, o)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi \\ = L_M f(x, y, z) + R_{1r} f(x, y, z).$$

Аналогічне доведення можна провести і для залишку R_2 . Таким чином, твердження теореми 2 доведено для $f(x, y, z) \in C^{\mu, \nu, 0}(0)$ і для кожної функції $f(x, y, z) \in C(D), D \subset R^3$, функція $O_{mn}f(x, y, z) \in C(D)$ має такі властивості:

$$O_{mn}f(X_p(z), Y_p, z) = f(X_p(z), Y_p, z), p = \overline{1, M}, -H \leq z \leq 0.$$

Теорема 2.2 доведена.

Наслідок 2.1. Таким чином, оператор $O_{mn}f(x, y, z)$ дозволяє обчислювати значення функції $f(x, y, z)$ між кривими, якщо інформація про функцію задана слідами в цих кривих. При цьому, якщо розподіл визначається неперервною функцією $f(x, y, z)$, яка є поліномом степеня n за змінними x та y при кожному z , то оператор $O_{mn}f(x, y, z)$ точно буде відновлювати таку функцію.

Зауваження. Аналогічно можна написати оператор інтерлінації для випадку, коли криві мають форму такого вигляду:

$$\Gamma_{k,l} = \{(x, y, z) : x = X_k = \text{const}, y = Y_l(z), -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}.$$

В цьому випадку оператор $O_{mn}f(x, y, z)$ є математичною моделлю відновлення щільності досліджуваного об'єкту з використанням інтерлінації функцій, побудованої на основі поліноміальних допоміжних функцій $s_{1k}(x), s_{2l}(y, z)$.

2.2.2 Оператори інтерлінації функцій на системі неперетинних кривих, розміщених довільним чином

Вважаємо, що для довільної невідомої функції $f(x, y, z) \in C(R^3)$, яка є

розподілом щільності корисної копалини, нам відомі її сліди $f(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z)$, $k = \overline{1, M}$ в точках M кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Для зручності чисельної реалізації запропонованих методів використовувалися позначення системи MathCad (Додаток В).

Введемо позначення:

$$X(z)_k = X_k(z); Y(z)_k = Y_k(z), \quad k = \overline{1, M}$$

$$O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z)) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z)), \quad \lambda \geq 1, M = 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned} \ell_{M,k,\lambda}(x, y, z; X(z), Y(z)) &= \prod_{i=1, j \neq k}^M \frac{d_i(x, y, z; X(z), Y(z))^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \\ &= \prod_{i=1, j \neq k}^M \left(\frac{d_i(x, y, z; X(z), Y(z))}{d_{i,k}} \right)^\lambda, \end{aligned}$$

$$d_i(x, y, z; X(z), Y(z)) = \sqrt{(X_i(z) - x)^2 + (Y_i(z) - y)^2},$$

$$d_{i,k} = \sqrt{(X_i(z) - X_k(z))^2 + (Y_i(z) - Y_k(z))^2},$$

які для випадку $\gamma_k(z) = \gamma_k = const$, $k = \overline{1, M}$, є інтерполяційними операторами на нерегулярній сітці вузлів, запропонованими О. М. Литвином [8] у 1990 р.

Теорема 2.3. Оператор $O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z))$ може бути заданий у

вигляді

$$O_{M,\lambda}f(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z)) = \gamma_p(z), p = \overline{1, M},$$

якщо у формулі для $O_{M,\lambda}f(x, y, z; X(z), Y(z))$ покласти

$$l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z)) = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M |(x - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (y - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z))|^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M (X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z))^2}^\lambda.$$

Для $\frac{\lambda}{2} \in D$ допоміжні функції $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ будуть поліномами від двох змінних степеня $(M-1)\lambda$.

Доведення. Узагальнюючи аналогічне доведення теореми 6.1.2 з [11], зауважимо, що при $\frac{\lambda}{2} \in D$ чисельник у формулі для функцій $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y , що і доводить друге твердження теореми.

Враховуючи, що знаменники у формулі для $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ залежать лише від z , зробимо висновок, що $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ – поліном степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y . Тобто $O_{M,\lambda}f(x, y, z; X(z), Y(z))$ також є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y , якщо $\frac{\lambda}{2} \in D, \forall z \in [-H, 0]$.

Дослідимо допоміжні функції $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$.

Для цього запишемо таку послідовність рівностей:

$$\begin{aligned}
& l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \\
& = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M \left| (X_p(z) - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (Y_p(z) - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z)) \right|^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M (X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z))^2} = \\
& = \begin{cases} 1, p = k, \\ 0, p \neq k, p = \overline{1, M}, \end{cases} \quad \forall z \in [-H, 0].
\end{aligned}$$

Таким чином і при такому виборі $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X_k(z), Y_k(z))$, виконуються співвідношення $\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, M}$.

Значимо, що знаменник $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda(z)$ у формулі для $l_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ залежить від z і $d_{i,k}^\lambda(z) > 0 \forall i, k \in \{1, \dots, M\}, \lambda > 0$, а чисельник – невід’ємна функція $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z; X(z), Y(z))^\lambda \geq 0$. Тому

$$l_{M,k,\lambda}(x, y; X_k(z), Y_k(z)) \geq 0 \forall k = \overline{1, M}; \lambda > 0.$$

$$\begin{aligned}
& l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \\
& = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z))^\lambda}{d_{i,k}^\lambda(z)} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda(z)}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda(z)} = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, M};
\end{aligned}$$

ОСКІЛЬКИ

$$\frac{\prod_{i=1, j \neq 0}^M d_{i,p}^\lambda(z)}{\prod_{i=1, j \neq k}^M d_{i,k}^\lambda(z)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } p = k, \\ 0, \text{ якщо } p = i, \text{ бо } d_{i,i}(z) = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \delta_{k,p}$, $k, p = \overline{1, M}$.

Враховуючи це, можна записати послідовність рівностей

$$\begin{aligned} O_{M,\lambda} f(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z)) &= \\ &= \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{M,k,\lambda}(X_p, Y_p; X(z), Y(z)) = \\ &= \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p} = \gamma_p(z), p = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Теорема 2.3 доведена.

Будемо використовувати при побудові операторів $O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z))$ такі допоміжні функції:

$$h_{p,\lambda}(x, y) = \frac{l_{M,p,\lambda}(x, y, X(z), Y(z))}{\sum_{q=1}^M l_{M,p,\lambda}(x, y, X(z), Y(z))}.$$

Лема 2. Функції $h_{p,\lambda}(x, y)$ мають властивості:

- а) $h_{p,\lambda}(x, y) \geq 0$;
- б) $0 \leq h_{p,\lambda} \leq 1$;
- в) $h_{p,\lambda}(X_k(z), Y_k(z)) = \delta_{k,p}$, $1 \leq k, p \leq M$.

Доведення. Доведення першої властивості витікає з того, що чисельник і знаменник у формулі для $h_{p,\lambda}(x, y)$ є додатними функціями.

Друга властивість витікає з того, що сума M додатних чисел, одне з яких може дорівнювати нулю, є більшою, ніж кожне з цих чисел.

Доведення третьої властивості витікає з рівності нулю чисельника формули $h_{p,\lambda}(x, y)$ у всіх точках $X_m(z), Y_m(z)$, $m \neq p$, тобто чисельник і знаменник функції $h_{p,\lambda}(x, y)$ у точці $(X_p(z), Y_p(z))$ є однаковими.

Лема 2 доведена.

Теорема 2.4. Якщо $\gamma_k(z) \in C[-H, 0]$, $k = \overline{1, M}$, то

$$O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z)) \in C(R^3);$$

$$O_{M,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z)) = \gamma_p(z), p = \overline{1, M}, \forall z \in [-H, 0].$$

Доведення. Використовуючи введені вище позначення та твердження леми 2, можна дійти висновку, що

$$\begin{aligned} O_{M,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z)) &= \\ &= \frac{\sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z))}{\sum_{i=1}^M l_{i,\lambda}(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z))} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p}}{\sum_{i=1}^M \delta_{i,p}} = \frac{\gamma_p(z) \delta_{p,p}}{\delta_{p,p}} = \gamma_p(z), p = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Таким чином, теорема 2.4 доведена.

Досліджені в теоремі 2.4 оператори мають таку властивість, що описана в наступній теоремі.

Теорема 2.5. В кожній точці з координатами (x, y, z) виконуються нерівності

$$0 \leq O_{M,\lambda}(x, y, z; X(z), Y(z)) \leq \max\{\gamma_1(z), \dots, \gamma_M(z)\}.$$

Доведення. По-перше, зауважимо, що $\gamma_p(z) \geq 0$, крім того, скористаємось нерівністю $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_M a_M \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_M\}$, якщо $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_M = 1$ і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \geq 0$. Застосовуючи це твердження до розглядуваного нами твердження, коли $a_k = \gamma_k(z)$, $k = \overline{1, M}$ і при цьому в кожній точці (x, y) може дорівнювати нулю лише одне з чисел λ_i , а всі інші більші нуля, можемо зробити висновок, про справедливість твердження теореми 2.5.

2.3 Методи узагальнень глобальної формули Шепарда для системи неперетинних кривих

У попередніх параграфах досліджувались поліноміальні та кусково-поліноміальні інтерлінаційні формули, тобто формули, що використовували допоміжні поліноміальні функції або кусково-лінійні, кусково-квадратичні тощо, для моделювання розподілу щільності об'єкту між просторовими кривими, нерівномірно розміщеними у області дослідження [31-33, 35, 45]. Математичні моделі, побудовані з використанням кусково-поліноміальних формул, дозволяють у просторі між кривими отримувати тим точніші наближення, чим меншими є максимальні віддалі між кривими у кожній трикутній призмі на глибині z . Але з точки зору збереження ними глобальної гладкості, яку має наближувана функція, такого типу моделі, в силу їх локальності, є недостатньо інформативними. Тобто, для отримання інформації про глобальні властивості досліджуваного розподілу (про належність функції, яка описує розподіл функцій до того або іншого класу гладкості), потрібно проводити додаткові дослідження.

У багатьох областях для відновлення неперервних поверхонь використовуються експериментальні дані, нерівномірно розміщені у просторі. Однією з загальних інтерполяційних формул, узагальнення яких можна

використовувати для інтерлінації функцій трьох змінних у випадку нерівномірно розподілених кривих, є двовимірна глобальна інтерполяційна формула Доналда Шепарда.

Зауважимо, що не дивлячись на те, що задачі двовимірної інтерполяції досліджуються вже давно, але приклади інтерполяційних функцій, які придатні для нерівномірно розміщених даних, поодинокі. У випадку, коли дані точки вже формують рівномірну прямокутну сітку (x_i, y_j) , $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, найбільш важливими інтерполяційними формулами для прямокутної сітки є [28]:

– представлення відповідної поверхні у вигляді гіперболічного параболоїда для кожних чотирьох заданих точок за допомогою білінійної інтерполяції за змінними x, y у вказаних точках

$$z = S_{1,1}(x, y) = z_{i,j} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + z_{i+1,j} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} +$$

$$+ z_{i,j+1} \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + z_{i+1,j+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j},$$

$$(x, y) \in \Pi_{i,j} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\};$$

– представлення відповідної поверхні у вигляді полінома в околі n^2 ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) точок з використанням ньютонівських розділених різниць;

– представлення відповідної поверхні за допомогою бікубічних сплайн-інтерполяційних формул

$$U = S_{3,3}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{i,j} B_i(x) B_j(y),$$

де невідомі $C_{i,j}$ знаходяться з умов $S_{3,3}(x_p, y_q) = z_{p,q}$, $1 \leq p \leq M$; $1 \leq q \leq N$,

$B_i(x)$ – базисні кубічні сплайни [45]

$$B(x, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}) =$$

$$= \begin{cases} 0, x \leq X_0, \\ \frac{y_1(x - X_0)^3}{6(X_1 - X_0)}, X_0 < x \leq X_1, \\ \frac{y_1}{6}(X_1 - X_0)^2 + \frac{y_1}{2}(X_1 - X_0)(x - X_1) + \\ + \frac{y_1}{2(X_1 - X_2)} \left(\frac{(x - X_2)^3 - (X_1 - X_2)^2}{3} - (X_1 - X_2)^2(x - X_1) \right) + \\ + \frac{(x - X_1)^3}{X_2 - X_1} \frac{y_2}{6}, X_1 < x \leq X_2, \\ \frac{y_1}{2}(X_1 - X_0) \left(\frac{X_1 - X_0}{3} + (X_2 - X_1) \right) + \frac{y_1}{2(X_1 - X_2)} \left(-\frac{(X_1 - X_2)^3}{3} + (X_1 - X_2)^3 \right) + \\ + \frac{y_2}{2}(X_2 - X_1)(x - X_2) + \frac{y_2}{2(X_2 - X_3)} \left(\frac{(x - X_3)^3 - (X_2 - X_3)^3}{3} - (X_2 - X_3)^2(x - X_2) \right) + \\ + \frac{(x - X_2)^3}{X_3 - X_2} \frac{y_3}{6}, X_2 < x \leq X_3, \\ \frac{y_1}{2}(X_1 - X_0) \left(\frac{X_1 - X_0}{3} + (X_2 - X_1) \right) + \frac{y_1}{2(X_1 - X_2)} \left(-\frac{(X_1 - X_2)^3}{3} + (X_1 - X_2)^3 \right) + \\ + \frac{y_2}{2}(X_2 - X_1)(X_3 - X_2) + \frac{y_2}{2(X_2 - X_3)} \left(-\frac{(X_2 - X_3)^3}{3} - (X_2 - X_3)^3(X_3 - X_2) \right) + \\ + \frac{(X_3 - X_2)^3}{X_3 - X_2} \frac{y_3}{6} + \frac{y_1}{2}(X_2 - X_0)(x - X_3) + \frac{y_2}{2}(X_3 - X_1)(x - X_3) + \frac{y_3}{2}(X_3 - X_2)(x - X_3) + \\ + \frac{y_3}{2(X_3 - X_4)} \left(\frac{(x - X_4)^3 - (X_3 - X_4)^3}{3} + (X_4 - X_3)^2(x - X_3) \right), X_3 < x < X_4, \\ 0, x \geq X_4 \end{cases}$$

де

$$y_1 = \frac{(X_3 - X_1)(X_4 - X_1)}{(X_2 - X_0)(X_0 + X_1 - X_3 - X_4)} y_2;$$

$$y_3 = \frac{(X_3 - X_0)(X_3 - X_1)}{(X_4 - X_2)(X_0 + X_1 - X_3 - X_4)} y_2.$$

У випадку довільних нерегулярно розміщених вузлів ці формули недоцільно для ММ розподілу використовувати на практиці. Тому нижче зупинимось на узагальнених глобальних формулах.

Узагальнену глобальну формулу Шепарда для системи кривих $(X_k(z), Y_\ell(z), z)$, $-H \leq z \leq 0$, $k = \overline{1, M}$, $\ell = \overline{1, N}$, можна подати так:

$$S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^M \sum_{\ell=0}^N f(X_k(z), Y_\ell(z), z) \left(\sqrt{(x - X_k(z))^2 + (y - Y_\ell(z))^2} \right)^\lambda}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \left(\sqrt{(x - X_i(z))^2 + (y - Y_j(z))^2} \right)^{-\lambda}}; & (x - X_k(z))^2 + (y - Y_\ell(z))^2 \neq 0, \\ f(X_i(z), Y_j(z), z), & \text{якщо } (x - X_i(z))^2 + (y - Y_j(z))^2 = 0; i \in \{1, \dots, M\}, j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

$$\forall k = \overline{1, M}, \ell = \overline{1, N}.$$

Теорема 2.6. Оператор $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z)$ може бути заданий у вигляді

$$S_{M,N,\lambda}(f; X_i(z), Y_j(z), z) = f(X_i(z), Y_j(z), z), i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N},$$

$$f(x, y, z) \in C(R^3) \Rightarrow S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) \in C(R^3).$$

Доведення. Введемо позначення

$$d_{k,\ell}(x, y, z) = \sqrt{(x - X_k(z))^2 + (y - Y_\ell(z))^2}.$$

Очевидно, що

$$d_{k,l}(x, y, z) > 0 \forall (x, y, z) \in R^3, (x, y, z) \neq (X_k(z), Y_l(z), z)$$

і

$$d_{k,l}(X_k(z), Y_l(z), z) = 0, k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}.$$

Тоді оператор $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z)$ можна записати у вигляді

$$S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N f(X_k(z), Y_l(z), z) (d_{k,l}(x, y, z))^{-\lambda}}{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N (d_{k,l}(x, y, z))^{-\lambda}}, & \text{якщо } d_{k,l}(x, y, z) \neq 0, \forall k, l; \\ f(X_k(z), Y_l(z), z), & \text{якщо } d_{k,l}(x, y, z) = 0, \forall k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N f(X_k(z), Y_l(z), z) l_{k,l,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N l_{i,j,\lambda}(x, y, z)}, & \text{якщо } d_{k,l}(x, y) \neq 0, \forall k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}; \\ f(X_k(z), Y_l(z), z), & \text{якщо } (x - X_k)^2 + (y - Y_l)^2 = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

де

$$l_{k,l,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \prod_{j=1, j \neq l}^N (d_{i,j}(x, y, z))^\lambda.$$

Очевидно, що

$$l_{k,l,\lambda}(X_k(z), Y_l(z), z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \prod_{j=1, j \neq l}^N (d_{i,j}(X_k(z), Y_l(z), z))^\lambda > 0,$$

якщо

$$\forall i, j d_{i,j}(x_k(z), y_k(z), z) > 0;$$

$$\prod_{i=1, i \neq k}^M \prod_{j=1, j \neq l}^N (d_{i,j}(X_p(z), Y_q(z), z))^2 = 0 \quad \forall (X_p(z), Y_q(z), z) \neq (X_k(z), Y_l(z), z).$$

Це дає змогу стверджувати, що

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N l_{i,j,\lambda}(x, y, z) > 0 \quad \forall (x, y, z) \in R^3,$$

оскільки сума невід'ємних функцій може дорівнювати нулю лише в точці, у якій всі доданки дорівнюють нулю. Згідно з наведеними вище властивостями всі невідомі функції $l_{k,l,\lambda}(x, y, z)$ не можуть дорівнювати нулю одночасно.

Таким чином, у формулі
$$\frac{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N f(X_k(z), Y_l(z), z) l_{k,l,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N l_{i,j,\lambda}(x, y, z)}$$
 знаменник є

додатною функцією і тому $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) \in C(R^3)$. Твердження теореми 2.6 доведено.

Для доведення іншого твердження теореми запишемо таку послідовність рівностей:

$$S_{M,N,\lambda}(f; X_p(z), Y_q(z), z) = \frac{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N f(X_k(z), Y_l(z), z) l_{k,l,\lambda}(X_p(z), Y_q(z), z)}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N l_{i,j,\lambda}(X_p(z), Y_q(z), z)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N f(X_k(z), Y_l(z), z) \delta_{k,p} \delta_{l,q}}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \delta_{i,p} \delta_{j,q} l_{k,l,\lambda}(X_p(z), Y_q(z), z)} = \\
&= \frac{f(X_p(z), Y_q(z), z) \delta_{p,p} \delta_{q,q} l_{k,l,\lambda}(X_p(z), Y_q(z), z)}{\delta_{k,p} \delta_{l,q}} = \\
&= f(X_p(z), Y_q(z), z), p = \overline{1, M}; q = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Таким чином, твердження теореми 2.6 доведено.

Теорема 2.6 доведена.

Диференціюванням $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z)$ по x або по y можна впевнитись, що для того, щоб $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, якщо $f(x, y, z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, необхідно, щоб показник степеня λ задовольняв співвідношення $\lambda > 1$. Крім того, якщо $\lambda = 2$, то

$$\text{grad} S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z) = 0, \forall (x, y, z) \in \{(X_k(z), Y_l(z), z), k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}\},$$

оскільки в цьому випадку функція

$$l_{k,l,2}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \prod_{j=1, j \neq l}^N (d_{i,j}(x, y, z))^2 = \prod_{i=1, i \neq k}^M \prod_{j=1, j \neq l}^N \left((x - X_i(z))^2 + (y - Y_j(z))^2 \right)$$

має градієнт, який дорівнює нулю в усіх точках $(X_p(z), Y_q(z), z), p \neq k, q \neq l$.

З геометричної точки зору це означає, що при $\lambda = 2$ для заданого z поверхня $U = S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z)$ в околі вузлів $(X_p(z), Y_q(z), z), p = \overline{1, M}, q = \overline{1, N}$, має горизонтальні дотичні площини. [28]

Зупинимось на недоліках формули, зваженої за допомогою обернених відстаней до вузлів, якою є формула Шепарда.

Запишемо формулу Шепарда для випадку довільного розміщення

неперетинних кривих $(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$. Введемо позначення:

$$d_k(x, y, z) = \sqrt{(x - X_k(z))^2 + (y - Y_k(z))^2}.$$

Очевидно, що

$$d_k(x, y, z) > 0 \forall (x, y, z) \in R^3, (x, y, z) \neq (X_k(z), Y_k(z), z)$$

і

$$d_k(X_k(z), Y_k(z), z) = 0, k = \overline{1, M}.$$

Тоді оператор інтерлінації $S_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ можна подати так:

$$S_{M,\lambda}(f; x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^M f(X_k(z), Y_k(z), z) (d_k(x, y, z))^{-\lambda}}{\sum_{i=0}^M (d_i(x, y, z))^{-\lambda}}; & \text{якщо } d_k(x, y, z) \neq 0 \forall k = \overline{1, M}; \\ f(X_i(z), Y_i(z), z) \forall (x - X_i(z))^2 + (y - Y_i(z))^2 = 0. & \end{cases}$$

Недолік 1. Якщо кількість M заданих точок є великою, то кількість арифметичних операцій Q для обчислення $U = S_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ у одній точці пропорційна $M : Q = cM$ (c – деяка стала). Це означає, що в цьому випадку метод може бути неефективним або непрактичним.

Недолік 2. Рівність нулю градієнта у кожній точці D_k при фіксованому z є небажаними обмеженнями на наближувану функцію.

Недолік 3. Обчислювальна похибка (похибка заокруглення) стає істотною в околі точок $D_k(X_k(z), Y_k(z), z)$.

Далі вважаємо, що функція $u = f(x, y, z)$ описує просторовий розподіл щільності функції, а також, що задано M просторових кривих $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$ та M

функцій $\gamma_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$ змінної z , які отримані у точках з координатами $(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$.

Іншими словами, припускається, що кожній просторовій кривій ставиться у відповідність не одне число, а одна функція – характеристика розподілу щільності об'єкту конкретного типу залежно від координати z .

При цьому ця одна функція може бути розривною функцією змінної z – глибини. Нижче вважаємо їх неперервними.

Введемо до розгляду математичну модель просторового відновлення розподілу щільності об'єкту у вигляді:

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) = \frac{\sum_{k=1}^M \gamma_k(z) L_{k,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{k=1}^M L_{k,\lambda}(x, y, z)},$$

$$L_{k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{j=1, j \neq k}^M (d_j(x, y, z))^\lambda.$$

Теорема 2.7. Якщо $\gamma_k(z) \in C[-H, 0), k = \overline{1, M}$, то

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) \in C(R^3);$$

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z), k = \overline{1, M}, \forall z \in [-H, 0).$$

Доведення. Використовуючи позначення

$$h_{p,\lambda}(x, y, z) = \frac{L_{p,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{k=1}^M L_{k,\lambda}(x, y, z)}$$

і враховуючи властивості допоміжних функцій

$$L_{p,\lambda}(x, y, z) \geq 0, L_{p,\lambda}(x, y, z) \in C(R^3),$$

$$h_{p,\lambda}(x, y, z) \geq 0, p = \overline{1, M}, h_{p,\lambda}(X_k(z), Y_k(z), z) = \delta_{k,p}; k, p = \overline{1, M},$$

можна дійти висновку, що $\sum_{k=1}^M L_{k,\lambda}(x, y, z) > 0 \Rightarrow S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) \in C(R^3)$,

оскільки чисельники $L_{p,\lambda}(x, y, z)$ у формулі для $h_{p,\lambda}(x, y, z)$ є неперервними функціями $L_{p,\lambda}(x, y, z) \in C(R^3)$.

Запишемо наступну послідовність рівностей:

$$\begin{aligned} S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; X_p(z), Y_p(z), z) &= \frac{\sum_{k=1}^M \gamma_k(z) L_{k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\sum_{i=1}^M L_{i,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z)} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p} L_{k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\sum_{i=1}^M \delta_{i,p} L_{i,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z)} = \frac{\gamma_p(z) \delta_{p,p}}{\delta_{p,p}} = \gamma_p(z), p = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Таким чином, теорема 2.7 доведена.

2.4 Методи узагальнень глобальної інтерполяційної формули О.М.Литвина для системи неперетинних кривих

Розглянемо для довільної $f \in C(R^3)$, $f(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z), k = \overline{1, M}$, інтерлінаційні оператори [26]

$$O_{M,\lambda}(f; x, y, z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{M,k,\lambda}(x, y, z), \quad \lambda \geq 1, \quad M = 2, 3, \dots,$$

$$l_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(x, y, z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda};$$

$$d_i(x, y, z) = \sqrt{(X_i(z) - x)^2 + (Y_i(z) - y)^2},$$

$$d_{i,k} = \sqrt{(X_i(z) - X_k(z))^2 + (Y_i(z) - Y_k(z))^2},$$

які для випадку $\gamma_k(z) = \gamma_k = \text{const}$, $k = \overline{1, M}$, є інтерполяційними операторами на нерегулярній сітці вузлів, запропонованими О. М. Литвином в 1990 р.[10]

Теорема 2.8. Для кожної функції $f(x, y, z) \in C(R^3)$ виконуються співвідношення

$$O_{M,\lambda}(f; x, y, z) \in C(R^3),$$

$$O_{M,\lambda}(f; X_p(z), Y_p(z), z) = \gamma_p(z), \quad p = \overline{1, M}.$$

Доведення. Дослідимо властивості допоміжних функцій $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$.

Перш за все зазначимо, що знаменники $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda$ у формулах для $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ –

сталі величини і $d_{i,k}^\lambda > 0 \forall i, k \in \{1, \dots, M\}, i \neq k, \lambda > 0$, а чисельник – невід'ємна

функція $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda \geq 0$. Тому

$$l_{M,k,\lambda}(x, y, z) \geq 0 \forall k = \overline{1, M}; \lambda > 0.$$

Крім того,

$$\begin{aligned} l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) &= \\ &= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \\ &= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \\ &= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \delta_{k,p}; k, p = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \begin{cases} 1; & p = k; \\ 0; & \text{якщо } p = i, p \in \{1, 2, \dots, M\}, p \neq k. \end{cases}$$

Таким чином, $l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}$, $k, p = \overline{1, M}$. Враховуючи це, можна записати таку послідовність рівностей:

$$\begin{aligned} O_{M,\lambda}(f; X_p(z), Y_p(z), z) &= \\ &= \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p} = \gamma_p(z); p = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Теорема 2.8 доведена.

Враховуючи, що знаменники у формулі для $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – сталі числа, можна дійти висновку, що $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – поліном степеня $(M-1)2r$ за змінними x, y , якщо $\lambda = 2r, r = 1, 2, \dots$ [10].

Зауважимо, що базисні функції $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ є також функціями координат точок

$$D_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M};$$

$$l_{M,k,\lambda}(x, y, z) = l_{M,k,\lambda}(x, y, z; X(z), Y(z), z)$$

і залежать, природно, від розміщення цих координат $D_k(X_k(z), Y_k(z), z); k = \overline{1, M}$.

Приклади показують, що поведінка $O_{M,\lambda}(f; x, y, z)$, що використовує

допоміжні функції вигляду $l_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda}$ може спричинити

великі коливання між точками $D_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}$ і, крім того, $l_{M,k,\lambda}(x, y, z) \rightarrow \infty$ оскільки чисельник в них – необмежена величина при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Це твердження є наслідком того, що оператори $O_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ є очевидними узагальненнями поліноміальних інтерполяційних операторів Лагранжа від двох змінних на випадок нерегулярно розміщених вузлів. За теоремами Вейерштрасса, на замкнутому інтервалі $[a, b]$ кожну неперервну функцію можна наблизити із заданою точністю $\varepsilon > 0$ алгебраїчним поліномом деякого степеня $n = n(\varepsilon)$. Проте інтерполяційні оператори Лагранжа, як відомо [10], збігаються не для кожної неперервної функції при довільних вузлах інтерполяції. Наприклад, доведено, що інтерполяційний поліном Лагранжа з рівномірно розміщеними на інтервалі $[-1, 1]$ вузлами інтерполяції

для функції $f(x) = |x|$ не збігається до цієї функції. Тому, нижче розглянемо ще інші формули для $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$.

Теорема 2.9. Якщо в інтерлінаційному операторі

$$O_{M,\lambda}(f; x, y, z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{M,k,\lambda}(x, y, z); \lambda \geq 1, M = 2, 3, \dots,$$

де

$$l_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(x, y, z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda},$$

змінити $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ на

$$L_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \frac{l_{M,k,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{p=1}^M \prod_{p=1, p \neq k}^M l_{M,k,\lambda}(x, y, z)},$$

і якщо $\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$, то $O_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ є додатним оператором інтерлінації

$$O_{M,\lambda}(f; X_p(z), Y_p(z), z) = \gamma_k(z); k = \overline{1, M}.$$

Доведення. Перш за все, зауважимо, що при $\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$ чисельник у формулі для допоміжних функцій $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x, y . Враховуючи, що знаменники у формулі для $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – сталі числа, можна зробити висновок, що $l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – поліном степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x, y . Тобто $O_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ є раціональним дробом, якщо $\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$.

Щоб довести, що ці раціональні вирази створюють базис, запишемо таку послідовність рівностей:

$$L_{M,k,\lambda}(X_q(z), Y_q(z), z) = \frac{l_{M,k,\lambda}(X_q(z), Y_q(z), z)}{\sum_{p=1}^M l_{M,p,\lambda}(X_q(z), Y_q(z), z)} = \begin{cases} 1, & q = k; \\ 0, & q \neq k, q = \overline{1, M}. \end{cases}$$

Таким чином при такому виборі $L_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ виконуються співвідношення $L_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}$, $k, p = \overline{1, M}$. Повторюючи доведення теореми 2.8, отримуємо

$$O_{M,\lambda}(f; X_q(z), Y_q(z), z) = \gamma_q(z); p = \overline{1, M}.$$

Теорема 2.9 доведена.

Зауваження 1. Якщо λ – раціональне число: $\lambda = \frac{m}{n}$, то функції

$l_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ можуть набувати дійсних значень лише за умови $m \in Z$, $n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$, оскільки вираз $(x - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (y - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z))$ може бути як додатним, так і від'ємним.

Зауваження 2. Таким чином, оператор $L_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ буде додатним оператором для довільного $\lambda \geq 1$, оскільки для будь-якого $\lambda \geq 1$ виконуватимуться умови $0 \leq L_{M,k,\lambda}(x, y, z) \leq 1$.

Теорема 2.10. Якщо в інтерлінаційному операторі

$$O_{M,\lambda}(f; x, y, z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) l_{M,k,\lambda}(x, y, z); \lambda \geq 1, M = 2, 3, \dots,$$

ПОКЛАСТИ

$$l_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{(x - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (y - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z))}{(X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z))^2}, \quad (2.3)$$

то оператор $O_{M,\lambda}(f; x, y, z)$ теж буде оператором інтерлінації, якщо $\lambda > 0$, $\lambda = 2q$, $q \in N$, $O_{M,\lambda}(f; X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z)$; $k = \overline{1, M}$.

Доведення виконується аналогічно доведенню теореми 2.9 на підставі використання таких рівностей:

$$\begin{aligned} l_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) &= \\ &= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M \left| (X_p(z) - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (Y_p(z) - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z)) \right|^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M \left((X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z))^2 \right)^\lambda} = \\ &= \begin{cases} 1, & p = k; \\ 0, & p \neq k, p = \overline{1, M}. \end{cases} \end{aligned}$$

Зауваження 3. Відмітимо, що допоміжні функції (2.3) є базисними поліномами мінімального степеня, але як всі поліноміальні базисні інтерполянти можуть мати великі відхилення між лініями інтерполяції, в той час як базисні функції з теореми 5 задовольняють умови $0 \leq L_{M,k,\lambda}(x, y, z) \leq 1$.

2.5 Оператори наближення функцій з використанням сплайн-інтерлінації функцій

В цьому розділі розглянемо побудову та дослідження просторових математичних моделей відновлення розподілу щільності об'єкту між просторовими неперетинними кривими, взагалі кажучи, з використанням сплайн-інтерлінації функцій від 3-х змінних.

В основу побудови оператора сплайн-інтерлінації покладено покроковий

алгоритм, одним з кроків якого є виконання триангуляції поверхні.

2.5.1 Алгоритм побудови операторів сплайн-інтерлінації функцій

Алгоритм побудови операторів сплайн-інтерлінації викладемо по кроках.

Крок 1. Виконуємо триангуляцію поверхні: введемо позначення $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $T_\mu = T_\mu(z)$ – трикутник на глибині z з вершинами

$$P_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = \mu_1, \mu_2, \mu_3; \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, \dots, M\},$$

тобто $\overline{T_\mu}(z) = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in T_\mu(z)\}$ є криволінійною призмою.

Крок 2. Будуємо для кожного трикутника $T_\mu(z)$ оператор інтерлінації $O_\mu(x, y, z)$ у вигляді

$$O_\mu(x, y, z) = f_{\mu_1}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + \\ + f_{\mu_2}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_3}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right),$$

$$\phi_{p,q}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z) = \begin{vmatrix} X_{\mu_1}(z) & Y_{\mu_1}(z) & 1 \\ X_{\mu_2}(z) & Y_{\mu_2}(z) & 1 \\ X_{\mu_3}(z) & Y_{\mu_3}(z) & 1 \end{vmatrix} = \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z).$$

Введемо до розгляду оператор

$$O_M F(x, y, z) = O_\mu f(x, y, z), (x, y, z) \in T_\mu(z) \times [-H, 0], T_\mu(z) \subset D = \bigcup_\mu T_\mu(z).$$

Нехай Q – кількість криволінійних трикутних призм, відповідних вибраній триангуляції.

Теорема 2.11. Оператор $O_\mu(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ між системою просторових кривих $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$, тобто

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = f(X_p(z), Y_p(z), z) = f_p(z), -H \leq z \leq 0, p = \overline{1, M}.$$

Кожній неперервній функції $f(x, y, z) \in C(D)$ цей оператор ставить у відповідність теж неперервну функцію $O_M f(x, y, z) \in C(D)$:

$$f(x, y, z) \in C\left(\bigcup_\mu T_\mu \times [-H, 0]\right), T_\mu(z) \subset D \Rightarrow O_M f(x, y, z) \in C\left(\bigcup_\mu T_\mu \times [-H, 0]\right).$$

Доведення. Інтерлінаційні властивості випливають з наступної властивості детермінантів: детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Тому, якщо $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, то

$$\begin{aligned} O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) &= O_\mu(X_p(z), Y_p(z), z) = f_{\mu_1}(z) \frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} + \\ &+ f_{\mu_2}(z) \frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_1, \mu_3}(z)} + f_{\mu_3}(z) \frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_1, \mu_2}(z)} = f_p(z), \\ &(x, y) \in T_\mu, z \in [-H, 0], p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}. \end{aligned}$$

Тут враховано, що

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) &= 1, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0, \\ \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) &= 1, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0, \\ \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) &= 1, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, оператор $O_M f(x, y, z)$ є оператором кусково-лінійної інтерполяції за змінними $x, y \forall z \in [-H, 0]$.

Для доведення того, що $O_M f(x, y, z) \in C(D)$, досить зазначити, що функції $O_{p,q,r} f(x, y, z)$ та $O_{p,q,r'} f(x, y, z)$ на спільній криволінійній, взагалі кажучи, грані призм мають однакові сліди, тобто функція $F(x, y, z) = O_M f(x, y, z)$ при переході від тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_r(z)$ до тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_{r'}(z)$ зберігає неперервність. Те, що у випадку неперервних слідів $f_p(z) \in C[-H, 0], p = \overline{1, M}$ функції $O_\mu f(x, y, z)$ теж будуть неперервними, випливає з формули для операторів $O_\mu f(x, y, z)$ і відомої властивості неперервних функцій: сума неперервних функцій є неперервною функцією [8].

Теорема 2.11 доведена.

2.5.2 Оператори сплайн-інтерлінації функцій на системі неперетинних кривих у вертикальних площинах

Означення: Будемо вважати просторовою кривою множину точок наступного вигляду

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M},$$

де $X_k(z), Y_k(z)$ – не є сталими.

Позначимо через $f(x, y, z)$ функцію розподілу, яку вважатимемо відомою лише в точках вказаної системи просторових неперетинних кривих. Тобто вважаємо відомими функції

$$f_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z), \quad -H \leq z \leq 0, \quad k = \overline{1, M},$$

де функції $f_k(z)$ вважаються отриманими унаслідок аналізу просторових неперетинних кривих у кожній точці на глибині z [11].

Введемо і дослідимо також оператори сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних просторових кривих $\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}$, які нерівномірно розміщені на поверхні $z = 0$, використовуючи кусково-квадратичні наближення за змінними x, y у кожній з трикутних призм.

Введемо M допоміжних функцій $h_k(t) \in C[0, 1], k = \overline{1, M}$, з властивостями $h_k(0) = 0, h_k(1) = 1, k = \overline{1, M}$ та оператори

$$\begin{aligned} \tilde{O}_M f(x, y, z) = O_\mu f(x, y, z) = & f_{\mu_1}(z) h_{\mu_1} \left(\frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + \\ & + f_{\mu_2}(z) h_{\mu_2} \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_3}(z) h_{\mu_3} \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right), \\ (x, y, z) \in & T_\mu \subset D, z \in [-H, 0]. \end{aligned}$$

Теорема 2.12. Оператор $\tilde{O}_M f(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ на всій системі просторових кривих $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$:

$$O_M f(X_k(z), Y_k(z), z) = f_k(z), \quad -H \leq z \leq 0, k = \overline{1, M};$$

$$f(x, y, z) \in C(D) \Rightarrow O_M f(x, y, z) \in C(D).$$

Доведення теореми 2.12 виконується аналогічно доведенню теореми 2.11 з урахуванням властивостей функцій $\phi_{p,q}(x, y, z)$ та $h_k(t)$.

Зауваження. Зокрема, якщо $h_k(t) = t \quad \forall k = \overline{1, M}$, то $\tilde{O}_M f(x, y, z) = O_M f(x, y, z)$. Якщо $h_k(t) = t^2 \quad \forall k = \overline{1, M}$, то $\tilde{O}_M f(x, y, z)$ – оператор інтерлінації функцій трьох змінних з кусково-квадратичними допоміжними функціями.

Викладемо метод побудови операторів інтерлінації функцій трьох змінних, що узагальнює відомий метод Зламала – наближення функцій двох змінних кусково-поліноміальними (зокрема, кусково-квадратичними) функціями на трикутниках розбиття.

Нехай $p(x, y, z)$ – довільний поліном другого степеня від двох змінних x, y з коефіцієнтами, що залежать від третьої змінної z :

$$p(x, y, z) = \alpha_1(z) + \alpha_2(z)x + \alpha_3(z)y + \alpha_4(z)x^2 + \alpha_5(z)xy + \alpha_6(z)y^2$$

і $\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}$ – просторові неперетинні криві, які є ребрами трикутної призми $T(z)$, а $Q_i(z), 1 \leq i \leq 3$ – просторові криві, що проходять через середини граней трикутної призми паралельно ребрам призми (рисунок 2.5).

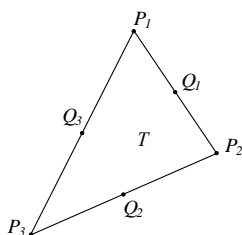


Рисунок 2.5 – Графічне Вигляд зверху тригранної призми $T(z)$ при фіксованому z з просторовими кривими на ребрах і посередині граней

Можна довести, що для довільних функцій $a_i(z), b_i(z), 1 \leq i \leq 3$, існує єдиний поліном $p(x, y, z)$ другого степеня наведеного вище вигляду такий, що

$$p(\Gamma_k) = p(X_k(z), Y_k(z), z) = f_k(z), \forall z \in [-H, 0], k = 1, 2, 3;$$

$$p(Q_i) = p\left(\frac{X_k(z) + X_{k+1}(z)}{2}, \frac{Y_k(z) + Y_{k+1}(z)}{2}, z\right) = f_{k,k+1}(z);$$

$$\forall z \in [-H, 0], 1 \leq i \leq 3; X_4 = X_1; Y_4 = Y_1.$$

Тому, якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на $T(z)$, то існує єдиний поліном $p(x, y, z)$ за змінними x, y , який має наступні інтерлінаційні властивості:

$$p(\Gamma_k) = f_k(z) \forall z \in [-H, 0], 1 \leq k \leq 3, \quad (2.4)$$

$$f(Q_j) = p(Q_j) = \tilde{f}_j(z) \forall z \in [-H, 0], 1 \leq j \leq 3. \quad (2.5)$$

Таким чином, цей поліном $p(x, y, z)$ за змінними x, y збігається з наближуваною функцією $f(x, y, z)$ у всіх точках шести просторових кривих. Тому він може бути використаний для наближення функції $f(x, y, z)$ в довільній точці вказаної трикутної призми з криволінійними ребрами.

Узагальненням відповідного твердження Зламала на випадок наближення функцій трьох змінних є наступна теорема.

Теорема 2.13. Нехай задано довільне розбиття області $D \times [-H, 0], D \subset R^2$, на трикутні області – призми з криволінійними, взагалі

кажучи, ребрами $\bigcup_{i=1}^N T_i \times [-H, 0] = D \times [-H, 0]$.

Позначимо через $h = \max_k \max_{-H \leq z \leq 0} \{h_k(z)\}$, $k = 1, 2, 3$ найбільшу довжину сторін трикутників $T_i(z) \subset D$ і θ – найменший з кутів трикутників T_i . Тоді, якщо $f \in C^3(D \times [-H, 0])$ і $s(x, y, z)$ – єдина кусково-поліноміальна функція (за змінними x, y), що інтерлінує $f(x, y, z)$ в сенсі (4), (5), то

$$\exists K > 0: \|f - s\|_{W_2^1(D)} \leq K \frac{h^2}{\sin \theta_0} \left\{ \sup \left\{ \|D^\alpha f\|_{L_\infty(G)} : |\alpha| = 3 \right\} \right\} \forall z \in [-H, 0]$$

для довільної тріангуляції з кутом, що задовольняє умову $\theta \geq \theta_0 > 0$, де константа K не залежить від $f(x, y, z)$ і області D .

Тут

$$\begin{aligned} \|f - s\|_{W_2^1(G)}^2 &= \iint_D (f(x, y, z) - s(x, y, z))^2 dx dy + \\ &+ \iint_D \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (f(x, y, z) - s(x, y, z)) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} (f(x, y, z) - s(x, y, z)) \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Доведення цієї теореми повторює доведення відповідної теореми Зламала для різних фіксованих значень z за умови, що функція $f(x, y, z)$ неперервно залежить від змінної z і має $\forall z \in [-H, 0]$ обмежені частинні похідні третього порядку за змінними x, y [25].

Теорема 2.13 доведена.

Зазначимо, що крім того, цей метод допускає також узагальнення на випадок, коли між ребрами трикутної призми розміщені по дві і більше

просторові криві. У цьому випадку отримаємо кусково-поліноміальну (за змінними x, y) інтерлінацію функцій трьох змінних більш загального типу.

Аналогічні кусково-поліноміальні (за змінними x, y) формули інтерлінації можна побудувати також для розбиття множини точок на поверхні на чотирикутники. Наприклад, для довільних чотирьох точок $P_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, 4}$, що є вершинами випуклого чотирикутника $G_{1234} = P_1 P_2 P_3 P_4$, оператор інтерлінації функції трьох змінних $f(x, y, z)$ на системі чотирьох просторових кривих $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, 4}$, може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned} O_{1234}f(x, y, z) = & \gamma_1(z) \frac{\phi_{23}(x, y, z)\phi_{34}(x, y, z)}{\phi_{23}(X_1(z), Y_1(z), z)\phi_{34}(X_1(z), Y_1(z), z)} + \\ & + \gamma_2(z) \frac{\phi_{14}(x, y, z)\phi_{34}(x, y, z)}{\phi_{14}(X_2(z), Y_2(z), z)\phi_{34}(X_1(z), Y_1(z), z)} + \\ & + \gamma_3(z) \frac{\phi_{12}(x, y, z)\phi_{14}(x, y, z)}{\phi_{12}(X_3(z), Y_3(z), z)\phi_{14}(X_3(z), Y_3(z), z)} + \\ & + \gamma_4(z) \frac{\phi_{12}(x, y, z)\phi_{23}(x, y, z)}{\phi_{12}(X_4(z), Y_4(z), z)\phi_{23}(X_4(z), Y_4(z), z)}, \end{aligned}$$

$$(x, y) \in G_{1234}, z \in [-H, 0], \quad \phi_{p,q}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.14. Оператор $O_{1234}f(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функції $f(x, y, z)$ з квадратичними за змінними x, y при фіксованому z допоміжними функціями $\phi_{p,q}(x, y, z)\phi_{p,r}(x, y, z), r \neq q$, і може бути представлений у вигляді [28]

$$O_{1234}f(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z); z \in [-H, 0], k = \overline{1, 4}.$$

Доведення. Перш за все, зазначимо, що функції

$$\varphi_{p,q}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{vmatrix} \text{ лінійно залежать від змінних } x, y. \text{ При цьому}$$

$$\phi_{p,q}(X_p(z), Y_p(z), z) = 0, \phi_{p,q}(X_q(z), Y_q(z), z) = 0,$$

оскільки детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Таким чином, функції $\phi_{p,q}(x, y, z)$ дорівнюють нулю на лінії, що з'єднує точки $P_p(X_p(z), Y_p(z), z), P_q(X_q(z), Y_q(z), z)$. Тобто добуток двох таких функцій $\phi_{p,q}(x, y, z)\phi_{p,r}(x, y, z), r \neq q$, є поліномом другого степеня (функцією, квадратичною за змінними x, y), який дорівнює нулю у трьох точках - вершинах двох сторін чотирикутника P_pP_q та $P_pP_r, p, q, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, і не дорівнює нулю у четвертій точці $P_s(X_s(z), Y_s(z), z), s \neq p, q, r$. Це означає, що допоміжна квадратична функція

$$\psi_s(x, y, z) = \frac{\phi_{pq}(x, y, z)\phi_{pr}(x, y, z)}{\phi_{pq}(X_s(z), Y_s(z), z)\phi_{qr}(X_s(z), Y_s(z), z)}$$

має такі властивості:

$$\psi_s(X_s(z), Y_s(z), z) = 1; \psi_s(X_p(z), Y_p(z), z) = 0;$$

$$\psi_s(X_q(z), Y_q(z), z) = 0; \psi_s(X_r(z), Y_r(z), z) = 0.$$

З використанням цих властивостей, інтерлінаційні властивості $O_{1234}f(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z)$, $z \in [-H, 0]$, $k = \overline{1, 4}$, доводяться безпосередньою перевіркою.

Теорема 2.14 доведена.

2.6 Висновки по розділу

В другому розділі були вирішені такі наукові та практичні задачі:

- на основі методів інтерлінації функцій для системи прямих, що описують вертикальні свердловини, набули подальшого розвитку методи відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему похилих свердловин різного типу методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних. Їх використання дозволить отримувати більш точні результати відновлення відповідних шарів корисних копалин;

- уперше побудовано математичну модель просторового розподілу щільності об'єктів, заданих своїми слідами лише у заданій системі просторових кривих, кожна з яких лежить у відповідній вертикальній площині, і які не перетинаються одна з одною. Розроблені модифікації методу дозволяють на основі інформації про наявність об'єкту відновлювати відповідний шар тієї чи іншої корисної копалини;

- вперше побудована математична модель відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за даними неперетинних просторових кривих та інтерлінації функцій трьох змінних узагальненими поліномами між системою рівномірно розміщених просторових кривих;

- вперше побудована математична модель відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту за даними просторових кривих та узагальненої глобальної інтерполяційної формули Д. Шепарда;

- вперше побудовані математичні моделі відновлення розподілу

щільності досліджуваного об'єкту за даними неперетинних просторових кривих та узагальненої глобальної інтерполяційної формули О.М.Литвина;

Всі теоретичні твердження розділу 2 доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм у системах комп'ютерної математики MathCad. Вказані програми наведені з детальним описом в Додатках до дисертації.

Результати, наведені в розділі 2, повністю викладені в публікаціях [30-34, 38-45].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [8-11, 26, 28, 29-34,38-45, 52-70].

3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН МЕТОДАМИ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

3.1 Теоретичні твердження

Застосування теорії інтерлінації функцій трьох змінних до розв'язання технічних задач таких, як відновлення в кожній точці (x, y, z) між заданою системою просторових кривих

$$\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z\}; -H \leq z \leq 0\}$$

за даними матриці-функції за змінною z , де z – глибини просторової кривої, $\gamma_{k,i}(z)$, $k = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, n}$ має велике практичне значення на сьогоднішній день.

Універсального розрахункового алгоритму, що описує морфологію покладу не існує. Завдання побудови об'ємних моделей складчастих структур є інваріантним.

Побудова достовірної моделі можлива тільки шляхом залучення додаткової (апріорної) інформації. Тому оптимальним видається наступний шлях геометризації складчастих порушень:

- формується інформаційна модель складки (точки підперерізу, об'єктів, що належать базовому класу: точка геологічних спостережень);
- використовуючи стандартні математичні методи апроксимації і інтерполяції отримують спрощену модель складки;
- початкова модель піддається комп'ютерній трансформації виходячи з представлень фахівця, що не формалізуються. У ході рішення цієї задачі інформація про пликативне порушення не відособлюється в геологічній базі даних (приміром в геологічних колонках бурових свердловин).

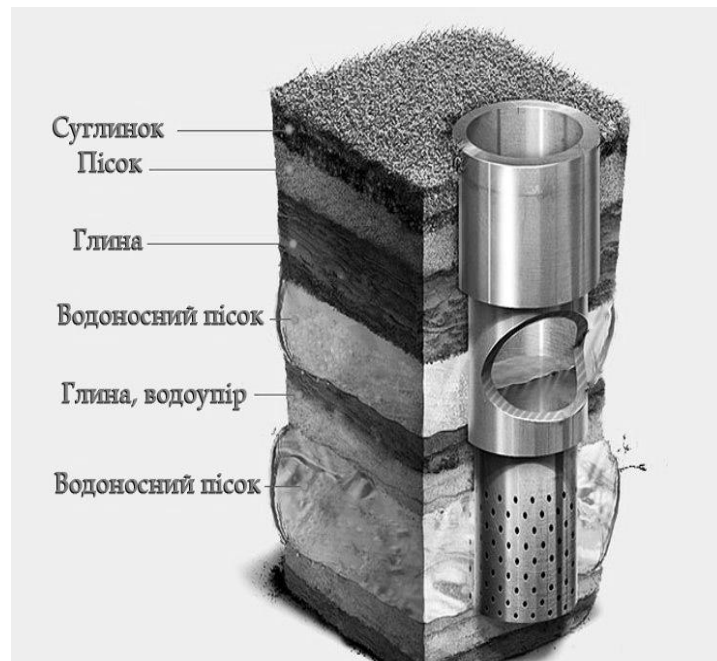


Рисунок 3.1 – Просторовий розподіл корисних копалин

Мінерально-сировинні ресурси як складова природних ресурсів мають значний вплив на розміщення промислового виробництва, зокрема на формування промислових комплексів. Їх роль у розвитку і розміщенні промисловості в період зростання науково-технічного прогресу та інтенсифікації виробництва не зменшується, а лише видозмінюється.

У надрах земної кори корисні копалини залягають у певному порядку, закономірно утворюючи територіальні поєднання мінеральних ресурсів, які називають геохімічними системами.

Якісні показники корисних копалин визначають можливість їх комплексної переробки й одержання при цьому, крім основного компонента, цілої гами інших цінних елементів та їх сполучень. Так, у процесі комплексної переробки руд кольорових металів у цехах сучасного комбінату можна одержати мідь, цинк, свинець, олово, нікель, багато рідкісних цінних металів. При комплексній переробці хімічної сировини, наприклад калійних і кухонних солей, важливими продуктами є хлор, сода, мінеральні добрива, металічний магній та багато інших компонентів.

Розглянемо скінчену ділянку для розвідувальних робіт (Рисунок 3.2).

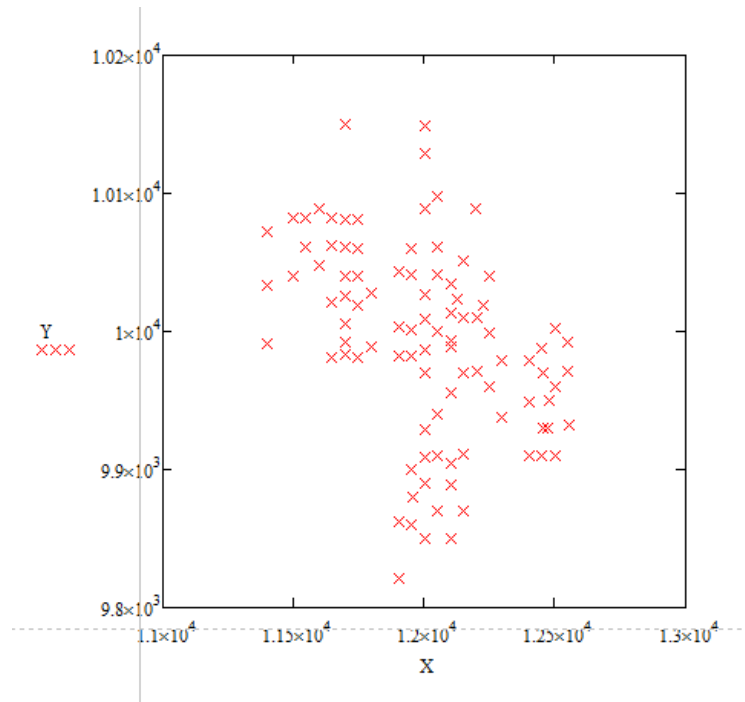


Рисунок 3.2 – Розміщення розвідувальних свердловин на робочій ділянці

Маючи інформацію про залягання певного шару (Рисунок 3.3) тієї чи іншої корисної копалини можна відновити повну структуру розподілу корисних копалин в надрах земної поверхні.

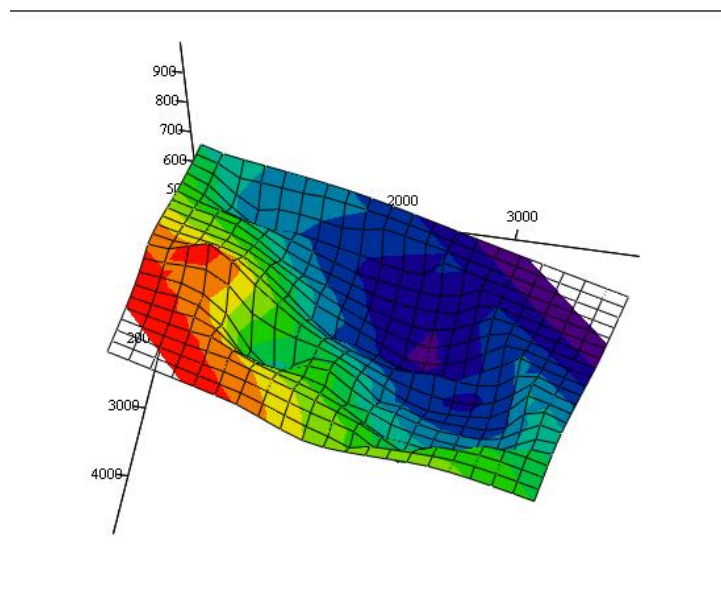


Рисунок 3.3 – Верхня границя залягання однієї зі сполук корисних копалин в надрах землі

В роботі [28] запропоновано і досліджено загальний метод побудови математичних моделей просторового відновлення розподілу щільності досліджуваного об'єкту на основі даних просторових кривих та інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ – невідомого відновлення функцій в кожній точці (x, y, z) . У вказаних роботах істотно використовувалось припущення про те, що всі криві вертикальні. Випадок використання даних для побудови математичних моделей просторового розподілу щільності об'єкту для просторових неперетинних кривих у зазначеній монографії та інших джерелах в ній не досліджувалися.

В даній роботі розглядається задача про відновлення в кожній точці (x, y, z) між заданою системою неперетинних просторових кривих $\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}$ скінченної множини функцій або їх сполук за даними $\gamma_{k,i}(z)$, $k = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, n}$, n – кількість сполук лінійної щільності i -го елемента в k -ій кривій на глибині z , $-H \leq z \leq 0$. Тобто, ми обмежуємося лише n вибраними елементами.

Запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами по заданій глибині. Наведений метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин між похилими свердловинами дозволяє будувати математичні моделі структури кори Землі з використанням всіх сполук кернів похилих свердловин, які призведуть до створення ефективних методів розвідки корисних копалин та розробки родовищ.

Математична модель. Введемо позначення:

$$\rho(x, y, z) = [\rho_1(x, y, z) \dots \rho_n(x, y, z)]^T,$$

$$\gamma_{k,i}(z) = \rho_i(X_k(z), Y_k(z), z), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n},$$

де $\rho(x, y, z)$ – матриця-функція, яка описує просторовий розподіл всієї сукупності досліджуваних нами функцій, кожний стовець якої має компоненти, які означають розподіл i -ого об'єкту;

$\gamma_{k,i}(z)$ - розподіл i -ої корисної копалини в k -ій свердловині.

$$\gamma_{k,i}(z) = [\gamma_{k,1}(z) \dots \gamma_{k,n}(z)]^T,$$

де $\rho_i(x, y, z)$, $i = \overline{1, n}$ - щільність i -ої функції.

Введемо також до розгляду допоміжні функції $H_k(x, y, z)$, що розглянуті у працях [30, 31, 36].

Допоміжні функції $H_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, M}$, вводяться таким чином:

$$H_k(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}, 1 \leq k, p \leq M.$$

Тоді математичною моделлю просторового розподілу щільності об'єктів, заданих своїми слідами лише у заданій системі просторових кривих, кожна з яких лежить у відповідній вертикальній площині, і які не перетинаються одна з одною, будемо називати оператор

$$O\rho(x, y, z) = \sum_{k=1}^M H_k(x, y, z) \rho_k(z), \quad (3.1)$$

Введемо і дослідимо також оператори сплайн-інтерлінації матричної функцій трьох змінних $\rho(x, y, z)$ на системі неперетинних просторових кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z\}; -H \leq z \leq 0\}.$$

Введемо M допоміжних функцій $h_k(t) \in C[0,1], k = \overline{1, M}$, таких, що $h_k(0) = 0, h_k(1) = 1, k = \overline{1, M}$, та оператори

$$\begin{aligned} O_\mu \rho(x, y, z) &= \rho_{\mu_1}(z) h_{\mu_1} \left(\frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}} \right) + \\ &+ \rho_{\mu_2}(z) h_{\mu_2} \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}} \right) + \\ &+ \rho_{\mu_3}(z) h_{\mu_3} \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}} \right), \\ (x, y, z) &\in T_\mu \subset D, z \in [-H, 0]. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Оператор $O_M \rho(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функцій трьох змінних на системі кривих Γ_k , тобто дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції

$$O_M \rho(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z), -H \leq z \leq 0, k = \overline{1, M};$$

$$\rho(x, y, z) \in C \left(\bigcup_{\mu} T_\mu \times [-H, 0] \right) \Big|_{T_\mu \subset D} \Rightarrow O_M \rho(x, y, z) \in C \left(\bigcup_{\mu} T_\mu \times [-H, 0] \right).$$

Якщо деякі (або всі) функції $\rho_i(x, y, z), i = \overline{1, n}$ мають розв'язок в заданій системі точок $z_k, k = \overline{1, M}$, то і $O_M \rho(x, y, z)$ буде мати розв'язок.

Доведення. Інтерлінаційні властивості випливають з наступної властивості детермінантів: детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Тому, якщо $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, то

$$\begin{aligned}
O_{\mu}\rho(x, y, z) &= \rho_{\mu_1}(z)h_{\mu_1}\left(\frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}}\right) + \\
&+ \rho_{\mu_2}(z)h_{\mu_2}\left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}}\right) + \\
&+ \rho_{\mu_3}(z)h_{\mu_3}\left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}}\right) = \rho_k(z), \\
(x, y, z) &\in T_{\mu} \subset D, \quad z \in [-H, 0], \quad p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.
\end{aligned}$$

Тут враховано, що

$$\begin{aligned}
\phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) &= 1, \quad \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) = 0, \quad \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) = 0, \\
\phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) &= 1, \quad \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) = 0, \quad \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) = 0, \\
\phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) &= 1, \quad \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) = 0, \quad \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) = 0.
\end{aligned}$$

Іншими словами, оператор $O_M\rho(x, y, z)$ є оператором інтерлінації матричної функцій, кожна компонента яких залежить від трьох змінних на системі кривих Γ_k , тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх просторових кривих по глибині z , $-H \leq z \leq 0$, тобто дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці (x, y, z) між просторовими кривими по глибині z [45].

Для доведення того, що $O_M\rho(x, y, z) \in C\left(\bigcup_{\mu} T_{\mu} \times [-H, 0]\right)$, достатньо зазначити, що функції $O_{p,q,r}\rho(x, y, z)$ та $O_{p,q,r}\rho(x, y, z)$ на спільній стороні обох трикутників, що розміщені на площині, зі свердловинами $\Gamma_p(z)$ та $\Gamma_q(z)$ мають однакові сліди, тобто функція $P(x, y, z) = O_M\rho(x, y, z)$ при

переході від тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_r(z)$ до тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_{r'}(z)$ зберігає неперервність. Те, що для неперервних слідів $\rho_p(z) \in C[-H, 0], p = \overline{1, m}$ функції $P_\mu(x, y, z) = O_\mu \rho(x, y, z)$ теж будуть неперервними, випливає з формули для операторів $O_\mu \rho(x, y, z)$ і відомої властивості неперервних функцій: сума неперервних матричних функцій є неперервною матричною функцією.

Теорема 3.1 доведена.

Зауваження 1. Зокрема, в якості $h_k(t) \forall k = \overline{1, M}$ можна взяти $t^r, r = 1, 2$ і при цьому отриманий оператор $O_M \rho(x, y, z)$ - буде оператором інтерлінації матричної функції $\rho(x, y, z)$, який дозволяє між заданою системою просторових кривих відновлювати матричну функцію $\rho(x, y, z)$ в кожній точці від (x, y, z) .

Зауваження 2. Якщо одна або всі з компонентів матриці $\rho(x, y, z)$ мають розриви першого роду на деяких глибинах, то оператор $O_M \rho(x, y, z)$ буде представляти також розривну функцію від (x, y, z) .

Розглянемо для довільної $\rho(x, y, z) \in C(R^3)$ інтерлінаційні оператори

$$O_{M,\lambda}(\rho; x, y, z) = \sum_{k=1}^M \rho_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x, y, z), \lambda \geq 1, M = 2, 3, \dots,$$

з глобальними допоміжними функціями [38]

$$d_i(x, y, z) = \sqrt{(X_i(z) - x)^2 + (Y_i(z) - y)^2};$$

$$d_{i,k} = \sqrt{(X_i(z) - X_k(z))^2 + (Y_i(z) - Y_k(z))^2};$$

$$\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(x, y, z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda}.$$

Теорема 3.2. Для кожної $\rho(x, y, z) \in C(R^3)$ виконуються співвідношення

$$O_{M,\lambda}(\rho; x, y, z) \in C(R^3),$$

$$O_{M,\lambda}(\rho; X_p(z), Y_p(z), z) = \gamma_p(z), \quad p = \overline{1, M}.$$

Тобто кожна компонента матриці $\rho_i(x, y, z) \in C(R^3)$.

Слід зазначити, що, на відміну від Теорема 2.4, в данному випадку використовуються матричні функції $\rho(x, y, z)$.

Доведення. Дослідимо властивості допоміжних функцій $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$.

Перш за все зазначимо, що знаменники $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda$ у формулах для $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$

– сталі величини і $d_{i,k}^\lambda > 0 \forall i, k \in \{1, \dots, M\}, i \neq k, \lambda > 0$, а чисельник – невід’ємна

функція $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda \geq 0$. Тому [28]

$$\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z) \geq 0 \forall k = \overline{1, M}; \lambda > 0.$$

Крім того,

$$\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \\
&= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \\
&= \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \delta_{k,p}; \\
&k, p = \overline{1, M},
\end{aligned}$$

ОСКІЛЬКИ

$$\frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \begin{cases} 1, & p = k, \\ 0, & \text{якщо } p = i, p \in \{1, 2, \dots, M\}, p \neq k. \end{cases}$$

Таким чином, $\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, M}$. Враховуючи це, можна записати таку послідовність рівностей:

$$O_{M,\lambda}(\rho; X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p} = \gamma_p(z), p = \overline{1, M},$$

оскільки функції $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – скалярні, а $\rho_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ – буде математичною функцією отриманою перемноженням скалярної функції $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ на матричну функцію $\rho_k(z)$.

Теорема 3.2 доведена.

3.2 Оператори інтерлінації функцій на системі кривих, розміщених в одній площині

Вважаємо, що всі вертикальні частини вказаних типів кривих належать одній вертикальній площині, а скривлені частини можуть лежати в площині перпендикулярній до заданої.

Хай $s_{1k}(x, z), k = \overline{1, m}$, $s_{2l}(y), l = \overline{1, n}$ базисні функції, які визначаються формулами (нижче $X_k = X_k(z)$)

$$s_{1k}(x, z) = \frac{(x - X_1)(x - X_2) \dots (x - X_{k-1})(x - X_{k+1}) \dots (x - X_m)}{(X_k - X_1)(X_k - X_2) \dots (X_k - X_{k-1})(X_k - X_{k+1}) \dots (X_k - X_m)};$$

$$s_{2l}(y) = \frac{(y - Y_1)(y - Y_2) \dots (y - Y_{l-1})(y - Y_{l+1}) \dots (y - Y_n)}{(Y_l - Y_1)(Y_l - Y_2) \dots (Y_l - Y_{l-1})(Y_l - Y_{l+1}) \dots (Y_l - Y_n)};$$

Лема 1. Базисні функції $s_{1k}(x) = s_{1k}(x, z)$, $s_{2l}(y), k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}$ мають такі властивості

$$s_{1k}(X_p(z), z) = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, m}; s_{2l}(Y_q) = \delta_{l,q}, l, q = \overline{1, n}; G = [X_1, X_m] \times [Y_1, Y_n] \quad (3.2)$$

Доведення цієї леми можна провести за допомогою безпосередньої підстановки у формули s_{1k}, s_{2l} замість змінних x та y відповідних функцій.

Теорема 3.3. Оператор

$$O_{mn}\rho(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n s_{1k}(x, z) s_{2l}(y) \rho_{k,l}(z)$$

є оператором інтерлінації матриці-функції $\rho(x, y, z)$ на системі кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z): x = X_k(z), y = Y_l = \text{const}, z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}$$

$$O_{mn}\rho(X_p(z), Y_q, z) = \rho(X_p(z), Y_q, z) = \gamma_{p,q}(z), p = \overline{1, M}; q = \overline{1, N}.$$

Оператор $O_{mn}\rho(x, y, z)$ є оператором поліноміальної інтерполяції матриці-функції за двома змінними x та y для кожного фіксованого z .

Доведення. Враховуючи властивості (3.2) для базових функцій

$$s_{1k}(X_p(z), z) = \delta_{kp}, 1 \leq k, q \leq m, s_{2l}(Y_q) = \delta_{ql}, 1 \leq q, l \leq n,$$

можна записати

$$\begin{aligned} O_{mn}\rho(X_p(z), Y_q, z) &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N s_{1k}(X_p(z), z) s_{2l}(Y_q) \rho_{k,l}(z) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \delta_{k,p} \delta_{l,q} \rho_{k,l}(z) = \gamma_{p,q}(z), p = \overline{1, M}, q = \overline{1, N}, -H \leq z \leq 0 \end{aligned}$$

Таким чином, перша частина теореми 3.3 доведена.

Для доведення другої частини теореми 3.3 достатньо зауважити, що при фіксованому z базисні функції $s_{1k}(x, z)$, $s_{2l}(y)$, $k = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, N}$ є базисними поліномами лагранжевої інтерполяції за змінними x та y відповідно.

Теорема 3.3 доведена.

Теорема 3.4. Якщо $\rho(x, y, z)$ - матриця-функція, яка описує просторовий розподіл всієї сукупності досліджуваних нами функцій, кожний стовпець якої має компоненти, які означають розподіл i -ого об'єкту, то залишок інтерлінації

$$R_{mn}\rho(x, y, z) = |\rho(x, y, z) - O_{mn}\rho(x, y, z)|$$

буде мати вигляд

$$R_n\rho(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n s_{1,k}(x, z) \int_{x_k(z)}^x \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} \rho(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} d\xi + \\
&+ \sum_{l=1}^n s_{2,l}(y) \int_{Y_l}^y \frac{\partial^\nu}{\partial \eta^\nu} \rho(x, \eta, z) \frac{(Y_l - \eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\eta - \\
&- \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m s_{1,k}(x, z) s_{2,l}(y) \int_{x_k(z)}^x \int_{Y_l}^y \rho^{(\mu, \nu, o)}(\xi, \eta, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \frac{(Y_l - \eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\xi d\eta \\
&1 \leq \mu \leq m, 1 \leq \nu \leq n.
\end{aligned}$$

Доведення. Скористаємося тотожностями $(\nabla y, z)$

$$R_{mn}\rho(x, y, z) = (R_1 + R_2 - R_1 R_2)\rho(x, y, z),$$

де

$$\begin{aligned}
R_1\rho(x, y, z) &= |\rho(x, y, z) - L_M\rho(x, y, z)| = \\
&= \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \int_{x_k(z)}^x \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} \rho(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} d\xi, \\
L_M\rho &= \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \rho(x_k, y, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2\rho(x, y, z) &= |\rho(x, y, z) - L_N\rho(x, y, z)| = \sum_{\ell=1}^N s_{2,\ell}(y) \int_{Y_\ell}^{y_0} \frac{\partial^\nu}{\partial \eta^\nu} \rho(x, \eta, z) \frac{(Y_\ell - \eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\eta, \\
L_N\rho &= \sum_{k=1}^M s_{2,l}(y) \rho(x, Y_l, z),
\end{aligned}$$

$$\rho(x, y, z) = \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \rho(x, y, z), \left[L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!} \right]_{u=x} = 0, \quad 1 \leq \mu \leq M-1,$$

які є узагальненнями відповідних тотожностей на випадок, коли базисні функції $s_{1k}(x, z)$ залежать не тільки від змінної x , але також від параметра z .

Вище в записі $L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!}$ вважається, що оператор L_M діє на змінну x .

Скористаємося також тотожностями, які перевіряються інтегруванням частинами

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \rho(X_k(z), y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} \rho^{(\mu)}(x, y, z) \frac{(X_k(z) - x)^\mu}{(\mu)!} + \\ &+ \int_{X_k(z)}^x \rho^{(r)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Тоді можна написати послідовність тотожностей

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \rho(x, y, z) = \\ &= \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \left[\rho(X_k(z), y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} \rho^{(\mu, o, o)}(x, y, z) \frac{(X_k(z) - x)^\mu}{\mu!} + \right. \\ &+ \left. \int_{X_k(z)}^x \rho^{(r, o, o)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi - \right] = \\ &= L_M \rho(x, y, z) - \sum_{\mu=1}^{r-1} \rho^{(\mu, o, o)}(x, y, z) \left[L_M \frac{(x-u)^\mu}{\mu!} \right]_{u=x} + \\ &+ \sum_{k=1}^M s_{1,k}(x, z) \int_{X_k(z)}^x \rho^{(r, o, o)}(\xi, y, z) \frac{(X_k(z) - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi \\ &= L_M \rho(x, y, z) + R_{1r} \rho(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічне доведення можна провести і для залишку R_2 . Таким чином, твердження теореми 3.4 доведено для $\rho(x, y, z) \in C^{\mu, \nu, 0}(0)$ і для кожної функції $\rho(x, y, z) \in C(D), D \subset R^3$, функція $O_{mm}\rho(x, y, z) \in C(D)$ має такі властивості:

$$O_{mm}\rho(X_p(z), Y_p, z) = \rho(X_p(z), Y_p, z), p = \overline{1, M}, -H \leq z \leq 0.$$

Теорема 3.4 доведена.

Наслідок 3.1. Таким чином, оператор $O_{mm}\rho(x, y, z)$ дозволяє обчислювати значення матриці-функції $\rho(x, y, z)$ між кривими, якщо інформація про функцію задана слідами в цих кривих. При цьому, якщо розподіл визначається неперервною матрицею-функцією $\rho(x, y, z)$, яка є поліномом степеня n за змінними x та y при кожному z , то оператор $O_{mm}\rho(x, y, z)$ точно буде відновлювати таку функцію.

Зауваження 3. Аналогічно можна написати оператор інтерлінації для випадку, коли криві мають форму такого вигляду:

$$\Gamma_{k,l} = \{(x, y, z) : x = X_k = \text{const}, y = Y_l(z), -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}.$$

В цьому випадку оператор $O_{mm}\rho(x, y, z)$ є математичною моделлю відновлення щільності досліджуваних об'єктів з використанням інтерлінації функцій, побудованої на основі поліноміальних допоміжних функцій $s_{1k}(x), s_{2l}(y, z)$.

3.3 Висновки по розділу

В другому розділі були вирішені такі наукові та практичні задачі:

– уперше розроблено математичні моделі та запропоновано загальний метод просторового відновлення в кожній точці між заданою системою неперетинних просторових кривих скінченної множини функцій або їх сполук

та інтерлінації функцій трьох змінних. Використання матричної математичної моделі просторового розподілу заданої сукупності компонентів, отриманих шляхом аналізу, дозволяє значно приблизитись до загальної моделі розподілу досліджуваних об'єктів.

Оператор $O_M\rho(x, y, z)$ є оператором інтерлінації матричної функцій кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих Γ_k , тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх просторових кривих по глибині z , $-H \leq z \leq 0$, тобто дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці (x, y, z) між просторовими кривими по глибині z .

Слід зазначити, що використання матричної математичної моделі просторового розподілу заданої сукупності компонентів, отриманих шляхом аналізу, дозволяє значно приблизитись до загальної моделі розподілу досліджуваних об'єктів.

Результати, наведені в розділі 3, повністю викладені в публікаціях [36, 37, 48].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [8, 38, 36, 37, 48].

4 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ

4.1 Результат побудови інтерлінаційних операторів для нерівномірно розміщених просторових кривих

Наведемо дев'ять нерівномірно розміщених вузлів у дев'яти точках (x_k, y_k) , $k = \overline{1,9}$ з заданими координатами (рисунок 4.1).

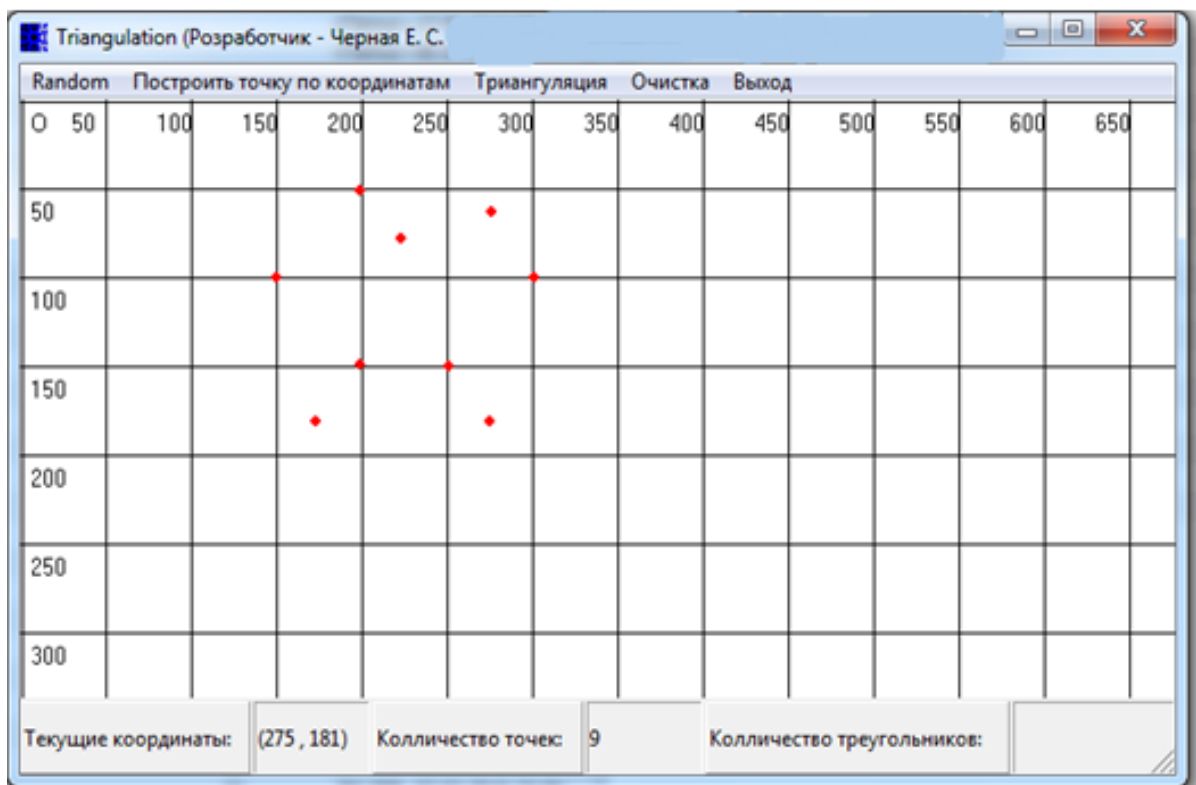


Рисунок 4.1 – Приклад нерівномірно розміщених вузлів інтерполяції

Побудуємо оператор сплайн–інтерлінації $O_\mu(x, y, z)$ функції трьох змінних $f(x, y, z)$, яка є сплайном першого степеня за змінними $x, y ((x, y) \in D)$. Алгоритм викладемо по кроках [45].

Крок 1. Задаємо систему просторових кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M}$$

та сліди $\gamma_k(z) = f(x_k, y_k, z), k = \overline{1, M}$, невідомої функції $f(x, y, z)$ на вказаних $\Gamma_k, k = \overline{1, 9}$. Ці сліди отримано унаслідок аналізу просторових кривих.

Крок 2. Виконуємо триангуляцію поверхні (рисунок 4.2): введемо позначення $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), T_\mu = T_\mu(z)$ – трикутник на глибині z з вершинами

$$P_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = \mu_1, \mu_2, \mu_3; \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, \dots, M\},$$

тобто $\overline{T}_\mu(z) = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in T_\mu(z)\}$ є криволінійною призмою.

Практична реалізація була здійснена в системі середовищі програмування Delphi. Була складена програма *Triangulation*, за допомогою якої можна знайти зображення триангуляції за заданими точками.

Результати роботи програми представлені на рисунку 4.2

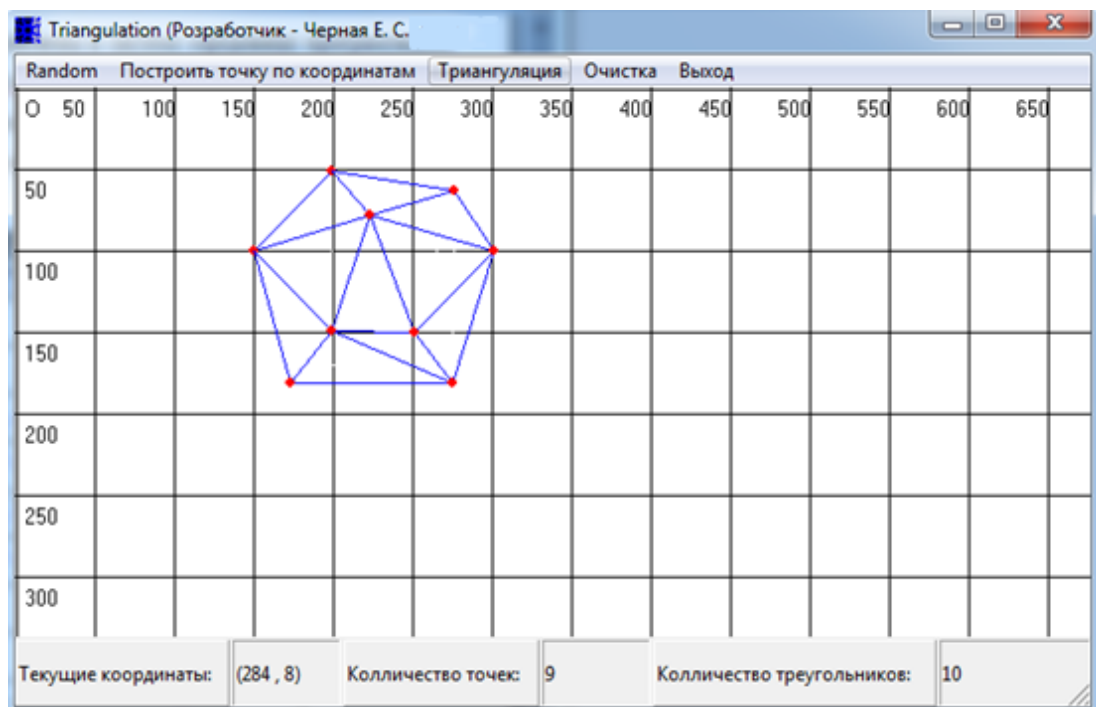


Рисунок 4.2 – Триангуляція поверхні

Крок 3. Будуємо для кожного трикутника $T_\mu(z)$ оператор інтерлінації $O_\mu(x, y, z)$ у вигляді

$$O_\mu(x, y, z) = f_{\mu_1}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_2}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_3}(z) \left(\frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right),$$

Використовуємо наступні допоміжні функції

$$\phi_{p,q}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z) = \begin{vmatrix} X_{\mu_1}(z) & Y_{\mu_1}(z) & 1 \\ X_{\mu_2}(z) & Y_{\mu_2}(z) & 1 \\ X_{\mu_3}(z) & Y_{\mu_3}(z) & 1 \end{vmatrix} = \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z).$$

Тут враховано, що

$$\phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 1, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0,$$

$$\phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 1, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0,$$

$$\phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 1, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0.$$

Введемо до розгляду оператор

$$O_M F(x, y, z) = O_\mu f(x, y, z), (x, y, z) \in T_\mu(z) \times [-H, 0], T_\mu(z) \subset D = \bigcup_{\mu} T_\mu(z).$$

Теорема 4.1. Оператор $O_M F(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ на системі просторових кривих $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$, тобто

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = f(X_p(z), Y_p(z), z) = f_p(z), -H \leq z \leq 0, p = \overline{1, M}.$$

$$O_M f(x, y, z) \in C(D).$$

Доведення. Інтерлінаційні властивості впливають з наступної властивості детермінантів: детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Тому, якщо $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, то

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = O_\mu(X_p(z), Y_p(z), z) =$$

$$= f_{\mu_1}(z) \frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} +$$

$$+ f_{\mu_2}(z) \frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_1, \mu_3}(z)} +$$

$$+ f_{\mu_3}(z) \frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(X_p(z), Y_p(z), z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_1, \mu_2}(z)} = f_p(z),$$

$$(x, y) \in T_\mu, z \in [-H, 0], p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

Тут враховано, що

$$\phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 1, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0, \phi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0,$$

$$\phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 1, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0,$$

$$\phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 1, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 0, \phi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0.$$

Іншими словами, оператор $O_M f(x, y, z)$ є оператором кусково-лінійної інтерполяції за змінними $x, y \forall z \in [-H, 0]$.

Для доведення того, що $O_M f(x, y, z) \in C(D)$, досить зазначити, що функції $O_{p,q,r} f(x, y, z)$ та $O_{p,q,r'} f(x, y, z)$ на спільній криволінійній, взагалі кажучи, грані призм зі свердловинами Γ_p та Γ_q мають однакові сліди, тобто функція $F(x, y, z) = O_M f(x, y, z)$ при переході від тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_r(z)$ до тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_{r'}(z)$ зберігає неперервність.

Те, що у випадку неперервних слідів $f_p(z) \in C[-H, 0], p = \overline{1, M}$ функції $O_\mu f(x, y, z)$ теж будуть неперервними, випливає з формули для операторів $O_\mu f(x, y, z)$ і відомої властивості неперервних функцій: сума неперервних функцій є неперервною функцією [45].

Теорема 4.1 доведена.

Приклад 1. Побудуємо оператор $O_\mu(x, y, z)$ сплайн-інтерлінації функції трьох змінних:

$$f(x, y, z) = \frac{(a+b)(x^2 + y^2 + z^2)^c}{(a_1 + b_1)(x^2 + y^2 + z^2)^{c_1}}.$$

Нехай Q – кількість криволінійних трикутних призм, відповідних вибраній триангуляції (рисунок 4.2).

Оператор інтерлінації функції $f(x, y, z)$ на системі просторових кривих

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), z, -H \leq z \leq 0\}, k = \overline{1, M}$$

буде мати вигляд:

$$O_{\mu}(x, y, z) = \begin{cases} f_{\mu_1}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_2}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_3}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{123} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_2}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_5, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_5, \mu_3}(z)} \right) + f_{\mu_3}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_2, \mu_5}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_5, \mu_3}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{253} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_2}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_4, \mu_5}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_4, \mu_5}(z)} \right) + f_{\mu_4}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_2, \mu_5}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_4, \mu_5}(z)} \right) + f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_2, \mu_4}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_4, \mu_5}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{245} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_4}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_7}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_4, \mu_5, \mu_7}(z)} \right) + f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_4, \mu_7}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_4, \mu_5, \mu_7}(z)} \right) + f_{\mu_7}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_4, \mu_5}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_4, \mu_5, \mu_7}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{457} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_3}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_6}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_5, \mu_6}(z)} \right) + f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_3, \mu_6}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_5, \mu_6}(z)} \right) + f_{\mu_6}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_3, \mu_5}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_5, \mu_6}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{356} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_8, \mu_6}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_8, \mu_6}(z)} \right) + f_{\mu_8}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_6}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_8, \mu_6}(z)} \right) + f_{\mu_6}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_8}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_8, \mu_6}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{586} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_5}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_7, \mu_8}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_7, \mu_8}(z)} \right) + f_{\mu_7}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_8}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_7, \mu_8}(z)} \right) + f_{\mu_8}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_5, \mu_7}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_5, \mu_7, \mu_8}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{578} \wedge [z \leq 0] \\ f_{\mu_7}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_9, \mu_8}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_7, \mu_9, \mu_8}(z)} \right) + f_{\mu_9}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_7, \mu_8}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_7, \mu_9, \mu_8}(z)} \right) + f_{\mu_8}(z) \left(\frac{\varphi_{\mu_7, \mu_9}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_7, \mu_9, \mu_8}(z)} \right), (x, y, z) \in T_{798} \wedge [z \leq 0] \end{cases}$$

Для побудови просторових кривих запишемо наступні формули:

$$x_1(z) = \begin{cases} x_{11}, -H \leq z \leq 0; \\ x_{11} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ x_{11} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$y_1(z) = \begin{cases} y_{11}, -H \leq z \leq 0; \\ y_{11} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ y_{11} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \sin \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$x_2(z) = \begin{cases} x_{22}, -H \leq z \leq 0; \\ x_{22} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ x_{22} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$y_2(z) = \begin{cases} y_{22}, -H \leq z \leq 0; \\ y_{22} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ y_{22} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \sin \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$x_3(z) = \begin{cases} x_{33}, -H \leq z \leq 0; \\ x_{33} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ x_{33} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \cos(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$y_3(z) = \begin{cases} y_{33}, -H \leq z \leq 0; \\ y_{33} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta), -H_1 \leq z \leq -H; \\ y_{33} + \left(R - R \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \sin(\beta) + \frac{(z+H_1)(-H_1+H) \sin \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} R}, -H_2 \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

Наведемо нижче зображення функцій $x_i(z)$, $y_i(z)$, $i = \overline{1,3}$, які побудовані за допомогою системи комп'ютерної математики MATHCAD [42] (Додаток Б).

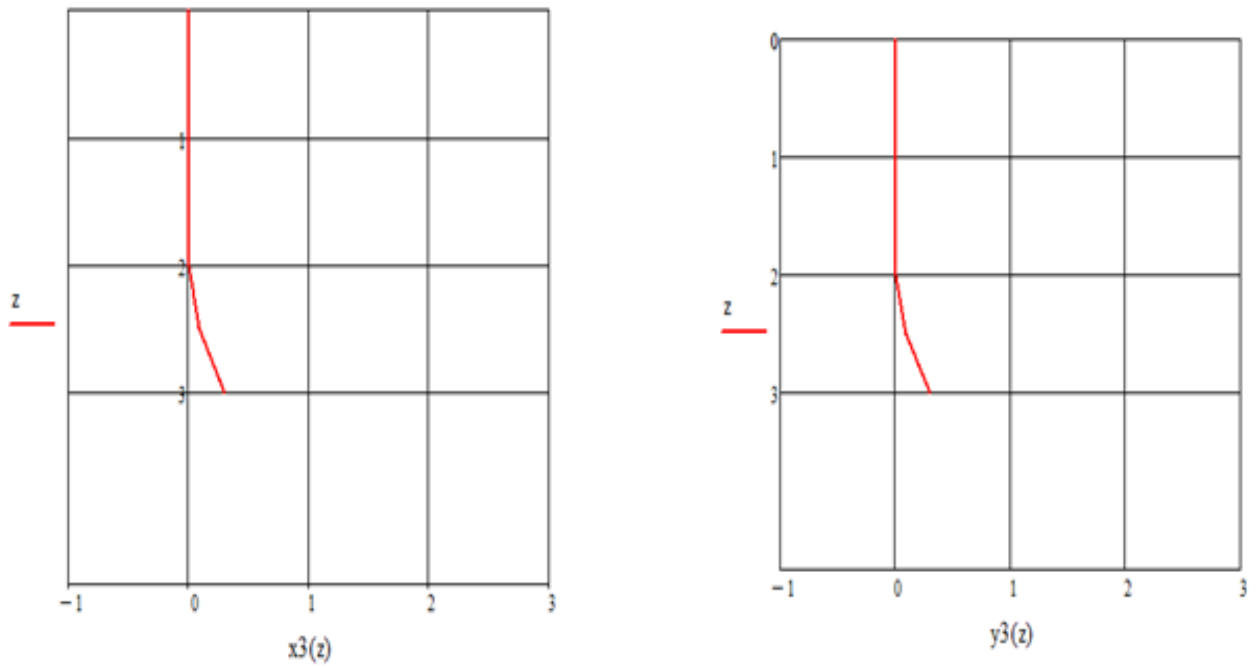


Рисунок 4.3 – Зображення функцій $x_i(z)$, $y_i(z)$

Використаємо допоміжні функції

$$\gamma_1(z) = f(x_1(z), y_1(z), z),$$

$$\gamma_2(z) = f(x_2(z), y_2(z), z),$$

$$\gamma_3(z) = f(x_3(z), y_3(z), z).$$

$$\Delta(z) = |\Delta(z)| = \begin{pmatrix} x_1(z) & y_1(z) & 1 \\ x_2(z) & y_2(z) & 1 \\ x_3(z) & y_3(z) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(0,1) = 0,5;$$

$$\Delta_1(x, y, z) = |\Delta_1(x, y, z)| = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_2(z) & y_2(z) & 1 \\ x_3(z) & y_3(z) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1(0.1, 0.2, 0.3) = 0,05;$$

$$\Delta 2(x, y, z) = |\Delta 2(x, y, z)| = \begin{pmatrix} x1(z) & y1(z) & 1 \\ x & y & z \\ x3(z) & y3(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta 2(0.1, 0.2, 0.3) = -0.15;$$

$$\Delta 3(x, y, z) = |\Delta 3(x, y, z)| = \begin{pmatrix} x1(z) & y1(z) & 1 \\ x2(z) & y2(z) & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \Delta 3(0.1, 0.2, 0.3) = 0.25.$$

Наближуваний оператор сплайн-інтерлінації має наступне аналітичне подання в кожній області $T_\mu(z) \times [-H, 0]$, (H – глибина просторової кривої):

$$O(x, y, z) = \frac{\Delta 1(x, y, z)}{\Delta(z)} \gamma 1(z) + \frac{\Delta 2(x, y, z)}{\Delta(z)} \gamma 2(z) + \frac{\Delta 3(x, y, z)}{\Delta(z)} \gamma 3(z).$$

$$O(-0.1, 0.2, 0.3) = 1,136.$$

$$f(-0.1, 0.2, 0.3) = 1.217.$$

Порівнюючи наближену функцію з її точним значенням, одержуємо малу похибку наближення функції $f(x, y, z)$ кусково-лінійними за змінними x, y сплайн-інтерлінантами.

4.2 Моделювання родовищ і оцінка запасів

У якості прикладу практичного використання отриманих результатів розглянемо процес створення повної моделі родовища і оцінки його запасів.

Зазвичай необхідний наступний набір інформації, введеної в комп'ютер (числові і текстові дані):

а) По свердловинах:

- 1) координати гирл вироблень;
- 2) дані інклінометрії;
- 3) дані випробування;
- 4) інші характеристики свердловин (каротаж, вихід керна, гідрогеологія, літологія, стратиграфія і так далі)(Рисунок 4.4).

б) По поверхневих виробленнях (канавам, траншеям і тому подібне):

- 1) каталог маркшейдерських крапок по трасах вироблень;
- 2) дані випробування;
- 3) інші характеристики вироблень (літологія, стратиграфія, тектоніка і так далі).

в) По випробуваних підземних виробленнях:

- 1) каталог маркшейдерських крапок по трасах вироблень;
- 2) дані випробування;
- 3) інші характеристики вироблень (літологія, стратиграфія, тектоніка і так далі).

Пристворенні моделі родовищ необхідний також набір графічної інформації:

- топографія поверхні родовища;
- геологічні плани і розрізи з нанесенням контурів рудних тіл;
- зонпідрахункових блоків (якщо необхідно), літологічних і стратиграфічних кордонів, тектонічних порушень і тому подібне;
- плани підземних горизонтів з нанесенням контурів стінок вироблень;
- план випробування поверхні з трасами траншей (каналів).

	Hole_ID	East	North	RL	Azimuth	Dip	Final_Depth
1	DD001	12102.03906	9988.75977	60.81000137	357.829986600	-60.15999985	139.0
2	DD002	11697.30078	9983.07031	60.58000183	357.250000000	-59.77000046	145.0
3	DD003	12100.00000	9904.00000	60.00000000	0.000000000	-60.00000000	100.0
4	DD004	12000.00000	10027.00000	60.00000000	0.000000000	-55.00000000	177.5
5	RC001	11401.50977	10072.08008	61.36999893	354.899993900	-59.97999954	124.0
6	RC002	11498.44922	10040.50977	60.77000046	355.420013400	-60.13999939	166.0
7	RC003	11597.55078	10048.23047	60.45999908	355.459991500	-59.86000061	154.0
8	RC004	11696.52930	10060.64063	60.16999817	356.730011000	-60.34000015	112.0
9	RC005	11697.13086	9992.42969	60.52999878	356.589996300	-58.95999908	136.0
10	RC006	12200.85938	9970.90039	60.91999817	355.750000000	-59.75000000	130.0
11	RC007	12200.50977	10009.66992	60.70000076	357.579986600	-60.27999878	94.0
12	RC008	12102.64063	10034.24023	60.75999832	357.350006100	-59.75000000	100.0
13	RC009	12102.28906	9993.69922	60.77000046	356.630004900	-59.08000183	160.0
14	RC010	12102.23047	9889.18945	61.40999985	354.059997600	-59.72000122	130.0
15	RC011	12003.73047	10008.75977	60.63999939	356.320007300	-60.25999832	178.0
16	RC012	12003.19922	9889.47070	61.27000046	355.420013400	-61.11999893	148.0
17	RC013	12002.88086	9849.48047	61.77000046	357.470001200	-60.65999985	148.0
18	RC014	11903.33984	9821.58008	61.81000137	352.559997600	-60.56999969	148.0
19	RC015	12501.51953	9959.93945	60.86000061	357.809997600	-60.13999939	124.0
20	RC016	12501.73047	9910.23047	61.04000092	357.100006100	-59.84000015	112.0
21	RC017	11696.93945	10025.13086	60.40999985	358.809997600	-60.33000183	142.0
22	RC018	11645.90039	10062.13086	60.27000046	357.079986600	-60.16999817	142.0
23	RC019	11646.48047	10020.90039	60.50999832	359.230011000	-59.54000092	142.0
24	RC020	11646.22070	9980.58984	60.72000122	357.149993900	-60.09999847	142.0
25	RC021	11745.23047	10060.35938	60.06999969	357.040008500	-59.95999908	142.0

Рисунок 4.4 – Необхідний набір інформації для створення певної моделі родовища

Уся ця інформація вводиться з максимально достовірних джерел, зазвичай безпосередньо на підприємстві, де завжди легко отримати дані, яких не вистачає, або необхідне роз'яснення з незрозумілих питань. Бажано, щоб в цій роботі брали участь геологи, обізнані стосовно родовища. Це значно скорочує час роботи, полегшує пошук необхідних даних і їх сортування [2].

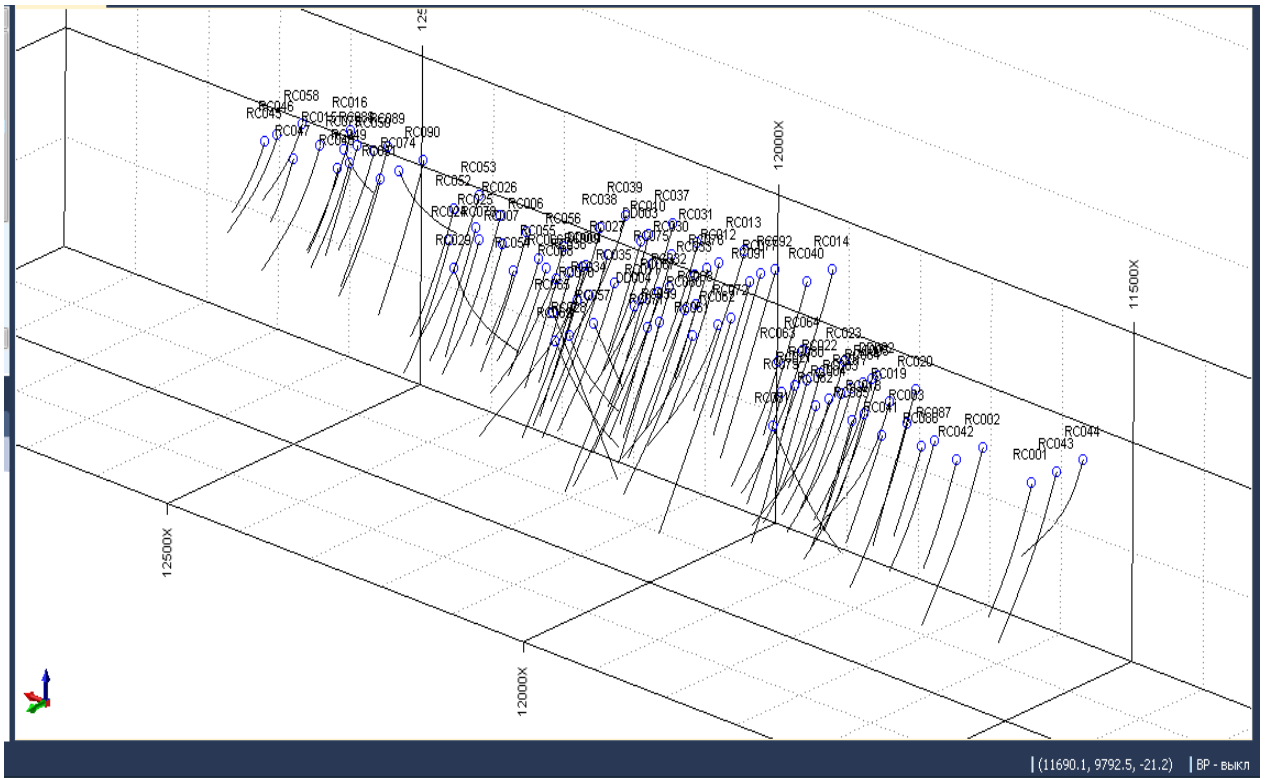


Рисунок 4.5 – Побудова свердловин по даним розвідки

4.3 Обчислення запасів корисних копалин за даними з кернів похилих свердловин

Розглянемо множину точок (Рисунок 4.6) $\Gamma_k = (x_k(z), y_k(z), z)$, $k = \overline{1, M}$, що належить опуклій оболонці D.

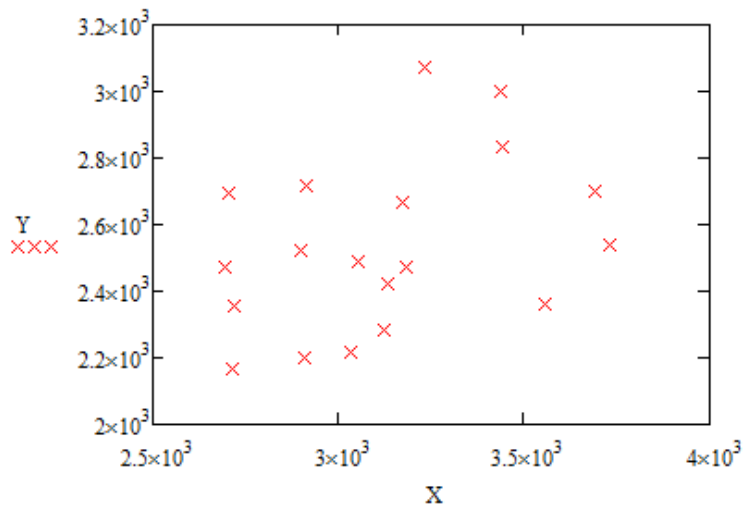


Рисунок 4.6 – Множина точок, що описує розміщення свердловин

Область D – це циліндрична область опуклої оболонки свердловин. Розіб'ємо D на трикутники. Для довільного трикутника при заданих вершинах побудуємо нескінченну область D_{ijk} , яка буде трикутником з заданими вершинами при кожному значенні змінної z :

$$\begin{aligned} D_i(x_i(z), y_i(z), z), \\ D_j(x_j(z), y_j(z), z), \\ D_k(x_k(z), y_k(z), z), \\ i \neq j \neq k, i, j, k \in \{1, 2, \dots, M\}. \end{aligned}$$

Область D_{ijk} буде циліндричною областю, паралельною осі Oz , що має форму трикутної призми.

Для обчислення запасів корисних копалин на основі даних з кернів свердловинного буріння вважаємо, що у свердловинах області D_{ijk} нам задані числа:

– глибини точок у свердловинах, які відповідають верхній точці залягання пласта корисної копалини (Рисунок 4.7)

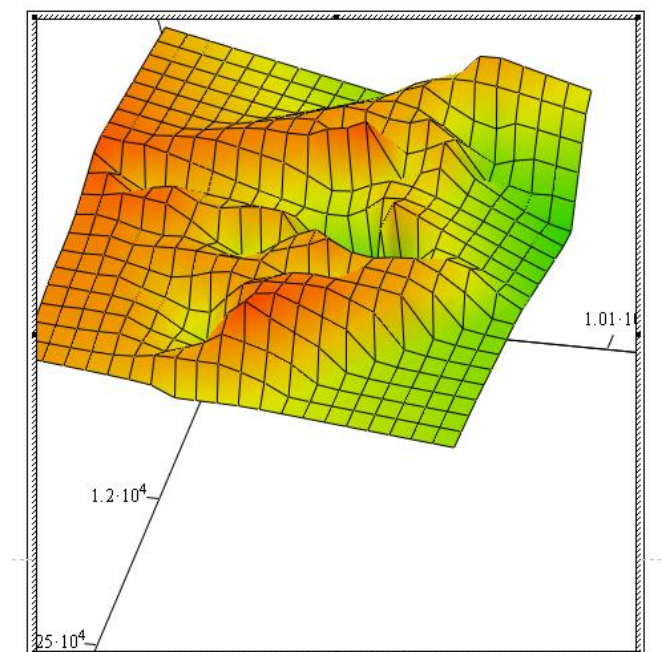


Рисунок 4.6 – Верхній шар залягання однієї з корисних копалин

$$z_{\max}(x, y) = \max\{z_{1\max}(x, y), z_{2\max}(x, y), \dots, z_{M\max}(x, y)\},$$

– глибини точок у свердловинах, які відповідають нижній точці залягання пласта корисної копалини (Рисунок 4.7)

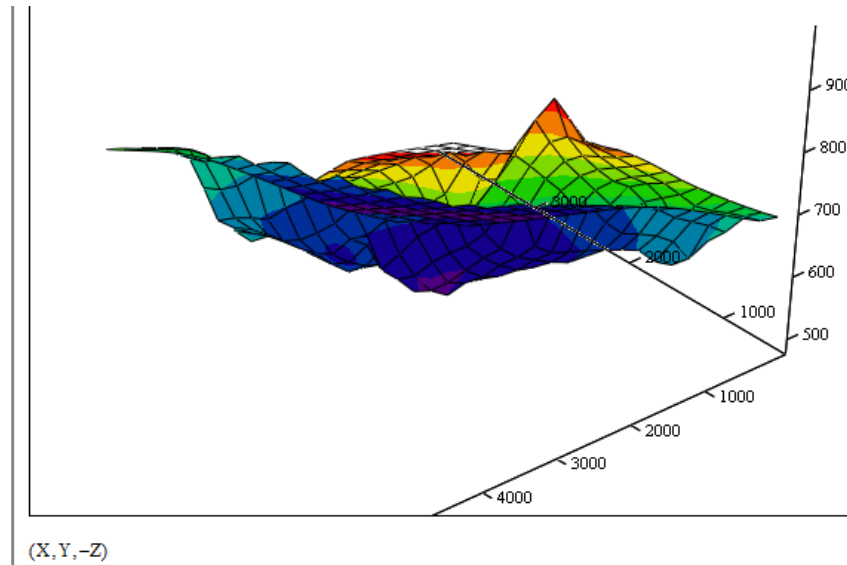


Рисунок 4.7 – Нижній шар залягання однієї з корисних копалин

$$z_{\min}(x, y) = \min\{z_{1\min}(x, y), z_{2\min}(x, y), \dots, z_{M\min}(x, y)\},$$

отримані шляхом аналізу вмісту кернів свердловинного буріння.

Щільність корисної копалини в i -й свердловині буде задана у вигляді

$$\rho_i(z) = \begin{cases} 0, & z \geq z_{i\max}; \\ \rho, & z_{i\min} \leq z \leq z_{i\max}; \\ 0, & z \leq z_{i\min}. \end{cases}$$

Тоді оцінку об'єму запасів корисних копалин можна обчислити за формулою

$$V_j = \iint_D \left\{ \int_{z_{\min}(x,y)}^{z_{\max}(x,y)} \rho_j(x, y, z) dz \right\} dx dy,$$

де $f(x, y, z)$ – всюду визначена функція;

$\rho_i(z)$ – щільність корисної копалини.

4.4 Висновки по розділу

Було розглянуто випадок отримання даних для побудови математичних моделей відновлення функцій за даними просторових кривих.

Порівняно наближену функцію з її точним значенням, отримано малу похибку наближення. Викладений метод можна узагальнити на випадок, коли функція $f(x, y, z)$ має розриви.

Розроблено метод оцінки запасів корисних копалин як практичне застосування отриманих результатів на основі запропонованих математичних моделей їх розподілу.

Всі теоретичні твердження розділу 4 доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм у системах комп'ютерної математики MathCad. Вказані програми наведені з детальним описом в Додатках до дисертації.

Всі теоретичні твердження розділу 4 в повному обсязі опубліковані у працях [40-44, 45-47, 48, 51].

Список джерел, який використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [60-66].

ВИСНОВКИ

В результаті проведеного в дисертаційній роботі дослідження вирішено наукову задачу побудови математичних моделей відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин як тривимірної функції методами інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних просторових кривих.

У процесі вирішення поставлених завдань побудови математичних моделей просторового розподілу сукупності корисних копалин та оцінки об'єму корисних копалин було отримано ряд нових наукових і практичних результатів.

1. Виконано аналіз сучасного стану проблеми розподілу сукупності корисних копалин, у результаті якого встановлено: на даний час не існує аналітичних методів побудови тривимірних математичних моделей відновлення розподілу корисних копалин між системою просторових неперетинних свердловин; з'ясовано, що розміщення просторових кривих є нерегулярним, тобто їх координати не мають явного аналітичного зв'язку.

2. На основі методів інтерлінації функцій для системи прямих, що описують вертикальні свердловини, набули подальшого розвитку методи відновлення функції трьох змінних між системою заданих ліній, що описують систему похилих свердловин різного типу методами поліноміальної, глобальної та сплайн-інтерлінації функцій трьох змінних. Їх використання дозволить отримувати більш точні результати відновлення відповідних шарів корисних копалин.

3. Уперше побудовано математичну модель просторового розподілу щільності об'єктів, заданих своїми слідами лише у заданій системі просторових кривих, кожна з яких лежить у відповідній вертикальній площині, і які не перетинаються одна з одною. Розроблені модифікації методу дозволяють на основі інформації про наявність об'єкту відновлювати відповідний шар тієї чи іншої корисної копалини.

4. Уперше розроблено математичні моделі та запропоновано загальний

метод просторового відновлення в кожній точці між заданою системою неперетинних просторових кривих скінченої множини функцій або їх сполук та інтерлінації функцій трьох змінних. Використання матричної математичної моделі просторового розподілу заданої сукупності компонентів, отриманих шляхом аналізу, дозволяє значно приблизитись до загальної моделі розподілу досліджуваних об'єктів.

5. На основі теоретичних даних розроблено метод оцінки запасів корисних копалин як практичне застосування отриманих результатів на основі запропонованих математичних моделей їх розподілу.

6. Проведено теоретичне порівняння методів інтерлінації матричних функцій. Ефективність запропонованих моделей перевірено за допомогою обчислювального експерименту на основі створених дисертантом програм, які реалізують вказані вище методи побудови математичних моделей.

7. Практичне використання отриманих результатів дозволяє за рахунок вибору найбільш ефективного з розроблених методів відновлення сукупності корисних копалин отримувати більш точні результати відновлення відповідних шарів корисних копалин. Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі та методи відновлення розподілу щільності сукупності корисних копалин впроваджені: у держбюджетній науково-дослідній роботі, що виконувалася в рамках плану науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії; в навчальному процесі при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальністю «Нафтогазова справа» Української інженерно-педагогічної академії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Литвин О.Н. Интерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа.2002. –544 с.
2. Шолох Н.В., Переметчик А.В. Геометризация размещения качественных характеристик железистых кварцитов Кривбасса / Разраб. рудн. месторожд.: Кривой Рог: КТУ. Вып. 86. 2004. С. 44-47.
3. Шолох Н.В., Топчий А.Л. Направления развития системы обработки маркшейдерско-геологической информации. Кривбасса / Разраб. рудн. месторожд.: Кривой Рог: КТУ. Вып. 93. 2010. С. 94-97.
4. Шолох М.В., Топчий О.Л., Сергеева М.П. Визначення мінімального об'єму для усереднення рудної сировини//Вісник Криворізького технічного університету. Вип. 25. 2010. С. 68-72
5. Шолох М.В., Топчий О.Л., Сергеева М.П. Методика побудови математичної моделі родовища залізистих кварцитів для геометризації його запасів //Вісник Криворізького технічного університету. Вип. 30. 2012.
6. Основи ГІС-аналізу: навч. посібник //В. Д. Шипулін// Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Х. : ХНУМГ. 2014. 330 с.
7. Енді Мітчел. Руководство по ГИС Аналізу. Часть 1:Пространственные модели и взаимосвязи // Энди Митчелл ; пер. с англ. К., ЗАО ЕСОММ Со; Стилос. 2000. 198 с.
8. Литвин О.М. Интерлінація функцій. Харків: Основа. 1992. 235 с.
9. Литвин О.М. Интерполирование функций. Учебное пособие. К.:УМКВО, 1988. 31 с.
10. Литвин О.М. Явні формули, що відновлюють функції $f(x, y, z)$ за їх проєкціями на $M (M \geq 3)$ прямих// Доповіді АН УРСР// 1993. № 4. С. 35-39.
11. Литвин О.М. Методи обчислень: Додаткові розділи. К.: Наук. думка, 2005. 331 с.
12. Анциферов А.В. Метод определения типа и параметров малоамплитудной тектонической нарушения угольного пласта // Збірник

наукових праць ДДТУ «Проблеми гірського тиску»// №5. Донецьк . 2001. С. 16-36.

13. Richard C. Selley. Elements of Petroleum Geology. Second Edition. Academic Press. 1998. 470 p.

14. David Gubbins. Times series analysis and inverse theory for geophysicists. Cambridge University Press. 2004. 255 p.

15. Guust Nolet. A Breviary of seismic tomography. Imaging the Interior of the Earth and Sun. Cambridge University Press. 2008. 344 p.

16. James G. Barryman. Borehole Seismic tomography. Lecture Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. Earth Resources Laboratory Massachusetts Institute of Technology. 1991. 158 p

17. Шаклеин С.В. Практические вопросы геометризации мощности и основных показателей качества угольных пластов // Учеб.пособие /Кузбас. гос. техн. ун-т// Кемерово. 1997. 61 с.

18. Shepard D. Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data, Proc. 23rd Nat.Conf.ACM, 1968. P.517–524.

19. Литвин О.М. Оператори інтерлінації лагранжевого типу на системі взаємно-перпендикулярних прямих з використанням узагальнених поліномів/ О.М. Литвин, Н.І.Штепа // Доповіді НАН України// 2008. № 5. С. 25–29.

20. Литвин О.М. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних/ О.М. Литвин, Н.І.Штепа // Доповіді НАН України. 2009. № 1. С. 25–29.

21. Литвин О.Н. Операторы интерликации на системе взаимно-перпендикулярных прямых с использованием обобщенных полиномов/ О.У. Литвин, Н.В.Штепа // Компьютерная математика. 2008. № 1. С. 99–108.

22. Литвин О.М. Метод оцінки запасів корисних копалин на основі аналізу результатів скважинного буріння і узагальненої інтерлінації функцій 3-х змінних/ О.М. Литвин, Н.І.Штепа // Збірник тез доповідей XLII науково-практичної конференції УПА.10-15 грудня 2008 р. Частина 1. Харків, 2008. С.84

23. Литвин О.М. Про математичне моделювання структури кори Землі з використанням інтерлінації функцій трьох змінних / О.М. Литвин, Н.І. Штепа // Праці IV міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень»// 2008. С.105.

24. Литвин О.М. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних/ О.М. Литвин, Н.І. Штепа // Праці міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)», Крим, смт. Кацивелі, 24-29 вересня 2009. т.2, Київ. 2009. С. 20–24.

25. Штепа Н.І. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних // Праці міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)» // Крим, смт. Кацивелі, 24-29 вересня 2009. т.2, Київ. 2009. С. 415–419.

26. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. / О. М. Литвин // Харків: Основа. 2002. 544 с.

27. *Литвин О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлотації функцій. / О. М. Литвин, Н. І. Штепа, О. О. Литвин // К.: Наук. думка, 2011. 228с.

28. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій. Харків: Основа, 1993. 235с.

29. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ: Наук. думка, 2005. 331 с.

30. *Литвин О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функції лінійних за змінними X та Y . Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» ІСН-2011 17-19 березня 2011. Полтава: РВВ ПУСТ, 2011.- С. 163-166.

31. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 1. С. 61-67.

32. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 4. С. 39-48.

33. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Проблеми машинобудування. 2014. Том 17. Вип. 2. С. 33-39.

34. Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математичне моделювання тривимірного розподілу корисних копалин за даними про них в системі похилих свердловин // Бионика интеллекта. 2014. № 2(83). С. 83-87.

35. Черная Е.С. Вычислительная реализация метода восстановления 3D распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами с использованием линейной сплай-интерлинации // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2015. Вып. 39. №11(208). С. 167-172.

36. Литвин О.М., Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу вмісту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерлінації функцій // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6(1178). С. 46-50.

37. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій // Бионика интеллекта. 2017. № 2(89). С. 37-42.

38. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y // Информатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 163-166.

39. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне

модельовання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної інтерлінації функції // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. С. 94-95.

40. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне модельовання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функції лінійних за змінними x та y // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2011. С. 93.

41. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне модельовання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y : тези доповідей. Харків: УПА, 2011. С. 12-13.

42. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу корисних копалин кори землі за допомогою даних з кернів свердловин та інформації про розподіл на поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2012) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. С. 179-181.

43. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне модельовання 3D розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Інформатика та системні науки (ІСН-2013) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2013. С. 192-195.

44. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Про побудову операторів інтерлінації функцій трьох змінних між системою кривих у просторі та її застосування при розвідці корисних копалин з використанням похилих свердловин// Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL): матеріали і конференції. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2013. С. 148-149.

45. Черная Е.С. Методы построения математических моделей распределения полезных ископаемых на системе наклонных скважин. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. Part 2. М.:МИЕМ NRU HSE, 2013, P. 444-450.

46. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2014. С.315-319.

47. Lytvyn O.O., Shtepa N.I., Denisova O.I., Chorna O.S. Internal Earth structure renewal by means of core in inclined boreholes analysis. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. М.:МИЕМ NRU HSE, 2014, P. 655-663.

48. Литвин О.О., Чорна О.С. Інтерлінація функцій в математичному моделюванні просторового розподілу деякої сукупності корисних копалин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2016. С. 189-193.

49. Литвин О.О. Математичне моделювання методами інтерлінації функцій в розвідці корисних копалин і конструюванні поверхонь. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Харків, 2017. 302 с.

50. Черная Е.С. Методы построения математических моделей распределения полезных ископаемых на системе наклонных скважин. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. Part 2. М.:МИЕМ NRU HSE, 2013, P. 444-451

51. Lytvyn O.O. Lytvyn O.O., Shtepa N.I., Denisova O.I., Chorna O.S. Internal Earth structure renewal by means of core in inclined boreholes analysis. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. М.:МИЕМ NRU HSE, 2014, P. 444-451.

52. Кветний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р., Софіна О.Ю., Шушура О.М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1.

Вінниця: ВНТУ, 2012. 193 с.

53. Губарь Ю.В. Введение в математическое моделирование. - Москва: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007. 153 с.

54. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры/ А.А. Самарский, А.П. Михайлов// 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 320 с.

55. Калинин А. Г. Бурение наклонных скважин: Справочник / А. Г. Калинин, Н. А. Григорян, Б. З. Султанов // Под ред. А. Г. Калинина. М.: Недра, 1990. 348с.

56. Сивий М.Я. Геологія. Підручник. К.: Вид-во “Вища школа”, 2003. 480 с.

57. Пахомов О. Є. Екологія: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Харків: Фоліо, 2014. 666 с.

58. Барон Ю.Л. О проблеме технологического моделирования. Моделирование технологических процессов на угольных шахтах // Сборник докладов на научном семинаре. Институт А. А. Скочинского// 1993г.

59. Исаченко В. Х. Инклинометрия скважин. / В. Х. Исаченко // М.: Недра, 1987. 216с.

60. Грачев Ю.В., Варламов В.П. Автоматический контроль в скважинах при бурении и эксплуатации. М.:Недра, 1968.

61. Исаченко В.Х. Системы контроля за траекторией ствола скважины за рубежом. Обзорная информация. Сер. «Бурение». М:ВНИИОЭНГ, 1980.

62. Калинин А.К. Искривление скважин. М: Недра, 1974.

63. Подоляк А.В. Методика расчета пространственного положения ствола скважины 5Г на антарктической станции Восток // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 4.

64. Seaton P., Roberts A., Schoonover L. New MWD gamma system finds many field application. Oil and Gas, 1984, vol.82, No 12.

65. Кейн С.А., Мищенко Р.Н. Инженерные задачи бурения наклонно-направленных скважин./Учебное пособие УГТУ. Ухта 2011г.

66. Осипов П.Ф. Расчёт бурильных колонн: учебное пособие / П.Ф. Осипов - Перм. гос. тех. университет. Пермь, 2008 г.
67. Антипенко Г.О. Гірнична геометрія: Підручник / Дніпропетровськ. Національний гірничий університет. 2003. 265 с.
68. Бакка М.Т., Редчиць В.С., Наральник Я.В. Геометризація родовищ корисних копалин: Навчальний посібник. Житомир: ЖІТІ, 2002. 180 с.
69. Ю.Л. Барон. О проблеме технологического моделирования. Моделирование технологических процессов на угольных шахтах // Сборник докладов на научном семинаре, Институт А. А. Скочинского. 1993 г.
70. Горная информатика / Горные науки. Освоение и сохранение недр Земли / РАН, АГН, РАЕН, МИА. Под ред. К.Н. Трубецкого. М.: Изд-во АГН, 1997. С. 256-282.
71. Капутин Ю. Е. Горные компьютерные технологии и неостатика.
72. Исаченко В. Х. Инклинометрия скважин. М.: Недра, 1987. 216 с.
73. Енергетична стратегія України на період до 2030 р. II. Прогнозування балансів паливно-енергетичних ресурсів. 2007.
74. Дейнека В.С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий // К.: Наукова думка, 1995. 262 с.
75. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко // К.: Наукова думка, 2001. 606 с.
76. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки. Донецк: Алан, 2003. 312 с.
77. Анциферов А.В. Метод определения типа и параметров малоамплитудной тектонической нарушенности угольного пласта // Збірник наукових праць ДДТУ «Проблеми гірського тиску // 2001. №5. Донецьк. С. 16-36.
78. Иванссон С. Межскважинная томография на проходящих волнах. В кн.: Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике: Пер. с англ. / Под ред. Г. Нолета. М.: Мир, 1990.

416 с.

79. Richard C. Selley. Elements of Petroleum Geology. Second Edition. Academic Press, 1998. 470 p.

80. David Gubbins. Times series analysis and inverse theory for geophysicists. Cambridge University Press. 2004. 255 p.

81. Guust Nolet. A Breviary of seismic tomography. Imaging the Interior of the Earth and Sun. Cambridge University Press. 2008. 344 p.

82. James G. Barryman. Borehole Seismic tomography. Lecture Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. Earth Resources Laboratory Massachusetts Institute of Technology. 1991. 158 p.

83. Матусевич К.Н. Математическая картография/ К.Н. Матусевич, Н.К. Матусевич// Ровно: Волинські обереги, 2003. 212 с.

84. Renewable Energy. Power for a sustainable Future. Second edition. Edited by Godfrey Boyle. Oxford university press. 2004. 452 p.

85. Кноринг Л.Д. Геологу о математике/ Л.Д. Кноринг, В.Н. Деч// Ленинград: Недра. 1989. 208 с.

86. Рыжов П.А. Математическая статистика в горном деле. М.: Высшая школа, 1973. 287 с.

87. Ушаков И.Н. Горная геометрия. М.: Недра, 1979. 440 с.

88. Калинин В.М. Геометрия недр (горная геометрия). Новочеркасск. ЮРГТУ. 2000. 110 с.

89. Самарин А. В. Геометрия недр. 2008. Часть 1. 120 с.

90. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. 1969. М.: Мир. 252 с.

91. Gordon W. Blending function methods for bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. Numerical Analysis. 1971. N 4. P. 158–177

92. Coons S.A. Surface for computer-Aided design of space forms // Project Mac report MAC-TR-41. Cambridge, 1967. P. 3–30

93. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев:

Техніка, 1967. 212 с.

94. Литвин О.Н. Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии: Обзор/О.Н. Литвин, И.В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. 2007. №1. С. 64–81.

95. Oleg N. Lytvyn. Interlineation and interflatation functions of many variables (blending functions interpolation) and economical algorithms in the Approximation theory. Computational Methods (G.R. Liu, V.B.C. Tan, X. Han ed.). Band 2, Springer, 2006. P.1105–1110

96. Литвин О.Н. Формулы Тейлора и Даламбера. Интерлинация функций. Методика изучения. Рекомендации преподавателям и студентам. Киев: УМК ВО, 1990. 48 с.

97. Гулік Л.І. Інтерлінація функцій трьох змінних на системі ортогональних прямих // Доповіді НАН України. 2004. № 11. С. 16–22.

98. Shepard D. Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data, Proc. 23rd Nat.Conf.ACM, 1968. P.517–524.

99. Barnhill R.E. Properties of Shepard's surfaces/ R.E. Barnhill, R.P. Dube, F.F. Little // Rocky Mountain J.Math., v. 13,1983. P.365–382.

100. Reinhard Farwig. Rate of Convergence of Shepard's Global Interpolation Formula // Mathemat. of Comput.v.46, №174,1986. P.577–590.

101. Gal S.G. On the preservation of global smoothness by some interpolation operators/ S.G. Gal, J. Szabados //Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaria. 1999. vol. 35. P. 397–414.

102. Adell, J. A. Preservation of moduli of continuity for Bernstein-type operators/ J. A. Adell, and J. De La Cal, // Approximation, Probability and Related Fields (Santa Barbara, CA, 1993), G. A. Anastassiou and S. T. Rado, Eds., Plenum Press, New York, 1994, 1–18 p.

103. Adell, J. A. Global smoothness preservation properties for generalized Szasz-Kantorovich operators / J. A. Adell, A. Perez-Palomares //, Preprint, 1996.

104. Adell, J. A. Second modulus preservation inequalities for generalized Bernstein-Kantorovich operators/ J. A. Adell, A. Perez-Palomares // Approximation

and optimization, Vol. 1 (Cluj-Napoca, 1996), Transilvania, Cluj-Napoca, 1997, 147–156.

105. Букринский В.А. Геометрия недр. М.: Недра, 1985. 526 с.

ДОДАТОК А

Елементи бурової свердловини, історичні умови і призначення похило спрямованих свердловин

В додатку викладено основні поняття по свердловинному бурінню, історичні умови і призначення похило спрямованого буріння.

Розвиток буріння похилих свердловин.

Буріння нафтових свердловин в Україні почалося у ХІХ ст. на Прикарпатті. В 1849 р. компанія «Щепановські і М. Федорович» ручним способом пробурила першу свердловину у Нагуєвичах до глибини 60 м.

У 1861 р. підприємець Роберт Домс запровадив ручне ударне буріння свердловин у Бориславі. За день поглиблення не перевищувало 50 см, а глибина свердловини сягала 150 м.

У 1884 р. у Галичину було завезено канадську систему ударного буріння на штангах. Спорудження свердловин відбувалося з допомогою дерев'яної вежі, яка мала висоту 20 – 32 м. У свердловину спускали обсадну колону, яка залежно від поглиблення виробки нарощувалася так, щоб низ колони був біля вибою. Спочатку застосовували дерев'яні штанги та прядивні канати, пізніше їх замінили сталевим. У 1892 р. вже з'явилися сталеві бурові вежі, однак запроваджували їх дуже повільно.

Прогресивніший роторний спосіб буріння почали впроваджувати у 193 р. на Дашавському газовому родовищі. Незважаючи на це, ударне буріння продовжували широко застосовувати до 1948 р. У 1945 р., наприклад, буріння ще майже 90% свердловин в Україні проводилося саме ударним способом.

Широке використання роторного буріння в Україні почалося у 1945 р. спочатку в Дніпровсько Донецькій западині, а потім у Криму та на Прикарпатті.

Турбінне буріння вперше в Україні було застосоване у 1947 р. на Бориславському родовищі (свердловини No 1560, 1565). Винахід

багатоступеневого турбобура, обґрунтування і розроблення турбінного способу буріння свердловин належать П. П. Шумилу (П. П. Шумилу). Він не лише створив наукову теорію аксіальних турбін, а й разом з іншими фахівцями галузі дослідив і запропонував нові конструкції бурових доліт, насосів, бурильних труб та іншого обладнання й інструменту, що дозволило комплексно вирішити питання практичного впровадження нового прогресивного способу буріння.

У Східній Україні, зокрема в межах Дніпровсько-Донецької западини, працювали розвідувальні геологічні організації. Роботи проводили фахівці Українського геолого-гідрогеодезичного тресту. Почалися пошуки газу в Приазов'ї, у районі Мелітополя.

Наукова школа з проблем надійності кріплення свердловин (А.О. Федоров, О. В. Тищенко, Я. С. Білецький, М. В. Сенюшкович, І.М. Ковбасюк, О. Б. Марцинків) під керівництвом професора Я. С. Коцкулича після переїзду кафедри буріння до Івано-Франківська продовжила свою роботу у Львові. Були створені нові стенди для дослідження герметичності різьбових з'єднань ОТТМ та ОТТГ, впливу згину труб на міцність і герметичність обсадних труб та з'єднань, розроблені засади надійності кріплення похило скерованих та горизонтальних свердловин, що стало актуальною проблемою у зв'язку зі зростанням обсягів буріння таких свердловин.

У зв'язку зі збільшенням глибин, ускладненнями під час доведення долота до вибою через осипання та обвалювання стінок свердловини, неякісне очищення її стовбура від вибуреної породи об'єми буріння турбобурами й електробурами поступово зменшувалися. У 1961 р. українські фахівці знову почали переходити на роторний спосіб буріння. У подальшому турбобури продовжували успішно використовувати у поєднанні із алмазними долотами під час спорудження вертикальних свердловин, а в процесі буріння похилих свердловин застосовували гвинтові двигуни.

Поширене нині буріння похилих, багатовибійних та горизонтальних свердловин уперше почали впроваджувати на Прикарпатті. Протягом 1957–

1959 рр. у Бориславі на ділянці МЕРП під керівництвом О. М. Григоряна споруджено низку розгалужено горизонтальних свердловин: № 1543, 1544, 1545, 1546. У 1972 р. розпочато буріння горизонтально розгалуженої свердловини № 801 у Долині із чотирма стовбурами з допомогою електробурів і телеметричних систем СТЕ–215. Загалом було споруджено п'ять горизонтально розгалужених свердловин (№ 350, 351, 353, 356, 360) і чотири одностовбурні похило спрямовані (№ 239, 354, 355, 825). Похилі свердловини бурили у разі потреби. Так у 1983 р. у Бориславі споруджена свердловина № 2000 глибиною 2025 м і відхиленням від вертикалі 1259 м. Із 1977 р. на Прикарпатті під час буріння похилих свердловин почали застосовувати телеметричні системи СТЕ–164 Харківського СКБ «Потенціал».

У 2005 р. закінчено найглибшу в Україні (6223 м) продуктивну свердловину № 10 Семеренківського родовища. Буріння свердловин на нафту і газ проводили три основні організації: Міністерство геології України, бурові підприємстві об'єднань «Укрнафта» та «Укргазпром» (після реорганізації – НАК «Нафтогаз України»). Пошукове і розвідувальне буріння здійснювали контори або експедиції розвідувального буріння, підпорядковані Міністерству геології України.

Освоєння буріння свердловин на морі здійснювалося під керівництвом і за активною участю досвідчених фахівців Мінгеології України (П. Ф. Шпак, В.І. Поняковський) та об'єднання «Кримморгеологія» і ПАТ «ДАТ «Чорноморнафтогаз» (І. М. Васильченко, В. С. Вовк, М. К. Ільницький, А.В. Козлов, В. С. Овчаренко, Р. М. Сенів, Ф. М. Урюпін та ін.).

У 2012 р. ДАТ «Чорноморнафтогаз» придбав дві нові самопідйомні плавучі бурові установки «Петро Годованець» та «Незалежність», спроектовані і побудовані на сінгапурській судноверфі «Kerppel FELS» у 2010 р. й оснащені новітнім обладнанням. Вони мають найкращі характеристики як за глибиною моря у місці встановлення (до 120 м), так і за глибиною буріння (9144 м); можуть бурити 12 свердловин з однієї позиції. Серед устаткування — автоматизована система контролю буріння «Амфіон»,

цементувальний комплекс компанії «Schlumberger» та два автоматизовані ключі бурильника.

З 2012 р. СПБУ «Петро Годованець» здійснює експлуатаційне буріння похило спрямованих свердловин на блок кондукторі БК–1 Одеського газового родовища у північно-західній частині шельфу Чорного моря. Це перший блок кондуктор родовища, з якого розпочато подавання газу до ГТС України.

Загалом на БК–1 буде збудовано та введено в експлуатацію шість продуктивних свердловин. Одеське родовище із запасами газу 21 млрд м³ є найбільшим родовищем, відкритим ДАТ «Чорноморнафтогаз» у Чорному морі. Освоєння його покладів у комплексі з покладами Безіменного родовища стало основою для реалізації програми істотного збільшення видобутку природного газу в українському секторі Чорного і Азовського морів.

Бурінням свердловин називається сукупність робіт по проведенню в гірських породах вироблень круглого перерізу. Ці роботи виконуються спеціальними технічними засобами(буровими установками і інструментами (Додаток Б) без доступу людини всередину цих вироблень.

Буріння свердловин, як будь-яка технічна галузь знання, підрозділяється на техніку і технологію буріння.

Буровою свердловиною називається циліндричне гірське вироблення, що має діаметр у багато разів менше її глибини. Діаметр бурових свердловин змінюється від 16 до 1500 мм, а в деяких випадках, як, наприклад, при бурінні під шахтні стволи - до 8-10 м.

Природно, що при бурінні розвідувальних свердловин буріння здійснюється набагато меншим діаметром з метою зменшення маси бурових установок і інструменту, збільшення швидкості буріння і здешевлення робіт на розвідку цього родовища корисних копалини. Буріння свердловин може здійснюватися із заміною поверхні з підземних гірських вироблень, з поверхні водойм(річок, озер, морів і океанів) і навіть з поверхні інших планет(наприклад, з місяця).

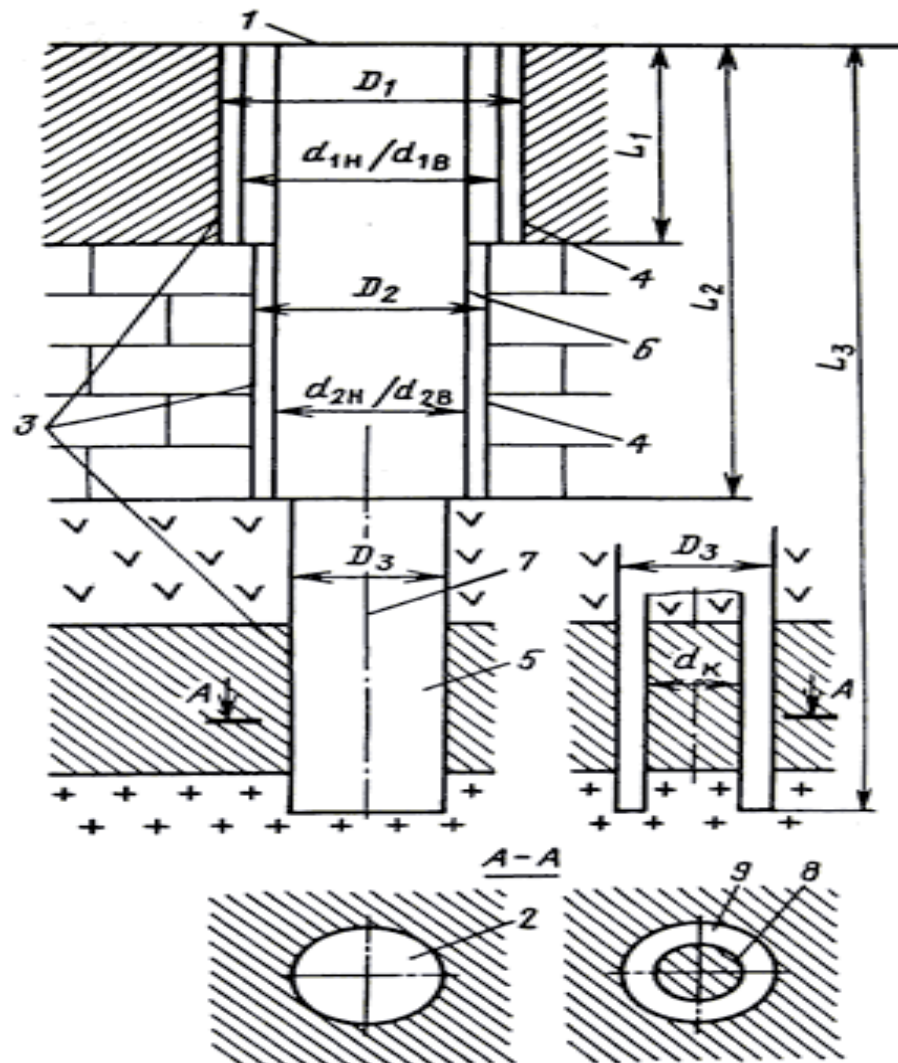


Рисунок А1 – Елементи бурової свердловини.

До елементів бурової свердловини відносяться (рисунок А1) :

- гирло свердловини 1 - початок свердловини, тобто місце перетину її із земною поверхнею гірського вироблення;
- 1 - гирло;
- 2, 9 - суцільний і кільцевий забій відповідно;
- 3 - стінки;
- 4 - обсадні колони;
- 5, 6 - ствол свердловини, відповідно не обсаджений і обсаджений трубами;
- 7 -ось свердловини;
- 8 - керн;

- 9 - забій кільцевий;
- D1, D2, D3 - діаметри інтервалів свердловини;
- d1H, d1B, d2H, d2B - діаметри обсадних труб зовнішні(н) і внутрішні(в);
- dx - діаметр керна;
- L1, L2 - глибини обсаджених інтервалів свердловини; L3 - загальна глибина свердловини;
- *забій свердловини 2* - дно бурової свердловини, що переміщається в результаті дії породоруйнівного інструменту на породу;
- *стілки свердловини 3* - бічні поверхні бурової свердловини;
- *обсадні колони 4* - колони сполучених між собою обсадних труб, концентрично розташовані у свердловині і призначені для кріплення стінок свердловини. Якщо стінки свердловини складені із стійких порід, то у свердловину обсадні колони не спускаються;
- *ствол свердловини 5* - простір в надрах землі, займане буровою свердловиною;
- *вісь ствола свердловини 6* - уявна лінія, що сполучає центри поперечних перерізів бурової свердловини.

За способом розробки забою буріння свердловин розділяється на безкернове (суцільне) і колонкове.

Керн після вибурювання відривають від забою, піднімають на поверхню з метою його дослідження геологами, складання геологічного розрізу і вивчення елементарного складу породи для подальшого підрахунку запасів цього родовища.

Просторове положення бурової свердловини в надрах землі визначається наступними чинниками:

- координатами центру гирла свердловини X, Y, Z ;
- напрямом буріння свердловини;
- зенітним кутом(чи кутом нахилу) свердловини;
- азимутом свердловини;

- глибиною.

По напрямку бурові свердловини підрозділяються на наступні типи:

- вертикальні - спрямовані вертикально вниз;
- похилі - спрямовані вниз під кутом до вертикалі;
- горизонтальні - спрямовані горизонтально;
- вертикальні, що повстають, - спрямовані вгору по вертикалі(з гірських вироблень);
- похилі, що повстають, - спрямовані під кутом до вертикалі вгору(з гірських вироблень).

Призначення похило-направленого буріння.

Для теперішнього часу характерне бурхливе зростання об'ємів похило-спрямованого буріння. Необхідність буріння похило спрямованих свердловин визначається наступними причинами:

- особливістю рельєфу і поверхні(моря, болота, озера, населені пункти, споруди і т. д.);
- необхідністю охорони довкілля(орні угіддя, ліси пасовища і так далі);
- прагнення до зниження витрат часу і засобів на бурові споруди і під'їзди до них;
- необхідністю розкриття круто залягаючих пластів;
- необхідністю проводки розвантажувальної свердловини поблизу ствола фонтануючої свердловини;
- необхідністю обходу основного ствола при різних аваріях і ускладненнях і т.д.

Отже, похило спрямоване буріння нині стало найбільш поширеним методом проводки свердловин, і тенденція до збільшення його долі в загальному об'ємі буріння зберегтися і в подальші роки.

Похиле буріння нині широко застосовується при бурінні свердловин на нафту, газ і тверді корисні (рисунок А2) копалини.

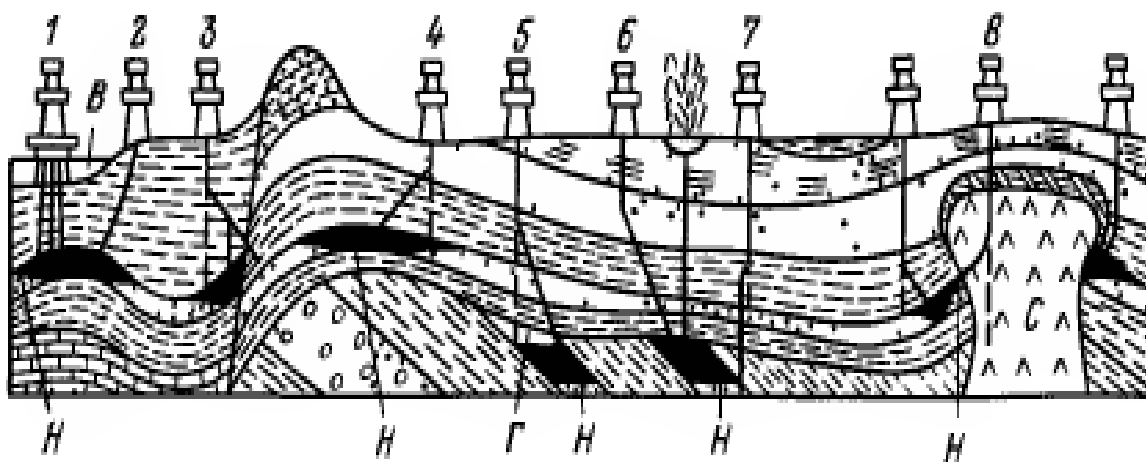


Рисунок А2 – Приклади застосування похилого буріння свердловин (1 - проходка з морської основи, 2 - разбурювання морського нафтового родовища з берега, 3 - відхилення ствола свердловин від зони розриву у напрямку до нафтової ділянки, 4 - проходка похилої свердловини, забої якої буде розташований під ділянкою не доступним для установки бурової, 5 - буріння на нафтові пласти моноклінального типу, 6 - буріння допоміжної похилої свердловини для ліквідації пожежі або відкритого фонтану, 7 - відхід в сторону при аварії, 8 - проходка похилих свердловин в районі замивання соляного куполу, Н - нафта, В - вода, Г - газ, С - сіль).

До похилих свердловин при турбінному і роторному бурінні на нафту і газ відносяться в основному свердловини, що забурюють з поверхні вертикально з подальшим відхиленням в необхідному напрямі.

Отримавши широке поширення, одноствольне похиле буріння не вичерпало своїх резервів. Можливість горизонтального зміщення забою відносно вертикалі(проекції гирла свердловини на пласт) дозволила створити спочатку куцовою, а потім багатозабійні методи буріння.

Так, кривизною у бурінні називають кут нахилу свердловини на цьому інтервалі, тоді як в математиці кривизною називається межа відношення кута повороту дотичної на дузі до довжини цієї дуги, тобто приріст кута на якійсь певній криволінійній ділянці.

Отже, кривизною свердловини називається приріст кута викривлення на певній криволінійній ділянці.

Проектування профілів – одна із складових частин технічних проектів на будівництв похило спрямованих свердловин. Мета проектування профілю – вибір типу і конфігурації його, розрахунок і побудова траєкторії осі ствола

похило-спрямованих свердловин в просторі.

Профіль проектується виходячи з цільового призначення свердловини і конкретних геолого-технічних умов буріння. Профіль похило-спрямованих свердловин повинен забезпечити:

- доведення свердловини до проектної глибини без яких або ускладнень при існуючому стані техніки і технології бурових робіт;
- якісне будівництво свердловин при мінімальних витратах часу і засобів;
- досягнення проектного зміщення забою від вертикалі в заданому напрямі з урахуванням допустимих норм відхилення від проектного положення при мінімальному об'ємі робіт з орієнтованими КНБК, що відхиляють;
- мінімальна кількість перегинів ствола з радіусами викривлення, що не перевищують допустимі величини;
- можливість вільного проходження по стволу різних КНБК і обсадних колон в процесі буріння і оснащень елементів підземного устаткування в процесі експлуатації і підземного буріння;
- тривалу і безаварійну експлуатацію свердловин глибинними насосами, у тому числі і глибинними шланговими насосами, а також можливість застосування методів одночасно роздільній експлуатації декількох горизонтів при розробці родовищ багатопластів нафти.

Застосовні для буріння похило спрямованих свердловин типи профілів діляться на дві групи. До першої відносяться профілі звичайного типу, що представляють криву лінію, розташовану в одній вертикальній площині; до другої – профілі просторового типу, що представляють просторову криву лінію.

Профілі звичайного типу є найбільш поширеними і їх слід максимально використати при бурінні похило спрямованих свердловин. Їх застосовують при розбурюванні родовищ платформеного і складчастого типів, де вплив

геологічних умов на мимовільне викривлення ствола порівняно невеликий, а також при бурінні похило спрямованих свердловин в маловивчених районах, де закономірності природного викривлення ствола невідомі (рисунок А3).

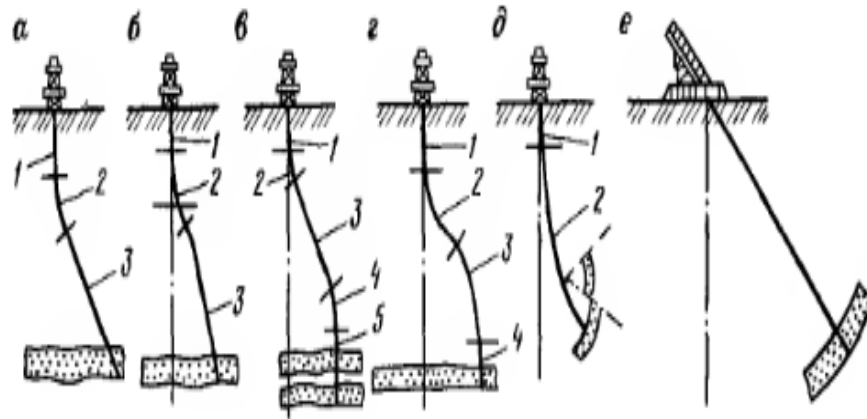


Рисунок А3 – Профілі похило спрямованих свердловин звичайного типу

Профілі похило спрямованих свердловин просторового типу є кривою, що нагадує спіральну лінію. Свердловини такого профілю слід бурити в тих районах, де великий вплив геологічних умов на мимовільне викривлення ствола. Профілі просторового типу можна застосовувати в районах із складнодислоцированными покладами нафти, а також при бурінні допоміжних свердловин для гасіння фонтанів нафти і газу (Рисунок А4), що горять.

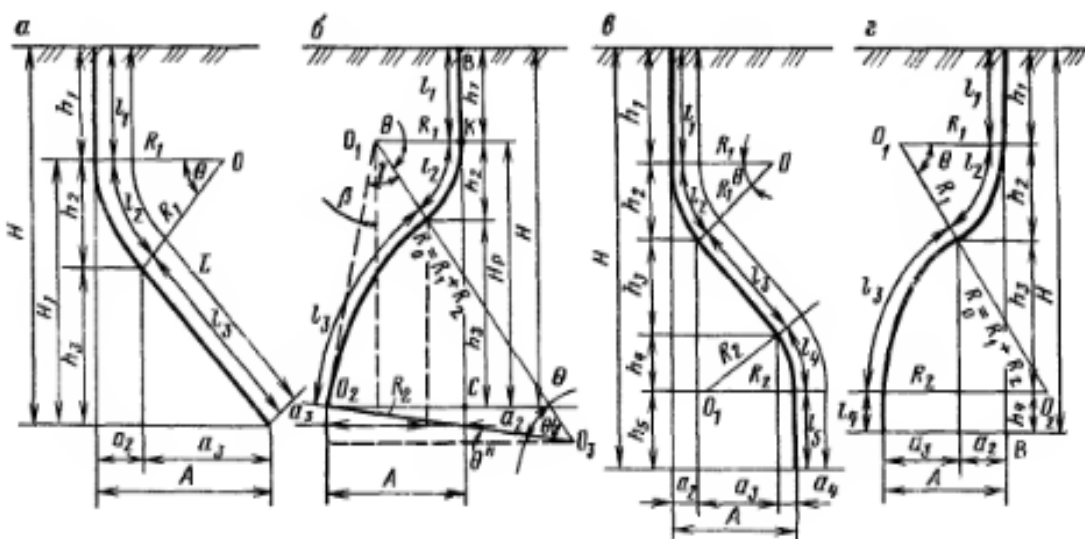


Рисунок А4 – Розрахункові схеми профілів просторового типу

ДОДАТОК Б

Результат побудови інтерлінаційних операторів для нерегулярно розміщених похилих свердловин

Побудова формул і графіків для похилих свердловин $(x(t), y, t)$

Введемо позначення, які будуть використовуватися при побудові профіля похилої свердловини.

H – глибина вертикальної частини свердловини,

R – радіус кола, яке сполучає вертикальну частину з горизонтальною,

$z = -H - R$ – глибина, на якій розміщена горизонтальна частина свердловини.

Вважаємо, що свердловина розміщена в площині $y = const$.

$x_0 = 0$ – абсиса вертикальної частини свердловини;

$(x_0 + R, -H)$ – центр кола, що з'єднує вертикальну та горизонтальну частини свердловини.

$$\begin{aligned}
 \underline{H} &:= 2 & \underline{H1} &:= 2. & \underline{H2} &:= 3. & a &:= 1 & b &:= 1 \\
 \underline{R} &:= 1 & \underline{Q} &:= 5 & & & & & & \\
 \underline{xk} &:= 1 & & & & & & & & \\
 q &:= 0..Q & & & & & & & & \\
 Z_q &:= \frac{-H2-q}{Q} & \beta &:= \frac{\pi}{4} & \alpha &:= \frac{\pi}{3} & & & & \\
 f(x, y, z) &:= a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot e^{-b \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} & & & & & & & & \\
 x3(z) &:= \begin{cases} xk & \text{if } -H \leq z \wedge z \leq 0 \\ xk + \left(R - R \cdot \cos \left(\arcsin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos \beta & \text{if } -H1 \leq z \wedge z \leq -H \\ xk + \left(R - R \cdot \cos \left(\arcsin \left(\frac{-H1+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos \beta + \frac{(z+H1) \cdot (-H1+H) \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H1+H}{R} \right)^2}} & \text{if } -H2 \leq z \wedge z \leq -H1 \end{cases} \\
 X_q &:= x3(Z_q)
 \end{aligned}$$

Рисунок Б1 – Розрахункові формули для побудови вигляду свердловини

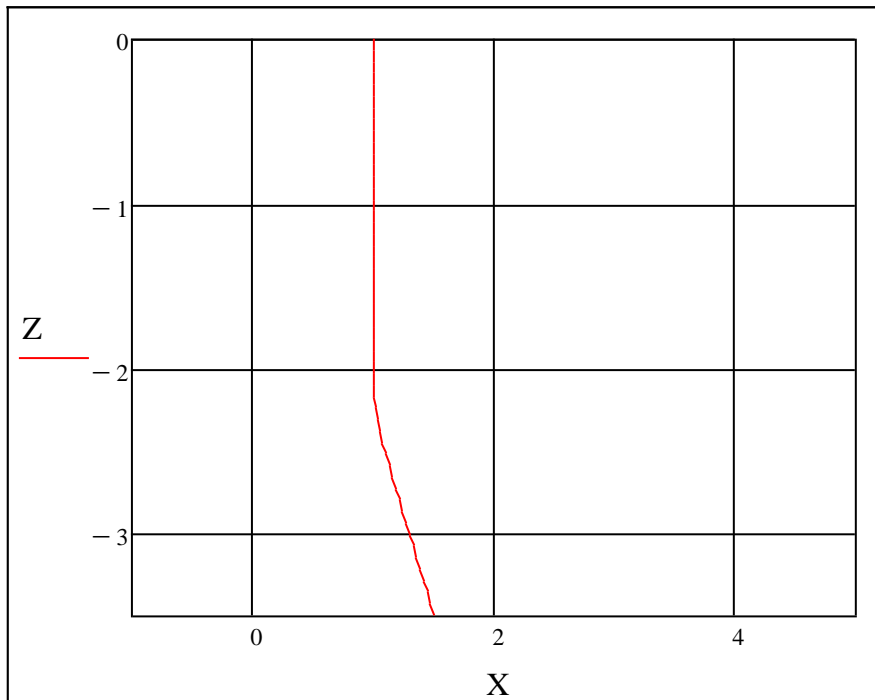


Рисунок Б2 – Вигляд отриманої свердловини

$$H_w := 2 \quad H1_w := 2.1 \quad H2_w := 3.1$$

$$y_k := 0.1 \quad R_w := 1$$

$$\beta := \frac{\pi}{4} \quad \alpha := \frac{\pi}{3}$$

$$Q := 50$$

$$q := 0..Q$$

$$Z_q := \frac{-H2_w \cdot q}{Q} \quad \beta_w := \frac{\pi}{4} \quad \alpha_w := \frac{\pi}{3}$$

$$y(z) := \begin{cases} y_k & \text{if } -H \leq z \wedge z \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_k + \left(R - R \cdot \cos \left(a \sin \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) & \text{if } -H1 \leq z \wedge z \leq -H \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_k + \left(R - R \cdot \cos \left(a \sin \left(\frac{-H1+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) + \frac{(z+H) \cdot (-H1+H) \cdot \sin(\beta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H1+H}{R} \right)^2}} \cdot \frac{\sin(\beta)}{R} & \text{if } -H2 \leq z \wedge z \leq -H1 \end{cases}$$

$$x^3(0) = 1$$

$$x^3(-H) = 1$$

$$x^3(-H1) = 1.095$$

$$x^3(-H2) = 1.503$$

Рисунок Б3 – Розрахункові формули для побудови вигляду свердловини

$$Y_q := y_3(Z_q)$$

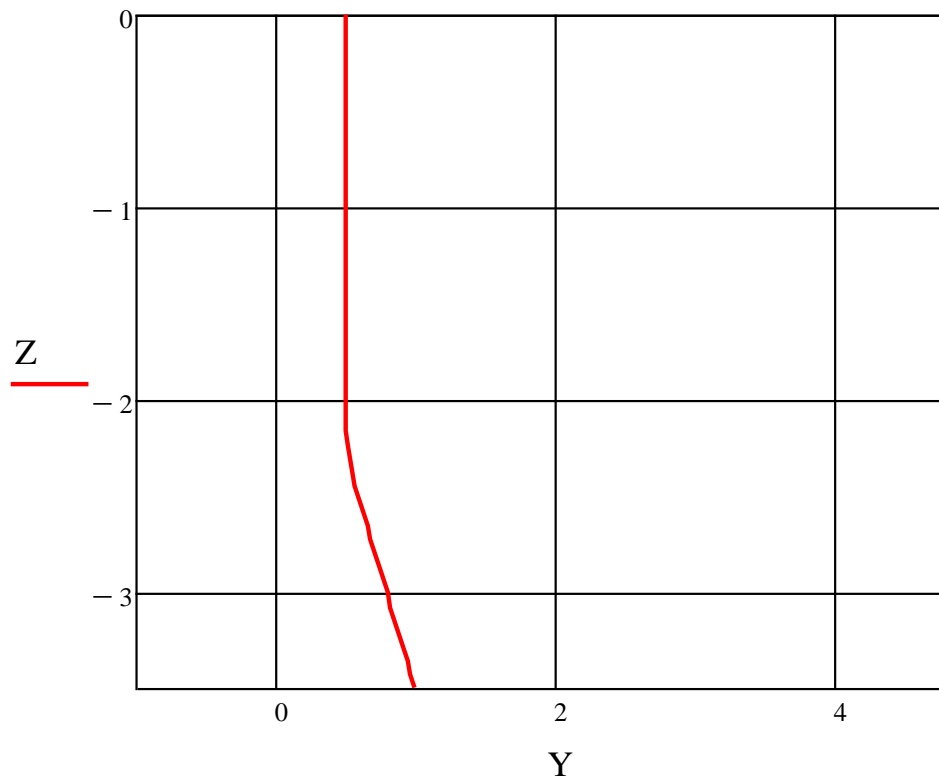


Рисунок Б4 – Вигляд отриманої свердловини в YOZ

$$y_3(0) = 0.5$$

$$y_3(-H) = 0.5$$

$$y_3(-H1) = 0.595$$

$$y_3(-H2) = 1.003$$

$$Q := 5t$$

$$p := 0.. Q$$

$$Z_p := \frac{H1 + 2 \cdot R}{Q} \cdot p$$

$$X := x_3(Z_q) \quad Y := y_3(Z_p)$$

Рисунок Б5 – Вхідні дані для обчислювального експерименту

	0
0	0
1	0.09
2	0.18
3	0.27
4	0.36
5	0.45
6	0.54
7	0.63
8	0.72
9	0.81
10	0.9
11	0.99
12	1.08
13	1.17
14	1.26
15	...

 $Z_p =$

	0
	-0.07
	-0.14
	-0.21
	-0.28
	-0.35
	-0.42
	-0.49
	-0.56
	-0.63
	-0.7
	-0.77
	-0.84
	-0.91
	-0.98
	...

$$x_{11} := -1$$

$$x_1(z) := \begin{cases} x_{11} & \text{if } -H \leq z \wedge z \leq 0 \\ x_{11} + \left(R - R \cdot \cos \left(\operatorname{asin} \left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos(\beta) & \text{if } -H_1 \leq z \wedge z \leq -H \\ x_{11} + \left(R - R \cdot \cos \left(\operatorname{asin} \left(\frac{-H_1+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos(\beta) + \frac{(z+H_1) \cdot (-H_1+H) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H_1+H}{R} \right)^2} \cdot R} & \text{if } -H_2 \leq z \wedge z \leq -H_1 \end{cases}$$

$$y_{11} := -0.5$$

$$y_1(z) := \begin{cases} y_{11} & \text{if } 0 \leq z \wedge z \leq H \\ y_{11} + \left(R - R \cdot \cos \left(\operatorname{asin} \left(\frac{z-H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) & \text{if } H \leq z \wedge z \leq H_1 \\ y_{11} + \left(R - R \cdot \cos \left(\operatorname{asin} \left(\frac{H_1-H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) + \frac{(z-H_1) \cdot (H_1-H) \cdot \sin(\beta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{H_1-H}{R} \right)^2} \cdot R} & \text{if } H_1 \leq z \wedge z \leq H_1 + 2 \cdot R \end{cases}$$

$$x2(z) := \begin{cases} x22 & \text{if } -H \leq z \wedge z \leq 0 \\ x22 + \left(R - R \cdot \cos\left(\operatorname{asin}\left(\frac{z+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos(\beta) & \text{if } -H1 \leq z \wedge z \leq -H \\ x22 + \left(R - R \cdot \cos\left(\operatorname{asin}\left(\frac{-H1+H}{R} \right) \right) \right) \cdot \cos(\beta) + \frac{(z+H1) \cdot (-H1+H) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{-H1+H}{R} \right)^2} \cdot R} & \text{if } -H2 \leq z \wedge z \leq -H1 \end{cases}$$

$$y22 := -1$$

$$y2(z) := \begin{cases} y22 & \text{if } 0 \leq z \wedge z \leq H \\ y22 + \left(R - R \cdot \cos\left(\operatorname{asin}\left(\frac{z-H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) & \text{if } H \leq z \wedge z \leq H1 \\ y22 + \left(R - R \cdot \cos\left(\operatorname{asin}\left(\frac{H1-H}{R} \right) \right) \right) \cdot \sin(\beta) + \frac{(z-H1) \cdot (H1-H) \cdot \sin(\beta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{H1-H}{R} \right)^2} \cdot R} & \text{if } H1 \leq z \wedge z \leq H1 + 2 \cdot R \end{cases}$$

Наведемо зображення отриманих похилих свердловин для досліджуваної ділянки розвідки корисних копалин.

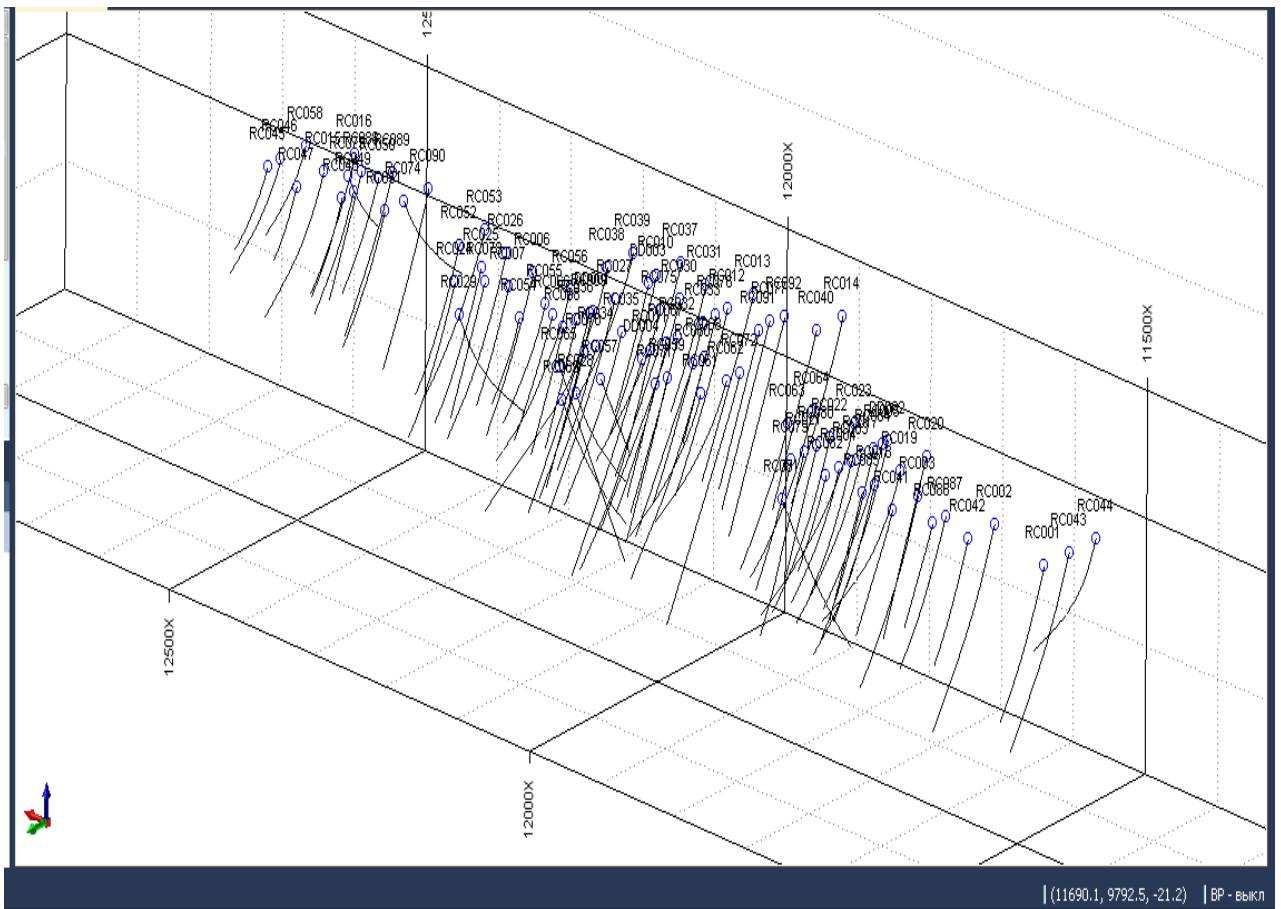


Рисунок Бб – Розвідувальна ділянка

Для побудови інтерлінаційних операторів для нерегулярно розміщених похилих свердловин одним з кроків алгоритму є триангуляція поверхні. Практична реалізація була здійснена в системі середовищі програмування Delphi. Була складена програма *Triangulation*, за допомогою якої можна знайти зображення триангуляції за заданими точками дослідження.

Наведемо фрагмент коду:

```

procedure Triangulate;
var P_Encours,P:P_NodePoint;
    PNode : P_NodeTriang;
    i : integer;
    label FIN ;
begin
    i :=0;
    P:=ListPoint.ReadTri;
    // Считываем три точки из списка точек
    while (i<3) and (P<>NIL) do
    begin
        i:=i+1;
        P:=P.ReadNext;
    end;
    // Если трех точек нет то выходим и
    сообщаем об этом
    if i<3 then goto FIN;
    // Получаем список точек
    P_Encours:=ListPoint.ReadTri;

    // Если два ребра параллельны
    if
    Parallel(P_Encours.NReadPoint,P_Encours.Read
    Next.NReadPoint,
    P_Encours.ReadNext.ReadNext.NReadPoint)then
    begin
        // сдвигаем точку на 0,1
        P_Encours.NReadPoint.DetOrd(P_Encours.NRea
        dPoint.ReadOrd+0.1);
        P_Encours.ReadNext.NReadPoint.DetAbs(P_Enc
        ours.ReadNext.NReadPoint.ReadAbs+0.1);
        end;
        // создаем первый треугольник и рисуем его
        New(PNode);
        PNode.CNodeTriang(P_Encours.NReadPoint,P_
        Encours.ReadNext.NReadPoint,
        P_Encours.ReadNext.ReadNext.NReadPoint);
        ListTriang.Insert(PNode);
        PNode.Afficher(clLine);
        P_Encours:=P_Encours.ReadNext;
        NbPoint:=3;
        //
        // Далее проходим по списку и создаем
        последовательно треугольники
        while P_Encours<>NIL do
        begin
            Bon_Triang(P_Encours.NReadPoint);
            P_Encours:=P_Encours.ReadNext;
            NbPoint:=NbPoint+1; // Переменная
            количества треугольников
        end;

        form1.StatusBar1.Panels[5].Text:=inttostr(NbTri
        angle);

        //form1.StatusBar1.Panels[1].Text:=inttostr(NbPo
        int);
        FIN:
        end;
        // Процедура построения треугольника
        procedure Bon_Triang(PPoint:P_Point);
        var PEncours,PNode : P_NodeTriang;
            Edge : TEdge;
            Encors: Boolean;
        begin
            // получаем вершину списка треугольников
            PEncours:=ListTriang.ReadTri;
            // пока еще есть треугольники в списке
            while PEncours<>NIL do
            begin
                Encors:=True;
                while Encors=True do // обходим по ребрам
                треугольника и пытаемся строить
                треугольники соседи
                begin
                    Encors:=False;
                    Edge:=[];
                    PNode:=NIL;
                    Edge:=GetEdge(PEncours,PPoint); //
                    получаем ребра у которых нет соседей
                    // Если ребро 12 можно построить
                    то достраиваем на нем треугольник
                    if Edge12 in Edge then
                    begin
                        New(PNode);

```

```

// создаем треугольник из точек
P1 P1 PPoint

PNode.CNodeTriang(PEncours.ReadP1,PEncours.
ReadP2,PPoint);
    PEncours.DetT12(PNode); //
добавляем этот треугольник в соседний
предыдущему
    PNode.DetT12(PEncours); //
добавляем предыдущий в соседи этому
треугольнику
    // если нужно строить остальные
ребра то Encors:=True;
    if (Edge13 in Edge)or(Edge23 in
Edge) then
        Encors:=True;

        // Процедура помечает ребра
Coller(PNode);
        // выводим треугольник на экран
PNode.Afficher(cilLine);
        ListTriang.Insert(PNode); //
добавляем треугольник в список
треугольников
        Optimalser_List(PNode); //
запускаем процедуру оптимизации списка
end
    // Если ребро 13 можно построить
то достраиваем на нем треугольник,
аналогично предыдущему случа
    else if Edge13 in Edge then
begin
    New(PNode);

PNode.CNodeTriang(PEncours.ReadP1,PEncours.
ReadP3,PPoint);
    PEncours.DetT13(PNode);
    PNode.DetT12(PEncours);
    if (Edge12 in Edge)or(Edge23 in
Edge) then
        Encors:=True;
        Coller(PNode);
        PNode.Afficher(cilLine);
        ListTriang.Insert(PNode);
        Optimalser_List(PNode);
end
    // Если ребро 23 можно построить
то достраиваем на нем треугольник,
аналогично предыдущему случа
    else if Edge23 in Edge then
begin
    New(PNode);

PNode.CNodeTriang(PEncours.ReadP2,PEncours.
ReadP3,PPoint);
    PEncours.DetT23(PNode);
    PNode.DetT12(PEncours);
        if (Edge12 in Edge)or(Edge13 in
Edge) then
            Encors:=True;
            Coller(PNode);
            PNode.Afficher(cilLine);
            ListTriang.Insert(PNode);
            Optimalser_List(PNode);
end;
        end;
        PEncours:=PEncours.ReadNext; //
переходим к следующей точке
end;
end;
// Процедура проверки треугольника
procedure Coller(var Triangle:P_NodeTriang);
var PEncours:P_NodeTriang;
    PP : TFlagPoint;
begin
    //Получаем список треугольников
    PEncours:=ListTriang.ReadTri;
    // пролистываем список треугольников
while PEncours<>NIL do
begin
    // проверяем какие точки лежат в
треугольнике
    PP:=[];
    if
(PEncours.ReadP1=Triangle.ReadP1)or(PEncours.
ReadP1=Triangle.ReadP3)then
        PP:=[P1];
    if
(PEncours.ReadP2=Triangle.ReadP1)or(PEncours.
ReadP2=Triangle.ReadP3)then
        PP:=PP+[P2];
    if
(PEncours.ReadP3=Triangle.ReadP1)or(PEncours.
ReadP3=Triangle.ReadP3)then
        PP:=PP+[P3];
    // если ребро p1p2 в треугольнике, то
добавляем его в соседи
    // аналогично с другими ребрами
if (P1 in PP)and(P2 in PP)then
begin
    PEncours.DetT12(Triangle);
    Triangle.DetT13(PEncours);
end
else if (P1 in PP)and(P3 in PP)then
begin
    PEncours.DetT13(Triangle);
    Triangle.DetT13(PEncours);
end
else if (P2 in PP)and(P3 in PP)then
begin
    PEncours.DetT23(Triangle);
    Triangle.DetT13(PEncours);
end;
end;
end;
end;

```

```

// аналогично предыдущему проверяем
другие ребра
PP:=[];
if
(PEncours.ReadP1=Triangle.ReadP2)or(PEncours.ReadP1=Triangle.ReadP3)then
  PP:=[P1];
  if
  (PEncours.ReadP2=Triangle.ReadP2)or(PEncours.ReadP2=Triangle.ReadP3)then
    PP:=PP+[P2];
    if
    (PEncours.ReadP3=Triangle.ReadP2)or(PEncours.ReadP3=Triangle.ReadP3)then
      PP:=PP+[P3];
      if (P1 in PP)and(P2 in PP)then
        begin
          PEncours.DetT12(Triangle);
          Triangle.DetT23(PEncours);
        end
      else if (P1 in PP)and(P3 in PP)then
        begin
          PEncours.DetT13(Triangle);
          Triangle.DetT23(PEncours);
        end
      else if (P2 in PP)and(P3 in PP)then
        begin

```

```

PEncours.DetT23(Triangle);
Triangle.DetT23(PEncours);
end;
PEncours:=PEncours.ReadNext; // переходим
к следующему треугольнику
end;
end;
{ Проверка, параллельны ли два ребра p1-p и
p2-p }
function Parallel(P1,P2,PPoint:P_Point):boolean;
var Parall : boolean;
Determinant : Real;
begin
  // вычисляем детерминант матрицы
  Determinant := ((P1.ReadAbs-
P2.ReadAbs)*(P1.ReadOrd-PPoint.ReadOrd)
-((P1.ReadOrd-
P2.ReadOrd)*(P1.ReadAbs-PPoint.ReadAbs));
  // если детерминант равен нулю, то они
  параллельны, иначе не параллельны
  if (Determinant=0) then
    Parall := True
  else
    Parall := False;
  Result := Parall;
End.

```

$$\gamma_1(z) := f(x_1(z), y_1(z), z), \gamma_2(z) := f(x_2(z), y_2(z), z), \gamma_3(z) := f(x_3(z), y_3(z), z)$$

$$O(x, y, z) := \frac{\Delta_1(x, y, z)}{\Delta(z)} \cdot \gamma_1(z) + \frac{\Delta_2(x, y, z)}{\Delta(z)} \cdot \gamma_2(z) + \frac{\Delta_3(x, y, z)}{\Delta(z)} \cdot \gamma_3(z)$$

$$\Delta(z) = \begin{pmatrix} x_1(z) & y_1(z) & 1 \\ x_2(z) & y_2(z) & 1 \\ x_3(z) & y_3(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_2(z) & y_2(z) & 1 \\ x_3(z) & y_3(z) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(-0.1) = 0.5, \quad \Delta_1(-0.1, 0.2, 0.3) = 0.05,$$

$$\Delta_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} x_1(z) & y_1(z) & 1 \\ x & y & z \\ x_3(z) & y_3(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} x_1(z) & y_1(z) & 1 \\ x_2(z) & y_2(z) & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2(-0.1, 0.2, 0.3) = -0.15, \quad \Delta_3(-0.1, 0.2, 0.3) = 0.25.$$

$$f(-0.1, 0.2, 0.3) = 1.217$$

$$O(-0.1, 0.2, 0.3) = 1.136$$

ДОДАТОК В
Акти впровадження результатів дисертаційної роботи



про впровадження результатів кандидатської дисертації Чорної О.С.
«Математичне моделювання просторового розподілу сукупності корисних
копалин методами інтерлінації матриць-функцій»

Комісія, створена проректором з наукової роботи Лазаревим М.І., у складі:

Литвин О.М. - голова, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики;

Першина Ю.І. - доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри вищої та прикладної математики;

Канюк Г.І. - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теплоенергетики і енергосберігаючих технологій;

розглянула матеріали стосовно запровадження результатів кандидатської дисертації Чорної О.С. «Математичне моделювання просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій» і встановила:

1. Результати дисертаційної роботи Чорної О.С. використовуються при виконанні державної бюджетної теми №13-01 ДБ «Розробка та дослідження нового методу розвідки і розробки родовищ корисних копалин на основі інтерлінації функцій».
2. Результати дисертаційної роботи Чорної О.С. можуть бути ефективно використані в навчальному процесі при підготовці студентів та магістрів, що навчаються за спеціальністю "Навтогазова справа".

Голова комісії

д.ф.-м.н., проф.,
зав.кафедри вищої та прикладної математики

Литвин О.М.

Члени комісії

д.ф.-м.н., доцент,
професор кафедри вищої та прикладної математики

Першина Ю.І.

д.т.н., професор,
завідувач кафедри теплоенергетики
і енергосберігаючих технологій

Канюк Г.І.

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

ДОДАТОК Г
Список власних публікацій

1. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 1. С. 61-67.
2. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування. 2013. Том 16. Вип. 4. С. 39-48.
3. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Проблеми машинобудування. 2014. Том 17. Вип. 2. С. 33-39.
4. Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математичне моделювання тривимірного розподілу корисних копалин за даними про них в системі похилих свердловин // Бионика интеллекта. 2014. № 2(83). С. 83-87.
5. Черная Е.С. Вычислительная реализация метода восстановления 3D распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами с использованием линейной сплайн-интерлинации // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2015. Вып. 39. №11(208). С. 167-172.
6. Литвин О.М., Литвин О.О., Коваль Ф.Ф., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу вмісту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерлінації функцій // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6(1178). С. 46-50.
7. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу сукупності корисних копалин методами інтерлінації матриць-функцій // Бионика интеллекта. 2017. № 2(89). С. 37-42.

8. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. С. 163-166.

9. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної інтерлінації функції // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. С. 94-95.

10. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функції лінійних за змінними x та y // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2011. С. 93.

11. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням сплайн-інтерлінації функцій лінійних за змінними X та Y : тези доповідей. Харків: УПА, 2011. С. 12-13.

12. Литвин О.М., Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математична модель просторового розподілу корисних копалин кори землі за допомогою даних з кернів свердловин та інформації про розподіл на поверхні // Інформатика та системні науки (ІСН-2012): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. С. 179-181.

13. Литвин О.О., Штепа Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання 3D розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2013. С. 192-195.

14. Литвин О.М., Литвин О.О., Чорна О.С. Про побудову операторів інтерлінації функцій трьох змінних між системою кривих у просторі та її застосування при розвідці корисних копалин з використанням похилих свердловин// Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL): матеріали і конференції. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2013. С. 148-149.

15. Черная Е.С. Методы построения математических моделей распределения полезных ископаемых на системе наклонных скважин. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. Part 2. М.: MIEM NRU HSE, 2013, P. 444-450.

16. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розподілу корисних копалин між похилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2014. С.315-319.

17. Lytvyn O.O., Shtepa N.I., Denisova O.I., Chorna O.S. Internal Earth structure renewal by means of core in inclined boreholes analysis. Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific and Practical Conference. М.: MIEM NRU HSE, 2014, P. 655-663.

18. Литвин О.О., Чорна О.С. Інтерлінація функцій в математичному моделюванні просторового розподілу деякої сукупності корисних копалин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали конференції. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2016. С. 189-193.