

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

МОХАММАД РАКАН АБЕД АЛНАБІ АЛЬДЖААФРЕХ

УДК 519.876.5:504.05

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ЕРГАТИЧНИХ СИСТЕМ З ДИНАМІЧНИМ ЗАХИСТОМ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Підпис М.Р. Альджаафрах

Науковий керівник

Наумейко Ігор Володимирович, кандидат технічних наук, доцент

Цей примірник дисертаційної роботи ідентичний за змістом
з іншими, поданими до спеціалізованої вченої ради Д64.052.02

Вчений секретар спецради Д64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Мохаммад Ракан Абед Алнабі Альджаафрах. Математичне моделювання та обчислювальні методи дослідження ергатичних систем з динамічним захистом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2018.

Проблема підвищення безпеки людино-машинних (ергатичних) систем була та залишається надзвичайно актуальною. Її розв'язання здійснюється шляхом:

- вбудовування в ергатичну систему спеціально розробленої підсистеми динамічного захисту;
- підвищення швидкодії динамічного захисту до гранично досяжних значень при обмеженнях на її вартість.

У дисертаційній роботі запропоновано рішення актуальної науково-практичної задачі підвищення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих та небезпечних чинників.

Метою дисертаційної роботи є підвищення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом за рахунок раціонального вибору їх параметрів, отриманих у результаті розробки математичних моделей та удосконалення обчислювальних методів їх аналізу.

Досягнення поставленої мети вимагає вирішення наступних завдань:

- виділити клас ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих та небезпечних чинників;
- для виділеного класу технічних систем розробити узагальнену нелінійну динамічну модель процесів взаємодії джерел шкідливих викидів з системою динамічного захисту;

– дослідити умови стійкості та адаптованості ергатичних систем з динамічним захистом;

– провести структурування розробленої узагальненої моделі на частковій сингулярній підмоделі з примежовим шаром, які дозволяють адекватно описувати динаміку різних типів ергатичних систем з суттєво різними швидкостями виділення шкідливих чинників та захисту від них в початкових стадіях розвитку катастроф;

– модифікувати або розробити новий метод для дослідження динамічних властивостей ергатичних систем з динамічним захистом;

– розробити метод оцінювання та оптимізації параметрів вартості системи захисту в залежності від її технічних та динамічних властивостей.

Об’єкт дослідження – процеси взаємодії шкідливих факторів та захисту від них в ергатичних системах з динамічним захистом.

Предмет дослідження – нелінійні математичні моделі ергатичних системи з динамічним захистом.

Методи дослідження дисертаційної роботи ґрунтуються на комплексному використанні: системного аналізу для виявлення зв’язків, впливів та динамічних властивостей технічних систем з захистом; якісної теорії сингулярних диференціальних рівнянь, що моделюють такі системи, (далі скрізь – «сингулярні моделі») для виділення стаціонарних множин та умов їх стійкості; асимптотичних методів для дослідження моделей ергатичних систем із захистом з метою аналізу та поліпшення їх властивостей.

Відомо, що процеси життєдіяльності людини, особливо виробничі процеси, мають шкідливий, а іноді і небезпечний вплив на навколишнє середовище і саму людину. Сучасні системи повинні бути максимально захищені, проте безпека і ефективність виробництва та життєдіяльності є суперечливими критеріями. Їх об’єднання в єдиний критерій можливо лише в надсистемі. Динамічні системи із захистом від шкідливих природних чи техногенних факторів включають велику кількість процесів з різними характерними часом, причому ієрархія цих часів така, що вони розрізняються на

багато порядків. Системи подібного типу зазвичай моделюються сингулярними системами диференціальних рівнянь зі змінними в часі зовнішніми параметрами, досить складними щоб не мати розв'язку в загальному аналітичному вигляді. Також внутрішні параметри досить швидко змінюються, що дуже утруднює чисельне розв'язання рівнянь. Такі системи характеризуються порівняно простою структурою і складною поведінкою. До них відносяться не тільки системи пожежогасіння, захисту хімічних і ядерних реакторів, захисту енергосистем, захисту від паводків і катастроф в житлово-комунальному господарстві, а й багато оборонних систем, наприклад «активна броня».

В роботі розглянуті різні типи моделей ергатичних систем «людина-машина-середовище з захистом», кожна з яких адекватно описує деяку практично важливу якість об'єкта, або захисної системи, а всі разом – описують систему з точки зору її безпечного функціонування. Подальша їх деталізація вимагає поліпшення, та побудови нових, моделей підсистем захисту і нових математичних методів опису їх функціонування, а також оцінки вартості їх створення і роботи.

У процесі вирішення поставлених завдань обґрунтовано вибір класу математичних моделей технічних об'єктів із захистом різних типів, у рамках якого розроблені або модифіковані та досліджені моделі замкнутих нелінійних сингулярних систем, що реалізують принцип негативного зворотного зв'язку. Розроблено методи їх аналізу з метою підвищення якості та ефективності систем захисту від впливу шкідливих і небезпечних факторів.

У дисертаційній роботі отримані такі **нові наукові результати**:

– розроблено математичну модель ергатичних систем з динамічним захистом та її локалізовані варіанти у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром, яка відрізняється від відомих присутністю регулярних та сингулярних збурень, та використання якої дозволило описати всі можливі співвідношення швидкостей взаємодії джерел шкідливих чинників та системи захисту від них;

– отримав подальшого розвитку метод побудови і аналізу сингулярної моделі з примежовим шаром шляхом побудови й оцінки точності асимптотичного розв'язку рівнянь для ергатичних систем з динамічним захистом;

– удосконалено обчислювальний метод асимптотичного розв'язку задач Коші з різними типами сингулярностей і нестационарністю параметрів керування, в рамках якого отримано аналітичний розв'язок задачі та оцінки значень малого параметра збурення для різних швидкостей шкідливого процесу;

– отримав подальшого розвитку метод аналізу ступеня стійкості ергатичних систем з урахуванням параметричної оцінки стійкості в околі точок катастроф при пошуку раціональних значень її параметрів;

– за допомогою чисельного експерименту виявлено наявність необмежених хаотичних рухів в неавтономній системі поблизу періодичного руху відповідної автономної ергатичної системи з захистом при зближенні періодів коливань.

Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі відповідають формулі спеціальності 01.05.02 та напрямкам досліджень №1 та 2, згідно з паспортом спеціальності, що свідчить про створення і дослідження нових моделей та обчислювальних методів і алгоритмів, які враховують особливості реальних технічних та технологічних задач.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що розроблені методи дозволяють оцінити стан і параметри технічних систем із захистом, які призводять до стійкого і швидкого подавлення виділення шкідливих факторів за прийнятну ціну. Результати роботи можуть знайти широке застосування при розробці підсистем захисту від шкідливих техногенних чинників, зокрема, в екологічно небезпечних виробництвах та інших системах «Л-М-С».

Результати роботи використані в навчальному процесі кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки для розробки лабораторних та курсових робіт в курсах «Імітаційне моделювання»,

«Теорія катастроф» та «Синергетичні методи в економіці», а також тем кваліфікаційних робіт бакалаврів і магістрів. Вони також впроваджені при виконанні фундаментальної держбюджетної теми (№ ДР 0115U001522), та госпдоговору (№ ДР 0117U 003827) для поліпшення безпеки та ефективності систем ЖКГ.

Матеріали дисертації опублікувані у 15 наукових працях: 6 статей, з них 3 – у виданнях, які зазначені в переліку фахових видань України з технічних наук. Решта видань входять до міжнародних наукометричних баз; 1 входить до бази Scopus. Результати доповідані та видані у 9 тезах доповідей міжнародних конференцій.

Ключові слова: ергатичні системи, захист, шкідливі чинники, математична модель, негативний зворотній зв'язок, проблеми стійкості, атрактор, збурення, сингулярність.

Список публікацій здобувача

1. Альджаафрах М.Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 2. № 4 (68). С. 47–50.
2. Альджаафрах М.Р. Численное исследование устойчивости в системах Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью // Технологический аудит и резервы производства. 2014. Т. 3. № 1(17). С. 20–22.
3. Альрефаи В.А., Альджаафрах М.Р. Разработка методов исследования устойчивых движений в системах Лотки-Вольтерра с периодическими возмущениями // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1. № 4(73). С. 58–61.
4. Альрефаи В.А., Наумейко И.В., Альджаафрах М.Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. 2016. Т. 1. № 8(8). С. 63–68.
5. Naumeyko I.V., Alja'afreh M. Dynamic balance research of protected systems // Econtechmod. 2015. V. 4. № 3. P. 85–90.

6. Naumeyko I.V., Alja'afreh M.R. Investigation of the dynamics of singular protected systems // Econtechmod. 2016. V. 5. № 4. P. 37–42.

7. Наумейко И.В., Альджаафрех М.Р., Альрефаи В.А. Моделирование сингулярных динамических систем защиты с переменными параметрами // International scientific and practical conference «World Science» 2016. Т. 1. № 11(15). С. 15–17.

8. Alja'afreh M.R. Solving the problem of optimal parametric synthesis of infocommunication system with the maximum bandwidth // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-2016, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 9–10.

9. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели и методы исследования динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 3-й Международной научно-технической конференции, 15–21 сентября 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 121–122.

10. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нарушения динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 4-й международной научно-технической конференции, 21–27 сентября 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 24–25.

11. Альджаафрех М.Р. Хаотические движения в системах Лотки-Вольтерра с периодическим возмущением правой части // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного Молодежного Форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 52–53.

12. Альджаафрех М.Р. Асимптотики для модели системы с защитой // Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. С. 60–61.

13. Альджаафрех М. Р. Математические модели и методы исследования нелинейных динамических систем с сингулярными возмущениями //

Информационные системы и технологии: материалы 5-й международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево – Харьков: ХНУРЭ, 2016. С. 91–92.

14. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нелинейных систем динамической защиты с сингулярными возмущениями // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-2016, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 13–14.

15. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Using dynamical system in industrial production // Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. Том 7. С. 56–57.

ABSTRACT

Mohammad Rakan Abed Alnabi Aljeafreh. Mathematical modeling and computational methods of research of ergatic systems with dynamic protection. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

Dissertation for the degree of a candidate of technical sciences in the specialty 01.05.02 "Mathematical modeling and computational methods". – Kharkiv National University of Radioelectronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2017.

In the dissertation the solution of the actual scientific and practical task of developing methods and models of human-machine systems with a subsystem of protection against harmful and dangerous factors is proposed.

The purpose of the dissertation is to increase the safety of ergatic systems with dynamic protection by developing mathematical models and improving the computational methods for their analysis.

The achievement of this goal required solving the following tasks:

- to highlight the dynamics of the class of ergatic systems with dynamic protection against harmful and dangerous factors;
- for a dedicated class of technical systems with protection to develop a generalized nonlinear dynamic model of the process of interaction of sources of harmful emissions with a system of dynamic protection;
- to study conditions for the stability and adaptability of ergatic systems with dynamic protection;
- to structure the developed generalized model into partial singular submodels with an intermediate layer that allow to adequately describe the dynamics of different types of ergatic systems with significantly different rates of the allocation of harmful factors and protection from them in the initial stages of the disaster development;
- modify or develop a new asymptotic method for studying the dynamic properties of ergatic systems with dynamic protection;
- develop the method for estimating and optimizing the cost of a protection system depending on its technical and dynamic properties.

The object of research – processes of harmful factors production and protection against them in ergatic systems with dynamic protection.

Subject of research – nonlinear mathematical models of ergatic systems with dynamic protection and computational methods for their analysis.

The research methods are based on the integrated use of: system analysis for revealing of influences and dynamic properties of technical systems with protection; qualitative theory of singular differential equations (further everywhere – "singular models") to allocate stationary sets and conditions of their stability; asymptotic methods and numerical simulation for constructing computational methods of solving the corresponding systems of differential equations for ergatic systems with protection for the purpose of analysis and improvement of their properties.

It is known that the processes of human life, and especially industrial processes, provide harmful and sometimes dangerous act on the environment and the person himself. Modern systems should be protected as much as possible but the safety and efficiency of production and life are contradictory criteria. Their association in a

single criterion is possible only in the supersystem. Dynamic systems with protection from harmful natural, or man-made factors include a large number of processes with different characteristic times and the hierarchy of these times is such that they differ in many orders. Systems of this type are usually modeled by singular systems of differential equations with time-varying parameters that are rather complex to have no solution in the general analytical form. They also change rather quickly to make it harder for a numerical solution. Such systems are characterized by a relatively simple structure and complex behavior. These include not only fire fighting systems, the protection of chemical and nuclear reactors, the protection of power systems, flood protection and disasters in the housing and communal services, but also many defense systems such as "active armor".

Different types of "human-machine-environment-protected" models, each of which adequately describe some practically important quality of the object of protection, or a protective system and all together describe the system from the point of view of its safe functioning are considered in this paper. Their further elaboration requires some new models of protection subsystems and new mathematical methods for describing their functioning. And also assess the value of their creation and work.

In the process of solving the set tasks the choice of a class of mathematical models of technical objects with protection of different types is substantiated. Within the framework of which models of closed nonlinear singular systems that implement the principle of negative feedback

The methods of their analysis are developed in order to solve problems of protection against the influence of harmful and dangerous factors.

In the dissertation work such new scientific results are obtained:

- the modified mathematical model of ergatic systems with dynamic protection was developed;
- the method of a singular model analysis with an boundary layer received its further development by constructing and evaluating the accuracy of asymptotic solution for ergatic systems with dynamic protection;

- the computational method for the asymptotic solution of Cauchy problems with different types of singularities and non-stationary control parameters has been improved with estimation of the small perturbation parameter for different speeds of the harmful process;

- the method for analysis of protected systems` stability received its further development;

- the presence of unconstrained chaotic motions in a non-autonomous system near the periodic motion of a corresponding autonomous ergatic system with protection at convergence of their oscillation periods was revealed with the help of numerical experiment.

The practical value of the results obtained is that the developed methods allow us to assess the state and parameters of technical systems with protection which lead to a steady and rapid suppression of the allocation of harmful factors at an affordable price while:

- the method of calculation for the dynamics of models of systems with the allocation of various types of harmful factors and different speeds and principles of operation of protection were obtained which allowed analytically investigate the explicit dependencies of the dynamics and elimination of accidents in case of the system parameters bifurcation;

- area of application of asymptotic methods for the analysis of high-speed processes of protection against harmful factors in nonlinear systems in order to optimize their value is extended.

The directions of theoretical and practical research of the dissertation work should be developed in the field of creation and use of asymptotic methods in the modeling of technical systems.

Based on the research carried out and the practical implementation of the presented methods the methodical support used in the educational process of the Kharkiv National University of Radioelectronics in the study of disciplines of the profiling cycle in Mathematical Modeling and Synergetic Methods was developed.

The materials of the thesis are sufficiently detailed in 15 papers, exactly – 6 articles; 3 of them are in the list of professional editions of Ukraine in technical sciences. All the works are included in international scientific-metric bases; one is referred in Scopus. The results are presented and published in 9 theses of reports of international conferences.

Keywords: ergatic systems, protection of harmful factors, mathematical model, negative feedback, stability problems, attractor, perturbation, singularity.

List of applicant's publications

1. Альджаафрех М.Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 2. № 4 (68). С. 47–50.

2. Альджаафрех М.Р. Численное исследование устойчивости в системах Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью // Технологический аудит и резервы производства. 2014. Т. 3. № 1(17). С. 20–22.

3. Альрефаи В.А., Альджаафрех М.Р. Разработка методов исследования устойчивых движений в системах Лотки-Вольтерра с периодическими возмущениями // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1. № 4(73). С. 58–61.

4. Альрефаи В.А., Наумейко И.В., Альджаафрех М.Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. 2016. Т. 1. № 8(8). С. 63–68.

5. Naumeyko I.V., Alja'afreh M. Dynamic balance research of protected systems // Econtechmod. 2015. V. 4. № 3. P. 85–90.

6. Naumeyko I.V., Alja'afreh M.R. Investigation of the dynamics of singular protected systems // Econtechmod. 2016. V. 5. № 4. P. 37–42.

7. Наумейко И.В., Альджаафрех М.Р., Альрефаи В.А. Моделирование сингулярных динамических систем защиты с переменными параметрами // International scientific and practical conference «World Science» 2016. Т. 1. № 11(15). С. 15–17.

8. Alja'afreh M.R. Solving the problem of optimal parametric synthesis of infocommunication system with the maximum bandwidth // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-2016, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 9–10.

9. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели и методы исследования динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 3-й Международной научно-технической конференции, 15–21 сентября 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 121–122.

10. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нарушения динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 4-й международной научно-технической конференции, 21–27 сентября 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 24–25.

11. Альджаафрех М.Р. Хаотические движения в системах Лотки-Вольтерра с периодическим возмущением правой части // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного Молодежного Форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 52–53.

12. Альджаафрех М.Р. Асимптотики для модели системы с защитой // Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. С. 60–61.

13. Альджаафрех М. Р. Математические модели и методы исследования нелинейных динамических систем с сингулярными возмущениями // Информационные системы и технологии: материалы 5-й международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево – Харьков: ХНУРЭ, 2016. С. 91–92.

14. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нелинейных систем динамической защиты с сингулярными возмущениями // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-

2016, 19–23 декабрия 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 13–14.

15. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Using dynamical system in industrial production // Радиоелектроника та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. Том 7. С. 56–57.

ЗМІСТ

Вступ.....	19
1 Аналіз предметної області і постановка завдань дослідження	26
1.1 Аналіз проблеми моделювання нелінійних динамічних систем з різними швидкостями зміни фазових змінних	26
1.1.1 Аналіз літературних джерел з проблеми.....	26
1.1.2 Класи об'єктів моделювання.....	27
1.1.3 Пожежа як приклад системи з захистом	28
1.1.4 Енергосистеми із захистом	30
1.1.5 Аварійний захист ядерного реактора	31
1.1.6 Системи водовідведення	32
1.1.7 Особливості моделювання технічних систем з захистом	33
1.2 Аналіз систем динамічного захисту з швидкими та повільними фазовими змінними	35
1.3 Аналіз проблеми стійкості нелінійних динамічних систем з захистом...37	
1.4 Математичне моделювання процесів в динамічних системах захисту від шкідливих факторів	38
1.4.1 Зменшення розмірності системи	38
1.4.2 Усереднення як асимптотичний метод	39
1.4.3 Континуалізація	39
1.5 Сучасний стан обчислювальних методів математичного моделювання швидко протікаючих процесів	40
1.5.1 Подання процесу асимптотичним рядом	40
1.5.2 Основні поняття асимптотики, використовувані в роботі	41
1.5.3 Використання асимптотичних методів для розв'язання диференціальних рівнянь	43
1.6 Постановка завдання дослідження	45
1.7 Висновки по розділу	46

2	Розробка математичних моделей і методів аналізу нелінійних динамічних систем захисту з сингулярними збуреннями	48
2.1	Узагальнена диференціальна модель	48
2.2	Часткові моделі з різними правими частинами системи	51
2.2.1	Стационарні точки системи і оцінки вартості для моделі пропорційного захисту	51
2.2.2	Стационари, розв'язання і оцінки вартості для моделі лінійного захисту.....	53
2.2.3	Стационари, розв'язки і оцінки вартості для моделі квадратичного захисту.....	58
2.2.4	Адаптованість динамічних процесів в системах синергетичного захисту	67
2.3	Асимптотика для «швидких» систем захисту	74
2.3.1	Аналіз головних членів асимптотик	74
2.3.2	Загальний випадок асимптотичного розв'язання	77
2.4	Особливості реалізації обчислювальних методів аналізу критичних режимів систем з захистом від шкідливих впливів	85
2.5	Висновки по розділу	86
3	Розробка методу аналізу математичних моделей роботи систем із захистом від шкідливих впливів з урахуванням ефекту примежового шару	88
3.1	Ефект примежового шару в системах із захистом від шкідливих впливів	88
3.2	Вибір і обґрунтування примежових функцій	90
3.3	Чисельне розв'язання і порівняння результатів	94
3.4	Побудова функції вартості і її мінімізація	99
3.5	Система повністю сингулярних рівнянь як модель нелінійних нестационарних швидкодіючих технічних систем з захистом.....	103
3.6	Висновки по розділу	104

4	Обчислювальні методи розв'язання рівнянь з малим параметром і їх застосування для моделей нелінійних нестационарних швидкодіючих систем з захистом	106
4.1	Лінеаризовані рівняння і алгоритм асимптотичного методу	106
4.1.1	Особливості застосування асимптотичних методів для повністю сингулярних задач	106
4.1.2	Обчислювальний алгоритм методу.....	107
4.2	Алгоритм розв'язку для різних випадків спектра матриці A_0	109
4.2.1	Розв'язок для простого спектра матриці A_0	109
4.2.2	Розв'язок для кратного спектра матриці A_0	110
4.2.3	Система із захистом як система управління	112
4.3	Визначення похибки асимптотичного методу за допомогою чисельного експерименту	113
4.3.1	Характер часової залежності параметрів системи	113
4.3.2	Обчислювальний експеримент для системи з постійними параметрами	114
4.3.3	Оцінка похибки методу на прикладі системи з експоненціальною залежністю параметрів від часу.....	117
4.3.4	Чисельний експеримент для систем, які не мають розв'язків в замкнутому вигляді	121
4.3.5	Поліпшення асимптотичної збіжності розв'язків для моделі нелінійних нестационарних швидкодіючих технічних систем	122
4.4	Неавтономна регулярна модель із збуренням правої частини	124
4.4.1	Проблеми в регулярних системах із захистом	124
4.4.2	Математичний опис і модель об'єкта	125
4.4.3	Аналіз і перетворення моделі	125
4.4.4	Чисельний аналіз збурених моделей	127
4.5	Висновки по розділу	130
	Висновки.....	132
	Список використаних джерел	135

Додаток А. Документи про впровадження і використання результатів роботи	145
Додаток Б. Моделі елементів водовідведення	150
Додаток В. Список власних публікацій	152

ВСТУП

Актуальність теми. На поточний час в багатьох країнах світу, зокрема, в Україні, зношеність потенційно небезпечних технічних систем (заводи, електростанції і ін.) в середньому перевищує 70%, що робить особливо актуальним математичне моделювання роботи систем безпеки і відновлення працездатності таких систем при техногенних та природних аваріях і катастрофах. Такі ергатичні, тобто людино-машинні системи (ЛМС), що мають також і підсистему «зовнішнє середовище», які включають як катастрофічні і шкідливі природні впливи середовища, так і техногенні шкідливі фактори, прийнято називати системами «Людина-Машина-Середовище» (система Л-М-С) із захистом. За останні 10 років системи Л-М-С виділилися в особливий клас, що включає деякі важливі системи техніки, економіки, екології, військової справи і безпечної життєдіяльності.

Протиріччя між ефективністю (продуктивністю) і безпекою таких систем породжує **науково-технічну проблему**, яка може бути вирішена тільки в рамках більш загальної – надсистеми, що включає економічні та соціальні критерії.

Таким чином, побудова математичних моделей, які описують системи з захистом і процеси, що в них відбуваються, була завжди, і є на цей час актуальною проблемою. Значну роль в дослідженнях цієї області грають роботи вітчизняних та зарубіжних авторів: Л. І. Маневича [44, 45], С. Демберела [68], Н. К. Юркова [106], та ін.

У дисертаційній роботі, в рамках цієї проблеми, запропоновано рішення актуальної **науково-технічної задачі** дослідження людино-машинних (ергатичних) систем із захистом від шкідливих або небезпечних чинників шляхом побудови їх динамічних моделей, та обчислювальні методи дослідження таких моделей. Ці методи засновані на роботах В. І. Арнольда [52, 53], Н. Н. Боголюбова [57], В. Вазова [58], А. Б. Васильєвої [59], і є їх конкретизацією і модифікацією стосовно технічних систем із захистом.

Захисні підсистеми завжди входили до більшості кібернетичних систем, але розглядалися тільки з точки зору автоматизованого управління, із застосуванням обмеженого кола методів дослідження, наприклад, системи масового обслуговування і теорії надійності [27]. Термін «захист» у рамках даної роботи розуміється в широкому сенсі, і позначає усі види технічних засобів (статичні і динамічні), а також, у першу чергу, заходи і процеси відновлення «штатної» роботи підсистеми «машина», а не тільки ліквідація шкідливих впливів на навколишнє середовище і оператора.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є підвищення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом за рахунок раціонального вибору їх параметрів, отриманих у результаті розробки математичних моделей та удосконалення обчислювальних методів їх аналізу.

Досягнення поставленої мети вимагало вирішення наступних завдань:

- виділити клас ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих та небезпечних чинників;
- для виділеного класу технічних систем розробити узагальнену нелінійну динамічну модель процесів взаємодії джерел шкідливих викидів з системою динамічного захисту;
- дослідити умови стійкості та адаптованості ергатичних систем з динамічним захистом;
- провести структурування розробленої узагальненої моделі на частковій сингулярній підмоделі з примежовим шаром, які дозволяють адекватно описувати динаміку різних типів ергатичних систем з суттєво різними швидкостями виділення шкідливих чинників та захисту від них в початкових стадіях розвитку катастроф;
- модифікувати або розробити новий метод для дослідження динамічних властивостей ергатичних систем з динамічним захистом;
- розробити метод оцінювання та оптимізації параметрів вартості системи захисту в залежності від її технічних та динамічних властивостей.

Об'єкт дослідження – процеси продукування шкідливих факторів та захисту від них в ергатичних системах з динамічним захистом.

Предмет дослідження – нелінійні математичні моделі ергатичних систем з динамічним захистом і обчислювальні методи їх аналізу.

Методи дослідження дисертаційної роботи ґрунтуються на комплексному використанні: системного аналізу для виявлення зв'язків, впливів та динамічних властивостей технічних систем з захистом; якісної теорії сингулярних диференціальних рівнянь, що моделюють такі системи, (далі скрізь – «сингулярні моделі») для виділення стаціонарних множин та умов їх стійкості; асимптотичних методів для дослідження моделей ергатичних систем із захистом з метою аналізу та поліпшення їх властивостей.

Наукова новизна отриманих результатів, які виносяться на захист:

– розроблено узагальнену математичну модель ергатичних систем з динамічним захистом у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром, яка відрізняється від відомих присутністю регулярних та сингулярних збурень, та використання якої дозволило описати всі можливі співвідношення швидкостей взаємодії джерел шкідливих чинників та системи захисту від них;

– отримав подальший розвиток метод побудови і аналізу стаціонарних множин часткової сингулярної моделі з примежовим шаром, використання якого дозволило отримати умови стійкості ергатичної системи з динамічним захистом;

– удосконалено обчислювальний метод асимптотичного розв'язку задач Коши з різними типами сингулярностей і нестационарністю параметрів керування, що дозволило аналітично отримати розв'язок сформульованої задачі для різних швидкостей шкідливого процесу і захисту. Отримано оцінки значень малого параметра збурення які забезпечує прийнятну для технічних розрахунків точність;

– отримав подальшого розвитку метод аналізу ступеня стійкості ергатичних систем з синергетичним захистом, що дозволило оцінити параметричну стійкість системи при пошуку раціональних значень її параметрів

поблизу точок катастроф і визначити ступінь стійкості ергатичних систем при різних варіаціях біфуркаційних параметрів;

- для ергатичних систем з захистом, за допомогою чисельного експерименту, виявлено наявність необмежених хаотичних рухів в неавтономній системі поблизу періодичного розв'язку відповідного автономного диференціального рівняння при збігу періодів коливань.

Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі відповідають формулі спеціальності 01.05.02 та напрямкам досліджень №1 та 2, згідно з паспортом спеціальності, що свідчить про створення і дослідження нових моделей та обчислювальних методів і алгоритмів, які враховують особливості реальних технічних та технологічних задач.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [21, 22, 30–41, 88]. З них 6 статей опубліковані в журналах, які реферуються та включені до іноземних та міжнародних наукометричних баз та пошукових систем, такі як Ulrich's Periodicals Directory, DRIVER, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), Index Copernicus (Польща), WorldCat, РИНЦ (Росія) та ін., а також до електронних бібліотек (повний список – на сайтах журналів). У тому числі 3 є спеціалізованими виданнями, що включені до переліку МОН України. Одна реферована в Scopus. У збірниках опубліковані тези 9 доповідей на міжнародних наукових конференціях [30–34, 36, 38, 39, 88].

Всі положення, що виносяться на захист, отримані здобувачем особисто. Матеріали, які складають основу дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [30–32, 35–37], виконаних одноосібно, складають особистий внесок здобувача.

У роботах [21, 22, 33, 34, 38, 39], які виконані у співавторстві з науковим керівником, особистим внеском здобувача є:

- у [21] здобувачем розроблено математичну модель ергатичних систем з динамічним захистом у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром;

- у [22] отримав подальшого розвитку метод аналізу сингулярної моделі з примежовим шаром;

– у [33] автором виділені основні часткові сингулярні моделі, які описують класу систем з захистом, та розвинуті обчислювальні методи їх дослідження;

– у [34] запропоновано засіб використання динамічних моделей для оцінки вартості захисних систем за умови різних швидкостей шкідливого процесу і захисту;

– у [38] здобувачем досліджено вимоги динамічного балансу сингулярної моделі систем із захистом та стаціонарні множини в розширеному фазовому просторі таких систем;

– у [39] автором проведено чисельний експеримент для практично важливого класу неавтономних систем із збуренням швидкості зростання шкідливого чинника.

Статті [40, 41, 88] опубліковані спільно із Валідом Ахмедом Махмудом Альрефаї.

У роботі [40] здобувачем удосконалено метод виявлення сталих рухів для математичної моделі яка відрізняється тим, що включає зовнішній періодичний чинник для систем з захистом.

У роботі [41] здобувачем розроблено метод асимптотичних наближень до розв'язків рівнянь моделі ергатичних систем з захистом.

У роботі [88] здобувачу належить розширення методів дослідження ергатичних систем з швидкодіючими захисними підсистемами на випадок неперервної зміни параметрів системи під час проведення захисних заходів.

Особистий внесок Валіда Ахмеда Махмуда Альрефаї наведено в його дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук [42].

Апробація результатів дисертації. Наукові результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах кафедри прикладної математики ХНУРЕ, а також на міжнародних конференціях, в тому числі:

– 3-я Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи і технології» (м. Харків, 2014 р.);

– 18-й Міжнародний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 2014 та 2015 р.);

– 4-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи і технології» (м. Харків, 2015 р.);

– International scientific and practical conference «World Science» » (м. Дубай, ОАЕ, 2016 р.);

– 1-й Міжнародний науково-технічний семінар «Системний аналіз, комп'ютерне моделювання, інформаційні технології» (м Харків, 2016 р.);

– 20-й Ювілейний Міжнародний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 2016 р.);

– Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи і технології» (Коблево – Харків, 2016 р.).

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та додатків. Загальний обсяг роботи складає 153 сторінку. Дисертація містить перелік використаних джерел з 106 найменувань на 10 сторінках.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану науково-дослідних робіт Харківського національного університету радіоелектроніки та наказом Міністерства освіти і науки України в рамках держбюджетної теми № 293 Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку» розділ №293-4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста» (№ ДР 0115U001522), в якій дисертант був одним із співвиконавців. Модель взаємин власників житлового фонду та обслуговуючої компанії при виникненні та ліквідації аварії, що наведена в дисертаційній роботі є складовою частиною проведених по цій темі досліджень.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що розроблені методи дозволяють оцінити стан і параметри технічних систем із захистом, які призводять до стійкого і швидкого придушення виділення

шкідливих факторів за прийнятну ціну. Результати роботи можуть знайти широке застосування при розробці підсистем захисту від шкідливих техногенних чинників, зокрема, в екологічно небезпечних хімічних виробництвах та інших системах «Людина-Машина-Середовище».

Результати роботи використані в навчальному процесі кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки для розробки лабораторних та курсових робіт в курсах "Імітаційне моделювання", "Теорія катастроф" та "Синергетичні методи в економіці", а також тем кваліфікаційних робіт бакалаврів і магістрів. Вони також впроваджені при виконанні фундаментальної держбюджетної теми (№ держреєстрації 0115U001522) та госпдоговору (№ держреєстрації 0117U 003827) для поліпшення безпеки та ефективності систем ЖКГ.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ І ПОСТАНОВКА ЗАВДАНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Аналіз проблеми моделювання нелінійних динамічних систем з різними швидкостями зміни фазових змінних

1.1.1 Аналіз літературних джерел з проблеми

Одним з найважливіших елементів економіки України завжди було і продовжує залишатися промислове виробництво, яке аж ніяк не безпечно в принципі, і вже неабияк застаріло як морально, так і фізично. У зв'язку з цим пристрої і системи захисту персоналу і навколишнього населення, та дослідження систем що їх об'єднують, є особливо актуальними [55, 64, 83, 86]. Відомо, що безпека і ефективність виробництва є суперечливими критеріями. Їх об'єднання в єдиний критерій можливо лише в надсистемі [70, 73, 74]. Такий підхід дозволив розглянути модель «людина-машина-середовище з захистом» як відому модель конкуренції двох факторів – безпеки та ефективності [65, 78, 79].

У зв'язку з цим розглянемо спочатку загальну систему «Людина-Машина-Середовище». Вхідною інформацією для даної системи є інформація з вищестоящої системи (планові завдання, інструкції тощо); виходом системи є результат роботи технічної системи [74].

У процесі функціонування системи змінюється її внутрішній стан. Елемент «людина» має дві функціональні частини: керуючу «машиною», об'єкт впливу зовнішнього середовища і «машини».

Елемент «машина» виконує основну технологічну функцію – вплив на предмет праці і побічну – зміна параметрів навколишнього середовища.

У роботі розглянуті різні типи загальних моделей «людина-машина-середовище», кожна з яких адекватно описує деяку практично важливу якість об'єкта, а всі разом – описують об'єкт з точки зору його безпечного функціонування [64, 65].

Подальша їх деталізація призводить до відомих, а також до деяких нових моделей підсистем [80, 89, 90]. Дана робота присвячена кількісному аналізу важливої системи з захистом людини як від зовнішнього шкідливого впливу середовища, так і від впливу підсистеми «машина». Відзначимо що тут об'єктом впливу системи захисту є не об'єкт захисту (людина і навколишнє середовище), а технічна система, що продукує шкідливий фактор.

1.1.2 Класи об'єктів моделювання

Розглянемо класи ергатичних систем з захистом та процеси в них як об'єкти моделювання. Особливо відзначимо що:

- об'єктами є саме класи та їх загальні властивості, а не конкретна система;
- параметрична ідентифікація моделей тут дуже специфічна, оскільки інтерес представляють не конкретні значення параметрів, а їх порядок величин, особливо швидкостей їх зміни. Зокрема, від порядку величин малого параметру залежить, чи дійсно модель сингулярна, та отже, адекватність застосування асимптотичних методів [71, 77, 87];

- з огляду на катастрофічність досліджуваних процесів, достовірні вимірювання їх протікання можливі лише на полігонах, а не на реальних об'єктах. Чисельні значення параметрів процесу нестабільні і залежать як від часу, так і від незорого числа зовнішніх факторів, упорядкувати які можна тільки в процесі модельного експерименту [80];

- виходячи з цього треба розглядати не конкретні значення параметрів, а параметричну сталість системи та її моделі.

Для подальшого позначемо $u(t)$ – інтенсивність продукування ергатичною системою в процесі її роботи побічного шкідливого фактору будь якої природи; $z(t)$ – інтенсивність дії захисної підсистеми.

1.1.3 Пожежа як приклад системи з захистом

Історично першим і базовим класом об'єктів є пожежа і процес її гасіння [99]. Пожежа – це неконтрольоване горіння, яке приносить матеріальні і моральні збитки.

Явища які є постійними і обов'язковими для кожної пожежі називають загальними явищами пожежі.

Загальними явищами для всіх пожеж є:

- горіння з виділенням тепла і продуктів повного і неповного згорання;
- масообмін що виникає внаслідок утворення на пожежі конвекційних газових потоків, які забезпечують надходження свіжого повітря в зону горіння і відведення продуктів горіння з неї;
- теплообмін – тепло що виділяється в зоні горіння передається в навколишнє середовище і частково витрачається на нагрів горючих речовин будівельних конструкцій і т.п. і таким чином робить можливим самостійне розповсюдження пожежі.

Загальні явища є причиною окремих явищ що відбивають специфіку конкретного пожежі.

Небезпечними факторами пожежі є:

- відкритий вогонь іскри;
- підвищена температура навколишнього середовища і предметів;
- токсичні продукти горіння;
- дим;
- знижена концентрація кисню в повітрі;
- падаючі частини будівельних конструкцій;
- небезпечні фактори вибуху (ударна хвиля світлове випромінювання);
- отруйні речовини що надходять в навколишнє середовище з пошкодженого обладнання.

Підвищення температури повітря призводить до зниження працездатності організму людини. Працездатність різко знижується вже при температурах

порядку 35-40⁰С. Підвищення вологості повітря ще більше обмежує граничний час перебування людей в ньому.

При температурі понад 60⁰С в умовах пожежі може наступати втрата свідомості. Критичною вважається температура повітря в приміщенні 70⁰С.

Негативно впливає і теплове випромінювання від зони горіння на пожежі. Тепловий потік може привести до опіку незахищених ділянок шкіри людей або служити джерелом запалювання.

Дим на пожежі містить в собі токсичні продукти і продукти неповного згорання що негативно впливають на організм людини. Так при горінні деяких органічних матеріалів (вовни, шкіри) виділяються такі речовини як сірководень синильна кислота піридин акролеїн ацетальдегід. При розкладанні деревини виділяються формальдегід ацетальдегід феноли кетони оксид вуглецю та інші сполуки. Дим різко знижує видимість що ускладнює евакуацію людей та ліквідацію пожежі.

У процесі горіння відбувається зниження концентрації кисню в повітрі. Концентрація кисню в 15-16% є небезпечною для життя людини.

Гасіння пожеж відбувається шляхом усунення кисню безпосередньо на об'єкті виникнення пожежі.

Якщо вибір параметра моделювання захисту досить обмежений – z це обсяг води або іншої ізолюючої рідини (газу), то вибір «шкідливого фактора» u з наступного списку визначається не ступенем шкідливості або небезпеки, а наблюдаемістю і стабільністю даного параметра.

Для того щоб можна було описувати досліджувати або порівнювати пожежі необхідно використовувати параметри які характеризували б різні боки розвитку пожеж.

Основними параметрами розвитку пожежі є:

- пожежне навантаження;
- тривалість пожежі;
- площа периметр і фронт пожежі;
- лінійна швидкість поширення пожежі;

- масова швидкість вигорання пожежного навантаження;
- температура пожежі;
- інтенсивність газообміну;
- щільність задимлення;
- теплота пожежі.

У роботі [99] наведено безліч моделей та розрахункових формул проектування засобів пожежегасіння.

Але вони:

- не відображують динаміку процесу придушення пожежи;
- не описують процес загалом, у взаємодії підсистем;
- не враховують різні швидкості протікання процесів.

Розглянемо тепер деякі інші класи технічних систем з захистом що моделюються як сингулярні.

1.1.4 Енергосистеми із захистом

Це найбільш характерний клас «швидкодіючих» систем [14, 92].

Наприклад, принцип дії поздовжнього диференціального захисту заснований на порівнянні струмів фаз що протікають через ділянки між захищеними ділянками лінії (або що захищається апаратом). Для вимірювання значення сили струму на кінцях ділянки що захищається використовуються трансформатори струму. Вторинні кола цих трансформаторів з'єднуються з струмовим реле, таким чином щоб на обмотку реле потрапляла різниця струмів від першого і другого трансформаторів.

У нормальному режимі значення величини сили струму віднімаються одне з одного і в ідеальному випадку струм в ланцюзі обмотки токового реле буде дорівнює нулю. У разі виникнення короткого замикання на ділянці що захищається, на обмотку токового реле надійде вже не різниця, а сума струмів що змусить реле замкнути свої контакти видавши команду на відключення пошкодженої ділянки.

У реальному випадку через обмотку токового реле завжди буде протікати струм відмінний від нуля, званий струмом небалансу. Наявність струму небалансу пояснюється рядом факторів.

Диференціальний захист встановлюється в якості основної для захисту трансформаторів і автотрансформаторів. Одним з недоліків такого захисту є складність його виконання, зокрема потрібна наявність надійної перешкодозахищеності лінії зв'язку між двома ділянками на яких встановлені трансформатори струму. У зв'язку з цим диференціальну захист застосовують для захисту поодинокі працюючих трансформаторів і автотрансформаторів потужністю 6300 кВА і вище, паралельно працюючих трансформаторів і автотрансформаторів потужністю 4000 кВА і вище і на трансформаторах потужністю 1000 кВА і вище якщо струмовий відсічення не дозволяє домогтися необхідної чутливості при короткому замиканні на виводах високої напруги, а максимальний струмовий захист має витримку часу більш ніж 0.5 с.

При моделюванні таких систем, як u так і $z \in$ токи.

1.1.5 Аварійний захист ядерного реактора

Це сукупність пристроїв призначена для швидкого припинення ланцюгової ядерної реакції в активній зоні реактора [83].

Активний аварійний захист автоматично спрацьовує при досягненні одним з параметрів ядерного реактора значення яке може привести до аварії. В якості таких параметрів можуть виступати температура тиск і витрата теплоносія рівень і швидкість збільшення потужності. Виконавчими елементами аварійного захисту є в більшості випадків стрижні з речовиною що добре поглинає нейтрони (бором або кадмієм). Іноді для зупинки реактора рідкий поглинач впорскують в контур теплоносія.

Додатково до активного захисту багато сучасних проекти включають також елементи пасивного захисту. Наприклад сучасні варіанти реакторів типу ВВЕР включають «Систему аварійного охолодження активної зони» (САОЗ) –

спеціальні баки з борною кислотою що знаходяться над реактором. У разі максимальної проектної аварії (розриву першого контуру охолодження реактора) вміст цих баків самопливом опиняються всередині активної зони реактора і ланцюгова ядерна реакція гаситься великою кількістю речовини що добре поглинає нейтрони.

Основні вимоги що пред'являються до пристроїв аварійного захисту – надійність і швидкодія. Наприклад однією з технічних проблем що викликали аварію на Чорнобильській АЕС стало недостатня швидкодія аварійного захисту і недосконалість конструкції стрижнів.

1.1.6 Системи водовідведення

Вони є одним з найхарактерніших об'єктів моделювання як системи з захистом, недостатня швидкодія якого призводить до аварій, яка мала місце в Харкові в 1995 році [86].

Коротка характеристика об'єкта, де сталася аварія.

Головна насосна станція (ГНС) призначалася для перекачування лише господарсько-побутових та виробничих стічних вод. Підвідний колектор діаметром 3.2 м входить у насосну станцію на глибині 32 м.

Станція складається з трьох вставлених одне в одного залізобетонних «стаканів». Простір між зовнішнім та середнім передбачений для приймального резервуара, в якому розташоване грабельне відділення. В обсязі між середнім та внутрішнім стаканами знаходиться машинний зал. У внутрішньому стакані прокладено напірні трубопроводи.

Потужність ГНС складала на першу чергу проекту 600 тис.м³/добу. На повний розвиток – 1200-1500 тис.м³/добу до 2005 року.

З аванкамери стічні води потрапляють у приймальний резервуар через чотири вікна 2x4 м, які перекриваються щитовими затворами, обладнаними електроприладами з ручним та дистанційним управлінням. Приводи всановлено

на майданчику з позначкою (-12) м, що було однією з причин катастрофи яка зпiткала об'єкт при зливi.

У роботi дослідженi та модифiкованi i впровадженi моделi водовiдведення, якi поданi у Додатку Б.

1.1.7 Особливостi моделювання технiчних систем з захистом

Захист об'єктiв описаних в 1.1.4 – 1.1.6 вiдрiзняється несистемнiстю, бо захищаються складовi елементи системи, i цi захисти слабо мiж собою пов'язанi. Це призводить до того, що захист добре працює в нештатних ситуацiях але вiдмовляє в умовах катастроф. Прикладом тому є ситуацiя 1995 в харкiвськiй системi водовiдведення, де захисне вiдключення електропостачання призвело до неможливостi вiдкрити заслiнку аварiйного скидання, а також аварiя на Чорнобильськiй АЕС, де локальна система захисту не була жорстко iнтегрована в технологiчний процес.

У роботах автора, та в [83, 86, 93] розглядається модель динамiчної системи, яка описує ситуацiю, коли основна пiдсистема «виробляє» шкiдливий чинник, а друга пiдсистема – захист – намагається його зменшити абсолютно, або за прийнятну цiну. Як базова модель – основа для модифiкацiї – взята система звичайних диференцiальних рiвнянь, що описує основнi закони конкуренцiї [68], i вiдома в екологiї як модель спiвiснування видiв [61, 63, 68].

Необхiдно перевiрити, що незважаючи на спрощенiсть моделей [25], основнi характеристики та залежностi системи повиннi проявитися. На пiдставi результатiв, отриманих у ходi роботи, провести аналіз бiфуркацiї системи захисту, тобто з'ясувати сценарiй втрати стiйкостi [8, 19] i ефективностi захисту.

Попередньо введемо основнi припущення, що безпосередньо впливають iз повсякденного досвiду. Вони очевиднi, тобто не потребують додаткового обгрунтування, а тiльки в формалiзацiї. Нижче вони названi аксиомами [64].

Аксиоми (природні положення):

а) біовплив U шкідливого фактора u є зростаюча функція часу t та інтенсивності самого фактора u . Також вона може залежати від інтенсивності іншого шкідливого фактора V . Аналогічно, $V(t, v, u)$. У першому наближенні виконується властивість адитивності [65]: «загальна шкідливість» = $U+V$;

б) автокумулятивність – шкідливий вплив зростає тим швидше, чим його обсяг більше;

в) взаємна кумулятивність – шкідливий вплив зростає тим швидше, чим більше шкідливість інших факторів;

г) інтенсивність біовпливу u – в штатній ситуації $\frac{\partial}{\partial t}u \leq 0$, в критичній ситуації (позитивний зворотний зв'язок) $\frac{\partial}{\partial t}u > 0$;

д) захист $z(t)$ може управлятися програмно, або адаптивно – в залежності від величини $u(t)$ (рис. 1.1);

е) вартість захисту $C=C(z)$ природно вважати монотонно зростаючою функцією її інтенсивності.



Рисунок 1.1 – Система із захистом як реалізація управління з негативним зворотним зв'язком

1.2 Аналіз систем динамічного захисту з швидкими і повільними фазовими змінними

Динамічні системи включають велику кількість процесів з різним характерними часом, причому ієрархія цих часів така, що вони розрізняються на багато порядків [23, 26, 41, 44].

Ступінь деталізації моделювання досліджуваних явищ залежить від мети моделювання. Однак в будь-якому випадку завдання моделювання полягає в тому, щоб побудувати модель явища, що містить якомога меншу кількість змінних і довільних параметрів, і в той же час правильно відображає властивості явища [98, 103].

Облік часової ієрархії процесів дозволяє скоротити число диференціальних рівнянь. «Зовсім повільні» змінні не змінюються на часи розглянутих процесів, і їх можна вважати постійними параметрами. Для «швидких» змінних можна замість диференціальних рівнянь записати рівняння алгебри для їх стаціонарних значень, оскільки «швидкі» змінні досягають своїх стаціонарних значень практично миттєво в порівнянні з «повільними» [26, 59, 60].

Системи із захистом можна умовно розділити на дві великі класи представлених на рис. 1.2.

1. Класичні (структуровані) об'єкт і система захисту є фізично розділені підсистеми, пов'язані інформаційно (датчики) і фізично (ефекторами).

2. Синергетичні об'єкт [98, 103] і захист фізично об'єднані і обмінюються матеріальними потоками і енергією (без вимірювальних пристроїв і операторів).

До перших відносяться більшість виробничих систем, а також багато інших технічних (штучних) систем (рис. 1.2).

Найпростішим прикладом другого типу служить пожежонебезпечний об'єкт оточений речовиною яке при загорянні покриває його непроникним для кисню шаром. Обидва ці класи об'єктів мають нелінійну динаміку і реалізують загальний принцип негативного зворотного зв'язку; об'єкт – виробник шкідливості і захист як нелінійний регулятор (рис. 1.3).

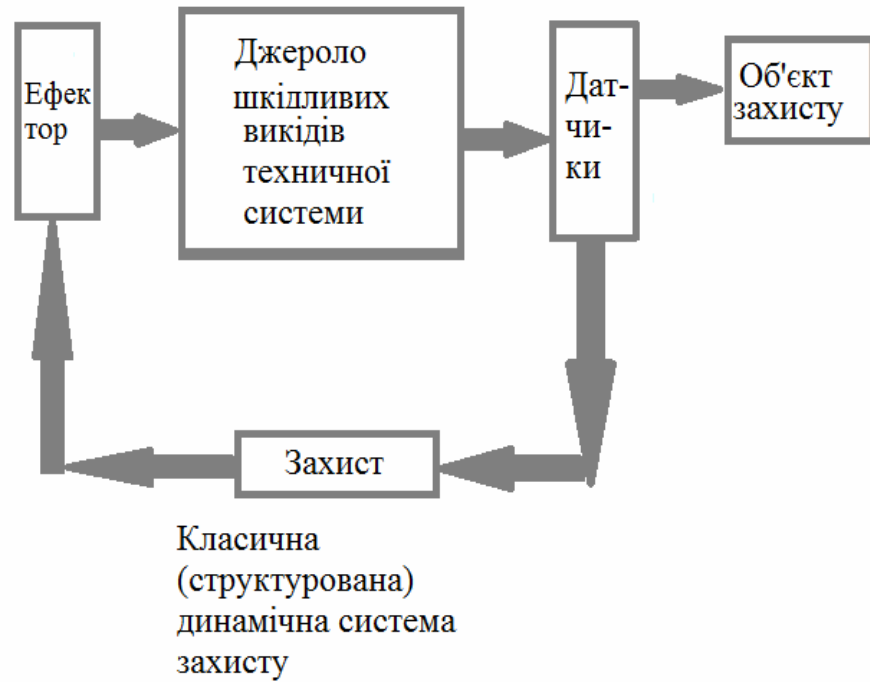


Рисунок 1.2 – Класи систем із захистом (структурованна)

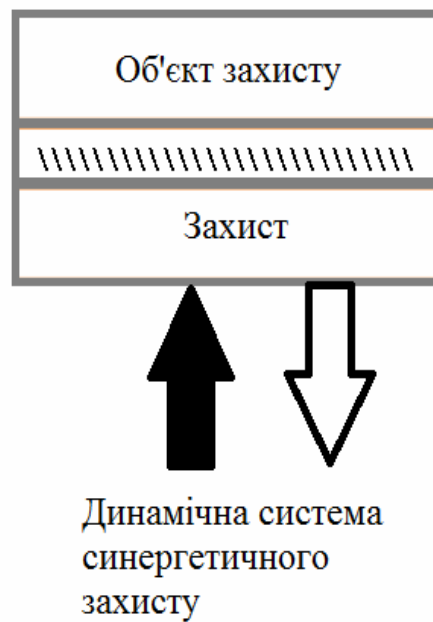


Рисунок 1.3 – Класи систем із захистом (синергетична)

1.3 Аналіз проблеми стійкості нелінійних динамічних систем із захистом

Теорема про лінеаризацію встановлює зв'язок фазового портрета нелінійної системи в околиці деякої нерухомої точки з фазовим портретом її лінеаризації [51, 105].

Початок координат є простою нерухомою точкою системи

$$\dot{y} = X(y), \quad y \in S \subseteq R^2,$$

якщо відповідна лінеаризована система проста.

Це визначення поширює поняття простоти на нерухомі точки нелінійних систем. Його можна застосовувати і в тому випадку, коли інформація, що цікавить нас особлива точка не знаходиться на початку координат; тоді треба ввести локальні координати.

Нехай нелінійна система $\dot{y} = Y(y)$ має просту нерухому точку $y=0$. Тоді в околиці початку координат фазові портрети цієї системи і її лінеаризації якісно еквівалентні, якщо тільки нерухома точка лінеаризованої системи не є центром [52, 69].

Це дає значне спрощення в обчисленнях, так як з лінійними складовими нової системи більш зручно проводити якісний аналіз, ніж з нелінійними [102, 104].

Теорема про лінеаризацію полягає в основі одного з основних методів дослідження нелінійних систем – методу дослідження стійкості за лінійним наближенням. Застосовуючи на практиці теорему лінеаризації, домагаються оцінити тип та ступінь сталості стаціонарних точок. Застосування теореми про лінеаризації в системах із захистом аналогічно розглянутим при аналізі класичних моделей екології та конкуренції в економічних системах, а також в ІТ-технологіях [1, 4, 6, 12, 15, 24].

1.4 Математичне моделювання процесів в динамічних системах захисту від шкідливих факторів

1.4.1 Зменшення розмірності системи

Зазвичай, різні завдання фізики і техніки моделюються за допомогою диференціальних або алгебраїчних рівнянь. І майже завжди виходить так, що вони мають високий порядок, а якщо справа стосується систем, - велику розмірність. Для подолання цієї проблеми розроблені два діаметрально протилежні підходи [3, 100, 101]. Суть першого полягає в тому, що при близьких за своїми характеристиками елементах системи можна вважати їх в першому наближенні рівними і використовувати симетрію, що з'явилася при цьому, враховуючи малі відхилення в наступних наближеннях. Другий застосовується тоді, коли окремі елементи даної системи сильно розрізняються за своїми характеристиками. У цьому випадку вводять малі параметри, що представляють їх ставлення, і здійснюють асимптотичну редукцію розмірності, тобто зменшення числа ступенів свободи.

Яскравий приклад такої ситуації – це завдання трьох тіл в небесній механіці. Вочевидь, що маси тел різних планет сильно відрізняються, тому в системі є малі параметри, що відображають нерівноправність мас. Така редукція лежить в основі класичних методів небесної механіки, причому в якості гранично високо симетричного випадку виступає точно розв'язувана задача двох тіл.

Використання асимптотичних методів далеко не завжди обмовляється спеціально, а іноді навіть і не усвідомлюється до кінця. Так в інженерній практиці надзвичайно широкого поширення набули модельні системи з одним ступенем свободи. Ясно, що використання таких моделей передбачає асимптотичну редукцію розмірності [47, 49].

1.4.2 Осереднення як асимптотичний метод

У багатьох фізичних задачах одні змінні змінюються повільно, інші - швидко. Виникає природна думка: чи не можна спочатку вивчити глобальну структуру системи, відволікаючись від її локальних особливостей, а потім вже досліджувати систему локально. В цьому і є суть методу осереднення, основна ідея якого – поділ швидких і повільних складових розв’язку (рис. 1.4).

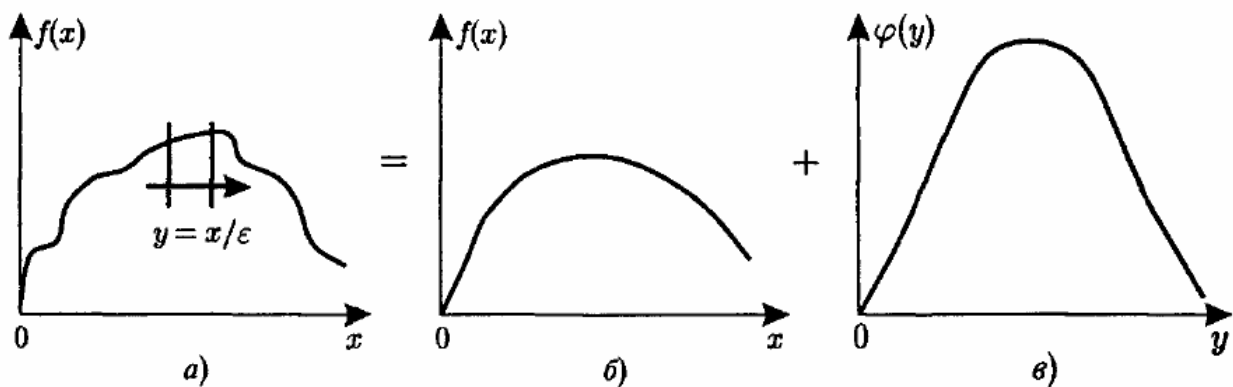


Рисунок 1.4 – Ілюстрація ідеї методу осереднення: розкладання вихідної збуреної кривої (а) на гладку повільну частину (б) і швидку періодичну поправку (в)

Метод осереднення [46, 57, 62] спочатку знайшов широке застосування в нелінійній механіці, потім – в теорії суцільного середовища. З математичної точки зору, в першому випадку ми маємо справу з нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, а в другому – з диференціальними рівняннями з швидкозмінними коефіцієнтами, як правило, в часткових похідних.

1.4.3 Континуалізація

Якщо розглянута система складається з безлічі однотипних елементів, то асимптотичний підхід призводить вже не до редукції розмірності, а, навпаки, до її підвищення. Цей метод застосовується до вельми важливого класу фізичних моделей, в якій дискретні системи замінюються континуальними [46, 50].

Другий граничний випадок для даної системи відповідає коливанням з мінімально можливою довжиною хвилі. Їх формулу легко розрахувати і використовувати як перше наближення при дослідженні короткохвильових коливань системи.

1.5 Сучасний стан обчислювальних методів математичного моделювання швидко протікаючих процесів

1.5.1 Подання процесу асимптотичним рядом

Як правило, розв'язки на основі асимптотичного методу не вдається висловити в кінцевому вигляді, а лише за допомогою деяких рядів [2, 9, 54]. При цьому виявляється, що ряди теорії збурень не обов'язково повинні сходитися. Наприклад, часто буває, що для обчислення деякої величини можна використовувати нескінченні ряди, що розходяться, при цьому сама величина є в деякому сенсі сумою ряду [95]. Типова ситуація така: деяка функція розкладається в функціональний ряд, причому наближення, що дається кількома першими членами ряду, тим краще, чим ближче незалежна змінна до деякого граничного значення. У багатьох випадках члени ряду спочатку швидко зменшуються, але потім знову починають зростати. У математичній літературі такі ряди отримали назву асимптотичних рядів. У асимптотичних методах використовується як раз цей математичний апарат. Стисло можна сказати, що ряд що сходиться представляє функцію при $x = x_0$, $n \rightarrow \infty$, а асимптотичний – при $n = n_0$, $x \rightarrow x_0$. Асимптотичні ряди можуть як сходитися, так і розходитися, але найбільший інтерес представляють ряди, що розходяться. З такими формально розбіжними рядами можна, хоча і з певною обережністю, здійснювати всі ті ж дії, що і зі збіжними функціональними рядами.

Отже, розглядається співвідношення нової природи, яке може існувати між функцією аргументів x та ε , яку будемо позначати символом $\varphi(x, \varepsilon)$, і розбіжним рядом, розташованим за ступенями ε :

$$f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots + \varepsilon^p f_p + \dots \quad (1.1)$$

Коефіцієнти f_0, f_1, \dots можуть бути функціями, залежними лише від x і не залежними від ε , або ж одночасно залежними від обох параметрів.

Покладемо

$$\varphi_p = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots + \varepsilon^p f_p.$$

Якщо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi - \varphi_p) \varepsilon^{-p} = 0, \quad (1.2)$$

то говорять, що ряд (1.1) є асимптотичним представленням функції φ і вживають запис

$$\varphi(x, \varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$$

1.5.2 Основні поняття асимптотики, використовувані в роботі

Щоб описати поведінку при $x \rightarrow x_0$ функції, що цікавить $f(x)$ в термінах відомої функції $g(x)$, використовують позначення, введені Ландау. Нехай

$x \in \square$, а $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ може прагнути до нуля, до нескінченності або вести себе як завгодно.

Визначення 1.1. Якщо $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$, то пишуть $f \sim g (x \rightarrow x_0)$ і кажуть, що f асимптотично наближається до g або g є асимптотичним наближенням функції f .

Визначення 1.2. Якщо $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то пишуть $f = o(g) (x \rightarrow x_0)$ і кажуть, що порядок f менше, ніж порядок g .

Визначення 1.3. Якщо відношення $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ обмежено, то пишуть $f = O(g)$ і кажуть, що функція f має порядок, що не перевищує порядку g

Також розрізняють наступні етапи асимптотичного наближення. Спочатку будуються верхні оцінки типу $f = O(g)$. Зазвичай така оцінка виявляється завищеною, тобто фактично $f = o(g)$. В ході її дослідження знаходиться точний порядок. Потім досягається асимптотична рівність [44].

Визначення 1.4. Послідовність $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $x \rightarrow x_0$, називається асимптотичною, якщо $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$. Наприклад, $\{x^n\}$ при $x \rightarrow 0$.

Визначення 1.5. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, де a_n – довільні числа, називається асимптотичним, якщо $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотична послідовність.

Відома [57, 75] теорема 1.1. Нехай функція $f(x)$, $x \in S$, при $x \rightarrow x_0$ розкладається в ряд по асимптотичній послідовності $\{\varphi_n(x)\}$, т.е. $f(x) \square \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$. Тоді коефіцієнти розкладання визначаються єдиним чином.

1.5.3 Використання асимптотичних методів для розв'язання диференціальних рівнянь

Метод малого параметра для регулярної початкової задачі Коші

$$x' = f(t, x, \varepsilon), \quad x(t_0) = \psi(\varepsilon), \quad (1.3)$$

за умови, що $f(t, x, \varepsilon)$ і $\psi(\varepsilon)$ – досить гладкі функції своїх аргументів. У цій ситуації можна спробувати побудувати розкладання розв'язку $x(t, \varepsilon)$ в ряд по ε . Для визначення коефіцієнтів цього розкладання можна використовувати наступний алгоритм. (Без обмеження загальності, будемо вважати, що розкладання виконується в точці $\varepsilon = 0$.) [54, 58].

Уявімо $x(t, \varepsilon)$ у вигляді суми

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + o(\varepsilon^n), \quad (1.4)$$

та підставимо формулу (1.4) в рівняння (1.3)

$$\begin{aligned} x_0'(t) + \varepsilon x_1'(t) + \dots &= f(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \varepsilon), \\ x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де ψ_0, ψ_1, \dots – коефіцієнти розкладання в ряд Тейлора в нулі функції $\psi(\varepsilon)$.

Розкладемо функцію в правій частині (1.5) в ряд по ε і прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях ε . Враховуючи що

$$f(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \varepsilon) = f(t, x_0(t), 0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} (x_1(t) + 2\varepsilon x_2(t) + \dots) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2} (x_1(t) + 2\varepsilon x_2(t) + \dots)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x \partial \varepsilon} (x_1(t) + 2\varepsilon x_2(t) + \dots) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} (2x_2(t) + 6\varepsilon x_3(t) + \dots) + \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots,
\end{aligned}$$

де (\cdot) позначено $(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \varepsilon)$, отримуємо для нульового кроку (коефіцієнт при ε^0):

$$x' = f(t, x_0(t), 0), \quad x_0(t_0) = \psi_0. \quad (1.6)$$

На першому кроці (коефіцієнт при ε^1) маємо

$$x_1' = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial \varepsilon}, \quad x_1(t_0) = \psi_1. \quad (1.7)$$

І нарешті, на другому кроці (коефіцієнт при ε^2) отримуємо

$$\begin{aligned}
x_2' = & \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x \partial \varepsilon} x_1 + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial \varepsilon^2} \right), \quad x_2(t_0) = \psi_2. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Всі виписані завдання, крім нульового кроку, являють собою лінійні диференціальні рівняння першого порядку і можуть бути вирішені стандартним способом, якщо вдається вирішити задачу (1.6). Далі, підставляючи розв'язки

(1.4), одержуємо наближений розв'язок задачі.

1.6 Постановка завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є підвищення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом за рахунок раціонального вибору їх параметрів, отриманих у результаті розробки математичних моделей та удосконалення обчислювальних методів їх аналізу.

Досягнення поставленої мети потребує вирішення таких завдань:

- виділити клас ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих та небезпечних чинників;
- для виділеного класу технічних систем розробити узагальнену нелінійну динамічну модель процесів взаємодії джерел шкідливих викидів з системою динамічного захисту;
- дослідити умови стійкості та адаптованості ергатичних систем з динамічним захистом;
- провести структурування розробленої узагальненої моделі на часткові сингулярні підмоделі з примежовим шаром, які дозволяють адекватно описувати динаміку різних типів ергатичних систем з суттєво різними швидкостями виділення шкідливих чинників та захисту від них в початкових стадіях розвитку катастроф;
- модифікувати або розробити новий метод для дослідження динамічних властивостей ергатичних систем з динамічним захистом;
- розробити метод оцінювання та оптимізації параметрів і вартості системи захисту в залежності від її технічних та динамічних властивостей.

Для практичного вирішення цих завдань обрано такий алгоритм проведення досліджень та чисельних експериментів:

- знаходимо, якщо можливо, аналітичне розв'язання рівнянь для системи з захистом. Якщо розв'язки неможливо знайти в загальному вигляді, тоді розв'язуємо наближено-аналітичним (асимптотичним), або чисельним методом

(в математичних пакетах за замовчуванням пропонується використовувати досить універсальний метод Адамса [67]);

– після того, як було знайдено розв'язки системи, аналізуємо функцію шкідливості – в які моменти часу її значення перевищують значення стаціонарного захисту, тобто спрацьовує система захисту. Знайшовши ці інтервали часу, приймаємо рішення – збільшити вплив на шкідливий чинник (зростає вартість системи захисту), залишити систему без змін, або є можливість зниження витрат на систему безпеки шляхом зменшення стаціонарного захисту;

– вибравши розв'язки, повторюємо кроки 1–2, поки не вийдемо за рамки обмежень (час роботи системи або її вартість).

1.7 Висновки по розділу

Відомо [16, 17, 20], що процеси життєдіяльності людини, особливо виробничі процеси, надають шкідливі, а іноді і небезпечні, впливи на навколишнє середовище і саму людину. Сучасні системи повинні бути максимально захищені, проте безпека і ефективність виробництва і життєдіяльності є суперечливими критеріями.

Таким чином, проблема, коло завдань і методів, даної роботи є актуальними.

Динамічні системи з захистом від шкідливих природних чи техногенних факторів включають велике число процесів з різними характерними часами, причому ієрархія цих часів така, що вони розрізняються на багато порядків. Системи подібного типу зазвичай моделюються сингулярними системами диференціальних рівнянь зі змінними в часі параметрами. Вони досить складні, щоб не мати розв'язків в загальному, аналітичному вигляді, і їх внутрішні змінні досить швидкі, щоб утруднити чисельний розв'язок. Такі системи характеризуються порівняно простою структурою і складною поведінкою. До них відносяться не тільки системи пожежогасіння, захисту хімічних і ядерних реакторів, захисту енергосистем, захисту від паводків і катастроф в житлово-

комунальному господарстві (ЖКГ), а й деякі оборонні системи, наприклад, «активна броня».

У рамках даної проблеми і поставленої задачі, у першому розділі роботи виділено клас ергатичних систем з захистом та вперше розроблено узагальнену математичну модель ергатичних систем з динамічним захистом у вигляді взаємозв'язаних диференційних рівнянь з малим параметром.

У якості задачі подальшого дослідження поставлена побудова частних типів моделей ергатичних систем «людина-машина-середовище з захистом», кожна з яких адекватно описує деяку практично важливу якість об'єкта захисту, джерела шкідливого фактора або захисної системи, а всі разом – описують систему з точки зору її безпечного функціонування. Їх деталізація вимагає розробки деяких нових моделей підсистем захисту, нових математичних методів опису їх функціонування, та оцінки вартості їх створення і роботи.

Матеріали даного розділу опубліковані в роботах автора [21, 22].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 41, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 83, 86, 87, 80, 89, 90, 92, 93, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105].

2 РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ І МЕТОДІВ АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗАХИСТУ З СИНГУЛЯРНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

2.1 Узагальнена диференціальна модель

У розділі 1 були поставлені задачі моделювання взаємодії системи, яка продукує шкідливі чинники (впливу), і її системи захисту. Динаміка подібних об'єктів описана в [22] системою з двох або, в загальному випадку, $2n$ диференціальних рівнянь, праві частини яких визначаються природними умовами, наведеними в розділі 1. Вони описують найзагальніші принципи взаємодії об'єктів і їх систем захисту. Так, наприклад, швидкість зростання інтенсивності $u(t)$ шкідливого чиннику пропорційна самій інтенсивності за відсутності захисту $z(t)$ – на початку пожежа розгорається, якщо її не гасити. Однак, фізично не можливо необмежене збільшення швидкості шкідливого фактора $u(t)$, і вона починає спадати пропорційно добутку інтенсивності захисту z і самого $u(t)$ (пальне вигорає і пожежа загасає).

Ступінь деталізації моделювання досліджуваних явищ залежить від мети моделювання, інтенсивності або біовпливу шкідливих факторів і визначається правою частиною системи диференціальних рівнянь записаної в формі Коші (рис. 2.1) [85]. Функції F і Φ в правій частині узагальненої моделі задовольняють умовам, визначеним для систем з захистом в розділі 1.4.

Спосіб конкретизації узагальненої моделі для опису систем з захистом, перерахованих в першому розділі, залежить не стільки від фізичних властивостей модельованої системи, скільки від поточної наукової парадигми і напрацьованих до теперішнього часу методів дослідження.

Облік конкретного типу взаємодій між об'єктом, який продукує шкідливий чинник, і захисною системою призводить до моделі першого типу для широкого класу рівнянь, що описують захисну систему. Далі розглянуті три види наближень функції F : пропорційне, лінійне и квадратичное. Такий підхід

характерний для факторного аналізу. Така модель ураховує нелінійність і різницю в порядку величин швидкостей і добре описує захисну реакцію на пожежу, а також катастрофи на хімічних і енергетичних об'єктах.

Другий тип моделі описує нестационарні регулярні системи з близькими за швидкостями процесами і змінними в ході роботи параметрами (неоднорідні диференціальні системи). Наприклад, аварійне скидання води в системах водовідведення ЖКГ.

Третій варіант моделі описує багатовимірні високошвидкісні (сінгулярні) нестационарні системи, лінеаризовані в околі точки спокою. Наприклад, пакет елементів активної броні. Це найпростіший варіант – лінеаризація моделі в околі стаціонарної точки – не враховує нелінійний характер залежності між змінними стану системи. Більш адекватною є логістична модель, але для неї ще немає досить загального розробленого математичного апарату.

Такі моделі є «м'якими» – в термінології Арнольда [53], тобто описують цілий клас об'єктів з топологічно подібними фазовими просторами. Найбільш часто зустрічається варіант взаємодії цих двох чинників реалізований в першому з рівнянь (2.1).



Рисунок 2.1 – Аналіз динамічних моделей систем з захистом

Відзначимо, що ці властивості випливають із загальних принципів і не залежать якісно від технічного об'єкта, який захищається і характеру шкідливого фактора, що виділяється їм, будь то пожежа або повінь.

Для вирішення поставленого завдання аналізу динаміки системи з захистом необхідно вирішити систему виду (2.1), задавши значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta, z_0, C_0$, які можуть бути довільними, досить гладкими, функціями часу, і вибравши вид функції $F(u, z)$ за результатами аналізу функціонування об'єкта

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z u(t); \\ z'(t) = F(u(t), z(t)). \end{cases} \quad (2.1)$$

Функція $F(u, z)$ може приймати один з наступних видів.

Пропорційна модель

$$F(u(t), z(t)) = \gamma u(t). \quad (2.2)$$

Швидкість роботи захисту зростає пропорційно виділенню шкідливого фактора, наприклад, швидкість виділення активної речовини, що гасить полум'я, зростає з температурою в початковій стадії пожежогасіння.

Лінійна модель

$$F(u, z) = \gamma u - \delta z. \quad (2.3)$$

Швидкість зменшується в міру вичерпання активної речовини.

Квадратична модель

$$F(u, z) = \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 - \delta_1 z - \delta_2 z^2. \quad (2.4)$$

Це – наступна, більш точна модель, для опису властивостей захисту, розглянутих при побудові функцій F у випадках 1) и 2).

Далі скрізь в формулах, що містять u і z , їх залежність від t неявно мається на увазі, і не записується, якщо це не призводить до різночитань і є очевидним.

Таким чином, процес вирішення поставленого в розділі 1 задачі моделювання та оцінки вартості роботи систем з захистом складається з наступних етапів:

а) знаходимо аналітичні розв'язки системи (2.1). Якщо розв'язок неможливо знайти в загальному вигляді, тоді розв'язуємо чисельним методом (в будь якому сучасному математичному пакеті за замовчуванням, пропонується використовувати досить універсальні методи Рунге-Кутта або Адамса);

б) після того, як було знайдено розв'язки системи (2.1), аналізуємо функцію шкідливості – в які моменти часу її значення перевищують значення стаціонарного захисту, тобто спрацьовує система захисту. Знайшовши ці інтервали часу, приймаємо рішення – збільшити вплив на шкідливий чинник (зростає вартість системи захисту), залишити систему без змін або є можливість зниження витрат на систему безпеки шляхом зменшення стаціонарної захисту;

в) вибравши розв'язки в кроці 2, крім «залишити без зміни», повторюємо кроки 1–2, поки не зайдемо за рамки обмежень (час роботи системи або її вартість).

2.2 Частні моделі з різними правими частинами системи

2.2.1 Стаціонарні точки системи і оцінки вартості для моделі пропорційного захисту

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t); \\ z(t)' = \gamma u(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

де $u(t)$ – наведена інтенсивність шкідливого фактора;

$z(t)$ – інтенсивність роботи динамічної захисної системи.

Виконаємо підстановку $u = \frac{z'}{\gamma}$ и $u' = \frac{z''}{\gamma}$ в перше рівняння системи (2.5)

$$\frac{z''}{\gamma} = \frac{\alpha z'}{\gamma} - \beta z \frac{z'}{\gamma}, \quad z'' = \alpha - \frac{\beta}{2}(z^2)'$$

Перевизначити змінні ($z = z'$), отримавши нове диференціальне рівняння

$$z' = \alpha z - \frac{\beta}{2} z^2 + c, \quad z(0) = z_0, \quad (2.6)$$

де c – деяка константа.

Початкова умова визначає стаціонарний захист (конструкційний захист – екран), перевищення необхідної інтенсивності якого визначає включення захисту динамічного.

Рівняння (2.6) при постійних параметрах має поділені змінні, а значить, розв'язується аналітично [105]. Його розв'язком буде функція

$$z(t) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha - z_0 \beta}{\sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta}} \right) \right) \right)$$

Випадок змінних у часі параметрів системи (тут – α, β, c) вимагає чисельного розв'язку або асимптотических методів, які розглянуті в кінці даного розділу, а також в розділі 4.

Для визначення вартості захисту скористаємося функцією

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z - z_0) dt + C_0,$$

де C_0 – вартість стаціонарного захисту;

z_0 – величина стаціонарного захисту;

$c(z)$ – функція вартості, яка може приймати вигляд:

$$c(z) = z; \quad (2.7)$$

$$c(z) = z^2; \quad (2.8)$$

$$c(z) = z \ln z. \quad (2.9)$$

Проінтегруємо, взявши за $T=6.5$ (час, за який захист системи прийме значення менше, ніж z_0) і запишемо отримані результати для сумарної вартості \tilde{c} :

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 73 + 1200 = 1273;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 544 + 1200 = 1744;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 221.33 + 1200 = 1421.33.$$

2.2.2 Стаціонарні точки системи і оцінки вартості для моделі лінійної захисту

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь для лінійного захисту:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t); \\ z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Вона не має аналітичного розв'язку в загальному вигляді.

Функції $z(t)$ і $u(t)$ пакетом Maxima обчислюються у вигляді інтерполяційних функцій. Отримані чисельні розв'язки системи (2.10), представлені на рисунках 2.1 – 2.5.

Знайдемо її стаціонарні точки, $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma})$, $(0,0)$, прирівнявши ліві частини до 0 при будь-яких значеннях параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

$$\begin{cases} 0 = \alpha u - \beta z u ; \\ 0 = \gamma u - \delta z . \end{cases}$$

Модель (2.10) є імітаційною і дозволяє інтерактивно підбирати потрібні параметри захисту, наприклад, наступним чином.

Зобразимо фазовий портрет системи (2.10) на рис. 2.2, взявши для визначеності такі значення параметрів системи $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 2$ і стаціонарний захист $z_0 = 11$ з вартістю $C_0 = 1100$.

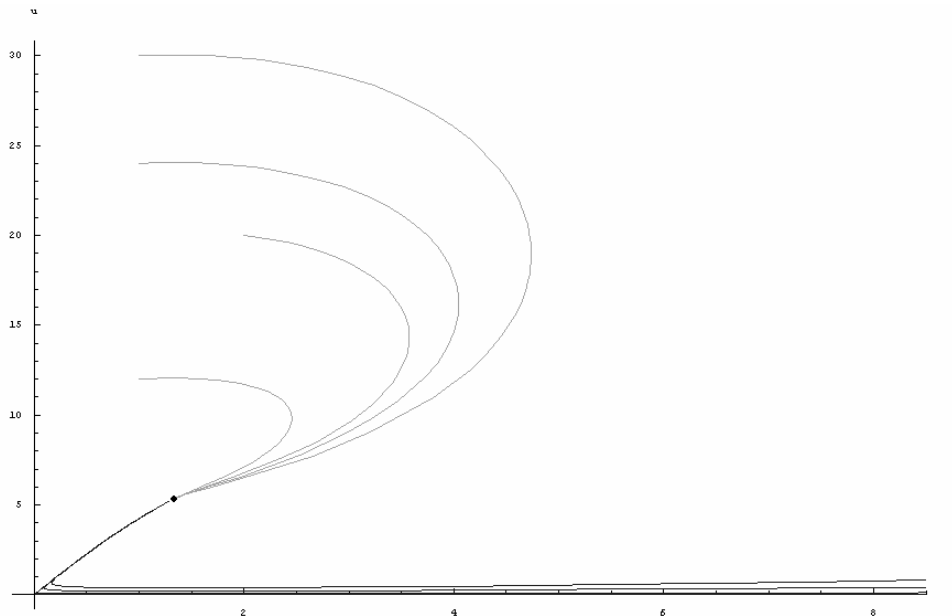


Рисунок 2.2 – Фазовий портрет вихідної системи (2.10)

Як видно з фазового портрета (рис. 2.3), система прагне до стану $z = 1.3$, $u = 5.3$, але інтервал часу, за який вона перейде в малу околицю стійкого стану – $t = 16$ є неприйнятним для нашого випадку, якщо прийняти за обов'язкову умову $t = 8$ – робоча зміна. Тому необхідно змінити рівень впливу захисту (в бік збільшення). Для цього збільшимо параметр β . Прийmemo для нашої системи $\beta = 0.31$, що позначиться на вартості стаціонарного захисту, природно, у бік її збільшення. Вартість стаціонарного захисту дорівнює $C_0 = 1320$. Зобразимо тепер фазовий портрет зміненої системи (2.10). Як видно з фазового портрета, система прагне до стану $z = 1.29$, $u = 5.16$, але інтервал часу, протягом якого вона прагне до стійкого стану – $t = 14$ все ще є занадто великим. Тому необхідно збільшити рівень впливу.

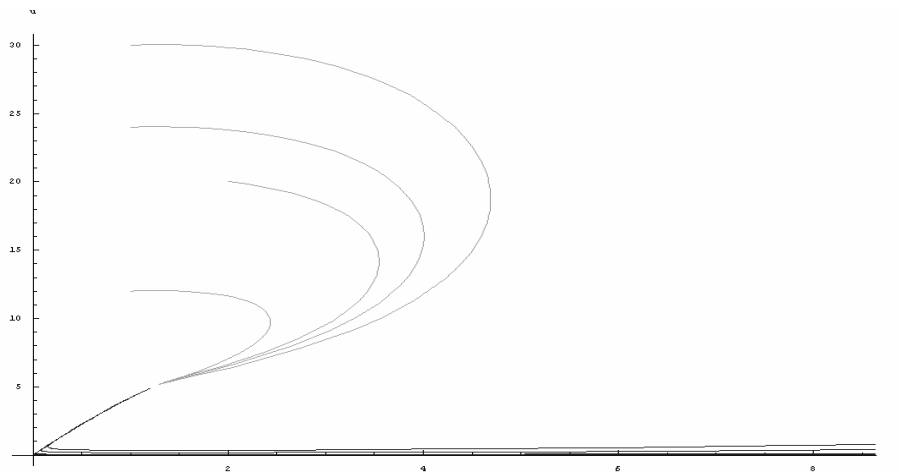


Рисунок 2.3 – Фазовий портрет системи (2.10). Перша модифікація параметрів – $\beta = 0.31$

На цей раз прийmemo $\beta = 0.4$. Приймемо тепер вартість стаціонарного захисту рівній $C_0 = 2400$. Зобразимо фазовий портрет зміненої системи (рис. 2.4). Як видно з фазового портрета система прагне до стану $z = 1$, $u = 4$. Інтервал часу, протягом якого вона переходить в околицю стійкого стану $t = 7.5 < 8$ є прийнятним для нашого випадку. Виконаємо розрахунок вартості системи захисту, скориставшись емпіричними функціями вартості (2.7) – (2.9).

Досліджуємо поведінку системи в околицях її стаціонарних точок.

Розглянемо точку $(0,0)$, відповідно штатного режиму - не виділяється шкідливий чинник i , отже, не працює захист.

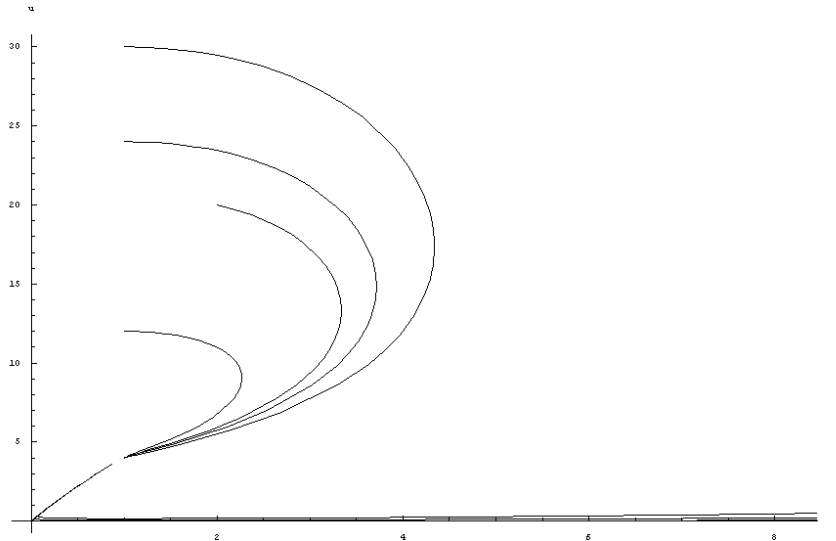


Рисунок 2.4 – Фазовий портрет системи (2.10). Друга модифікація параметрів – $\beta = 0.4$

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 33.42 + 2400 = 2433.42;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 851.31 + 2400 = 3251.31;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 203.96 + 2400 = 2603.96.$$

Лінеарізуємо систему (2.10), скориставшись формулою [5]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dz} & \frac{dF}{du} \\ \frac{dG}{dz} & \frac{dG}{du} \end{pmatrix}_{(x,y)},$$

де F, G – функції з правої частини системи,

(x, y) – стаціонарна точка.

Знаходимо власні значення лінеаризованої системи, вирішивши рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \left(\begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}_{(0,0)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$-\lambda(\gamma - \lambda) + \alpha\delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta}).$$

Для того, щоб стаціонарна точка була вузлом, необхідно $\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta} \geq 0$ або $\gamma \geq 2\sqrt{\alpha\delta}$ у випадку, коли $\alpha\delta > 0$.

Розглянемо власні значення. Залежністю від β на даному етапі нехтуємо. Розглянемо, як залежить поведінка системи від параметру α .

Візьмемо $\alpha > 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} > 0$ для $0 \leq \alpha \leq \frac{\gamma^2}{4\delta}$.

Тоді в точці $(0,0)$ для системи (2.8) – нестійкий вузол. Цей випадок відповідає катастрофі - захист не справляється.

Візьмемо $\alpha < 0$ і для визначеностя $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} < 0$ для будь-яких $\alpha < 0$. В точці $(0,0)$ для системи (2.8) – стійкий вузол, що і було необхідно з'ясувати.

Розглянемо тепер другу стаціонарну точку $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma})$.

Лінеарізуємо систему в цій точці і знайдемо її власні значення.

$$-\left(\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \lambda\right)(\gamma - \lambda) = 0 \quad \lambda_1 = \gamma, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha\delta}{\gamma},$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \left(\begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} \Big|_{\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \lambda & 0 \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Візьмемо $\alpha > 0$ і для визначеності приймемо $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ для $\alpha > 0$. У стаціонарній точці $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ отримано сідло системи (2.8).

Візьмемо $\alpha < 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} > 0$ для $\alpha < 0$. У стаціонарній точці отриманий нестійкий вузол системи (2.8).

Обидва випадки узгоджуються з можливим поведінкою реального об'єкта, однак неприйнятні з точки зору безпеки життя і діяльності.

2.2.3 Стаціонари, розв'язки і оцінки вартості для моделі квадратичного захисту

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (2.1) з правою частиною – функцією захисту (2.4):

$$\begin{cases} u' = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t); \\ z' = \gamma_1 u(t) + \gamma_2 u^2(t) - \delta_1 z(t) - \delta_2 z^2(t). \end{cases} \quad (2.11)$$

Система (2.11) не має аналітичного розв'язку в загальному вигляді.

Функції $z(t)$ і $u(t)$ нижче представлені чисельним розв'язком у вигляді інтерполяційних таблиць, тобто отримано чисельне розв'язання системи (2.11).

Три її стаціонарні точки

$$\left(-\frac{\delta_1}{\delta_2}, 0\right), (0,0), \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{-\beta^2 \gamma_1 \pm \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2\gamma_2}\right)$$

знайдемо аналітично, прирівнявши ліві частини до нуля:

$$\begin{cases} 0 = \alpha u - \beta z u; \\ 0 = \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 - \delta_1 z - \delta_2 z^2. \end{cases}$$

Зобразимо фазовий портрет системи (2.11), взявши $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.3$, $\gamma_1 = 6$, $\gamma_2 = 10$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 0.1$, $z_0 = 12$, $C_0 = 1200$.

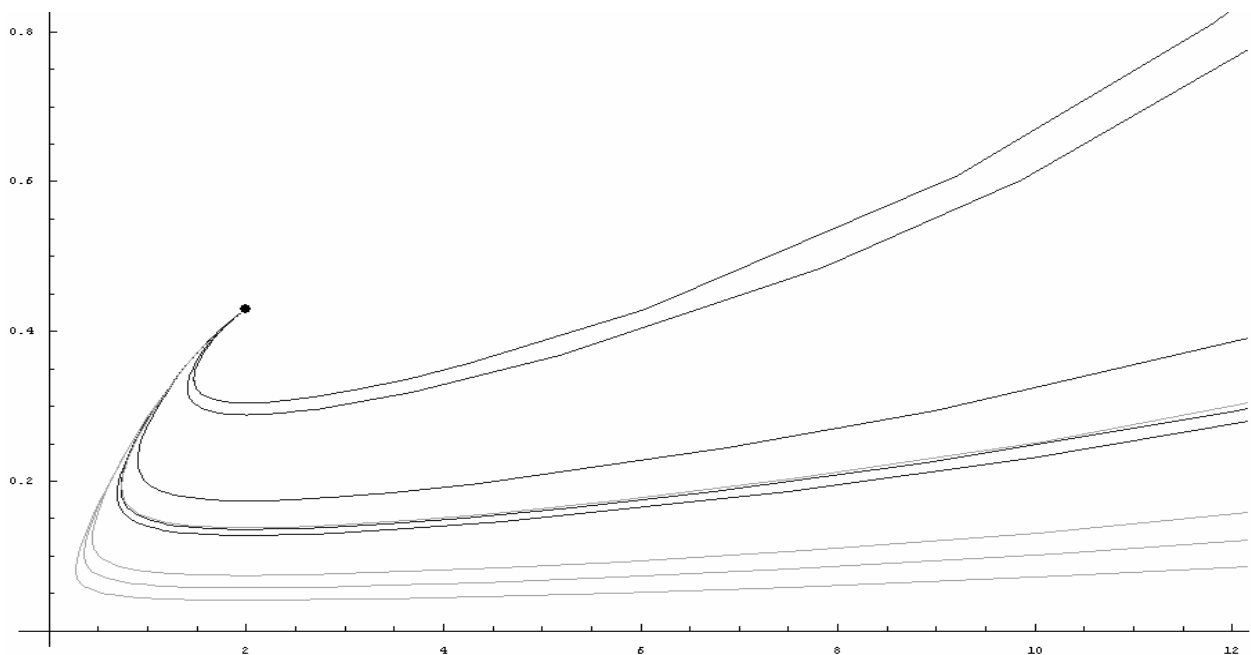


Рисунок 2.5 – Фазовий портрет системи (2.11)

Як видно з фазового портрета (рис. 2.5), система прагне до стану $z = 2$, $u = 0.428$. Інтервал часу, протягом якого вона прагне до стійкого стану є прийнятним для нашого випадку. Більш того, є можливість зменшити витрати на стаціонарний захист. Тому можна змінити рівень впливу захисту (в сторону

зменшення). На цей раз приймемо $\beta = 0.2$. Приймемо тепер вартість нашого стаціонарного захисту $C_0 = 600$. Зобразимо тепер фазовий портрет зміненої системи (2.11) на рис.2.6.

Особлива точка системи (2.10) $z = 6$, $u = 0.98$. Час, за який система перейде в стійкий стан $t = 10$.

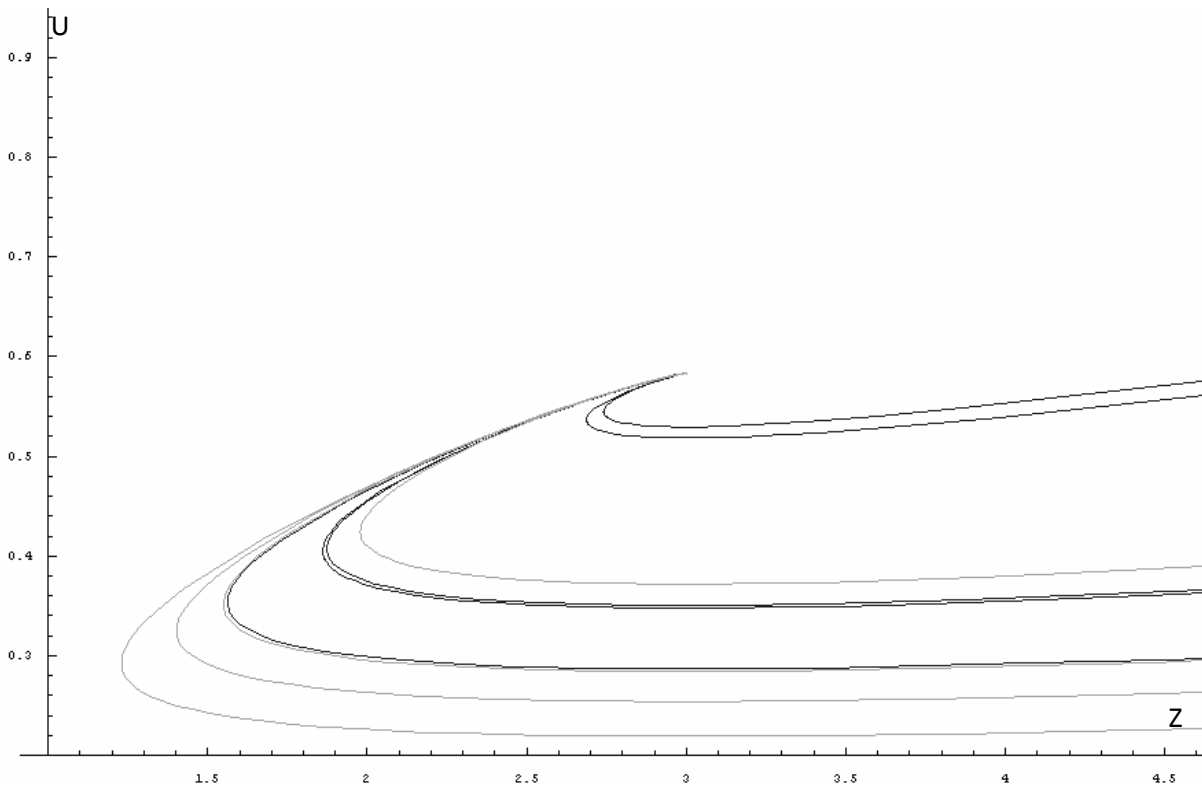


Рисунок 2.6 – Фазовий портрет системи (2.10). Перша модифікація параметрів

Розрахунок вартості системи захисту згідно (2.5)–(2.7):

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 0.95 + 600 = 600.95;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 1316.27 + 600 = 1016.27;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 475.7 + 600 = 1075.7.$$

Досліджуємо поведінку системи в околицях її стаціонарних точок.

Розглянемо точку $(0,0)$ – штатний режим роботи.

Лінеарізуємо систему (2.10).

Розглянемо власні значення, як і в лінійній моделі. Поведінка системи залежить від параметра α (біфуркаційних параметр). Зміни β як і раніше немає.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - 4\alpha\delta_1}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\alpha\delta_1}).$$

Возьмемо $\alpha > 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta_1 > 0, \gamma_1 > 0$, тоді

$$\lambda_{1,2} > 0 \text{ для } 0 \leq \alpha \leq \frac{\gamma_1^2}{4\delta_1}.$$

Точка $(0,0)$ для системи (2.9) – нестійкий вузол, як і для лінійної моделі з підрозділу 2.2.2.

Возьмемо $\alpha < 0$ і $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} < 0$ для будь-яких $\alpha < 0$.

Тепер точка $(0,0)$ для системи (2.10) – стійкий вузол.

Розглянемо тепер стаціонарну точку $(-\frac{\delta_1}{\delta_2}, 0)$.

Лінеарізуємо систему і знайдемо її власні значення.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\delta_2}(\gamma_1\delta_2 \pm \sqrt{\delta_2 \sqrt{4\beta\delta_1^2 + \gamma_1^2\delta_2 + 4\alpha\delta_1\delta_2}}).$$

З'ясуємо за яких β існують речові власні значення, прийнявши $\gamma_1, \delta_1, \delta_2 > 0$.

При будь-яких α ($\alpha > 0$ або $\alpha < 0$) для цього необхідно, щоб

$$\beta \geq \frac{-\gamma_1^2\delta_2 - 4\alpha\delta_1\delta_2}{4\delta_1^2}.$$

Розглянемо залежність характеру стаціонару від параметра β , взявши $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$.

При $\alpha > 0$ маємо $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, тобто точка $(-\frac{\delta_1}{\delta_2}, 0)$ – сідло.

При $\alpha < 0$:

а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ для $\frac{-\gamma_1^2 \delta_2 - 4\alpha \delta_1 \delta_2}{4\delta_1^2} \leq \beta < -\frac{\alpha \delta_2}{\delta_1}$ (при $\alpha < -\frac{\gamma_1^2}{4\delta_1}$) або

$0 < \beta < -\frac{\alpha \delta_2}{\delta_1}$ (при $-\frac{\gamma_1^2}{4\delta_1} \leq \alpha < 0$), тобто отримали нестійкий вузол;

б) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ при $\beta > -\frac{\alpha \delta_2}{\delta_1}$, т.е. $(-\frac{\delta_1}{\delta_2}, 0)$ – сідло.

Всі три випадки неприйнятні - при попаданні системи в околиці цієї стаціонарної точки аварія неминуха.

Розглянемо стаціонарну точку $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{-\beta^2 \gamma_1}{2\beta^2 \gamma_2} - \frac{\beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2}}{2\beta^2 \gamma_2})$ системи (2.10).

Визначимо при яких параметрах системи (2.10) вона існує і має реальні λ . Повинна виконуватися умова $\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2 \geq 0$, при цьому потрібно враховувати, що $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \beta > 0$.

Значить повинні також виконуватися наступні умови:

$$a \leq -\frac{\beta \delta_1}{\delta_2};$$

$$-\frac{\beta \delta_1}{\delta_2} \leq \alpha < 0 \wedge 0 < \gamma_2 \leq -\frac{\beta^2 \gamma_1^2}{4\alpha \beta \delta_1 + 4\alpha^2 \delta_2};$$

$$a > 0.$$

Лінеаризуємо систему (2.10) для дослідження стійкості методом Ляпунова [104] в околиці цієї точки.

$$A = \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -(\delta_1 + 2\delta_2 z) & \gamma_1 + 2\gamma_2 u \end{pmatrix}_{(x,y)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\beta^2 \gamma_1 - \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2\gamma_2} & 0 \\ -\delta_1 - \frac{2\alpha\delta_2}{\beta} & \gamma_1 + \frac{-\beta^2 \gamma_1 - \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{\beta^2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення λ отриманої системи, вирішивши рівняння $\det |A - \lambda E| = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{-\beta^2 \gamma_1 - \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2\gamma_2},$$

$$\lambda_2 = \gamma_1 + \frac{-\beta^2 \gamma_1 - \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{\beta^2}.$$

Запишемо умови, при яких існують речові власні значення:

$$0 < \gamma_2 \leq \frac{\gamma_1^2 \delta_2}{\delta_1^2} ((\alpha > 0 \vee \alpha < 0) \wedge \beta > 0);$$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge \alpha > 0 \wedge \beta > 0;$$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge \alpha < 0 \wedge 0 < \beta \leq -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} \pm 2\sqrt{\frac{-\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}}.$$

З'ясуємо залежність знаків власних значень від параметра, взявши для визначеності $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$.

В точці $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{-\beta^2 \gamma_1}{2\beta^2 \gamma_2} - \frac{\beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2 \gamma_2})$ – сідло ($\lambda_1\lambda_2 < 0$),

при виконанні наступних умов:

– якщо $\alpha > 0$, для будь-яких $\beta > 0$;

– якщо $\alpha < 0$, то:

$$\text{а) } \forall \beta > 0 \wedge 0 < \gamma_2 < \frac{\gamma_1^2 \delta_2}{\delta_1^2};$$

$$\text{б) } \gamma_2 = \frac{\gamma_1^2 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge (0 < \beta < -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}} \vee \\ \beta > -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}});$$

$$\text{в) } \gamma_2 > \frac{\gamma_1^2 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge (0 < \beta < -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}} \vee \\ \beta > -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} + 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}}).$$

Розглянемо стаціонарну точку

$$(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{-\beta^2 \gamma_1}{2\beta^2 \gamma_2} + \frac{\beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2 \gamma_2})$$

системи (2.10).

Визначимо, при яких параметрах системи (2.10) вона існує. Повинна виконуватися умова $\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2 \geq 0$, при цьому враховуємо, що $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \beta > 0$.

Стаціонарна точка існує, якщо виконується одне з наступних співвідношень між параметрами:

$$\alpha \leq -\frac{\beta \delta_1}{\delta_2};$$

$$-\frac{\beta \delta_1}{\delta_2} \leq \alpha < 0 \wedge 0 < \gamma_2 \leq -\frac{\beta^2 \gamma_1^2}{4\alpha \beta \delta_1 + 4\alpha^2 \delta_2};$$

$$\alpha > 0.$$

Лінеаризуємо знову систему (2.10).

$$A = \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -(\delta_1 + 2\delta_2 z) & \gamma_1 + 2\gamma_2 u \end{pmatrix}_{(x,y)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\beta^2 \gamma_1 + \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2}}{2\beta^2 \gamma_2} & 0 \\ -\delta_1 - \frac{2\alpha \delta_2}{\beta} & \gamma_1 + \frac{-\beta^2 \gamma_1 + \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2}}{\beta^2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення отриманої системи, вирішивши рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{-\beta^2 \gamma_1 + \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2}}{2\beta^2 \gamma_2},$$

$$\lambda_2 = \gamma_1 + \frac{-\beta^2 \gamma_1 + \beta \sqrt{\beta^2 \gamma_1^2 + 4\alpha \beta \gamma_2 \delta_1 + 4\alpha^2 \gamma_2 \delta_2}}{\beta^2}.$$

Запишемо необхідні умови існування таких власних значень:

$$0 < \gamma_2 \leq \frac{\gamma_1^2 \delta_2}{\delta_1^2} ((\alpha > 0 \vee \alpha < 0) \wedge \beta > 0);$$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge \alpha > 0 \wedge \beta > 0;$$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1 \delta_2}{\delta_1^2} \wedge \alpha < 0 \wedge 0 < \beta \leq -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} \pm 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}}.$$

З'ясуємо залежність знаків власних значень від параметра, взявши для визначеності $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Стационарна точка $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{-\beta^2\gamma_1}{2\beta^2\gamma_2} + \frac{\beta\sqrt{\beta^2\gamma_1^2 + 4\alpha\beta\gamma_2\delta_1 + 4\alpha^2\gamma_2\delta_2}}{2\beta^2\gamma_2})$ – сідло

($\lambda_1\lambda_2 < 0$), при таких значеннях параметрів:

– якщо $\alpha > 0$, для будь-яких $\beta > 0$;

– якщо $\alpha < 0$, тоді $0 < \beta < -\frac{\alpha\delta_2}{\delta_1}$.

Ця стационарна точка - нестійкий вузол ($\lambda_{1,2} > 0$) при таких параметрах ($\alpha < 0$):

$$\beta > -\frac{\alpha\delta_2}{\delta_1} \wedge 0 < \gamma_2 < \frac{\gamma_1^2\delta_2}{\delta_1^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_1^2\delta_2}{\delta_1^2} \wedge (-\frac{\alpha\delta_2}{\delta_1} < \beta < -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}} \vee$$

$$\beta > -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}});$$

$$\gamma_2 > \frac{\gamma_1^2\delta_2}{\delta_1^2} \wedge (-\frac{\alpha\delta_2}{\delta_1} < \beta < -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} - 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}} \vee$$

$$\beta > -\frac{2\alpha\gamma_2\delta_1}{\gamma_1^2} + 2\sqrt{-\frac{\alpha^2\gamma_2^2\delta_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2\gamma_2\delta_2}{\gamma_1^4}}.$$

2.2.4 Адаптованість динамічних процесів в системах синергетичного захисту

Повертаючись до рис.2.1, де був представлений тип «синергетичний захист», відзначимо що тут захист інтегрован в об'єкт захисту. Найпростіший приклад – загасання пожежі при вигорянні матеріалу, або припинення доступу повітря. Зазвичай в якості першого наближення тут використано-вується логістична модель.

На технічному рівні строгості, «адаптованість» динамічного процесу являє собою міру можливості системи зберегти незмінність основного ходу динамічного процесу при впливі збурень. Очевидно, що таке «визначення» містить занадто багато незрозумілостей, тому в подальшому для лінійних систем сформульовано поняття адаптованості на відповідному математичному рівні [72, 94].

Зазначимо, що практично не існує єдиної думки щодо того, як саме повинна визначатися міра адаптованості для нелінійних динамічних систем загального виду [73, 96]. Незважаючи на те що між поняттям адаптованість і поняттями структурна стійкість, біфуркація, катастрофа, зв'язкова стійкість і іншими існує багато спільного, жодне з них, мабуть, не може дати вичерпного уявлення про адаптованість, по крайньому разі в тому обсязі, в якому воно використовується дослідниками в галузі теорії систем та управління, де і виникло це уявлення, в усякому разі на термінологічному рівні. Подібно поняттю стійкості, конкретне математичне формулювання поняття адаптованості залежить від прийнятого математичного опису системи. Всі проведені до теперішнього часу дослідження в області адаптованості засновані на описі системи за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Почнемо з аналізу

системи Σ , описуваної диференціальними рівняннями $\dot{x} = f(x, a) + g(t)$, $x(0) = x_0$, і припустимо, що під час відсутності дії зовнішніх збурень $g(t) \equiv 0$ початком координат є точка рівноваги, тобто $f(0, a) \equiv 0$ для всіх a . тут a – вектор параметрів системи. Зважаючи на вищенаведене центральне місце в поданні про адаптованості займають наступні питання:

а) за яких умов функція $g(t)$, що характеризує збурення, може привести до того, щоб система, положення якої описується функцією $x(t)$, покинула область тяжіння D початку координат;

б) які зміни параметрів приведуть до такого спотворення кордону ∂D області D , щоб положення системи виявилось зрушеним в область атрактора, відмінного від атрактора на початку координат.

Природно було б відповісти на перше питання шляхом введення ступеня адаптованості системи як максимального наближення $x(t)$ к ∂D протягом часової еволюції процесу (в припущенні, що $g(t) \equiv 0$, $a = a^*$ при усіх $t \geq 0$). Однак таке рішення викликає заперечення, які носять скоріше практичний, ніж математичний характер і полягають в тому, що мінімальна відстань $x(t)$ от ∂D є досить слабким показником того, наскільки інтенсивними можуть бути збурення, що поглинаються системою Σ , перш ніж вона буде виведена зі сфери D . Останнє пов'язано з тим, що збурення, необхідне для виведення системи Σ з області D , залежить не тільки від величини збурення, але і від його спрямованості. Геометрично така ситуація представлена на рис. 2.7, де область D може бути інтерпретована як потенційна «яма» (подібно до того, як це робиться при формулюванні основних уявлень теорії Ляпунова). Відповідно до цього навіть в тих випадках коли $x(t)$ завжди залишається далеко від краю, виявляється порівняно легко змістити систему за кордон ∂D . Разом з тим якщо область D має форму типу показаної на рис. 2.7, то навіть в тих випадках, коли $x(t)$ завжди лежить поблизу ∂D , необхідно істотно за величиною збурення щоб система Σ перейшла в область тяжіння іншого положення рівноваги.

Приклад відмінності понять «ступінь стійкості» і «адаптованості» – лінійні системи $\dot{x} = Ax + g(t)$: точка 0 асимптотично стійка; збурення $g(t)$ може перевести систему куди завгодно. Поняття «грубості» стаціонару $x(t_0) = 0$ в малій околиці працює лише якщо $g(x(t_0)) = 0$.

Сказане вище свідчить про те, що адаптованість не є внутрішньою властивістю системи Σ , а визначається характеристиками системи Σ і класом допустимих збурень. В якості найпростішої ілюстрації цього факту відзначимо, що якщо мінімальна відстань $x(t)$ до ∂D дорівнює α і $\|g(t)\| < \alpha$ при усіх t , то система Σ буде «поглинати» всі можливі збурення, тобто Σ буде володіти нескінченною адаптованістю по відношенню до збурень такого класу. Навпаки, якщо максимальна відстань $x(t)$ до ∂D дорівнює β і $\|g(t)\| > \beta$ при всіх t , то та ж система Σ не зможе поглинути будь-яке збурення, та буде повністю неадаптуємою по відношенню до даного класу збурень. Таким чином, за відсутності принаймні явної угоди щодо класу допустимих збурень поняття адаптованості залишається беззмістовним. Тож при визначенні міри адаптованості необхідно брати до уваги і величину, і напрямок вимушених коливань $g(t)$. Розглянемо наступний підхід до вирішення завдання. У кожен момент часу t побудуємо вектор $v(t) = d(t) - x(t)$, спрямований від $x(t)$ до точки на ∂D , найближчій до $x(t)$ (рис. 2.7). Вектор $v(t)$ будується за відомим вектором $x(t)$, що визначений, можливо, шляхом чисельного інтегрування, і вектором $d(t)$, який відомий, оскільки за припущенням межа ∂D вже розрахована. Припустимо, що функція $g(t)$ відповідає обуренню в вигляді «імпульсу» в момент $t = s$, т. е. $g(t) = \mu \delta(t - s)$, де μ – вектор, який вказує величину і напрямок імпульсу. Тоді можна спробувати шляхом порівняння векторів μ і $v(t)$ визначити, чи буде система виведена за межі ∂D . Як зазначалося, відповідь на це питання залежить від того, чи має вектор μ достатню величину і належне напрямком з тим, щоб вивести $x(t)$ за кордон ∂D .

Відзначимо, що в даному випадку можна не враховувати функцію $f(x)$ оскільки ми припустили, що $g(t)$ з точністю до множника є δ -функцію.

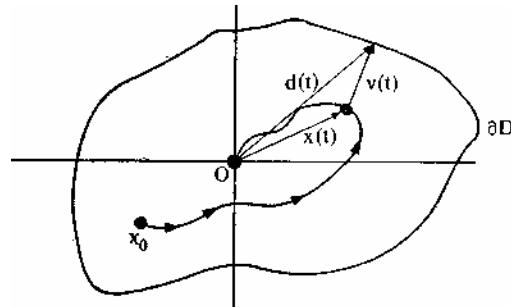


Рисунок 2.7 – Поведінка системи Σ

Введемо функцію m , що характеризує результат порівняння векторів μ та $v(t)$ за величиною $m(t) = \|\mu\| - \|v(t)\|$, і функцію θ , що характеризує результат порівняння цих векторів за напрямком,

$$\cos \theta(t) = \frac{(\mu, v(t))}{\|\mu\| \cdot \|v(t)\|},$$

де $(*,*)$ означає скалярний добуток векторів;

$\|\cdot\|$ — евклідову норму.

При цьому виявляється [94], що адаптованість системи Σ в момент часу t можна характеризувати наступним напівкількісним співвідношенням:

- низька адаптованість при $m(t) \geq 0$ і $\cos \theta(t) \approx 1$;
- низька адаптованість при $m(t) < 0$ і(або) $\cos \theta(t) < 0$.

Іншими словами, система Σ адаптується по відношенню до імпульсного збурення μ в момент часу t , якщо величина μ дуже мала, або якщо збурення μ прагне відвести $x(t)$ від кордону ∂D . Якщо ж вектор μ за величиною більше $v(t)$ і прагне підвести $x(t)$ до кордону ∂D , то можна говорити про низьку адаптованості системи Σ .

Наведений вище аналіз дає можливість закласти основу систематичного математичного вивчення питання про адаптованості системи, пов'язаної із зовнішніми збуреннями стану $x(t)$. В рамках такого підходу неважко розглянути і випадки безперервно діючих збурень або комбінацій імпульсів. Для цього достатньо застосувати стандартну математичну процедуру, аналогічну застосовуваній в теорії ймовірностей при переході від дискретних до безперервним або змішаним функцій розподілу. Зрозуміло, при аналізі таких випадків для встановлення ступеня адаптованості системи Σ по відношенню до даного класу збурень необхідно брати до уваги також і вільну динаміку системи $f(x)$.

Безпосереднє зовнішній вплив на стан рівноваги є одним з факторів, завдяки якому система може бути зміщена із області одного атрактора в область іншого. Розглянемо тепер інший фактор, при дії якого система може бути зрушена в область іншого атрактору. Таким фактором є зміни в динаміці системи, обумовлені зміною вектору параметрів a системи.

Розглянемо ситуацію, представлену на рис. 2.8. Коли вектор параметрів системи $a = a_1$, початкове її положення x_0 лежить всередині області, обмеженої ∂D_1 і система прагне зайняти положення на початку координат. якщо вектор a зміниться і стане дорівнювати a_2 , то цей ж самий початковий стан x_0 буде вже лежати поза області, обмеженою ∂D_2 , і кінцевим підсумком поведінки системи буде її перехід в стан рівноваги $x = x_2^*$, що розташований далеко від початку координат. Можлива ситуація, в якій x_0 лежить дуже близько до кордону ∂D_1 . У цьому випадку навіть невелика зміна вектору a може викликати деформацію ∂D_1 , достатню для того, щоб положення системи x_0 .

Описана ситуація лежить в основі елементарної теорії катастроф Тома-Зімана [52]. При цьому явно визнається, що положення рівноваги (в даному випадку x_2^* і початок координат), а також відповідні їм межі

областей тяжіння $(\partial D_1, \partial D_2)$ залежать (головним чином) від вектору параметрів системи a .

Отже, існує тісний зв'язок між відображенням катастроф φ і адаптованістю системи. Дійсно, чим ближче до особливої точки φ розташоване початкове значення вектору параметрів a , тим менше ступінь адаптованості системи (по відношенню до змін a).

Маючи на увазі сказане вище, можна визначити міру адаптованості шляхом розгляду величини і напрямки такої зміни вектору a , яке необхідно, щоб провести його через особливість φ . Як показано на рис. 2.8, для будь-якого a побудуємо вектор v від кінця вектору a до найближчої особливості φ і проводимо порівняння v з допустимими змінами a з метою оцінити міру адаптованості системи Σ для даного вектору a

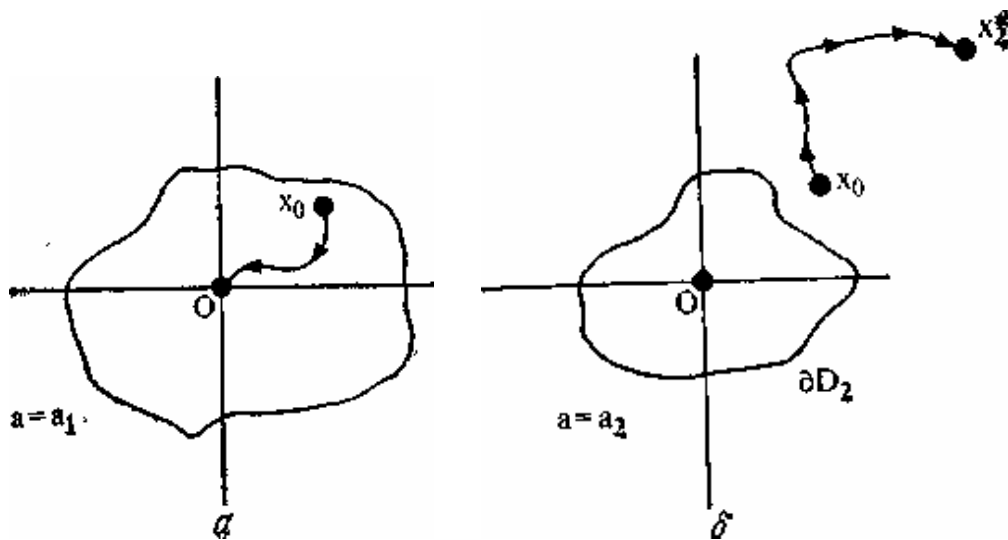


Рисунок 2.8 – Низька адаптованість на краю басейна тяжіння стаціонарної точки

Далі досліджена на адаптованість узагальнена (відносно логістичної) синергетична модель захисту (рис. 2.1), що допускає катастрофу типу збірки Вітні. Вона описується рівнянням

$$\dot{x} = -(x^3 + (-a_2)x + a_1)$$

з двома керуючими параметрами a_1 і a_2 . Під адаптивністю тут розуміється збереження приналежності басейну стаціонарної множини в узагальненому фазовому просторі при зміні керуючих змінних катастрофи (рис. 2.8).

Для катастрофи "збірки" в синергетичній системі захисту ступенем адаптивності пропонується вважати відстань в будь-якої метриці від точки до кривої в проекції функції катастроф (рис. 2.9).

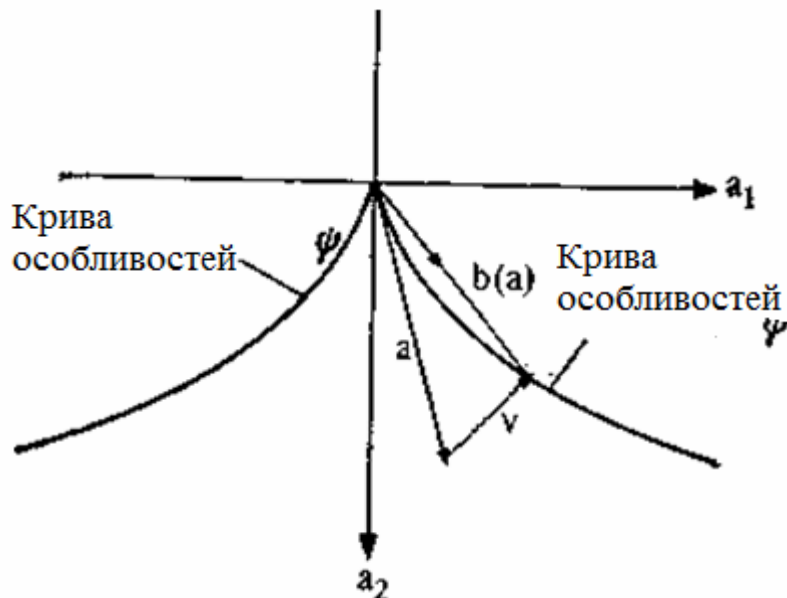


Рисунок 2.9 – Відстань до кривої катастроф як міра адаптованості

Нижче отримано розрахункові формули в замкнутому вигляді, що дозволяють точно оцінити адаптивність без використання чисельних методів.

Маємо три корені: $x^*(a;b)$; $M_f = (x^*(a;b), a, b)$ в тривимірному просторі; φ – відображається на площині a, b (або a_1, a_2 ; тут $a=a_2, b=a_1$).

$\varphi: M_f \Rightarrow R^2$ має точку збірки, коли один корінь x^* переходить в три кореня.

Один корінь $f'(x) = (-x^3 + ax - b)'_x = -3x^2 + a$. При $a < 0$ він має постійний знак і немає біфуркації. Точка біфуркації $(0,0)$ – катастрофа типу збірки.

Знаходимо криві особливостей відображення φ .

Розглянемо випадок $a > 0$.

$f(x) = C$ має три корені, якщо $f_{loc\ min} < f(x) < f_{loc\ max}$

$$-3x^2 + a = 0, \quad x_0 = \pm\sqrt{\frac{a}{3}};$$

$$f_{\min} = a^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - b = -b - \frac{2}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}};$$

$$f_{\max} = -b + \frac{2}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}}.$$

$f(x)$ має три кореня, якщо для точки **a и b** що $f_{\min} < 0 < f_{\max}$.

$$-b - \frac{2}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}} = 0 \quad - \text{перша крива катастрофи типу збірки, отже } b = -\frac{2}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}},$$

$$b = \frac{2}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}} \quad - \text{друга крива катастрофи збірки, обидві при } a > 0.$$

2.3 Асимптотики для «швидких» систем захисту

2.3.1 Аналіз головних членів асимптотик

У моделі шкідливий чинник – параметр порядку. Він змінюється значно повільніше, ніж на нього реагує захист. Такий захист будемо називати «швидким» в тому сенсі, що захист описується «швидкою» змінною z .

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що відрізняється від (2.1) сингулярністю, тобто наявністю малого параметра ε при старшій похідній. Від неї ж залежать і змінні $u(t, \varepsilon)$ и $z(t, \varepsilon)$, для яких будемо будувати асимптотичні

ряди за ступенями ε . Відзначимо, що параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, на відміну від всіх попередніх випадків, далі скрізь можуть бути повільно змінними функціями часу. Такі рівняння зі змінними коефіцієнтами, навіть в лінійному випадку, не мають загального розв'язку в замкнутій формі [18, 58].

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t); \\ \varepsilon z'(t) = F(u(t), z(t)), \end{cases} \quad (2.12)$$

де $F(u(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ (в подальшому, просто $F(u, z)$) – функція, яка може приймати одну із наступних форм:

а) $F(u, z) = \gamma u$;

б) $F(u, z) = \gamma u - \delta z$;

в) $F(u, z) = \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 - \delta_1 z - \delta_2 z^2$.

Спочатку розглянемо головні члени асимптотик, яким в (2.12) відповідають одне диференціальне та одне алгебраїчне рівняння (відповідно, $\varepsilon=0$).

Випадок а) тривіальний і виходячи з нього $u=0$, z – будь-яка функція, в тому числі, $z=z_0$ – стаціонарний захист.

Для випадку б), головний член асимптотики для функції $z(t)$ приймає вигляд

$$z = \frac{e^{t\alpha} z_0 \alpha}{\alpha - z_0 \beta + e^{t\alpha} z_0 \beta},$$

де z_0 – стаціонарний захист.

Для випадку в) висловимо $u(t)$ через $z(t)$

$$u = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4z \gamma_2 \delta_1 + 4z^2 \gamma_2 \delta_2}}{2\gamma_2}$$

та підставляємо в диференціальне рівняння. Воно не може бути розв'язано в загальному вигляді – розв'язки знаходяться в вигляді інтерполяційної функції.

Розрахуємо вартість системи захисту для випадку б).

Параметри системи: $C_0=1200$, $\alpha=0.2$, $\beta=0.2$, $z_0=12$, $\gamma=0.15$, $\delta=2$.

Для визначеності прийmemo обмеження $t=4$ – час встановлення стану, який нас влаштовує, тобто коли $z \leq z_0$.

Особлива точка системи (2.12) $z=1, u=4$. Час $t=3$, за який система перейде до стану, який нас влаштовує ($z \leq 12$) є прийнятним для нашого випадку. Більш того є можливість зменшити витрати на стаціонарний захист. Тому можна змінити рівень впливу захисту (в сторону зменшення). На цей раз прийmemo $\beta=0.1$. Прийmemo тепер вартість нашої стаціонарного захисту рівній $C_0=600$. На рис.2.10 зображений фазовий портрет зміненої системи (2.12) що відповідає випадку в).

Час $t=2$, за який система перейде до стану, який нас влаштовує ($z \leq 12$) є прийнятним для нашого випадку.

Далі виконаємо розрахунок вартості системи захисту, скориставшись (2.5)–(2.7):

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 6.07 + 600 = 606.07;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 100.60 + 600 = 700.60;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 38.60 + 600 = 638.60.$$

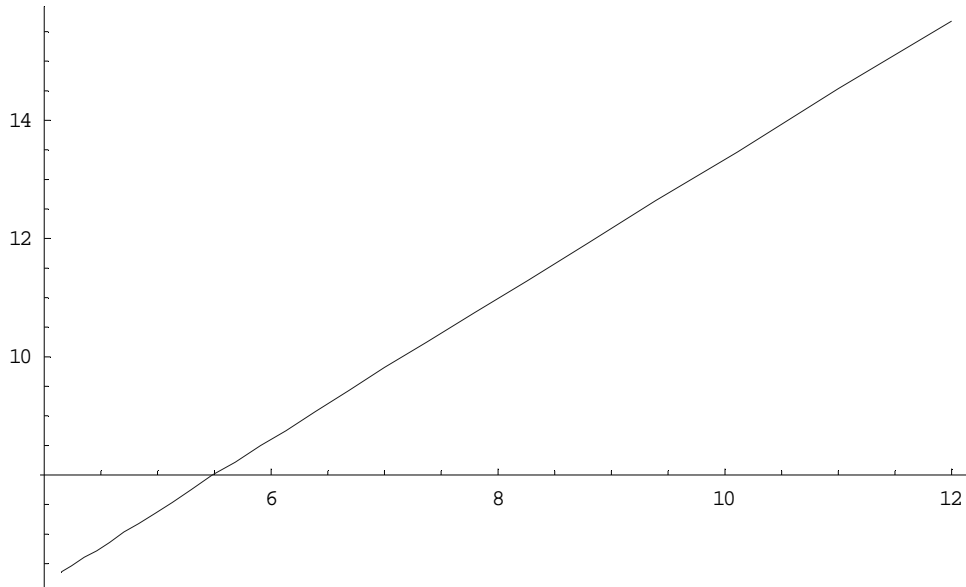


Рисунок 2.10 – Фазовий портрет системи (2.12), де F у формі в)

2.3.2 Загальний випадок асимптотичного розв'язку

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u'(t) = \varepsilon \alpha u(t) - \beta z(t) u(t); \\ \varepsilon z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t). \end{cases}$$

Відмінність цієї системи від раніше розглянутих є квазістаціонарна шкідливість. Вирішимо систему асимптотическим методом для членів з $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$.

Для початку розпишемо систему (2.12), прийнявши за увагу залежність функції $u(t, \varepsilon)$ и $z(t, \varepsilon)$ від часу і від малого параметра.

Вирішуємо систему (2.12-б) для випадку ε^0 (нульове наближення).

Запишемо асимптотики функцій $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$.

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + O(\varepsilon), \quad z(t, \varepsilon) = z_0(t) + O(\varepsilon).$$

Система (2.12–б) для нульового наближення набуде вигляду:

$$\begin{cases} u_0'(t) = -\beta u_0(t) z_0(t); \\ 0 = \gamma u_0(t) - \delta z_0(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

Робимо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$, $z_0'(t) = -\beta z_0^2(t)$, $z_0(t) = \frac{1}{\beta t}$,

$$u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}.$$

Значить, отримані функції захисту і шкідливості для нульового наближення мають вигляд:

$$z(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}.$$

Вирішуємо систему (2.12) з урахуванням члена з ε^1 .

Запишемо асимптотики функцій $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$.

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + O(\varepsilon^2).$$

Система (2.12–б) для першого наближення набуде вигляду:

$$\begin{cases} u_0'(t) + \varepsilon u_1'(t) = \varepsilon a u_0(t) - \beta u_0(t) z_0(t) - \\ \quad - \varepsilon \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)); \\ \varepsilon z_0'(t) = \gamma u_0(t) + \varepsilon \gamma u_1(t) - \delta z_0(t) - \varepsilon \delta z_1(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Складові з множником ε зі ступенем 2 і вище переходять в залишковий член $O(\varepsilon^2)$.

Вирішимо систему (2.14), згрупувавши доданки при ε^0 і ε^1 .

$$\begin{cases} u_0'(t) = -\beta u_0(t) z_0(t) \\ 0 = \gamma u_0(t) - \delta z_0(t) \\ u_1'(t) = \alpha u_0(t) - \beta(u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) \\ z_0'(t) = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t) \end{cases} \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^1 \end{array} \quad (2.15)$$

Виконуємо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$.

Підставляємо в перше рівняння системи (2.15) і, в результаті розв'язку диференціального рівняння, знайдена функція $z_0(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_0(t)$.

$$z_0(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}. \quad (2.16)$$

Для того, щоб знайти функції $z_1(t)$ і $u_1(t)$ зробимо підстановку в третє і четверте рівняння системи (2.15) функції $z_0(t)$ і $u_0(t)$ з (2.16). Отримана система має вигляд:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta(u_1(t) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t)); \\ -\frac{1}{\beta t^2} = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t). \end{cases} \quad (2.17)$$

Виконуємо заміну $u_1(t) = \frac{1}{\gamma} (\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2})$.

Підставляємо в перше рівняння системи (2.17) і вирішуємо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{\gamma}(\delta z_1'(t) + \frac{2}{\beta t^3}) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(\frac{1}{\gamma}(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2}) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right).$$

В результаті розв'язання диференціального рівняння була знайдена функція $z_1(t)$ і за допомогою неї була знайдена функція $u_1(t)$.

$$z_1(t) = \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right), \quad u_1(t) = \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2 \ln t - 2).$$

Отримані функції захисту і шкідливості для першого наближення мають вигляд:

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right), \quad u(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2 \ln t - 2).$$

Розв'язуємо систему (2.12) з урахуванням членів з ε^2 .

Розпишемо асимптотики для функції-розв'язків $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$.

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \overline{o}(\varepsilon^3), \quad z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + \overline{o}(\varepsilon).$$

Система (2.12) для другого наближення набуде вигляду:

$$\begin{cases} u_0'(t) + \varepsilon u_1'(t) + \varepsilon u_2'(t) = \varepsilon \alpha u_0(t) + \varepsilon^2 \alpha u_1(t) - \beta u_0(t) z_0(t) - \varepsilon \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) - \\ - \beta (u_2(t) z_0(t) + u_1(t) z_1(t) + u_0(t) z_2(t)) + \overline{o}(\varepsilon^3); \\ \varepsilon z_0'(t) + \varepsilon^2 z_1'(t) = \gamma u_0(t) + \varepsilon \gamma u_1(t) + \varepsilon^2 \gamma u_2(t) - \delta z_0(t) - \varepsilon \delta z_1(t) - \varepsilon^2 \delta z_2(t) + \overline{o}(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (2.18)$$

Складові з множником зі ступенем 3 і вище переходять в залишковий член $\overline{o}(\varepsilon^3)$.

Розв'яжемо систему (2.18), згрупувавши доданки при ε^0 , ε^1 і ε^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0'(t) = -\beta u_0(t) z_0(t) \\ 0 = \gamma u_0(t) - \delta z_0(t) \\ u_1'(t) = \alpha u_0(t) - \beta(u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) \\ z_0'(t) = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t) \\ u_2'(t) = \alpha u_1(t) - \beta(u_2(t) z_0(t) + u_1(t) z_1(t) + u_0(t) z_2(t)) \\ z_1'(t) = \gamma u_2(t) - \delta z_2(t) \end{array} \right. \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 \end{array} \quad (2.19)$$

Виконуємо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$.

Підставляємо в перше рівняння системи (2.19) і розв'язуємо диференціальне рівняння

$$z_0'(t) = -\beta z_0^2(t).$$

Звідси, як і раніше:

$$z_0(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}. \quad (2.20)$$

Для того, щоб знайти функції $z_1(t)$ і $u_1(t)$ зробимо підстановку в третє і четверте рівняння системи (2.19) функцій $z_0(t)$ і $u_0(t)$ з (2.20). Отримана система має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta(u_1(t) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t)); \\ -\frac{1}{\beta t^2} = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t). \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Виконуємо заміну $u_1(t) = \frac{1}{\gamma}(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2})$.

Підставляємо в перше рівняння системи (2.21) і розв'язуємо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{\gamma}(\delta z_1'(t) + \frac{2}{\beta t^3}) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(\frac{1}{\gamma}(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2}) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right).$$

В результаті розв'язання диференціального рівняння була знайдена функція $z_1(t)$ за допомогою неї була знайдена функція $u_1(t)$.

$$z_1(t) = \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln t}{t^2} \delta \right), \quad u_1(t) = \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2\ln t - 2). \quad (2.22)$$

Для того, щоб знайти функції $z_2(t)$ і $u_2(t)$ зробимо підстановку в п'яте і шосте рівняння системи (2.19) функцій $z_0(t)$, $u_0(t)$, $z_1(t)$, $u_1(t)$ з (2.20)-(2.22). Отримана система має вигляд:

$$\begin{cases} u_2'(t) = \frac{1}{4t^2 \beta \gamma \delta} (t^2 \delta (t^2 \alpha^2 \delta - 2\alpha - 4t \beta (\gamma u_2(t) + \delta z_2(t))) - 4\ln t - 4\ln^2 t); \\ \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln t}{\beta t^2} \right) = \gamma u_2(t) - \delta z_2(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Виконуємо заміну $u_2(t) = \frac{1}{\gamma}(\delta z_2(t) + \frac{1}{2\beta}(\alpha - \frac{2\ln t}{\beta t^2}))$, робимо підстановку в

перше рівняння системи (2.23). Розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta \delta \gamma t^4} (5 - 6\ln(t) + \beta \delta^2 t^4 z_2'(t)) = \\ & = \frac{1}{4\beta \delta \gamma t^4} (4 - 2\alpha \delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 - 12\ln(t) - 4\ln^2(t) - 8\beta \delta^2 t^3 z_2(t)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

В результаті розв'язання диференціального рівняння (2.24) була знайдена функція $z_2(t)$ і за допомогою неї була знайдена функція $u_2(t)$.

$$z_2(t) = \frac{1}{12\beta\delta^2 t^3} (36 - 6\alpha\delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 - 12\ln(t) + 12\ln^2(t)),$$

$$u_2(t) = \frac{1}{12\beta\delta\gamma t^3} (24 - 6\alpha\delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 + 12\ln(t) + 12\ln^2(t)).$$

Отримані функції захисту і шкідливості для другого наближення мають вигляд:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln t}{t^2 \delta} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta\delta^2 t^3} (36 - 6\alpha\delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 - 12\ln t + 12\ln^2 t), \\ u(t) &= \frac{\delta}{\beta\gamma t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta\gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2\ln t - 2) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta\delta\gamma t^3} (24 - 6\alpha\delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 + 12\ln t + 12\ln^2 t). \end{aligned}$$

Проведемо мінімізацію за параметрами β і ε функцій $u(t)$ для нульового, першого і другого наближень, щоб провести розрахунок вартості системи захисту.

Для цього, спочатку визначимо для якого інтервалу часу функція шкідливості досягне прийняттого результату (для нас не є критичним час установки нормальних (не критичних) показників системи). У разі, коли час роботи системи безпеки є критичним параметром – необхідно визначити при яких значеннях параметра β функція шкідливості приймає прийнятні значення (при цьому ми обмежені за часом).

Візьмемо для визначеності такі значення параметрів системи (2.12) $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 2$, $z_0 = 12$. Вартість стаціонарного захисту $c_0 = 1200$.

Оскільки стаціонарний захист $z_0 = 12$, то нам необхідно знайти час t , після якого функція захисту буде приймати значення менше $z_0 = 12$ і відповідно значення параметрів β і ε .

Для $z(t) = \frac{1}{\beta t}$ – параметри дорівнюють: $t=2.01701$, $\beta=0.0413154$.

Для $z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln(t)}{t^2 \delta} \right)$ – $t=4.55546$, $\beta=0.0182969$, $\varepsilon=0.000734976$.

Для

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln(t)}{t^2 \delta} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta \delta^2 t^3} (36 - 6\alpha \delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 - 12\ln(t) + 12\ln^2(t))$$

маємо значення: $t=1.18948$, $\beta=0.0700591$, $\varepsilon=0.000101185$. Ця величина параметра ε була отримана чисельним розв'язанням вихідної системи, а значить правомочність асимптотичного підходу (малість ε) – підтверджується.

Так як ми не були обмежені за часом роботи системи захисту, то можна взятися за розрахунок системи захисту, використовуючи, як і раніше, три різні схеми розрахунку вартості систем захисту.

2.4 Особливості реалізації обчислювальних методів аналізу критичних режимів систем з захистом від шкідливих впливів

Для вирішення поставленого завдання використовуємо пакет Maxima. Даний пакет пропонує користувачеві самий різносторонній і найбільш повний набір математичних, наукових, інженерних і фінансових функцій, які оперують

числами будь-якого розміру і будь-якої точності, відтворюють графіку, здійснюють символні перетворення, для отримання найкращої відповіді з високою швидкістю перемикають алгоритми і навіть перевіряють і регулюють точність своїх результатів.

Mathima – одна з найпотужніших вільно розповсюджуваних систем символної математики [13] – аналог пакету Mathematica [67]. Пакет володіє великими графічними можливостями, поданням документів у формі, що поєднує програми і команди з даними, представленими в формульному, текстовому, табличному і графічному вигляді.

Система забезпечує динамічний зв'язок між осередками документів в стилі електронних таблиць при вирішенні багатьох символних завдань, що принципово і вигідно відрізняє її від інших систем. З точки зору мови програмування система Mathima відноситься до систем, що інтерпретують, тобто послідовно аналізує (інтерпретує) кожен вираз і тут же виконує його. Робота з системою відбувається в діалоговому режимі. Система містить достатній набір керуючих структур для створення умовних виразів, розгалужень в програмах, циклів і т.п.

Програма, написана в пакеті Mathima, відрізняється легкістю і простотою використання. Програма розрахунків по розділу (2.3.2) розділена на два блоки. У першому блоці проводяться всі необхідні для розв'язання задачі обчислення. Цей блок можна редагувати, вводячи потрібні зміни в програму. Другий блок містить результати обчислень.

2.5 Висновки по розділу

Основні результати розділу наступні:

– для технічних систем із захистом, описаних в розділі 1 розроблено узагальнену математичну модель у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром, яка відрізняється від відомих присутністю регулярних та сингулярних збурень, та використання якої дозволило описати всі

можливі співвідношення швидкостей взаємодії джерел шкідливих чинників та системи захисту від них. Побудована загальна динамічна модель потім деталізована, згідно типам функцій захисних систем, що входять до неї $F(u, z)$. Проведено аналіз стійкості стаціонарних станів;

- отримав подальший розвиток метод побудови і аналізу стаціонарних множин часткової сингулярної моделі ергатичної системи з динамічним захистом;

- зроблено аналіз ступеня стійкості ергатичних систем з синергетичним захистом, що дозволило оцінити параметричну стійкість системи при пошуку раціональних значень її параметрів поблизу точок катастроф і визначити ступінь стійкості ергатичних систем при різних варіаціях біфуркаційних параметрів;

- для аналізу ергатичної системи із захистом вперше був використаний асимптотический метод розв'язання її диференціальної моделі (2.12), і отримані замкнуті формули для наближеного розв'язку;

- значення параметра $\varepsilon = 00001$ було отримано шляхом чисельного розв'язку вихідної системи, і це означає що адекватність і переваги асимптотического підходу і малість параметра ε в порівнянні з іншими підтверджується;

- знайдені вирази для інтенсивності захисту дозволяють визначити його оптимальне за вартістю значення.

На додаток до отримання розв'язку в замкнутій аналітичній формі і його дослідження, цей підхід дозволяє отримати реальні оцінки за вартістю захисту і навіть знизити цю вартість в часі, коли інтенсивність шкідливого фактора U не перевищує поріг динамічного захисту $C(z_0(t) - z_0) = 0$.

Асимптотический підхід виявився дуже ефективним, проте, отримані розв'язки самі сингулярні при $t=0$. Це не є перешкодою для застосування методу. Такими властивостями володіють навіть класичні моделі (у фізиці - електростатика і ньютонівська теорія тяжіння). Моделі даного розділу адекватні при $t \geq t_0 > 0$. Для поширення моделі на початкові моменти, коли тільки

включається підсистема захисту, необхідний облік в моделі, так званого, «примежового шару». Це питання розглядається в третьому розділі.

Матеріали даного розділу опубліковані в роботах автора [30, 32, 33, 88].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [13, 18, 22, 30, 32, 33, 52, 53, 58, 67, 72, 73, 85, 88, 94, 96, 104, 105].

3 РОЗРОБКА МЕТОДУ АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ З ЗАХИСТОМ ВІД ШКІДЛИВИХ ВПЛИВІВ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

3.1 Ефект примежового шару в системах із захистом від шкідливих впливів

У розділі 2 були запропоновані асимптотичні розв'язку для системи рівнянь із захистом, деякі з яких виявилися сингулярними за часом при $t=0$. Це є властивість методу, а не недолік моделі. Для усунення цього недоліку використовуємо метод «примежового шару» [61, 62], для чого розглянемо систему

$$\varepsilon \frac{dZ}{dt} = F(Z, t), \quad 0 < t < 1, \quad (3.1)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, а Z – двумірний вектор, компоненти якого z_1 і z_2 . Поклавши $\varepsilon = 0$, отримаємо вироджене рівняння

$$F(Z, t) = 0, \quad (3.2)$$

і розглянемо один з його розв'язків $\bar{z}_0(t) = \{\bar{z}_{10}(t), \bar{z}_{20}(t)\}$.

Нехай власні значення $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ матриці $F'_z(\bar{z}_0(t), t)$ задовольняють вимогам $\lambda_1(t) < 0, \lambda_2(t) > 0$. Далі це будемо звати «умова I».

Задамо для системи (3.1) крайові умови

$$z_2(0, \varepsilon) = z_2^0, \quad z_2(1, \varepsilon) = z_2^1. \quad (3.3)$$

Виявляється завдання (3.1), (3.3) може мати розв'язок $z(t, \varepsilon)$, зображений

на рис. 3.1 (вказано графік z_2 – компоненти розв’язку, аналогічний графік буде і для z_1 компоненту). Функція $z_2(t, \varepsilon)$ при достатньо малих ε близька до $\bar{z}_{20}(t)$ всюди на $(0,1)$ та лише поблизу $t=0$ і $t=1$ помітно відрізняється від $\bar{z}_{20}(t)$: в околицях цих точок виникає примежовий шар.

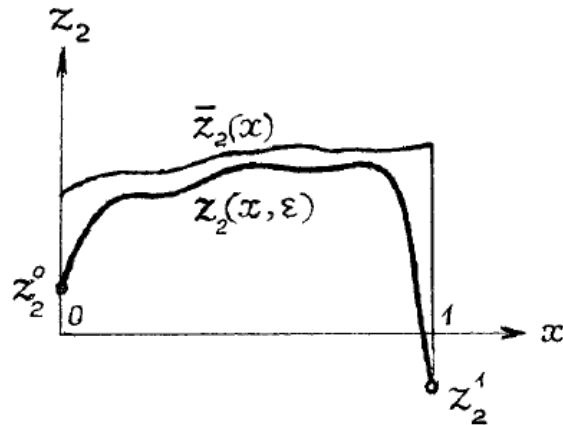


Рисунок 3.1 – Графік z_2 – компоненти розв’язку

Викладемо алгоритм побудови асимптотичного розв’язку задачі (3.1), (3.3) [60], в припущенні, що функція $F(Z, t)$ досить гладка. Будемо шукати цей асимптотичний розклад у вигляді

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \Pi z(\tau_0, \varepsilon) + Rz(\tau_1, \varepsilon), \quad (3.4)$$

$$\text{де } \bar{z}(t, \varepsilon) = \bar{z}_0(t) + \varepsilon \bar{z}_1(t) + \dots \quad (3.5)$$

так званий, регулярний ряд,

$$\Pi z(\tau_0, \varepsilon) = \Pi_0 z(\tau_0) + \varepsilon \Pi_1 z(\tau_0) + \dots \quad (3.6)$$

є «примежовошаровий» ряд в околиці $t=0$ ($\tau_0 = t/\varepsilon$).

$\Pi z(*)$ і $\Pi_i z(*)$ – вектор-функції прикордонного шару. Їх отримуємо підстановкою в (3.1), прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε . Асимптотична збіжність впливає з теореми Тихонова–Васильєвої [59].

$$Rz(\tau_1, \varepsilon) = R_0 z(\tau_1) + \varepsilon R_1 z(\tau_1) + \dots \quad (3.7)$$

примежовошаровий ряд в околиці $t = 1$ ($\tau_1 = (t-1)/\varepsilon$).

Примежовошарові ряди, члени яких називають примежовими функціями, вводяться з тієї причини, що, користуючись тільки регулярним рядом (3.5), неможливо задовольнити граничним умовам (3.3). У той же час поза відповідних примежових шарів примежові функції повинні бути нескінченно малими вищого порядку, ніж будь-яка ступінь ε .

3.2 Вибір і обґрунтування примежових функцій

Для визначення коефіцієнтів всіх виписаних рядів треба (3.4) підставити в (3.1), (3.3) і прирівняти зліва і справа члени однакового порядку по ε , причому окремо залежать від x , від τ_0 і від τ_1 . Для цього праву частину в (3.1) потрібно представити у вигляді, аналогічному (3.4):

$$\varepsilon \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau_0} \Pi z + \frac{d}{d\tau_1} Rz = \bar{F} + \Pi F + RF, \quad (3.8)$$

де

$$\bar{F} = F(\bar{z}(t, \varepsilon), t), \quad \Pi F = F(\bar{z}(\tau_0 \varepsilon, \varepsilon) + \Pi z, \tau_0 \varepsilon) - F(\bar{z}(\tau_0 \varepsilon, \varepsilon), \tau_0 \varepsilon),$$

$$RF = F(\bar{z}(1 + \tau_1 \varepsilon, \varepsilon) + Rz, 1 + \tau_1 \varepsilon) - F(\bar{z}(1 + \tau_1 \varepsilon), 1 + \tau_1 \varepsilon). \quad (3.9)$$

Підстановка в граничні умови (3.3) дає

$$\bar{z}_2(0, \varepsilon) + \Pi z_2(0, \varepsilon) = z_2^0, \quad \bar{z}_2(1, \varepsilon) + R z_2(1, \varepsilon) = z_2^1. \quad (3.10)$$

Для показаного вище, $R z_2$ не бере участь при підстановці в ліву граничну умову, а Πz_2 – в праву. Вимога малості Πz і $R z$ поза відповідних примежових шарів записується у вигляді

$$\Pi z(\infty, \varepsilon) = 0, \quad R z(-\infty, \varepsilon) = 0. \quad (3.11)$$

Випишемо рівняння для визначення членів нульового порядку:

$$0 = \bar{F}_0 \equiv F(\bar{z}_0, t), \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{d\tau_0} \Pi_0 z = \Pi_0 F \equiv F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - F(\bar{z}_0(0), 0) = F(\bar{z}_0 + \Pi_0 z, 0), \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{d\tau_1} R_0 z = R_0 F \equiv F(\bar{z}_0(1) + R_0 z, 1) - F(\bar{z}_0(1), 1) = F(\bar{z}_0(1) + R_0 z, 1). \quad (3.14)$$

Із (3.10) і (3.11) в тому ж нульовому наближенні маємо

$$\bar{z}_{20}(0) + \Pi_0 z_2(0) = z_2^0, \quad \Pi_0 z_2(+\infty) = 0; \quad (3.15)$$

$$\bar{z}_{20}(1) + R_0 z_2(1) = z_2^0, \quad R_0 z_2(+\infty) = 0. \quad (3.16)$$

В якості розв'язку (3.12) візьмемо ранішнє $\bar{z}_0(t)$. Розглянемо задачу (3.13), (3.15). Зробимо заміну змінних

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z = \tilde{z}. \quad (3.17)$$

Тоді співвідношення (3.13), (3.15) приймають вигляд

$$\frac{d}{d\tau_0} \tilde{z} = F(\tilde{z}, 0), \quad (3.18)$$

$$\tilde{z}_2(0) = z_2^0, \quad (3.19)$$

$$\tilde{z}_2(\infty) = \bar{z}_0(0). \quad (3.20)$$

Система (3.18) має точку спокою $\tilde{z} = \bar{z}_0(0)$ (точка А на рис. 3.2), що є в силу умови I сідлом, через які проходять дві сепаратриси: вхідна I і виходить II при $\tau_0 \rightarrow \infty$, що зазначено стрілками. Крайове умова (3.19) задає $\tilde{z}_2(0)$. Щоб задовольнити умові (3.20), потрібно, щоб вертикальна пряма, що проходить через $\tilde{z}_2(0)$, перетинала сепаратриси I і тим самим, на сепаратриси I визначалася точка В (або, що те ж саме, визначалася друга компонента $\tilde{z}_1(0)$) для побудови потрібного розв'язку $\tilde{z}(\tau_0)$ завдання (3.18) – (3.20). Отже:

Умова II. Нехай пряма $\tilde{z}_2 = \bar{z}_2^0$ перетинає сепаратрису, що входить в сідло $\tilde{z} = \bar{z}_0(0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$.

При виконанні цієї умови різницю $\tilde{z}(\tau_0) - \bar{z}_0(0)$, тобто $\Pi_0 z(\tau_0)$, експоненціально зменшується при $\tau_0 \rightarrow \infty$:

$$\|\Pi_0 z\| < C \exp\{-k\tau_0\}, \quad (3.21)$$

$$\text{де } \|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

а через $C > 0$ і $k > 0$ тут і далі позначаються не залежні від ϵ постійні, взагалі кажучи, в різних оцінках.

Завдання (3.14), (3.16) розглядається аналогічно. При цьому виникає умова Γ , яке формулюється аналогічно II, але при цьому використовується оцінка,

аналогічна (3.21), з заміною $-k\tau_0$ на $-k\tau_1$.

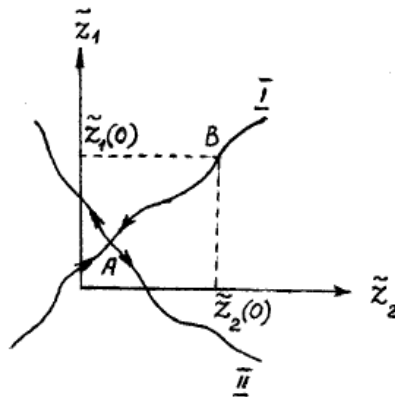


Рисунок 3.2 – Точка спокою системи

Позначимо через Z_0 часткову суму (3.4), що містить члени нульового порядку:

$$Z_0 = \bar{z}_0 + \Pi_0 z + R_0 z. \quad (3.22)$$

Тоді справедлива наступна теорема [59].

Теорема 3.1. При виконанні умов I, II, III для досить малих ε існує розв'язок $z(t, \varepsilon)$ завдання (1.9), (1.11), для якого має місце нерівність

$$\max_{[0,1]} \|z(t, \varepsilon) - Z_0\| < C\varepsilon, \quad (3.23)$$

де C – незалежна від ε постійна.

У роботах [31, 62] наведено побудову наступних членів ряду (3.4) і отримана оцінка

$$\max_{[0,1]} \|z(t, \varepsilon) - Z_n\| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (3.24)$$

де Z_n – часткова сума ряду (3.4), що містить члени до порядку ε^n включно.

Таким чином доведено, що ряд (3.4) є асимптотичним рядом для вирішення завдань (3.1), (3.3).

3.3 Чисельні розв'язки і порівняння результатів

В даному розділі досліджувалася система (3.1) для функції виду:

$$F(u(t), z(t)) = \gamma u(t) - \delta z(t), \quad (3.25)$$

раніше також розглянутих в розділі 2.

Оскільки система (3.1) містить швидкі (захист) і повільні (шкідливість) змінні, введемо в (3.1) малий параметр ε , який буде явно на це вказувати. Після, система (2.1) з правою частиною другого диференціального рівняння виду (3.2) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \varepsilon \alpha u(t) - \beta z(t) u(t); \\ \varepsilon z'(t) &= \gamma u(t) - \delta z(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Метою даної частини дослідження є оптимізація функції вартості $c(z)$ для системи (3.26) по параметрам β , ε і (якщо можливо) час. А також створення функції $c(z)$, яка б мала фізичний зміст для даного завдання [49].

Структура подальших досліджень представлена наступними пунктами:

- вибір коефіцієнтів системи з фізичного представлення завдання;
- побудова розв'язку асимптотичним методом;
- чисельне розв'язання системи і порівняння результатів;
- побудова функції вартості і її мінімізація.

Будемо розв'язувати систему (3.26) асимптотичним методом для ε^0 і ε^1 .

Далі буде показано те, що, в даному дослідженні, перших двох членів

ряду буде досить для отримання хорошого наближення.

Виберемо коефіцієнти системи (3.26) з фізичного змісту завдання і будемо використовувати їх далі:

$$\alpha = 0.5 ; \beta = 5 ; \gamma = 2 ; \delta = 1 ; \varepsilon = 0.0001. \quad (3.27)$$

Так само потрібно задати початкові умови для того, щоб отримати чисельні і асимптотичні розв'язки. Логічно буде їх взяти в відношенні $z^0 < u^0$, де $z^0 = z_c$, тому, що система повинна вийти з стаціонарного захисту для того, щоб була можливість подивитися її поведінку і мінімізувати вартість.

$$z^0 = 2 ; \quad u^0 = 3. \quad (3.28)$$

І поставимо для визначеності реальний для захисної тезнічної системи проміжок часу $T = 10$ годин, на якому і будемо розглядати завдання.

Тепер побудуємо розв'язки системи диференціальних рівнянь (3.26) з параметрами (3.27) і початковими умовами (3.28).

У ході дослідження було помічено, що при $\beta \in (0,10)$ асимптотичний розв'язок, побудований для двох членів розкладання, мало відрізняється від точного (чисельного).

Використовуючи методу, яка була описана в розділах 2 і 3.1 даної роботи, отримаємо графіки розв'язання задачі Коши (3.26), (3.28) з параметрами системи (3.27). Результати наведені нижче на рис. 3.3 – 3.7.

Для кращого розуміння поведінки системи, зобразимо графік не на всьому інтервалі T , а лише на малій початковій ділянці $[0 - 0.1]$. Саме тут проявляється відмінність між моделлю примежового шару і розглянутої раніше в розділі 2 моделлю, яке проілюстровано на рис 3.1.

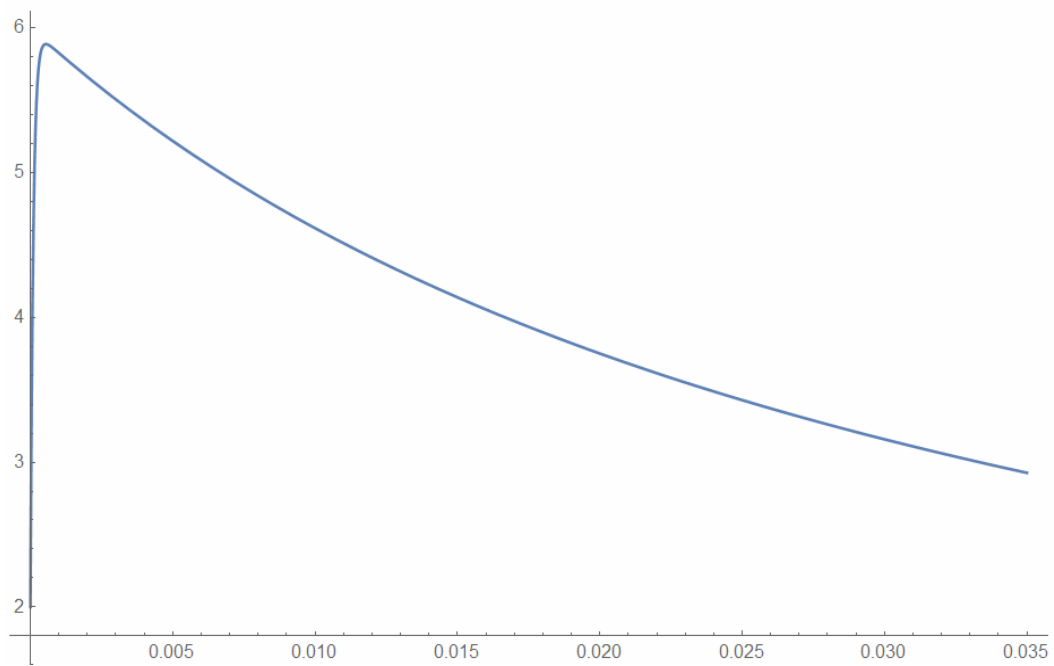


Рисунок 3.3 – Графік нульового і першого наближення регулярної та граничної частини асимптотики для функції захисту $z(t, \varepsilon)$

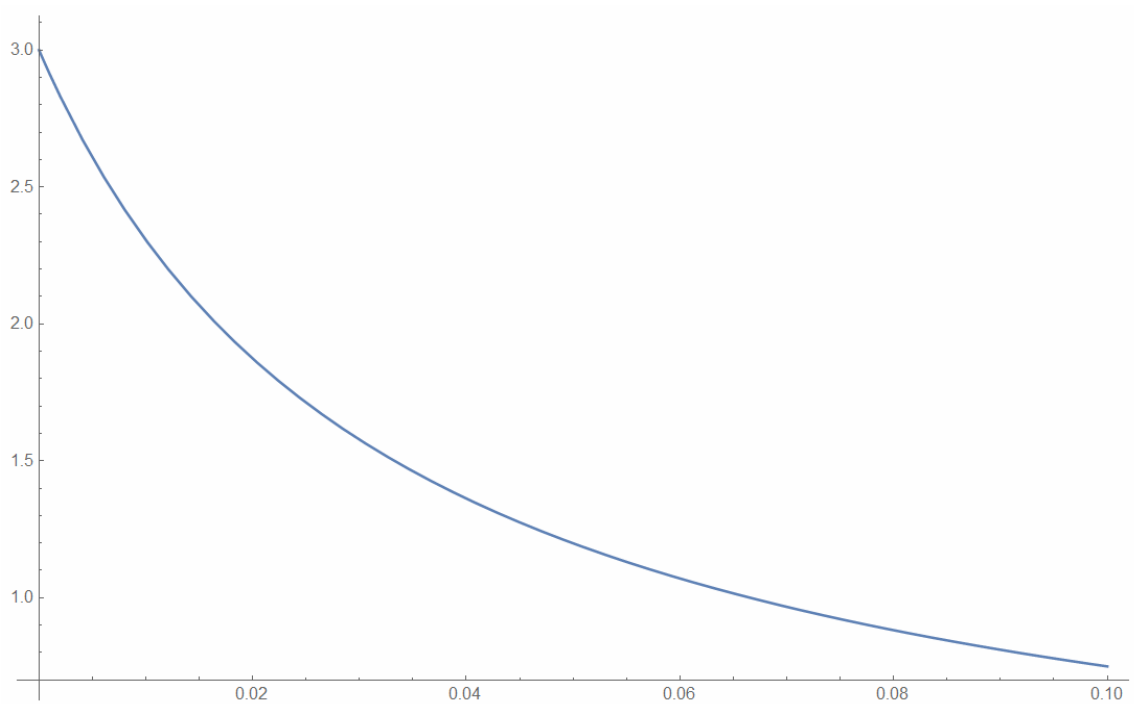


Рисунок 3.4 – Графік нульового і першого наближення регулярної та граничної частини асимптотики для функції шкідливості $u(t, \varepsilon)$

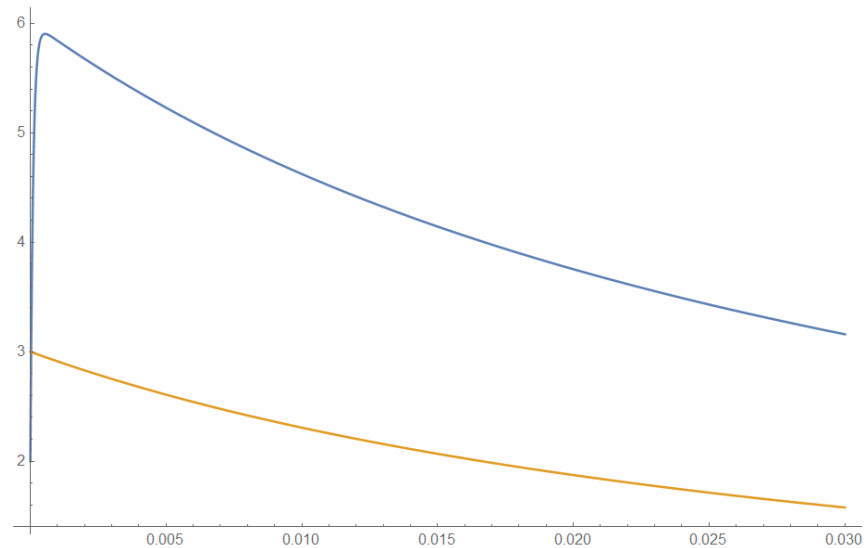


Рисунок 3.5 – Графік асимптотичного розв'язку для задачі (3.26), (3.28)

Тепер наведемо графіки чисельного розв'язку системи (3.26) з початковими умовами (3.28) і порівняємо їх з асимптотичним розв'язком.

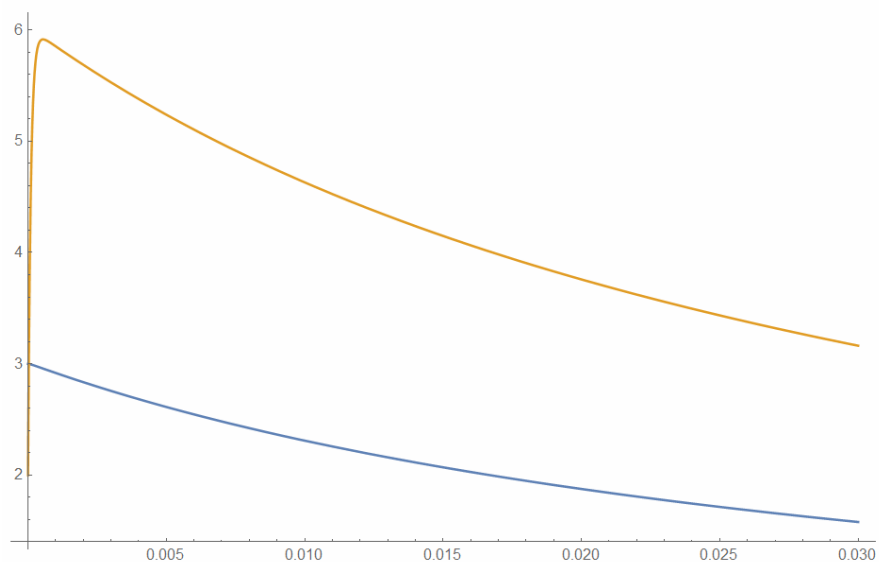


Рисунок 3.6 – Графік чисельного розв'язку системи (3.26) з початковими умовами (3.28)

Наведемо графіки похибки (модуль різниці) між точним (чисельним) і наближеним (асимптотичним) для нульового та першого члена наближення.

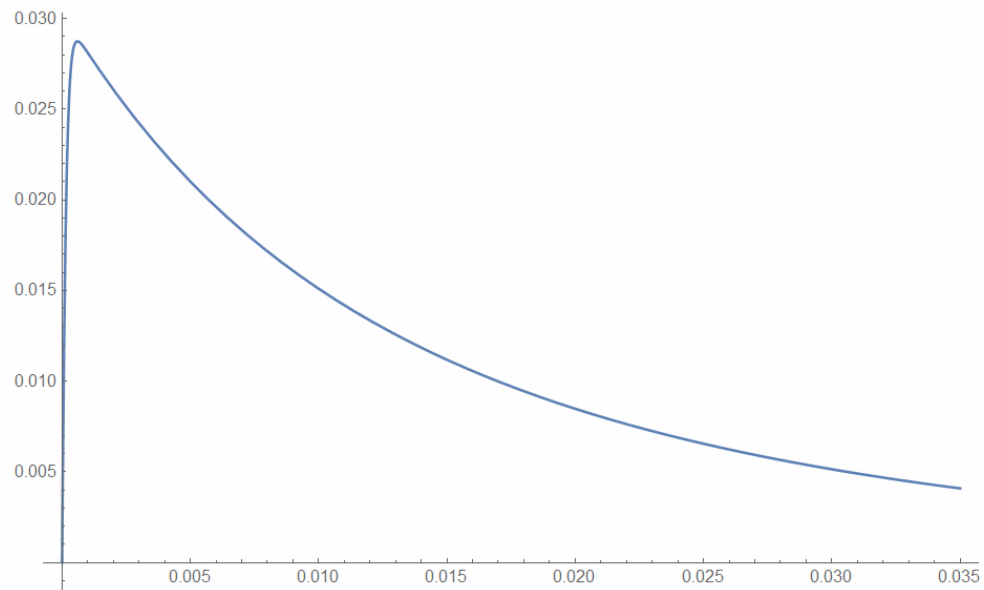


Рисунок 3.7 – Графік похибки чисельного та асимптотичного розв'язку для функції захисту, побудованої нульовим членом регулярної та примежової частини асимптотики

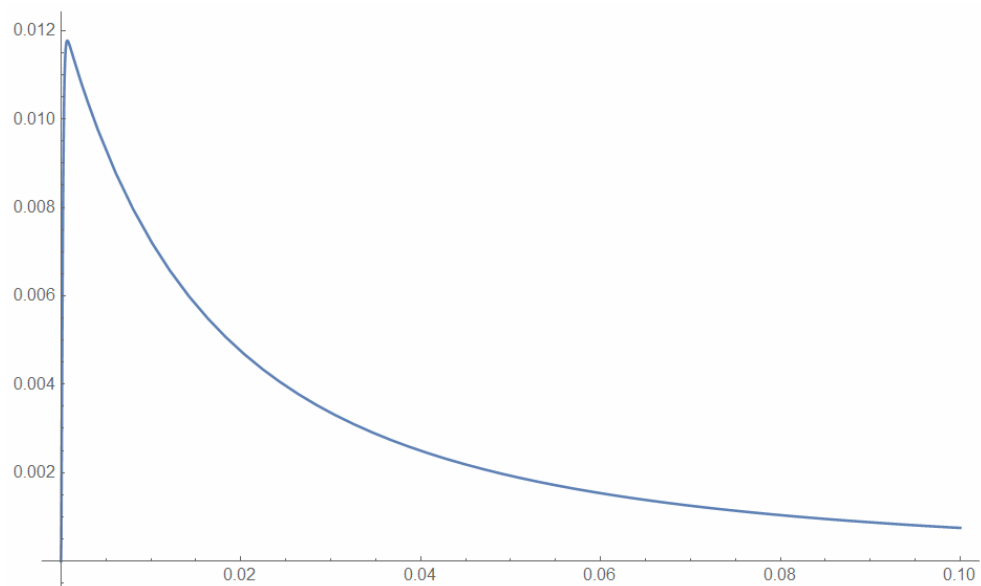


Рисунок 3.8 – Графік похибки чисельного та асимптотичного розв'язку для функції захисту, побудованої нульовим і першим членом регулярної та примежової частини асимптотики

Як видно з графіків, похибка зменшується зі збільшенням членів ряду в розкладанні за ступенями ϵ . З цього випливає, що для побудови і дослідження

функції вартості, можна використовувати результати асимптотичного розв'язку задачі (3.26), (3.28).

3.4 Побудова функції вартості і її мінімізація

В ході дослідження було розглянуто кілька варіантів побудови функції вартості для даного завдання. Нижче, будуть приведені вони все і описані переваги та недоліки кожної.

Першим варіантом функції вартості була функція [68]:

$$c(z) = \int_0^t (z(\tau) - z_c) d\tau + C_0, \quad (3.29)$$

де z_c – величина стаціонарного захисту:

C_0 – вартість стаціонарного захисту.

Значення функції (3.29) зменшувалася зі збільшенням коефіцієнта β , що ні суперечить фізиці процесу, тому що чим швидше відпрацює захист, тим менше це буде коштувати. Але з даного факту випливає, що неможливо підібрати параметри β , ε і час такі, що при деякому їх поєднанні функція вартості приймала мінімальне значення. Це виходить внаслідок того, що при збільшенні бета, захист реагує все швидше і швидше і вартість такого захисту прагне до нуля. Але не може захист реагувати за час, що прагне до нуля. Модель уточнюємо наступним чином.

Коли особа, яка приймає рішення (ОПР) купує певну систему захисту для свого підприємства, ставиться питання, про те, яку краще і скільки вона коштуватиме. Логічно припустити, що якщо сама система захисту багато коштуватиме, то час її роботи в "екстремальних" умовах повинен бути малий. Якщо ж система дешева, то час, за який вона погасить забруднювач, буде більше ніж у першій. Отже, вартість роботи першої системи в ситуаціях підвищеного ризику буде менше, ніж у другій. Щоб дізнатися яка ж вартість буде у них обох,

використовуємо систему диференціальних рівнянь (3.25), задаємо час роботи системи, її швидкість і визначаємо параметр β . Дізнавшись його, ми можемо, обрати певну функцію вартості і порахувати, скільки буде коштувати робота кожної з систем.

Недоліком функції вартості (3.29) було те, що вона не враховувала тієї вартості, яка збільшується зі збільшенням швидкості реакції захисту. Тобто необхідно побудувати таку функцію, яка б враховувала швидкість системи захисту. Була запропонована наступна функція [44]:

$$c(z) = \int_0^t (z(\tau) - z_c + K \max[0, z'(\tau)]) d\tau + C_0, \quad (3.30)$$

де коефіцієнт K вибирається з міркувань вкладу вартості швидкості реакції в загальну вартість.

При проведенні експериментів, K було вибрано таким, що внесок у вартість швидкості та звичайної вартості був рівнозначний ($K = 0,01$). Але функція (3.30) стикається зі схожою проблемою, як і (3.29). Зі збільшенням β проміжок інтегрування зменшується, і значення інтеграла від похідної так само зменшується. Отже, ми отримаємо таку ж ситуацію, як і в попередньому варіанті. Тобто тільки для конкретного захисту, буде можливо порахувати вартість.

Поставимо тепер перед собою таке завдання. Покупець хоче заощадити на протязі всього часу використання системи захисту, від її покупки, до моменту, коли вона зламається. Тобто тепер стоїть завдання оптимізувати функцію вартості, яка залежить не від одноразової роботи системи, а від всіх раз які можуть трапитися за весь проміжок життя системи, а також плюс сама вартість покупки системи. Тоді функція вартості набуде вигляду:

$$S(\beta, \varepsilon) = n \cdot c(z(t)) + \varphi(\varepsilon, \beta), \quad (3.31)$$

де $c(z)$ – це функція (3.30) ;

$\phi(\varepsilon, \beta)$ – функція вартості покупки системи захисту.

А коефіцієнт n чисельно дорівнює кількості надзвичайних ситуацій, в яких система захисту виходить зі стаціонарного режиму, і для кожного шкідливого фактора, від якого захищає захист, коефіцієнт обчислюється за формулою

$$n = T \cdot N, \quad (3.32)$$

де T – середній термін роботи системи захисту (T років),

N – середня кількість надзвичайних ситуацій за звітний проміжок часу (за рік).

В результаті виходить, що для певного шкідливого фактора, ми можемо поррахувати мінімальну вартість всієї системи і сказати з якими параметрами β і ε потрібно купувати систему, щоб її вартість і вартість обслуговування була мінімальною [11].

Оскільки швидкість реакції всіх захистів велика, а, отже, ε мало, тоді оптимізація $S(\beta, \varepsilon)$ зводиться до одновимірної оптимізації при малих ε . Наведемо кілька таких прикладів для різних параметрів n , а функцію $\phi(\varepsilon, \beta)$ візьмемо у вигляді

$$\phi(\varepsilon, \beta) = \frac{\beta}{2\varepsilon}.$$

При $n = 10$, $\varepsilon = 0.00001$ мінімум досягається в $\beta = 0,293956$, а значення функції вартості $S(\beta) = 41791,5$ (рис. 3.9).

Для системи, графік вартості якої представлений на рис. 3.10, мінімум досягається при $\beta = 0,41567$, а значення функції вартості $S(\beta) = 66365,5$.

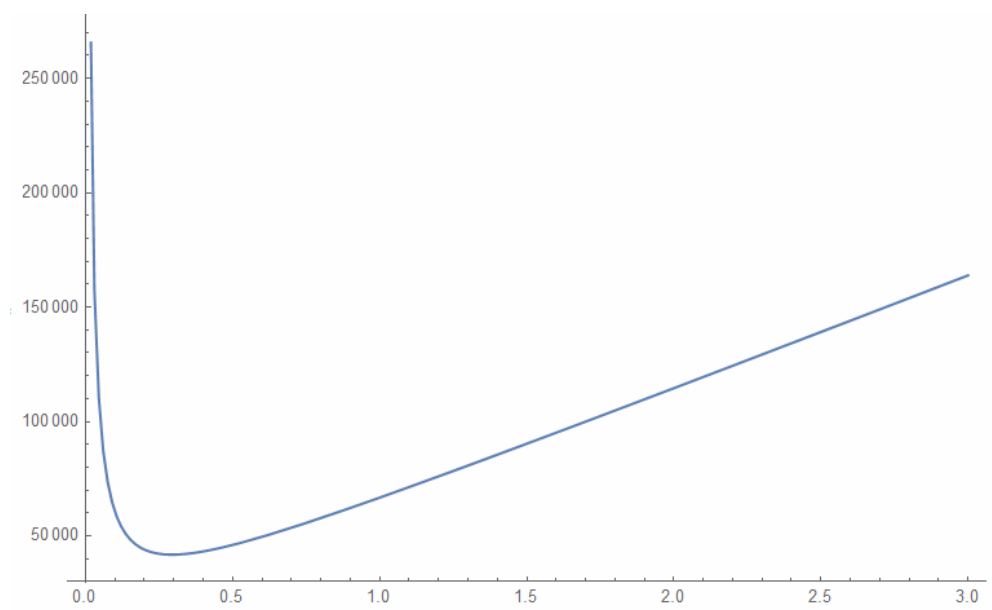


Рисунок 3.9 – Графік вартості при зміні параметра β для $n = 10$, $\varepsilon = 0.00001$

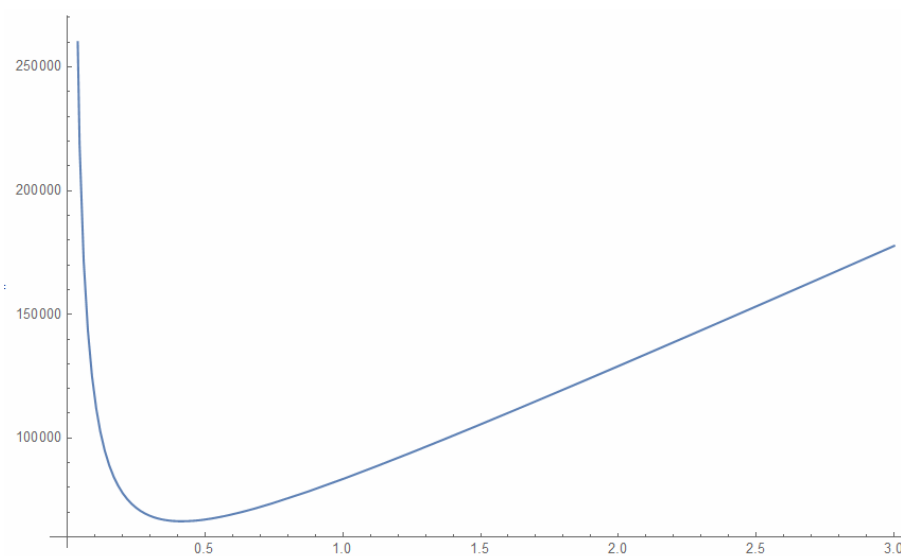


Рисунок 3.10 – Графік вартості при зміні параметра β для $n = 20$, $\varepsilon = 0.00001$

Для системи, графік вартості якої представлений на рис. 3.11, мінімум досягається при $\beta = 0,50909$, а значення функції вартості $S(\beta) = 88106,7$.

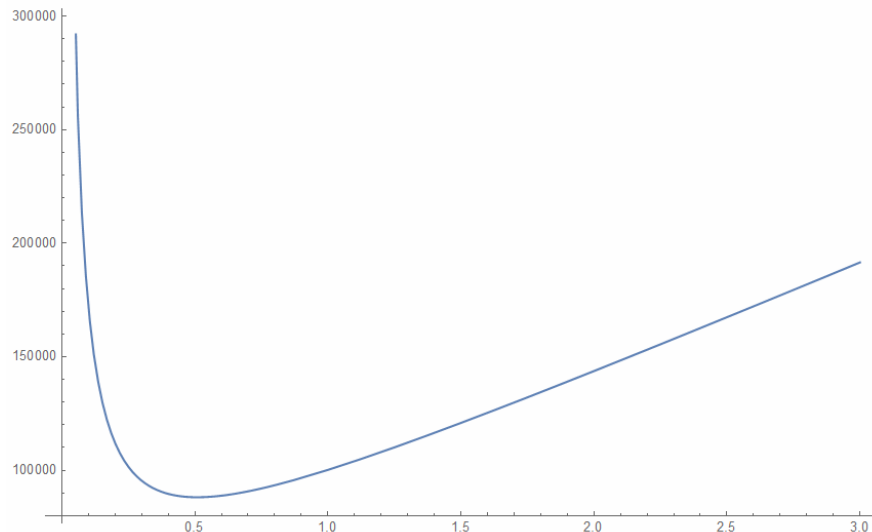


Рисунок 3.11 – Графік вартості при зміні параметра β для $n = 30$, $\varepsilon = 0.00001$

3.5 Система повністю сингулярних рівнянь як модель нелінійних нестационарних швидкодіючих технічних систем з захистом

Найчастіше, об'єкт із захистом має приблизно однакові, великі швидкості для обох типів внутрішніх змінних. Такими об'єктами є будь-які типи «активної броні», розглянуті в розділі 1, і дуже швидкі процеси в них, що відбуваються при підриві – спрацьовуванні захисту у відповідь на обстріл. Відзначимо, що блоки активної броні взаємопов'язані, і спрацьовують паралельно. А значить, моделлю може бути система не їх двох, а з $2n$ взаємопов'язаних рівнянь. Очевидно, єдиною нестійкою стаціонарною точкою моделі такого об'єкта є початкова точка фазового простору при $t = 0$. Провівши стандартним способом лінеаризацію в її околиці, отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon \vec{X}'_t = [A_0(t) + \varepsilon A_1(t)] \vec{X}, \quad (3.33)$$

де $\vec{X}(t, \varepsilon) = \left\{ \vec{u}^T; \vec{z}^T \right\}^T$ – вектор-стовпець, складений з величин, що

характеризують рівень шкідливих факторів та захисту; $\varepsilon > 0$; матриці A_0 і A_1 за замовчуванням, можуть залежати від часу t і визначаються первинними параметрами системи захисту.

У роботах [66, 87] отримані асимптотики для розв'язків системи (3.33) на підставі загальних теорем асимптотичної збіжності, доведених в [58]:

$$\vec{X}(t, \varepsilon) = \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\xi) d\xi \right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \vec{Z}_k(t), \quad (3.34)$$

де $\vec{Z}_k(t)$ – вектор-функції, що підлягають визначенню з рівнянь

$$(A_0 - \lambda E) \vec{Z}_0 = \vec{0}; \quad (A_0 - \lambda E) \vec{Z}_{k+1} = \vec{Z}_k^1 - A_1 \vec{Z}_k.$$

Як завжди в асимптотичних методах, оцінка для точності методу рівномірно по t неможлива, інакше як при $\varepsilon \rightarrow 0$. Виникає нетривіальне питання про адекватність такого розв'язку при кінцевих ε , як само як і питання - починаючи з яких значень параметра ε похибка не перевищить задану для технічних додатків ступінь похибки (зазвичай, 1–3%). Ці питання вирішені в розділі 4 шляхом багатьох чисельних експериментів.

3.6 Висновки по розділу

В даному розділі удосконалено обчислювальний метод асимптотичного розв'язку задач Коши з різними типами сингулярностей і нестационарністю параметрів керування, що дозволило аналітично отримати розв'язок сформульованої задачі для різних швидкостей шкідливого процесу і захисту. Отримано оцінки значень малого параметра збурення які забезпечують прийнятну для технічних розрахунків точність.

Для цього була досліджена система з двох диференціальних рівнянь з

малим параметром, що визначає поведінку системи захисту від шкідливих впливів з моменту їх виникнення. Був використаний асимптотичний метод побудови розв'язку для системи рівнянь і отримані нульові і перші члени ряду асимптотики з урахуванням «примежового шару». Даний підхід дозволив спростити побудову розв'язків для різних параметрів системи і тим самим спростив дослідження моделі.

Також запропоновані два варіанти обчислення функції вартості роботи системи з моменту її включення. Оскільки в загальному вигляді задача мінімізації даної функції виявилася нерозв'язною, було запропоновано мінімізувати функцію вартості всієї системи, тобто вартості покупки системи і вартості обслуговування системи протягом усього часу роботи. Даний підхід дозволив мінімізувати вартість системи захисту для певного фактора забруднення і отримати оцінку мінімальної середньої вартості всієї системи.

Результати застосовні на практиці, якщо правильно вибрати функцію вартості покупки системи. У даній роботі була запропонована модельна функція, яка задовольняла умовам завдання, і відображала фізичний зміст моделі системи ЖКГ, наведеної в розділі 1 та Додатку Б.

Матеріали даного розділу опубліковані в роботах [32–35, 37, 38].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [11, 32–35, 37, 38, 44, 61, 62, 66, 87].

4 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ШВИДКОДЮЧИХ СИСТЕМ З ЗАХИСТОМ

Фактор наявності мінливих в часі параметрів системи і взаємних впливів шкідливих умов і захисних факторів істотно ускладнює завдання дослідження систем з захистом. Із загальної задачі аналізу неоднорідних систем виділимо підзавдання, вирішенню яких присвячена ця глава. Для кожної з них необхідна побудова асимптотичного методу. Відзначимо, що навіть після лінеаризації в околиці точок спокою, розглянутих в розділі 1, розв'язки відповідних $2n$ мірних систем зі змінними коефіцієнтами є нетривіальним завданням [58, 66, 87].

4.1 Лінеаризовані рівняння і алгоритм асимптотичного методу

4.1.1 Особливості застосування асимптотичних методів для повністю сингулярних задач

Передавальна матриця W (матрична передавальна функція) $2n$ – мірної системи в кінцевий момент часу $t=T$ визначається співвідношенням

$$\vec{X}_{вих}(w) = W(w) \vec{X}_{вход}(w), \quad (4.1)$$

де w – «великий» параметр, зворотний до ϵ .

Воно справедливо для всіх можливих векторів $\vec{X}_{вход}$. W є матриціантом системи рівнянь (3.33), яку перепишемо в наступному вигляді:

$$\epsilon X_t' = [A_0(t) + \epsilon A_1(t)] \vec{X}, \quad (4.2)$$

$$\text{де} \quad \vec{X}(t, w) = \left\{ \vec{U}^T; \vec{I}^T \right\}^T \quad (4.3)$$

є вектор-стовпець, складений з величин, що характеризують рівень шкідливих факторів та захисту; $\varepsilon = 1/w$; матриці A_0 і A_1 є довільними досить гладкими функціями часу t і визначаються первинними параметрами системи захисту. Вони мають блоковий вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

4.1.2 Обчислювальний алгоритм методу

У підрозділах 4.2 та 4.3 описаний метод асимптотичного інтегрування системи (4.2), обчислювальна процедура якого істотно залежить від властивостей спектра матриці A_0 . Кожному власному значенню матриці A_0 відповідає розв'язок системи (4.2), який будемо шукати у вигляді, ряду

$$\vec{X}(t, \varepsilon) = \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\xi) d\xi \right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \vec{Z}_k(t), \quad (4.5)$$

де $\vec{Z}_k(t)$ – вектор-функції, що підлягають визначенню.

Надалі, якщо не вказано інше, всі параметри і вектора довільно гладко залежать від часу. Для цього слід підставити (4.5) в (4.2) і прирівняти коефіцієнти при однакових ступенях ε в результаті отримаємо

$$(A_0 - \lambda E) \vec{Z}_0 = \vec{0}; \quad (A_0 - \lambda E) \vec{Z}_{k+1} = \vec{Z}_k^1 - A_1 \vec{Z}_k, \quad (4.6)$$

де E – одинична матриця;

\vec{Z}_0 – власний вектор;

λ – відповідне йому власне значення матриці A_0 .

Відзначимо, що для визначення всіх \vec{Z}_k з (4.6) необхідно вимагати, щоб $A_0(t)$ і $A_1(t)$ були нескінченно диференційовними. Якщо число гладких похідних від цих матриць звичайно, то можна записати відповідне кінцеве число членів ряду (4.5).

У розділі 4.3 буде показано, що розв'язання рівняння (4.2) асимптотичним методом (4.5) має істотні переваги по швидкодії і точності в порівнянні з відомими чисельними методами. Використовуваний тут метод простіший, ніж асимптотичний метод, описаний в роботах [58, 82, 84], і в ряді випадків дозволяє провести аналіз динаміки захисту в аналітичному вигляді.

Нехай матриця A_0 діагоналізуєма, і, отже, має повний набір лінійно незалежних власних векторів. Отже, система рішень (4.6) фундаментальна. За визначенням [51, 105] матриціанта W , маємо:

$$W(t, w) = X(t, \varepsilon) \cdot X^{-1}(0, \varepsilon), \quad (4.7)$$

де $X(t, \varepsilon)$ – матриця, стовпцями якої є розв'язок (4.5).

В роботах [58, 82] доведена асимптотична збіжність рядів (4.5) до рішень системи (4.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($w \rightarrow \infty$), рівномірно по t на будь-якому кінцевому відрізку часу $[0; \ell]$.

З асимптотичної збіжності рядів (4.5) слід асимптотичне уявлення передавальної матриці системи

$$W(t, w) = X(k, t, \varepsilon) \cdot X^{-1}(k, 0, \varepsilon) + o(\varepsilon^{k+1}), \quad (4.8)$$

де $X(k, t, \varepsilon)$ – матриця, складена з скінчених сум k членів рядів (4.5).

Таким чином, завдання знаходження $W(t,w)$ зводиться до обчислення потрібного числа \vec{Z}_k з (4.6). Зупинимося на цьому питанні більш детально.

4.2 Алгоритм розв'язку для різних випадків спектра матриці A_0

4.2.1 Розв'язок для простого спектра матриці A_0

Розглянемо спочатку випадки простого спектра матриці A_0 [66]. Для кожного з λ будемо шукати \vec{Z}_0 у вигляді

$$\vec{Z}_0(t) = Y_0(t) \cdot \vec{U}(t), \quad (4.9)$$

де Y_0 – скалярна функція;

\vec{U} – один з власних векторів A_0 , відповідних даному λ .

Для знаходження \vec{Z}_{k+1} необхідно вирішити друге з матричних рівнянь (4.6). Оскільки матриця $(A-\lambda E)$ одноразово виродилася, для розв'язання цього рівняння необхідна ортогональність його правої частини власному вектору \vec{Y} , відповідному власному числу λ матриці A_0^* . Відзначимо, що для матриць A_0 виду (4.4) $\bar{\lambda}(t) \equiv \lambda(t)$ – дійсна функція [48], і $A_0^* = A_0^T$. Ця умова ортогональності здійснена, оскільки рівняння (4.7) на попередньому, $(k-1)$ -м кроці вирішується неоднозначно

$$\vec{Z}_k = \vec{Z}_k^0 + Y_k \vec{Z}_0, \quad (4.10)$$

де \vec{Z}_k^0 – частковий розв'язок рівняння (4.6),

$Y_k(t)$ – скалярна функція, яка визначається з рівняння

$$Y_k'(\vec{Z}_0, \vec{Y}) = -\left(\left[\vec{Z}_k^{01} - A_1 \vec{Z}_k^0\right], \vec{Y}\right). \quad (4.11)$$

Рівняння (4.11) отримано з умови можливості розв'язання системи (4.6) на k -ом кроці ($k > 0$). Для випадку $k=0$ з тих же міркувань отримуємо рівняння

$$Y_0'(\vec{U}, \vec{Y}) + Y_0\left(\left[\vec{U}' - A_1 \vec{U}\right], \vec{Y}\right) = 0, \quad (4.12)$$

яке легко інтегрується в кінцевому вигляді.

Таким чином, знаходження $\vec{Z}_k(t)$ з (4.6) зводиться до розв'язання лінійних алгебраїчних систем і диференціального рівняння (4.12), а також до обчислення квадратур (4.11). У підрозділі 4.3 детально розроблений обчислювальний алгоритм цього методу.

4.2.2 Розв'язок для кратного спектра матриці A_0

Перейдемо до розгляду випадку, коли власне значення $\lambda(x)$ матриці $A_0(t)$ має постійну кратність p ($1 < p < n$) на відрізку $[0; \ell]$.

Існує [49] система лінійно незалежних векторів $\{\vec{U}_i(t)\}_{i=1}^p$ яка є базисом ядра оператора $(A_0 - \lambda E)$. $\vec{Z}_0(t)$ будемо шукати у вигляді їх лінійної комбінації

$$\vec{Z}_0 = \sum_{i=1}^n C_i \vec{U}_i, \quad (4.13)$$

де $C_i = C_i(t)$ – скалярні функції.

Для знаходження $\vec{Z}_{k+1}(t)$ вирішуємо друге з рівнянь (4.6), матриця якого p -кратно виродилася. Для цього, аналогічно 4.2.1, підбираємо \vec{Z}_k на попередньому кроці так, щоб система (4.6) мала розв'язок на $(k + 1)$ -м кроці.

Виберемо базис

$$\{U_i(t)\}_{i=1}^p, \quad (4.14)$$

ядра оператора $(A^T - \lambda E)$ біортогональних базису $\{U_i\}$ [66].

Використовуючи альтернативу Фредгольма для алгебраїчних систем [51], отримаємо достатні умови можливості розв'язання системи (4.6) при $k = 0$.

$$\left([\bar{Z}_0^1 - A_1 \bar{Z}_0], \bar{U}_j \right) = 0; j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.15)$$

З огляду на (4.14) отримаємо лінійну систему з $p \leq n$ диференціальних рівнянь першого порядку.

$$C(t) = -C(t) \left([\bar{U}(t) - A(t)\bar{U}(t)], \bar{U}(t) \right). \quad (4.16)$$

Вона має p лінійно незалежних рішень $\bar{C}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, p$), яким відповідають лінійно незалежні вектори $\bar{Z}_{oi}(t)$. Подальші побудови аналогічні для кожного з них, тому індекс i , де це можливо, будемо опускати.

Для знаходження $\bar{Z}_k(x)$ при $k > 0$ предположил, что предыдущие векторы \bar{Z}_i , ($i = 0, \dots, k-1$) відомі, і представимо його у вигляді

$$\bar{Z}_k = \bar{Z}_k^0 + \sum_{i=1}^p a_{ki} \cdot \bar{Z}_{oi}, \quad (4.17)$$

де a_{ki} – невідомі скалярні функції,

\bar{Z}_k^0 – якийсь частковий розв'язок системи (4.7) на $(k-1)$ -му кроці.

Введемо систему векторів $\{\bar{Y}_i(t)\}_{i=1}^p$ – новий базис ядра оператора $(A^T - \lambda E)$, біортогональний системі $\{\bar{Z}_{oi}\}_{i=1}^p$. Щоб \bar{Z}_k задовольняв системі (4.5) досить, як і раніше, вимагати виконання умов ортогональності

$$\left(\left[\vec{Z}_k' - A_1 \vec{Z}_k \right], \vec{Y}_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.18)$$

З огляду на (4.17) отримаємо

$$a_{kj} = -\int \left(\left[\vec{Z}_k^{01} - A_1 \vec{Z}_k^0 \right], \vec{Y}_j \right) d\xi, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.19)$$

Таким чином, процедура відшукування $\vec{Z}_k(t)$ зводиться до лінійної алгебри для \vec{Z}_k^0 , обчислення квадратур (4.19) і розв'язку системи диференціальних рівнянь (4.16), розмірності меншою, ніж вихідна система (4.2). Відзначимо також, що система (4.16) не залежить від параметра ε . Випадки, коли система (4.16) розпадається на незв'язані рівняння, розглянуті в роботах [51, 58].

Дотримуючись термінології робіт [58, 82], розв'язки системи (4.2), що допускають асимптотичні розкладання 4.6, рівномірні по t на $[0; \ell]$, будемо називати ВКБ-розв'язками, часткову суму ряду (4.5) – ВКБ-наближеннями, а всю процедуру, описану в (4.1), будемо називати ВКБ-процедурою.

Оскільки передавальна матриця системи є одним із способів завдання її математичної моделі [85], назвемо асимптотичне уявлення (4.8) для передавальної матриці асимптотичною моделлю (або ВКБ-моделлю) неоднорідною лінеаризованою багатовимірною системою з захистом, швидкості всіх фазових змінних якої однаково великі.

4.2.3 Система із захистом як система управління

В даному підрозділі система із захистом розглядається як система управління. Її передавальна матриця за рівнем шкідливого фактора отримана в попередньому підрозділі.

Якщо систему за скінчений час T можна перевести з будь якого заданого початкового стану в будь який бажаний, то така система називається цілком керованою [70], а якщо початкову умову можна відновити за спостереженнями деякої лінійної комбінації виходів, то вона називається цілком спостерігаємою [70]. Зазначені поняття природно перенести на систему з захистом, що описується рівнянням (4.2).

4.3 Визначення похибки асимптотичного методу за допомогою чисельного експерименту

4.3.1 Характер часової залежності параметрів системи

Як зазначалося у вступі, для з'ясування застосовності асимптотичного методу до розрахунку динаміки сингулярних систем з захистом і для оцінки похибки методу необхідна перевірка швидкості асимптотичної збіжності з різними типами змінних параметрів, які в подальшому будемо називати «неоднорідностями». Як полігони для випробування методу обрані однорідні і експоненціальні за часом системи які допускають точне розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь (1.2), а також системи, зміни параметрів яких за часом описується однією з формул (далі – тип 1 і тип 2):

$$G(t) = g_0(1 + \lambda t); \quad (4.20)$$

$$G(t) = g_0 \left(1 + \lambda \exp \left(d (t - b)^{-2} \right) \right), \quad (4.21)$$

або їх комбінацією. Тут $g_0, \lambda, d, b - \text{const}$.

Відзначимо, що зазначені неоднорідності – тимчасові залежності параметрів – досить характерні. Неоднорідності виду (4.21) будемо називати "гауссовським".

У ряді (4.6) для розв'язку $\vec{X}(t, w)$ обмежимося першими двома членами \vec{Z}_0 і \vec{Z}_1 . Скрізь в цьому розділі будуть розглядатися системи з двома підсистемами – що продукують шкідливість і захист. Пакет Maxima дозволяє обчислити відносну похибку для рівнів шкідливості і захисту

$$\Delta_u = \frac{|u - u_T|}{|u_T|}, \quad \Delta_z = \frac{|z - z_T|}{|z_T|}, \quad (4.22)$$

а також похибки модулів цього двовимірного вектора

$$\Delta M = \frac{|X| - |X_T|}{|X_T|}. \quad (4.23)$$

Тут нижнім індексом "Т" позначені точні розв'язки, а індексом "Р" будуть позначатися розв'язки методом Рунге-Кутта в аналогічних формулах.

4.3.2 Обчислювальний експеримент для системи з постійними параметрами

В якості вихідних даних для машинного експерименту обрані набори параметрів систем, в подальшому позначаються для стислості 1 і 2.

Спочатку розглянемо випадок однорідної системи. Точний розв'язок отримано аналітичним методом (див., наприклад, [105]).

$$U_T = e^{-\gamma t}. \quad (4.24)$$

Для того, щоб неточність прив'язки до початкових умов не впливала на оцінку похибки методу, з безлічі можливих рядів виду (4.4) виберемо той, значення якого в точці є асимптотичним розкладанням розв'язку (4.24) на

початку $t=0$. Відзначимо, що при цьому не обов'язковим є розкладанням розв'язку (4.24) в точках $t \neq 0$. (см. з цього приводу зауваження в підрозділі 4.1). Тут, як і раніше, для розрахунків обмежимося першими двома членами ряду (4.4). Тоді для вибору початкових умов досить довести наступне твердження.

Твердження 4.1.

Для однорідної системи з захистом сума перших двох членів ряду виду (4.5) при $t = 0$ є асимптотическим поданням вектора $(1; 1/Z_b)$, якщо в формулах (4.4), (4.5) и (4.6)

$$\lambda = -\sqrt{LC} ; h_1 = 1 ; h_2 = \sqrt{C/L} ; \bar{Z}_i^0 = \{O, H_i(x)\}^T , i \geq 1$$

Доведення.

Затвердження очевидно для першої компоненти векторного ряду для (4.4), яка при $t = 0$ дорівнює 1. Другий компонент являє собою асимптотический ряд по $\varepsilon = 1/j\omega$

$$\sqrt{C/L} + H_1(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Коефіцієнт $H_1(0)$ знайдемо з рівняння (4.5) $\sqrt{LC} \cdot H_1(0) = \bar{Z}'_0(0) + G$.

Звідси отримаємо $H_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{GL - RC}{L^2}$.

Розкладаючи в степеневий ряд по ε , встановлюємо, що

$$\frac{1}{Z_b} = \sqrt{\frac{C + \varepsilon G}{L + \varepsilon R}} = \sqrt{\frac{C}{L}} + \varepsilon \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{GL - RC}{L^2} + O(\varepsilon^2).$$

Коефіцієнти при ступенях ε збігаються, що й треба було довести.

Відзначимо, що в дійсності справедливо більш загальне твердження, яке тут, однак, не використовується: ряд (3.33) є асимптотичним розкладанням початкових умов розв'язку (4.24) при розмірності системи $n=2$ [58].

Результати розрахунку похибки моделі для однорідних систем зведені в таблицю 4.1. відносні похибки Δ_u , Δ_z , ΔM у всіх наступних таблицях вказані в %. Для наочності таблиць і в цілях економії місця збережені лише дві значущі цифри мантиси з шести, виданих комп'ютером, що цілком достатньо для технічних додатків.

Таблиця 4.1 – Похибки моделі для однорідних систем

тип	$\omega \times 10^3$	Похибки асимптотичного методу					
		Відносна, %				Абсолютна	
		Δ_u	Δ_z	ΔM_u	ΔM_z	$\Delta \Phi_u$	$\Delta \Phi_z$
1	30	0,42	1,8	-0,41	1,7	$0,78 \cdot 10^{-3}$	$-0,20 \cdot 10^{-2}$
	60	0,23	0,66	-0,23	0,66	$0,29 \cdot 10^{-3}$	$-0,55 \cdot 10^{-2}$
	100	0,18	0,33	-0,18	0,33	$0,18 \cdot 10^{-3}$	$-0,25 \cdot 10^{-2}$
2	30	0,44	1,7	-0,43	1,7	$0,82 \cdot 10^{-3}$	$-0,20 \cdot 10^{-2}$
	60	0,24	0,63	-0,24	0,63	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$-0,56 \cdot 10^{-2}$
	100	0,19	0,32	-0,19	0,32	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$-0,28 \cdot 10^{-2}$

У різних джерелах [41, 43, 44], для різних цілей задовільною вважається похибка від 1 до 10 відсотків. Тут ми будемо вважати задовільною відносну похибку Δ_u і Δ_z в 1 відсоток. З таблиці 4.1 видно, що асимптотичний метод досить точний, починаючи з $\varepsilon = 10^{-3}$.

В таблиці 4. 2 наведено розподіл похибок асимптотичного методу за часом. В однорідних системах похибка практично не змінюється з ростом t . Для неоднорідних систем, як буде показано нижче, похибка може рости або зменшуватися з ростом t або коливатися в залежності від характеру неоднорідності.

Деяке зростання похибки за рівнем шкідливості і спадання щодо захисту в однорідній системі пояснюється тим, що в точці $t=0$ обчислене асимптотическим

методом значення шкідливості, точно збігається з $u_m(0)$, а $z(0)$ відрізняється від $z_m(0)$ на величину $O(\omega^2)$. З ростом t похибки "перерозподіляються".

Таблиця 4.2 – Розподіл похибок асимптотичного методу за часом

Годин а	Похибки	
	$\Delta_u, \%$	$\Delta_z, \%$
1	$0,55 \cdot 10^{-1}$	1,1
2	0,11	0,96
3	0,15	0,85
4	0,19	0,75
5	0,23	0,66
6	0,27	0,57
7	0,30	0,48
8	0,32	0,40
9	0,34	0,32
10	0,36	0,24

4.3.3 Оцінка похибки методу на прикладі системи з експоненційною залежністю параметрів від часу

Розглянемо тепер похибку методу при розрахунку експоненційної за часом системи захисту. Параметри R_0, G_0, L_0, C_0 в точці $t=0$ взято такі, як і для однорідної системи, розглянутої вище. З тих же міркувань обрані і граничні умови, що дозволяють уникнути додаткової похибки. Для експоненційної системи справедливим є твердження, повністю аналогічне твердженням 4.1. Розподіл неоднорідностей такий:

$$R(t) = R_0 e^{\lambda t}, G(t) = G_0 e^{-\lambda t}, L(t) = L_0 e^{\lambda t}, C(t) = C_0 e^{-\lambda t}, \lambda = 0,1. \quad (4.25)$$

Використовуємо (див; наприклад, статтю [16]) точний розв'язок системи (4.2) для експоненційної системи, який має вигляд:

$$u_T = \exp\left[\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right)t\right],$$

$$z_T = -\frac{\lambda/2 - \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2/4}}{R_0 + L_0/\varepsilon} \exp\left[-(\lambda/2 + \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2/4})t\right]. \quad (4.26)$$

Найгірший, з точки зору величини похибки методу, випадок буде мати місце, коли обидва розв'язки будуть нестійкі $\left(u_T^\pm \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty\right)$. Це відбувається, як випливає з (4.26), якщо ω обрана так, що

$$\sqrt{\gamma^2 + \lambda^2/4} < \lambda/2. \quad (4.27)$$

Таблиця 4.3 – Відносна похибка по шкідливості (Δ_u , %) і захисту (Δ_z , %) для експоненціальної зміни параметрів

$\omega \times 10^3$	Час в годинах					
		1	3	5	7	9
30	Δ_u	9,4	25	43	64	86
	Δ_z	452	484	507	532	557
60	Δ_u	4,6	14	23	32	42
	Δ_z	54	59	64	70	77
100	Δ_u	0,11	0,32	0,53	0,74	0,95
	Δ_z	0,19	0,35	0,55	0,75	0,96

Це нерівність виконується для досить широкого класу систем. Наприклад, для $R_0=0$ нерівність (4.27) виконується завжди. При цьому похибка

асимптотичного методу для $\omega=30000$ досягає 500 і більше відсотків; однак, як видно з таблиці 4.3, вона швидко убуває при $\omega \rightarrow \infty$ в повній відповідності з теорією.

Якщо нерівність (4.27) не виконується, як, наприклад, це має місце для системи (4.2) з експоненційною неоднорідністю типу (4.25), то відповідна похибка значно менше (табл. 4.4).

Таблиця 4.4 – Системи, для яких не виконується умова (4.27)

$\omega \times 10^3$	Час в годинах.					
		1	3	5	7	9
30	Δ_u	0,31	0,91	1,5	2,1	2,7
	Δ_z	4,06	3,63	3,34	3,21	3,27
60	Δ_u	0,16	0,46	0,76	1,1	1,3
	Δ_z	1,49	1,36	1,26	1,28	1,41
100	Δ_u	0,099	0,29	0,48	0,66	0,83
	Δ_z	0,88	0,74	0,66	0,69	0,79

Перш ніж перейти до чисельних експериментів по визначенню похибки асимптотичної моделі для систем, характер неоднорідностей яких не дозволяє точно вирішити вихідну узагальнену систему рівнянь, визначимо похибку чисельного методу Рунге-Кутта, з яким асимптотичний розв'язок згодом буде порівнюватися. Вибір для цієї мети методу Рунге Кутта четвертого порядку [63] замість методу Адамса обумовлений його високою точністю і достатньою простотою аналізу, а також наявністю стандартної підпрограми [67] з автоматичним вибором кроку інтегрування. До його переваг перед методами прогнозу і корекції слід віднести також і те, що його час рахунку росте не так швидко з ростом абсолютної величини правої частини. Для розв'язання системи (4.2) це особливо важливо, тому що модуль правої частини є $O(\omega)$.

Досліджуємо похибку на прикладі експоненційних систем розглянутих раніше (див. табл. 4.3, 4.4). Метод Рунге-Кутта є методом поширення початкових умов. Через нестійкості задачі Коші для системи (4.2), помилка методу може бути велика, незважаючи на малу похибку на одному кроці (10^{-6}). З формул (4.26) для точного розв'язку видно, що ця похибка повинна рости приблизно експоненціально зі збільшенням часу, що підтверджується результатами машинного експерименту з табл. 4.5.

З результату чисельного експерименту випливає, що розв'язки системи (4.2) за методом Рунге-Кутта може бути вибрано в якості "зразка" для визначення похибки в діапазоні $\omega = 30-100 \times 10^3$ при $t \leq 10$, а в діапазоні до 400000 – при $t \leq 1$ години. При $400000 < \omega \leq 900000$ його похибка порівнянна з похибкою асимптотичного методу вже для $t = 1$ година, а при $t \geq 2$ – значно її перевершує (див. табл. 4.3, 4.4).

Слід відзначити суттєве зростання похибки методу Рунге-Кутта з ω , що пояснюється приблизно лінійним [67] збільшенням числа необхідних кроків при $t \rightarrow \infty$. Таким чином, асимптотичний метод забезпечує особливо високу точність саме в тому діапазоні ω , де чисельний метод не застосуємо.

Таблиця 4.5. – Відносна похибка методу Рунге-Кутта з шкідливості (Δ_u , %) і захисту (Δ_z , %) для експоненціальної зміни параметрів системи

$\omega \times 10^3$	Час в годинах.					
		1	3	5	7	9
30	Δ_u	$0,73 \cdot 10^{-2}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$0,10 \cdot 10^{-2}$	$0,10 \cdot 10^{-2}$	$0,37 \cdot 10^{-2}$
	Δ_i	$0,88 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,72 \cdot 10^{-3}$
60	Δ_u	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,20 \cdot 10^{-2}$	$0,34 \cdot 10^{-2}$	$0,52 \cdot 10^{-2}$	$0,70 \cdot 10^{-2}$
	Δ_i	$0,65 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,14 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-2}$
100	Δ_u	$0,23 \cdot 10^{-2}$	$0,53 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-1}$	$0,26 \cdot 10^{-1}$
	Δ_i	$0,16 \cdot 10^{-2}$	$0,55 \cdot 10^{-2}$	$0,93 \cdot 10^{-2}$	$0,1 \cdot 10^{-1}$	$0,16 \cdot 10^{-1}$

4.3.4 Чисельний експеримент для систем, які не мають розв'язків в замкнутому вигляді

Перейдемо тепер до чисельних експериментів для систем з тимчасовими неоднорідностями виду (4.20) і (4.21). Асимптотичні наближення для рішень будемо порівнювати з розв'язками по методу Рунге-Кутта, задовольняючи при цьому всім вимогам попереднього пункту. Для експерименту взяті первинні параметри (4.28). Залежність параметрів від часу визначається функцією

$$\begin{aligned}\psi(t) &= kt + \exp\left[-\lambda(t-b)^2\right], \\ R &= R_0[1 + 0.1\psi(t)]; \quad G = G_0[1 + 0.1\psi(t)]; \\ L &= L_0[1 + 0.5\psi(t)]; \quad C = C_0[1 + 0.5\psi(t)].\end{aligned}\quad (4.28)$$

Дані з таблиці 4.6 дозволяють стверджувати, що для цього закону розподілу неоднорідностей зменшення похибки з ростом ω аналогічно тому, яке спостерігалось раніше для неоднорідних і експоненційних систем (див. табл. 4.1, 4.2, 2,3 и 4.4).

Таблиця 4.6. – Похибки за рівнем шкідливості і захисту в %

Тип системи захисту	Похибка	$\omega \times 10^3$			
		12	30	60	100
1	Δ_u	8,2	3,0	1,9	0,3
	Δ_z	0,09	2,2	3,5	1,0
2	Δ_u	8,4	3,1	1,5	0,26
	Δ_z	2,8	2,3	0,17	0,07
3	Δ_u	2,4	1,6	0,48	0,1
	Δ_z	2,9	2,4	2,0	0,8

4.3.5 Поліпшення асимптотичної збіжності рішень для моделі нелінійних нестационарних швидкодіючих технічних систем

Як випливає з таблиць 4.5–4.6, прийнятна для практики точність розв’язку рівнянь моделі (4.2) в 1-2% досягається при $\varepsilon < 10^{-3}$. За допомогою дрібно раціональної апроксимації зазвичай вдається збільшити це значення малого параметра, розширивши тим самим область практичного застосування методу.

Відомо, що Паде–апроксимант [48, 56] функції, заданої степеневим рядом називається така дрібно-раціональна функція виду

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m},$$

чис розкладання в степеневий ряд збігається зі степеневим рядом

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

з точністю до коефіцієнта при x^{l+m} .

Це означає що в загальному випадку коефіцієнти Тейлеровського розкладання функції $Q(x)$ при ступенях $1, x, x^2, \dots, x^{l+m}$ повинні збігатися з відповідними коефіцієнтами ряду функції $f(x)$.

Тобто повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} + O(x^{l+m+1}).$$

Паде-апроксимант задається значенням функції в заданій точці і значеннями її похідних в цій же точці. Ця ж інформація може послужити основою для степеневого ряду. Головна відмінність в тому, що задавши $m+l+1$ член степеневого ряду, ми відкидаємо інші члени ряду прирівнюючи їх до нуля. Паде-апроксимант не є поліномом, тому задавши $m+l+1$ членів розкладання Паде-апроксимант в степеневий ряд, ми в неявній формі задаємо і інші члени [76].

При цьому слід зазначити що обнулення членів ряду дає неоднозначні результати. В одних випадках це дозволяє побудувати більш точну апроксимацію в інших – навпаки може погіршити апроксимацію. Немає способу, крім чисельного експерименту, який дозволив би сказати, наскільки точною виявиться Паде-апроксимація і в якій околиці і з якою точністю можна однозначно отримати задовільний результат [50].

Скориставшись співвідношенням $\bar{Z}_{k+1} = \bar{Z}_{k+1}^0 + \phi_{k+1} \bar{Z}_0$, обчислимо \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 по викладеному вище алгоритму. Обчисливши вектор-функції і склавши з них як з стовпців матриці Z_i наближень фундаментального розв'язку, отримали матричний ряд такого виду

$$Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2.$$

Подальше обчислення функцій Z_i веде до великих обчислювальних витрат, не збільшуючи точність, що характерно для асимптотичних методів, сенс застосуємо апарат апроксимації Паде для продовження розв'язків на більш великі значення ε . Для цього побудуємо Паде-апроксимації матричного ряду:

$$P(t, \varepsilon) \cdot Q^{-1}(t, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + O(\varepsilon^3).$$

Перепишемо це співвідношення у вигляді:

$$P_0(t) + \varepsilon P_1(t) = (Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2)(E + \varepsilon Q_1(t)).$$

$$P_0(t) = Z_0(t); P_1(t) = Z_0(t)Q_1(t) + Z_1(t).$$

Побудуємо тепер рівняння для $Q_1(t)$: $Z_1 Q_1 + Z_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -Z_1^{-1} Z_2$.

Замінімо вихідний асимптотический ряд на його раціональну Паде-апроксимацію. Як показали розрахунки, аналогічні наведеним у табл. 4.6 для неоднорідностей виду (4.28), така заміна дозволила побудувати задовільну асимптотику розв'язку вихідної системи за допомогою всього лише 3 членів ряду вже при $\varepsilon = 10^{-2}$.

4.4 Неавтономна регулярна модель із збуренням правої частини

4.4.1 Проблеми в регулярних системах із захистом

Ефект хаотизації рухів в детермінованих нелінійних системах, ще зовсім недавно здавався просто неймовірним в рамках традиційних стереотипів класичної механіки і теорії коливань, зараз вже подається як науково обгрунтоване явище фундаментальної значущості. Інтерес до цієї тематики не тільки не слабшає, але продовжує наростати, про що свідчить потік наукової інформації, що збільшується, у вигляді наукових статей [81], зокрема, в роботі [91] наведено теоретичне обгрунтування результатів розрахунку по розглянутій нижче моделі 1. У доповідях [35] і [36] показані можливі сценарії переходу до хаотичного руху в таких екологічних системах через біфуркації. Модель Вольтерра і її узагальнення широко використовується, наприклад, в монографії [4] з біології та дисертації [63], роботах по екології [68] і економіці, де, зокрема, показано, що після незначної модифікації трофічної функції, модель адекватно описує взаємовідношення секторів виробництва і поставок. Оскільки модель описує негативну нелінійну зворотний зв'язок, вона добре уявляє деякі системи з захистом від шкідливих техногенних впливів в ергатичних системах.

Теорія передбачає, що при наявності певних типів зовнішніх впливів з боку середовища на таку систему, її стійкість може порушуватися, і рух набуває квазі-випадкового вигляду [81, 102].

4.4.2 Математичний опис і модель об'єкта

Розглядається замкнута система з двох об'єктів:

а) «об'єкт захисту» – у відсутності підсистеми захисту може генерувати шкідливий чинник необмежено;

б) «захист» – дія визначається величиною шкідливого фактора.

Обидві змінні досить великі, і змінюються гладко в часі.

Тож базова модель Вольтерра – спільної роботи об'єкта і захисту:

$$\begin{aligned} dx / dt &= rx - \gamma_1 xy; \\ dy / dt &= -sy + \gamma_2 xy. \end{aligned} \quad (4.29)$$

де r, s, γ_1, γ_2 – позитивні константи – мальтузіанські і трофічні коефіцієнти, відповідно;

x – інтенсивність шкідливого фактора;

y – інтенсивність роботи захисту; $x, y \gg 1$.

Первісна автономна система (4.29) порушується малими, в порівнянні з іншими параметрами, періодичним коливанням одного або обох внутрішніх цієї системи.

4.4.3 Аналіз і перетворення моделі

Нетривіальний стан рівноваги моделі (4.29) $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ має координати

$$x_* = s / \gamma_2, \quad y_* = r / \gamma_1.$$

За допомогою заміни змінних $x := x - x_*, y := y - y_*$ система (4.29) перетвориться до виду:

$$\dot{x} = -\gamma_1(x_* \cdot y + x \cdot y), \quad \dot{y} = \gamma_2(y_* \cdot x + x \cdot y). \quad (4.30)$$

Її динаміку в околиці нової точки рівноваги (0,0) досліджуємо аналітично. Для цього ділимо друге рівняння з (4.30) на перше і отримуємо рівняння першого порядку з відокремленими змінними.

Потенціюємо і позначимо: $\exp(C_0) = C$, Θ_1 і Θ_2 – однотипні функції змінних x і y .

Відповідно, отримаємо:

$$\Theta(x, y) = \Theta_1(x) \cdot \Theta_2(y) = \frac{e^{x/\gamma_1} e^{y/\gamma_2}}{[\gamma_1(x + x_*)]^{x_*/\gamma_1} [\gamma_2(y + y_*)]^{y_*/\gamma_2}} = C$$

загальний інтеграл системи (4.30). Він являє розв'язки $x(t)$, $y(t)$ як неявну функцію. Він постійний на кожному розв'язку системи (4.30), а значить, є, за визначенням, її першим інтегралом [61]. Прямим диференціюванням функцій Θ_1 і Θ_2 перевіряємо, що в точці (x_*, y_*) вони мають локальний ізольований максимум. А значить, і їх добуток - функція $\Theta(x, y)$ – теж. У всіх додатках цікаві, в основному, фінитні рухи, зокрема, періодичні, оскільки тільки вони мають фізичний зміст. Для їх виявлення в даній системі спочатку досліджуємо розв'язки (4.30). При $x_0 > -x_*$, $y_0 > -y_*$ розв'язки періодичні, оскільки функція $\Theta(x, y)$ має максимум в (x_*, y_*) і, значить, фазові траєкторії системи замкнуті (крім стаціонарної точки $x = 0$, $y = 0$), тобто належать на XU її лініям рівня, що не містить інших стаціонарів. Вирішуючи задачу Коші, отримаємо графіки періодичних рішень і фазовий портрет систем (4.29), (4.30).

Проблема полягає в дослідженні поведінки системи, яка характеризується близькістю періоду T циклів незбуреної системи і періоду збурення $(1/\Omega)$.

Тут m і Ω – біфуркаційні параметри всіх часткових моделей, отриманих з базової (4.29, 4.30). Поведінка моделей досліджується далеко від початку: $t \gg 0$.

У всіх випадках синусоїдального збурення базової моделі для чисельного аналізу задачі Коші типу (4.29), відповідні моделі наводяться до форми:

$$Z' = f(Z, m, \Omega, t), \quad (4.31)$$

де $f(Z, m, \Omega, t) = F(Z) + P(m, \Omega, t)$, $Z^T = (x(t), y(t))$, при початкових умовах $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ для кожної траєкторії.

Тут автономний доданок вектора правої частини системи (4.31) для всіх моделей однаковий і має вигляд:

$$F(Z) = \begin{pmatrix} -\gamma_1(x_* y + xy) \\ \gamma_2(y_* x + xy) \end{pmatrix}.$$

Для розглянутих моделей збурюючі доданки в (4.31) мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_1(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} m \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, & P_2(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix}, \\ P_3(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} m \sin^2 \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, & P_4(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} m \sin(\Omega t + \alpha) \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.4.4 Чисельний аналіз збурених моделей

Модель 1. Синусоїдальна збурення «інтенсивності виділення шкідливості»

$$P_1(m, \Omega t)$$

Наведено результати роботи MathCad-програми, фазовий портрет і графік розв'язку по точках (рис. 4.1). Біфуркаційний параметр – Ω мало відрізняється від частоти $1/T$ циклу в (4.29); r, s, g_0, g_1 – нормовані до 1 параметру з (4.29); при цьому $T \approx 1$.

В повній відповідності з теорією [3, 12], фазовий портрет в (x, y, t) і його проекція на XOY показують, що амплітуда коливань змінюється нерегулярно, з тенденцією до необмеженого збільшення з ростом t .

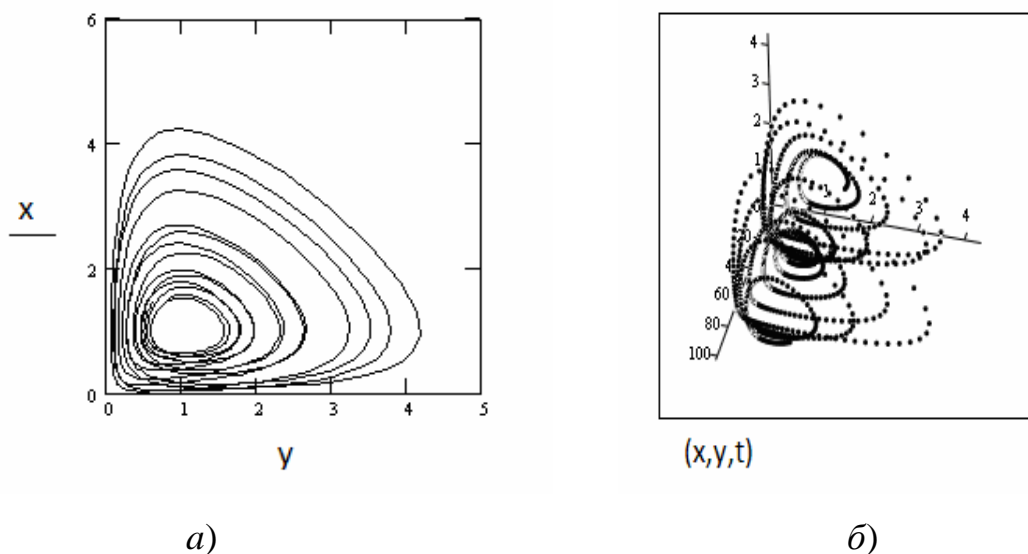


Рисунок 4.1 – Фазові портрети моделі 1: а) – портрет на площині XY ; б) – портрет в розширеному фазовому просторі

Модель 2. Синусоїдальне зовнішнє збурення інтенсивності захисту з аналогічними параметрами: $P_2(m, \Omega t)$.

На лівому графіку (рис. 4.2, а) видно "змінюваність", характерну для станів поблизу дивного аттрактора, і нелінійні спотворення синусоїди. Через різної поведінки "захисту" та "шкідливості", однакові періодичні збурення приросту їх інтенсивності демонструють різну динаміку системи: фазовий портрет несиметричний, на відміну від моделі 1 (рис. 4.2, б).

Модель 3. Збурення типу $P_3(m, \Omega t) = (m \cdot \sin^2(\Omega t), 0)$ для "шкідливості".

В цьому випадку втрата стійкості не проявляється (див. рис. 4.3, а) – поява ефекту залежить від того, яка з змінних обурюється і якою функцією, при незмінних амплітуді і частоті збурення. На правому графіку (рис. 4.3, б) видно, що величини обох стабілізуються поблизу нуля, що не передбачено теорією [28, 97].

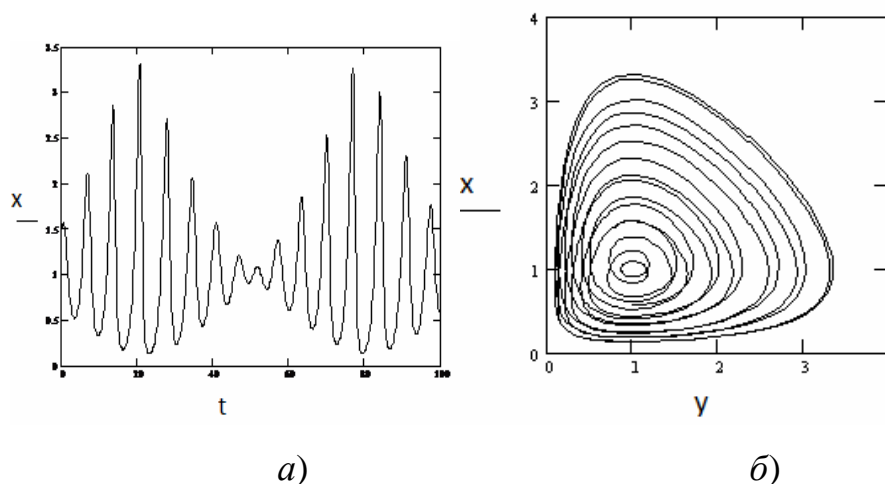


Рисунок 4.2 – Розв'язки для моделі 2: а) – розв'язок для "шкідливого фактора" у часі; б) – фазовий портрет на площині ХУ

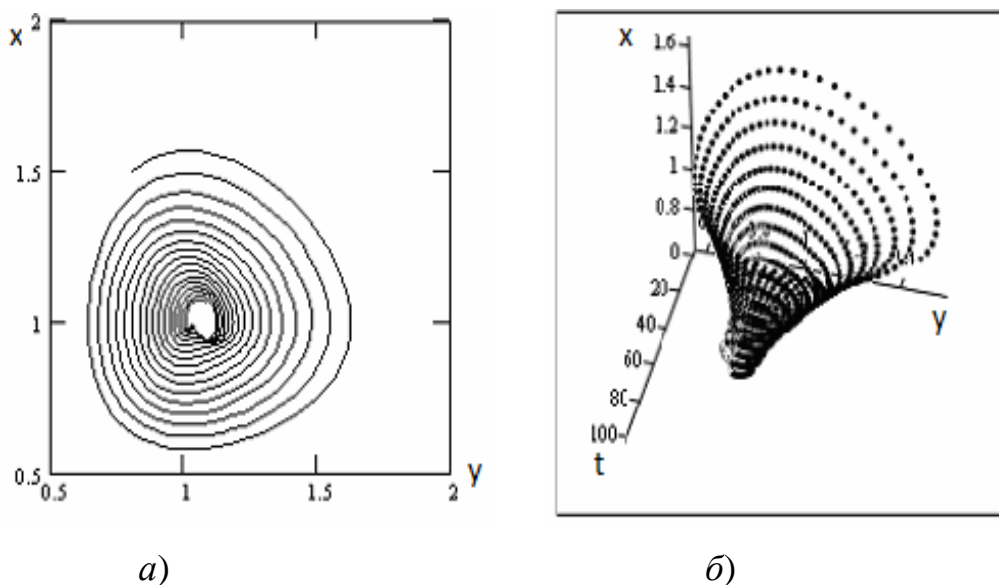


Рисунок 4.3 – Фазові портрети моделі 3: а) – портрет на площині ХУ; б) – портрет в розширеному фазовому просторі

Модель 4. Збурення інтенсивності обох змінних із зсувом фаз.

Збурення правої частини системи має вигляд:

$P_4(m, \Omega, t) = (m \sin(\Omega t + \alpha), m \sin \Omega t)$. Фазовий портрет представлений на рис.4.4.

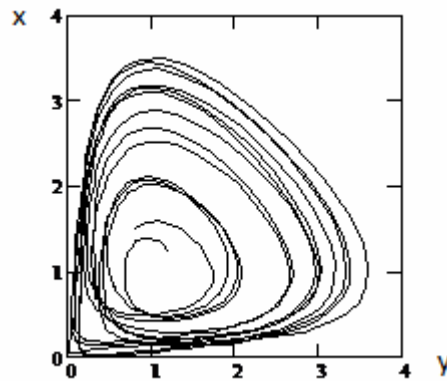


Рисунок 4.4 – "Розбігання" двох спочатку близьких фазових траєкторій

Чисельний експеримент показав, що траєкторії, які мають близькі початкові умови, з часом демонструють властивості "розбігання" і "перемішування", характерні для дивного атрактора [10, 29].

4.5 Висновки по розділу

В четвертому розділі розроблено методики розрахунку динаміки моделей систем з виділенням різних типів шкідливих факторів і різних швидкостей і принципів спрацьовування захисту, що дозволило аналітично досліджувати явні залежності динаміки ліквідації аварій від біфуркаційних параметрів системи

За допомогою чисельних експериментів для різних типів захистів, описуваних правими частинами $F(u, z)$ рівнянь (4.2), при різних типах залежностей власних параметрів системи від часу, показано, що при ϵ від 10^{-3} до 10^{-5} розмір похибки асимптотичного методу зменшується з 10% до 1%, що цілком допустимо для технічних розрахунків. Перевагою такого методу, очевидно, є наявність досить коротких формул для розв'язку, що дозволяє

аналізувати поведінку системи в процесі захисту при зміні керуючих параметрів і власних параметрів об'єкта захисту.

Проведено дослідження проблеми динамічного балансу в ергатичній системі із захистом при зовнішньому збуренні інтенсивностей шкідливих викидів, яке моделюється малим по амплітуді синусоїдальним збуренням правої частини базової моделі.

Застосування методів якісної теорії диференціальних рівнянь пророкує необмежені хаотичні рухи в неавтономній системі поблизу періодичного розв'язку автономної при збігу періодів. Чисельні експерименти показують, що:

а) фазові портрети систем, схожі на відомі у фізиці "фігури Ліссажу" і мають тип, що вироджується 2-мірного нерезонансного тора;

б) різні за характером нерегулярності поведінки "захисту" та "шкідливості" проявляються в фазових портретах при однакових збурення;

в) синусоїдальний вплив на інтенсивності, наприклад шляхом зміни швидкості росту однієї або обох змінних внаслідок сезонних або погодних змін, призводить до неперіодичної динаміці системи;

г) визначені параметри збурень, що призводять поблизу "резонансу" $\Omega=1/T$, як до неперіодичного зростання виділення шкідливості (модель 1), так і до неперіодичних рухів в кінцевій області (моделі 2 і 4), або до стабілізації поблизу нуля (модель 3). При цьому можлива ліквідація аварії шляхом обнулення обох змінних.

Все це підтверджує, що навіть досить прості моделі систем захисту виявляють їх нестійкість – чутливість до малих зовнішніх збурень.

Матеріали даного розділу опубліковані в роботах [36, 40, 41].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [3, 4, 10, 12, 16, 28, 29, 35, 36, 40, 41, 43, 44, 48, 49, 50, 51, 56, 58, 61, 63, 66, 67, 68, 70, 76, 81, 82, 84, 85, 87, 91, 97, 102, 105].

ВИСНОВКИ

В результаті проведеного в дисертаційній роботі дослідження вирішено одну з важливих науково-технічних задач розробки математичних моделей та обчислювальних методів для підвищення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих та небезпечних чинників.

У процесі вирішення поставлених завдань поліпшення безпеки ергатичних систем з динамічним захистом в роботі отримано такі найважливіші наукові та практичні результати:

1. На основі аналізу сучасного стану проблеми, літературних джерел та характерних ознак нелінійних динамічних систем із захистом розроблено їх узагальнену математичну модель у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром, яка відрізняється від відомих присутністю регулярних та сингулярних збурень. Вона описує всі можливі співвідношення швидкостей взаємодії джерел шкідливих чинників та захисту від них, що дозволило виділити три характерні часткові динамічні моделі з малим параметром для подальшого дослідження.

2. Отримав подальший розвиток метод побудови і аналізу стаціонарних множин часткової сингулярної моделі з примежовим шаром, використання якого дозволило отримати умови стійкості ергатичної системи з динамічним захистом.

3. Удосконалено обчислювальний метод асимптотичного розв'язку задач Коши з різними типами сингулярностей і нестационарністю параметрів керування, що дозволило аналітично отримати розв'язок сформульованої задачі для різних швидкостей шкідливого процесу і захисту. Отримано оцінки значень малого параметра збурення, які забезпечують прийнятну для технічних розрахунків точність.

4. Отримав подальшого розвитку метод аналізу ступеня стійкості ергатичних систем з синергетичним захистом, що дозволило оцінити параметричну стійкість системи поблизу точок катастроф і визначити ступінь стійкості ергатичних систем при різних варіаціях біфуркаційних параметрів.

5. У рамках загальної концепції негативного зворотнього зв'язку отримано методи розрахунку динаміки моделей систем з виділенням різних типів шкідливих факторів і різних швидкостей та принципів спрацьовування захисту, що дозволило аналітично досліджувати явні залежності динаміки ліквідації аварій від біфуркаційних параметрів системи, які призводять до стійкого і швидкого придушення виділення шкідливих факторів за прийнятну вартість.

Усі вище наведені наукові та практичні результати є новими та відповідають сучасному рівню наукових і технічних знань, що підтверджено публікаціями здобувача у фахових виданнях [21, 22, 30–41, 88].

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів і висновків дисертаційної роботи забезпечується і підтверджується коректним використанням основних положень відомого і апробованого математичного апарату, який раніше неодноразово був перевірений порівнянням з експериментальними дослідженнями, і застосуванням результатів роботи.

Результати роботи впроваджені при виконанні фундаментальної держбюджетної теми (№ держреєстрації 0115U001522), та госпдоговору (№ держреєстрації 0117U 003827).

Отримані теоретичні результати також впроваджені в навчальний процес кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки для розробки лабораторних та курсових робіт в курсах "Імітаційне моделювання", "Теорія катастроф" та "Синергетичні методи в економіці", а також тем кваліфікаційних робіт бакалаврів і магістрів.

По результатах дисертаційної роботи можна зробити наступні висновки, які підтверджують науково-технічну значущість роботи:

– модель з нелінійним негативним зворотним зв'язком адекватно описує широкий клас ергатичних систем з динамічним захистом від шкідливих техногенних факторів;

– асимптотичний метод продуктивний для аналізу динаміки систем, характерний час процесів в яких різниться на кілька порядків;

– похибка асимптотичного методу для обраних лінеаризованих багатовимірних сингулярних систем з захистом при розглянутих швидкостях протікання процесів не перевищує 1%;

– наявність малого параметра в правій частині неавтономних рівнянь моделей, як регулярних так і сингулярних систем, при певних поєднаннях параметрів призводить до хаотичної динаміки.

Напрямки теоретичних і практичних досліджень дисертаційної роботи доцільно розвивати в області створення і використання асимптотичних методів в моделюванні технічних систем, та побудови моделей для більш детального урахування складних процесів динаміки ергатичних систем з захистом від шкідливих техногенних чинників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alexeev I., Voloshyn O. Formation of Compensation Mechanism of Regional Enterprises' Human Resources Regeneration in the Labor Potential Development System // *Econtechmod. An International Quaterly Journal*. 2013. Vol. 2. No. 3. P. 3–8.
2. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. *Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice*. Warszawa: Wydaw. naukowo-techniczne, 2001. 198 p. (in Polish).
3. Andrianov I. K., Manevitch L. I., Hazewinkel M. *Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 252 p.
4. Arditi R., Ginzburg L. *How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology*. Oxford University Press, 2012. 112 p.
5. Barbashin Y. A. *Introduction to the theory of sustainability*. M.: Nauka, 1968. 224 p.
6. Brauer F., Castillo-Chavez C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag, 2000. 201 p.
7. Chen Y., Aihara K. Some Convex Functions Based Measures of Independence and Their Application to Strange Attractor Reconstruction // *Entropy*. 2011. № 13. P. 820–840.
8. Dolinskii A., Draganov B., Kozirskii V. Nonequilibrium state of engineering systems // *Econtechmod. An International Quaterly Journal*. 2012. Vol. 1. No. 1. P. 33–35.
9. Haken H. *Synergetics: introduction and advanced topics*. Springer-Verlag, 2004. 302 p.
10. Hayashi C., Kawakami H. Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential Equations // 4-й национальный конгресс Теоретическая и прикладная механика, Варна, 1981. Докл. Кн. 1. София, 1981. С. 537–542.

11. Himmelblau D. Applied Nonlinear Programming. McGraw-Hill, 1972. 534 p.
12. Hoppensteadt F. Predator-prey model // Scholarpedia. 2006. 1 (10). P. 1563.
13. Ilyina V., Silaiev P. PK MAXIMA computer algebra system for theoretical physicists. M.: Moscow State University, 2004. 113 p.
14. Inozemtsev G. Scientific and technical preconditions of electric field application at plants protection // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2012. Vol. 1. No. 1. P. 47–50.
15. Jost C., Devulder G., Vucetich J. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose // Journal of Animal Ecology. 2005. 74 (5). P. 809–816.
16. Kirpilenko L. N., Naumeyko I. V. On the Modified Doze Approach to Assessment of Injury in «Man – Machine – Surrounds» System // Advances in Industrial Ergonomics and Safety VI / edited by F. Aghazadeh. Taylor & Francis, 1994. P. 141–143.
17. Koronovskiy A. A. Synchronized behavior, complicated dynamics and transmission processes in self-sustained oscillation systems and standard reference models of non-linear theory of vibrations: thesis ... doctor of Physics and Mathematics science: 01.04.03 / Place of defence: Saratov State University. Saratov, 2007. 462 p.: il. RGB OD, 71:07-1/420 (in Russian).
18. Nasritdinov G., Dalimov R. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction // Current Research J. of Economic Theory. 2010. 2 (2). P. 32–40.
19. Naumeyko I. V. Critical points of dynamic model of harmful factors distributing: Materials of International scientific conference ISTE-2011, 1–6 October 2011. Kharkov-Yalta, 2011. P. 60–61.
20. Naumeyko I., AlRefai V. Concerning issue of critical regimes analysis with dynamic defense systems from harmful influence // Information systems and technologies: Materials 2 Intern. Science and techn. Conf. Kharkiv: NTTM, 2013. P. 12.

21. Naumeyko I., Alja'afreh M. Dynamic balance research of protected systems // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2015. Vol. 4. No 3. P. 85–90.

22. Naumeyko I. V., Alja'afreh M. R. Investigation of the dynamics of singular protected systems // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2016. Vol. 5. No. 4. P. 37–42.

23. The Large, the Small and the Human Mind / R. Penrose, A. Shimony, N. Cartwright, S. Hawking; ed. M. Longair. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 201 p.

24. Pluzhnik E. V., Nikulchev E. V. Use of dynamical systems modeling to hybrid cloud database // International Journal of Communications, Network and System Sciences. 2013. Vol. 6. No. 12. P. 505–512.

25. Sahal D. System Complexity: Its Conception and measurement in the Design of Engineering systems // IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. 1976. Vol. SMC-6. P. 152.

26. Vasil'eva A., Butuzov V. Asymptotic expansions of solution of singularly perturbed equations. Moscow: Higher School, 1990. 201 p.

27. Zhu C., Yang O. W. W., Aweya J. A comparison of active queue management algorithms using the OPNET Modeler // IEEE Communication Magazine. 2002. 40 (6). P. 158–167.

28. Александров П. С. Пуанкаре и топология // Успехи математических наук. 1972. Т. 37. № 1. С. 147–158.

29. Александров П. С. Теория размерности и смежные вопросы статьи общего характера. М.: Наука, 1978. 430 с.

30. Альджаафрах М. Р. Асимптотики для модели системы с защитой // Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харків, 2016. С. 60–61.

31. Альджаафрах М. Р. Математические модели и методы исследования нелинейных динамических систем с сингулярными возмущениями // Информационные системы и технологии: материалы международной научно-

технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево-Харьков, 2016. С. 91–92.

32. Альджаафрех М. Р. Solving the problem of optimal parametric synthesis of infocommunication system with the maximum bandwidth // 1-й Международ. науч.-техн. семинар САКМИТ-2016, Харьков, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов / редкол.: В. Г. Кобзев (отв. ред.). Х.: Друкарня Мадрид, 2017. С. 9–10.

33. Альджаафрех М. Р., Наумейко И. В. Математические модели нелинейных систем динамической защиты с сингулярными возмущениями // 1-й Международ. науч.-техн. семинар САКМИТ-2016, Харьков, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов / редкол.: В. Г. Кобзев (отв. ред.). Х.: Друкарня Мадрид, 2017. С. 13–14.

34. Альджаафрех М. Р., Наумейко И. В. Using dynamical system in industrial production // Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті: матеріали ХХ Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму, 19–21 квітня 2016 р. Харків, 2016. Том 7. С. 56–57.

35. Альджаафрех М. Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 2. № 4 (68). С. 47–50.

36. Альджаафрех М. Р. Хаотические движения в системах Лотки-Вольтерра с периодическим возмущением правой части // Радиоэлектроника и молодежь в ХХІ веке: материалы XVIII Международного Молодежного Форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков, 2014. С. 52–53.

37. Альджаафрех М. Р. Численное исследование устойчивости в системах Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью // Технологический аудит и резервы производства. 2014. Т. 3. № 1 (17). С. 20–22.

38. Альджаафрех М. Р., Наумейко И. В. Математические модели и методы исследования динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 3-й Международной научно-технической конференции, 15–21 сентября 2014 г. Харьков, 2014. С. 121–122.

39. Альджаафрех М. Р., Наумейко И. В. Математические модели нарушения динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы Международной научно-технической конференции, 21–27 сентября 2015 г. Харьков, 2015. С. 24–25.

40. Альрефаи В. А., Альджаафрех М. Р. Разработка методов исследования устойчивых движений в системах Лотки-Вольтерра с периодическими возмущениями // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1. № 4 (73). С. 58–61.

41. Альрефаи В. А., Наумейко И. В., Альджаафрех М. Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. – 2016. Т. 1. № 8 (8). С 63–68.

42. Альрефаи В. А. Математичне моделювання та обчислювальні методи аналізу процесів сталого розвитку нелінійних динамічних систем з конкурентною взаємодією: дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Міністерство освіти і науки України, Харківський національний університет радіоелектроніки. Харків, 2016. 162 с.

43. Амироков С. Р. Численные методы и вычислительный эксперимент в исследовании динамики и структуры взаимодействующих сообществ: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Ставрополь, 2006. 187 с.: ил. РГБ ОД, 61:06-1/929.

44. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика. М.: Едиториал УРСС, 2004. 304 с.

45. Андрианов И. В. Асимптотология как лейтмотив творчества Л. И. Маневича // Проблемы нелинейной механики и физики материалов. Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1999. С. 300–307.

46. Андрианов И. В. Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // ПММ. 2002. Т. 66. № 2. С. 271–275.

47. Андрианов И. В. Мыслил ли Маркс математически, или спасет ли математика мир? // Theoretical Foundations of Civil Engineering: X Ukrainian-Polish seminar, Warsaw, June 2002. 2002. Т. 1. С. 533–534.

48. Андрианов И. В., Брезински К. Второе рождение Анри Паде // Природа. 1991. № 5. С. 126–128.

49. Андрианов І. В., Буланова Н. С. Чи існує «теоретична математика»? // У світі математики. 1997. Т. 3. № 4. С. 1–5.

50. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994. 159 с.

51. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 304 с.

52. Арнольд В. И. Теория катастроф // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 221–284.

53. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Природа. 1998. № 4. С. 3–14.

54. Асимптотические методы в примерах и задачах / С. М. Бауэр и др.; под ред. С. М. Бауэр. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1997. 276 с.

55. Барсуков В. С. Безопасность: технологии, средства, услуги. М.: Кудиц-Образ, 2001. 496 с.

56. Бейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

57. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

58. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

59. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

60. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Московского ун-та, 1978. 151 с.

61. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.

62. Гребенников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.

63. Гусятников П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник-жертва и популяции леммингов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.01. Москва, 2006. 101 с. РГБ ОД, 61:06-1/528.

64. Дзюндзюк Б. В., Наумейко И. В., Сердюк Н. Н. Содержательная модель воздействия нескольких вредных факторов на человека // Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 3 (12). С. 127–128.

65. Дзюндзюк Б. В., Наумейко И. В. Математическая модель и оптимизация защиты от биовоздействия электромагнитного излучения и сопутствующих факторов // Радиоэлектроника и информатика. 1997. № 1. С. 28–29.

66. Дикарев В. А. Асимптотические представления решений обобщенной системы телеграфных уравнений // Радиотехника и электроника. 1974. Т. XIX. № 11. С. 2349–2356.

67. Дьяконов В. П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. М.: Солон-Пресс, 2004. 542 с.

68. Дэмбэрэл С., Оленев Н. Н., Пospelов И. Г. К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 4. С. 107–122.

69. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 327 с.

70. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем // Фундаментальные исследования. 2014. № 8–6. С. 1288–1294.

71. Звонкий А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1984. Т. 39. № 2. С. 77–127.

72. Ильичев В. Г. Механизмы стабилизации и адаптации в моделях экологии: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01, 05.13.18. Ростов н/Д, 2003. 279 с. РГБ ОД, 71:04-5/418.

73. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М.: Мир, 1982. 216 с.

74. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. 2-е изд. М.: Изд-во Фазис, 2000. 411 с.

75. Латыпов В. Н. Математические модели возмущенного движения высокого порядка точности: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / С.-Петербург. гос. ун-т. СПб, 2010. 133 с.: ил. РГБ ОД, 61:10-1/736.

76. Литвинов Г. Л. Приближенное построение рациональных аппроксимаций и эффект автокорреляции погрешности // Матем. моделирование. Пушино, 1990. С. 99–141.

77. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 233 с.

78. Мак-Лоун Р. Р. Математическое моделирование – искусство применения математики / пер. Ю. А. Сергеев // Математическое моделирование. Москва, 1979. С. 9–20.

79. Интеллектуальные системы автоматического управления / под ред. И. М. Макаров, В. М. Лохин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

80. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 256 с.

81. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра // Докл. АН Украины. 1996. № 4. С. 1–7.

82. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 257 с.

83. Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 142 с.

84. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 318 с.

85. Могилевский В. Д. Формализация динамических систем. М., 2005. 216 с.

86. Наперекор стихии: уроки ликвидации аварии на Главной канализационной насосной станции г. Харькова. Харьков: ЧП «Дуэт», 2006. 464 с.

87. Наумейко И. В. Определение границ применимости асимптотического подхода при анализе сигналов в неоднородных многопроводных каналах. Кн. Депонированные научные работы. 1983. № 12 (146) б/о 1038.

88. Наумейко И. В., Альджаафрах М. Р., Альрефаи В. А. Моделирование сингулярных динамических систем защиты с переменными параметрами // International scientific and practical conference «World Science». 2016. Т. 1. № 11 (15). С. 15–17.

89. Наумейко И. В. Критические точки динамической модели распределенных вредных факторов: материалы Междунар. научно.-техн. конференции ИСТЭ-2011, 1–6 окт. 2011 г. Харьков-Ялта. С. 60–61.

90. Наумейко И. В., Аль-Рефаи В. А. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий // 2-я Междунар. научно.-техн. конференция ИСТ-2013, 16–22 сентября 2013 г. Евпатория, 2013. С. 12.

91. Никитина Н. В. О хаотической потере устойчивости // Докл. НАН Украины. 1997. № 11. С. 61–65.

92. Овчаренко Н. И. Автоматика электрических станций и электроэнергетических систем. М.: НЦ ЭНАС, 2000. 504 с.

93. Панкратова Н. Д. Системный анализ в динамике диагностирования сложных технических систем // Системні дослідження та інформаційні технології. 2008. № 1. С. 33–49.

94. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. 4-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 240 с.

95. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 80 с.

96. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 282 с.

97. Сидоров С. В. Математическое моделирование и численное исследование динамического хаоса в диссипативных системах нелинейных дифференциальных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18 / Моск. гос. гор. ун-т. Москва, 2009. 283 с.: ил. РГБ ОД, 71:10-1/73.

98. Синергетическая парадигма. М.: Прогресс-Традиция, 2000. 536 с.

99. Терещнев В. В. Пожарная тактика. Понятие о тушении пожара. Екатеринбург: ООО «Издательство Калан», 2012. 348 с.

100. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991. 404 с.

101. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 423 с.

102. Методы анализа нелинейных математических моделей / М. Холодниок и др. М.: Мир, 1991. 368 с.

103. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. М.: УРСС, 2004. 288 с.

104. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003. 296 с.

105. Эрроусмит Д. К., Плейс К. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 243 с.

106. Юрков Н. К. Безопасность сложных технических систем // Вестник Пенз. ГУ. 2013. № 1. С. 129–134.

ДОДАТОК А
ДОКУМЕНТИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ І ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ
РОБОТИ

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Ректор Харківського національного
університету радіоелектроніки

Семенець В.В.

2017

АКТ

про впровадження результатів кандидатської дисертації аспіранта кафедри
прикладної математики Харківського національного університету
радіоелектроніки
Мохаммада Ракана Абед Алнабі Альджаафрах
"Математичне моделювання та обчислювальні методи дослідження ергатичних
систем з динамічним захистом"

У період з 22 грудня по 23 грудня 2017 р. комісія у складі: голови комісії Тевяшева А.Д., зав.каф. прикладної математики (ПМ), д.т.н., проф., членів комісії: Долгоброд О.Г. – відповідального виконавця д/б теми №293-4, с.н.с. та Матвієнко О.І., м.н.с. провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що підтверджує використання результатів дисертації М.Р.А. Альджаафрах у роботі НДЧ ХНУРЕ за д/б темою №293 «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку», № держреєстрації 0115U001522, розділ 4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста».

Оскільки НДЧ кафедри ПМ ХНУРЕ веде роботи по розробці методології і математичних моделей техніко-економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку, певний інтерес представляє розділ дисертаційної роботи, де запропоновано моделі та аналіз динаміки об'єкту із захистом в ЖКГ міста. Такий підхід до динаміки об'єктів, що моделюються, підвищив швидкість, якість та достовірність прийняття рішень по уникненню аварій та хаотичної динаміки об'єкту.

Впроваджено як науковий результат дисертаційної роботи динамічну математичну модель об'єкту при розв'язанні завдань стабілізації тиску в глобальній диктуючій точці локальної підсистеми газорозподільних мереж регіональних систем газопостачання.

Акт складено для пред'явлення до Спеціалізованої Вченої Ради із захисту дисертацій. Акт не може бути підставою для фінансових розрахунків, премій та інших винагород.

Голова комісії:

Зав.каф. Прикладної математики, професор, д.т.н. А.Д. Тевяшев

Члени комісії:

Відповідальний виконавець д/б теми №293-4, с.н.с. О.Г. ДолгобродК.т.н. О.І. Матвієнко

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

"ЗАТВЕРДЖУЮ"Ректор Харківського національного
університету радіоелектроніки

Семенець В.В.

28 12 2017

АКТ

про впровадження результатів кандидатської дисертації аспіранта кафедри
прикладної математики Харківського національного університету
радіоелектроніки
Мохаммада Ракана Абед Алнабі Альджаафрех
"Математичне моделювання та обчислювальні методи дослідження ергатичних
систем з динамічним захистом"

У період з 26 грудня по 27 грудня 2017 р. комісія у складі: голови комісії Тевяшева А.Д., зав.каф. прикладної математики (ПМ), д.т.н., проф., членів комісії: с.н.с. Долгоброд О.Г., та ст.викладача Матвієнко О.І. провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що підтверджує використання наступних результатів дисертації М.Р.А. Альджаафрех у науково-дослідній роботі НДЧ ХНУРЕ «ОЦІНКА ПОТЕНЦІАЛУ РЕСУРСОЗБЕРЕЖЕННЯ ВОДОВОДІВ КОМПЛЕКСУ ВОДОПІДГОТОВКИ «ДОНЕЦЬ» ВІДОКРЕМЛЕНОГО ПІДРОЗДІЛУ КОМУНАЛЬНОГО ПІДПРИЄМСТВА «ХАРКІВВОДОКАНАЛ» (№ 17-05(34/6-НР/17)), № держресстрації 0117U 003827

Оскільки НДЧ кафедри ПМ ХНУРЕ веде роботи по розробці методології і математичних моделей технічних систем, інтерес представляє розділ дисертаційної роботи, де запропоновано моделі та аналіз динаміки об'єктів в системах водопостачання міста. Такий підхід до динаміки об'єктів, що моделюються, підвищив швидкість, якість та достовірність прийняття рішень по управлінню об'єктами систем водопостачання.

Частина результатів дисертаційної роботи впроваджено у вигляді динамічної математичної моделі резервуару чистої води з захистом від переливу на насосних станціях.

Акт складено для пред'явлення до Спеціалізованої Вченої Ради із захисту дисертацій. Акт не може бути підставою для фінансових розрахунків, премій та інших винагород.

Голова комісії:

Зав.каф. Прикладної математики, професор, д.т.н. _____ А.Д. Тевяшев

Члени комісії (виконавці НДР № 17-05(34/6-НР/17)):

С.н.с. _____ О.Г. Долгоброд

К.т.н. _____ О.І. Матвієнко

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис

Печатка

Л.В. Колесник

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Ректор Харківського національного
університету радіоелектроніки



Семенець В.В.

2017

АКТ

про використання в навчальному процесі ХНУРЕ результатів дисертаційної роботи «Математичне моделювання та обчислювальні методи дослідження ергатичних систем з динамічним захистом» аспіранта кафедри Прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки Мохаммада Ракан Абед Алнабі Альджаафрех.

У період з 26.12.2017 по 28.12.2017 р. комісія у складі:

голова комісії – декан факультету інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту, докт.физ-мат. наук, проф. Дорошенко В. О.;

члени комісії: зав.кафедрою прикладної математики, докт.техн.наук, проф. Тевяшев А.Д., канд.техн.наук, доц. Наумейко І.В.

провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що підтверджує використання результатів дисертації аспіранта кафедри ПМ 2014-2017 років Альджаафрех М.Р.А. в рамках навчального процесу при підготовці бакалаврів, спеціалістів та магістрів за спеціальностями "Прикладна математика" та "Системний аналіз".

Комісія визначає, що:

– при проведенні лекційних та лабораторних занять з дисципліни "Імітаційне моделювання" використано узагальнену математичну модель ергатичних систем з динамічним захистом у вигляді взаємозв'язаних диференціальних рівнянь з малим параметром, яка відрізняється від відомих присутністю регулярних та сингулярних збурень;

– при проведенні лекційних та лабораторних занять з дисципліни "Теорія

катастроф" використано метод аналізу ступеня стійкості ергатичних систем з синергетичним захистом, що дозволило оцінити параметричну стійкість системи поблизу точок катастроф і визначити ступінь стійкості ергатичних систем при різних варіаціях біфуркаційних параметрів;

– для лекцій з дисципліни "Синергетичні методи в економіці" використано асимптотичні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь, що моделюють ергатичні системи із захистом який призводить до стійкого і швидкого придушення виділення шкідливих факторів за прийнятну ціну.

Методика та програмне забезпечення моделювання підготовлені як додаток до методичних вказівок до лабораторних робіт. Вони також використані при підготовці курсових та дипломних робіт бакалаврів та магістрів на протязі 2015-2017рр.

Комісія визначає, що застосування матеріалів дисертаційної роботи Альджаафрах М.Р.А. покращує глибину та якість викладання і засвоєння змісту дисциплін.

Голова комісії В.Ворон Дорошенко В.О.

Члени комісії [Підпис] Тевяшев А.Д.

[Підпис] Наумейко І.В.

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Підпис
Печатка

Л.В. Колесник

ДОДАТОК Б

МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ ВОДОВІДВЕДЕННЯ

В роботі досліджені та модифіковані такі моделі водовідведення.

Б.1 Модель регулюючої засувки (РЗ)

РЗ призначені для управління витратою рідини, що проходить через них. Вони використовуються спільно з нерегульованим НА і призначені для управління режимами його роботи.

Падіння напору на РЗ описується залежністю :

$$h_{RZ}(q) = \frac{qC}{E^2}, \quad (\text{Б.1})$$

де $h_{RZ}(q)$ - втрата напору на РЗ, C - гідравлічний опір РЗ, E - ступінь відкриття РЗ ($E(t) \in (0,1]$).

Гідравлічний опір у виразі (Б.1) в загальному випадку залежить від геометричних розмірів РЗ, режиму руху рідини. Однак, у зв'язку зі складною геометричною структурою внутрішньої поверхні РЗ і її тривалою експлуатацією, чисельне значення C відомо наближено і оцінюється за експериментальними даними вибірок кінцевої довжини, тому є випадковою величиною $C = C(\omega)$. Втрата напору на РЗ крім гідравлічного опору, залежить також від обсягу рідини, що протікає через неї. Так як витрата рідини, що протікає через РЗ, є випадковою величиною, то і падіння напору на РЗ також є випадковою величиною. Стохастична модель РЗ має вигляд:

$$h_{RZ}(q(\omega)) = \frac{q(\omega)C(\omega)}{E^2}. \quad (\text{Б.2})$$

Б.2 Модель резервуара чистої води (РЧВ)

РЧВ є акумулюючою ємністю в формі циліндра або прямокутного паралелепіпеда, з відомими геометричними розмірами: висотою РЧВ - H^* , площею поперечного перетину S .

Динамічну модель РЧВ можна представити у вигляді:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_{vh}(t) - q_{vih}(t),$$

де $q_{vh}(t)$, $q_{vih}(t)$ - об'ємна подача води в РЧВ в момент часу t і об'ємний відбір води з РЧВ в цей же момент часу, $V(t)$ - обсяг води в РЧВ в момент часу t .

Основним технологічним обмеженням на роботу РЧВ є вимога підтримки обсягу води в заданих межах:

$$H^{\min} \leq H(t) \leq H^{\max},$$

де H^{\min} містить аварійний, протипожежний запаси. $H(t)$ – рівень води в РЧВ в момент часу t .

Так як подача води в РЧВ та відбір води з РЧВ є випадковими величинами, то стохастичну модель РЧВ представимо у вигляді:

$$\frac{dV(\omega, t)}{dt} = q_{vh}(\omega, t) - q_{vih}(\omega, t),$$

$$P(H^{\min} \leq H(\omega, t)) \cong 1.$$

$$P(H(\omega, t) \leq H^{\max}) \cong 1$$

Якщо інтервал управління $[0, T]$ розбивається на N під інтервалів $[0, k \cdot \Delta t]$, ($k=1, \dots, N$), то стохастическую модель РЧВ можемо представити у вигляді:

$$H(\omega, k) = H(\omega, k-1) + c(q_{vh}(\omega, k) - q_{vih}(\omega, k)),$$

де c - нормуючий множник, що залежить від площі поперечного перетину РЧВ.

ДОДАТОК В
СПИСОК ВЛАСНИХ ПУБЛІКАЦІЙ

1. Альджаафрех М.Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 2. № 4 (68). С. 47–50.
2. Альджаафрех М.Р. Численное исследование устойчивости в системах Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью // Технологический аудит и резервы производства. 2014. Т. 3. № 1(17). С. 20–22.
3. Альрефаи В.А., Альджаафрех М.Р. Разработка методов исследования устойчивых движений в системах Лотки-Вольтерра с периодическими возмущениями // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1. № 4(73). С. 58–61.
4. Альрефаи В.А., Наумейко И.В., Альджаафрех М.Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. 2016. Т. 1. № 8(8). С. 63–68.
5. Naumeyko I.V., Alja'afreh M. Dynamic balance research of protected systems // Econtechmod. 2015. V. 4. № 3. P. 85–90.
6. Naumeyko I.V., Alja'afreh M.R. Investigation of the dynamics of singular protected systems // Econtechmod. 2016. V. 5. № 4. P. 37–42.
7. Наумейко И.В., Альджаафрех М.Р., Альрефаи В.А. Моделирование сингулярных динамических систем защиты с переменными параметрами // International scientific and practical conference «World Science» 2016. Т. 1. № 11(15). С. 15–17.
8. Alja'afreh M.R. Solving the problem of optimal parametric synthesis of infocommunication system with the maximum bandwidth // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-2016, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 9–10.
9. Альджаафрех М.Р., Наумейко И.В. Математические модели и методы исследования динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 3-й Международной

научно-технической конференции, 15–21 сентября 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 121–122.

10. Альджаафрах М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нарушения динамического баланса в одном классе нелинейных систем // Информационные системы и технологии: материалы 4-й международной научно-технической конференции, 21–27 сентября 2015 г. Харьков: ХНУРЭ, 2015. С. 24–25.

11. Альджаафрах М.Р. Хаотические движения в системах Лотки-Вольтерра с периодическим возмущением правой части // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного Молодежного Форума, 14–16 апреля 2014 г. Харьков: ХНУРЭ, 2014. С. 52–53.

12. Альджаафрах М.Р. Асимптотики для модели системы с защитой // Радиоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. С. 60–61.

13. Альджаафрах М. Р. Математические модели и методы исследования нелинейных динамических систем с сингулярными возмущениями // Информационные системы и технологии: материалы 5-й международной научно-технической конференции, 12–17 сентября 2016 г. Коблево – Харьков: ХНУРЭ, 2016. С. 91–92.

14. Альджаафрах М.Р., Наумейко И.В. Математические модели нелинейных систем динамической защиты с сингулярными возмущениями // Материалы 1-го международного научно-технического семинара САКМИТ-2016, 19–23 декабря 2016 г.: тезисы докладов. Харьков: ДРУКАРНЯ МАДРИД, 2017. С. 13–14.

15. Альджаафрах М.Р., Наумейко И.В. Using dynamical system in industrial production // Радиоелектроніка та молодь у XXI столітті: матеріали XX Ювілейного Міжнародного Молодіжного Форуму 19–21 квітня 2016 р. Харків: ХНУРЕ, 2016. Том 7. С. 56–57