

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

На правах рукописи

ФИЛИПКОВСКАЯ МАРИЯ СЕРГЕЕВНА

УДК 517.922:537.8 + 519.6

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Руткас Анатолий Георгиевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Цей примірник дисертаційної роботи
ідентичний за змістом з іншими, по-
даними до спеціалізованої вченої ради
Д 64.052.02.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02

Л.В. Колесник

Харьков – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень условных обозначений	5
Введение	6
Раздел 1 Математические модели физических и экономических систем с дифференциально-алгебраическими уравнениями	13
1.1 Моделирование переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях с сосредоточенными параметрами	13
1.2 Динамическая модель межотраслевого баланса экономики	18
1.3 Дескрипторные системы в теории управления и робототехнике	20
Выводы по разделу 1.	21
Раздел 2 Постановка задачи. Обзор основных методов решения	22
2.1 Задача Коши для дифференциально-алгебраических уравнений. Проблемы и методы исследования	22
2.2 Методы исследования глобальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений	25
2.2.1 Метод продолжения решений. Классические теоремы.	27
2.2.2 Метод сравнения. Теорема Уинтнера	30
2.2.3 Метод интегральных неравенств	33
2.2.4 Метод продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля. Развитие метода.	36
2.3 Получение условий глобальной разрешимости полулинейного дифференциального уравнения с применением дифференциальных неравенств типа Ляпунова и Ла-Салля.	42
2.4 Метод спектральных проекторов типа Рисса для регулярного пучка операторов	45
2.5 Блочные представления сингулярного операторного пучка и его	

компонент, соответствующие разложения пространств и проекторы	47
Выводы по разделу 2.	53
Раздел 3 Глобальная разрешимость	
дифференциально-алгебраических уравнений	54
3.1 Предварительные сведения.	54
3.2 Существование и единственность глобальных решений дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным характеристическим пучком.	55
3.3 Существование и единственность глобальных решений дифференциально-алгебраических уравнений с сингулярным характеристическим пучком	67
3.3.1 Случай сингулярного пучка произвольного ранга	67
3.3.2 Случай недоопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений	79
3.3.3 Случай переопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений	82
Выводы по разделу 3.	89
Раздел 4 Получение и проверка условий существования	
глобальных решений уравнений нелинейных электрических цепей. . .	90
4.1 Модель импедансного нелинейного четырехполюсного фильтра.	90
4.2 Модель гибридного нелинейного четырехполюсного фильтра.	95
4.3 Исследование модели нелинейного четырехполюсника в условиях неполных данных.	102
4.4 Обратная задача для нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра	107
Выводы по разделу 4.	115
Раздел 5 Устойчивость полулинейных	
дифференциально-алгебраических уравнений	
и приложение к нелинейным радиотехническим цепям.	116
5.1 Устойчивость по Лагранжу ДАУ с регулярным	

характеристическим пучком	116
5.1.1 Теорема об устойчивости в смысле Лагранжа	116
5.1.2 Теорема о неустойчивости в смысле Лагранжа	120
5.2 Устойчивость по Лагранжу сингулярного ДАУ.	122
5.2.1 Теорема об устойчивости в смысле Лагранжа.	122
5.2.2 Теорема о неустойчивости в смысле Лагранжа	128
5.3 Применение к теории электрических цепей	131
5.3.1 Устойчивость по Лагранжу математической модели нелинейного четырехполюсного фильтра	131
5.3.2 Устойчивость по Лагранжу математической модели конкретного радиотехнического устройства	134
5.3.3 Устойчивость по Лагранжу математической модели четырёхполюсника в условиях неполных данных.	141
5.3.4 Устойчивость по Лагранжу математической модели нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра	141
Выводы по разделу 5.	145
Раздел 6 Численный метод решения полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения и анализ математических моделей.	147
6.1 Построение численного метода	148
6.2 Нахождение численных решений для модели нелинейного четырёхполюсного фильтра	155
6.3 Нахождение численных решений для модели конкретного радиотехнического устройства.	159
Выводы по разделу 6	171
Выводы	172
Список использованных источников	175
Приложение А Акт внедрения результатов диссертационной работы.	187

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ДАУ – дифференциально-алгебраическое уравнение.

A^* – сопряженный оператор.

$A > 0$ – положительный оператор.

$A|_X$ – сужение оператора A на пространство X .

\mathbb{C}^n – комплексное n -мерное пространство.

$conv$ – выпуклая оболочка.

E_X – единичный оператор в пространстве X .

$grad F$ – градиент функции F .

$Im A$ – область значений оператора или матрицы A .

$Ker A$ – ядро оператора или матрицы A .

Lin – линейная оболочка.

$L(X, Y)$ – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из X в Y .

\mathbb{R}^n – вещественное n -мерное пространство.

$rg A$ – ранг матрицы A .

Ω^c – дополнение множества Ω .

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Результаты исследования конкретных математических моделей в радиотехнике, экономике, механике, теории управления, робототехнике свидетельствуют, что важными для практики являются классы моделей с полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, у которых линейная часть характеризуется регулярным или сингулярным матричным пучком. Такие уравнения возникают при математическом моделировании динамики физических, экономических и технических процессов и объектов из-за наличия алгебраических связей между координатами вектора состояния.

Дифференциально-алгебраические уравнения изучались многими авторами, среди которых S. L. Campbell, L. R. Petzold, P. Kunkel, V. Mehrmann, R. März, E. Hairer, C. Lubich, M. Roche, G. Wanner, R. Rianza, Ю. Е. Бояринцев, А. Г. Руткас, Л. А. Власенко, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, В. П. Яковец, В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. Подавляющее число известных в настоящее время работ посвящено исследованию локальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений и нахождению их численных решений на некотором достаточно малом интервале времени. В работах А. Pazy, Л. А. Власенко, Ю. Е. Гликлиха представлены теоремы о глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений, которые содержат глобальное условие Липшица для нелинейной части уравнения, однако это условие является слишком ограничительным для многих прикладных задач. Например, наличие кубических нелинейных сопротивлений и проводимостей в радиотехнических цепях, как правило, допускает существование глобальных по времени решений и их устойчивость, в то время как глобальное условие Липшица здесь не выполнено.

Математические результаты о глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений представляют интерес для теории динамических систем и приложений. Наличие глобального по времени решения гарантирует достаточно долгий срок бесперебойного функционирования исследуемой реальной системы. Теоретически доказанное существование точного глобального решения

позволяет корректно применить численный метод для нахождения приближенного решения на любом заданном отрезке времени.

При проектировании и синтезе конкретных систем и процессов используются признаки ограниченности и устойчивости решений соответствующих эволюционных уравнений. Ограниченность каждого решения уравнения на всей области определения называется устойчивостью по Лагранжу. Ж. Ла-Саллем предложен метод исследования устойчивости по Лагранжу обыкновенных дифференциальных уравнений, который является развитием прямого метода Ляпунова. Структурную устойчивость линейных дифференциально-алгебраических уравнений рассматривали, например, L. Dai, Ю. Е. Бояринцев, устойчивость полулинейных уравнений данного типа не исследована.

Таким образом, исследование глобальной разрешимости, устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и анализ математических моделей с соответствующими уравнениями являются актуальной задачей как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, в частности, при математическом моделировании динамики нелинейных радиотехнических цепей, производства корпорации предприятий, потоков в сетях, межотраслевого баланса экономики, робототехнических, механических и управляемых систем.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена в рамках научных исследований, которые проводились в Харьковском национальном университете им. В. Н. Каразина. Основные научные результаты получены при выполнении НИР «Аналіз еволюційних задач з рівняннями типу Соболева» (№ ГР 0111U010369, 2012–2014 гг.), в которой автор принимала участие как исполнитель.

Цель и задачи исследования. *Целью* работы является получение условий глобальной разрешимости, устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений без использования глобальных условий Липшица, разработка метода их численного решения на любом заданном отрезке времени; исследование глобальной динамики математических мо-

делей нелинейных радиотехнических цепей.

Для достижения поставленной цели решаются следующие *задачи*:

- сформулировать и доказать теоремы существования и единственности глобального решения задачи Коши для полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений без применения ограничений типа глобального условия Липшица;

- сформулировать и доказать теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений;

- построить математические модели нелинейных радиотехнических цепей с сосредоточенными параметрами и применить полученные теоретические результаты к исследованию их динамики;

- разработать численный метод нахождения решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения на любом заданном отрезке времени и провести численный анализ полученных математических моделей.

Объект исследования – полулинейные дифференциально-алгебраические уравнения и математические модели нелинейных радиотехнических цепей.

Предмет исследования – существование, единственность и устойчивость глобальных решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, переходные процессы в нелинейных радиотехнических цепях.

Методы исследования. При доказательстве теорем применяются метод продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля, теоремы о неявной функции, специальные блочные представления сингулярного операторного пучка и его компонент, дискретный вариант неравенства Гронуолла, предложенный А. Г. Руткасом метод спектральных проекторов типа Рисса. Для разработки численного метода используются явная схема Эйлера, формула Тейлора и метод спектральных проекторов типа Рисса.

Научная новизна полученных результатов.

1. Получил дальнейшее развитие метод продолжения решений обыкновенного дифференциального уравнения с использованием дифференциальных нера-

венств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля, а именно, получено обобщение теоремы Ла-Салля о неограниченной продолжаемости решений, которое ослабляет ограничения на нелинейную часть уравнения.

2. Предложена новая блочная структура операторных коэффициентов сингулярных дифференциально-алгебраических уравнений и метод ее построения, которые дополняют исследования относительно блочных структур сингулярного пучка операторов в конечномерных пространствах и позволяют привести исходное уравнение к системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений.

3. Сформулированы и доказаны новые теоремы существования и единственности глобального решения задач Коши для обыкновенного полулинейного дифференциального уравнения и полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным и сингулярным характеристическими пучками. Теоремы не содержат ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет получать условия глобальной разрешимости уравнений динамики для более широких классов прикладных задач, в которых возникают нелинейные математические модели с дифференциальными и дифференциально-алгебраическими уравнениями.

Получены новые теоремы, которые дают достаточные условия существования глобального решения недоопределенной системы и достаточные условия существования и единственности глобального решения переопределенной системы дифференциально-алгебраических уравнений. Эти теоремы являются частными случаями теоремы существования и единственности глобального решения задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным пучком произвольного ранга.

4. Впервые сформулированы и доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным и сингулярным характеристическими пучками. Теоремы дают достаточные условия существования и единственности глобального решения, ограниченного на всей области определения, и решения, которое имеет конечное время определения.

5. Для построенных математических моделей нелинейных радиотехнических устройств указаны ограничения, которые обеспечивают гладкую детерминированную эволюцию состояний (переходных режимов) на бесконечном интервале времени, и условия, при которых соответствующие дифференциально-алгебраические уравнения устойчивы по Лагранжу. Указанным ограничениям удовлетворяют определенные нелинейные функции, которые не являются глобально липшицевыми, что позволяет гарантировать существование и ограниченность глобальных решений уравнений динамики для более широких классов нелинейных систем.

Аналогичные утверждения справедливы для математических моделей ряда других систем и процессов, в частности, систем управления, потоков в сетях, производственно-экономических, робототехнических и механических систем, в которых возникают подобные дифференциально-алгебраические уравнения.

6. Разработан и обоснован новый численный метод нахождения решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (с регулярным характеристическим пучком) с учетом полученных условий существования и единственности глобального решения. Приближенное решение вычисляется на любом заданном отрезке времени. По сравнению с известными методами решения уравнений данного типа, в разработанном методе ослаблены ограничения на нелинейную часть уравнения и ее частные производные. Также эффективность метода обусловлена возможностью численно находить спектральные проекторы типа Рисса, с помощью которых исходное уравнение сводится к системе из чисто дифференциального и алгебраического уравнений.

Практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации могут быть использованы для исследования математических моделей с полулинейными дифференциальными уравнениями и дифференциально-алгебраическими уравнениями, у которых линейная часть характеризуется регулярным или сингулярным матричным пучком. Такие модели возникают в нелинейной радиотехнике, экономике, теории управления, робототехнике и других областях науки и техники.

Получены условия существования и единственности глобального решения,

наличие которого гарантирует достаточно долгий срок бесперебойного функционирования исследуемой реальной системы.

В доказанных теоремах не используются требования типа глобального условия Липшица для нелинейной части уравнения, что дает возможность применять полученные теоретические результаты к более широким классам прикладных задач.

Результаты о глобальной разрешимости дифференциальных уравнений представляют интерес для теоретических исследований в комбинаторике, поскольку производящие функции для многих комбинаторных последовательностей удовлетворяют определенным функциональным и дифференциальным уравнениям.

Результаты, полученные при исследовании математических моделей нелинейных радиотехнических цепей, могут быть использованы для анализа математических моделей других систем, в которых выделяются структурная геометрия в форме модельного графа и параметры составляющих элементов, в частности, при изучении сложных механических систем с сосредоточенными массами, математических моделей кристаллических решеток и потоков в сетях.

Разработанный численный метод позволяет находить приближенные решения полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения на любом заданном отрезке времени. Теоретически доказанное существование точного глобального решения гарантирует корректность численного метода.

Результаты диссертационных исследований использованы при подготовке курсовых и дипломных работ и преподавании лекционных и практических занятий, что подтверждено актом внедрения в учебный процесс Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертационной работы получены автором лично и опубликованы в работах [49, 52, 55, 64-75, 93-95]. В работах, которые опубликованы в соавторстве, личный вклад автора состоит в следующем: в [55] сформулирована и доказана теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши для полулинейного дифференциально-

алгебраического уравнения с регулярным характеристическим пучком; в [49] построены математические модели нелинейных радиотехнических фильтров и установлены условия гладкой детерминированной эволюции состояний на бесконечном интервале времени; в [52] изложена теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения и результаты ее применения.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных конференциях, семинаре: международные конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (г. Харьков, 2011–2013 гг.), международные конференции «Тараповские чтения - 2012», «Тараповские чтения - 2013» (г. Харьков, 2012 г., 2013 г.), VI, VII Міжнародні наукові конференції «Обчислювальна та прикладна математика» ім. академіка І. І. Ляшка (г. Киев, 2013 г., 2014 г.), Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2014» (г. Воронеж, 2014 г.), Международный семинар «Численное моделирование методами дискретных особенностей в математической физике» (г. Харьков, 2014 г.), XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (г. Харьков, 2015 г.), XVII Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (г. Сумы, 2015 г.), III International Conference “Analysis and Mathematical Physics” (г. Харьков, 2015 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 18 научных работ [49, 52, 55, 64-75, 93-95], из них 7 статей в журналах (5 статей [49, 55, 66, 73, 75] в журналах, которые включены в перечень научных специализированных изданий Украины, в том числе один журнал включен в международные наукометрические базы данных; 2 статьи [65, 93] в зарубежных журналах, которые включены в международные и зарубежные наукометрические базы данных), 1 статья [68] в зарубежном сборнике материалов международной конференции и 10 тезисов докладов, которые опубликованы в материалах и сборниках трудов научных конференций [52, 64, 67, 69-72, 74, 94, 95].

РАЗДЕЛ 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Дифференциально-алгебраические (дескрипторные, вырожденные) уравнения имеют большой спектр практического применения. Такие уравнения возникают при математическом моделировании динамики физических, экономических и технических процессов и объектов из-за наличия алгебраических связей между координатами вектора состояния. Эти связи могут возникать при учете механических ограничений, законов сохранения энергии и материи, определенных экономических и физических взаимодействий.

Полулинейные дифференциально-алгебраические уравнения возникают при математическом моделировании в экономике [41, 42, 78], робототехнике [97, 110, 119], теории управления [48, 84, 90, 103, 105], радиотехнике [13, 18, 50, 56, 85, 87, 88, 111, 113, 114] и других областях науки и техники.

1.1 Моделирование переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях с сосредоточенными параметрами

Электрическая цепь представляет собой совокупность основных и вспомогательных элементов, соединенных между собой с помощью проводов. Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии, а также преобразовательные устройства. К вспомогательным элементам относятся выключатели и переключатели различного назначения, аппараты автоматизированного управления, электроизмерительные приборы, резисторы для регулирования тока, напряжения и мощности приемников, защитные устройства [7, 29]. Радиотехнические цепи состояются в основном из резисторов (активных сопротивлений), катушек индуктивности и конденсаторов.

Для количественной оценки процессов, происходящих в цепях, использу-

ются величины, называемые *параметрами цепи*. Параметром, определяющим потери энергии, является *сопротивление* r . *Индуктивность* L количественно характеризует связанное с цепью магнитное поле, *емкость* C определяет связанное с цепью электрическое поле. Иногда вместо сопротивления удобнее пользоваться обратной величиной $g = \frac{1}{r}$, называемой *проводимостью*. В линейных электрических цепях параметры r , L , C не зависят от внешних сил (напряжения, тока) и процессы описываются линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Если величина какого-либо из параметров цепи зависит от тока или напряжения, определяемая этим параметром зависимость является нелинейной. В таких системах процессы описываются нелинейными уравнениями, и соответствующие цепи называются нелинейными. Если напряжение и ток на всех элементах не зависят от пространственных координат, то такую цепь называют *цепью с сосредоточенными параметрами*.

Таким образом, при моделировании процесса, происходящего в электрической цепи, возникает система дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид дифференциально-алгебраического уравнения относительно вектора состояния. Вектор состояния выбирается так, чтобы по его компонентам можно было однозначно определить все токи и напряжения в цепи.

Под *переходным процессом* понимают процесс перехода от одного режима работы цепи к другому. Переходные процессы возникают при замыкании или размыкании выключателей и при изменении величин параметров цепи. Исследование переходных процессов (преобразований сигналов) в линейных и нелинейных радиотехнических цепях подробно описано в [7, 22, 25, 27, 29]. Построение математических моделей переходных процессов с линейными и полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями типа (2.1) изложено в [17, 18, 49, 49, 50, 56, 73, 85, 87, 88, 93, 96, 111, 114]. Чтобы изучить переходный процесс, возникающий в цепи, необходимо найти решение соответствующего дифференциально-алгебраического уравнения и исследовать его поведение вдоль всей временной полуоси. При этом начальные значения следует задавать исходя из усло-

вий согласования, возникающих в связи с наличием в системе алгебраических связей.

В цепях радиотехнических устройств часто одновременно протекают токи различных частот. Обычно токи некоторых из этих частот должны воздействовать на последующие элементы схемы, а воздействие токов других частот является вредным. Поэтому возникает необходимость в отделении токов одних частот от других и эту задачу решают с помощью *электрических фильтров* (радиотехнических, если фильтр используется в радиотехническом устройстве). Сведения о назначении и классификация электрических фильтров даны в [7, 27].

Метод построения математической модели переходного процесса в радиотехнической цепи с сосредоточенными параметрами рассматривается на примере электрической цепи четырехполюсного радиотехнического фильтра (четырёхполюсника), изображенного на рис. 1.1 [49, 69]. Заданы входные токи I_1 , I_2 , линейные сопротивления r_1 , r_2 , линейная проводимость g , индуктивность L , емкость C , нелинейные сопротивления φ_1 , φ_2 и проводимости h_1 , h_2 .

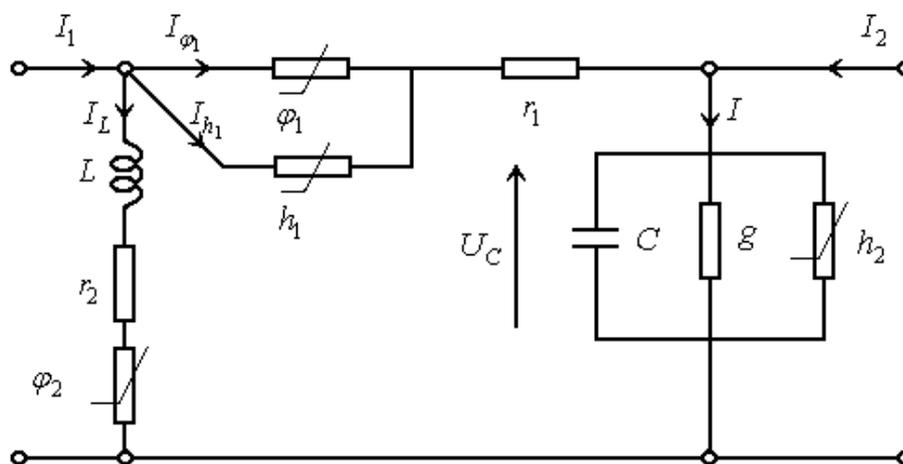


Рисунок 1.1 – Схема электрической цепи четырехполюсника

Предполагается, что внешние токи $I_1(t)$, $I_2(t)$ являются непрерывными при $t \geq 0$ скалярными функциями, сосредоточенные параметры L , C , r_1 , r_2 , g – постоянными вещественными положительными величинами, нелинейные сопротивления $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и проводимости $h_1(y)$, $h_2(y)$ – непрерывно дифференцируе-

мыми на \mathbb{R} скалярными функциями.

Неизвестные токи $I_L, I, I_C, I_g, I_{\varphi_k}, I_{h_k}, I_{r_k}, k=1,2$ и напряжения $U_L, U_C, U_g, U_{\varphi_k}, U_{h_k}, U_{r_k}, k=1,2$ удовлетворяют уравнениям Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{\varphi_1} + I_{h_1} + I_L, & I_L &= I_{r_2} = I_{\varphi_2}, & I_{r_1} &= I_{\varphi_1} + I_{h_1}, & I &= I_C + I_g + I_{h_2}, \\ I &= I_2 + I_{r_1}, & U_{\varphi_1} &= U_{h_1}, & U_C &= U_g = U_{h_2}, & U_{\varphi_2} + U_{r_2} + U_L - U_{\varphi_1} - U_{r_1} &= U_C. \end{aligned}$$

Электрические режимы элементов цепи описываются следующими уравнениями относительно токов и напряжений:

$$\begin{aligned} U_{r_k} &= r_k I_{r_k}, & U_{\varphi_k} &= \varphi_k(I_{\varphi_k}), & I_{h_k} &= h_k(U_{h_k}), & k &= 1,2; & I_g &= g u_g, \\ U_L &= L \frac{dI_L}{dt}, & I_C &= C \frac{dU_C}{dt}. \end{aligned}$$

С помощью элементарных преобразований из приведенных уравнений исключаются все переменные, кроме $x_1 = I_{\varphi_1}, x_2 = I_L, x_3 = U_C$ и заданных токов I_1, I_2 . Обозначим $\gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1))$. Введенные переменные удовлетворяют системе уравнений:

$$L \frac{d}{dt} x_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2), \quad (1.1)$$

$$C \frac{d}{dt} x_3 - x_1 + g x_3 = I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3), \quad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma(x_1). \quad (1.3)$$

Векторная форма системы имеет вид полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (2.1) $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\varphi_1} \\ I_L \\ U_C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}.$$

Вектор x , определяющий внутреннее состояние электрической цепи, называется вектором состояния.

В данном случае матрицы A , B являются квадратными, поскольку процессы, происходящие в рассмотренной электрической цепи, однозначно определяются заданными параметрами и соответствующая система содержит одинаковое количество уравнений и неизвестных. Вообще говоря, для однозначного определения внутреннего состояния электрической цепи четырехполюсника необходимо знать два входных параметра: входной ток и напряжение, или два входных тока, или два напряжения. Для двухполюсников, соответственно, достаточно задать один входной параметр. Иногда возникает необходимость рассмотреть более сложные задачи. Например, если для определения внутреннего состояния цепи четырехполюсника задан лишь один входной параметр, то соответствующая система уравнений будет недоопределена. И наоборот, если при рассмотрении цепи двухполюсника заданы два параметра (например, входной ток и ток на каком-либо из участков цепи), соответствующая система уравнений будет переопределена. В таких случаях возникают дифференциально-алгебраические уравнения вида (2.1) с прямоугольными матрицами. Подробнее задачи для электрических цепей с недоопределенными и переопределенными системами дифференциально-алгебраических уравнений рассмотрены в подразделах 4.3, 4.4 и пунктах 5.3.3, 5.3.4.

В реальных радиотехнических системах встречаются токи, напряжения и сопротивления в виде степенных, синусоидальных, экспоненциальных и других функций. Например, переменный ток чаще всего изменяется по синусоидальному

закону, экспоненциальный ток возникает при разрядке или зарядке конденсатора [7, 22, 25, 27, 29].

Дифференциально-алгебраические уравнения, возникающие при моделировании динамики электрической цепи, содержат коэффициенты, которые зависят от топологии и параметров цепи. Эту зависимость можно записать в явном виде в терминах матриц параметров и топологических матриц циклов и сечений графа, которому соответствует схема цепи. Применение теории графов для построения математических моделей электрических цепей описано в [51, 53, 54, 57].

Как правило, нахождение точных решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих модели электрических цепей, является слишком трудоемким процессом либо не представляется возможным из-за наличия нелинейностей и алгебраических связей. На практике находят приближенные решения соответствующих уравнений на некотором заданном отрезке времени. Для полноценного анализа переходного процесса важно иметь возможность исследовать поведение решения на сколь угодно большом временном отрезке $[t_0, T]$ ($t_0 \geq 0$). В настоящей работе предложен численный метод решения ДАУ (2.1) на заданном отрезке $[t_0, T]$ для любого $T > 0$ (см. подраздел 6.1, [75]). Приведены графики найденных решений и проведен анализ полученных результатов (см. подразделы 6.2, 6.3).

1.2 Динамическая модель межотраслевого баланса экономики

Межотраслевой баланс экономики страны можно представить как систему взаимосвязанных отраслей хозяйства. Эта взаимосвязь состоит в более или менее устойчивых потоках товаров и услуг, которые связывают друг с другом все сектора экономики. Иностранные государства рассматриваются как отдельная отрасль хозяйства. Классической моделью межотраслевого баланса является схема затраты-выпуск, созданная В. Леонтьевым [37]. Анализ межотраслевого баланса экономики проводится во многих странах, он позволяет оценить и прогнозировать развитие экономики. Исследование динамических моделей межотраслевого ба-

ланса Леонтьева проводилось многими авторами (см., например, [31, 41, 87]). В [41] рассмотрены динамические модели леонтьевского типа с неоклассическими производственными функциями и с набором технологических способов (процессов).

Рассмотрим динамическую модель межотраслевого баланса экономики, охватывающей n отдельных отраслей. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ определяет выпуск валового продукта (потоки выпуска всех товаров и услуг), вектор $f \in \mathbb{R}^n$ – конечный спрос (непроизводственное потребление товаров и услуг), $S = (s_{ij})$ – матрица коэффициентов потоков, где коэффициент s_{ij} показывает количество единиц продукции отрасли i , поглощенное отраслью j для выпуска единицы своей продукции, $R = (r_{ij})$ – матрица коэффициентов основных фондов (капитального оборудования), где r_{ij} – количество единиц продукции отрасли i , необходимое для увеличения на единицу выпуска продукции отрасли j . Обозначим $A = -R$, $B = E - S$, где E – единичная матрица порядка n . Открытая динамическая система уравнений затрат-выпуска [37] имеет вид линейного дифференциально-алгебраического уравнения:

$$A \frac{dx(t)}{dt} + Bx(t) = f(t). \quad (1.4)$$

В случае, когда сокращается производство некоторых отраслей (часть основных фондов используется полностью и соответствующие коэффициенты равны нулю) либо накопленные основные фонды могут быть частично потреблены (сокращение основных фондов равняется потребностям в замене и текущем ремонте, а соответствующие коэффициенты основных фондов и потоков становятся нулевыми), матрица A необратима. Большинство математических моделей, соответствующих реальным экономическим процессам, являются нелинейными, и в общем случае функция f в уравнение (1.4) может нелинейно зависеть от x .

Экономические модели с дифференциально-алгебраическими уравнениями,

содержащими нелинейную часть, рассмотрены в [14, 42, 78]. Исследование моделей динамики развития корпораций из нескольких предприятий со стохастическими дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно стохастического дифференциала, проводилось в [12, 15, 16]. Уравнения леонтьевского типа с белым шумом рассмотрены в [20].

1.3 Дескрипторные системы в теории управления и робототехнике

Систему дифференциально-алгебраических уравнений (дифференциальное уравнение с вырожденным оператором при производной) в теории управления часто называют *дескрипторной* системой. Данные системы исследуются, например, в [5, 6, 84, 87, 88, 90, 98, 104–106, 108, 114]. Полулинейные и нелинейные дескрипторные системы рассматриваются в [85, 103].

Полулинейная дескрипторная система с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} W\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u), \\ y = Cx + Du + g(t, x, u), \end{cases} \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

$f(t, x, u) \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$, $g(t, x, u) \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^p)$, W, A, B, C, D – вещественные матрицы размеров соответственно $m \times n$, $m \times n$, $m \times l$, $p \times n$, $p \times l$. Вектор x задает состояние системы, u – управление (вектор входных переменных), y – выход (вектор выходных переменных). Обычно система имеет начальные условия: $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in I$. Дескрипторная система разрешима на интервале I , если можно найти допустимое управление $u(t)$ такое, что на I существует ее решение. Поэтому вопрос о глобальной разрешимости и устойчивости дифференциально-алгебраических уравнений (2.1) представляет интерес для теории управления.

При исследовании динамики управляемых многозвенных механизмов и интеллектуальных роботов [110, 119] возникает ДАУ вида

$\frac{d^2}{dt^2}[\hat{A}(t)y] + \hat{B}(t)y = \hat{K}(t)u + \varphi(t)$, которое с помощью понижения порядка сводит-

ся к уравнению $\frac{d}{dt}[A(t)x] + B(t)x = K(t)u + f(t)$.

Выводы по разделу 1

1. Представленный обзор конкретных математических моделей показывает, что важными для практики являются классы моделей с полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, у которых линейная часть характеризуется регулярным или сингулярным операторным (матричным) пучком.

2. К настоящему времени недостаточно разработаны и исследованы задачи для электрических цепей с недоопределенными и переопределенными системами дифференциально-алгебраических уравнений. Подобные системы уравнений возникают при исследовании математических моделей в условиях неполных данных и при рассмотрении обратных задач.

3. Важен вопрос о глобальной разрешимости ДАУ, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует достаточно долгий срок бесперебойного функционирования соответствующей реальной системы, а также представляет интерес для теории динамических систем и прикладного программирования. В частности, теоретически доказанное существование глобального решения позволяет вычислить его с помощью численных методов на любом заданном интервале времени.

РАЗДЕЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

2.1 Задача Коши для дифференциально-алгебраических уравнений.

Проблемы и методы исследования

В работе исследуется задача Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (ДАУ)

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x), \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

где $t, t_0 \geq 0, x, x_0 \in \mathbb{R}^n$;

$f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция;

$A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$ -матрицы A, B .

Определение 2.1.1. Функция $x(t)$ называется *решением* задачи Коши (2.1), (2.2) на некотором интервале $[t_0, t_1)$, $t_1 \leq \infty$, если $x(t) \in C([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^m)$, $x(t)$ удовлетворяет начальному условию (2.2) и уравнению (2.1) на $[t_0, t_1)$.

Наряду с (2.1) рассмотрено уравнение $A \frac{d}{dt} x(t) + Bx(t) = f(t, x)$ (см. подраздел 3.2).

Влияние левой части уравнения (2.1) определяется свойствами характери-

стического пучка операторов $\lambda A + B$, где λ – комплексный параметр. Введем комплексные расширения \hat{A} , \hat{B} операторов A , B , действующие из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Пучок операторов $\lambda A + B$ является регулярным, если множество $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \hat{A} + \hat{B})^{-1} \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)\}$ регулярных точек соответствующего комплексного пучка $\lambda \hat{A} + \hat{B}$ нетривиально. В противном случае, т.е. при $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \emptyset$, пучок называется сингулярным. В [19] даны следующие определения: пучок матриц $\lambda A + B$ называется регулярным, если A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка и $\det(\lambda A + B) \neq 0$, в остальных случаях, т.е. при $n \neq m$ или $n = m$ и $\det(\lambda A + B) \equiv 0$, пучок называется сингулярным. В дальнейшем будут использоваться указанные ниже определения.

Определение 2.1.2. [19] Рангом пучка матриц $\lambda A + B$ называется наибольший из порядков миноров пучка, не равных тождественно нулю.

Определение 2.1.3. Пусть $r(A, B) = rg(\lambda A + B)$ – ранг пучка $\lambda A + B$. Пучок $\lambda A + B$ называется *регулярным*, если $n = m = r(A, B)$, в остальных случаях, т.е. при $n \neq m$ или $n = m$ и $r(A, B) < n$, пучок называется *сингулярным* [93].

В настоящей работе рассматриваются полулинейные дифференциально-алгебраические уравнения с регулярным характеристическим пучком индекса 1 и сингулярным характеристическим пучком, который может иметь регулярную компоненту индекса 1. В литературе подобные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, называют также вырожденными, алгебро-дифференциальными, дескрипторными, сингулярными. Согласно принятой в статье [56] А. Г. Руткаса терминологии, в данной работе *сингулярным дифференциально-алгебраическим уравнением* называется дифференциально-алгебраическое уравнение с сингулярным характеристическим пучком, которому, в частности, отвечают *недоопределенная* (количество уравнений меньше количества неизвестных) и *переопределенная* (количество уравнений больше количества неизвестных) системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Исследованием существования, единственности и свойств решений линейных дифференциально-алгебраических уравнений занимались многие авторы [3,

8, 9, 18, 26, 43, 59, 61, 86–89, 111]. Для полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным характеристическим пучком условия локальной разрешимости представлены в работах [18, 50, 63, 71, 80, 85, 102, 111, 112].

Классические результаты в исследовании сингулярных линейных дифференциально-алгебраических уравнений принадлежат Л. Кронекеру [19]. В [56] описаны условия локальной разрешимости сингулярного полулинейного ДАУ. Разрешимость недоопределенной и переопределенной системы нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений рассматривалась в [105].

Вопросы, связанные со структурной устойчивостью линейных дескрипторных систем управления, можно найти в [90], с устойчивостью линейных ДАУ – в [11, 121]. В [10] даются условия приводимости полулинейного алгебро-дифференциального уравнения с регулярным матричным пучком к невырожденной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрабатывались методы редукции ДАУ к дифференциальному уравнению [92, 116] и дифференциальному включению [92, 115, 117, 118].

Глобальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений необратимым оператором при производной изучалась в [2]. Известны теоремы о глобальной разрешимости полулинейных ДАУ, которые содержат глобальное условие Липшица для нелинейной части уравнения (см., например, [18, 100, 109]). Однако это условие является слишком ограничительным и может оказаться избыточным для существования глобальных решений.

Основную проблему для исследования глобальной разрешимости и устойчивости порождает нелинейная функция $f(t, x)$ в правой части уравнения. Даже для обыкновенного дифференциального уравнения легко привести пример, когда глобальное решение не существует ($dx/dt = x^3$). Для решения данной проблемы используется метод, основанный на результатах из [36, 73] (см. п. 2.2.4).

Другая проблема – наличие необратимой матрицы при производной и, соответственно, присутствие алгебраических уравнений в рассматриваемой системе. Одним из наиболее эффективных и часто используемых способов решения дан-

ной проблемы является сведение исходного ДАУ к эквивалентной системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений. Для этого могут использоваться специальные блочные представления характеристического операторного пучка и его компонент, а также соответствующие проекторы (см. подразделы 2.5, 2.4).

2.2 Методы исследования глобальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.3)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.4)$$

где $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$;

функция $f(t, x): E \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на некотором (t, x) -множестве $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Решением системы (2.3) называется непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция $x(t)$, определенная на некотором интервале (r_1, r_2) и удовлетворяющая системе (2.3).

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – решения системы (2.3), определенные, соответственно, на интервалах (r_1, r_2) и (s_1, s_2) . Решение $\psi(t)$ называется *продолжением решения* $\varphi(t)$, если $(r_1, r_2) \subset (s_1, s_2)$. Решение будем называть *непродолжаемым*, если не существует никакого отличного от него решения, являющегося его продолжением.

Для доказательства существования глобальных решений (на полубесконеч-

ном интервале $[t_0, \infty)$) дифференциальных и интегральных уравнений применяются различные методы продолжения решений с использованием интегральных и дифференциальных неравенств, метод сравнения, метод верхних и нижних (максимальных и минимальных) решений, метод предельных уравнений. Описание и способы применения указанных методов даны, например, в [1, 33, 45, 77] и монографиях [35, 36, 39, 40]. Известно, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) может быть сведена к системе интегральных уравнений. В связи с этим, исследование существования и ограниченности решений (локальных и глобальных) обыкновенного дифференциального уравнения вида (2.3) связано с соответствующими исследованиями для эквивалентного интегрального уравнения. Одним из методов исследования дифференциальных и интегральных уравнений является метод верхних и нижних решений с применением интегральных неравенств. В [39] рассмотрены условия, обеспечивающие существование верхних и нижних решений дифференциального уравнения (2.3) и соответствующего интегрального уравнения Вольтерра, даны оценки решений и их интервалов существования для уравнений (2.3) и Вольтерра, для интегральных уравнений определенного типа приведены условия существования максимального (непродолжаемого) решения, рассмотрены вопросы устойчивости. В [1] исследуются оценки решений системы интегральных уравнений Вольтерра и условия продолжаемости решений на интервал $[a, b)$ ($b \leq \infty$). Методы продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и принципа сравнения представлены в работах [33, 35, 36]. В работах [23, 60] установлены условия существования и единственности ограниченного на \mathbb{R} глобального решения для, соответственно, дифференциально-функционального уравнения и нелинейного дифференциального уравнения с экспоненциально дихотомической главной частью, которые в частном случае имеют вид (2.3). При этом в первой работе исходное уравнение сводится к системе эквивалентных интегральных уравнений и применяется ограничение типа глобального условия Липшица, во второй работе также используется глобальное условие Липшица.

2.2.1 Метод продолжения решений. Классические теоремы

Пусть $x(t)$ является решением системы (2.3) в некотором интервале J . Интервал J называется *правым максимальным интервалом существования* решения $x(t)$, если не существует продолжения $x(t)$ на какой-либо интервал J_1 , при котором $x(t)$ оставалось бы решением системы (2.3) (подразумевается, что J – собственное подмножество интервала J_1 , т. е. J и J_1 имеют различные правые концы). Аналогично определяется *левый максимальный интервал существования* решения $x(t)$.

Максимальный интервал существования определяется как интервал, являющийся одновременно и левым, и правым максимальным интервалом существования.

Ниже представлен первый вариант классической теоремы о продолжении решения [77, с. 24, теорема 3.1].

Теорема 2.2.1 (о продолжении решения). Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна на открытом (t, x) -множестве E , и пусть $x(t)$ является на некотором интервале решением системы (2.3). Тогда решение $x(t)$ может быть продолжено на максимальный интервал существования (ω_-, ω_+) . Кроме того, если (ω_-, ω_+) – максимальный интервал существования, то $x(t)$ стремится к границе ∂E множества E при $t \rightarrow \omega_-$ и $t \rightarrow \omega_+$.

Замечание 2.2.1. Продолжение $x(t)$, вообще говоря, не обязательно будет единственным, и соответственно ω_{\pm} зависит от выбора продолжения.

Утверждение $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \omega_+]{} \partial E$ означает, что либо $\omega_+ = \infty$, либо $\omega_+ < \infty$ и при t , близких к ω_+ , точки $(t, x(t))$ не принадлежат ни одному компактному подмножеству множества E .

Следствие 2.2.1. [77, с. 26, следствие 3.1] Пусть функция $f(t, x) \in C([t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a < \infty$, и $x(t)$ является решением задачи Коши (2.3), (2.4)

на правом максимальном интервале J .

Тогда или $J = [t_0, t_0 + a]$, или $J = [t_0, \omega)$, $\omega \leq t_0 + a$ и $\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} \infty$.

Следствие 2.2.2. [77, с. 26, следствие 3.2] Пусть $f(t, x)$ непрерывна на замыкании \bar{E} открытого (t, x) -множества E , и пусть задача Коши (2.3), (2.4) обладает решением $x(t)$ на правом максимальном интервале J .

Тогда или $J = [t_0, \infty)$, или $J = [t_0, \omega]$, $\omega < \infty$ и $(\omega, x(\omega)) \in \partial E$, или $J = [t_0, \omega)$, $\omega < \infty$ и $\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} \infty$.

Из теоремы 2.2.1 и замечания 2.2.1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 2.2.3. Пусть $f(t, x) \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и пусть задача Коши (2.3), (2.4) обладает решением $x(t)$ на правом максимальном интервале J .

Тогда или $J = [t_0, \infty)$, или $J = [t_0, \omega)$, $\omega < \infty$ и $\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} \infty$.

Для формулировки другого варианта классической теоремы о продолжении решения понадобится следующая теорема существования и единственности.

Теорема 2.2.2. [45, с. 22, теорема 2] Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}$, $i, j = \overline{1, n}$ на некотором открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда для каждой точки $(t_0, x_0) \in E$ существует решение $x(t)$ системы (2.3), определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0 , и удовлетворяющее условию (2.4). Если имеются два каких-либо решения $\chi(t)$, $\psi(t)$ системы (2.3), удовлетворяющих условию $\chi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$, причем каждое решение определено на своем собственном интервале значений, содержащем точку t_0 , то эти решения совпадают на общем интервале определения.

Ниже рассмотрен второй вариант классической теоремы о продолжении решения [45, с. 173–174].

Теорема 2.2.3 (о продолжении решения). Пусть выполнены условия теоремы 2.2.2. Тогда справедливо:

а) существует непродолжаемое решение системы (2.3) с произвольными начальными значениями из E ;

б) непродолжаемое решение является продолжением любого другого решения системы (2.3), с которым оно совпадает хотя бы при одном значении t ;

в) если два непродолжаемых решения системы (2.3) совпадают между собой хотя бы для одного значения t , то они полностью совпадают, т. е. имеют один и тот же интервал определения и равны на нем;

г) пусть E_0 – замкнутое ограниченное множество, содержащееся в открытом множестве E , и $x(t)$ – некоторое непродолжаемое решение системы (2.3), определенное на интервале (m_1, m_2) . Тогда существует отрезок $[r_1, r_2] \subset (m_1, m_2)$ такой, что точка $(t, x(t))$ находится вне множества E_0 , когда t не принадлежит отрезку $[r_1, r_2]$.

Проведем сравнительный анализ теорем 2.2.1, 2.2.3. Из пунктов а) – в) теоремы 2.2.3 следует, что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого, и притом единственным образом. Согласно теореме 2.2.1, решение может быть продолжено на максимальный интервал существования, то есть продолжено до непродолжаемого, но, в отличие от теоремы 2.2.3, не утверждается единственность продолжения. В пункте г) теоремы 2.2.3 говорится, что непродолжаемое решение покидает любое замкнутое ограниченное множество (компакт в конечномерном пространстве), как и в утверждении теоремы 2.2.1 (с учетом замечания 2.2.1) о том, что решение $x(t)$, продолженное на максимальный интервал существования (ω_-, ω_+) , стремится к границе ∂E множества E при $t \rightarrow \omega_-$ и $t \rightarrow \omega_+$. Условия теорем имеют следующие различия: в теореме 2.2.3 требуется непрерывность правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений по совокупности переменных и непрерывность их частных производных по x , а в теореме 2.2.1 – только непрерывность правых частей по совокупности переменных.

2.2.2 Метод сравнения. Теорема Уинтнера

Пусть $U(t, u)$ – некоторая непрерывная скалярная функция на плоском (t, u) -множестве $E \subset \mathbb{R}^2$.

Решение $u = u^0(t)$ задачи Коши

$$\dot{u} = U(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (2.5)$$

называется *максимальным* (верхним), если для любого другого решения $u(t)$ задачи (2.5) выполнено неравенство

$$u(t) \leq u^0(t) \quad (2.6)$$

при всех t , принадлежащих их общему интервалу существования. Аналогично, решение $u = u_0(t)$ задачи Коши (2.5) называется *минимальным* (нижним), если для любого решения $u(t)$ задачи (2.5) выполнено неравенство $u(t) \geq u_0(t)$ при всех t , принадлежащих их общему интервалу существования.

Лемма 2.2.1. [77, с. 38, лемма 2.1] Пусть $U(t, u)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{(t, u) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, |u - u_0| \leq b\}$; $|U(t, u)| \leq M$ и $\alpha = \min(a, b/M)$.

Тогда задача Коши (2.5) имеет на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$ такое решение $u = u^0(t)$, что для любого решения $u = u(t)$ задачи $\dot{u} = U(t, u)$, $u(t_0) \leq u_0$ выполнено неравенство (2.6) на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Из этой леммы и доказательства теоремы 2.2.1 о продолжении решения вытекает следующая теорема существования максимального и минимального решений.

Теорема 2.2.4. [77, с. 38, теорема 2.1] Пусть $U(t, u)$ непрерывна на некотором открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ и $(t_0, u_0) \in E$. Тогда задача (2.5) имеет максимальное и минимальное решения.

Лемма 2.2.2. [77, с. 41, следствие 4.3] Пусть функция $U(t, u) \geq 0$ непрерывна в открытом (t, u) -множестве E ; $u = u^0(t)$ – максимальное решение задачи Коши $\dot{u} = U(t, u)$, $u(t_0) = u^0$; $u = u_0(t)$ – минимальное решение задачи Коши $\dot{u} = -U(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ ($u_0 \geq 0$). Пусть $x = x(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определенная на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$ и такая, что $u_0 \leq \|x(t_0)\| \leq u^0$, $(t, \|x(t)\|) \in E$ и

$$\|\dot{x}(t)\| \leq U(t, \|x(t)\|), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Тогда на любом общем интервале существования $u_0(t)$ и $x(t)$ ($u^0(t)$ и $x(t)$) справедливо первое (второе) неравенство $u_0(t) \leq \|x(t)\|$, $\|x(t)\| \leq u^0(t)$.

Из этой леммы и следствия 2.2.1 вытекают утверждения следующей теоремы.

Теорема 2.2.5 (Уинтнера [77, с. 43, теорема 5.1]). Пусть $U(t, u)$ непрерывна в области $\{(t, u) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, u \geq 0\}$ и максимальное решение задачи Коши (2.5) ($u_0 \geq 0$) существует на $[t_0, t_0 + a]$; например, пусть $U(t, u) = \psi(u)$, где $\psi(u)$ – непрерывная и положительная при $u \geq 0$ функция, такая, что

$$\int_c^\infty \frac{du}{\psi(u)} = \infty \quad (c > 0). \quad (2.7)$$

Предположим, что $f(t, x)$ непрерывна для любых $(t, x) \in [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\|f(t, x)\| \leq U(t, \|x\|). \quad (2.8)$$

Тогда максимальный интервал существования решения задачи Коши (2.3),

(2.4), где $\|x_0\| \leq u_0$, совпадает с $[t_0, t_0 + a]$.

Замечание 2.2.2. [77] Ясно, что условие (2.8) необходимо потребовать только для больших $\|x\|$.

В теореме 2.2.5 можно взять функцию $U(t, u) = \varphi(t)\psi(u)$, где функция $\varphi(t) \geq 0$ интегрируема на $[t_0, t_0 + a]$, а $\psi(u)$ непрерывна и положительна для $u \geq 0$ и удовлетворяет условию (2.7).

Так как $\psi(u) > 0$, то для любого решения $u(t)$ задачи (2.5) ($u_0 \geq 0$) выполнено: $t - t_0 = \int_{t_0}^t \frac{\dot{u}(s) ds}{\varphi(s)\psi(u(s))} \leq \sup_{t \in [t_0, t_0 + a]} \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \right\} \int_{t_0}^t \frac{\dot{u}(s) ds}{\psi(u(s))} = \sup_{t \in [t_0, t_0 + a]} \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \right\} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{\psi(u)}$.

Аналогично доказательству теоремы 2.2.5 получаем, что для данной функции $U(t, u)$ максимальное решение задачи Коши (2.5), $u_0 \geq 0$, существует на $[t_0, t_0 + a]$, следовательно, ее можно использовать в теореме 2.2.5.

Замечание 2.2.3. Если в доказательстве теоремы 2.2.5 применить следствие 2.2.3 вместо следствия 2.2.1, можно заменить интервал $[t_0, t_0 + a]$ на $[t_0, \infty)$ и проводить исследование глобальной разрешимости. Однако данная теорема не всегда эффективно применима. Поясним это на примере.

Пример 2.2.1. Рассмотрим задачу Коши $\dot{x} = -x^3$, $x(t_0) = x_0$, где $x_0 > 0$, $t, t_0 \geq 0$ выбрано так, чтобы удовлетворять условиям теоремы 2.2.5. Ее решение

$x = \frac{1}{\sqrt{2(t - t_0) + x_0^{-2}}}$ существует на $[t_0, +\infty)$.

Попробуем воспользоваться теоремой 2.2.5 (Уинтнера). Для этой задачи $f(t, x) = -x^3$. Пусть $\psi(u) = (u + 1)^3$. Тогда $\psi(u)$ – непрерывная и положительная при $u \geq 0$ функция такая, что $|f(t, x)| \leq |x|^3 \leq \psi(|x|)$, но

$$\int_c^\infty \frac{du}{(u+1)^3} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(u+1)^2} \Big|_c^N \right) = \frac{1}{2(c+1)^2}, \text{ следовательно, не выполнено (2.7).}$$

Если рассмотреть задачу Коши (2.5), $u_0 \geq 0$, где $U(t, u) = \psi(u) = (u + 1)^3$, то видно, что ее положительное решение (решение единственное и оно является

максимальным) $u = \frac{1}{\sqrt{2(t_0 - t) + (u_0 + 1)^{-2}}} - 1$ не существует на всем интервале $[t_0, \infty)$. Следовательно, воспользоваться теоремой 2.2.5 в данном случае нельзя.

2.2.3 Метод интегральных неравенств

Ниже приведены результаты из статьи [47], которые получены с помощью применения интегральных неравенств и могут быть использованы для проверки существования глобального решения уравнения вида (2.3).

Рассмотрим возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + R(t, x), \quad (2.9)$$

где $f(t, x), R(t, x): [t_0, T) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывные по совокупности переменных функции такие, что $\|f(t, x)\| \leq k(t)L(\|x\|)$, $\|R(t, x)\| \leq \eta(t)$, $k(t), \eta(t)$ – непрерывные функции, $L(u)$ – непрерывная и неубывающая при $u \geq 0$ функция, $L(u) > 0$ при $u > 0$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \infty\}$, $T \leq \infty$.

Ниже приводится лемма из [47], обобщающая и объединяющая результаты Бихари и Лангенхопа [4, 35, 107].

Лемма 2.2.3. Пусть непрерывные функции $u(t), v(t), w(t)$ и $g(u)$ удовлетворяют условиям:

а) $u(t), v(t), w(t)$ неотрицательны при $t \in [t_0, T)$;

б) $g(u)$ не убывает при $u \geq 0$ и $g(u) > 0$ при $u > 0$;

в) при всех $t, \tau \in [t_0, T)$ выполняется неравенство $u(t) \leq u(\tau) +$

$$\int_{\tau}^t [v(s)g(u(s)) + w(s)] ds \text{ и } \varphi(c, u) = \int_c^u \frac{ds}{g(s)} \quad (c > 0, u < \infty).$$

Тогда, если неравенство $\int_{t_0}^t v(s)ds < \Phi\left(u(t_0) + \int_{t_0}^t w(s)ds, \infty\right)$ выполняется на интервале $[t_0, T_1) \subset [t_0, T)$, то на этом интервале справедлива оценка

$$u(t) \leq \Phi^{-1}\left(c, \Phi\left(c, u(t_0) + \int_{t_0}^t w(s)ds\right) + \int_{t_0}^t v(s)ds\right),$$

которая не зависит от c .

Система дифференциальных уравнений (2.9) с начальной точкой $x(t_0)$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) + R(s, x(s)))ds.$$

Введем функцию $\Phi(c, u) = \int_c^u \frac{ds}{L(s)}$, ($c > 0$, $u < \infty$).

Теорема 2.2.6. [47, с. 80] Если для начального значения $x(t_0) = x_0$ неравенство

$$\int_{t_0}^t k(s)ds < \Phi\left(\|x_0\| + \int_{t_0}^t \eta(s)ds, \infty\right) \quad (2.10)$$

выполняется на интервале $[t_0, T_1) \subset [t_0, T)$, то для норм соответствующих решений $x(t)$ системы (2.9) на этом интервале справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq \Phi^{-1}\left(c, \Phi\left(c, \|x_0\| + \int_{t_0}^t \eta(s)ds\right) + \int_{t_0}^t k(s)ds\right).$$

Следствие 2.2.4. [47, с. 82, следствие 2] Если для начального значения x_0

неравенство (2.10) выполняется на интервале $[t_0, T_1] \subset [t_0, T)$, то соответствующие решения системы (2.9) продолжаемы на этот интервал.

Следствие 2.2.5. [47, с. 82, следствие 3] Если $\Phi(c, \infty) = \infty$, то все решения системы (2.9) продолжаемы на весь интервал $[t_0, T)$ ($T \leq \infty$).

Следствие 2.2.6. [47, с. 82, следствие 4] Если для начального значения x_0 неравенство (2.10) выполняется на интервале $[t_0, T_1] \subset [t_0, T)$, то соответствующие решения системы (2.9) ограничены на интервале $[t_0, T_1)$.

Следствие 2.2.7. [47, с. 82, следствие 5] Если $\int_{t_0}^T k(s)ds < \infty$, $\int_{t_0}^T \eta(s)ds < \infty$ и $\Phi(c, \infty) = \infty$, то все решения системы (2.9) ограничены на всем интервале $[t_0, T)$.

Пример 2.2.2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.9) с $f(t, x) = ax^3$, $a \in \mathbb{R}$, $R(t, x) \equiv 0$ (или уравнения (2.3) с $f(t, x) = ax^3$):

$$\dot{x} = ax^3, \quad (2.11)$$

и начального условия (2.4), где $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$.

Ее решение $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(t_0 - t) + x_0^{-2}}}$ существует на $[t_0, +\infty)$ при $a < 0$ и на

$(-\infty, t_0]$ при $a > 0$. В примере 2.2.1 рассматривалась задача (2.11), (2.4) при $a = -1$.

Правая часть уравнения допускает оценку $|f(t, x)| \leq |a| |x|^3$. Выберем

$$L(s) = |a| |s|^3, \quad k(t) \equiv 1, \quad \eta(t) \equiv 0. \quad \text{Найдем} \quad \Phi \left(|x_0| + \int_{t_0}^t \eta(s)ds, \infty \right) =$$

$$= \Phi(|x_0|, \infty) = \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{ds}{|a| s^3} = \frac{1}{2|a| x_0^2} \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^t k(s)ds = t - t_0. \quad \text{Значит неравенство (2.10) для}$$

следствия 2.2.4 имеет вид $t < \frac{1}{2|a| x_0^2} + t_0$.

По следствию 2.2.4 решения продолжаемы на интервал $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{2|a|x_0^2} \right)$.

При выборе $|x_0| \rightarrow 0$ можно получить интервал $[t_0, T)$, где $T \rightarrow \infty$. Однако непосредственно установить неограниченную продолжаемость решений задачи Коши (2.11), (2.4) для произвольного начального значения $x_0 > 0$ с помощью следствий 2.2.4, 2.2.5 не удастся.

Отметим, что в статье [47] не накладывається условия Липшица для нелинейной правой части дифференциального уравнения и нет единственности решения. Следствия 2.2.4–2.2.7 дополняют результаты исследования неограниченной продолжаемости решений, данные в [36, с. 132-135] для невозмущенной системы (2.3) (системы (2.9) при $R(t, x) \equiv 0$).

2.2.4 Метод продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля. Развитие метода

Описание метода. Рассмотрим задачу Коши (2.3), (2.4):

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t, t_0 \geq 0$;

функция $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Решением задачи Коши (2.3), (2.4) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на некотором интервале $[t_0, t_1)$, $t_1 \leq \infty$, удовлетворяющая системе (2.3) и начальному условию (2.4).

Ниже используются следующие классические понятия и факты (см. [45], [36]).

Определение 2.2.1. Решение $x(t)$ задачи (2.3), (2.4) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех $t \geq t_0$ (то есть на весь полубесконечный интервал $[t_0, \infty)$).

Определение 2.2.2. Решение $x(t)$ имеет *конечное время определения*, если оно не может быть продолжено на весь на весь полубесконечный интервал $[t_0, \infty)$. В этом случае существует такое $c > t_0$, что $\lim_{t \rightarrow c-0} \|x(t)\| = +\infty$.

Решение может быть либо неограниченно продолжаемым, либо иметь конечное время определения. Как показано в следствии 2.2.3, эти две возможности несовместимы и дополняют друг друга.

Скалярная функция $W(x)$ *положительно определена* [36, с. 44-45], если:

а) функция $W(x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, содержащей начало координат;

б) $W(0) = 0$;

в) $W(x) > 0$, $x \neq 0$, $x \in \Omega$.

Скалярная функция $V(t, x)$, $t \geq 0$, *положительно определена* [36, с. 53-54], если:

а) функция $V(t, x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны на $[0, \infty) \times \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая открытая область, содержащая начало координат);

б) $V(t, 0) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$;

в) существует такая положительно определенная функция $W(x)$, что $W(x) \leq V(t, x)$ для всех $x \in \Omega$ и $t \geq 0$.

Производная функции V в силу системы (2.3) (производная вдоль траектории системы (2.3)) определяется как $\dot{V}|_{(2.3)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}V, f(t, x))$, где

$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$ – градиент функции V . Если функция $V(t, x)$ положительно определена и $\dot{V}|_{(2.3)} \leq 0$ для всех $x \in \Omega$, $t \geq 0$, то V называется *функцией Ляпуна*

нова. Подобным образом вводятся определения для $W(x)$.

Представленная ниже теорема о неограниченной продолжаемости решений из [36] является результатом исследований Ж. Ла-Салля (J. La Salle), основанных на прямом методе Ляпунова.

Теорема 2.2.7. Пусть Ω – ограниченное множество пространства \mathbb{R}^n , содержащее начало координат. Пусть существуют положительно определенная скалярная функция $V(t, x)$, заданная для всех $x \in \Omega^c$, $t \geq 0$, и функция $K(t, v) \in C([0, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ такие, что:

а) $V(t, x) \rightarrow +\infty$ при $\|x\| \rightarrow +\infty$ равномерно по t на каждом конечном интервале $[a, b) \subset [0, \infty)$;

б) $\dot{V}|_{(2.3)} \leq K(t, v)$ для всех $t \geq 0$, $x \in \Omega^c$;

в) дифференциальное неравенство

$$\dot{v} \leq K(t, v), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения.

Тогда каждое решение $x(t)$ системы (2.3) неограниченно продолжаемо.

Основная трудность применения теоремы 2.2.7 к конкретным уравнениям или их классам заключается в выдвижении гипотез об эффективной конструкции функций V , K и затем в доказательстве того, что эти функции удовлетворяют условиям теоремы.

Для применения результатов такого рода обычно удобно выбирать

$$K(t, v) = k(t)L(v), \quad (2.13)$$

где $k(t)$ – непрерывная функция при всех $t \geq 0$;

$L(v)$ – положительная и непрерывная функция при всех положительных значениях аргумента.

Тогда неравенство (2.12) принимает вид

$$\frac{\dot{v}}{L(v)} \leq k(t) \quad (2.14)$$

и возможны следующие случаи [36, с. 132-133]:

а) если $\int_c^{\infty} \frac{dv}{L(v)} = +\infty$ ($c > 0$), то неравенство (2.14) не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения;

б) если $\int_c^{\infty} \frac{dv}{L(v)} = +\infty$ ($c > 0$) и $\int_{t_0}^{\infty} k(t)dt < +\infty$, то неравенство (2.14) не имеет ни

одного положительного неограниченного при $t \geq 0$ решения.

В качестве примера системы, у которой все решения неограниченно продолжаемы, можно привести систему линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, где $A(t)$ – квадратная матрица порядка n , $f(t)$ – n -мерный вектор и $A(t)$, $f(t)$ непрерывны при $t \geq 0$. Все решения этого уравнения определены на луче $[0, \infty)$.

Пример 2.2.3. Рассмотрим задачу Коши (2.11), (2.4), где $t, t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a < 0$. Ее решение существует на $[t_0, +\infty)$.

Определим функцию $V(x) = x^2$. Тогда $\dot{V}|_{(2.11)} = 2ax^4 \leq 0$ для всех $t \geq 0$, $|x| \geq R$, где R – некоторое положительное число. Поскольку неравенство $\dot{v} \leq 0$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, то по теореме 2.2.7 все решения уравнения (2.11) неограниченно продолжаемы, т. е. существуют на $[t_0, +\infty)$.

В [36] представлена следующая теорема о наличие конечного времени определения у решений, которая будет использоваться при исследовании устойчивости дифференциально-алгебраических уравнений.

Теорема 2.2.8. Пусть множество Ω обладает тем свойством, что каждое решение $x(t)$, начинающееся в этом множестве, все время остается в нем. Пусть существуют положительно определенная скалярная функция $V(t, x)$ и функция $K(t, v) \in C([0, \infty) \times [0, \infty), \mathbb{R})$ такие, что:

а) $V(t, x) > 0$ при всех $t \geq 0, x \in \Omega$;

б) $\dot{V}|_{(2.3)} \geq K(t, v)$ для всех $t \geq 0, x \in \Omega$;

в) дифференциальное неравенство

$$\dot{v} \geq K(t, v), \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

не имеет ни одного неограниченно продолжаемого положительного решения.

Тогда каждое решение $x(t)$ системы (2.3), удовлетворяющее начальному условию (2.4), где $x_0 \in \Omega$, имеет конечное время определения.

Для неравенства (2.15) выберем функцию $K(t, v)$ вида (2.13), где $k(t)$ и $L(v)$ обладают аналогичными свойствами. Тогда справедливо следующее утверждение [36, с. 133]:

в) если $\int_c^\infty \frac{dv}{L(v)} < +\infty$ ($c > 0$) и $\int_{t_0}^\infty k(t)dt = +\infty$, то неравенство (2.15) не имеет

ни одного неограниченно продолжаемого положительного решения.

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля [36, с. 136-138] $\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = f(t)$, $\varepsilon < 0$, где внешнее воздействие $f(t)$ непрерывно и ограничено при всех $t \geq 0$. Введем новую переменную $y = \dot{x} - \varepsilon(x - x^3/3)$, тогда уравнение Ван-дер-Поля эквивалентно системе
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(x - x^3/3), \\ \dot{y} = -x + f(t). \end{cases} \quad \text{Все}$$
 решения данной системы, начинающиеся внутри области $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a > 0, y \leq 0, x + y \geq 0\}$, имеют конечное время определения.

Развитие метода. В [73] предложено усовершенствование метода продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля, ослабляющее ограничения на нелинейную правую часть дифференциального уравнения.

Функция $f_T(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & 0 \leq t \leq T, \\ f(T, x), & t > T, \end{cases}$ где $T > 0$ – произвольный параметр,

называется *срезкой* функции $f(t, x)$ по переменной t . Заметим, что гладкость функции $f_T(t, x)$ такая же, как и у функции $f(t, x)$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_T(t, x). \quad (2.16)$$

Производная функции V в силу системы (2.16) имеет вид

$$\dot{V}|_{(2.16)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}V, f_T(t, x)).$$

Следующее обобщение теоремы 2.2.7 о неограниченной продолжаемости решений из [36], опубликованное автором в [73], будет использоваться в дальнейших результатах исследований.

Лемма 2.2.4. Пусть существуют функция $K(t, v) \in C([0, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ и положительно определенная функция $V(t, x) \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такие, что:

а) $V(t, x) \rightarrow +\infty$ при $\|x\| \rightarrow +\infty$ равномерно по t на каждом конечном интервале $[a, b) \subset [0, \infty)$;

б) для любого $T > 0$ найдется ограниченное множество $\Omega_T \subset \mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, такое, что

$$\dot{V}|_{(2.16)} \leq K(t, V(t, x)), \quad x \in \Omega_T^c, \quad t \geq 0;$$

в) дифференциальное неравенство $\dot{v} \leq K(t, v)$, $t \geq 0$ не имеет ни одного

положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения.

Тогда каждое решение $x(t)$ системы (2.3) неограниченно продолжаемо.

Доказательство. Рассмотрим систему (2.16) при фиксированном $T < \infty$. На основании теоремы 2.2.7 каждое решение $x_T(t)$ системы (2.16) неограниченно продолжаемо. В силу определения функции $f_T(t, x)$ каждое решение $x_T(t)$ уравнения (2.16) в интервале $[0, T]$ является также решением $x(t)$ системы (2.3) в том же интервале, причем справедливо и обратное заключение. Допустим, решение $x(t)$ системы (2.3) имеет конечное время определения. Тогда существует $\tilde{T} < \infty$ такое, что $\lim_{t \rightarrow \tilde{T}-0} \|x(t)\| = +\infty$. Решение $x_{\tilde{T}}(t)$ системы (2.16) совпадает с решением $x(t)$ на $[0, \tilde{T})$, следовательно, $x_{\tilde{T}}(t)$ имеет конечное время определения. Но по доказанному выше, в силу произвольности выбора $T < \infty$, решение $x_{\tilde{T}}(t)$ неограниченно продолжаемо, что приводит нас к противоречию.

Лемма доказана.

2.3 Получение условий глобальной разрешимости полулинейного дифференциального уравнения с применением дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля

Рассмотрим обыкновенное полулинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Sx + \Phi(t, x) + e(t), \quad (2.17)$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;

S – постоянная вещественная матрица порядка n ;

$e(t)$, $\Phi(t, x)$ – n -мерные вектор-функции.

Выделение в правой части уравнения слагаемого, зависящего только от времени t , обусловлено тем, что в практических задачах нелинейная функция

$f(t, x)$ в (2.3) часто имеет вид $f(t, x) = \varphi(x) + e(t)$.

На основе теоремы [73, Теорема 4.1] и следствия [73, следствие 4.1] получен следующий результат.

Теорема 2.3.1. Пусть функция $\Phi(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и ее частная производная $\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x}$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $e(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Пусть существует постоянная матрица $H = H^* > 0$ и для любого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что

$$(Hx, \Phi(t, x)) \leq 0, \quad \|x\| \geq R_T, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.18)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ существует единственное решение уравнения (2.17) на полуоси $[t_0, \infty)$, удовлетворяющее начальному условию (2.4).

Доказательство. Вследствие указанной гладкости функций $e(t)$ и $\Phi(t, x)$ функция $\Psi(t, x) = Sx + \Phi(t, x) + e(t)$ является непрерывной и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, по теореме

2.2.2 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.17), (2.4) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$.

Введем функцию $V(x) = \frac{1}{2}(Hx, x)$. Градиент функции V равен $\text{grad} V(x) = Hx$, а производная функции V в силу системы (2.17) имеет вид $\dot{V}|_{(2.17)} = (Hx, Sx + \Phi(t, x) + e(t))$.

Для произвольного фиксированного числа $T > 0$ введем срезку функции $\Phi(t, x)$ по переменной t : $\Phi_T(t, x) = \begin{cases} \Phi(t, x), & 0 \leq t \leq T, \\ \Phi(T, x), & t > T. \end{cases}$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Sx + \Phi_T(t, x) + e(t). \quad (2.19)$$

Поскольку $H = H^* > 0$, то существует H^{-1} и $H^{1/2} = (H^{1/2})^*$, причем

$$\begin{aligned} |(Hx, Sx)| &\leq \|H\| \|S\| \|x\|^2 = \|H\| \|S\| (H^{-1}Hx, x) \leq \\ &\leq \|H\| \|S\| \|H^{-1}\| \|H^{1/2}x\|^2 = \|H\| \|S\| \|H^{-1}\| (Hx, x). \end{aligned}$$

Выбирая число R_T из условия (2.18) и увеличивая его, если необходимо, так, чтобы выполнялось неравенство $R_T \geq \sqrt{\|H^{-1}\|}$, получаем оценку для производной функции $V(x)$ в силу системы (2.19):

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2.19)} &= (Hx, Sx + \Phi_T(t, x)) + (Hx, e(t)) \leq |(Hx, Sx)| + |(Hx, e(t))| \leq \\ &\leq \|H\| \|S\| \|H^{-1}\| (Hx, x) + \sqrt{(Hx, x)} \sqrt{(He(t), e(t))} \leq \left[\|H\| \|S\| \|H^{-1}\| + \right. \\ &\left. + \sqrt{(He(t), e(t))} \right] (Hx, x) = 2 \left[\|H\| \|S\| \|H^{-1}\| + \sqrt{(He(t), e(t))} \right] V(x), \end{aligned}$$

которая выполнена для всех $\|x\| \geq R_T$ и $t \geq 0$.

Обозначим $k(t) = 2 \left[\|H\| \|S\| \|H^{-1}\| + \sqrt{(He(t), e(t))} \right]$, $K(t, V) = k(t)V$. Так как неравенство $\dot{v} \leq K(t, v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, то по лемме 2.2.4 каждое решение $x(t)$ системы (2.17) неограниченно продолжаемо.

Покажем, что каждое решение $x(t)$ задачи Коши (2.17), (2.4) допускает единственное продолжение на $[t_0, \infty)$. Доказано, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи (2.17), (2.4) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существуют точка $t_1 \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\hat{x}(t)$ с общим

значением $x_* = x(t_1) = \hat{x}(t_1)$. В то же время на некотором интервале $[t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$, должно существовать единственное решение дифференциального уравнения (2.17) с начальным значением $x(t_1) = x_*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

2.4 Метод спектральных проекторов типа Рисса для регулярного пучка операторов

Пусть $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейные операторы, которым соответствуют квадратные, вообще говоря, необратимые, матрицы A , B и $\lambda A + B$ – регулярный пучок (см. определение 2.1.3).

Оператор $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$, которому соответствует комплексная матрица $(\lambda A + B)^{-1}$, называется *резольвентой* пучка $\lambda A + B$. Предполагается, что $\lambda A + B$ – пучок индекса 1, то есть выполнено ограничение:

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \|R(\lambda)\| \leq C_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq C_2, \quad (2.20)$$

где норма резольвенты $R(\lambda)$ рассматривается в комплексном пространстве.

Обобщая полученные Риссом (см. [30]) пару спектральных проекторов и расщепление оператора по изолированной компоненте его спектра, А. Г. Руткас в статье [50] ввел две пары спектральных проекторов типа Рисса и расщепление регулярного пучка ограниченных операторов $\lambda A + B$ с вырожденным оператором A . Результаты этой статьи уточнены в [46] для пучка замкнутых операторов.

Спектральные проекторы пучка $\lambda A + B$, удовлетворяющего условию (2.20), могут быть вычислены с помощью контурного интегрирования в комплексной плоскости по границе круга $|\lambda| \leq C_2$, внутренность которого содержит всю конечную часть спектра пучка [50]:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=c_2} R(\lambda) d\lambda A, & P_2 &= E - P_1, \\
Q_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=c_2} AR(\lambda) d\lambda, & Q_2 &= E - Q_1,
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

где E – единичная матрица, причем эти проекторы являются вещественными (см. [18]).

Условие (2.20) означает, что точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A + \mu B)^{-1}$. Очевидно, спектральные проекторы (2.21) могут быть вычислены с помощью вычетов:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \operatorname{Res}_{\mu=0} \left(\frac{(A + \mu B)^{-1} A}{\mu} \right), & P_2 &= E - P_1, \\
Q_1 &= \operatorname{Res}_{\mu=0} \left(\frac{A(A + \mu B)^{-1}}{\mu} \right), & Q_2 &= E - Q_1.
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

Две пары взаимно дополнительных проекторов P_1, P_2 и Q_1, Q_2 расщепляют пространство \mathbb{R}^n в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2 = Y_1 \dot{+} Y_2, \quad X_j = P_j \mathbb{R}^n, \quad Y_j = Q_j \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,
\tag{2.23}$$

причем суженные операторы $A_j = A|_{X_j} : X_j \rightarrow Y_j$, $B_j = B|_{X_j} : X_j \rightarrow Y_j$, $j = 1, 2$, таковы, что $A_2 = 0$, существуют обратные операторы $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$, $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ и выполнены равенства (см. [18, 50]):

$$AP_j = Q_j A, \quad BP_j = Q_j B, \quad j = 1, 2.
\tag{2.24}$$

В [120] введен обратимый оператор

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B, \quad GX_j = Y_j, \quad j=1,2, \quad (2.25)$$

обладающий свойствами

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \quad G^{-1}BP_2 = P_2, \quad AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2. \quad (2.26)$$

Метод спектральных проекторов типа Рисса позволяет привести исходное ДАУ к эквивалентной системе из чисто дифференциального и чисто алгебраического уравнений. Применяя к уравнению (2.1) проекторы Q_1 , Q_2 и учитывая

$$(2.24), \text{ получим эквивалентную (2.1) систему } \begin{cases} \frac{d}{dt}(AP_1x) + BP_1x = Q_1f(t, x), \\ Q_2f(t, x) - BP_2x = 0. \end{cases} \text{ Далее,}$$

используя G^{-1} и учитывая (2.26), получим систему, эквивалентную предыдущей:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1x) + G^{-1}BP_1x = G^{-1}Q_1f(t, x), \\ G^{-1}Q_2f(t, x) - P_2x = 0. \end{cases}$$

Данный метод используется при исследовании разрешимости (см. монографии [13, 18] и библиографии в них) и разработке численных методов решения [44, 75] дифференциально-алгебраических уравнений. Результаты применения метода отражены в доказательстве основных теорем.

2.5 Блочные представления сингулярного операторного пучка и его компонент, соответствующие разложения пространств и проекторы

Пусть даны линейные операторы $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, которым соответствуют $(m \times n)$ -матрицы A, B . Ранг сингулярного пучка $\lambda A + B$ обозначим через $r(A, B) = rg(\lambda A + B)$ (см. определение 2.1.2).

Поскольку λ – комплексный параметр, в случае необходимости вещественные операторы A, B , действующие из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , заменяются на их комплексные

расширения (см. определение в [76]) \hat{A} , \hat{B} , действующие из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Здесь комплексное пространство \mathbb{C}^n (\mathbb{C}^m), состоящее из всех пар (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}^m), записываемых в виде $(x, y) = x + iy$, является комплексификацией вещественного пространства \mathbb{R}^n (\mathbb{R}^m). Если $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис \mathbb{R}^n , то $\{x_1, \dots, x_n\}$ будет базисом \mathbb{C}^n [76]. Следовательно, матрицы операторов A , B относительно базисов $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{R}^m$ совпадают с матрицами их комплексных расширений \hat{A} , \hat{B} относительно тех же базисов в \mathbb{C}^n , \mathbb{C}^m и $\hat{A}(x + iy) = A(x + iy)$, $\hat{B}(x + iy) = B(x + iy)$. Очевидно, ранг пучка $\lambda A + B$ и его комплексного расширения $\lambda \hat{A} + \hat{B}$ совпадают.

Существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \quad (2.27)$$

относительно которых сингулярный пучок операторов $\lambda A + B$ принимает блочный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda A_s + B_s & 0 \\ 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

где $\lambda A_s + B_s$ – чисто сингулярный пучок (т. е. от него нельзя отделить регулярный блок);

$\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок.

В [19] описано приведение сингулярного пучка матриц к каноническому квазидиагональному виду типа (2.28), где регулярный блок имеет каноническую форму Вейерштрасса и сингулярный блок имеет каноническую форму Кронекера. В [56] разбиение пучка на регулярную и сингулярную компоненты названо RS-расщеплением пучка.

Введем две пары взаимно дополнительных проекторов $S: \mathbb{R}^n \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^n \rightarrow X_r$ и $F: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_s$, $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_r$ на подпространства из разложений (2.27), $E_{\mathbb{R}^n} = S + P$, $E_{\mathbb{R}^m} = F + Q$. Пара сингулярных подпространств X_s, Y_s и пара регулярных подпространств X_r, Y_r инвариантны относительно операторов A, B , то есть $QA = AP$, $QB = BP$, $FA = AS$, $FB = BS$.

Рассмотрим ядро $Ker(\lambda A + B) = \{x(\lambda) \mid (\lambda A + B)x(\lambda) \equiv 0\}$ и область значений $Im(\lambda A + B) = \{y(\lambda) \mid \exists x: (\lambda A + B)x = y(\lambda)\}$ пучка $\lambda A + B$. Размерность ядра $Ker(\lambda A + B)$ равна размерности ядра $\dim Ker(\lambda \hat{A} + \hat{B})$ комплексного расширения пучка $\lambda A + B$ (аналогично для образа пучка). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – некоторое фиксированное число. Поскольку $\dim Ker(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = \dim \mathbb{C}^n - \dim Im(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = n - rg(\lambda \hat{A} + \hat{B})$, то $\dim Ker(\lambda A + B) = n - r(A, B)$. Когда λ является параметром, ранг $r(A, B) = rg(\lambda A + B)$ по определению есть постоянное число. Следовательно, $\dim Ker(\lambda A + B) = n - r(A, B)$ – также постоянное число [93].

В случае, когда $r(A, B) = m$ и $m < n$ (соответствующая система уравнений *недоопределена*, т. е. число уравнений меньше числа неизвестных), существует разложение сингулярного пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = (A_{gen} \ 0): X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_s, \quad B_s = (B_{gen} \ B_{und}): X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \rightarrow Y_s, \quad (2.29)$$

где оператор $A_{gen} \in L(X_{s_1}, Y_s)$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$.

Существуют проекторы $S_i: \mathbb{R}^n \rightarrow X_{s_i}$, $i = 1, 2$ на подпространства X_{s_i} такие, что $S = S_1 + S_2$, $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$, $A S_2 = 0$. Для построения сингулярных пространств найдем максимальное количество линейно независимых решений $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_N(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A + B)x = 0. \quad (2.30)$$

Рассматриваются решения, являющиеся полиномами от λ :

$$x_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{k_j} (-1)^i \lambda^i x_{ji}, \quad j = \overline{1, N}, \text{ где } x_{ji} \neq 0, i = \overline{0, k_j}, k_j - \text{степень } x_j(\lambda). \text{ Многочленные столбцы } x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda) \text{ являются линейно независимыми, если ранг матрицы, составленной из этих столбцов, равен } N \text{ [19]. Поскольку набор столбцов } \{x_1(\lambda), \dots, x_N(\lambda)\} \text{ образует базис } Ker(\lambda A + B), \text{ то } N = n - r(A, B) \text{ [93]. Если подставить } x_j(\lambda) \text{ в (2.30) и приравнять коэффициенты при } \lambda \text{ к нулю, то получим набор равенств: } Bx_{j0} = 0, Bx_{j1} = Ax_{j0}, \dots, Bx_{jk_j} = Ax_{jk_j-1}, Ax_{jk_j} = 0. \text{ Среди всех решений уравнения (2.30) можно выбрать набор линейно независимых решений } \{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N \text{ (наборы определяются неоднозначно) с наименьшими возможными степенями, такими что } k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N, \sum_{j=1}^N k_j \leq m, \sum_{j=1}^N k_j + N \leq n. \text{ Тогда соответствующие системы векторов } \{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}, \{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j} = \{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j-1} \text{ линейно независимы и являются базисами своих линейных оболочек, образующих пространства } X_s = Lin\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}, Y_s = Lin\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j}. \text{ Если взять произвольный максимальный набор линейно независимых решений } \{x_j(\lambda)\}_{j=1}^N \text{ уравнения (2.30), то системы } \{x_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}, \{Bx_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j} \text{ могут содержать линейно зависимые вектора. При этом их линейные оболочки образуют пространства } X_s, Y_s, \text{ введенные выше, и базисы этих пространств можно выбрать так, чтобы прямое разложение } X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \text{ удовлетворяло (2.29).}$$

Если $r(A, B) = n$ и $n < m$ (соответствующая система уравнений *переопределена*, т. е. число уравнений больше числа неизвестных), сингулярное пространство Y_s разлагается в прямую сумму подпространств $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} \\ 0 \end{pmatrix}: X_s \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} \\ B_{ov} \end{pmatrix}: X_s \rightarrow Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad (2.31)$$

где $A_{gen} \in L(X_s, Y_{s_1})$ имеет обратный оператор $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$.

Существуют проекторы $F_i: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{s_i}$, $i=1,2$ на подпространства Y_{s_i} такие, что $F = F_1 + F_2$, $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$, $F_2 A = 0$. Найдем линейно независимые решения $y_1(\lambda), \dots, y_M(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A^T + B^T)y = 0, \quad (2.32)$$

где $\lambda A^T + B^T$ – транспонированный пучок $\lambda A + B$, $M = m - r(A, B)$ [93].

Как в предыдущем случае, строим подпространства \tilde{X}_s , \tilde{Y}_s для пучка $\lambda A^T + B^T$. Если \tilde{S} , \tilde{S}_1 , \tilde{S}_2 , \tilde{F} проекторы, полученные для $\lambda A^T + B^T$, то $S = \tilde{F}^T$, $F = \tilde{S}^T$, $F_1 = \tilde{S}_1^T$, $F_2 = \tilde{S}_2^T$ – проекторы на подпространства X_s , Y_s , Y_{s_1} , Y_{s_2} для исходного пучка $\lambda A + B$.

В общем случае сингулярные пространства X_s , Y_s разлагаются в прямые суммы подпространств $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ таких, что [93]

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: X_s \rightarrow Y_s, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} & B_{und} \\ B_{ov} & 0 \end{pmatrix}: X_s \rightarrow Y_s, \quad (2.33)$$

где $A_{gen} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$ имеет обратный оператор $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$, $B_{gen} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $B_{und} \in L(X_{s_2}, Y_{s_1})$, $B_{ov} \in L(X_{s_1}, Y_{s_2})$. Аналогично вводим проекторы $S_i: \mathbb{R}^n \rightarrow X_{s_i}$, $F_i: \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{s_i}$, $i=1,2$, $F = F_1 + F_2$, $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$, $S = S_1 + S_2$, $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$. Тогда $A_{gen} = F_1 A S_1|_{X_{s_1}}$, $B_{gen} = F_1 B S_1|_{X_{s_1}}$, $B_{und} = F_1 B S_2|_{X_{s_2}}$,

$B_{ov} = F_2BS_1|_{X_{s_1}}$, $AS_2 = 0$, $F_2A = 0$, $F_2BS_2 = 0$. В данном случае, для построения проекторов и соответствующих подпространств необходимо исследовать решения уравнений (2.30), (2.32). Общее максимальное количество $N = n + m - 2r(A, B)$ линейно независимых решений уравнений (2.30), (2.32) назовем *дефектом пучка* $\lambda A + B$ [93]. Для пучка ранга $r(A, B) = m < n$ дефект равен $N = n - r(A, B)$. Если пучок имеет ранг $r(A, B) = n < m$, его дефект $N = M = m - r(A, B)$. Очевидно, дефекты исходного и транспонированного пучка будут совпадать, дефект регулярного пучка будет равен нулю.

Пусть $\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок индекса 1. Тогда существуют вещественные спектральные проекторы $\tilde{P}_i : X_r \rightarrow X_i$, $\tilde{Q}_i : Y_r \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$, которые могут быть вычислены контурным интегрированием или с помощью вычетов и расщепляют пространства X_r , Y_r в прямые суммы подпространств [50] (см. подраздел 2.4):

$$X_r = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2. \quad (2.34)$$

Индукцированные операторы $A_i, B_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$ таковы, что $A_2 = 0$, существуют $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ [50]. Обозначим через $P_i = \tilde{P}_i P : \mathbb{R}^n \rightarrow X_i$, $Q_i = \tilde{Q}_i Q : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_i$ расширения проекторов \tilde{P}_i , \tilde{Q}_i , $i = 1, 2$, $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$, при этом для расширенных проекторов сохраняются свойства (2.24) исходных.

Предложенная структура операторов сингулярной компоненты пучка и рассмотренная структура операторов регулярной компоненты позволяют привести исходное сингулярное ДАУ к эквивалентной системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений. Данный метод используется для получения условий существования и признаков единственности глобального решения сингулярного ДАУ.

Выводы по разделу 2

1. Теоремы 2.2.1, 2.2.3 позволяют доказать существование непродолжаемого решения, но не могут однозначно определить его поведение. Теорема 2.2.5 (Уинтнера) может быть использована для определения интервалов существования решений некоторых дифференциальных уравнений и, с учетом замечания 2.2.3, для проверки существования решения на интервале $[t_0, \infty)$.

2. Среди рассмотренных методов исследования глобальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений наиболее эффективным для практического применения и внедрения в дальнейшие исследования ДАУ является метод продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля.

3. Получил дальнейшее развитие метод продолжения решений с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля, а именно, получено обобщение теоремы Ла-Салля, ослабляющее ограничения на нелинейную часть дифференциального уравнения, что позволяет получать условия неограниченной продолжаемости решений при более общих предположениях относительно нелинейной функции.

4. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши для обыкновенного полулинейного дифференциального уравнения. Теорема не содержит ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет получать условия глобальной разрешимости уравнений динамики для более широких классов прикладных задач, в которых возникают нелинейные математические модели с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

5. Предложена определенная блочная структура операторов сингулярного пучка и его компонент, а также способ нахождения соответствующих сингулярных подпространств. Эта структура позволяет получить условия существования и признаки единственности глобального решения сингулярного уравнения.

Основные результаты раздела опубликованы в [64, 67, 71, 73, 74, 93].

РАЗДЕЛ 3

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Предварительные сведения

Далее будут использоваться следующие определения.

Определение 3.1.1. *Аддитивным разложением единицы E_Z в s -мерном линейном нормированном пространстве Z называется система проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$,*

$\Theta_k : Z \rightarrow Z$ таких, что $\Theta_i \Theta_j = \Theta_j \Theta_i = \delta_{ij} \Theta_i$ (δ_{ij} – символ Кронекера) и $E_Z = \sum_{k=1}^s \Theta_k$.

Аддитивное разложение единицы порождает прямое разложение Z в сумму s одномерных подпространств: $Z = Z_1 \dot{+} Z_2 \dot{+} \dots \dot{+} Z_s$, $Z_k = \Theta_k Z$.

Определение 3.1.2. [55] Рассмотрим оператор-функцию $\Phi(x) : D \rightarrow L(X, Z)$, $D \subset X$, где X, Z – s -мерные линейные нормированные пространства. Оператор-функция $\Phi(x)$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u, v\}$ векторов $u, v \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{u, v\}$ и некоторого аддитивного разложения $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ единицы E_Z оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in L(X, Z)$ обратим: $\Lambda^{-1} \in L(Z, X)$.

Представим отображение $\Phi(x) : D \rightarrow L(X, Z)$ в виде матрицы в некоторых базисах пространств X, Z :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \dots & \Phi_{1s}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{s1}(x) & \dots & \Phi_{ss}(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 3.1.2 может быть сформулировано следующим образом: оператор-функция $\Phi(x)$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке

$\text{conv}\{u, v\}$ векторов $u, v \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{u, v\}$ обратим оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}_1) & \cdots & \Phi_{1s}(\tilde{x}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(\tilde{x}_s) & \cdots & \Phi_{ss}(\tilde{x}_s) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, из базисной обратимости оператор-функции $\Phi(x)$ на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u, v\}$ следует обратимость в любой точке $x \in \text{conv}\{u, v\}$ ($x = \lambda v + (1-\lambda)u, \lambda \in [0, 1]$). Обратное утверждение не верно, кроме случая, когда пространства X, Z одномерны. Приведем пример.

Пусть $X = Z = \mathbb{R}^2$, $D = \text{conv}\{u, v\}$, $u = (1, -1)^T, v = (1, 1)^T, x = (x_1, x_2)^T \in D$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 1 \\ -1 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$. Для набора векторов $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} \subset \text{conv}\{u, v\}$ оператор Λ имеет

вид $\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 & 1 \\ -1 & \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det \Phi(x) = x_1^2 x_2^2 + 1 \neq 0$ для любого $x \in D$, то

$\Phi(x)$ обратима на D . Однако оператор Λ необратим для $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} = \{u, v\}$ и, следовательно, функция $\Phi(x)$ не является базисно обратимой на D . Если же взять $u = (1, 0)^T$, базисная обратимость будет иметь место.

3.2 Существование и единственность глобальных решений дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным характеристическим пучком

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (2.1) $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x)$ с начальным условием

(2.2) $x(t_0) = x_0$, где $t, t_0 \geq 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная

функция, $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейные операторы, вообще говоря, необратимые, $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1 (см. определение в подразделе 2.4).

Существуют вещественные спектральные проекторы (2.21) $P_i: \mathbb{R}^n \rightarrow X_i$, $Q_i: \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$, которые расщепляют пространство \mathbb{R}^n в прямые суммы подпространств (2.23), и обратимый оператор G , обладающий свойствами (2.26).

Относительно разложения (2.23) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = P_1 x \in X_1$, $x_2 = P_2 x \in X_2$.

Обозначим $\dim X_1 = a$, $\dim X_2 = d$ ($d = n - a$). В силу (2.23) $\text{rg} P_j = \dim X_j$, $j = 1, 2$. В $(n \times 2n)$ -матрице $P_{1,2} = (P_1 \ P_2)$ можно выбрать n линейно независимых столбцов $\{p_i\}_{i=1}^n$, где $\{p_1, \dots, p_a\}$ – столбцы матрицы P_1 , а $\{p_{a+1}, \dots, p_n\}$ – столбцы матрицы P_2 . Две системы векторов $\bar{e} = \{e_i\}_{i=1}^n$, $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^n$ образуют соответственно два базиса в \mathbb{R}^n : «старый» координатный базис \bar{e} и «новый» базис \bar{p} , расщепляющий пространство \mathbb{R}^n в том смысле, что набор векторов $\{p_1, \dots, p_a\}$ образует базис подпространства X_1 , а набор векторов $\{p_{a+1}, \dots, p_n\}$ – базис подпространства X_2 , где X_1, X_2 из разложения (2.23).

Обозначим через x^e , x^p векторы-столбцы из координат вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в базисах \bar{e} , \bar{p} соответственно и заметим, что $x^e = x$. Обратимая $(n \times n)$ -матрица $P = (p_1 \cdots p_n)$ задает в базисе \bar{e} оператор $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ перехода от базиса \bar{e} к базису \bar{p} : $P e_i = p_i$, $i = \overline{1, n}$. Координаты вектора x в базисах \bar{e} , \bar{p} преобразуются с помощью матриц P , P^{-1} [19]: $x = x^e = P x^p$, $x^p = P^{-1} x$.

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из разложения по базису \bar{p} , имеющего вид $x = \sum_{i=1}^a z_i p_i + \sum_{k=1}^{n-a} v_k p_{a+k}$, вытекает представление: $x^p = \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$, где $z \in \mathbb{R}^a$, $v \in \mathbb{R}^d$, $d = n - a$, $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1} P_1 x$, $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} P_2 x$. Значит оператор $P: \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ действует так, что $P(\mathbb{R}^a \times \{0\}) = X_1$, $P(\{0\} \times \mathbb{R}^d) = X_2$.

Относительно разложения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^a \times \{0\} \dot{+} \{0\} \times \mathbb{R}^d$ в базисе \bar{p} проекторы P_1, P_2 вида (2.21) имеют блочную структуру

$$P^{-1}P_1P = \begin{pmatrix} E_{\mathbb{R}^a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^a \times \{0\}, \quad P^{-1}P_2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^d.$$

В работах [69, 72, 73] представлена теорема существования и единственности глобального решения с использованием теорем о неподвижной точке. Логическим продолжением результатов этих исследований являются полученные ниже теорема и ее следствие, которые основаны на результатах из статьи [55] и доказаны с использованием теорем о неявной функции.

Теорема 3.2.1. Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1. Пусть

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t, x)] = 0\} \quad (3.1)$$

и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, P_1x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, P_1x + u)) - B \right] P_2 \quad (3.2)$$

$(\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2)))$ является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Пусть существует самосопряженный положительный оператор $H \in L(X_1)$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что

$$(HP_1x, G^{-1}Q_1f(t, x)) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \|P_1x\| \geq R_T. \quad (3.3)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы Q_1, Q_2 и оператор G^{-1} получим эквивалентную (2.1) систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P_1x) + G^{-1}BP_1x &= G^{-1}Q_1f(t, x), \\ G^{-1}Q_2f(t, x) - P_2x &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем суженные операторы $P_a = P|_{\mathbb{R}^a} : \mathbb{R}^a \rightarrow X_1$, $P_d = P|_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы, $P_a^{-1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1} : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Тогда $z = P_a^{-1}P_1x$, $v = P_d^{-1}P_2x$, $x = P_az + P_dv$. Уравнения системы (3.4) умножим на P_a^{-1} , P_d^{-1} соответственно и получим эквивалентную систему

$$\frac{d}{dt}z + P_a^{-1}G^{-1}BP_az = P_a^{-1}G^{-1}Q_1\tilde{f}(t, z, v), \quad (3.5)$$

$$P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v = 0, \quad (3.6)$$

где $\tilde{f}(t, z, v) = f(t, P_az + P_dv)$.

Рассмотрим отображение

$$F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2\tilde{f}(t, z, v) - v. \quad (3.7)$$

Оно непрерывно на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1} \frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t, x))P_a,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) = P_d^{-1} \left[G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - P_2 \right] P_d = P_d^{-1} G^{-1} \Phi(P_d v) P_d,$$

где последнее равенство эквивалентно (3.2) при $u = P_d v$, а $P_d^{-1} P_2 P_d = E_{\mathbb{R}^d}$.

Согласно базисной обратимости функции (3.2) для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$ ($i = 1, 2$), существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1 = \sum_{k=1}^d \Theta_k \Phi(\tilde{u}_k) \in L(X_2, Y_2)$ является обратимым для любого набора векторов $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^d \subset \text{conv}\{u_1, u_2\}$. С помощью обратимого оператора $N = P_d^{-1} G^{-1} : Y_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ введем систему одномерных проекторов $\hat{\Theta}_k = N \Theta_k N^{-1}$, которые образуют аддитивное разложение $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ единицы в \mathbb{R}^d . Выберем любые $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$ такие, что (t, z, v_i) принадлежат

$$\tilde{L}_0 = \left\{ (t, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d \mid P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = 0 \right\}, \quad (3.8)$$

и любые $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$. Очевидно, условия $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$ и $(t, P_1 x + P_2 x) \in L_0$ эквивалентны. Поскольку для $u_i = P_d v_i$, $\tilde{u}_k = P_d \tilde{v}_k$ оператор Λ_1 обратим, то обратим и действующий в \mathbb{R}^d оператор

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, \tilde{v}_k) = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k P_d^{-1} G^{-1} \Phi(P_d \tilde{v}_k) P_d = N \Lambda_1 P_d.$$

Таким образом, для любых $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1, 2$, функция $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v_1, v_2\}$. Следовательно, для любой точки $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$ существует обратный оператор

$$\left[\frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) \right]^{-1}.$$

Пусть t_* – произвольная точка из $[0, \infty)$. Выберем $z_* \in \mathbb{R}^a$, $v_* \in \mathbb{R}^d$ так, что-

бы $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, это возможно в силу условия (3.1). По теоремам о неявной функции [81], [32] существуют окрестности $U_\delta = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v = v(t, z) \in C(U_\delta, U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по z , такая, что $F(t, z, v(t, z)) = 0$, $(t, z) \in U_\delta$, и $v(t_*, z_*) = v_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $t \in [0, \infty)$, $z \in D_z$, $v \in D_v$, где области $D_z \subset \mathbb{R}^a$, $D_v \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $P_a^{-1}P_1x_0 \in D_z$, $P_d^{-1}P_2x_0 \in D_v$, $[0, \infty) \times D_z \times D_v = \tilde{L}_0$.

Определим глобальную функцию $v = \eta(t, z) : [0, \infty) \times D_z \rightarrow D_v$ в точке (t_*, z_*) как $\eta(t_*, z_*) = v(t_*, z_*)$. Так как $v(t_*, z_*) = v_*$ и $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, то $(t_*, z_*, \eta(t_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$.

Рассмотрим точки $(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1, 2$, очевидно, $F(t, z, v_i) = 0$. Проекции $F_k(t, z, v) = \hat{\Theta}_k F(t, z, v)$, $k = \overline{1, d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфных \mathbb{R} . Согласно формуле конечных приращений [81]: $F_k(t, z, v_2) - F_k(t, z, v_1) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$. Следовательно, $\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $k = \overline{1, d}$, откуда получаем, что $\Lambda_2(v_2 - v_1) = 0$ и, значит, $v_2 = v_1$.

Доказано, что

$$\forall (t, z) \in [0, \infty) \times D_z \exists ! v \in D_v : (t, z, v) \in \tilde{L}_0, \quad (3.9)$$

и в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_z$ существует единственное решение $v = v(t, z)$ уравнения (3.6), непрерывное по совокупности переменных t , z и непрерывно дифференцируемое по z . Значит функция $v = \eta(t, z)$ в этой окрестности совпадает с $v(t, z)$ и является решением уравнения (3.6) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t, z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t, z)$, обладающая в некоторой точке $(t_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_z$ теми же

свойствами, что и $v = \eta(t, z)$, то, в силу (3.9), $\eta(t_*, z_*) = \mu(t_*, z_*) = v_*$. Следовательно, $\eta(t, z) = \mu(t, z)$ на $[0, \infty) \times D_z$.

Подставив функцию $v = \eta(t, z)$ в (3.5) и обозначив $g(t, z) = Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z))$, получим:

$$\frac{d}{dt} z = P_a^{-1} G^{-1} [-BP_a z + g(t, z)]. \quad (3.10)$$

В силу свойств функций $\eta(t, z)$ и $Q_1 f(t, x)$, функция $g(t, z) = Q_1 f(t, P_a z + P_d \eta(t, z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по z на $[0, \infty) \times D_z$. Следовательно, для любой начальной точки (t_0, z_0) такой, что $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (3.10) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0, x_0) \in L_0$ и $x_0 = P_a z_0 + P_d \eta(t_0, z_0)$, то начальная точка $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$.

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции $g(t, z)$ по переменной t : $g_T(t, z) = \begin{cases} g(t, z), & 0 \leq t \leq T, \\ g(T, z), & t > T, \end{cases}$ и рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt} z = P_a^{-1} G^{-1} [-BP_a z + g_T(t, z)]. \quad (3.11)$$

Введем функцию $V(P_1 x) = \frac{1}{2} (HP_1 x, P_1 x) = \frac{1}{2} (HP_a z, P_a z) = \frac{1}{2} (P_a^* HP_a z, z) = \frac{1}{2} (\hat{H}z, z) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_a^* HP_a$ и H – оператор из (3.3). Градиент функции \hat{V} равен $grad \hat{V}(z) = \hat{H}z$.

Согласно (3.3) для каждого $T > 0$ найдется $R_T > 0$ такое, что

$$\left(HP_a z, G^{-1}g(t, z)\right) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|P_a z\| \geq R_T. \quad (3.12)$$

Поскольку $(HP_a z, G^{-1}g(t, z)) = (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}g(t, z))$, то из (3.12) следует, что для каждого $T > 0$ найдется $\hat{R}_T > 0$ такое, что

$$\left(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}g(t, z)\right) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|z\| \geq \hat{R}_T. \quad (3.13)$$

Так как $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$, то существуют \hat{H}^{-1} и $\hat{H}^{1/2}$, причем $\|z\|^2 = (\hat{H}^{-1}(\hat{H}^{1/2})^2 z, z) = (\hat{H}^{1/2}\hat{H}^{-1}\hat{H}^{1/2}z, z) \leq \|\hat{H}^{-1}\| \|\hat{H}^{1/2}z\|^2 = \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H}z, z)$. Тогда $\left|(\hat{H}z, -P_a^{-1}G^{-1}BP_a z)\right| \leq \|\hat{H}\| \|P_a^{-1}G^{-1}\| \|BP_a\| \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H}z, z)$.

С учетом (3.13) получаем оценку для производной функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (3.11), которая выполнена при всех z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}_T$ и всех $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} \Big|_{(3.11)} &= \left(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[-BP_a z + g_T(t, z)]\right) \leq \left|(\hat{H}z, -P_a^{-1}G^{-1}BP_a z)\right| \leq \\ &\leq \|\hat{H}\| \|P_a^{-1}G^{-1}\| \|BP_a\| \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H}z, z) = C\hat{V}(z), \end{aligned}$$

$$\text{где } C = 2\|\hat{H}\| \|P_a^{-1}G^{-1}\| \|BP_a\| \|\hat{H}^{-1}\|.$$

Так как неравенство $\dot{v} \leq Cv$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения, то по лемме 2.2.4 каждое решение $z(t)$ уравнения (3.10) неограниченно продолжаемо. Значит, каждое решение $x(t) = P_a z(t) + P_d \eta(t, z(t))$ уравнения (2.1) также неограниченно продолжаемо.

Проверим, что каждое локальное решение $x(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$, уравнения (2.1) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $[t_0, \infty)$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что

решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (2.1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Замечание 3.2.1. Проекция $P_1x(t)$ решения $x(t)$ непрерывно дифференцируема, проекция $P_2x(t)$ непрерывна.

Замечание 3.2.2. Условие базисной обратимости оператор-функции $\Phi(u)$ (3.2) на любой выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ ($((t, P_1x + u_i) \in L_0)$) можно заменить на требование обратимости в любой точке u ($((t, P_1x + u) \in L_0)$), если вместо условия (3.1) потребовать, чтобы $\forall t \geq 0 \exists x_1 \in X_1 \exists ! u \in X_2 : (t, x_1 + u) \in L_0$.

Поскольку на практике встречаются уравнения (2.1) с нелинейной функцией $f(t, x)$, которая содержит слагаемые, зависящие только от времени t , либо линейную нестационарную часть, иногда удобнее применять следующий результат.

Следствие 3.2.1. *Предположим, что проекция Q_1f допускает представление*

$$Q_1f(t, x) = S_1(t)P_1x + \psi(t, x) + \Pi(x)e(t), \quad (3.14)$$

где $S_1(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_1))$, $\psi(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$;

частная производная $\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

$e(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$;

функция $\Pi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, Y_1))$ такая, что

$$\exists r, C > 0 : \|\Pi(x)\| \leq C \quad \forall x : \|P_1x\| \geq r. \quad (3.15)$$

Тогда теорема 3.2.1 останется верна, если вместо условия (3.3) выполнено

$$(HP_1x, G^{-1}\psi(t, x)) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \|P_1x\| \geq R_T. \quad (3.16)$$

Доказательство. Очевидно, функция $Q_1f(t, x)$ вида (3.14) и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial x}(Q_1f(t, x))$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Для доказательства следствия 3.2.1 достаточно добавить в доказательство теоремы 3.2.1 следующие пояснения.

Рассмотрим уравнение (3.10), полученное в доказательстве теоремы 3.2.1.

Обозначим $\hat{\Pi}(t, z) = \Pi(P_a z + P_d \eta(t, z))$. Поскольку $P_d \eta(t, z) \in X_2$, то в силу (3.15) выполнено

$$\exists \hat{r} > 0 \exists C > 0 : \|\hat{\Pi}(t, z)\| \leq C \quad \forall t \geq 0 \forall z : \|z\| \geq \hat{r}. \quad (3.17)$$

Далее обозначим $\hat{\psi}(t, z) = \psi(t, P_a z + P_d \eta(t, z))$. С учетом всех новых обозначений уравнение (3.10) принимает вид

$$\frac{d}{dt} z = P_a^{-1} G^{-1} [(S_1(t) - B)P_a z + \hat{\psi}(t, z) + \hat{\Pi}(t, z)e(t)]. \quad (3.18)$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции $\hat{\psi}(t, z)$ по переменной t : $\hat{\psi}_T(t, z) = \begin{cases} \hat{\psi}(t, z), & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{\psi}(T, z), & t > T. \end{cases}$ Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt} z = P_a^{-1} G^{-1} [(S_1(t) - B)P_a z + \hat{\psi}_T(t, z) + \hat{\Pi}(t, z)e(t)] \quad (3.19)$$

и функцию $V(P_1x) = \frac{1}{2}(HP_1x, P_1x) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_a^*HP_a$ и H – оператор из (3.16), $\text{grad } \hat{V}(z) = \hat{H}z$. Учитывая $(HP_a z, G^{-1}\hat{\psi}(t, z)) = (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t, z))$, из (3.16) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\hat{R}_T > 0$ такое, что

$$(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t, z)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|z\| \geq \hat{R}_T. \quad (3.20)$$

Так как $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$, то $\|z\|^2 \leq \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}z, z)$ и $|(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[S_1(t) - B]P_a z)| \leq \|\hat{H}\| \|P_a^{-1}G^{-1}\| \| [S_1(t) - B]P_a \| \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}z, z)$. Выбирая $\hat{R}_T \geq \max\left\{\sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r}\right\}$, с учетом (3.17) имеем оценку: $|(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}\hat{\Pi}(t, z)e(t))| \leq C\|\hat{H}\|^{1/2} \|P_a^{-1}G^{-1}\| \|e(t)\|(\hat{H}z, z)$, $\|z\| \geq \hat{R}_T$.

Увеличивая, если необходимо, \hat{R}_T в (3.20) так, чтобы выполнялось неравенство $\hat{R}_T \geq \max\left\{\sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r}\right\}$, получаем оценку для производной функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (3.19), которая выполнена при всех z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}_T$ и всех $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} \Big|_{(3.19)} &= (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[(S_1(t) - B)P_a z + \hat{\psi}_T(t, z) + \hat{\Pi}(t, z)e(t)]) \leq \\ &\leq \left| (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[S_1(t) - B]P_a z) \right| + \left| (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}\hat{\Pi}(t, z)e(t)) \right| \leq \\ &\leq \|P_a^{-1}G^{-1}\| \left(\|\hat{H}\| \| [S_1(t) - B]P_a \| \|\hat{H}^{-1}\| + C\|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right) (\hat{H}z, z) = k(t)\hat{V}(z), \end{aligned}$$

где $k(t) = 2\|P_a^{-1}G^{-1}\| \left(\|\hat{H}\| \| [S_1(t) - B]P_a \| \|\hat{H}^{-1}\| + C\|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right)$ – непрерывная функция при $t \geq 0$.

Так как неравенство $\dot{v} \leq k(t)v$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения, то по лемме 2.2.4 каждое решение $z(t)$ уравнения (3.18) неограниченно продолжаемо. Значит, каждое решение $x(t) = P_a z(t) + P_a \eta(t, z(t))$ уравнения (2.1) также неограниченно продолжаемо.

Следствие доказано.

Наряду с (2.1) можно рассматривать уравнение

$$A \frac{d}{dt} x(t) + Bx(t) = f(t, x), \quad (3.21)$$

где $t, t_0 \geq 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$;

$f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция;

$A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейные операторы, вообще говоря, необратимые и такие, что $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1.

Определение 3.2.1. Функция $x(t)$ называется *решением* задачи Коши (3.21), (2.2) на некотором интервале $[t_0, t_1)$, $t_1 \leq \infty$, если $x(t) \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет начальному условию (2.2) и уравнению (3.21) на $[t_0, t_1)$.

В работе [68] доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, проекция $Q_2 f(t, x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1. Пусть выполнено (3.1) и для любых $u_k \in X_2$ таких, что $(t, x_1 + u_k) \in L_0$, $k = 1, 2$, функция (3.2) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$. Предположим, что проекция $Q_1 f$ допускает представление $Q_1 f(t, x) = \psi(t, x) + e(t)$, где $\psi(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$ и $\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $e(t) \in C([0, \infty), Y_1)$. Пусть существует самосопряженный положительный оператор $H \in L(X_1)$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что выполнено условие: $(HP_1 x, G^{-1} \psi(t, x)) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \|P_1 x\| \geq R_T$.

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (3.21), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.1.

3.3 Существование и единственность глобальных решений дифференциально-алгебраических уравнений с сингулярным характеристическим пучком

3.3.1 Случай сингулярного пучка произвольного ранга

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (2.1) $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x)$ с начальным условием (2.2) $x(t_0) = x_0$, где $t, t_0 \geq 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$ -матрицы A, B . Предполагается, что $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов.

Существуют прямые разложения пространств (см. подраздел 2.5)

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \quad (3.22)$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A + B$ имеет вид (2.28), где операторы сингулярной компоненты $\lambda A_s + B_s$ имеют блочную структуру (2.33). Пусть регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1, тогда существуют прямые разложения (2.34) пространств X_r, Y_r и соответствующие индуцированные операторы $A_i, B_i, i = 1, 2$ (см. подраздел 2.4).

Относительно разложений (3.22), (2.34) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы

$$x = x_{s_1} + x_{s_2} + x_1 + x_2, \quad x_{s_i} = S_i x \in X_{s_i}, x_i = P_i x \in X_i, i = 1, 2. \quad (3.23)$$

Замечание 3.3.1. В случае, когда ранг $r(A, B) = m < n$, блочная структура (2.33) принимает вид (2.29), в разложении (3.22) $Y_s = Y_{s_1}$ и $Y_{s_2} = \{0\}$, $F_1 = F$, $F_2 = 0$. Если $r(A, B) = n < m$, блочная структура (2.33) принимает вид (2.31), в (3.22) $X_s = X_{s_1}$ и $X_{s_2} = \{0\}$, $S_1 = S$, $S_2 = 0$.

С учетом указанных замечаний, доказанная ниже теорема включает случаи, когда $r(A, B) = m < n$ или $r(A, B) = n < m$.

Теорема 3.3.1. [93] Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов и его регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) имеет индекс 1. Предположим, что

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid (F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0\} \quad (3.24)$$

и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, Sx + P_1x + u)) - B \right] P_2 \quad (3.25)$$

($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} (H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} F_1 f(t, x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1 f(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : \\ 0 \leq t \leq T, \|(S_1 + P_1)x\| &\geq R_T. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует решение $x(t)$

задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$, причем, если $r(A, B) = n < m$, решение будет единственным.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы $F_i, Q_i, i = 1, 2$, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(F_1 A S_1 x) + F_1 B S x = F_1 f(t, x), \\ \frac{d}{dt}(Q_1 A P_1 x) + Q_1 B P_1 x = Q_1 f(t, x), \\ Q_2 f(t, x) - Q_2 B P_2 x = 0, \\ F_2 [B x - f(t, x)] = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Сузим операторы в уравнениях системы (3.27) на подпространства $X_{s_i}, X_i, i = 1, 2$, из (3.22), (2.34), используем представление (3.23) и получим эквивалентную систему:

$$\frac{d}{dt}(A_{gen} x_{s_1}) + B_{gen} x_{s_1} + B_{und} x_{s_2} = F_1 f(t, x), \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt}(A_1 x_1) + B_1 x_1 = Q_1 f(t, x), \quad (3.29)$$

$$Q_2 f(t, x) - B_2 x_2 = 0, \quad (3.30)$$

$$B_{ov} x_{s_1} - F_2 f(t, x) = 0.$$

Обозначим $\dim X_{s_1} = b, \dim X_{s_2} = l, \dim X_1 = a, \dim X_2 = d, b + l + a + d = n$.

Пусть $\{s_i\}_{i=1}^b, \{s_{b+i}\}_{i=1}^l, \{p_i\}_{i=1}^a, \{p_{a+i}\}_{i=1}^d$ – базисы подпространств $X_{s_1}, X_{s_2}, X_1, X_2$ соответственно. Способ выбора базисов подпространств X_1, X_2 описан в подразделе 3.2, а базисов подпространств X_{s_1}, X_{s_2} – в подразделе 2.5 с тем условием, что операторы сингулярной компоненты пучка $\lambda A + B$ имеют блочную структуру (2.33) (блочную структуру (2.29) при $r(A, B) = m < n$, (2.31) при $r(A, B) = n < m$).

Объединение базисов подпространств X_{s_1} , X_{s_2} , X_1 , X_2 является базисом пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d$ и для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из разложения $x = \sum_{i=1}^b w_i s_i + \sum_{i=1}^l \xi_i s_{b+i} + \sum_{i=1}^a z_i p_i + \sum_{i=1}^d v_i p_{a+i}$ по этому базису вытекает представление в виде вектор-столбца $x = (w^T, \xi^T, z^T, v^T)^T$, где $w \in \mathbb{R}^b$, $\xi \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^a$, $v \in \mathbb{R}^d$ – также вектор-столбцы. Указанное представление определяет операторы $S_b : \mathbb{R}^b \rightarrow X_{s_1}$, $S_l : \mathbb{R}^l \rightarrow X_{s_2}$, $P_a : \mathbb{R}^a \rightarrow X_1$, $P_d : \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$, для которых существуют обратные операторы $S_b^{-1} : X_{s_1} \rightarrow \mathbb{R}^b$, $S_l^{-1} : X_{s_2} \rightarrow \mathbb{R}^l$, $P_a^{-1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1} : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Умножая уравнения (3.28)–(3.30) на $S_b^{-1} A_{gen}^{-1}$, $P_a^{-1} A_1^{-1}$, $P_d^{-1} B_2^{-1}$ соответственно и делая замену $x_{s_1} = S_b w$, $x_{s_2} = S_l \xi$, $x_1 = P_a z$, $x_2 = P_d v$ получим эквивалентную систему

$$\frac{dw}{dt} + S_b^{-1} A_{gen}^{-1} B_{gen} S_b w = S_b^{-1} A_{gen}^{-1} (F_1 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - B_{und} S_l \xi), \quad (3.31)$$

$$\frac{dz}{dt} + P_a^{-1} A_1^{-1} B_1 P_a z = P_a^{-1} A_1^{-1} Q_1 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v), \quad (3.32)$$

$$P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - v = 0, \quad (3.33)$$

$$B_{ov} S_b w - F_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) = 0, \quad (3.34)$$

где $\tilde{f}(t, w, \xi, z, v) = f(t, S_b w + S_l \xi + P_a z + P_d v)$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi(t, w, \xi, z, v) = P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - v. \quad (3.35)$$

Оно непрерывно на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial \Psi(t, w, \xi, z, v)}{\partial (w, \xi, z)} = P_d^{-1} B_2^{-1} \frac{\partial Q_2 f(t, x)}{\partial x} (S_b, S_l, P_a), \quad \frac{\partial \Psi(t, w, \xi, z, v)}{\partial v} = P_d^{-1} B_2^{-1} \Phi(P_d v) P_d,$$

где $\Phi(P_d v) = \Phi(u)$ – оператор-функция (3.25), $u = P_d v \in X_2$.

Возьмем любые $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$, $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$, такие, что (t, w, ξ, z, v_i) принадлежат

$$\tilde{L}_0 = \{(t, w, \xi, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid (F_2 + Q_2)[B(S_b w + S_l \xi + P_a z + P_d v) - \tilde{f}(t, w, \xi, z, v)] = 0\}. \quad (3.36)$$

По условию теоремы для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция $\Phi(u)$ является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Следовательно, обратим действующий в \mathbb{R}^d оператор

$$\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, \xi, z, \tilde{v}_k), \quad \text{где } \{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d \text{ – аддитивное разложение единицы в } \mathbb{R}^d.$$

Таким образом, для любых v_i таких, что $(t, w, \xi, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1, 2$, функция

$$W(v) = \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, \xi, z, v)$$

является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v_1, v_2\}$. Следовательно, для любой точки $(t, w, \xi, z, v) \in \tilde{L}_0$ существует обратный оператор

$$\left[\frac{\partial \Psi(t, w, \xi, z, v)}{\partial v} \right]^{-1}.$$

Пусть t_* – произвольная точка из $[0, \infty)$. Выберем $w_* \in \mathbb{R}^b$, $\xi_* \in \mathbb{R}^l$, $z_* \in \mathbb{R}^a$, $v_* \in \mathbb{R}^d$ так, чтобы $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, это возможно в силу условия (3.24). По теоремам о неявной функции [81] существуют окрестности $U = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(w_*) \times U_{\delta_3}(\xi_*) \times U_{\delta_4}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v = v(t, w, \xi, z) \in C(U, U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по (w, ξ, z) , такая, что $\Psi(t, w, \xi, z, v(t, w, \xi, z)) = 0$, $(t, w, \xi, z) \in U$, и $v(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = v_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $t \in [0, \infty)$, $w \in D_w$, $z \in D_z$, $\xi \in D_\xi$, $v \in D_v$, где об-

ласти $D_w \subset \mathbb{R}^b$, $D_\xi \subset \mathbb{R}^l$, $D_z \subset \mathbb{R}^a$, $D_v \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $S_b^{-1}S_1x_0 \in D_w$, $S_l^{-1}S_2x_0 \in D_\xi$, $P_a^{-1}P_1x_0 \in D_z$, $P_d^{-1}P_2x_0 \in D_v$.

Определим глобальную функцию $v = \eta(t, w, \xi, z)$ в точке (t_*, w_*, ξ_*, z_*) как $\eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = v(t_*, w_*, \xi_*, z_*)$. Так как $v(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = v_*$ и $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, то $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$ и $v = \eta(t, w, \xi, z) : [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z \rightarrow \tilde{D}_v$, где $[0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z \times \tilde{D}_v = [0, \infty) \times D_w \times D_\xi \times D_z \times D_v \cap \tilde{L}_0$.

Рассмотрим две точки $(t, w, \xi, z, v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1, 2$, очевидно, для них $\Psi(t, w, \xi, z, v_i) = 0$. Проекции $\Psi_k(t, w, \xi, z, v) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, \xi, z, v)$, $k = \overline{1, d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфных \mathbb{R} . По формуле конечных приращений [81]: $\Psi_k(t, w, \xi, z, v_2) - \Psi_k(t, w, \xi, z, v_1) = \frac{\partial}{\partial v} \Psi_k(t, w, \xi, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$. Следовательно, $\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi_k(t, w, \xi, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $k = \overline{1, d}$, откуда получаем, что $\Lambda(v_2 - v_1) = 0$ и, значит, $v_2 = v_1$.

Доказано, что

$$\forall (t, w, \xi, z) \in [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z \exists! v \in \tilde{D}_v : (t, w, \xi, z, v) \in \tilde{L}_0, \quad (3.37)$$

и в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z$ существует единственное решение $v = v(t, w, \xi, z)$ уравнения (3.33), непрерывное по (t, w, ξ, z) вместе со своими частными производными по w, ξ, z . Значит функция $v = \eta(t, w, \xi, z)$ в этой окрестности совпадает с $v(t, w, \xi, z)$ и является решением уравнения (3.33) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t, w, \xi, z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t, w, \xi, z)$, обладающая в некоторой точке $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t, w, \xi, z)$, то, в

силу (3.37), $\eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = \mu(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = v_*$. Следовательно,

$\eta(t, w, \xi, z) = \mu(t, w, \xi, z)$ для всех точек $(t, w, \xi, z) \in [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z$.

Выберем любую непрерывную функцию $\phi(t) : [0, \infty) \rightarrow \tilde{D}_\xi$, удовлетворяющую начальному условию $\phi(t_0) = S_l^{-1} S_2 x_0$. Подставим $\xi = \phi(t)$ в функцию η и обозначим $q(t, w, z) = \eta(t, w, \phi(t), z)$.

Теперь подставим $v = q(t, w, z)$ и $\xi = \phi(t)$ в (3.31), (3.32):

$$\frac{dw}{dt} = S_b^{-1} A_{gen}^{-1} [-B_{gen} S_b w + F_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z)) - B_{und} S_l \phi(t)],$$

$$\frac{dz}{dt} = P_a^{-1} A_1^{-1} [-B_1 P_a z + Q_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z))],$$

и перепишем эту систему в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 [-N_2 \omega + G(t, \omega)], \quad (3.38)$$

где $\omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$;

$$N_1 = \begin{pmatrix} S_b^{-1} A_{gen}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1} A_1^{-1} \end{pmatrix};$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} B_{gen} S_b & 0 \\ 0 & B_1 P_a \end{pmatrix};$$

$$q(t, \omega) = q(t, w, z), \quad G(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) - B_{und} S_l \phi(t) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) \end{pmatrix}.$$

В силу свойств функций $F_1 f$, $Q_1 f$, q , ϕ , функция $G(t, \omega)$ непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по ω на $[0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_z$. Следовательно, на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ существует един-

ственное решение $\omega(t)$ задачи Коши для уравнения (3.38) с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0, z_0)^T, \quad (3.39)$$

где $(t_0, w_0, \phi(t_0), z_0, q(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$.

Запишем функцию G в виде $G(t, \omega) = \hat{G}(t, \omega) + e(t)$, где

$$e(t) = \begin{pmatrix} -B_{und} S_l \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{G}(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции

$$\hat{G}(t, \omega) \text{ по переменной } t: \hat{G}_T(t, \omega) = \begin{cases} \hat{G}(t, \omega), & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{G}(T, \omega), & t > T, \end{cases} \text{ и рассмотрим систему}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[-N_2\omega + \hat{G}_T(t, \omega) + e(t)]. \quad (3.40)$$

Далее введем функцию $V(x_{s_1} + x_1) = 1/2[(H_1 x_{s_1}, x_{s_1}) + (H_2 x_1, x_1)] = 1/2[(H_1 S_b w, S_b w) + (H_2 P_a z, P_a z)] = 1/2(\hat{H}\omega, \omega) = \hat{V}(\omega)$, где $\hat{H} = \begin{pmatrix} S_b^* H_1 S_b & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix}$ и H_1, H_2 – операторы из (3.26). Ясно, что $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$. Градиент функции \hat{V} равен $grad \hat{V}(\omega) = \hat{H}\omega$.

Из (3.26) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\hat{R}_T > 0$ такое, что

$$(\hat{H}\omega, N_1 \hat{G}(t, \omega)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|\omega\| \geq \hat{R}_T. \quad (3.41)$$

Так как $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$, то существует \hat{H}^{-1} и легко показать,

что $\|\omega\|^2 \leq \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}\omega, \omega)$. Тогда $|\langle \hat{H}\omega, N_1 N_2 \omega \rangle| \leq \|\hat{H}\| \|N_1\| \|N_2\| \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}\omega, \omega)$. Выбирая $\hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$, получим оценку: $|\langle \hat{H}\omega, N_1 e(t) \rangle| \leq \|\hat{H}\|^{1/2} \|N_1\| \|e(t)\|(\hat{H}\omega, \omega)$, $\|\omega\| \geq \hat{R}_T$.

С учетом (3.41) производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (3.40) удовлетворяет при всех $t \geq 0$ и ω таких, что $\|\omega\| \geq \hat{R}_T$ ($\hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$), следующей оценке:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} \Big|_{(3.40)} &= \langle \hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + \hat{G}_T(t, \omega) + e(t)] \rangle \leq \langle \hat{H}\omega, N_1 N_2 \omega \rangle + \\ &+ |\langle \hat{H}\omega, N_1 e(t) \rangle| \leq \|N_1\| \left[\|\hat{H}\| \|N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right] \langle \hat{H}\omega, \omega \rangle = k(t) \hat{V}(\omega), \end{aligned}$$

$$\text{где } k(t) = 2\|N_1\| \left[\|\hat{H}\| \|N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right].$$

Так как неравенство $\dot{v} \leq k(t)v$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, то по лемме 2.2.4 каждое решение $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$ уравнения (3.38) также неограниченно продолжаемо.

Найденные непрерывно дифференцируемые компоненты $w(t)$, $z(t)$ глобального решения $\omega(t)$ уравнения (3.38) определены на $[t_0, \infty)$. Уравнение (3.34) является тождеством, поскольку $(t, w(t), \phi(t), z(t), q(t, w(t), z(t))) \in \tilde{L}_0$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Следовательно, функция $x(t) = S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t) + P_d q(t, w(t), z(t))$ будет решением задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Решение $x(t)$ не является единственным, поскольку зависит от выбранной функции $\xi = \phi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если $r(A, B) = n < m$, то $X_s = X_{s_1}$, $X_{s_2} = \{0\}$, $S_2 = 0$ и компонента $\xi = S_l^{-1} S_2 x$ отсутствует. Покажем, что в этом случае каждое локальное решение $\omega(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$, уравнения (3.38) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $[t_0, \infty)$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $\omega(t)$ задачи Коши (3.38), (3.39) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$.

Предположим, что решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (3.38) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Замечание 3.3.2. Проекция $S_1x(t)$, $P_1x(t)$ решения $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, проекции $S_2x(t)$, $P_2x(t)$ непрерывны. При $r(A, B) = n < m$ проекция $S_2x(t)$ отсутствует, $S = S_1$, $Sx(t)$ непрерывно дифференцируема.

Замечание 3.3.3. Вообще говоря, решение $x(t)$ будет единственным при $r(A, B) = n \leq m$. Но в случае, если $r(A, B) = n = m$, пучок $\lambda A + B$ будет регулярным и используется теорема 3.2.1 или следствие 3.2.1.

Замечание 3.2.4. Условие базисной обратимости оператор-функции (3.25) на любой выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ ($(t, Sx + P_1x + u_i) \in L_0$) можно заменить на требование обратимости в любой точке u (такой, что $(t, Sx + P_1x + u) \in L_0$), если вместо условия (3.24) потребовать, чтобы

$$\forall t \geq 0 \exists x_s \in X_s \exists x_1 \in X_1 \exists u \in X_2 : (t, x_s + x_1 + u) \in L_0.$$

С учетом замечания 3.3.1, доказанное ниже следствие (см. [93, замечание 4]), также как и теорема 3.3.1, включает случаи, когда $r(A, B) = m < n$ или $r(A, B) = n < m$ (т. е. случаи, когда уравнению (2.1) соответствуют недоопределенная или переопределенная системы дифференциально-алгебраических уравнений).

Следствие 3.3.1. *Предположим, что проекции F_1f , Q_1f допускают представление:*

$$\begin{aligned} F_1 f(t, x) &= K_1(t)S_1 x + K_2(t)S_2 x + K_3(t)P_1 x + \psi_1(t, x) + g_1(t), \\ Q_1 f(t, x) &= D_1(t)S_1 x + D_2(t)S_2 x + D_3(t)P_1 x + \psi_2(t, x) + g_2(t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $K_i(t) \in C([0, \infty), L(X_{s_i}, Y_{s_i}))$, $D_i(t) \in C([0, \infty), L(X_{s_i}, Y_1))$, $i = 1, 2$;

$K_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_{s_1}))$, $D_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_1))$;

$\psi_1(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_{s_1})$, $\psi_2(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$;

Частные производные $\frac{\partial}{\partial x} \psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

$g_1(t) \in C([0, \infty), Y_{s_1})$, $g_2(t) \in C([0, \infty), Y_1)$.

Тогда теорема 3.3.1 останется верна, если вместо условия (3.26) выполнено

$$\begin{aligned} (H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} \psi_1(t, x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} \psi_2(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : \\ 0 \leq t \leq T, \|(S_1 + P_1)x\| &\geq R_T. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Доказательство. Для доказательства следствия 3.3.1 достаточно добавить в доказательство теоремы 3.3.1 следующие пояснения.

Рассмотрим уравнение (3.38), полученное в доказательстве теоремы 3.3.1.

Обозначим $\hat{\psi}_i(t, \omega) = \psi_i(t, (S_b, P_a)\omega + S_l \phi(t) + P_d q(t, \omega))$, $i = 1, 2$,

$$\hat{\psi}(t, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(t, \omega) \\ \hat{\psi}_2(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad e(t) = \begin{pmatrix} (K_2(t) - B_{und})S_l \phi(t) + g_1(t) \\ D_2(t)S_l \phi(t) + g_2(t) \end{pmatrix},$$

$$N_3(t) = \begin{pmatrix} K_1(t)S_b & K_3(t)P_a \\ D_1(t)S_b & D_3(t)P_a \end{pmatrix}.$$

С учетом новых обозначений и представления (3.42) уравнение (3.38) принимает вид $\frac{d\omega}{dt} = N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \hat{\psi}(t, \omega)]$.

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции

$\hat{\psi}(t, \omega)$ по переменной t : $\hat{\psi}_T(t, \omega) = \begin{cases} \hat{\psi}(t, \omega), & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{\psi}(T, \omega), & t > T. \end{cases}$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \hat{\psi}_T(t, \omega)] \quad (3.44)$$

и функцию $V(x_{s_1} + x_1) = \frac{1}{2}[(H_1 x_{s_1}, x_{s_1}) + (H_2 x_1, x_1)] = \frac{1}{2}(\hat{H}\omega, \omega) = \hat{V}(\omega)$, где

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} S_b^* H_1 S_b & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix} \text{ и } H_1, H_2 - \text{операторы из (3.43).}$$

Из (3.43) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\hat{R}_T > 0$ такое, что

$$(\hat{H}\omega, N_1 \hat{\psi}(t, \omega)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|\omega\| \geq \hat{R}_T. \quad (3.45)$$

Так как $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$, то $\|\omega\|^2 \leq \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}\omega, \omega)$. Тогда

$$|(\hat{H}\omega, N_1[(N_3(t) - N_2)\omega])| \leq \|\hat{H}\| \|N_1\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}\omega, \omega). \text{ Выбирая } \hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|},$$

получим оценку: $|(\hat{H}\omega, N_1 e(t))| \leq \|\hat{H}\|^{1/2} \|N_1\| \|e(t)\| (\hat{H}\omega, \omega), \quad \|\omega\| \geq \hat{R}_T.$

С учетом (3.45) производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (3.44) удовлетворяет при всех $t \geq 0, \|\omega\| \geq \hat{R}_T$ ($\hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$) следующей оценке:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} \Big|_{(3.44)} &= (\hat{H}\omega, N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \hat{\psi}_T(t, \omega)]) \leq \\ &\leq |(\hat{H}\omega, N_1(N_3(t) - N_2)\omega)| + |(\hat{H}\omega, N_1 e(t))| \leq \\ &\leq \|N_1\| \left(\|\hat{H}\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right) (\hat{H}\omega, \omega) = k(t) \hat{V}(\omega), \end{aligned}$$

где $k(t) = 2\|N_1\| \left(\|\hat{H}\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right)$ – непрерывная функция при $t \geq 0$.

Так как неравенство $\dot{v} \leq k(t)v$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, то по лемме 2.2.4 каждое решение $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$ уравнения (3.38) также неограниченно продолжаемо.

Следствие доказано.

3.3.2 Случай недоопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений

Рассмотрим задачу Коши (2.1), (2.2) $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$,

где $t, t_0 \geq 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$ -матрицы A, B . Пусть $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов, который имеет ранг $r(A, B) = m < n$, т. е. соответствующая система дифференциально-алгебраических уравнений недоопределена.

Пространства \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m допускают прямые разложения (см. подраздел 2.5)

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \quad (3.46)$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A + B$ имеет вид (2.28), где операторы сингулярной компоненты $\lambda A_s + B_s$ имеют блочную структуру (2.29). По предположению регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1, тогда пространства X_r , Y_r допускают прямые разложения (2.34).

Относительно разложений (3.46), (2.34) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы

$$x = x_{s_1} + x_{s_2} + x_1 + x_2, \quad x_{s_k} = S_k x \in X_{s_k}, \quad x_k = P_k x \in X_k, \quad k = 1, 2. \quad (3.47)$$

С учетом замечания 3.3.1 следующий результат вытекает из теоремы 3.3.1 и ее следствия.

Теорема 3.3.2. [65] Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $m < n$, пучок $\lambda A + B$ имеет ранг $r(A, B) = m$ и его регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) имеет индекс 1. Пусть

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t, x)] = 0\},$$

и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция (3.25) ($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Предположим, что проекции Ff , Q_1f допускают представление:

$$\begin{aligned} Ff(t, x) &= K_1(t)S_1x + K_2(t)S_2x + K_3(t)P_1x + \psi_1(t, x) + g_1(t), \\ Q_1f(t, x) &= D_1(t)S_1x + D_2(t)S_2x + D_3(t)P_1x + \psi_2(t, x) + g_2(t), \end{aligned}$$

где $K_i(t) \in C([0, \infty), L(X_{s_i}, Y_s))$, $D_i(t) \in C([0, \infty), L(X_{s_i}, Y_1))$, $i = 1, 2$;

$K_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_s))$, $D_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_1))$;

$\psi_1(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_s)$, $\psi_2(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$;

частные производные $\frac{\partial}{\partial x} \psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

$g_1(t) \in C([0, \infty), Y_s)$, $g_2(t) \in C([0, \infty), Y_1)$.

Пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} (H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} \psi_1(t, x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} \psi_2(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : \\ 0 \leq t \leq T, \|(S_1 + P_1)x\| &\geq R_T. \end{aligned}$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы F , Q_1 , Q_2 , получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(FASx) + FBSx &= Ff(t, x), \\ \frac{d}{dt}(AP_1x) + BP_1x &= Q_1f(t, x), \\ Q_2f(t, x) - BP_2x &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Сужая операторы в уравнениях системы (3.48) на подпространства X_s , X_1 , X_2 из разложений (3.46), (2.34) и учитывая (2.29), (3.47), получим эквивалентную систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_{gen}x_{s_1}) + B_{gen}x_{s_1} + B_{und}x_{s_2} &= Ff(t, x), \\ \frac{d}{dt}(A_1x_1) + Q_1Bx_1 &= Q_1f(t, x), \\ Q_2f(t, x) - B_2x_2 &= 0. \end{aligned} \right. \tag{3.49}$$

Как в доказательстве теоремы 3.3.1, обозначим $\dim X_{s_1} = b$, $\dim X_{s_2} = l$, $\dim X_1 = a$, $\dim X_2 = d$, $b + l + a + d = n$, определим операторы $S_b : \mathbb{R}^b \rightarrow X_{s_1}$, $S_l : \mathbb{R}^l \rightarrow X_{s_2}$, $P_a : \mathbb{R}^a \rightarrow X_1$, $P_d : \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$, для которых существуют обратные операторы $S_b^{-1} : X_{s_1} \rightarrow \mathbb{R}^b$, $S_l^{-1} : X_{s_2} \rightarrow \mathbb{R}^l$, $P_a^{-1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1} : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, сделаем замену $x_{s_1} = S_b w$, $x_{s_2} = S_l \xi$, $x_1 = P_a z$, $x_2 = P_d v$ и получим систему, эквивалент-

ную системе (3.49):

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} + S_b^{-1} A_{gen}^{-1} B_{gen} S_b w &= S_b^{-1} A_{gen}^{-1} (F\tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - B_{und} S_l \xi), \\ \frac{dz}{dt} + P_a^{-1} A_1^{-1} B_1 P_a z &= P_a^{-1} A_1^{-1} Q_1 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v), \\ P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - v &= 0,\end{aligned}$$

где $\tilde{f}(t, w, \xi, z, v) = f(t, S_b w + S_l \xi + P_a z + P_d v)$.

Дальнейшее доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.3.1 и следствия 3.3.1 с учетом замечания 3.3.1.

Замечание 3.3.5. По построению гладкость решения $x(t)$ следующая: компоненты $S_1 x(t)$, $P_1 x(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $S_2 x(t)$, $P_2 x(t)$ – непрерывны.

Замечание 3.3.6. Решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) будет единственным, если задать его компоненту $S_2 x(t) = \phi_{s_2}(t)$ и начальное значение $S_2 x_0 = \phi_{s_2}(t_0)$. Функцию $S_2 x = \phi_{s_2}(t)$ можно считать функциональным параметром. Начальное значение $\phi_{s_2}(t_0) = S_2 x_0$ должно быть выбрано так, чтобы $(t_0, x_0) \in L_0$.

3.3.3 Случай переопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений

Рассмотрим задачу Коши (2.1), (2.2) $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$,

где $t, t_0 \geq 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$ -матрицы A, B . Пусть $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов, который имеет ранг $r(A, B) = n < m$, т. е. соответствующая система дифференциально-алгебраических

уравнений переопределена.

Пространства \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m допускают прямые разложения (см. подраздел 2.5)

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \quad (3.50)$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A + B$ имеет вид (2.28), где операторы сингулярной компоненты $\lambda A_s + B_s$ имеют блочную структуру (2.31). По предположению регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1, тогда пространства X_r , Y_r допускают прямые разложения (2.34).

Относительно разложений (3.50), (2.34) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы

$$x = x_s + x_1 + x_2, \quad x_s = Sx \in X_s, \quad x_i = P_i x \in X_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.51)$$

С учетом замечания 3.3.1 следующий результат вытекает из теоремы 3.3.1 и ее следствия.

Теорема 3.3.3. [66] Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $n < m$, пучок $\lambda A + B$ имеет ранг $r(A, B) = n$ и его регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) имеет индекс 1. Пусть

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid (F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0\} \quad (3.52)$$

и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, Sx + P_1 x + u)) - B \right] P_2 \quad (3.53)$$

($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Предположим, что проекции $F_1 f$, $Q_1 f$ допускают представления:

$$\begin{aligned} F_1 f(t, x) &= K_1(t)Sx + K_3(t)P_1x + \psi_1(t, x) + g_1(t), \\ Q_1 f(t, x) &= D_1(t)Sx + D_3(t)P_1x + \psi_2(t, x) + g_2(t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

где $K_1(t) \in C([0, \infty), L(X_s, Y_{s_1}))$, $K_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_{s_1}))$;

$D_1(t) \in C([0, \infty), L(X_s, Y_1))$, $D_3(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_1))$;

$\psi_1(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_{s_1})$, $\psi_2(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$;

частные производные $\frac{\partial}{\partial x} \psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

$g_1(t) \in C([0, \infty), Y_{s_1})$, $g_2(t) \in C([0, \infty), Y_1)$.

Пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_s)$, $H_2 \in L(X_1)$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R_T > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} (H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(t, x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} \psi_2(t, x)) &\leq 0 \quad \forall (t, x) \in L_0 : \\ 0 \leq t \leq T, \|(S + P_1)x\| &\geq R_T. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы F_i , Q_i , $i = 1, 2$, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (F_1 A Sx) + F_1 B Sx = F_1 f(t, x), \\ \frac{d}{dt} (Q_1 A P_1 x) + Q_1 B P_1 x = Q_1 f(t, x), \\ Q_2 f(t, x) - Q_2 B P_2 x = 0, \\ F_2 [Bx - f(t, x)] = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Сужая операторы в уравнениях системы (3.56) на подпространства X_s , X_1 , X_2 из разложений (3.50), (2.34) и учитывая (2.31), (3.51), получим эквивалентную систему:

$$\frac{d}{dt}(A_{gen}x_s) + B_{gen}x_s = F_1f(t, x), \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt}(A_1x_1) + B_1x_1 = Q_1f(t, x), \quad (3.58)$$

$$Q_2f(t, x) - B_2x_2 = 0, \quad (3.59)$$

$$B_{ov}x_{s_1} - F_2f(t, x) = 0.$$

Обозначим $\dim X_s = b$, $\dim X_1 = a$, $\dim X_2 = d$, $b + a + d = n$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^b$, $\{p_i\}_{i=1}^a$, $\{p_{a+i}\}_{i=1}^d$ – базисы подпространств X_s , X_1 , X_2 соответственно. Базисы выбираются так, что относительно них операторы сингулярной компоненты пучка $\lambda A + B$ имеют блочную структуру (2.31). Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из разложения $x = \sum_{i=1}^b w_i s_i + \sum_{i=1}^a z_i p_i + \sum_{i=1}^d v_i p_{a+i}$ по этому базису вытекает представление $x = (w^T, z^T, v^T)^T$, $w \in \mathbb{R}^b$, $z \in \mathbb{R}^a$, $v \in \mathbb{R}^d$, определяющее операторы $S_b: \mathbb{R}^b \rightarrow X_s$, $P_a: \mathbb{R}^a \rightarrow X_1$, $P_d: \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы $S_b^{-1}: X_s \rightarrow \mathbb{R}^b$, $P_a^{-1}: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1}: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Компоненты вектора x в разложении (3.51) имеют вид

$$x_s = S_b w, \quad x_1 = P_a z, \quad x_2 = P_d v, \quad (3.60)$$

соответственно, $w = S_b^{-1} S x$, $z = P_a^{-1} P_1 x$, $v = P_d^{-1} P_2 x$.

Умножая уравнения (3.57)–(3.59) слева на $S_b^{-1} A_{gen}^{-1}$, $P_a^{-1} A_1^{-1}$, $P_d^{-1} B_2^{-1}$ соответственно и делая замену (3.60), получим эквивалентную систему:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} + S_b^{-1} A_{gen}^{-1} B_{gen} S_b w &= S_b^{-1} A_{gen}^{-1} F_1 \tilde{f}(t, w, z, v), \\ \frac{dz}{dt} + P_a^{-1} A_1^{-1} B_1 P_a z &= P_a^{-1} A_1^{-1} Q_1 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v), \\ P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) - v &= 0, \\ B_{ov} S_b w - F_2 \tilde{f}(t, w, \xi, z, v) &= 0,\end{aligned}$$

где $\tilde{f}(t, w, z, v) = f(t, S_b w + P_a z + P_d v)$.

Дальнейшее доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.3.1 и следствия 3.3.1 с учетом замечания 3.3.1.

Замечание 3.3.7. По построению гладкость решения $x(t)$ следующая: компоненты $Sx(t)$, $P_1 x(t)$ непрерывно дифференцируемы, а компонента $P_2 x(t)$ непрерывна.

Пример 3.3.1. Проиллюстрируем применения теоремы 3.3.3 на примере.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 - x_2 = I(t) - x_1^3 + x_2^3, \quad (3.61)$$

$$x_1 + x_2 = I(t), \quad (3.62)$$

$$2x_2 = x_1^3 - x_2^3. \quad (3.63)$$

Векторная форма системы (3.61)–(3.63) имеет вид (2.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} I(t) - x_1^3 + x_2^3 \\ I(t) \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad \text{Предполагается,}$$

что $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$. Ранг пучка $\lambda A + B$ равен 2.

Анализируя решение уравнения (2.32), находим пространства $X_s = \text{Lin}\{s\}$, $X_r = \text{Lin}\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = \text{Lin}\{g_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = \text{Lin}\{g_1\}$, $Y_{s_2} = \text{Lin}\{g_2\}$, $Y_r = \text{Lin}\{q\}$, $X_2 = X_r$, $Y_2 = Y_r$, $X_1 = \{0\}$, $Y_1 = \{0\}$, где $s = (1, 0)^T$, $p = (0, 1)^T$, $g_1 = (1, 1, 0)^T$, $g_2 = (0, 1, 0)^T$, $q = (-1, 1, 2)^T$. Выпишем введенные в подразделе 2.5 проекторы

$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow X_r$, $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_r$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_s$, $F_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_{s_k}$, $P_k: \mathbb{R}^2 \rightarrow X_k$,
 $Q_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_k$, $k=1,2$, в координатных базисах пространств $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = P, Q_2 = Q, Q_1 = 0, P_1 = 0.$$

Оператор $A_{gen} = F_1 A|_{X_s}: X_s \rightarrow Y_{s_1}$ из представления (2.31) имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$. В координатных базисах пространств $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ матрицы A_{gen}, A_{gen}^{-1}

одноименных операторов принимают вид: $A_{gen} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{gen}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку $QA=0$, оператор $A_r = QA|_{X_r} = A_2$ также нулевой. Если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$ и, значит, оператор $B_r = QB|_{X_r} = B_2$ обратим. Очевидно, $\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок индекса 1.

Вычислим проекции вектора x : $P_1 x = 0$, $x_s = Sx = (x_1, 0)^T = (w, 0)^T$,
 $u = P_2 x = (0, x_2)^T = (0, v)^T$, $w = x_1$, $v = x_2 \in \mathbb{R}$.

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно уравнению (3.63), которое можно записать в виде

$$2v = w^3 - v^3, \quad (3.64)$$

следовательно, условие (3.52) теоремы выполнено.

Найдем $\left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - B \right] P_2 = \left(\frac{3}{2} x_2^2 + 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ и рассмотрим оператор-

функцию $\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x_s + \tilde{u})) - B \right] P_2 = \left(\frac{3}{2} \tilde{v}^2 + 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, где $\tilde{v} \in \mathbb{R}$,

$\tilde{u} = (0, \tilde{v})^T \in \text{conv}\{u_1, u_2\}$, и $u_1, u_2 \in X_2$ удовлетворяют (3.64).

Поскольку пространства X_2, Y_2 одномерны, базисная обратимость эквивалентна обратимости. Ясно, что сужение оператора $\hat{\Phi}(\tilde{u})$ на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2 . Следовательно, для любых $u_1, u_2 \in X_2$, удовлетворяющих (3.64), функция (3.53) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$.

Проекция $Q_1 f(t, x) = 0$, представим проекцию $F_1 f(t, x)$ в виде (3.54):

$$K_i(t) = 0, \quad i = 1, 3, \quad F_1 f(t, x) = \psi_1(x) + g_1(t), \quad \psi_1(x) = \begin{pmatrix} 0.5(x_2^3 - x_1^3) \\ 0.5(x_2^3 - x_1^3) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ I(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $A_{gen}^{-1} \psi_1(x) = \begin{pmatrix} 0.5(x_2^3 - x_1^3) \\ 0 \end{pmatrix}$. Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$(H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) = x_1 x_2^3 - x_1^4$. Проверим, что $(H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) \leq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего (3.63) и такого, что $\|(S + P_1)x\| = |x_1| \geq R_T$. Равенство (3.63) эквивалентно $x_2(2 + x_2^2) = x_1^3$, откуда следует: $\text{sign } x_1 = \text{sign } x_2$ и $(H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) = -2x_1 x_2 \leq 0$. Значит выполнено условие (3.55) теоремы.

Итак, по теореме 3.3.3 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (3.63), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$.

В подразделе 4.4 рассмотрена задача для математической модели нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра с переопределенной системой дифференциально-алгебраических уравнений.

Выводы по разделу 3

1. Сформулированы и доказаны теоремы, которые дают достаточные условия существования и единственности глобального решения задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений (2.1), (3.21) с регулярным характеристическим пучком (теоремы 3.2.1, 3.2.2). Теоремы используются для исследования динамики нелинейных радиотехнических цепей (см. раздел 4) и могут быть применены для анализа математических моделей робототехнических, экономических и других систем, в которых возникают соответствующие уравнения.

2. Сформулирована и доказана теорема 3.3.1, которая дает достаточные условия существования и единственности глобального решения задачи Коши для полулинейного ДАУ (2.1) с сингулярным характеристическим пучком произвольного ранга. Теорема используется для исследования динамики нелинейных радиотехнических цепей (см. раздел 4) и может быть применена для анализа математических моделей робототехнических, экономических и других систем, в которых возникает соответствующее уравнение.

Теорема 3.3.1 включает случаи, когда соответствующая система уравнений недоопределена или переопределена. В частности, подобные системы возникают при исследовании математических моделей в условиях неполных данных (см. подраздел 4.4) и при рассмотрении обратных задач (см. подраздел 4.4).

3. Получены результаты (следствия 3.2.1, 3.3.1) о глобальной разрешимости ДАУ (2.1), которые учитывают специфику нелинейной части уравнения, а именно, наличие слагаемого, зависящего только от времени t , и линейной нестационарной части. Эти результаты используются при анализе переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях (см. раздел 4) и могут быть применены для анализа других процессов и систем, в которых возникают математические модели с подобными уравнениями.

Основные результаты раздела опубликованы в [52, 55, 65–69, 93, 94].

РАЗДЕЛ 4

ПОЛУЧЕНИЕ И ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ

ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ

НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4.1 Модель импедансного нелинейного четырехполюсного фильтра

На рис. 1.1 изображен четырехполюсный радиотехнический фильтр с нелинейными сопротивлениями φ_1 и φ_2 , проводимостями h_1 и h_2 , линейными сопротивлениями r_1 и r_2 , проводимостью g и инерционными элементами – индуктивностью L и емкостью C .

Рассматривается импедансная задача для четырехполюсника [49, 69]: заданы входные токи $I_1(t)$, $I_2(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$. Предполагается, что φ_1 , φ_2 , h_1 , h_2 – непрерывно дифференцируемые на \mathbb{R} скалярные функции, параметры L , C , r_1 , r_2 , g являются положительными и вещественными.

В подразделе 1.1 получена система (1.1)–(1.3), которая описывает модель электрической цепи, представленной на рисунке 1.1. Векторная форма системы (1.1)–(1.3) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \quad \gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1)) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Характеристический пучок $\lambda A + B$ является регулярным, поскольку

$$\det(\lambda A + B) = (\lambda C + g)(\lambda L + r_2 + r_1) + 1 \neq 0,$$

и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты

$$R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda A + B)} \begin{pmatrix} -(\lambda C + g) & -1 & (\lambda C + g)(\lambda L + r_2) \\ \lambda C + g & 1 & r_1(\lambda C + g) + 1 \\ -1 & \lambda L + r_2 + r_1 & \lambda L + r_2 \end{pmatrix}$$

ограничена при больших $|\lambda|$.

Вычислим спектральные проекторы (2.21) P_k, Q_k , $k=1,2$, оператор (2.25) G , G^{-1} и проекции $P_k x$ вектора x на спектральные подпространства X_k ($k=1,2$), которые в координатном базисе пространства \mathbb{R}^3 представимы в виде:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -L^{-1} & 0 & 1 - r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}, z = P_1 x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, u = P_2 x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем спектральные подпространства $X_1 = P_1 \mathbb{R}^3 = \text{Lin}\{p_1, p_2\}$,

$X_2 = P_2 \mathbb{R}^3 = \text{Lin}\{p_3\}$, $p_1 = (-1, 1, 0)^T$, $p_2 = (0, 0, 1)^T$, $p_3 = (1, 0, 0)^T$.

$$\text{Найдем } Q_1 f(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) + r_1 I_1(t) \\ -h_2(x_3) + I_2(t) + I_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, Q_2 f(t, x) = \begin{pmatrix} r_1(\gamma(x_1) - I_1(t)) \\ \gamma(x_1) - I_1(t) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - B \right] P_2 = \begin{pmatrix} r_1(\gamma'(x_1) + 1) & r_1(\gamma'(x_1) + 1) & 0 \\ \gamma'(x_1) + 1 & \gamma'(x_1) + 1 & 0 \\ -\gamma'(x_1) - 1 & -\gamma'(x_1) - 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \gamma'(x_1) = \frac{d\gamma(x_1)}{dx_1}.$$

Уравнение $Q_2[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно алгебраическому уравнению (1.3), которое можно записать в виде:

$$v = I_1(t) - \gamma(z_1 + v). \quad (4.1)$$

Согласно условию (3.1) необходимо, чтобы $\forall t \geq 0 \exists z \in X_1 \exists u \in X_2$ такие, что выполнено (4.1) или, что равносильно, $\forall t \geq 0 \exists z_1, v \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (4.1).

В координатном базисе пространства \mathbb{R}^3 рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial Q_2 f(t, z + u)}{\partial x} - B \right] P_2 = (\gamma'(z_1 + v) + 1) \begin{pmatrix} r_1 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Найдем ограничения, при которых для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.1), сужение функции (4.2) на X_2 является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v_1, v_2\}$. Поскольку пространства X_2, Y_2 одномерны, базисная обратимость эквивалентна обратимости, которая имеет место, если $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \neq -1$, где $z_1 \in \mathbb{R}, \tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$. Продемонстрируем, как проверить непосредственно базисную обратимость. Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2 \mathbb{R}^3$ является единицей в Y_2 , аддитивным разложением единицы в Y_2 будет сужение Θ_1 проектора Q_2 на одномерное подпространство его образов. Сужение Λ оператора $\hat{\Lambda} = Q_2 \hat{\Phi}(\tilde{u}) = \hat{\Phi}(\tilde{u})$ на X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2 , если $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \neq -1$, где $z_1 \in \mathbb{R}, \tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}, \tilde{u} = (\tilde{v}, 0, 0)^T$. Действительно, при выполнении последнего условия из равенства $\hat{\Lambda}u = 0, u \in X_2$, следует $u = 0$, и, значит, Λ является базисно обратимым оператором на $\text{conv}\{u_1, u_2\}$, где $u_i = (v_i, 0, 0)^T \in X_2, v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$.

Представим $Q_1 f(t, x)$ в виде (3.14) $Q_1 f(t, x) = S_1(t) P_1 x + \psi(t, x) + \Pi(x) e(t)$, где $S_1(t)$ – нулевая матрица, $\Pi(x) \equiv Q_1$,

$$e(t) = \begin{pmatrix} r_1 I_1(t) \\ I_2(t) + I_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ -h_2(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $G^{-1}\psi(t, x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)] \\ L^{-1}[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)] \\ -C^{-1}h_2(x_3) \end{pmatrix}$. Выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Очевидно,

что $H = H^* > 0$. Тогда $(HP_1x, G^{-1}\psi(t, x)) = 2[\varphi_1(x_1)x_2 - \varphi_2(x_2)x_2] - h_2(x_3)x_3$.

Далее найдем ограничения на функции φ_k, h_j , при которых для любого $T > 0$ найдется $R_T > 0$ такое, что выполнено условие (3.16). Пусть $M_T = \max_{t \in [0, T]} I_1(t)$, тогда, учитывая (1.3), получим

$$\begin{aligned} (HP_1x, G^{-1}\psi(t, x)) &= 2[\varphi_1(x_1)(I_1(t) - \gamma(x_1) - x_1) - \varphi_2(x_2)x_2] - h_2(x_3)x_3 \leq \\ &\leq 2|M_T\varphi_1(x_1)| - 2[\varphi_1(x_1)(\gamma(x_1) + x_1) - \varphi_2(x_2)x_2] - h_2(x_3)x_3. \end{aligned}$$

Искомое условие на функции φ_k, h_j таково: пусть для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$2|M\varphi_1(x_1)| - 2[\varphi_1(x_1)(\gamma(x_1) + x_1) - \varphi_2(x_2)x_2] - h_2(x_3)x_3 \leq 0 \quad (4.3)$$

при любом $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$.

Итак, пусть функции нелинейных сопротивлений и проводимостей $\varphi_1, \varphi_2, h_2, \gamma$ и входные токи $I_1(t), I_2(t)$ удовлетворяют следующим условиям: $\forall t \geq 0 \exists z_1, v \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (4.1); для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.1), выполнено $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \neq -1$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $z_1 \in \mathbb{R}$; для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что справедливо (4.3) при любом $x \in \mathbb{R}^3$ таком,

что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$. Тогда по следствию 3.2.1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (1.3), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$.

Рассмотрим частные случаи. Пусть

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3, \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3, h_2(y) = \alpha_3 y^3, \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9, \quad (4.4)$$

где $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, 4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Заметим, что кубические зависимости в нелинейных сопротивлениях и проводимостях часто встречаются в реальных радиотехнических системах. Очевидно, $\forall t \geq 0 \exists z_1, v \in \mathbb{R}$ такие, что $v = I_1(t) - \alpha_4(z_1 + v)^9$, и $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \neq -1$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{R}$. Проверим, что $(HP_1 x, G^{-1}\psi(t, x)) \leq 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$ и $x_1 + x_2 = I_1(t) - \alpha_4 x_1^9$. Если $M_T = \max_{t \in [0, T]} I_1(t)$, то для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$(HP_1 x, G^{-1}\psi(t, x)) \leq 2\alpha_1 |M x_1^3| - 2\alpha_1 \alpha_4 x_1^{12} - 2\alpha_1 x_1^4 - 2\alpha_2 x_2^4 - \alpha_3 x_3^4 \leq 0$$

при любом $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$. Значит, выполнено условие (4.3).

Следовательно, если нелинейные сопротивления и проводимости имеют вид (4.4), то по следствию 3.2.1 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T$, удовлетворяющей условию согласования

$$x_1^0 + x_2^0 = I_1(t_0) - \alpha_4 (x_1^0)^9, \quad (4.5)$$

существует единственное решение $x(t)$ уравнения (2.1) на полуоси $[t_0, \infty)$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Заметим, что вместо уравнения (2.1) можно рассматривать (3.21). Проверка условий теоремы 3.2.2 аналогична той, что проведена для следствия 3.2.1, и легко убедиться, что для нелинейных функций вида (4.4) ее условия выполнены, если ток $I_1(t)$ непрерывно дифференцируем при всех $t \geq 0$. Тогда по теореме 3.2.2 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей условию согласования (4.5), существует единственное решение $x(t)$ уравнения (3.21) на полуоси $[t_0, \infty)$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$ [68].

Условия следствия 3.2.1 (теоремы 3.2.2, если ток $I_1(t)$ непрерывно дифференцируем при всех $t \geq 0$) также выполнены в более общем случае для нелинейных функций вида $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2m-1}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2 y^{2n-1}$, $h_2(y) = \alpha_3 y^{2r-1}$, $\gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^{(2s-1)(2m-1)}$, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, 4}$, $y \in \mathbb{R}$ и в случае, когда $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{1/(2m+1)}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2 y^{1/(2n+1)}$, $h_2(y) = \alpha_3 y^{1/(2r+1)}$, $\gamma(y) = \alpha_4 y^{1/(2m+1)}$, $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, 4}$.

4.2 Модель гибридного нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим гибридную задачу для четырехполюсного радиотехнического фильтра, изображенного на рис. 4.1 [49].

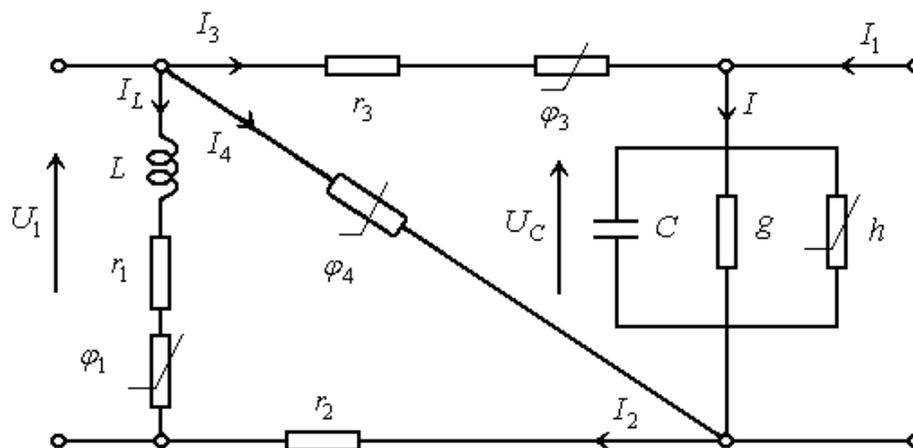


Рисунок 4.1 – Схема электрической цепи четырехполюсника

Заданы входной ток $I_1(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ и напряжение $U_1(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, нелинейные сопротивления $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и проводимость h , линейные сопротивления r_1, r_2, r_3 и проводимость g , индуктивность L и емкость C . Предполагается, что параметры L, C, r_1, r_2, r_3, g являются положительными и вещественными, $h(y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 = I_2, \quad I = I_3 + I_1, \quad I = I_C + I_g + I_h, \quad U_1 = U_L + U_{r_1} + U_{\varphi_1}, \\ U_C = U_g = U_h, \quad U_1 = U_{\varphi_2} + U_{r_2}, \quad U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_C = U_{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Электрические режимы элементов цепи описываются следующими уравнениями относительно токов и напряжений:

$$\begin{aligned} U_{r_k} = r_k I_k, \quad k=2,3; \quad U_{\varphi_2} = \varphi_2(I_4), \quad U_{\varphi_3} = \varphi_3(I_3); \quad U_{r_1} = r_1 I_L, \\ U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_L), \quad U_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt}, \quad I_h = h(U_h), \quad I_g = g U_g. \end{aligned}$$

Используя элементарные преобразования, из приведенных уравнений исключаем все переменные, кроме $x_1 = I_L, x_2 = U_C, x_3 = I_3, x_4 = I_4$, а также заданных тока I_1 и напряжения U_1 , и получаем систему:

$$L \frac{d}{dt} x_1 + r_1 x_1 = U_1(t) - \varphi_1(x_1), \quad (4.6)$$

$$C \frac{d}{dt} x_2 + g x_2 - x_3 = I_1(t) - h(x_2), \quad (4.7)$$

$$-x_2 - r_3 x_3 = \varphi_3(x_3) - \varphi_2(x_4), \quad (4.8)$$

$$r_2(x_3 + x_4) = U_1(t) - \varphi_2(x_4). \quad (4.9)$$

Векторная форма системы (4.6)–(4.9) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & r_2 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} U_1(t) - \varphi_1(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_2(x_4) \\ U_1(t) - \varphi_2(x_4) \end{pmatrix}.$$

Характеристический пучок $\lambda A + B$ уравнения (4.6)–(4.9) является регулярным, поскольку $\det(\lambda A + B) = -r_2(\lambda L + r_1)[(\lambda C + g)r_3 + 1] \neq 0$ и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ ограничена при больших $|\lambda|$, где

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda L + r_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^3((\lambda C + g)r_3 + 1)^{-1} & -((\lambda C + g)r_3 + 1)^{-1} & 0 \\ 0 & -((\lambda C + g)r_3 + 1)^{-1} & -(\lambda C + g)((\lambda C + g)r_3 + 1)^{-1} & 0 \\ 0 & ((\lambda C + g)r_3 + 1)^{-1} & (\lambda C + g)((\lambda C + g)r_3 + 1) & r_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Вычислим спектральные проекторы (2.21) P_k, Q_k , $k=1,2$, оператор G^{-1} и проекции вектора x на спектральные подпространства X_k ($k=1,2$), которые в координатном базисе пространства \mathbb{R}^4 представимы в виде

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & -(r_3 C)^{-1} & 0 \\ 0 & -(r_3 C)^{-1} & -r_3^{-1} + r_3^{-2} C^{-1} & 0 \\ 0 & (r_3 C)^{-1} & r_3^{-1} - r_3^{-2} C^{-1} & r_2^{-1} \end{pmatrix},$$

$$z = P_1 x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -r_3^{-1}x_2 \\ r_3^{-1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 + r_3^{-1}x_2 \\ x_4 - r_3^{-1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - B \right] P_2 = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1}(r_3^{-1}[\varphi_3'(x_3) + \varphi_2'(x_4)] + 1) & r_3^{-1}(\varphi_3'(x_3) + r_3) & -r_3^{-1}\varphi_2'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1}[\varphi_3'(x_3) + \varphi_2'(x_4)] + 1 & \varphi_3'(x_3) + r_3 & -\varphi_2'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_2'(x_4) & -r_2 & -\varphi_2'(x_4) - r_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнение $BP_2x = Q_2f(t, x)$ эквивалентно системе уравнений (4.8), (4.9), которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -r_3u_3 = \varphi_3(u_3 - r_3^{-1}z_2) - \varphi_2(u_4 + r_3^{-1}z_2), \\ r_2(u_3 + u_4) = U_1(t) - \varphi_2(u_4 + r_3^{-1}z_2). \end{cases} \quad (4.10)$$

Согласно условию (3.1) необходимо, чтобы $\forall t \geq 0 \exists z \in X_1 \exists u \in X_2$ такие, что выполнено (4.10), либо $\forall t \geq 0 \exists z_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (4.10).

В координатном базисе пространства \mathbb{R}^4 рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_2'(u_4 + \xi)}{r_3^2} + \frac{1}{r_3} & \frac{\varphi_3'(u_3 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1}\varphi_2'(u_4 + \xi) \\ 0 & \frac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_2'(u_4 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi_3'(u_3 - \xi) + r_3 & -\varphi_2'(u_4 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_2'(u_4 + \xi) & -r_2 & -\varphi_2'(u_4 + \xi) - r_2 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где $\xi = r_3^{-1}z_2 \in \mathbb{R}$.

Найдем, при каких условиях сужение функции (4.11) на X_2 является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v, w\}$ для любых $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T \in X_2$, которые при $u = v$ и $u = w$ (т. е. при $u_3 = v_3$, $u_4 = v_4$ и $u_3 = w_3$, $u_4 = w_4$) удовлетворяют (4.10). В координатном базисе пространства \mathbb{R}^4 рассмотрим проекторы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Theta_1 + \Theta_2 = Q_2).$$

Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 2$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2\mathbb{R}^4$ является единицей в Y_2 , аддитивным разложением единицы в Y_2 будут сужения проекторов Θ_1 , Θ_2 на двумерное подпространство Y_2 . Оператор $\hat{\Lambda} = \Theta_1\hat{\Phi}(\tilde{u}^1) + \Theta_2\hat{\Phi}(\tilde{u}^2)$ в координатном базисе пространства \mathbb{R}^4 имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3^2} + \frac{1}{r_3} & \frac{\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1}\varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & \frac{\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 & -\varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) & -r_2 & -\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) - r_2 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{u}^k = (\tilde{u}_1^k, \tilde{u}_2^k, \tilde{u}_3^k, \tilde{u}_4^k)^T \in \text{conv}\{v, w\}$, $k = 1, 2$, $\xi = r_3^{-1}z_2 \in \mathbb{R}$.

Найдем условия, при которых оператор $\Lambda = \hat{\Lambda}|_{X_2} : X_2 \rightarrow Y_2$ обратим, т. е. из равенства $\hat{\Lambda}u = 0$, $u \in X_2$, следует, что $u = 0$. По построению $u_1 = u_2 = 0$ (т. к. $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = (0, 0, x_3 + r_3^{-1}x_2, x_4 - r_3^{-1}x_2)^T$). Обозначим $u_3 = \alpha$, $u_4 = \beta$. Из равенства

$$\hat{\Lambda}u = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[r_3^{-1}\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + 1 \right] \alpha - r_3^{-1}\varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \beta \\ \left[\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 \right] \alpha - \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \beta \\ - r_2 \alpha - \left[\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2 \right] \beta \end{pmatrix} = 0$$

получается система трех уравнений. Поскольку в $\hat{\Lambda}u$ 2-я и 3-я строки линейно зависимы, то остается система из двух уравнений:

$$\alpha \left[\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 \right] - \beta \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) = 0, \quad (4.12)$$

$$- \alpha r_2 - \beta \left[\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2 \right] = 0. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что $\alpha = -\beta \left[r_2^{-1} \varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) + 1 \right]$. Подставляя α в (4.12) и умножая полученное выражение на $-r_2$, получаем $\beta \left\{ \left[\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2 \right] \left[\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 \right] + r_2 \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \right\} = 0$. Значит $\beta = 0$, а, следовательно, и $\alpha = 0$, если

$$\left[\varphi'_2(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2 \right] \left[\varphi'_3(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 \right] + r_2 \varphi'_2(\tilde{u}_4^1 + \xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Тогда сужение $\hat{\Phi}(u)$ на X_2 является базисно обратимым оператором на $\text{conv}\{v, w\}$, где $v, w \in X_2$ удовлетворяют при $u = v$ и $u = w$ системе (4.10).

Представим $Q_1 f(t, x)$ в виде (3.14) $Q_1 f(t, x) = S_1(t) P_1 x + \psi(t, x) + \Pi(x) e(t)$, где $S_1(t)$ – нулевая матрица, $\Pi(x) \equiv Q_1$,

$$e(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ I_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} -\varphi_1(x_1) \\ -h(x_2) - r_3^{-1}(\varphi_3(x_3) - \varphi_2(x_4)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3^2 C \end{pmatrix}$. Очевидно, $H = H^* > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (HP_1 x, G^{-1}\psi(t, x)) &= -x_1\varphi_1(x_1) - 3x_2h(x_2) - 3r_3^{-1}x_2(\varphi_3(x_3) - \varphi_2(x_4)) \text{ и, учитывая (4.8),} \\ (HP_1 x, G^{-1}\psi(t, x)) &= -x_1\varphi_1(x_1) - 3x_2h(x_2) + 3r_3^{-1}x_2^2 + 3x_2x_3. \end{aligned}$$

Предположим, что для функций φ_1 , h выполнено следующее ограничение: для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$-x_1\varphi_1(x_1) - 3x_2h(x_2) + 3r_3^{-1}x_2^2 + 3x_2x_3 \leq 0 \quad (4.15)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2(1 + 2r_3^{-2})} \geq R_T$, удовлетворяющего (4.9). Тогда выполнено условие (3.16).

Итак, пусть нелинейные сопротивления и проводимости h , φ_1 , φ_2 , φ_3 , входные ток $I_1(t)$ и напряжение $U_1(t)$ удовлетворяют следующим условиям: $\forall t \geq 0 \exists z_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (4.10); для любых $v, w \in X_2$, удовлетворяющих при $u = v$ и $u = w$ системе (4.10), выполнено (4.14) при любых $\tilde{u}^k = (\tilde{u}_1^k, \tilde{u}_2^k, \tilde{u}_3^k, \tilde{u}_4^k)^T \in \text{conv}\{v, w\}$, $k = 1, 2$; для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что выполнено (4.15) для любого $x \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (4.9) и такого, что $\sqrt{x_1^2 + x_2^2(1 + 2r_3^{-2})} \geq R_T$. Тогда по следствию 3.2.1 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей алгебраическим уравнениям (4.8), (4.9), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$.

Рассмотрим частные случаи. Пусть

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3, h(y) = \alpha_2 y^3, \varphi_3(y) = \alpha_3 y^3, \varphi_2(y) = \alpha_4 y^3, \alpha_k > 0, \quad (4.16)$$

где $k = \overline{1, 4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Тогда условие (4.14) принимает вид

$$\left[3\alpha_4(\tilde{u}_4^2 + \xi)^2 + r_2\right]\left[3\alpha_3(\tilde{u}_3^1 - \xi)^2 + r_3\right] + 3\alpha_4 r_2 (\tilde{u}_4^1 + \xi)^2 \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

где $r_2, r_3, \alpha_3, \alpha_4 > 0$, уравнение (4.9) имеет вид $r_2(x_3 + x_4) = U_1(t) - \alpha_4 x_4^3$ и $(HP_1 x, G^{-1}\psi(t, x)) = -\alpha_1 x_1^4 - 3\alpha_2 x_2^4 + 3r_3^{-1} x_2^2 + 3x_2 x_3$. Легко проверить, что для нелинейных функций (4.16) все условия следствия 3.2.1 выполнены.

Таким образом, если нелинейные сопротивления и проводимости имеют вид (4.16), то по следствию 3.2.1 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$ ($x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)^T$), удовлетворяющей условию согласования

$$\begin{cases} -x_2^0 - r_3 x_3^0 = \alpha_3 (x_3^0)^3 - \alpha_4 (x_4^0)^3 \\ r_2 (x_3^0 + x_4^0) = U_1(t) - \alpha_4 (x_4^0)^3 \end{cases}, \text{ существует единственное решение уравнения}$$

(2.1) на полуоси $[t_0, \infty)$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Условия следствия 3.2.1 также выполнены в более общем случае для функций вида $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2m+1}$, $h(y) = \alpha_2 y^{2s+1}$, $\varphi_3(y) = \alpha_3 y^{2n-1}$, $\varphi_2(y) = \alpha_4 y^{2r-1}$, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0, k = \overline{1, 4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Аналогичное утверждение верно для функций $\varphi_3(y) = a y^{1/(2n+1)}$, $\varphi_2(y) = b y^{1/(2r+1)}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $y \in \mathbb{R}$, если функции $\varphi_1(y), h(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ удовлетворяют требованию: для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что выполнено (4.15) при любом $x \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2(1 + 2r_3^{-2})} \geq R_T$, удовлетворяющем (4.9).

4.3 Исследование модели нелинейного четырехполюсника в условиях неполных данных

Рассмотрим электрический четырехполюсный фильтр (рис. 4.2 [65, 93]) с известным входным током I , нелинейным сопротивлением φ и проводимостью h , линейными сопротивлениями r_1, r_2 , индуктивностью L и емкостью C .

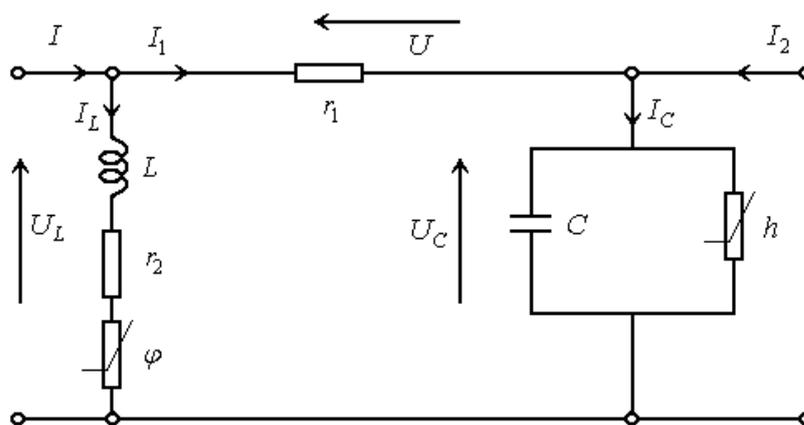


Рисунок 4.2 – Схема электрической цепи четырехполюсника

Для цепи, представленной на рис. 4.2, уравнения Кирхгофа и уравнения связей имеют вид: $I_1 + I_L = I$, $I_1 + I_2 = I_C$, $U = r_1 I_1$, $U_L = U + U_C$, $U_L = L \frac{dI_L}{dt} + r_2 I_L + \varphi(I_L)$, $I_C = C \frac{dU_C}{dt} + h(U_C)$.

Выполнив элементарные преобразования, получим недоопределенную систему уравнений с переменными $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_1$, $x_4 = I_2$:

$$L \frac{dx_1}{dt} + r_2 x_1 - x_2 - r_1 x_3 = -\varphi(x_1), \quad (4.18)$$

$$C \frac{dx_2}{dt} - x_3 - x_4 = -h(x_2), \quad (4.19)$$

$$x_1 + x_3 = I(t). \quad (4.20)$$

Для однозначного определения внутреннего состояния электрической цепи четырехполюсника необходимо знать два входных параметра: входной ток и напряжение, или два входных тока, или два напряжения. В данном случае проводится исследование модели четырехполюсника в условиях неполных данных, поскольку задан лишь один входной параметр: ток $I(t)$.

Найдем ограничения, которые обеспечивают гладкую эволюцию состояний четырехполюсника в течение сколь угодно большого временного периода. Чтобы решить эту задачу, необходимо получить условия существования глобального

решения системы уравнений (4.18)–(4.20), описывающей модель цепи четырехплюсника. Для нахождения требуемых условий воспользуемся следствием 3.3.1.

Предполагается, что L, C, r_1, r_2 – положительные вещественные параметры, $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\varphi(x_1) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h(x_2) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Векторная форма системы (4.18)–(4.20) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ I(t) \end{pmatrix}.$$

Ранг пучка $\lambda A + B$ равен $r(A, B) = 3$, $A, B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, дефект равен $N = 1$ (смотри определение в подразделе 2.5).

Уравнение (2.30) имеет одно ненулевое решение $x(\lambda) = (1, \lambda L + r_1 + r_2, -1, \lambda^2 CL + \lambda C(r_1 + r_2) + 1)^T$, которое определяется с точностью до скалярного множителя. Как описано в подразделе 2.5, находим пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} = \text{Lin}\{s_i\}_{i=1}^3$, $X_{s_1} = \text{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_2} = \text{Lin}\{s_3\}$, $X_r = \text{Lin}\{p\}$, $Y_s = \text{Lin}\{g_i\}_{i=1}^2$, $Y_r = \text{Lin}\{q\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и проекторы $S = S_1 + S_2: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_s$, $S_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_{s_k}$, $k = 1, 2$, $P: \mathbb{R}^4 \rightarrow X_r$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_s$, $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow Y_r$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA=0$, оператор $A_r = QA|_{X_r} = A_2$ также нулевой. Если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$. Значит оператор $B_r = QB|_{X_r} = B_2$ обратим. Очевидно, компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) является регулярным пучком индекса 1.

Отметим, что $X_2 = X_r$, $Y_2 = Y_r$, $X_1 = \{0\}$, $Y_1 = \{0\}$, $P_2 = P$, $Q_2 = Q$, $Q_1 = 0$, $P_1 = 0$.

Проекция вектора x имеют вид: $P_1x = 0$,

$$S_1x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, S_2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}, u = P_2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \\ -(x_1 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ -v \end{pmatrix}, v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $F_1 = F$ и $F_2 = 0$ (см. замечание 3.3.1), многообразие L_0 из условия (3.4) принимает вид $L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t, x)] = 0\}$. Уравнение $Q_2[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно уравнению (4.20), которое можно записать в виде

$$v = I(t). \quad (4.21)$$

Согласно условию (3.24) необходимо, чтобы $\forall t \geq 0 \exists v \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (4.21). Поскольку функция $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ задана, то, очевидно, условие (3.24)

выполнено.

Рассмотрим оператор-функцию $\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, Sx + u)) - B \right] P_2 = -BP$.

Поскольку пространства X_2 , Y_2 одномерны, базисная обратимость оператор-функции эквивалентна обратимости. Ясно, что сужение $\Phi(u)$ (3.25) оператор-функции $\hat{\Phi}(u)$ на подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2 для любых $u \in \text{conv}\{u_1, u_2\}$, $u_1, u_2 \in X_2$.

Представим проекции функции $f(t, x)$ в виде (3.42). Т. к. $Q_1 = 0$, $F_1 = F$, то проекция $Q_1 f(t, x) = 0$ и $F_1 f(t, x) = Ff(t, x) = \psi_1(x) + g_1(t)$, где

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(t) = \begin{pmatrix} r_1 I(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Оператор} \quad A_{gen} = FAS_1|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$$

(см. (2.29)) имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$. Матрица, отвечающая оператору A_{gen}^{-1} , может быть представлена в виде

$$A_{gen}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & 0 \\ -L^{-1} & 0 & -r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Найдем } A_{gen}^{-1} \psi_1(x) = \begin{pmatrix} -L^{-1} \varphi(x_1) \\ -C^{-1} h(x_2) \\ L^{-1} \varphi(x_1) \\ -L^{-1} \varphi(x_1) \end{pmatrix} \text{ и выберем } H_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда}$$

$$(H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) = -3\varphi(x_1)x_1 - h(x_2)x_2.$$

Пусть для каждого $T > 0$ найдется $R_T > 0$ такое, что

$$-3\varphi(x_1)x_1 - h(x_2)x_2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \geq R_T, \quad (4.22)$$

тогда по следствию 3.3.1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (4.20), существует решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$.

Рассмотрим частные случаи. Легко проверить, что условия следствия 3.3.1 выполнены для нелинейных функций $\varphi(y) = \alpha_1 y^{2k-1}$, $h(y) = \alpha_2 y^{2r-1}$, $k, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, $y \in \mathbb{R}$. Заметим, что подобные нелинейные сопротивления и проводимости встречаются в реальных радиотехнических системах. Нелинейные функции $\varphi(y) = \alpha_1 y^{1/(2k+1)}$, $h(y) = \alpha_2 y^{1/(2r+1)}$, $k, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, $y \in \mathbb{R}$, также удовлетворяют условию (4.22).

4.4 Обратная задача для нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра

Рассмотрим следующую обратную задачу для двухполюсного радиотехнического фильтра, изображенного на рис. 4.3 [66, 93].

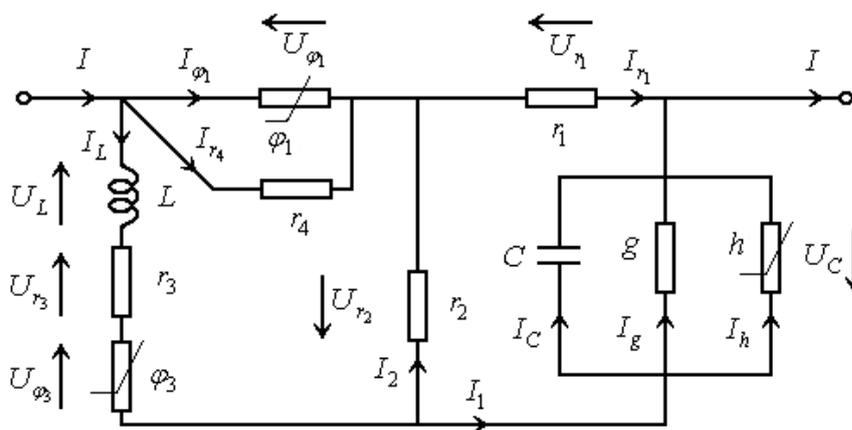


Рисунок 4.3 – Схема электрической цепи двухполюсника

Проверим, что за счет выбора входного тока $I = I(t)$ и соответствующих начальных данных можно обеспечить эволюцию тока I_1 внутри двухполюсника так, чтобы он равнялся наперед заданной функции $I_1 = I_1(t)$, $t_0 \leq t < \infty$. Для решения этой задачи необходимо получить условия глобальной разрешимости системы

уравнений с заданными токами $I(t)$, $I_1(t)$, которая описывает модель электрической цепи двухполюсника.

Для представленной на рис. 4.3 цепи уравнения Кирхгофа имеют вид:

$$I = I_{r_4} + I_{\varphi_1} + I_L, \quad I_L = I_1 + I_2, \quad I_1 = I_C + I_g + I_h, \quad I_{r_1} = I - I_1,$$

$$U_L + U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_{r_2} = U_{\varphi_1}, \quad U_C = U_{r_1} + U_{r_2}.$$

Электрические режимы элементов двухполюсника описываются следующими уравнениями относительно токов и напряжений:

$$U_{r_1} = r_1 I_{r_1}, \quad U_{r_2} = r_2 I_2, \quad U_{r_3} = r_3 I_L, \quad U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_{\varphi_1}), \quad U_{\varphi_3} = \varphi_3(I_L),$$

$$I_{r_4} = q U_{\varphi_1}, \quad q = 1/r_4, \quad U_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt}, \quad I_g = g U_C, \quad I_h = h(U_C).$$

Здесь индуктивность L , емкость C , линейные сопротивления r_k , $k = \overline{1,4}$ и проводимость g являются положительными вещественными параметрами, непрерывно дифференцируемые на \mathbb{R} скалярные функции φ_1 , φ_3 и h характеризуют нелинейные сопротивления и проводимость, заданные токи $I(t)$, $I_1(t)$ являются непрерывными при $t \geq 0$ скалярными функциями.

Выполнив элементарные преобразования, из приведенных выше уравнений получим переопределенную систему с переменными $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_{\varphi_1}$:

$$L \frac{dx_1}{dt} + (r_2 + r_3)x_1 = r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1), \quad (4.23)$$

$$C \frac{dx_2}{dt} + g x_2 = I_1(t) - h(x_2), \quad (4.24)$$

$$x_2 - r_2 x_1 = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \quad (4.25)$$

$$x_1 + x_3 = I(t) - q \varphi_1(x_3). \quad (4.26)$$

Векторная форма системы (4.23)–(4.23) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t) \\ I(t) - q\varphi_1(x_3) \end{pmatrix}.$$

Ранг пучка $\lambda A + B$ равен $r(A, B) = 3$, $A, B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, дефект равен $N = M = 1$. Проверим выполнение условий следствия 3.3.1.

Уравнение (2.32) имеет одно ненулевое решение (оно определяется с точностью до скалярного множителя), которое при $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ имеет вид $y(\lambda) = (-r_2(\lambda C + g), \lambda L + r_2 + r_3, -(\lambda C + g)(\lambda L + r_2 + r_3), 0)^T$, при $L = C(r_2 + r_3)/g$ имеет вид $y(\lambda) = (-r_2 g / (r_2 + r_3), 1, -(\lambda C + g), 0)^T$. Анализируя решение $y(\lambda)$ при $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ получаем подпространства $X_s = \text{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_r = \text{Lin}\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^3$, $Y_{s_1} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_3\}$, $Y_r = \text{Lin}\{d\}$, $X_2 = X_r$, $Y_2 = Y_r$, $X_1 = \{0\}$, $Y_1 = \{0\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при $L = C(r_2 + r_3)/g$ получаем подпространства $X_s = \text{Lin}\{s\}$, $X_r = X_1 \dot{+} X_2 = \text{Lin}\{p_i\}_{i=1}^2$, $X_1 = \text{Lin}\{p_1\}$, $X_2 = \text{Lin}\{p_2\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = \text{Lin}\{l_1\}$, $Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_2\}$, $Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2 = \text{Lin}\{d_i\}_{i=1}^2$, $Y_1 = \text{Lin}\{d_1\}$, $Y_2 = \text{Lin}\{d_2\}$, где

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим подробно случай, когда $L \neq C(r_2 + r_3)/g$.

Выпишем введенные в подразделе 2.5 проекторы $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r$, $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_r$, $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s$, $F_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_{s_k}$, $P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k$, $Q_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_k$, $k=1,2$:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = F_1 + F_2,$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = P, Q_2 = Q, Q_1 = 0, P_1 = 0.$$

Поскольку $QA=0$, оператор $A_r = QA|_{X_r} = A_2$ также нулевой. Если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$. Значит оператор $B_r = QB|_{X_r} = B_2$ обратим и компонента $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1.

Проекция вектора x имеют вид: $P_1 x = 0$, $x_s = Sx = (x_1, x_2, -x_1)^T = (a, b, -a)^T$, $u = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0, 0, v)^T$, где $a = x_1$, $b = x_2$, $v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}$.

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0$, определяющее $L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \mid (F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0\}$, эквивалентно системе двух уравнений (4.25), (4.26). С учетом новых обозначений систему (4.25), (4.26) можно переписать в виде

$$b - r_2 a = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \quad (4.27)$$

$$v = I(t) - q\varphi_1(v - a). \quad (4.28)$$

Легко проверить, что условие (3.24) выполнено.

Найдем $\left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - B \right] P_2 = -(q\varphi_1'(x_3) + 1)W$. Здесь $\varphi_1'(x_3) = \frac{d\varphi_1(x_3)}{dx_3}$,

$W = (w_{ij})$ – матрица размера 4×3 , у которой все элементы нулевые, кроме $w_{41} = 1$, $w_{43} = 1$. Рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x_s + \tilde{u})) - B \right] P_2 = -(q\varphi_1'(\tilde{v} - a) + 1)W,$$

где $\tilde{u} = (0, 0, \tilde{v})^T$, $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, и $a \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют (4.28).

Поскольку пространства X_2 , Y_2 одномерны, базисная обратимость оператор-функции эквивалентна обратимости. Следовательно, для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), сужение $\Phi(\tilde{u})$ (3.25) оператор-функции $\hat{\Phi}(\tilde{u})$ ($\tilde{u} = (0, 0, \tilde{v})^T$) на подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2 для любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, если $q\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -1$, $a \in \mathbb{R}$.

Оператор $A_{gen} = F_1 A S|_{X_s} : X_s \rightarrow Y_{s_1}$ (смотри (2.31)) имеет обратный $A_{gen}^{-1} : Y_{s_1} \rightarrow X_s$, которому отвечает матрица

$$A_{gen}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим проекции функции $f(t, x)$ в виде (3.42). Т. к. $Q_1 = 0$, то проекция $Q_1 f(t, x) = 0$, $F_1 f(t, x) = \psi_1(x) + g_1(t)$, где

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ -h(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(t) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) \\ I_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}$. Тогда $(H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) = 2x_1[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2)$.

Найдем ограничение, при котором для любого конечного интервала $0 \leq t \leq T$ найдется $R_T > 0$ такое, что если $\|Sx + P_1 x\| = \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$ и выполнено (4.25), (4.26), то $(H_1 Sx, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) \leq 0$. Обозначим $M_T = \max_{t \in [0, T]} |I(t)|$ и, учитывая (4.26), получим искомое ограничение:

$$\forall T \geq 0 \exists R_T > 0: 2[M_T |\varphi_1(x_3)| - x_3 \varphi_1(x_3) - q\varphi_1^2(x_3) - x_1 \varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2) \leq 0 \quad (4.29)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих (4.25) и таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$.

По следствию 3.3.1 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей системе уравнений (4.25), (4.26), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$, если:

- а) $L \neq C(r_2 + r_3)/g$;
- б) для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), выполнено $\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -r_4$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $a \in \mathbb{R}$;
- в) $\forall t \geq 0 \forall a \in \mathbb{R} \exists v \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (4.28);
- г) выполнено условие (4.29) для всех $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих (4.25) и таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$.

Теперь рассмотрим случай, когда $L = C(r_2 + r_3)/g$.

Выпишем проекторы $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s$, $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r$, $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_r$, $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s$,
 $F_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_{s_k}$, $P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k$, $Q_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_k$, $k=1,2$: $F = F_1 + F_2$, $Q = Q_1 + Q_2$,

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = P_1 + P_2.$$

Легко проверить, что $\lambda A_r + B_r$ – регулярный пучок индекса 1.

Проекции вектора x имеют вид: $z = P_1 x = (x_1, r_2 x_1, -x_1)^T = (a, r_2 a, -a)^T$,
 $x_s = Sx = (0, x_2 - r_2 x_1, 0)^T = (0, b, 0)^T$, $u = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0, 0, v)^T$, где
 $a = x_1, b = x_2 - r_2 x_1, v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}$.

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно системе двух уравнений (4.25), (4.26). С учетом новых обозначений систему (4.25), (4.26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} b &= r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \\ v &= I(t) - q\varphi_1(v - a). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Легко проверить, что условие (3.24) выполнено.

Аналогично случаю, рассмотренному выше, для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), оператор-функция $\Phi(\tilde{u})$ (3.25) ($\tilde{u} = (0, 0, \tilde{v})^T$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{v_1, v_2\}$, если $q\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -1$, $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Выпишем матрицы $A_{gen}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 L^{-1} & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ r_2 L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C \frac{r_2 + r_3}{r_2 g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} L r_2 & 0 & 0 \\ 0 & L r_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} & (H_1 S x, A_{gen}^{-1} \psi_1(x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} \psi_2(x)) = \\ & = (3r_2 x_1 - x_2)[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + (r_2 x_1 - x_2)(r_2 + r_3)(r_2 g)^{-1} h(x_2). \end{aligned}$$

По следствию 3.3.1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей системе уравнений (4.25), (4.26), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$, если:

- а) $L = C(r_2 + r_3)/g$;
- б) для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), выполнено $\varphi'_1(\tilde{v} - a) \neq -r_4$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $a \in \mathbb{R}$;
- в) $\forall t \geq 0 \forall a \in \mathbb{R} \exists v \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (4.28);
- г) $\forall T \geq 0 \exists R_T > 0 : (3r_2 x_1 - x_2)[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + (r_2 x_1 - x_2)(r_2 + r_3)(r_2 g)^{-1} h(x_2) \leq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих (4.25), (4.26) и таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть при $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ нелинейные функции имеют вид:

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2k-1}, \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{2j-1}, h(y) = \alpha_3 y^{2r-1}, \quad (4.31)$$

где $k, j, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 3}$, $y \in \mathbb{R}$.

Легко проверить, что они удовлетворяют требованиям следствия 3.3.1.

При $L = C(r_2 + r_3)/g$ для нелинейных функций вида (4.31), где $k \leq j$, r и α_1 достаточно мало, условия следствия 3.3.1 также выполнены.

Выводы по разделу 4

1. Построены математические модели четырех типов нелинейных радиотехнических фильтров с сосредоточенными параметрами. Как и в методе электромеханических аналогий, разработанные в диссертации модели нелинейных радиотехнических цепей могут быть использованы в анализе робототехнических, экономических и других систем, в которых выделяются структурная геометрия в форме модельного графа и параметры составляющих элементов.

2. Для построенных математических моделей найдены ограничения, которые обеспечивают гладкую детерминированную эволюцию состояний в течение сколь угодно большого временного периода. Ограничения были получены в результате применения следствий 3.2.1, 3.3.1 и проверки их условий. Указанным ограничениям удовлетворяют нелинейные функции, которые не являются глобально липшицевыми, что позволяет гарантировать существование и ограниченность глобальных решений уравнений динамики для более широких классов нелинейных радиотехнических систем.

3. Анализ рассмотренных задач показывает, что практическая проверка условий теорем (и их следствий) существования и единственности из раздела 3 является достаточно эффективной и эти условия могут быть физически обеспечены.

4. Установлено, что теоремы 3.2.1, 3.3.1 и их следствия 3.2.1, 3.3.1 гарантируют существование глобальных решений уравнений динамики определенных классов нелинейных радиотехнических систем. Эти теоремы могут быть применены для исследования математических моделей, которые описываются полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями и применяются в экономике, робототехнике, механике, теории управления и других областях.

Основные результаты раздела опубликованы в [49, 65–69, 93].

РАЗДЕЛ 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕЛИНЕЙНЫМ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМ ЦЕПЯМ

Для более детального анализа эволюции систем важен вопрос об устойчивости, а именно, исследование ограниченности и устойчивости глобальных решений ДАУ. Система уравнений *устойчива по Лагранжу* или *устойчива в смысле Лагранжа*, если каждое ее решение ограничено на всей области определения [36, с. 131]. Исследование устойчивости по Лагранжу системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводилось в монографии Ж. Ла-Салля, С. Лефшеца [36] с помощью метода, полученного путем развития прямого метода Ляпунова.

5.1 Устойчивость по Лагранжу ДАУ с регулярным характеристическим пучком

Запись $\int_c^{+\infty} f(t)dt = \infty$ означает, что несобственный интеграл от некоторой константы c до бесконечности расходится, $\int_c^{+\infty} f(t)dt < \infty$ – что интеграл сходится.

5.1.1 Теорема об устойчивости в смысле Лагранжа

Теорема 5.1.1. [75] Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1. Пусть выполнено (3.1) и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция (3.2) ($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Пусть для некоторого

самосопряженного положительного оператора $H \in L(X_1)$ и числа $R > 0$ существуют функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что

$$v = \frac{1}{2}(HP_1x, P_1x), \quad \int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty \quad (c > 0) \text{ и для любых } t \in [0, \infty), \quad \|P_1x\| \geq R \text{ выполнено}$$

$$(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1f(t, x)]) \leq k(t)U(v). \quad (5.1)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Если $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < \infty$ и существуют числа $C, M > 0$ такие, что для любых $t \in [0, \infty)$, $\|P_1x\| \leq M$ выполнена оценка

$$\|G^{-1}Q_2f(t, P_1x)\| \leq C, \quad (5.2)$$

то уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы Q_1, Q_2 и оператор G^{-1} получим эквивалентную систему (3.4).

Как в доказательстве теоремы 3.2.1, определяем операторы $P_a: \mathbb{R}^a \rightarrow X_1$, $P_d: \mathbb{R}^d \rightarrow X_2$, $P_a^{-1}: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1}: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, вводим замену $z = P_a^{-1}P_1x$, $v = P_d^{-1}P_2x$ и получаем систему (3.5), (3.6), эквивалентную системе (3.4).

Рассмотрим отображение (3.7). Оно непрерывно на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial}{\partial z} F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2f(t, x))P_a$,

$\frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) = P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d v)P_d$. Как показано в доказательстве теоремы 3.2.1, существует единственное решение $v = \eta(t, z)$ уравнения (3.6), где функция

$v = \eta(t, z): [0, \infty) \times D_z \rightarrow D_v$ непрерывна по совокупности переменных t, z и

непрерывно дифференцируема по z , области $D_z \subset \mathbb{R}^a$, $D_v \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $P_a^{-1}P_1x_0 \in D_z$, $P_d^{-1}P_2x_0 \in D_v$ и \tilde{L}_0 имеет вид (3.8). Подставим функцию $v = \eta(t, z)$ в (3.5) и получим:

$$\frac{d}{dt}z = P_a^{-1}G^{-1}[-BP_a z + g(t, z)], \quad (5.3)$$

где $g(t, z) = Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z))$.

В силу свойств функций $\eta(t, z)$ и $Q_1 f(t, x)$, функция $g(t, z) = Q_1 f(t, P_a z + P_d \eta(t, z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по z на $[0, \infty) \times D_z$. Следовательно, для любой начальной точки (t_0, z_0) такой, что $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (5.3) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Введем функцию $V(P_1 x) = \frac{1}{2}(HP_1 x, P_1 x) = \frac{1}{2}(HP_a z, P_a z) = \frac{1}{2}(P_a^* HP_a z, z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_a^* HP_a$ и H – оператор из (5.1). Градиент функции \hat{V} равен $\text{grad } \hat{V}(z) = \hat{H}z$. Согласно (5.1) существует $\hat{R} > 0$ такое, что

$$(\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[-BP_a z + g(t, z)]) \leq k(t)U(\hat{V}), \quad t \geq 0, \|z\| \geq \hat{R}, \quad (5.4)$$

где $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, функция $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такая, что $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$.

С учетом (5.4) производная функции $\hat{V}(z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z)$ в силу системы (5.3) удовлетворяет при всех $t \geq 0$ и z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}$, следующей оценке:

$$\dot{\hat{V}} \Big|_{(5.3)} = (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[-BP_a z + g(t, z)]) \leq k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$

следует, что неравенство $\dot{v} \leq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения. Тогда по теореме 2.2.7 каждое решение уравнения (5.3) неограниченно продолжаемо. Найденное глобальное решение $z(t)$ уравнения (5.3) определено на всем интервале $[t_0, \infty)$. Следовательно, функция $x(t) = P_a z(t) + P_d \eta(t, z(t))$ будет решением задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Проверим, что каждое локальное решение $x(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$, уравнения (2.1) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $[t_0, \infty)$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (2.1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению.

Если $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < \infty$, то неравенство $\dot{v} \leq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного неограниченного решения. Тогда по теореме [36, гл. IV, теорема XV] уравнение (5.3) устойчиво по Лагранжу. Следовательно,

$$\exists M < \infty \forall t \in [0, \infty) : \|P_a z(t)\| \leq M. \quad (5.5)$$

Рассмотрим отображение (3.7). По формуле конечных приращений:

$$F_k(t, z, v) - F_k(t, z, 0) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t, z, \tilde{v}_k) v, \quad \text{где} \quad \tilde{v}_k = \theta v \in \text{conv}\{0, v\}, \quad \theta \in (0, 1),$$

$$F_k(t, z, v) = \hat{\Theta}_k F(t, z, v), \quad k = \overline{1, d}, \quad \{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d - \text{аддитивное разложение единицы в } \mathbb{R}^d.$$

Следовательно $F(t, z, v) - F(t, z, 0) = \Lambda v$, где $\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, \tilde{v}_k)$. Для любых v

таких, что $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$, оператор $\Lambda \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ обратим на $\text{conv}\{0, v\}$ и $\Lambda^{-1} \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Поскольку для функций $v = \eta(t, z(t))$, $z = z(t)$ отображение

$F(t, z(t), \eta(t, z(t))) = 0$ и $F(t, z(t), 0) = P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z(t), 0)$, то $\eta(t, z(t)) = -\Lambda^{-1} P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z(t), 0)$. Учитывая, что Λ^{-1} – ограниченный оператор, существует число $N > 0$ такое, что $\|\eta(t, z(t))\| \leq N \|P_d^{-1}\| \|G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z(t), 0)\|$ для любых $t \in [t_0, \infty)$. Тогда из (5.5), (5.2) следует, что $\forall t \in [t_0, \infty) : \|\eta(t, z(t))\| \leq N \|P_d^{-1}\| C$.

Так как для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнена оценка $\|x(t)\| = \|P_a z(t) + P_d \eta(t, z(t))\| \leq M + NC$, решение уравнения (2.1) глобально ограничено. Это верно для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$. Значит уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу.

Теорема доказана.

5.1.2 Теорема о неустойчивости в смысле Лагранжа

Теорема 5.1.2. [75] Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1. Пусть выполнено (3.1) и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция (3.2) является базисно обратимой на $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Далее пусть существует множество $\Omega \subset X_1$ такое, что $P_1 x = 0 \notin \Omega$ и компонента $P_1 x(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $P_1 x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω . Пусть для некоторого самосопряженного положительного оператора $H \in L(X_1)$ существуют функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{1}{2}(HP_1 x, P_1 x)$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < \infty$ ($c > 0$), $\int_c^{+\infty} k(t) dt = \infty$ и для любых $t \in [0, \infty)$, $P_1 x \in \Omega$ выполнено

$$(HP_1 x, G^{-1}[-BP_1 x + Q_1 f(t, x)]) \geq k(t)U(v). \quad (5.6)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $P_1 x_0 \in \Omega$, существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) и это решение имеет конечное время определения.

Доказательство. Начало доказательства аналогично доказательству теоремы 5.1.1. Далее внесены следующие изменения.

Выпишем полученное выше дифференциальное уравнение (5.3)

$$\frac{d}{dt} z = P_a^{-1} G^{-1} [-BP_a z + g(t, z)], \text{ где } g(t, z) = Q_1 \tilde{f}(t, z, \eta(t, z)).$$

Для любой начальной точки (t_0, z_0) такой, что $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (5.3) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Следовательно, для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $x_0 = P_a z_0 + P_d \eta(t_0, z_0)$, существует единственное решение $x(t) = P_a z(t) + P_d \eta(t, z(t))$ задачи Коши (2.1), (2.2) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$.

По условию теоремы существует множество $\Omega \subset X_1$ такое, что $P_1 x = 0 \notin \Omega$ и компонента $P_1 x(t)$ каждого решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $P_1 x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω . Учитывая связь $P_1 x = P_a z$, каждое решение $z(t)$ уравнения (5.3), начинающееся в множестве $\hat{\Omega} = \{z \in \mathbb{R}^a \mid P_a z \in \Omega\} = P_a^{-1} \Omega$, все время остается в нем и $z = 0 \notin \hat{\Omega}$. Введем функцию $\hat{V}(z) = \frac{1}{2} (\hat{H}z, z)$, где $\hat{H} = P_a^* H P_a$, H – оператор из (5.6), которая положительна при всех $z \in \hat{\Omega}$.

Поскольку $(H P_a z, G^{-1} [-BP_a z + g(t, z)]) = (\hat{H}z, P_a^{-1} G^{-1} [-BP_a z + g(t, z)])$, то согласно (5.6) получаем:

$$(\hat{H}z, P_a^{-1} G^{-1} [-BP_a z + g(t, z)]) \geq k(t) U(\hat{V}) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall z \in \hat{\Omega}, \quad (5.7)$$

где $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < \infty$,

$$\int_c^{+\infty} k(t) dt = \infty.$$

С учетом (5.7) производная функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (5.3) удовлетворяет для всех $t \geq 0$ и $z \in \hat{\Omega}$ оценке: $\dot{\hat{V}} \Big|_{(5.3)} = (\hat{H}z, P_a^{-1}G^{-1}[-BP_a z + g(t, z)]) \geq k(t)U(\hat{V})$.

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v} \geq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного неограниченно продолжаемого решения. Тогда по теореме [36, гл. IV, теорема XIV] каждое решение $z(t)$ уравнения (5.3), удовлетворяющее условию $z(t_0) = z_0$, где $z_0 \in \hat{\Omega}$, $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, имеет конечное время определения, то есть определено на некотором конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t \rightarrow T-0} \|z(t)\| = \infty$. Тогда каждая функция $x(t) = P_a z(t) + P_d \eta(t, z(t))$ с соответствующими начальными значениями (t_0, x_0) , где $x_0 = P_a z_0 + P_d \eta(t_0, z_0)$, будет решением задачи Коши (2.1), (2.2) с конечным временем определения, т. е. решение $x(t)$ определено на соответствующем конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t \rightarrow T-0} \|x(t)\| = \infty$.

Проверим единственность решения $x(t)$, $t \in [t_0, T)$. Из доказанного выше следует, что решение $x(t)$ единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, T)$. Тогда существует точка $t_* \in [\varepsilon, T)$ и два различных решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (2.1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

5.2 Устойчивость по Лагранжу сингулярного ДАУ

5.2.1 Теорема об устойчивости в смысле Лагранжа

В докладах [70, 95] представлена следующая теорема об устойчивости по Лагранжу сингулярного ДАУ (2.1).

Теорема 5.2.1. Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов и его регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) имеет индекс 1. Предположим, что выполнено условие (3.24) и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция (3.25) ($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$, число $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\phi_{s_2}(t) \in C([0, \infty), X_{s_2})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{1}{2}[(H_1 S_1 x, S_1 x) + (H_2 P_1 x, P_1 x)]$, $(t, S_1 x + \phi_{s_2}(t) + Px) \in L_0$ при всех $t \in [0, \infty)$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ ($c > 0$) и для любых $t \in [0, \infty)$, $\|(S_1 + P_1)x\| \geq R$ выполнено

$$\begin{aligned} & (H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} F_1[-BS_1 x - B\phi_{s_2}(t) + f(t, x)]) + \\ & + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1[-BP_1 x + f(t, x)]) \leq k(t)U(v). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$, для которого при $r(A, B) = m < n$ выбор функции ϕ_{s_2} с начальным значением $\phi_{s_2}(t_0) = S_2 x_0$ однозначно определяет компоненту $S_2 x(t) = \phi_{s_2}(t)$.

Если $\int_c^{+\infty} k(t)dt < \infty$, $\sup_{t \in [0, \infty)} \|\phi_{s_2}(t)\| < \infty$ и существуют числа $C_1, C_2, M, K > 0$ такие, что для любых $t \in [0, \infty)$, $\|Sx + P_1x\| \leq M$ выполнено

$$\|Q_2 f(t, Sx + P_1x)\| \leq C_1, \quad (5.9)$$

и для любых $t \in [0, \infty)$, $\|x\| \leq K$ выполнено

$$\|F_2 f(t, x)\| \leq C_2, \quad (5.10)$$

то при подстановке $S_2 x = \phi_{s_2}(t)$ уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу; когда $r(A, B) = n < t$ компонента $S_2 x$ отсутствует.

Доказательство. Применяя к уравнению (2.1) проекторы $F_i, Q_i, i = 1, 2$, получим эквивалентную систему (3.27).

Как в доказательстве теоремы 3.3.1, определяем операторы $S_b^{-1}: X_{s_1} \rightarrow \mathbb{R}^b$, $S_l^{-1}: X_{s_2} \rightarrow \mathbb{R}^l$, $P_a^{-1}: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1}: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, вводим замену $x_{s_1} = S_b w$, $x_{s_2} = S_l \xi$, $x_1 = P_a z$, $x_2 = P_d v$, и получаем систему (3.31)–(3.34), эквивалентную (3.27).

Рассмотрим отображение (3.35). Оно непрерывно на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \Psi(t, w, \xi, z, v)}{\partial (w, \xi, z)}$ и $\frac{\partial \Psi(t, w, \xi, z, v)}{\partial v} = P_d^{-1} B_2^{-1} \Phi(P_d v) P_d$, где $\Phi(P_d v) = \Phi(u)$ – оператор-функция (3.25), $u = P_d v \in X_2$.

Как показано в доказательстве теоремы 3.3.1, существует единственное решение $v = \eta(t, w, \xi, z)$ уравнения (3.33), где функция $v = \eta(t, w, \xi, z): [0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z \rightarrow \tilde{D}_v$ непрерывна по (t, w, ξ, z) вместе со своими частными производными по w, ξ, z , области $\tilde{D}_w \subset \mathbb{R}^b$, $\tilde{D}_\xi \subset \mathbb{R}^l$, $\tilde{D}_z \subset \mathbb{R}^a$, $\tilde{D}_v \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $S_b^{-1} S_1 x_0 \in \tilde{D}_w$, $S_l^{-1} S_2 x_0 \in \tilde{D}_\xi$, $P_a^{-1} P_1 x_0 \in \tilde{D}_z$, $P_d^{-1} P_2 x_0 \in \tilde{D}_v$, $[0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_\xi \times \tilde{D}_z \times \tilde{D}_v = \tilde{L}_0$, где \tilde{L}_0 имеет вид (3.36).

Выберем непрерывную функцию $\phi(t) = S_l^{-1} \phi_{s_2}(t): [0, \infty) \rightarrow \tilde{D}_\xi$ и подставим $\xi = \phi(t)$ в функцию η . Обозначим $q(t, w, z) = \eta(t, w, \phi(t), z)$, подставим $v = q(t, w, z)$ и $\xi = \phi(t)$ в (3.31), (3.32):

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= S_b^{-1} A_{gen}^{-1} [-B_{gen} S_b w + F_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z)) - B_{und} S_l \phi(t)], \\ \frac{dz}{dt} &= P_a^{-1} A_1^{-1} [-B_1 P_a z + Q_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z))],\end{aligned}$$

и перепишем эту систему в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 [-N_2 \omega + G(t, \omega)], \quad (5.11)$$

$$\text{где } \omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix};$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} S_b^{-1} A_{gen}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1} A_1^{-1} \end{pmatrix};$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} B_{gen} S_b & 0 \\ 0 & B_1 P_a \end{pmatrix};$$

$$G(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) - B_{und} S_l \phi(t) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) \end{pmatrix}, \quad q(t, \omega) = q(t, w, z).$$

В силу свойств функций $F_1 f$, $Q_1 f$, q , ϕ функция $G(t, \omega)$ непрерывна по (t, ω) и непрерывно дифференцируема по ω на $[0, \infty) \times \tilde{D}_w \times \tilde{D}_z$. Следовательно, для любой начальной точки (t_0, ω_0) такой, что $(t_0, w_0, \phi(t_0), z_0, q(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $\omega(t)$ уравнения (5.11) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0, z_0)^T. \quad (5.12)$$

Введем функцию $V(x_{s_1} + x_1) = \frac{1}{2} [(H_1 x_{s_1}, x_{s_1}) + (H_2 x_1, x_1)] =$

$$= \frac{1}{2} [(H_1 S_b w, S_b w) + (H_2 P_a z, P_a z)] = \frac{1}{2} (\hat{H} \omega, \omega) = \hat{V}(\omega), \quad \text{где } \hat{H} = \begin{pmatrix} S_b^* H_1 S_b & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix} \text{ и}$$

H_1, H_2 – операторы из (5.8). Ясно, что $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$. Градиент функции \hat{V} равен $\text{grad } \hat{V}(\omega) = \hat{H}\omega$.

Поскольку $(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t, \omega)]) = (H_1 S_b w, A_{gen}^{-1}[-B_{gen} S_b w - B_{und} S_l \phi(t) + F_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z))] + (H_2 P_a z, A_1^{-1}[-B_1 P_a z + Q_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z))])$, то согласно (5.8), существуют $\hat{R} > 0$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и для любых $t \in [0, \infty)$, $\|\omega\| \geq \hat{R}$ выполнено

$$(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t, \omega)]) \leq k(t)U(\hat{V}). \quad (5.13)$$

С учетом (5.13) производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (5.11) удовлетворяет при всех $t \geq 0$, $\|\omega\| \geq \hat{R}$, следующей оценке:

$$\dot{\hat{V}} \Big|_{(5.11)} = (\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t, \omega)]) \leq k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v} \leq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения. Тогда по теореме 2.2.7 каждое решение $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$ уравнения (5.11) неограниченно продолжаемо.

Найденные непрерывно дифференцируемые компоненты $w(t)$, $z(t)$ глобального решения $\omega(t)$ уравнения (5.11) определены на $[t_0, \infty)$. Уравнение (3.34) является тождеством, поскольку $(t, w(t), \phi(t), z(t), q(t, w(t), z(t))) \in \tilde{L}_0$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Следовательно, функция $x(t) = S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t) + P_d q(t, w(t), z(t))$ будет решением задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$.

Решение $x(t)$ зависит от выбранной функции $\xi = \phi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если $r(A, B) = n < m$, то $X_s = X_{s_1}$, $X_{s_2} = \{0\}$, $S_2 = 0$ и компонента $\xi = S_l^{-1} S_2 x$ отсутствует. Зафиксируем функцию $\phi(t)$, вы-

бранную ранее, и покажем, что в этом случае каждое локальное решение $\omega(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$ уравнения (5.11) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $[t_0, \infty)$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $\omega(t)$ задачи Коши (5.11), (5.12) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (5.11) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению.

Если $\sup_{t \in [0, \infty)} \|\phi_{s_2}(t)\| < \infty$, то $\exists M_3 < \infty \forall t \in [0, \infty) : \|S_l \phi(t)\| \leq M_3$. Подставим $\xi = \phi(t)$ в функцию η и обозначим $q(t, w, z) = \eta(t, w, \phi(t), z)$. Доказательство, приведенное выше, остается без изменений. Если $\int_{t_0}^{+\infty} k(t) dt < \infty$, то неравенство $\dot{v} \leq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного неограниченного решения. Тогда по теореме [36, гл. IV, теорема XV] уравнение (5.11) устойчиво по Лагранжу и существуют числа $M_1, M_2 > 0$ такие, что для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнено: $\|S_b w(t)\| \leq M_1$, $\|P_a z(t)\| \leq M_2$. Значит

$$\forall t \in [t_0, \infty) : \|S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t)\| \leq M, \quad M = M_1 + M_2 + M_3. \quad (5.14)$$

Рассмотрим отображение (3.35). По формуле конечных приращений: $\Psi_k(t, w, \xi, z, v) - \Psi_k(t, w, \xi, z, 0) = \frac{\partial}{\partial v} \Psi_k(t, w, \xi, z, \tilde{v}_k)v$, где $\tilde{v}_k = \theta v \in \text{conv}\{0, v\}$, $\theta \in (0, 1)$, $\Psi_k(t, w, \xi, z, v) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, \xi, z, v)$, $k = \overline{1, d}$, $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ – аддитивное разложение единицы в \mathbb{R}^d . Следовательно: $\Psi(t, w, \xi, z, v) - \Psi(t, w, \xi, z, 0) = \Lambda v$, где $\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, \xi, z, \tilde{v}_k)$. Для любых v таких, что $(t, w, \xi, z, v) \in \tilde{\mathcal{L}}_0$, оператор

$\Lambda \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ обратим на $\text{conv}\{0, v\}$ и $\Lambda^{-1} \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Поскольку для функций $v = q(t, w(t), z(t))$, $z = z(t)$, $w = w(t)$, $\xi = \phi(t)$ отображение $\Psi(t, w(t), \phi(t), z(t), q(t, w(t), z(t))) = 0$ и $\Psi(t, w, \xi, z, 0) = P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w(t), \phi(t), z(t), 0)$, то $q(t, w(t), z(t)) = -\Lambda^{-1} P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w(t), \phi(t), z(t), 0)$. Учитывая, что Λ^{-1} – ограниченный оператор, существует $N > 0$ такое, что $\|q(t, w(t), z(t))\| \leq N \|P_d^{-1}\| \|B_2^{-1}\| \|Q_2 \tilde{f}(t, w(t), \phi(t), z(t), 0)\|$ для любых $t \in [t_0, \infty)$. Тогда из (5.14), (5.9) следует, что для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнена оценка: $\|q(t, w(t), z(t))\| \leq N \|P_d^{-1}\| \|B_2^{-1}\| C_1$.

Так как для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнена оценка: $\|x(t)\| = \|S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t) + P_d q(t, w(t), z(t))\| \leq M + N \|B_2^{-1}\| C_1$, решение $x(t)$ глобально ограничено. Поскольку выполнено (5.10), уравнение (3.34), принимающее вид $F_2 B x(t) = F_2 f(t, x(t))$, корректно. Это выполнено для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $S_2 x_0 = \phi_{s_2}(t_0)$, $t_0 \geq 0$. Значит, при $S_2 x = \phi_{s_2}(t)$ уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу.

Теорема доказана.

5.2.2 Теорема о неустойчивости в смысле Лагранжа

В докладах [70, 95] представлена следующая теорема о неустойчивости по Лагранжу сингулярного ДАУ (2.1).

Теорема 5.2.2. Пусть функция $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ – сингулярный пучок операторов и его регулярная компонента $\lambda A_r + B_r$ из (2.28) имеет индекс 1. Предположим, что выполнено (3.24) и для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, Sx + P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, оператор-функция (3.25) является базисно обратной на $\text{conv}\{u_1, u_2\}$. Пусть существует множество $\Omega \subset X_{s_1} \dot{+} X_1$ такое, что $(S_1 + P_1)x = 0 \notin \Omega$ и компонента $(S_1 + P_1)x(t)$ каждого существующего решения

$x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω .

Далее, пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\phi_{s_2}(t) \in C([0, \infty), X_{s_2})$,

$U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{1}{2}[(H_1 S_1 x, S_1 x) + (H_2 P_1 x, P_1 x)]$,

$(t, S_1 x + \phi_{s_2}(t) + P x) \in L_0$ при всех $t \in [0, \infty)$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} dv < \infty$ ($c > 0$), $\int_{t_0}^{+\infty} k(t) dt = \infty$ и для

любой $t \geq 0$, $(S_1 + P_1)x \in \Omega$ выполнено

$$\begin{aligned} & (H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} F_1 [-B S_1 x - B \phi_{s_2}(t) + f(t, x)]) + \\ & + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1 [-B P_1 x + f(t, x)]) \geq k(t) U(v). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2), для которого при $r(A, B) = m < n$ выбор функции ϕ_{s_2} с начальным значением $\phi_{s_2}(t_0) = S_2 x_0$ однозначно определяет компоненту $S_2 x(t) = \phi_{s_2}(t)$, и это решение имеет конечное время определения.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2.1. Внесены следующие изменения.

Выпишем полученное выше дифференциальное уравнение (5.11)

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 [-N_2 \omega + G(t, \omega)], \quad \text{где } \omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}, \quad q(t, \omega) = q(t, w, z), \quad N_1 = \begin{pmatrix} S_b^{-1} A_{gen}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1} A_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} B_{gen} S_b & 0 \\ 0 & B_1 P_a \end{pmatrix}, \quad G(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) - B_{und} S_l \phi(t) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \phi(t), q(t, \omega)) \end{pmatrix}.$$

Для любой начальной точки (t_0, ω_0) такой, что $(t_0, w_0, \phi(t_0), z_0, q(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $\omega(t)$ задачи Коши (5.11), (5.12) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Следовательно, для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $x_0 = S_b w_0 + S_l \phi(t_0) + P_a z_0 + P_a q(t_0, w_0, z_0)$, суще-

существует единственное решение $x(t) = S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t) + P_d q(t, w(t), z(t))$ задачи Коши (2.1), (2.2) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$.

По условию теоремы существует множество $\Omega \subset X_{s_1} \dot{+} X_1$ такое, что $(S_1 + P_1)x = 0 \notin \Omega$ и компонента $(S_1 + P_1)x(t)$ каждого решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω . Учитывая связь $(S_1 + P_1)x = S_b w + P_a z = (S_b P_a)\omega$, каждое решение $\omega(t)$ уравнения (5.11), начинающееся в множестве $\hat{\Omega} = \{\omega \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^a \mid (S_b P_a)\omega \in \Omega\}$, все время остается в нем и $\omega = 0 \notin \hat{\Omega}$. Введем функцию $\hat{V}(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{H}\omega, \omega)$, где $\hat{H} = \begin{pmatrix} S_b^* H_1 S_b & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix}$ и

H_1, H_2 – операторы из (5.15), которая, очевидно, положительна при всех $\omega \in \hat{\Omega}$.

Согласно (5.16) существуют функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ и $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < \infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} k(t) dt = \infty$ и для любых $t \geq 0$, $\omega \in \hat{\Omega}$

выполнено

$$(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t, \omega)]) \geq k(t)U(\hat{V}). \quad (5.16)$$

С учетом (5.16) производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (5.11) удовлетворяет при всех $t \geq 0$ и $\omega \in \hat{\Omega}$ оценке $\dot{\hat{V}} \Big|_{(5.11)} = (\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t, \omega)]) \geq k(t)U(\hat{V})$.

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v} \geq k(t)U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного неограниченно продолжаемого решения [36, с. 132]. Тогда по теореме [36, гл. IV, теорема XIV] каждое решение $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$ уравнения (5.11), удовлетворяющее начальному условию (5.12), где $\omega_0 \in \hat{\Omega}$ и $(t_0, \omega_0, \phi(t_0), q(t_0, \omega_0)) \in \tilde{L}_0$, имеет конечное время определения, то есть определено на некотором конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t \rightarrow T-0} \|\omega(t)\| = \infty$. Тогда каждая функция

$x(t) = S_b w(t) + S_l \phi(t) + P_a z(t) + P_d q(t, w(t), z(t))$ с соответствующими начальными значениями (t_0, x_0) , где $x_0 = S_b w_0 + S_l \phi(t_0) + P_a z_0 + P_d q(t_0, w_0, z_0)$, будет решением задачи Коши (2.1), (2.2) с конечным временем определения, т. е. решение $x(t)$ определено на соответствующем конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t \rightarrow T-0} \|x(t)\| = \infty$.

Решение $x(t)$ зависит от выбранной функции $\xi = \phi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если $r(A, B) = n < m$, то $X_s = X_{s_1}$, $X_{s_2} = \{0\}$, $S_2 = 0$ и компонента $\xi = S_l^{-1} S_2 x$ отсутствует. Зафиксируем функцию $\phi(t)$, выбранную ранее, и проверим единственность решения $\omega(t)$, $t \in [t_0, T)$. Из доказанного выше следует, что решение $\omega(t)$ задачи (5.11), (5.12) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, T)$. Тогда существует точка $t_* \in [\varepsilon, T)$ и два различных решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (5.11) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Замечание 5.2.1. Доказанные теоремы об устойчивости по Лагранжу дают достаточные условия существования и единственности глобальных решений, которые имеют следующие различия по сравнению с условиями теорем из раздела 3: в теореме 5.2.1 вместо условия (3.26) теоремы 3.3.1 используется условие (5.8), в теореме 5.1.1 вместо условия (3.3) теоремы 3.2.1 используется условие (5.1).

5.3 Применение к теории электрических цепей

5.3.1 Устойчивость по Лагранжу математической модели нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим модель четырехполюсника (см. рис. 1.1) с нелинейными сопротивлениями φ_1 , φ_2 и проводимостями h_1 , h_2 , линейными сопротивлениями r_1 , r_2 ,

проводимостью g , индуктивностью L и емкостью C . Устойчивость по Лагранжу данной модели четырехполюсника исследовалась в [75].

Предполагается, что внешние токи $I_1(t), I_2(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ заданы, параметры L, C, r_1, r_2, g являются положительными и вещественными, $\varphi_1(y), \varphi_2(y), h_1(y), h_2(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

В подразделе 1.1 получена система (1.1)–(1.3), которая описывает модель электрической цепи, представленной на рис. 1.1. Векторная форма систем (1.1)–(1.3) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}.$$

С помощью следствия 3.2.1 в подразделе 4.1 получены условия, при выполнении которых система (1.1)–(1.3) имеет единственное решение на полуоси $[t_0, \infty)$, удовлетворяющее начальному условию (2.2).

Проведем проверку условий теоремы 5.1.1.

Пространства $X_s, X_r, Y_s, Y_r, X_{s_i}, X_i, Y_i, i=1,2$, проекционные матрицы $P, Q, P_i, Q_i, k=1,2$, матрица G^{-1} и проекции вектора x имеют вид, аналогичный полученному в подразделе 4.1, свойства пучка $\lambda A + B$ также сохраняются.

Проверка условия (3.1) и требования базисной обратимости оператор-функции (3.2) аналогична проверке, проведенной в подразделе 4.1.

Введем матрицу $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{pmatrix}$, которая, очевидно, удовлетворяет усло-

вию $H = H^* > 0$. Тогда $(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1f(t, x)]) = 2[-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t)]$.

Для любых $t \in [0, \infty)$, $|z_1| \leq M_1$ выполнена оценка

$$\|G^{-1}Q_2 f(t, P_1 x)\| \leq \sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|z_1| \leq M} |I_1(t) - \gamma(z_1)|.$$

Итак, пусть для любого $t \geq 0$ существуют $z_1, v \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (4.1); для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.1), выполнено $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \neq -1$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $z_1 \in \mathbb{R}$; для некоторого $R > 0$ существуют функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = Lx_2^2 + Cx_3^2$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и для любых $t \in [0, \infty)$, $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R$ выполнено

$$-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t) \leq k(t)U(v),$$

тогда по теореме 5.1.1 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей (1.3), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$. Заметим, что для теоремы 6.1.1 о сходимости численного метода (см. подраздел 6.1) дополнительно требуется выполнение условий:

$I_1(t), I_2(t) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$ и $\gamma'(z_1 + v) \neq -1$ для любых $z_1, v \in \mathbb{R}$. Если $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < \infty$ и

существуют положительные числа $C, M < \infty$ такие, что

$\sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|z_1| \leq M} |I_1(t) - \gamma(z_1)| \leq C$, то уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу.

Рассмотрим несколько частных случаев, которые встречаются в реальных радиотехнических системах:

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3, \quad \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3, \quad h_2(y) = \alpha_3 y^3, \quad \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9, \quad (5.17)$$

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 \sin y, \quad \varphi_2(y) = \alpha_2 \sin y, \quad h_2(y) = \alpha_3 \cos y, \quad \gamma(y) = 0.5 \cos(\cos y), \quad (5.18)$$

где $\alpha_k > 0$.

Если нелинейные сопротивления и проводимости имеют вид (5.17) или (5.18), то для любой начальной точки (t_0, x_0) , удовлетворяющей (1.3), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$. Дополнительно потребуем, чтобы $I_1(t), I_2(t) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$, тогда можно воспользоваться разностной схемой (6.5)–(6.8). Решение задачи (2.1), (2.2) будет ограниченным (устойчивость по Лагранжу), если $\sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)| < \infty$ и $\sup_{t \in [0, \infty)} |I_2(t)| < \infty$ или

$\int_{t_0}^{+\infty} |I_2(t)| dt < \infty$. В частности, эти требования выполнены для входных токов вида

$I_k(t) = b_k t^{-n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$, экспоненциальных и синусоидальных токов

$$I_k(t) = b_k e^{-a_k t}, \quad I_k(t) = b_k e^{-\frac{(t-d_k)^2}{\sigma_k^2}}, \quad I_k(t) = b_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \quad (5.19)$$

где $a_k > 0$, $b_k, \sigma_k, d_k, \omega_k \in \mathbb{R}$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = 1, 2$.

Для токов

$$I_k(t) = b_k t, \quad I_k(t) = b_k t^2, \quad k = 1, 2, \quad (5.20)$$

глобальные решения существуют, но не являются ограниченными.

5.3.2 Устойчивость по Лагранжу математической модели конкретного радиотехнического устройства

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 5.1) с известным источником напряжения $e(t)$, нелинейными сопротивлениями φ , φ_0 , ψ и проводимостью h , линейными сопротивлением r и проводимостью g , индуктивностью L и емкостью C .

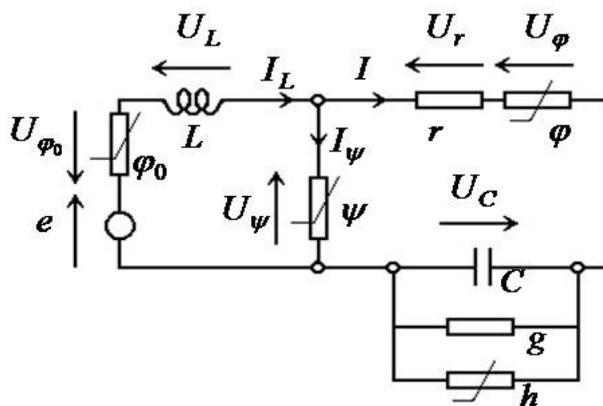


Рисунок 5.1 – Схема электрической цепи радиотехнического устройства

Предполагается, что заданные параметры L , C , r , g являются положительными и вещественными, $e(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\varphi(y)$, $\varphi_0(y)$, $\psi(y)$, $h(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Токи и напряжения удовлетворяют законам Кирхгофа $I_L = I + I_\psi$,

$$U_\psi = U_\varphi + U_r + U_C, \quad e = U_{\varphi_0} + U_L + U_\psi, \quad \text{и соотношениям} \quad U_L = \frac{d(LI_L)}{dt},$$

$$I = \frac{d(CU_C)}{dt} + gU_C + h(U_C), \quad U_r = rI, \quad U_\varphi = \varphi(I), \quad U_{\varphi_0} = \varphi_0(I_L), \quad U_\psi = \psi(I_\psi).$$

Из приведенных уравнений получаем систему с неизвестными $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I$:

$$L \frac{d}{dt} x_1 + x_2 + rx_3 = e(t) - \varphi_0(x_1) - \varphi(x_3), \quad (5.21)$$

$$C \frac{d}{dt} x_2 + gx_2 - x_3 = -h(x_2), \quad (5.22)$$

$$x_2 + rx_3 = \psi(x_1 - x_3) - \varphi(x_3). \quad (5.23)$$

Векторная форма системы имеет вид ДАУ (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r \\ 0 & g & -1 \\ 0 & 1 & r \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} e(t) - \varphi_0(x_1) - \varphi(x_3) \\ -h(x_2) \\ \psi(x_1 - x_3) - \varphi(x_3) \end{pmatrix},$$

Легко проверить, что $\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1.

Проекционные матрицы P_i , Q_i и матрица G^{-1} имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r^{-1} & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -r^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & -L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & (Cr)^{-1} \\ 0 & -(Cr)^{-1} & (Cr-1)C^{-1}r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Проекции вектора x имеют вид: $z = P_1 x = (x_1, x_2, -r^{-1}x_2)^T = (a, -rb, b)^T$,
 $u = P_2 x = (0, 0, r^{-1}x_2 + x_3)^T = (0, 0, v)^T$, где $a = x_1$, $b = -r^{-1}x_2$, $v = r^{-1}x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$.

Уравнение $Q_2[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно алгебраическому уравнению (5.23). С учетом новых обозначений условие (3.1) выполнено, если существуют $a, b, v \in \mathbb{R}$ такие, что

$$rv = \psi(a - b - v) - \varphi(b + v). \quad (5.24)$$

В координатном базисе пространства \mathbb{R}^3 рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial(Q_2 f(t, z + u))}{\partial x} - B \right] P_2 =$$

$$\left(\psi'_{x_3}(a - b - v) + \varphi'(b + v) + r \right) \begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} & -1 \\ 0 & r^{-2} & r^{-1} \\ 0 & -r^{-1} & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

где $\psi'_{x_3}(a - b - v) = \frac{\partial}{\partial x_3} \psi(a - b - v)$, $\varphi'(b + v) = \frac{d}{dx_3} \varphi(b + v)$.

Поскольку пространства X_2, Y_2 одномерны, базисная обратимость оператор-функции $\hat{\Phi}(u): X_2 \rightarrow L(X_2, Y_2)$ эквивалентна обратимости. Пусть $\psi'_{x_3}(a-b-\tilde{v}) + \varphi'(b+\tilde{v}) \neq -r$, $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, для любых $a, b, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (5.24). Тогда для любых $a, b, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (5.24), сужение оператор-функции (5.25) на X_2 является обратимым оператором на $\text{conv}\{v_1, v_2\}$.

$$\text{Выберем } H = \begin{pmatrix} 2L & 0 & 0 \\ 0 & Cr & 0 \\ 0 & 0 & Cr^2 \end{pmatrix}, \text{ очевидно, } H = H^* > 0.$$

$$\text{Тогда } (HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1f(t, x)]) = 2[-(gr+1)x_2^2 - x_1\varphi_0(x_1) + (x_2 - x_1)\psi(x_1 - x_3) - rx_2h(x_2) + x_1e(t)].$$

Так как $\varphi(y), \psi(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, существуют $C, M > 0$ такие, что для любых $t \in [0, \infty)$, $\|z\| \leq M$ выполнена оценка $\|G^{-1}Q_2f(t, z)\| \leq r^{-1} \max_{\|z\| \leq M} |\psi(a-b) - \varphi(b)| \leq C$.

Итак, пусть существуют $a, b, v \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (5.24); для любых $a, b, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (5.24), выполнено $\psi'_{x_3}(a-b-\tilde{v}) + \varphi'(b+\tilde{v}) \neq -r$ при любом $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$; для некоторого $R > 0$ существуют функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = Lx_1^2 + Crx_2^2$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и для любых $t \geq 0$, $\sqrt{2x_1^2 + (1+r^{-2})x_2^2} \geq R$ выполнено

$$-(gr+1)x_2^2 - x_1\varphi_0(x_1) + (x_2 - x_1)\psi(x_1 - x_3) - rx_2h(x_2) + x_1e(t) \leq k(t)U(v),$$

тогда по теореме 5.1.1 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей (5.23), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$. Если кроме указанных выше условий выполнено дополнительное условие: $\psi'_{x_3}(a-b-v) + \varphi'(b+v) \neq -r$ для любых $a, b, v \in \mathbb{R}$ и $e(t) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$, то

верна теорема 6.1.1. Если $\int_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < \infty$, то уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу.

Рассмотрим несколько частных случаев, которые встречаются в реальных радиотехнических системах:

$$\varphi_0(y) = \alpha_1 y^{2k-1}, \varphi(y) = \alpha_2 y^{2r-1}, \psi(y) = \alpha_3 y^{2j-1}, h(y) = \alpha_4 y^{2s-1}, \quad (5.26)$$

где $k, r, j, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$;

$$\begin{aligned} \varphi_0(y) &= \alpha_1 y^{2k-1}, \varphi(y) = \alpha_2 \sin(y) \text{ или } \varphi(y) = \alpha_2 \cos(y), \\ \psi(y) &= \alpha_3 \sin(y) \text{ или } \psi(y) = \alpha_3 \cos(y), \\ h(y) &= \alpha_4 \sin(y) \text{ или } h(y) = \alpha_4 \cos(y), \end{aligned} \quad (5.27)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$.

Для нелинейных функций (5.26) и любой начальной точки (t_0, x_0) , удовлетворяющей (5.23), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$ при $j \leq k$, $j \leq s$ и достаточно малом α_3 . Для функций (5.27) и любой начальной точки (t_0, x_0) , удовлетворяющей (5.23), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$. Решение будет ограниченным,

если $\sup_{t \in [0, \infty)} |e(t)| < \infty$ или $\int_{t_0}^{+\infty} |e(t)| dt < \infty$. В частности, эти требования выполнены

для напряжений, изменяющихся по степенному, синусоидальному, экспоненциальному законам и имеющих вид

$$e(t) = bt^{-n}, \quad e(t) = be^{-at}, \quad e(t) = be^{-(t-d)^2 \sigma^{-2}}, \quad e(t) = b \sin(\omega t + \theta), \quad (5.28)$$

где $a > 0$, $b, d, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Для напряжений вида

$$e(t) = ae^{\sigma t}, e(t) = at^n + b, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \sigma > 0, \quad (5.29)$$

глобальные решения существуют, но не являются ограниченными. Для нахождения численных решений с помощью разностной схемы (6.5)–(6.8) (см. подраздел 6.1) необходимо учесть дополнительное требование: $e(t) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$.

5.3.3 Устойчивость по Лагранжу математической модели четырехполюсника в условиях неполных данных

Рассмотрим электрический четырехполюсный фильтр (см. рис. 4.2) с известным входным током I , нелинейным сопротивлением φ , нелинейной проводимостью h , линейными сопротивлениями r_1, r_2 , индуктивностью L и емкостью C . Предполагается, что L, C, r_1, r_2 – положительные вещественные параметры, $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\varphi(x_1) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h(x_2) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Как показано в подразделе 4.3, из уравнений Кирхгофа и связей для электрической цепи четырехполюсника получаем систему (4.18)–(4.20), которая описывает модель цепи. Векторная форма системы (4.18)–(4.20) имеет вид полулинейного ДАУ (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ I(t) \end{pmatrix}.$$

В подразделе 4.3 получены условия, при выполнении которых задача Коши (4.18)–(4.20), (2.2) имеет единственное решение на полуоси $[t_0, \infty)$. Требуемые ограничения были получены в результате применения следствия 3.3.1 и проверки его условий.

Проведем проверку условий теоремы 5.2.1.

Пространства $X_s, X_r, Y_s, Y_r, X_{s_i}, X_i, Y_i, i=1,2$, проекторы $S, P, Q, F, S_k, P_k, Q_k, k=1,2$, матрица A_{gen}^{-1} и проекции вектора x имеют вид, аналогичный полученному в подразделе 4.4, свойства пучка $\lambda A + B$ и его компонент также сохраняются.

Проверка условия (3.24) и требования базисной обратимости оператор-функции (3.25) аналогична проверке, проведенной в подразделе 4.3.

$$\text{Введем } H_1 = \begin{pmatrix} L/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L/3 \end{pmatrix} \text{ и функцию } \phi_{s_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix} \in C([0, \infty), X_{s_2}),$$

где $\xi(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ и $\xi(t_0) = x_3^0 + x_4^0, x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)^T$ – начальное значение.

Тогда $(H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} F[-B S_1 x - B \phi_{s_2}(t) + f(t, x)]) = -(r_2 + r_1)x_1^2 - x_1 \varphi(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1 x_2 + \xi(t)x_2 + r_1 x_1 I(t)$.

Для всех $t \in [0, \infty)$ выполнена оценка: $\|Q_2 f(t, Sx + P_1 x)\| \leq (1 + r_1^2) \sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)|$.

Пусть существуют число $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$,

$U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{1}{2}(H_1 S_1 x, S_1 x) = \frac{1}{2}(Lx_1^2 + Cx_2^2), \int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и

для любых $t \in [0, \infty), \sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \geq R$ выполнено

$$-(r_2 + r_1)x_1^2 - x_1 \varphi(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1 x_2 + \xi(t)x_2 + r_1 x_1 I(t) \leq k(t)U(v), \quad (5.30)$$

тогда по теореме 5.2.1 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$,

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)^T$, удовлетворяющей условию согласования $x_1^0 + x_3^0 = I(t_0)$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (2.1) на полуоси $[t_0, \infty)$ с началь-

ным условием $x(t_0) = x^0$, где компонента $S_2x = \phi_{s_2}(t)$ выбрана так, что $\phi_{s_2}(t_0) = S_2x^0$ (т. е. $\xi(t_0) = x_3^0 + x_4^0$). Если

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| < \infty, \quad \sup_{t \in [0, \infty)} |\xi(t)| < \infty \quad (5.31)$$

и $\int_{t_0}^{+\infty} k(t) dt < \infty$, то решение $x(t)$ будет ограниченным, а уравнение (2.1), где $S_2x = \phi_{s_2}(t)$, – устойчивым по Лагранжу.

Рассмотрим частный случай. Легко проверить, что функции $\varphi(y) = \alpha_1 y^{2k-1}$, $h(y) = \alpha_2 y^{2r-1}$, $k, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$, удовлетворяют условию (5.30). Если выполнено (5.31), то уравнение (2.1), где $S_2x = \phi_{s_2}(t)$, устойчиво по Лагранжу.

5.3.4 Устойчивость по Лагранжу математической модели нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра

В подразделе 4.4 рассматривалась обратная задача для двухполюсного радиотехнического фильтра (см. рис. 4.3) с индуктивностью L , емкостью C , линейными сопротивлениями r_k , $k = \overline{1,4}$, линейной проводимостью g , нелинейными сопротивлениями φ_1 , φ_3 и проводимостью h . Предполагается, что токи $I(t), I_1(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ заданы, параметры $L, C, g, r_k, k = \overline{1,4}$, являются положительными и вещественными, φ_1, φ_3, h – непрерывно дифференцируемые на \mathbb{R} скалярные функции.

Как показано в подразделе 4.4, система (4.23)–(4.26) описывает модель электрическая цепь двухполюсника. Векторная форма системы (4.23)–(4.26) имеет вид (2.1), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t) \\ I(t) - q\varphi_1(x_3) \end{pmatrix}.$$

В рассмотренной ранее задаче найдены ограничения, при выполнении которых система уравнений (4.23)–(4.26) имеет единственное решение на полуоси $[t_0, \infty)$ с начальным условием (2.2). Требуемые ограничения были получены в результате применения следствия 3.3.1 и проверки его условий.

Проведем проверку условий теоремы 5.2.1.

Пространства $X_s, X_r, Y_s, Y_r, Y_{s_i}, X_i, Y_i, i=1,2$, проекторы $S, P, Q, F, F_k, P_k, Q_k, k=1,2$, матрица A_{gen}^{-1} и проекции вектора x имеют вид, аналогичный полученному в подразделе 4.4, свойства пучка $\lambda A + B$ и его компонент также сохраняются.

Проверка условия (3.24) и требования базисной обратимости оператор-функции (3.25) аналогична проверке, проведенной в подразделе 4.4.

Пусть $L \neq C(r_2 + r_3)/g$.

Введем матрицу $H_1 = \begin{pmatrix} L/2 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & L/2 \end{pmatrix}$, очевидно, $H_1 = H_1^* > 0$. Найдем

$$\begin{aligned} (H_1 Sx, A_{gen}^{-1} F_1[-BSx + f(t, x)]) &= -gx_2^2 - (r_2 + r_3)x_1^2 - x_1\varphi_3(x_1) - x_2h(x_2) + \\ &+ x_1\varphi_1(x_3) + (r_2x_1 + x_2)I_1(t), \quad v = \frac{1}{2}(H_1 Sx, Sx) = \frac{1}{2}(Lx_1^2 + Cx_2^2). \end{aligned}$$

Для всех $t \in [0, \infty)$, $|a| \leq M_1$ выполнены оценки:

$$\|Q_2 f(t, Sx + P_1 x)\| \leq \sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|a| \leq M_1} |I(t) - q\varphi_1(-a)|,$$

$$\|F_2 f(t, x)\| \leq r_1 \sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| + (r_1 + r_2) \sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)|.$$

Итак, пусть $L \neq C(r_2 + r_3)/g$; для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), выполнено $\varphi'_1(\tilde{v} - a) \neq -r_4$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $a \in \mathbb{R}$; существуют число $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{1}{2}(Lx_1^2 + Cx_2^2)$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и для любых $t \in [0, \infty)$, $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R$ выполнено $-gx_2^2 - (r_2 + r_3)x_1^2 - x_1\varphi_3(x_1) - x_2h(x_2) + x_1\varphi_1(x_3) + (r_2x_1 + x_2)I_1(t) \leq k(t)U(v)$, тогда по теореме 5.2.1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей системе уравнений (4.25), (4.26), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$. Если $\sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| < \infty$, $\sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)| < \infty$, то решение $x(t)$ будет ограниченным, а уравнение (2.1) – устойчивым по Лагранжу.

Теперь рассмотрим случай, когда $L = C(r_2 + r_3)/g$.

$$\text{Введем матрицы } H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C(r_2 + r_3)}{r_2 g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} Lr_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L(r_2 + r_3)}{r_2^2 g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{кото-}$$

рые, очевидно, удовлетворяют условию $H_i = H_i^* > 0$, $i = 1, 2$. Найдем

$$\begin{aligned} & (H_1 Sx, A_{gen}^{-1} F_1[-BSx + f(t, x)]) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1[-BP_1 x + f(t, x)]) = \\ & = -\frac{r_2 + r_3}{r_2} (x_2 - r_2 x_1)^2 - \frac{(r_2 + r_3)(gr_2 - r_2 - r_3)}{g} x_1^2 - \frac{r_2 + r_3}{r_2 g} x_2 h(x_2) + \\ & + x_1 \left[3r_2(\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)) + \frac{r_2 + r_3}{g} h(x_2) \right] - x_2 [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + \\ & + \left[\left(\frac{r_2 + r_3}{r_2 g} - r_2 \right) (x_2 - r_2 x_1) + 2r_2^2 x_1 \right] I_1(t). \end{aligned}$$

Для всех $t \in [0, \infty)$, $|a| \leq M_1$ выполнены оценки:

$$\|Q_2 f(t, Sx + P_1 x)\| \leq \sup_{t \in [0, \infty)} \max_{|a| \leq M_1} |I(t) - q\varphi_1(-a)|,$$

$$\|F_2 f(t, x)\| \leq r_1 \sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| + (r_1 + r_2) \sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)|.$$

Итак, пусть $L = C(r_2 + r_3)/g$; для любых $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (4.28), выполнено $\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -r_4$ при любых $\tilde{v} \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$, $a \in \mathbb{R}$; существуют число $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, $U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty))$ такие, что $v = \frac{C(r_2 + r_3)}{2r_2 g} (x_2 - r_2 x_1)^2 + \frac{L(r_2 g + r_2 + r_3 + g)}{2g} x_1^2$, $\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = \infty$ и для любых $t \in [0, \infty)$, $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R$ выполнено

$$\begin{aligned} & -\frac{r_2 + r_3}{r_2} (x_2 - r_2 x_1)^2 - \frac{(r_2 + r_3)(gr_2 - r_2 - r_3)}{g} x_1^2 - \frac{r_2 + r_3}{r_2 g} x_2 h(x_2) + \\ & + x_1 \left[3r_2 (\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)) + \frac{r_2 + r_3}{g} h(x_2) \right] - x_2 [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + \\ & + \left[\left(\frac{r_2 + r_3}{r_2 g} - r_2 \right) (x_2 - r_2 x_1) + 2r_2^2 x_1 \right] I_1(t) \leq k(t) U(v), \end{aligned}$$

тогда по теореме 5.2.1 для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей системе уравнений (4.25), (4.26), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$. Если $\sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| < \infty$ и $\sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)| < \infty$, то решение $x(t)$ будет ограниченным, а уравнение (2.1) – устойчивым по Лагранжу.

Исследуем несколько частных случаев, которые могут встречаться в реальных радиотехнических системах. Рассмотрим нелинейные сопротивления и проводимости следующих видов:

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2k-1}, \quad \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{2j-1}, \quad h(y) = \alpha_3 y^{2r-1}, \quad k, j, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i > 0; \quad (5.32)$$

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 \sin(y), \quad \varphi_3(y) = \alpha_2 \sin(y), \quad h_2(y) = \alpha_3 \sin(y), \quad \alpha_k > 0. \quad (5.33)$$

Для нелинейных функций (5.32) и любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей (4.25), (4.26), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на $[t_0, \infty)$ при $L \neq C(r_2 + r_3)/g$, $k \leq j$ и достаточно малом α_1 , или $L = C(r_2 + r_3)/g$, $k \leq j, r$ и достаточно малом α_1 . Для нелинейных функций (5.33) и любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей (4.25), (4.26), существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) на полуоси $[t_0, \infty)$ при $\alpha_1 < r_4$. Решение будет ограниченным, если $\sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| < \infty$ и

$\sup_{t \in [0, \infty)} |I_1(t)| < \infty$. В частности, эти требования выполнены для токов $I(t) = b_1 t^{-n_1}$,

$I_1(t) = b_2 t^{-n_2}$, экспоненциальных и синусоидальных токов $I_1(t) = b_1 e^{-a_1 t}$,

$I(t) = b_2 e^{-a_2 t}$, $I_1(t) = b_1 e^{-(t-d_1)^2 \sigma_1^{-2}}$, $I(t) = b_2 e^{-(t-d_2)^2 \sigma_2^{-2}}$, $I_1(t) = b_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$,

$I(t) = b_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$, где $n_k \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$, $b_k, d_k, \sigma_k, \omega_k \in \mathbb{R}$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = 1, 2$.

Выводы по разделу 5

1. Сформулированы и доказаны теоремы об устойчивости по Лагранжу полунелинейных дифференциально-алгебраических уравнений (2.1) с регулярным (теорема 5.1.1) и сингулярным (теорема 5.2.1) характеристическими пучками. Теоремы дают достаточные условия существования и единственности глобального решения задачи Коши для уравнения (2.1) (условия частично отличаются от тех, которые указаны в теоремах существования и единственности), а при дополнительных ограничениях – достаточные условия ограниченности решения на всей области определения. Теоремы могут быть применены для исследования эволюционных свойств решений математических моделей конкретных систем и процессов, которые описываются уравнениями вида (2.1).

2. Сформулированы и доказаны теоремы о неустойчивости по Лагранжу полунелинейных дифференциально-алгебраических уравнений (2.1) с регулярным характеристическим пучком (теорема 5.1.2) и сингулярным характеристическим

пучком (теорема 5.2.2). Эти теоремы дают достаточные условия, при которых существует единственное решение задачи Коши (2.1), (2.2) и это решение имеет конечное время определения (то есть существует на некотором конечном промежутке и является неограниченным). Признаки неустойчивости по Лагранжу (наличия у решений конечного времени определения) могут быть использованы для анализа математических моделей динамики конкретных систем и процессов, которые описываются уравнениями вида (2.1).

3. Для математических моделей нелинейных радиотехнических устройств указаны ограничения, которые обеспечивают гладкую детерминированную эволюцию состояний на бесконечном интервале времени, и условия, при которых соответствующие системы дифференциально-алгебраических уравнений устойчивы по Лагранжу. Приведены конкретные параметры электрических цепей (сопротивления, проводимости, заданные токи и напряжения), которые удовлетворяют полученным требованиям. Указанные ограничения позволяют проанализировать эволюционные свойства решений математических моделей рассмотренных радиотехнических устройств, а именно, неограниченную продолжительность и глобальную ограниченность.

Основные результаты раздела опубликованы в [70, 75, 93, 95].

РАЗДЕЛ 6

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

Существуют различные способы нахождения приближенных решений дифференциально-алгебраических уравнений. В [83, 85, 101, 102, 105] изложен метод ε -вложений, суть которого состоит в том, чтобы вместо системы дифференциально-алгебраических уравнений $\dot{y} = f(y, z)$, $0 = g(y, z)$ рассматривать соответствующую жесткую систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{y} = f(y, z)$, $\varepsilon \dot{z} = g(y, z)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. К жесткой системе применяют, как правило, методы Рунге-Кутты, Адамса или Розенброка и в полученных формулах берут $\varepsilon = 0$. Аналогично находят приближенные решения жесткой системы $\dot{x} = f(t, x, y)$, $\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, которой соответствует приведенная система $\dot{x} = f(t, x, y)$, $0 = g(t, x, y)$. Способ получения численных решений линейных дифференциально-алгебраических уравнений с использованием формулы Обрешкова рассматривался в [24, 79], с применением неявной схемы Эйлера – в [9, 99]. Различные численные методы решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений $A(t) \frac{d}{dt} x(t) = B(t)x(t) + f(t)$ и $\frac{d}{dt} [Ax(t)] = Bx(t) + f(t)$ изложены соответственно в [9] и [11]. В [79] доказана применимость аналога метода Эйлера к нелинейной системе $f(\dot{x}, x, t) = 0$ при выполнении специальных условий, причем существование точного решения гарантировано на некотором локальном отрезке. Как частный случай этой нелинейной системы в [79] рассмотрено ДАУ вида $A(t)\dot{x} + \Phi(x, t) = 0$ с возможно вырожденной $(n \times n)$ -матрицей $A(t)$. В [34, 44] применяются комбинированные методы решения ДАУ: метод Эйлера в сочетании с методом простых итераций, неявный метод Адамса в сочетании с методом Ньютона.

Недостатком большинства рассмотренных методов решения полулинейного и нелинейного ДАУ является то, что существование точного решения доказывается лишь на достаточно малом отрезке времени, однако для полноценного анализа

динамических моделей и разработки обоснованного численного метода важно иметь возможность исследовать поведение решения на сколь угодно большом временном отрезке $[t_0, T]$. Также в рассмотренных численных методах решения полулинейного и нелинейного ДАУ типа (2.1) накладываются ограничения, которые либо вообще не выполнены для построенных математических моделей электрических цепей с определенными нелинейными параметрами, либо не выполнены на произвольном отрезке времени $[t_0, T]$. Для применения метода Рунге-Кутты требуются дополнительные исследования и ограничения, в частности, необходимо свести ДАУ к соответствующей жесткой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. По сравнению с упомянутыми комбинированными методами, предложенный в диссертации метод ослабляет известные ранее ограничения на нелинейную часть уравнения и ее частные производные. Отличительная особенность предложенного метода состоит в том, что ДАУ сводится к системе из чисто дифференциального и алгебраического уравнений с помощью спектральных проекторов типа Рисса, которые можно численно найти, используя формулы (2.22). Реализация разработанного численного метода и вычисление спектральных проекторов типа Рисса производится в среде MATLAB.

6.1 Построение численного метода

Пусть $f(t, x) \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2) из теоремы 5.1.1 или условия теоремы 3.2.1. Тогда существует единственное решение $x(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ задачи Коши (2.1), (2.2) следующей гладкости: $P_1 x(t) \in C^2([t_0, \infty), X_1)$, $P_2 x(t) \in C^1([t_0, \infty), X_2)$, $x(t) = P_1 x(t) + P_2 x(t)$, где P_1, P_2 – спектральные проекторы пучка $\lambda A + B$, которые вычисляются по формулам (2.22) (см. подраздел 2.4) с помощью их численной реализации на компьютере.

Обозначим через $z = P_1 x$, $u = P_2 x$ проекции вектора $x = z + u \in \mathbb{R}^n$ на под-

пространства X_1, X_2 из (2.23). Уравнение (2.1) эквивалентно системе (3.4), которая с учетом новых обозначений примет вид:

$$\frac{dz}{dt} + G^{-1}Bz = G^{-1}Q_1f(t, z + u), \quad (6.1)$$

$$u = G^{-1}Q_2f(t, z + u), \quad (6.2)$$

где матрица G имеет вид (2.25).

Будем искать решение задачи Коши на отрезке $[t_0, T]$. Введем равномерную сетку $\omega_h = \{t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, N, t_N = T\}$ с шагом $h = \frac{T - t_0}{N}$. Значения приближенного решения задачи (2.1), (2.2) в узлах t_i обозначим через $x_i = z_i + u_i, i = 0, \dots, N$, где $z_i = P_1x_i, u_i = P_2x_i$. Применяя формулу Тейлора, получим:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{z(t+h) - z(t)}{h} + O(h), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} G^{-1}Q_2f(t+h, z(t+h) + u(t+h)) &= G^{-1}Q_2f(t+h, z(t+h) + u(t)) + \\ &+ G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t+h, z(t+h) + u(t))[u(t+h) - u(t)] + O(h^2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Обозначим через E единичную матрицу порядка n . В силу базисной обратимости оператор-функции $\Phi(u)$ (3.2) из теорем 5.1.1, 3.2.1 и соотношения

$$\begin{aligned} -G^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2f(t, z + u)) - B \right] P_2 &= \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, z + u) \right] P_2 = \\ &= \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, z + u) \right] \Big|_{X_2}, \end{aligned}$$

существует обратный оператор $\left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, z + u) \right]^{-1} \in L(X_2, X_2)$ для любых

точек $(t, z + u) \in L_0$. Пусть оператор-функция (3.2) обратима для любых точек $(t, z + u) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует обратный оператор $\left[E - G^{-1} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right]^{-1} \in L(X_2, X_2)$, $i = 0, \dots, N-1$. Выберем начальные значения z_0, u_0 так, чтобы выполнялось условие согласования $u_0 = G^{-1} Q_2 f(t_0, z_0 + u_0)$, эквивалентное условию $(t_0, x_0) \in L_0$ из теорем 5.1.1, 3.2.1. Подставляя равенства (6.3), (6.4) в систему (6.1), (6.2) и отбрасывая погрешности $O(h), O(h^2)$, получаем разностную схему [70, 75]

$$x_0 = z_0 + u_0, \quad (6.5)$$

$$z_{i+1} = (E - hG^{-1}B)z_i + hG^{-1}Q_1 f(t_i, z_i + u_i), \quad (6.6)$$

$$u_{i+1} = \left[E - G^{-1} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right]^{-1} G^{-1} Q_2 \times \\ \times \left[f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) u_i \right], \quad (6.7)$$

$$x_{i+1} = z_{i+1} + u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (6.8)$$

которая аппроксимирует задачу Коши (2.1), (2.2) с первым порядком относительно h . Значения x_{i+1} последовательно вычисляются из (6.5)–(6.8) при $i = 0, \dots, N-1$.

Теорема 6.1.1. Пусть выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2) из теоремы 5.1.1 или условия теоремы 3.2.1, $f(t, x) \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и оператор-функция $\Phi(u)$ (3.2) обратима для любых точек $(t, z + u) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда разностная схема (6.5)–(6.8) сходится и имеет первый порядок точности:

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|z(t_i) - z_i\| = O(h), \quad \max_{0 \leq i \leq N} \|u(t_i) - u_i\| = O(h). \quad (6.9)$$

Доказательство. Поскольку $f(t, x) \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и выполнены усло-

вия существования и единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2) из теоремы 5.1.1 или условия теоремы 3.2.1, то существует единственное точное решение $x(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ задачи Коши (2.1), (2.2) следующей гладкости: $z(t) = P_1 x(t) \in C^2([t_0, \infty), X_1)$, $u(t) = P_2 x(t) \in C^1([t_0, \infty), X_2)$, $x(t) = z(t) + u(t)$. Уравнение (2.1) эквивалентно системе (6.1), (6.2). С учетом аппроксимаций (6.3), (6.4) задача Коши (2.1), (2.2) в узлах сетки ω_h запишется в виде системы:

$$x(t_0) = z(t_0) + u(t_0), \quad z(t_0) = z_0 = P_1 x_0, \quad u(t_0) = u_0 = P_2 x_0, \quad (6.10)$$

$$z(t_{i+1}) = (E - hG^{-1}B)z(t_i) + hG^{-1}Q_1 f(t_i, z(t_i) + u(t_i)) + O(h^2), \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} u(t_{i+1}) = & G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) + \\ & + G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) [u(t_{i+1}) - u(t_i)] + O(h^2), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$x(t_{i+1}) = z(t_{i+1}) + u(t_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (6.13)$$

где $\{x(t_{i+1})\}_{i=0}^{N-1}$ – значения точного решения на сетке ω_h .

Соответствующая разностная схема для нахождения приближенного решения имеет вид

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0 + u_0, \\ z_{i+1} &= (E - hG^{-1}B)z_i + hG^{-1}Q_1 f(t_i, z_i + u_i), \\ u_{i+1} &= G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) + G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) [u_{i+1} - u_i], \\ x_{i+1} &= z_{i+1} + u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В силу условий теоремы и указанных выше пояснений, существует обратный оператор $\left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, z + u) \right]^{-1} \in L(X_2, X_2)$ для любых точек $(t, z + u) \in L_0$ и точек $(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i)$, $i = 0, \dots, N-1$. Тогда равенство (6.14) можно переписать в виде (6.7), а равенство (6.12) в виде

$$\begin{aligned}
u(t_{i+1}) = & \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) \right]^{-1} G^{-1}Q_2 \times \\
& \times \left[f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i))u(t_i) \right] + O(h^2).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Следовательно, разностные схемы (6.5)–(6.8) и (6.5), (6.6), (6.14), (6.8) эквивалентны.

Используя равенства (6.11), (6.6), получим оценку:

$$\begin{aligned}
\|z(t_{i+1}) - z_{i+1}\| \leq & \|E - hG^{-1}B\| \|z(t_i) - z_i\| + \\
& + h \|G^{-1}Q_1 [f(t_i, z(t_i) + u(t_i)) - (t_i, z_i + u_i)]\| + O(h^2).
\end{aligned}$$

Согласно формуле конечных приращений [28, 38, 81] и (6.13), (6.8):

$$\begin{aligned}
& \|G^{-1}Q_1 [f(t_i, z(t_i) + u(t_i)) - f(t_i, z_i + u_i)]\| \leq \\
& \leq \sup_{0 < \theta < 1} \left\| G^{-1}Q_1 \frac{\partial}{\partial x} f(t_i, x_i + \theta(x(t_i) - x_i)) \right\| (\|z(t_i) - z_i\| + \|u(t_i) - u_i\|).
\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, то существует константа

M_1 такая, что $\|G^{-1}Q_1 [f(t_i, z(t_i) + u(t_i)) - f(t_i, z_i + u_i)]\| \leq M_1 (\|z(t_i) - z_i\| + \|u(t_i) - u_i\|)$.

В результате получаем оценку:

$$\begin{aligned}
\|z(t_{i+1}) - z_{i+1}\| \leq & \left(\|E - hG^{-1}B\| + hM_1 \right) \|z(t_i) - z_i\| + \\
& + hM_1 \|u(t_i) - u_i\| + O(h^2).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Используя равенства (6.12), (6.14), $u_{i+1} - u_i = u_{i+1} - u(t_{i+1}) + u(t_i) - u_i + u(t_{i+1}) - u(t_i)$, получим:

$$\begin{aligned}
u(t_{i+1}) - u_{i+1} = & \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right]^{-1} G^{-1}Q_2 (f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) - \\
& - f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right] [u(t_{i+1}) - \\
& - u(t_i)] - \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) [u(t_i) - u_i]) + O(h^2).
\end{aligned}$$

По формуле конечных приращений:

$$\begin{aligned}
& \left\| G^{-1}Q_2 [f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) - f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i)] \right\| \leq \\
& \leq \sup_{0 < \theta_2 < 1} \left\| G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i + \theta_2(z(t_{i+1}) + u(t_i) - z_{i+1} - u_i)) \right\| \left\| z(t_{i+1}) + \right. \\
& \quad \left. + u(t_i) - z_{i+1} - u_i \right\|.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
M_2 = & \sup_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{0 < \theta_2 < 1} \left\| G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i + \theta_2(z(t_{i+1}) + u(t_i) - z_{i+1} - u_i)) \right\|, \\
C_1 = & \sup_{0 \leq i \leq N-1} \left\| G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z(t_{i+1}) + u(t_i)) \right\|, \quad C_2 = \sup_{0 \leq i \leq N-1} \left\| G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right\|, \\
C_3 = & \sup_{0 \leq i \leq N-1} \left\| \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right]^{-1} \right\|.
\end{aligned}$$

Поскольку $u(t) \in C^1([t_0, \infty), X_2)$, из формулы Тейлора следует, что $\|u(t_{i+1}) - u(t_i)\| = O(h)$, $i = 0, \dots, N-1$.

В результате получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|u(t_{i+1}) - u_{i+1}\| \leq & C_3 [M_2 \|z(t_{i+1}) - z_{i+1}\| + (M_2 + C_2) \|u(t_i) - \\
& - u_i\| + (C_1 + C_2)O(h)] + O(h^2).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Обозначим $\alpha = C_3 M_2$, $\beta = C_3 (M_2 + C_2)$. Тогда (6.17) можно записать в виде

$$\|u(t_{i+1}) - u_{i+1}\| \leq \alpha \|z(t_{i+1}) - z_{i+1}\| + \beta \|u(t_i) - u_i\| + O(h) + O(h^2). \quad (6.18)$$

Разностная схема (6.5), (6.6), (6.14), (6.8) и эквивалентная ей схема (6.5)–(6.8) сходятся и имеют первый порядок точности, если выполнено неравен-

ство $\max_{0 \leq i \leq N} \left\| \begin{pmatrix} z(t_i) - z_i \\ u(t_i) - u_i \end{pmatrix} \right\| \leq Kh$, где $K > 0$ – некоторая постоянная, что равносильно

условию (6.9). Обозначим $\varepsilon_{i+1}^z = \|z(t_{i+1}) - z_{i+1}\|$, $\varepsilon_{i+1}^u = \|u(t_{i+1}) - u_{i+1}\|$. Тогда оценки (6.16), (6.18) примут вид:

$$\varepsilon_{i+1}^z \leq (\|E - hG^{-1}B\| + hM_1)\varepsilon_i^z + hM_1\varepsilon_i^u + O(h^2), \quad (6.19)$$

$$\varepsilon_{i+1}^u \leq \alpha\varepsilon_{i+1}^z + \beta\varepsilon_i^u + O(h) + O(h^2). \quad (6.20)$$

В силу начальных условий $\varepsilon_0^z = 0$, $\varepsilon_0^u = 0$. Используя соотношения (6.19), (6.20), находим рекуррентно оценки:

$$\varepsilon_{i+1}^z \leq hM_1 \sum_{j=0}^i (\|E - hG^{-1}B\| + hM_1)^j \varepsilon_{i-j}^u + O(h^2) \sum_{j=0}^i (\|E - hG^{-1}B\| + hM_1)^j, \quad (6.21)$$

$$\varepsilon_{i+1}^u \leq \alpha \sum_{j=0}^i \beta^j \varepsilon_{i+1-j}^z + [O(h) + O(h^2)] \sum_{j=0}^i \beta^j. \quad (6.22)$$

Учитывая, что $(\|E - hG^{-1}B\| + hM_1)^j \leq (1 + h(\|G^{-1}B\| + M_1))^j = \left(1 + \frac{(T - t_0)(\|G^{-1}B\| + M_1)}{N}\right)^N \leq e^{(T-t_0)(\|G^{-1}B\| + M_1)}$, $j = 0, \dots, N$, из (6.21) получим:

$$\varepsilon_{i+1}^z \leq O(h) \sum_{j=0}^i \varepsilon_j^u + O(h^2), \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (6.23)$$

Обозначив $\gamma = \alpha \max\{1, \beta^{N-1}\}$, из (6.22) получим:

$$\varepsilon_{i+1}^u \leq \gamma \sum_{m=0}^i \varepsilon_{m+1}^z + O(h) + O(h^2), \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (6.24)$$

Подставляя (6.23) в (6.24) и преобразуя полученное неравенство, вычисляем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^u &\leq O(h) \sum_{m=0}^i \left(\sum_{j=0}^m \varepsilon_j^u \right) + O(h) + O(h^2) \leq O(h) N \sum_{j=0}^i \varepsilon_j^u + \\ &+ O(h) + O(h^2) \leq O(h) \sum_{j=0}^i \varepsilon_j^u + O(h), \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Применяя к (6.25) дискретный вариант неравенства Гронуолла [35, с. 43–44, следствие 1.9.1] (или [82, с. 186, следствие 4.1.2]), получим $\varepsilon_{i+1}^u \leq O(h)(1+O(h))^{N-1}$, $i = 0, \dots, N-1$. Значит

$$\max_{0 \leq i \leq N} \varepsilon_i^u = O(h). \quad (6.26)$$

Тогда из (6.26), (6.23) следует: $\max_{0 \leq i \leq N} \varepsilon_i^z = O(h)$.

Теорема доказана.

6.2 Нахождение численных решений для модели нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим электрическую цепь четырехполюсника (рис. 1.1) с параметрами $L = 0.5$ нГн, $C = 0.4$ пФ, $r_1 = 0.02$ Ом, $r_2 = 0.01$ Ом, $g = 0.2$ Ом⁻¹, использованными в [114]. Приближенные решения ДАУ, описывающего модель цепи на рис. 1.1 (см. подразделы 1.1, 4.1 и пункт 5.3.1), будем искать с помощью предложенного численного метода (6.5)–(6.8). Реализация метода производится в системе MATLAB.

Для нелинейных сопротивлений и проводимостей (5.17) с $\alpha_k = 1$ и внешних

токов $I_1(t) = 3e^{-\frac{(t-22)^2}{9}}$, $I_2(t) = 2e^{-\frac{(t-22)^2}{10}}$ найдено численное решение с начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 1.3235 \cdot 10^{-23}, 0)^T$. Полученные графики представлены на рис. 6.1–6.3.

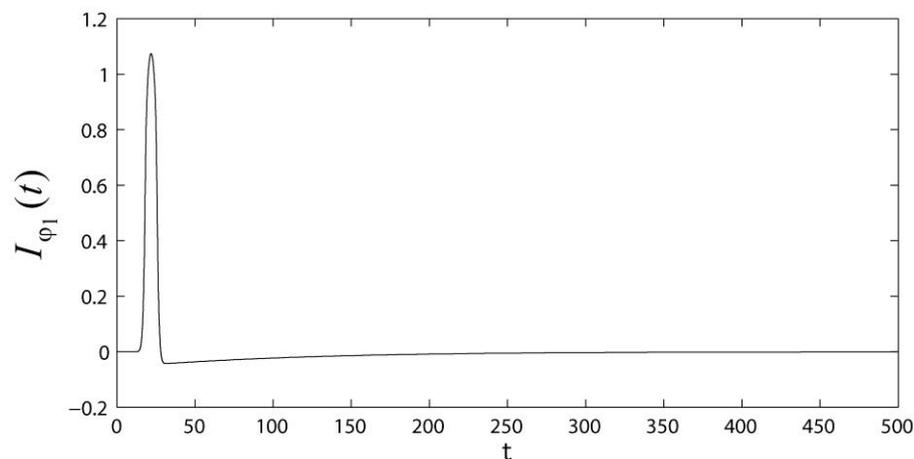


Рисунок 6.1 – График тока $I_{\varphi_1}(t)$

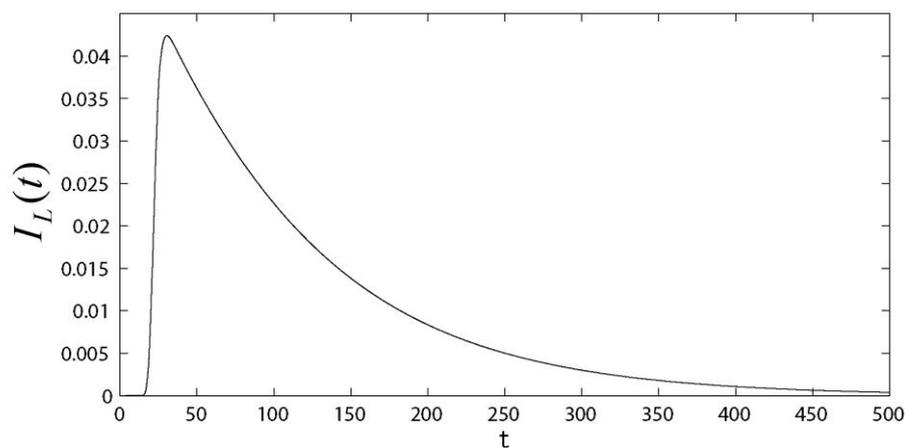


Рисунок 6.2 – График тока $I_L(t)$

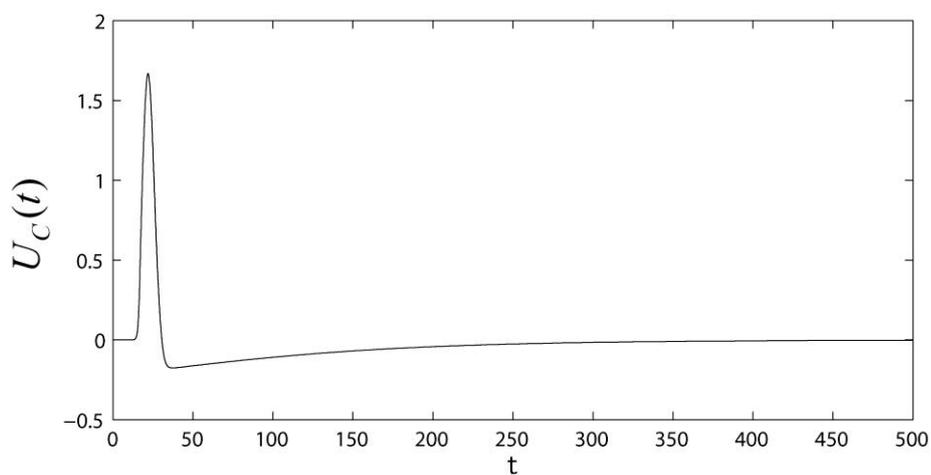


Рисунок 6.3 – График напряжения $U_C(t)$

Графики решения для электрической цепи с нелинейными сопротивлениями и проводимостями (5.18), где $\alpha_k = 1$, внешними токами $I_1(t) = 50\sin(0.5t - 1.6)$, $I_2(t) = 50\sin t$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0, -50.2488, 0)^T$ представлены на рис. 6.4–6.6.

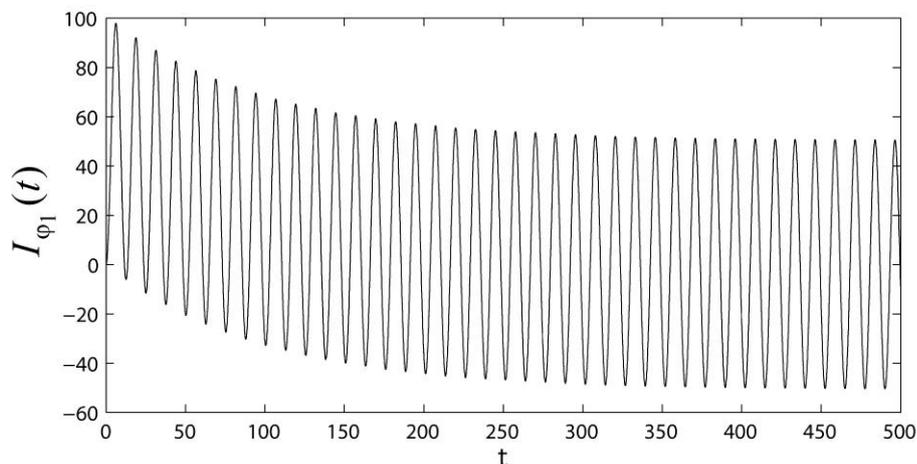


Рисунок 6.4 – График тока $I_{\varphi_1}(t)$

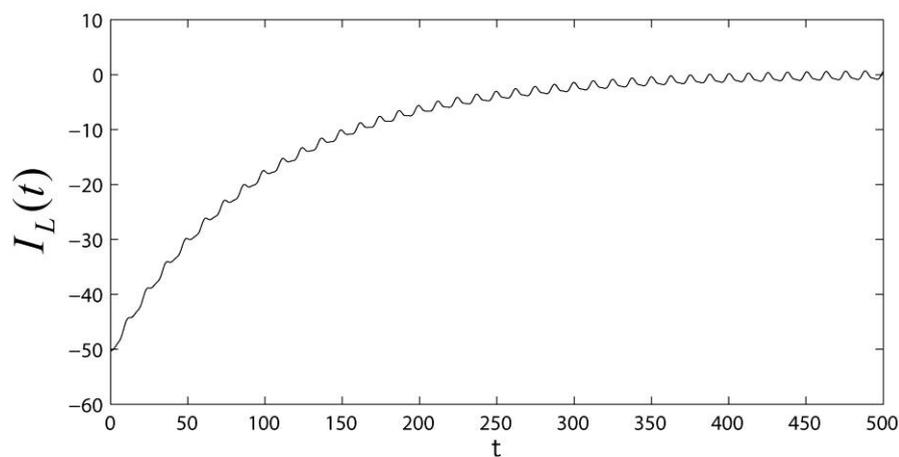


Рисунок 6.5 – График тока $I_L(t)$

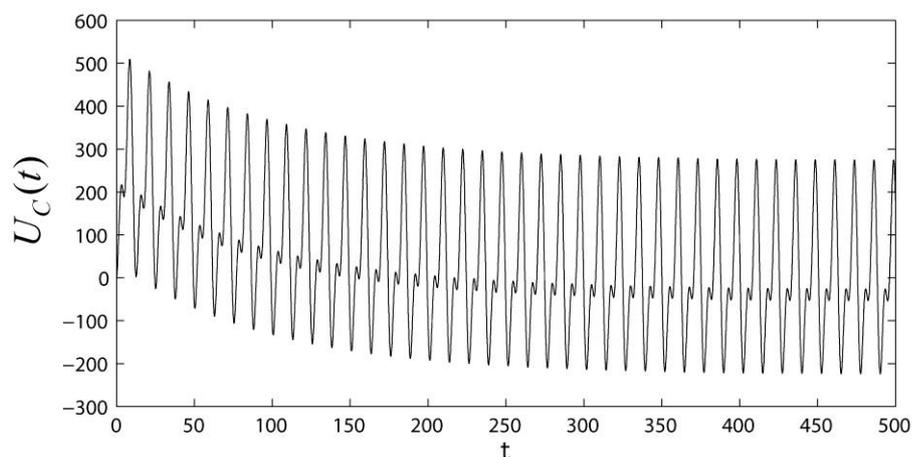


Рисунок 6.6 – График напряжения $U_C(t)$

Графики решений, представленные на рис. 6.1–6.6, являются ограниченными на отрезке времени от 0 до 500 пс. При увеличении отрезка в 4–10 раз выполняются аналогичные ограничения. Анализ графиков показывает, что для системы (1.1)–(1.3) с определенными экспоненциальными или синусоидальными токами (5.19), а также сопротивлениями и проводимостями вида (5.17), (5.18), существуют глобальные решения, ограниченные на всей области определения. Следовательно, вывод об устойчивости по Лагранжу ДАУ, соответствующего системе (1.1)–(1.3) с определенными функциями вида (5.17)–(5.19), который получен с помощью теоремы 5.1.1, подтвержден численным экспериментом.

Графики решения для электрической цепи с нелинейными сопротивлениями и проводимостями (5.17), $\alpha_k = 0.1$, внешними токами $I_1(t) = 0.1t$, $I_2(t) = 0.001t^2$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0,0,0)^T$ представлены на рис. 6.7–6.9.

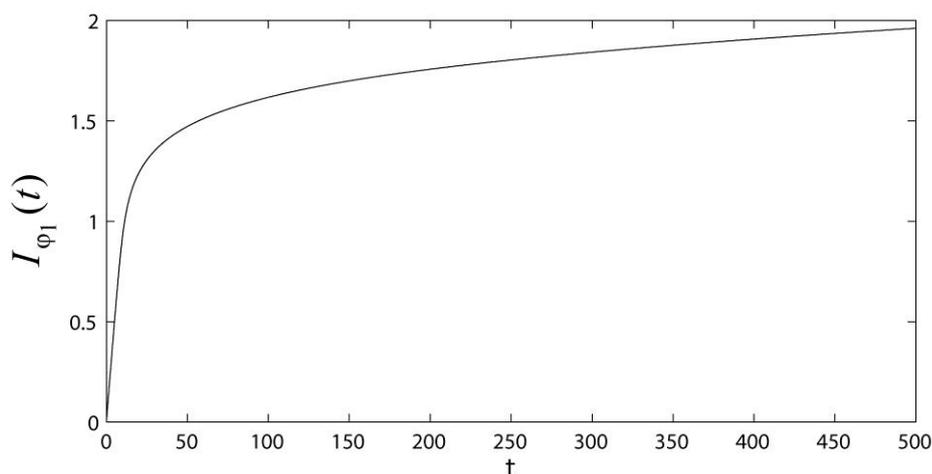


Рисунок 6.7 – График тока $I_{\varphi_1}(t)$

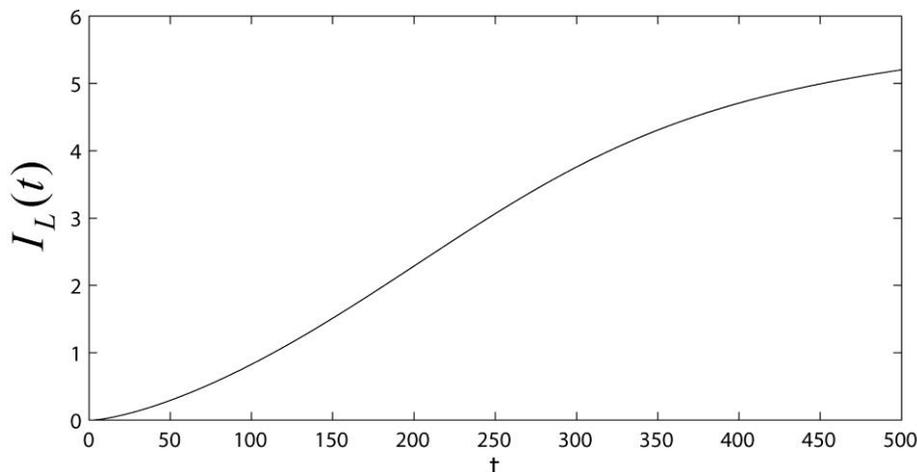


Рисунок 6.8 – График тока $I_L(t)$

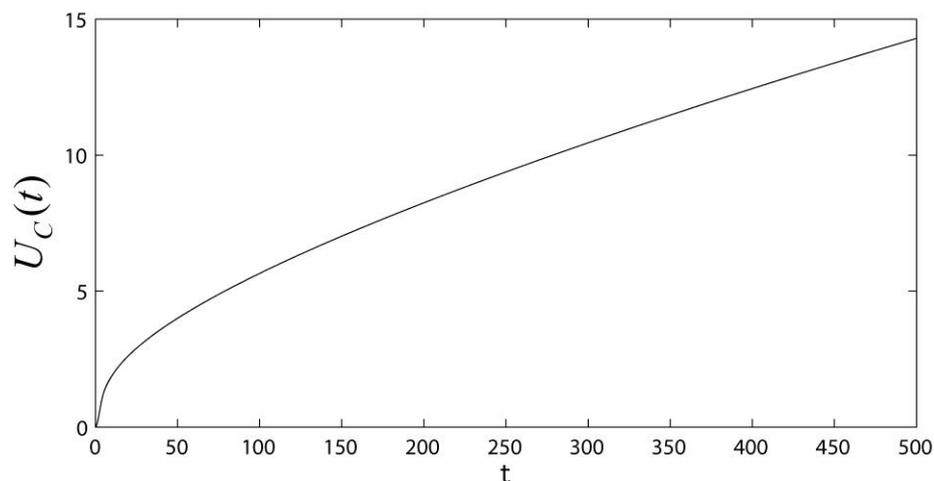


Рисунок 6.9 – График напряжения $U_C(t)$

Анализ графиков на рис. 6.7–6.9 показывает, что для системы (1.1)–(1.3) с токами вида (5.20), сопротивлениями и проводимостями вида (5.17), существует глобальное решение, возрастающее с ростом времени и, следовательно, неограниченное. Аналогичный результат вытекает из применения теоремы 5.1.1, поскольку выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2), однако условия устойчивости по Лагранжу не выполнены.

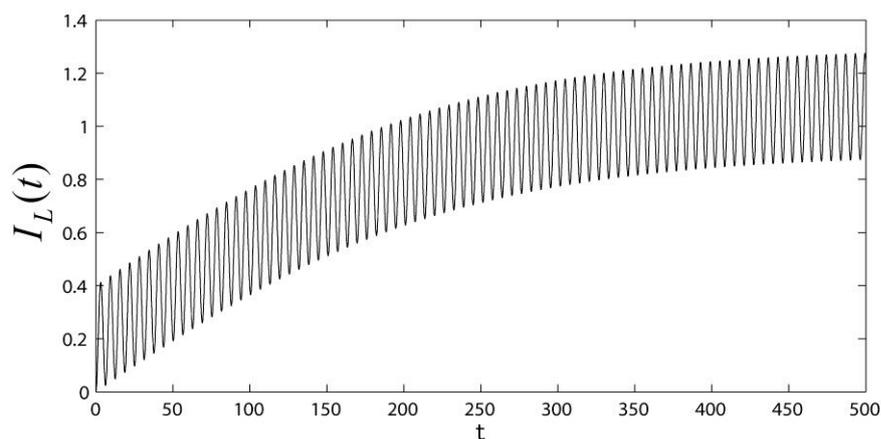
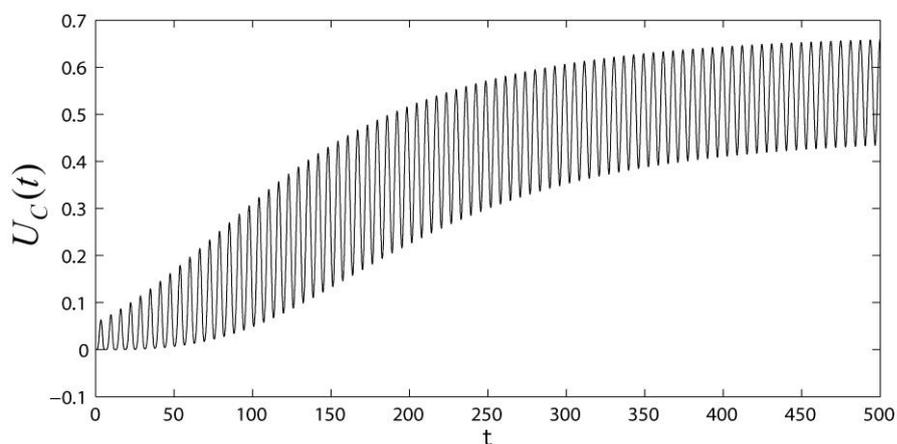
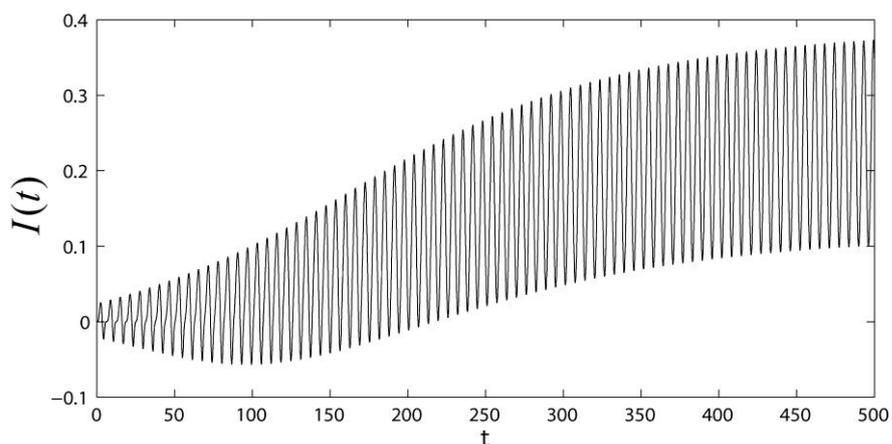
6.3 Нахождение численных решений для модели конкретного радиотехнического устройства

Для системы (5.21)–(5.23), которая описывает модель электрической цепи, изображенной на рис. 5.1, будем искать приближенные решения с помощью предложенного метода (6.5)–(6.8). Интервал времени задан в пс.

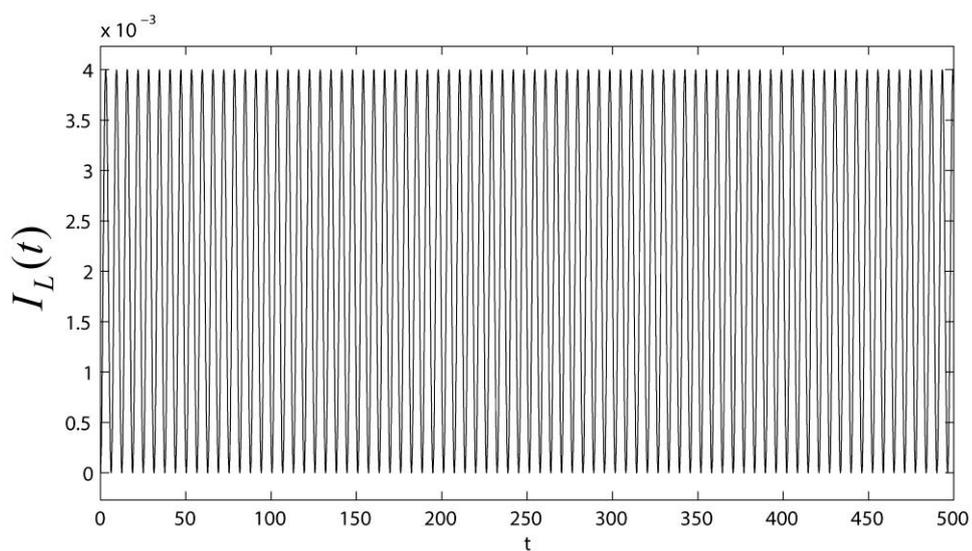
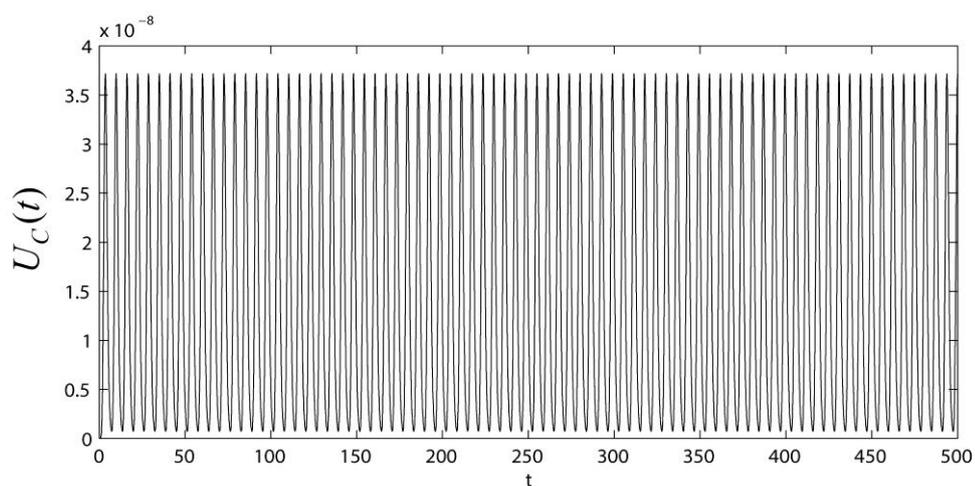
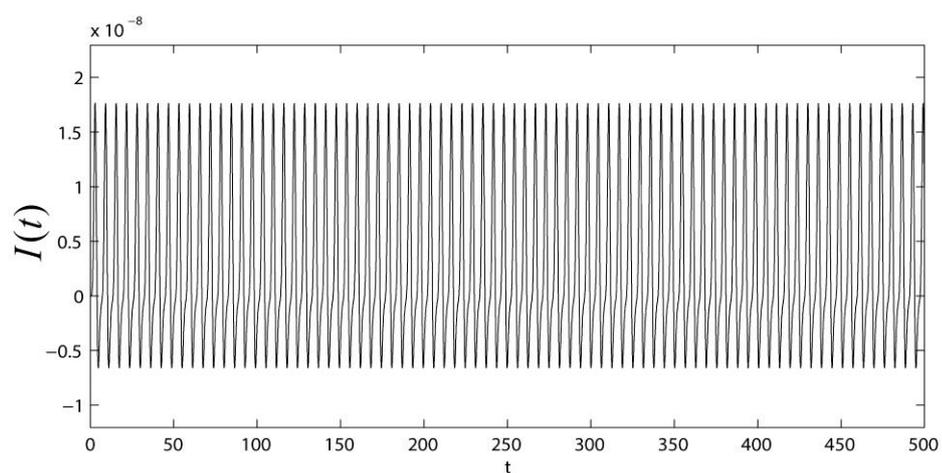
Выберем параметры $L = 0.5$ нГн, $C = 0.5$ пФ, $r = 0.1$ Ом, $g = 0.1$ Ом⁻¹, входное напряжение $e(t) = 2 + 100\sin t$, нелинейные сопротивления и проводимость

$$\varphi_0(y) = y^3, \quad \varphi(y) = y^3, \quad \psi(y) = y^3, \quad h(y) = y^3. \quad (6.27)$$

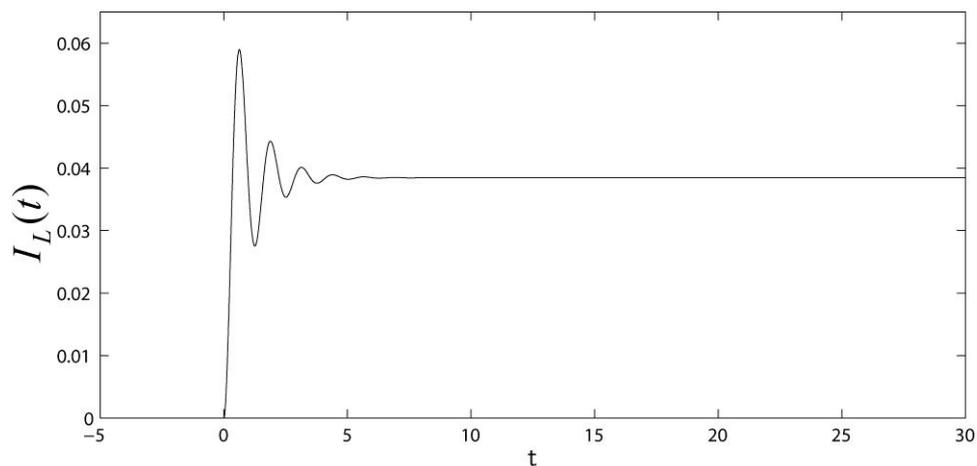
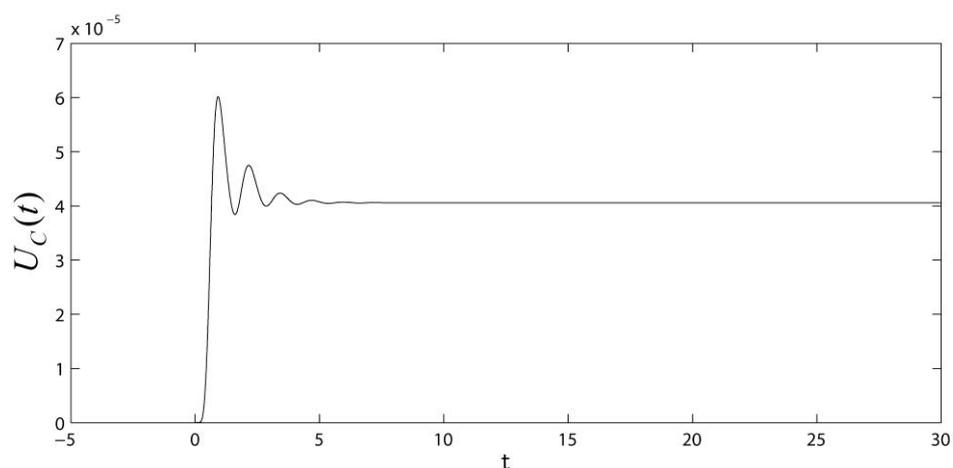
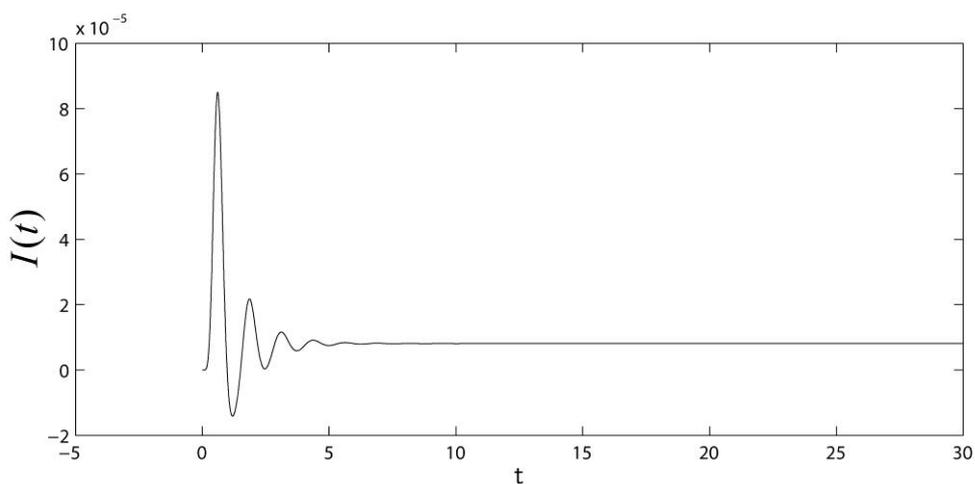
На рис. 6.10–6.12 представлены графики численного решения с начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0,0,0)^T$.

Рисунок 6.10 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.11 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.12 – График тока $I(t)$

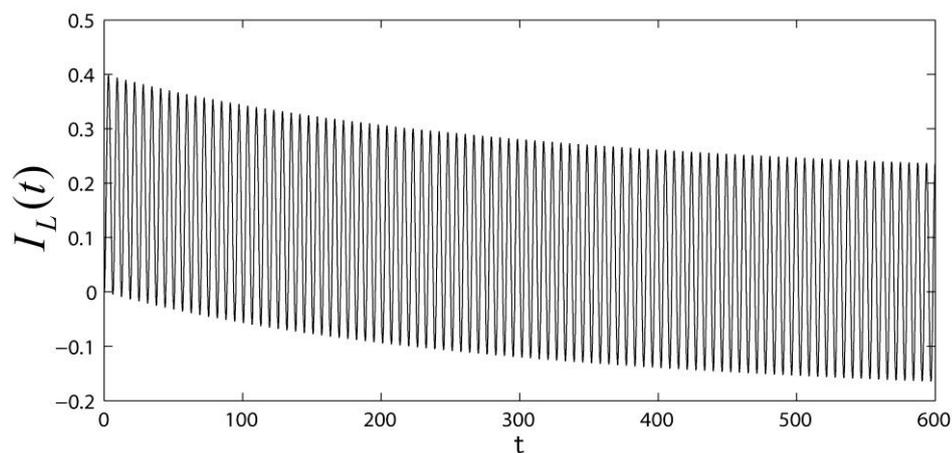
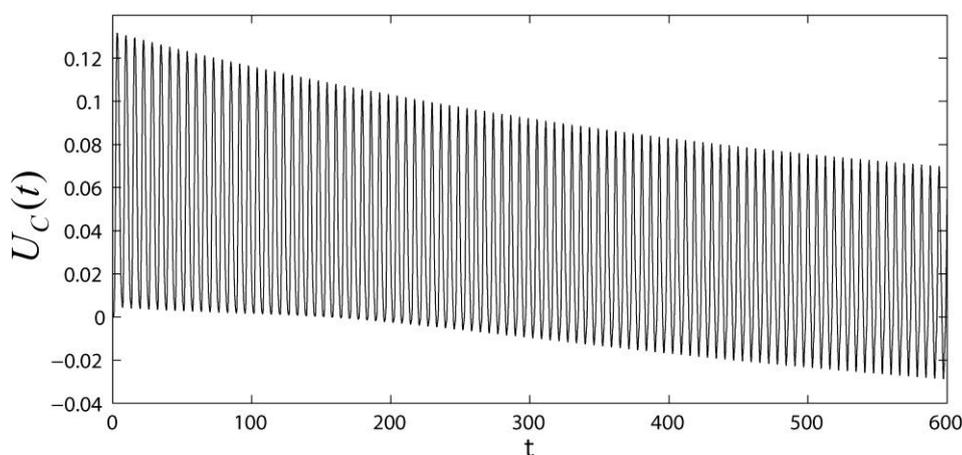
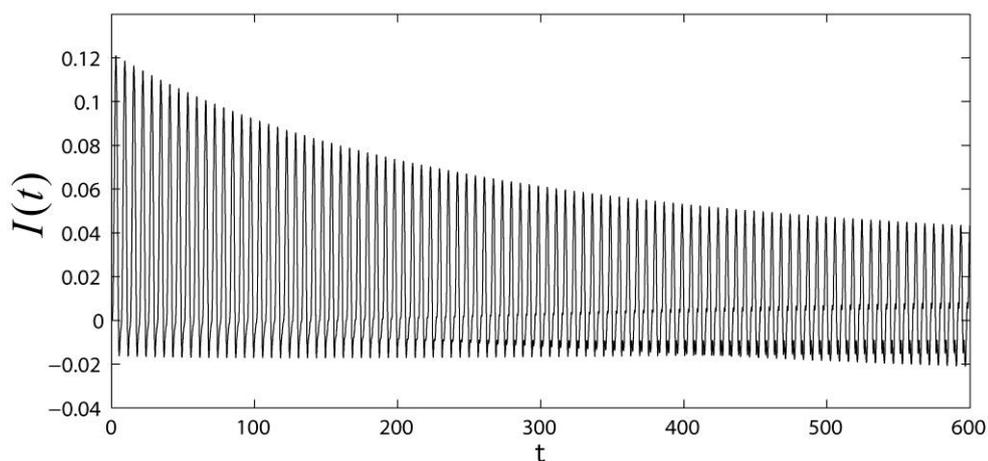
Графики решения для электрической цепи с параметрами $L = 0.5$ нГн, $C = 0.5$ пФ, $r = 2$ Ом, $g = 0.2$ Ом⁻¹, нелинейными сопротивлениями и проводимостью (6.27), входным напряжением $e(t) = \sin t$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 0, 0)^T$ представлены на рис. 6.13–6.15.

Рисунок 6.13 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.14 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.15 – График тока $I(t)$

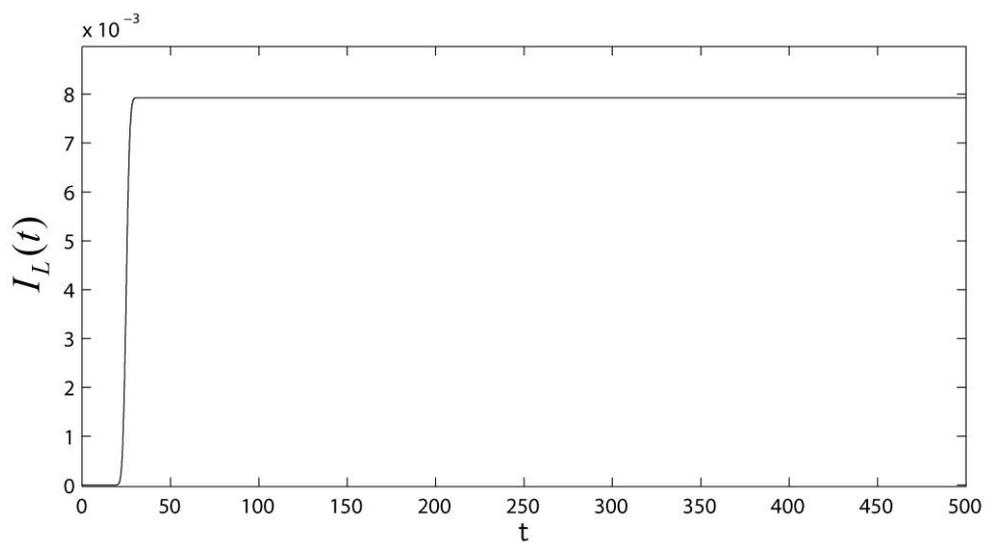
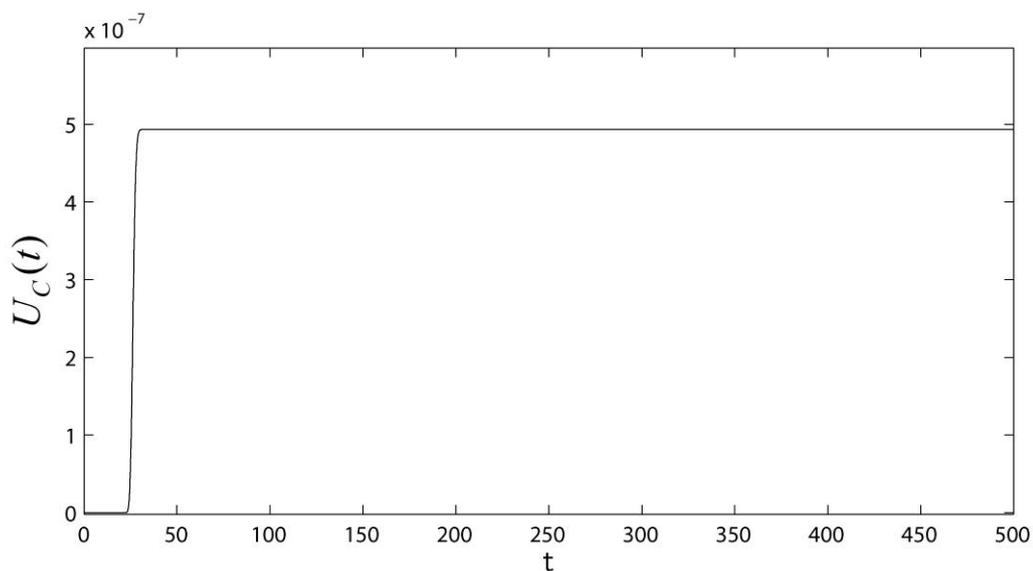
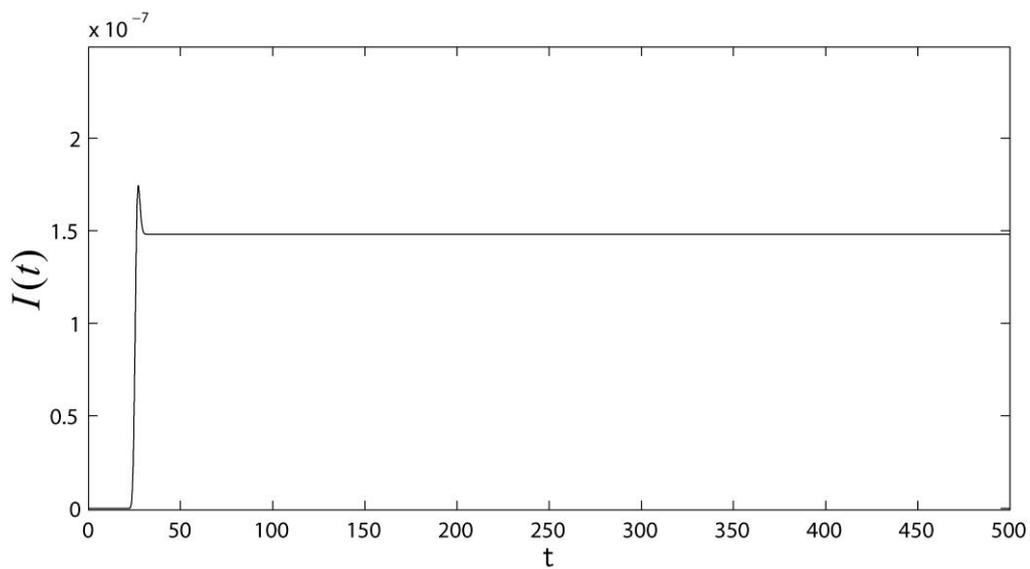
Изменим напряжение на $e(t) = 100 e^{-t} \sin(5t)$. Полученные графики представлены на рис. 6.16–6.18.

Рисунок 6.16 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.17 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.18 – График тока $I(t)$

Пусть $L = 0.5$ нГн, $C = 0.5$ пФ, $r = 2$ Ом, $g = 0.2$ Ом $^{-1}$, $e(t) = 100 \sin t$, $\varphi_0(y) = 10y^3$, $\varphi(y) = 30y^3$, $h(y) = 40y^3$, $\psi(y) = 20y^3$, $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 0, 0)^T$. Графики полученного решения представлены на рис. 6.19–6.21.

Рисунок 6.19 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.20 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.21 – График тока $I(t)$

Графики решения для электрической цепи с линейными параметрами $L=2$ нГн, $C=0.5$ пФ, $r=0.03$ Ом, $g=0.3$ Ом⁻¹, нелинейными параметрами (6.27) и $e(t) = 4e^{-(t-25)^2/5}$, $t_0=0$, $x_0=(0,0,0)^T$ представлены на рис. 6.22–6.24.

Рисунок 6.22 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.23 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.24 – График тока $I(t)$

Выберем параметры $L=0.5$ нГн, $C=0.5$ пФ, $r=2$ Ом, $g=0.2$ Ом $^{-1}$ и напряжение $e(t)=200\sin(0.5t)-0.5$. На рис. 6.25–6.27 представлены графики решения с начальными значениями $t_0=0$, $x_0=(0,0,0)^T$ для нелинейных сопротивлений и проводимости вида

$$\varphi_0(y) = y^3, \quad \varphi(y) = \sin y, \quad h(y) = \sin y, \quad \psi(y) = \sin y. \quad (6.28)$$

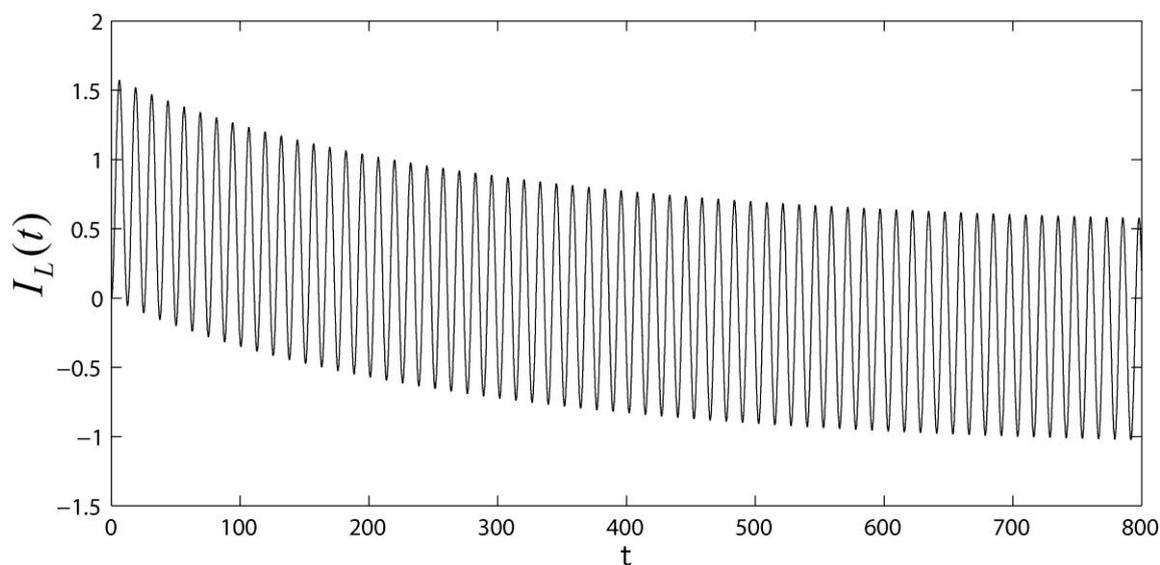


Рисунок 6.25 – График тока $I_L(t)$

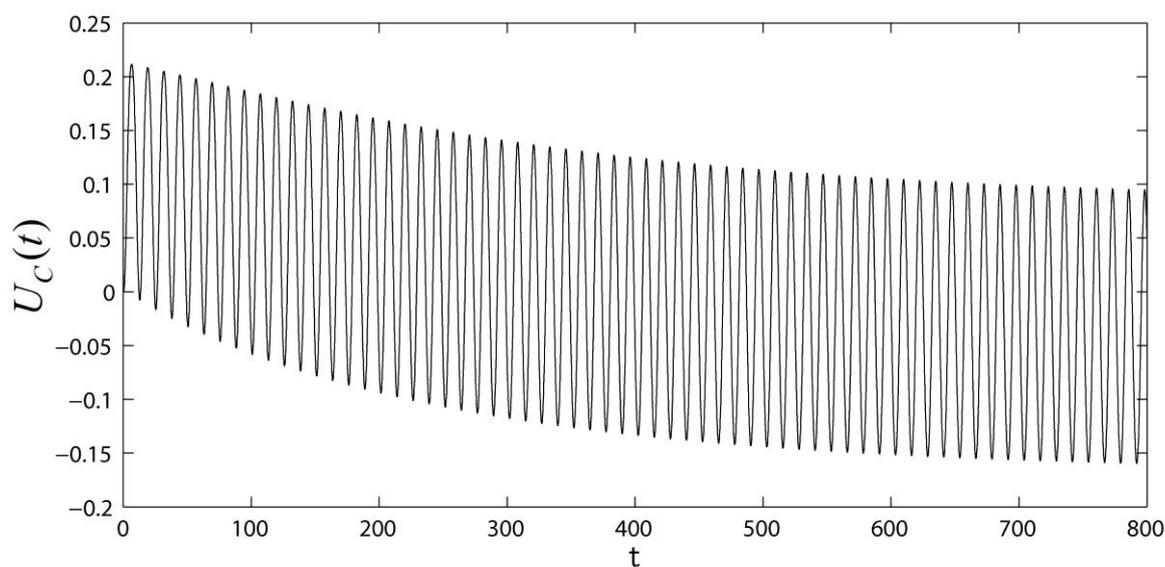
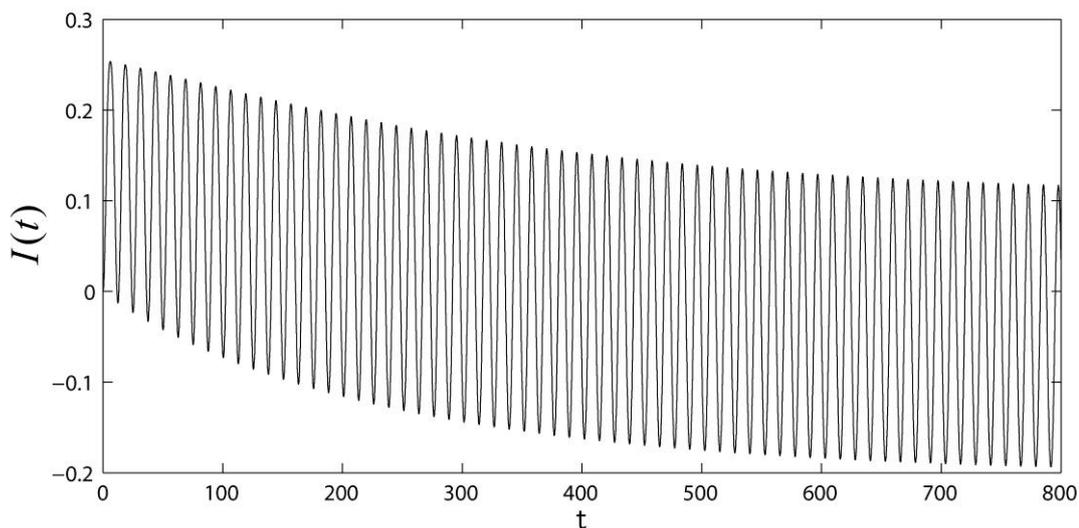
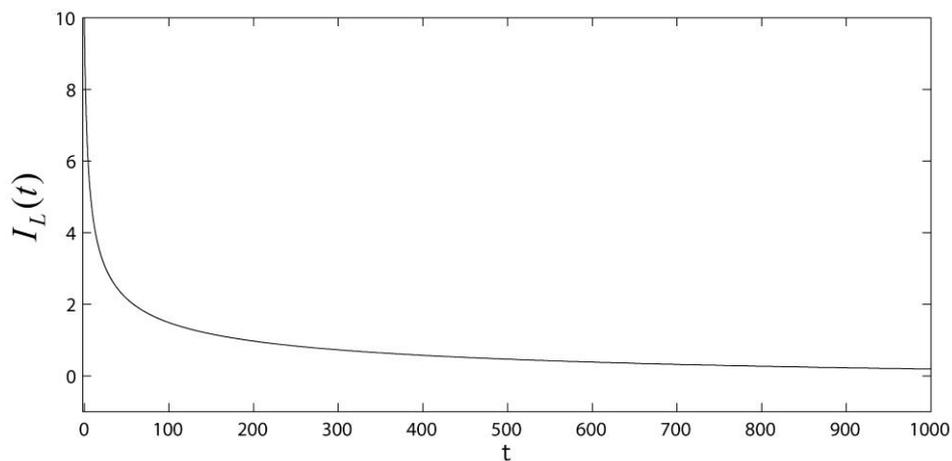
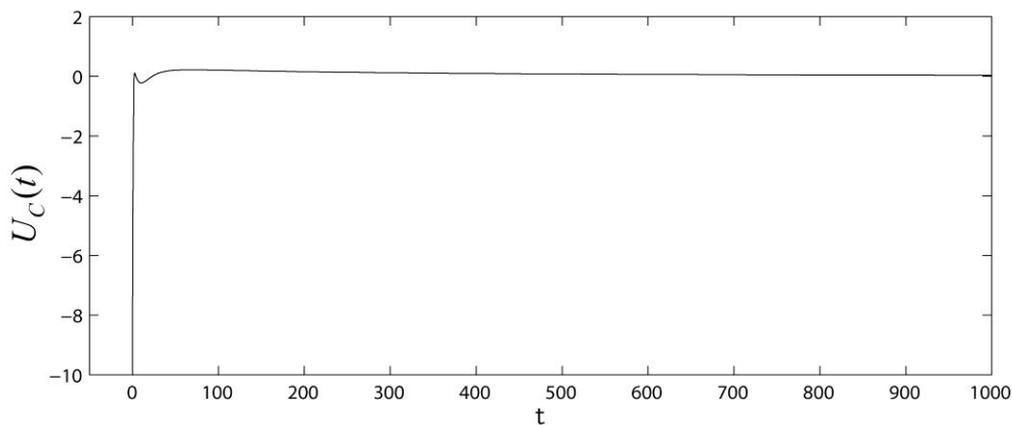
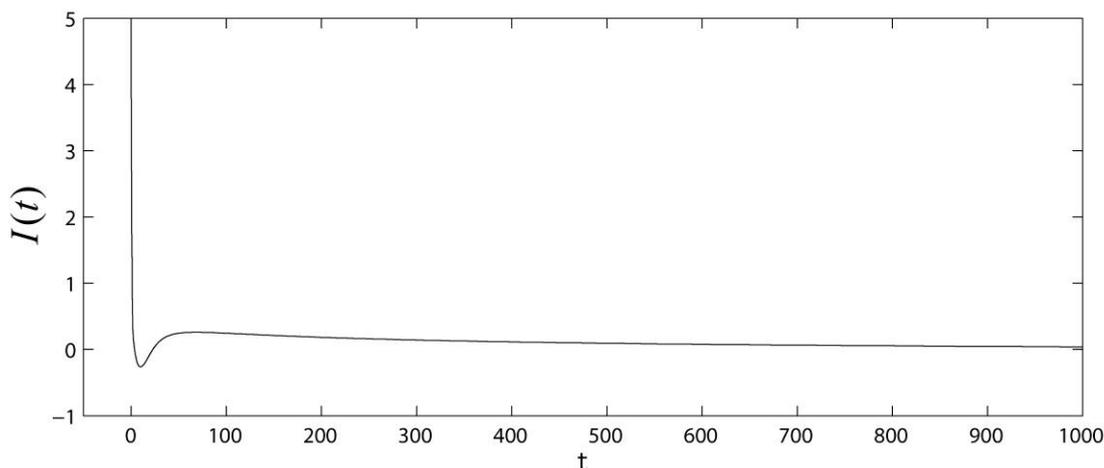


Рисунок 6.26 – График напряжения $U_C(t)$

Рисунок 6.27 – График тока $I(t)$

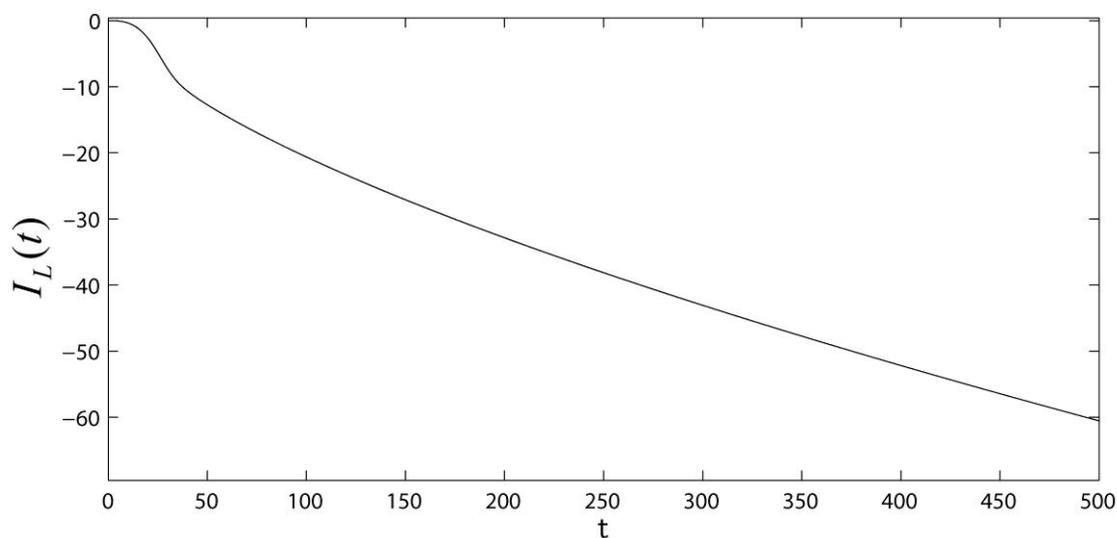
Для тех же значений параметров, функций (6.28) и напряжения $e(t) = (2t + 10)^{-2}$ графики решения с начальными данными $t_0 = 0$, $x_0 = (10, -10, 5)^T$ представлены на рис. 6.28–6.30.

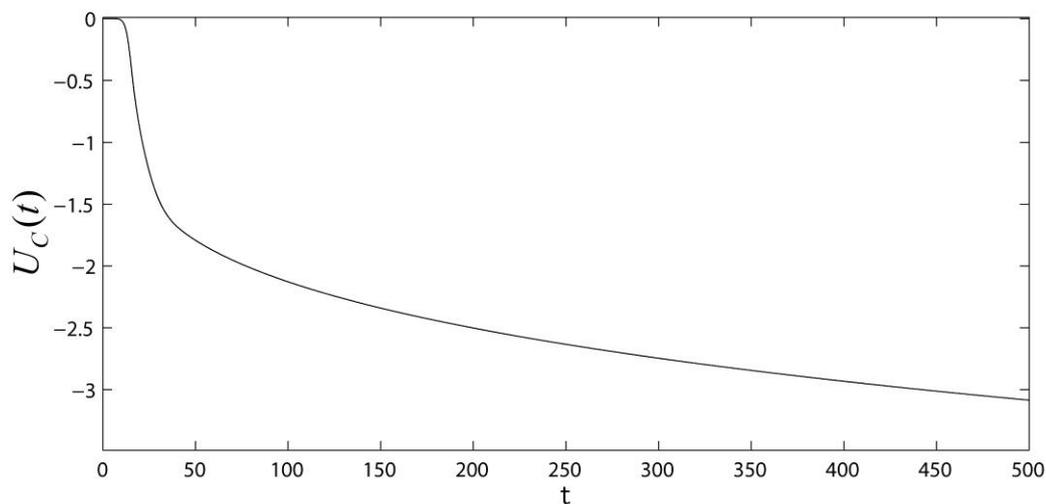
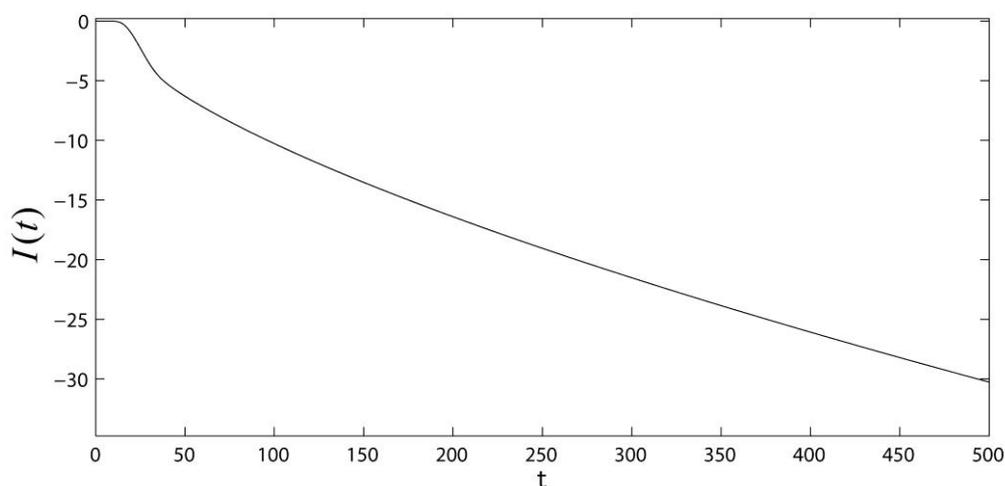
Рисунок 6.28 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.29 – График напряжения $U_C(t)$

Рисунок 6.30 – График тока $I(t)$

Анализ графиков, представленных на рис. 6.10–6.30, показывает, что для системы (5.21)–(5.23) с входным напряжением типа (5.28), а также нелинейными сопротивлениями и проводимостью типа (5.26), (5.27), существуют ограниченные глобальные решения. Следовательно, вывод о существовании глобальных решений и устойчивости по Лагранжу, полученный с помощью теоремы 5.1.1 для частных случаев, подтвержден численным экспериментом.

Графики решения с $L = 1$ нГн, $C = 0.5$ пФ, $r = 2$ Ом, $g = 0.3$ Ом⁻¹, нелинейными параметрами (6.27), входным напряжением $e(t) = -t^2$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0,0,0)^T$ представлены на рис. 6.31–6.33.

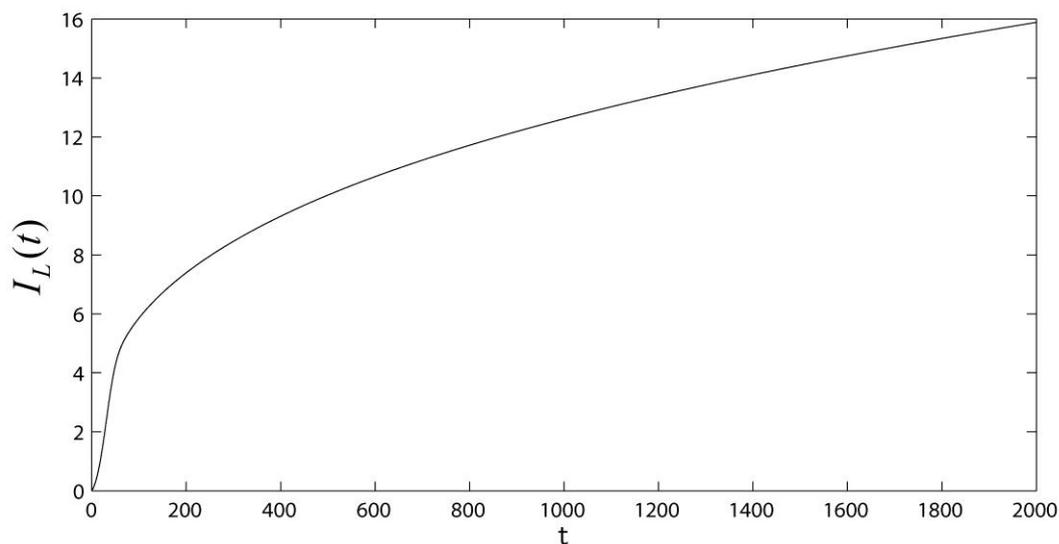
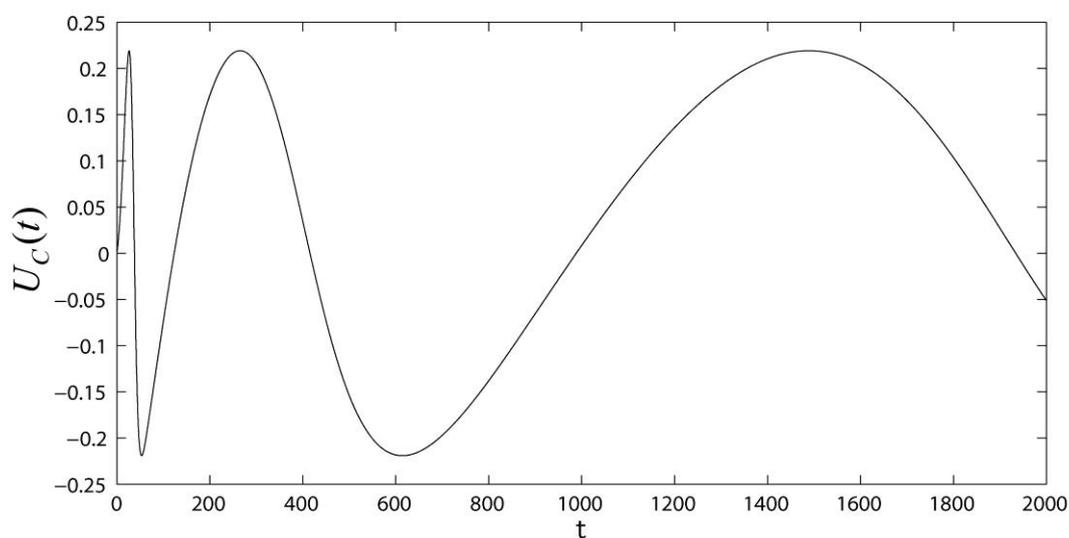
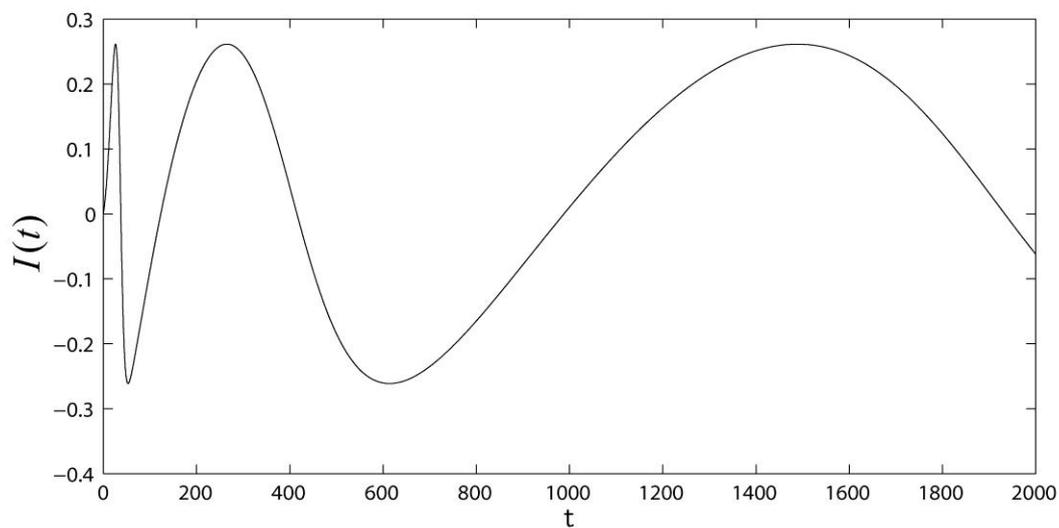
Рисунок 6.31 – График тока $I_L(t)$

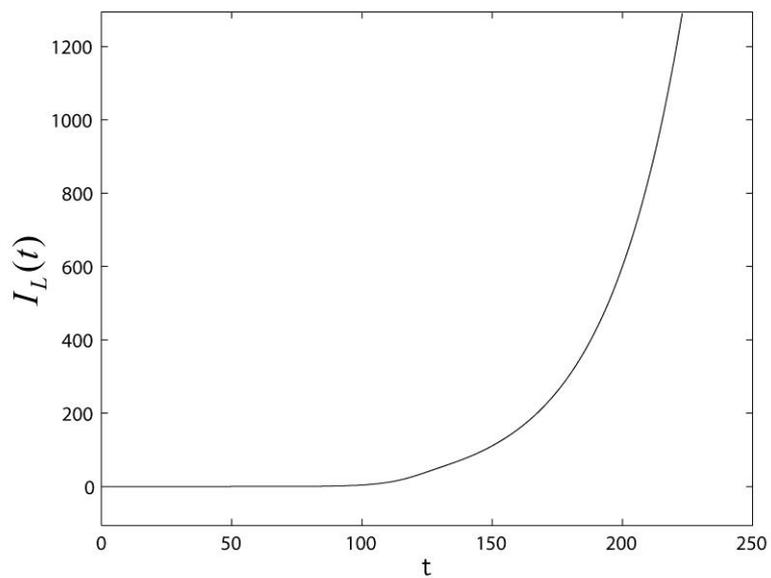
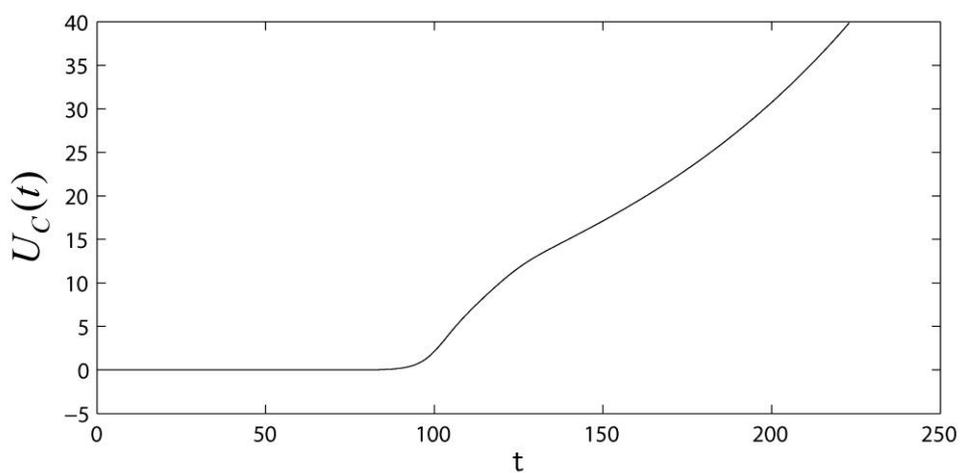
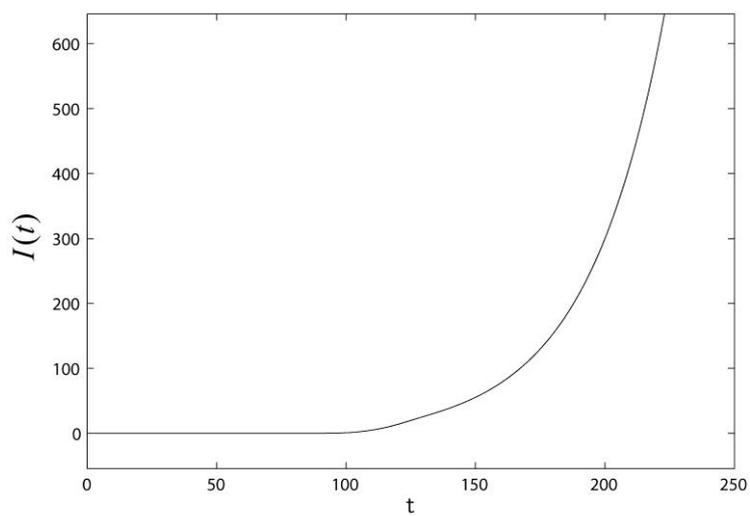
Рисунок 6.32 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.33 – График тока $I(t)$

Определим $L=0.5$ нГн, $C=0.5$ пФ, $r=2$ Ом, $g=0.2$ Ом $^{-1}$, $e(t)=2t+10$.
Графики решения с начальными значениями $t_0=0$, $x_0=(0,0,0)^T$ для нелинейных сопротивлений и проводимости (6.28) изображены на рис. 6.34–6.36.

Графики решения для электрической цепи с $L=0.5$ нГн, $C=0.5$ пФ, $r=2$ Ом, $g=0.3$ Ом $^{-1}$, $e(t)=0.01e^{0.1t}$, $\varphi_0(y)=0.01y^3$, $\varphi(y)=0.1y^3$, $h(y)=0.01y^3$, $\psi(y)=0.1y^3$, $t_0=0$, $x_0=(0,0,0)^T$ представлены на рис. 6.37–6.39.

Анализ графиков на рис. 6.31–6.39 показывает, что для системы (5.21)–(5.23) с входным напряжением типа (5.29), а также нелинейными параметрами типа (5.26), (5.27), существуют глобальные решения, возрастающие с ростом времени и, следовательно, неограниченные. Аналогичный результат следует из применения теоремы 5.1.1.

Рисунок 6.34 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.35 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.36 – График тока $I(t)$

Рисунок 6.37 – График тока $I_L(t)$ Рисунок 6.38 – График напряжения $U_C(t)$ Рисунок 6.39 – График тока $I(t)$

Выводы по разделу 6

1. Известные в настоящее время численные методы решения полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, как правило, применимы на локальном отрезке времени, а вычисление гарантированной протяженности этого отрезка является отдельной проблемой, иногда весьма сложной. В то же время для полноценного анализа динамических моделей важно иметь возможность исследовать поведение решения на сколь угодно большом отрезке времени.

2. Разработан численный метод нахождения решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с регулярным характеристическим пучком, который учитывает условия существования и единственности решения, указанные в теоремах 5.1.1, 3.2.1. Приближенное решение вычисляется на любом заданном отрезке времени. По сравнению с известными методами решения полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, в предложенном методе ослаблены ограничения на нелинейную часть уравнения и ее частные производные. Также в предложенном методе ДАУ сведено к системе из чисто дифференциального и алгебраического уравнений с помощью спектральных проекторов типа Рисса, которые можно численно найти.

3. С помощью разработанного численного метода найдены приближенные решения для математических моделей нелинейных радиотехнических цепей. Реализация численного метода и вычисление спектральных проекторов типа Рисса производится в среде MATLAB. Построены графики приближенных решений, которые демонстрируют эволюционные свойства рассмотренных моделей. Анализ численных решений подтверждает результаты теоретических исследований.

Основные результаты раздела опубликованы в [70, 75, 94].

ВЫВОДЫ

В диссертации решена научная задача, которая заключается в получении новых условий глобальной разрешимости и устойчивости полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, разработке метода их численного решения, а также в исследовании глобальной динамики нелинейных радиотехнических цепей.

По результатам диссертационной работы сделаны следующие выводы:

1. Получил дальнейшее развитие метод продолжения решений обыкновенного дифференциального уравнения с использованием дифференциальных неравенств и функций типа Ляпунова и Ла-Салля, что позволяет получать условия неограниченной продолжаемости решений при более общих предположениях относительно нелинейной части уравнения.

2. Предложена блочная структура операторных коэффициентов сингулярных дифференциально-алгебраических уравнений и метод ее построения, которые позволяют свести исходное уравнение к системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений.

3. Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности глобального решения задач Коши для обыкновенного полулинейного дифференциального уравнения и полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным и сингулярным характеристическими пучками. Теоремы не содержат ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет применять их для исследования более широких классов прикладных задач, в частности, для анализа глобальной динамики нелинейных радиотехнических цепей и других систем и процессов, при математическом моделировании которых возникают дифференциальные и дифференциально-алгебраические уравнения.

Теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным пучком произвольного ранга включает случаи, когда соответствующая система уравнений недоопределена или переопределена. В частности, подобные си-

стемы возникают при исследовании математических моделей в условиях неполных данных и при рассмотрении обратных задач.

4. Получены результаты о глобальной разрешимости, которые учитывают специфику нелинейных частей дифференциально-алгебраических уравнений, а именно, наличие слагаемых, зависящих только от времени, и линейных нестационарных частей. Эти результаты используются при анализе переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях и могут быть применены для анализа математических моделей других процессов и систем, в которых возникают дифференциально-алгебраические уравнения.

5. Сформулированы и доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным и сингулярным характеристическими пучками. Теоремы дают достаточные условия существования и единственности глобального решения, ограниченного на всей области определения, и решения, которое имеет конечное время определения. Теоремы могут быть использованы для анализа эволюционных свойств состояний математических моделей конкретных систем и процессов, которые описываются соответствующими уравнениями.

6. Построены математические модели пяти типов нелинейных радиотехнических устройств с сосредоточенными параметрами. Как и в методе электромеханических аналогий, разработанные в диссертации математические модели могут быть использованы в анализе робототехнических, экономических и других систем, в которых выделяются структурная геометрия в форме модельного графа и параметры составляющих элементов.

7. Для построенных математических моделей нелинейных радиотехнических устройств указаны ограничения, которые обеспечивают гладкую детерминированную эволюцию состояний (переходных режимов) на бесконечном интервале времени, и условия, при которых соответствующие дифференциально-алгебраические уравнения устойчивы по Лагранжу. Указанным ограничениям удовлетворяют определенные нелинейные функции, которые не являются глобально липшицевыми, что позволяет гарантировать существование и ограничен-

ность глобальных решений уравнений динамики более широких классов нелинейных систем.

Анализ рассмотренных задач показал, что практическая проверка условий полученных теорем является достаточно эффективной и эти условия могут быть физически обеспечены.

8. Разработан численный метод нахождения решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (с регулярным характеристическим пучком) на любом заданном отрезке времени. С помощью разработанного метода найдены приближенные решения для математических моделей нелинейных радиотехнических цепей. Построены графики приближенных решений, которые демонстрируют эволюционные свойства рассмотренных моделей.

Анализ численных решений подтверждает результаты теоретических исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азбелев Н. В. Об интегральных неравенствах. I. / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // Математический сборник. – 1962. – Т. 56(98), № 3. – С. 325–342.
2. Баскаков А. Г. О существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной / А. Г. Баскаков, М. К. Чернышов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. «Физика. Математика». – 2002. – № 2. – С. 44–49.
3. Баскаков А. Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 11. – С. 3–42.
4. Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
5. Бондаренко М. Ф. Дискретное оптимальное управление дескрипторными системами с переменными параметрами / М. Ф. Бондаренко, Л. А. Власенко, А. Г. Руткас // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 5–12.
6. Бондаренко М. Ф. Задача линейного квадратичного регулятора для дескрипторных сосредоточенных и распределенных систем управления / М. Ф. Бондаренко, Л. А. Власенко // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 1. – С. 76–85.
7. Борисов Ю. М. Электротехника / Ю. М. Борисов, Д. Н. Липатов, Ю. Н. Зорин. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 552 с.
8. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000. – 222 с.
9. Бояринцев Ю. Е. Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1996. – 262 с.
10. Бояринцев Ю. Е. О нелинейных алгебро-дифференциальных системах (АДС), допускающих сведение к невырожденным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Теория и численные методы решения /

Ю. Е. Бояринцев // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 15-21.

11. Бояринцев Ю. Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев, И. В. Орлова. – Новосибирск: Наука, 2006. – 124 с.

12. Власенко Л. А. Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика. – 2009. – № 5-6 (59-60). – С. 64–71.

13. Власенко Л. А. Математические модели с уравнениями типа Соболева: учеб, пособ. / Л. А. Власенко. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2011. – 112 с.

14. Власенко Л. А. Математическое моделирование динамики производства при импульсных инвестициях / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Економічна кібернетика. Міжнародний науковий журнал. – 2013. – № 1-3 (79–81). – С. 8–15.

15. Власенко Л. А. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика. – 2011. – № 1-3 (67-69). – С. 4–9.

16. Власенко Л. А. Об одной стохастической системе с импульсными воздействиями. / Л. А. Власенко, С. И. Ляшко, А. Г. Руткас // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 2. – С. 50–55.

17. Власенко Л. А. Переходные процессы в многопроводной линии передачи с сосредоточенными элементами на выходе. I. Линия без дисперсии / Л. А. Власенко, А. Г. Руткас // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. – № 1. – С. 9–15.

18. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями / Л. А. Власенко. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 273 с.

19. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

20. Гликлик Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлик //

Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2012. – №27 (286). – С. 24–34.

21. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

22. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

23. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

24. Данилов В. А. Единообразный подход к решению алгебро-дифференциальных систем, использующий формулу Обрешкова / В. А. Данилов // Алгебро-дифференциальные системы и методы их решения: Сб. науч. тр. / Отв. ред. О. В. Васильев. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1993. – С. 43–45.

25. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – М. – Л.: Энергия, 1965. – 892 с.

26. Зубова С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С. П. Зубова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. «Физика. Математика». – 2013. – № 2. – С. 192–198.

27. Изюмов Н. М. Основы радиотехники / Н. М. Изюмов, Д. П. Линде. – М. – Л.: Энергия, 1965. – 480 с.

28. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

29. Касаткин А. С. Электротехника / А. С. Касаткин, М. А. Перекалин. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 376 с.

30. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М: Мир, 1972. – 740 с.

31. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.

32. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

33. Красносельский Л. А. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Л. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Труды Воронежского государственного университета. – 1956. – Вып. 2. – С. 3–23.

34. Куликов Г. Ю. О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные / Г. Ю. Куликов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 4. – С. 522–540.

35. Лакшмикантам В. Устойчивость движения: метод сравнения / В. Лакшмикантам, С. Лиля, А. А. Мартынюк. – Киев: Наукова думка, 1991. – 248 с.

36. Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

37. Леонтьев В. Исследования структуры американской экономики / [В. Леонтьев и др.]. – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. – 641 с.

38. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.

39. Мартынюк А. А. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств / А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лиля. – Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с.

40. Мартынюк А. А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений / А. А. Мартынюк, Д. Като, А. А. Шестаков – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.

41. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ) / М. Моришима. – М.: Наука, 1972. – 280 с.

42. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972. – 519 с.

43. Пафик С. П. Про структуру загальної розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків /

С. П. Пафик, В. П. Яковець // Укр. мат. журнал. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 296–306.

44. Пивень А. Л. Комбинированный метод решения вырожденного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями / А. Л. Пивень // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління. – 2014. – № 1131, Вип. 1. – С. 168–180.

45. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л. С. Понтрягин – М.: Наука, 1974. – 331 с.

46. Радбель Н. И. О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 6. – С. 1142–1143.

47. Рудаков В. П. Об эффективной двусторонней оценке норм решений нелинейных возмущенных систем / В. П. Рудаков // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 12. – с. 78-83.

48. Руткас А. А. Структурные функциональные характеристики дескрипторных нейронных сетей / А. А. Руткас, В. И. Хаханов // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. – № 1. – С. 37–45.

49. Руткас А. Г. Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений нелинейных электрических цепей / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 4 (114). – С. 131–142.

50. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ / А. Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 1996–2010.

51. Руткас А. Г. Матрицы передачи и рассеяния многополюсника / А. Г. Руткас // Математическое моделирование и теория электрических цепей. – 1978. – Вып. 16. – С. 3–15.

52. Руткас А. Г. Нахождение глобальных решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // VI Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» ім. академіка І. І. Ляшка: матеріали конф., 5–6 вересня 2013 р. – К.:

КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – С. 184.

53. Руткас А. Г. О передаточных матричных функциях электромеханических систем / Н. И. Хиргий, А. Г. Руткас // Математические методы анализа динамических систем. – 1978. – Вып. 2. – С. 119–122.

54. Руткас А. Г. Полугруппы мономорфизмов графов в дискретных структурах / Н. И. Хиргий, А. Г. Руткас // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1974. – Вып. 19. – С. 111–125.

55. Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1 (111). – С. 135–145.

56. Руткас А. Г. Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью / А. Г. Руткас // Украинский математический журнал. – 2008. – т. 60, № 2. – С. 225–239.

57. Руткас А. Г. Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией / А. Г. Руткас // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 230, № 1. – С. 38–40.

58. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

59. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: навч. посіб. / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища шк., 2000. – 293 с.

60. Самойленко А. М. Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства / А. М. Самойленко, Г. П. Пелюх // Укр. мат. журнал. – 1994. – Т. 45, № 6 – С. 737–747.

61. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, № 4 – С. 47–74.

62. Федоров В. Е. Глобальная разрешимость некоторых полулинейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, П. Н. Давыдов // Вестник Челябинского государственного университета. – 2010. – № 23. – С. 80–87.

63. Федоров В. Е. Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа / В. Е. Федоров, П. Н. Давыдов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013 – Т. 19, № 4. – С. 267–278.

64. Филипковская М. С. Глобальные решения полулинейного дифференциального уравнения / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. VII науч. конф. студентов и аспирантов, 28 апреля 2012 г. – Х., 2012. – С. 42–43.

65. Филипковская М. С. Глобальная разрешимость недоопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». – 2014. – № 3. – С. 168–181.

66. Филипковская М. С. Глобальная разрешимость переопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в радиотехнике / М. С. Филипковская // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – № 1(64). – С. 7–16.

67. Филипковская М. С. Глобальные решения сингулярных систем дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // VII Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» ім. академіка І. І. Ляшка: матеріали конф., 9–10 жовтня 2014 р. – К.: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2014. – С. 106–107.

68. Филипковская М. С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2014». – Воронеж: Издат.-полиграф. центр «Научная книга», 2014. – С. 362–372.

69. Филипковская М. С. О глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики, механики и информатики: тезисы докл. междунар. школы-конф. «Тараповские чтения - 2013», 29 сент. – 4 окт. 2013 г. – Х., 2013. – С. 118–119.

70. Филипковская М. С. Ограниченность глобальных решений полулинейных дескрипторных уравнений и их численный анализ / М. С. Филипковская // Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015), 8–13 июня 2015 г. – Харьков-Сумы, 2015. – С. 249–252.

71. Филипковская М. С. О локальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. VIII междунар. науч. конф. для молодых ученых, 27–28 апреля 2013 г. – Х., 2013. – С. 101–102.

72. Филипковская М. С. О продолжении решений полулинейного вырожденного уравнения / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. междунар. конф., 17–22 апреля 2011 г. – Х., 2011. – С. 242–243.

73. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике / М. С. Филипковская // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2012. – № 1015, Вип. 19. – С. 306–319.

74. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. междунар. конф. «Тараповские чтения - 2012», 1–31 мая 2012 г. – Х., 2012. – С. 118.

75. Филипковская М. С. Устойчивость по Лагранжу и численный метод решения полулинейных дескрипторных уравнений / М. С. Филипковская // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – № 1156, вип. 26. – С. 152–167.

76. Халмош П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. – М.: Физматгиз, 1963. – 279 с.
77. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
78. Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / С. Р. Хачатрян, М. В. Пинегина, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.
79. Численные методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 212 с.
80. Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.
81. Шварц Л. Анализ. Т. 1. / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – 822 с.
82. Agarwal Ravi P. Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications / Ravi P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. – 81 p.
83. Ascher U. M. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations / U. M. Ascher, L. R. Petzold. – USA: SIAM, 1998. – 314 p.
84. Bender D. J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems / D. J. Bender, A. J. Laub // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC-32, № 6. – P. 672–688.
85. Brenan K. E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations / K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold. – USA: SIAM, 1996. – 314 p.
86. Campbell S. L. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations / S. L. Campbell, L. R. Petzold // SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. – 1983. – Vol. 4, № 4. – P. 517–521.
87. Campbell S. L. Singular systems of differential equations / S. L. Campbell. – San Francisco-London-Melbourne: Pitman, 1980. – 177 p.
88. Campbell S. L. Singular systems of differential equations II / S. L. Campbell. – San Francisco-London-Melbourne: Pitman, 1982. – 235 p.
89. Campbell S. L. Solvability of general differential algebraic equations //

S. L. Campbell, E. Griepentrog // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 1995. – Vol. 16, № 2. – P. 257–270.

90. Dai L. Singular control systems (Lecture notes in control and information sciences) / L. Dai. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – 332 p.

91. Favini A. Existence and uniqueness of solutions of some abstract degenerate nonlinear equations / A. Favini, A. Rutkas // *Differential and integral equations*. – 1999. – Vol. 12, № 3. – P. 373–394.

92. Favini A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations / A. Favini, A. Yagi // *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. – 1993. – Vol. 163, Iss. 1. – P. 353–384.

93. Filipkovskaya M. Global solvability of singular semilinear differential equations and applications to nonlinear radio engineering / M. Filipkovskaya // *Challenges of modern technology*. – 2015. – Vol. 6, № 1. – P. 3–13.

94. Filipkovskaya M. S. Obtaining global solutions of semilinear degenerate differential equations for nonlinear electric circuits / M. S. Filipkovskaya // *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доп. XXIII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. IV, 20–22 травня 2015 р. – X., 2015. – С. 88.*

95. Filipkovskaya M. The global solvability and the Lagrange stability of semilinear singular differential-algebraic equations / M. Filipkovskaya // *III International Conference “Analysis and Mathematical Physics”*: Book of abstracts, June 15–19, 2015. – Kharkiv, 2015. – P. 20–21.

96. Finding beneficial DAE structures in circuit simulation / [R. März, D. E. Schwarz, U. Feldmann, etc.] // *Mathematics – key technology for the future: Joint projects between universities and industry* / W. Jäger, Hans-Joachim Krebs (editors). – New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. – P. 413–428.

97. Fox B. Numerical computation of differential-algebraic equations for nonlinear dynamics of multibody android systems in automobile crash simulation / B. Fox, L. S. Jennings, A. Y. Zomaya // *IEEE Transactions of Biomedical Engineering*. – 1999. – Vol. 46, № 10. – P. 1199–1206.

98. Freund R. W. An extension of the positive real lemma to descriptor systems /

Roland W. Freund, F. Jarre // Optimization Methods and Software. – Vol. 19, № 1. – P. 69–87.

99. Gear C. W. Differential/algebraic systems and matrix pencils / C. W. Gear, L. R. Petzold // Lecture Notes in Mathematics. – 1983. – № 973. – P. 75–89.

100. Gliklikh Yu. E. On global in time solutions for differential-algebraic equations / Yu. E. Gliklikh // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 33–39.

101. Hairer E. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – 614 p.

102. Hairer E. The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods / E. Hairer, C. Lubich, M. Roche. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 140 p.

103. Huang Jie. Impluse-free output regulation of singular nonlinear systems / Jie Huang, Ji-Feng Zhang // Int. J. Control. – 1998. – Vol. 71, № 5. – P. 789–806.

104. Jonckheere E. Variational calculus for descriptor systems / E. Jonckheere // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1988. – Vol. 33, № 5. – P. 491–495.

105. Kunkel P. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution / P. Kunkel, V. Mehrmann. – Zurich: European Math. Soc., 2006. – 256 p.

106. Kurina G. A. Linear-quadratic discrete optimal control problem for descriptor systems in Hilbert spaces / G. A. Kurina // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2004. – Vol. 10, № 3. – P. 365–375.

107. Langenhop C. E. Bounds on the norm of a solution of a general differential equation / C. E. Langenhop // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 11, № 5. – P. 795–799.

108. Lin W. Solutions to the output regulation problem of linear singular systems / W. Lin, L. Dai // Automatica. – 1996. – Vol. 32, № 12. – P. 1713–1718.

109. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 285 p.

110. Rabier P. J. Nonholonomic motion of mechanical systems from a DAE viewpoint / P. J. Rabier, W. C. Rheinboldt. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 140 p.

111. Riaza R. *Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications* / R. Riaza. – Hackensack, NJ: World Scientific, 2008. – 330 p.
112. Rutkas A. G. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // *Nonlinear Oscillations*. – 2001. – Vol. 4, № 2. – P. 252–263.
113. Rutkas A. G. The evolution of nonmonochromatic mode fields in a waveguide with space dispersive medium / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // *IEEE Proceedings of 6-th International Conference on Antenna Theory and Techniques*, 17-21 September, 2007. – Sevastopol, Ukraine, 2007. – P. 158–160.
114. Rutkas A. G. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // *IEEE Proceedings of 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 6-10 September, 2010. – Sevastopol, Ukraine, 2010. – P. 102–104.
115. Showalter R. E. A nonlinear parabolic-Sobolev equation / R. E. Showalter // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1975. – Vol. 50. – P. 183–190.
116. Showalter R. E. Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space / R. E. Showalter // *SIAM J. Math. Anal.* – 1972. – Vol. 3, № 3. – P. 527–543.
117. Showalter R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations* / R. E. Showalter. – American Mathematical Society: *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 49, 1997. – 278 p.
118. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // *SIAM J. Math. Anal.* – 1975. – Vol. 6, № 1. – P. 25–42.
119. Siciliano B. *Springer Handbook of Robotics* / B. Siciliano, O. Khatib. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 1628 p.
120. Vlasenko L. *Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications* / L. Vlasenko // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2000. – № 23. – P. 937–948.
121. Xu Shengyuan. *Robust control and filtering of singular systems* / Shengyuan Xu, J. Lam. – New York: Springer Berlin Heidelberg, 2006. – 239 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Акт внедрения результатов диссертационной работы

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

Харківського національного університету

імені В. Н. Каразіна

професор В. О. Катрич



_____ 2015 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи

«Глобальна розв'язність диференціально-алгебраїчних рівнянь та математичне моделювання динаміки нелінійних радіотехнічних кіл»
аспірантки кафедри математичного моделювання та програмного забезпечення
Філіпковської Марії Сергіївни

Комісія у складі:

голова – зав. каф. математичного моделювання та програмного забезпечення, д. фіз.-мат. н., проф. Руткас А. Г.;

члени комісії – проф. каф. математичного моделювання та програмного забезпечення, д. техн. н., проф. Власенко Л. А., заступник декана механіко-математичного факультету, к. техн. н., доцент Кабалянц П. С.

провела роботу з аналізу представлених результатів досліджень та склала цей акт про те, що результати дисертаційних досліджень Філіпковської М. С. впроваджено в навчальний процес Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна для підготовки бакалаврів та магістрів за спеціальністю «Прикладна математика». Комісія засвідчує, що при підготовці та викладанні лекційних і практичних занять з дисципліни «Математичне моделювання» та спеціального курсу «Математичні моделі з рівняннями типу Соболева» використано наступні результати дисертаційних досліджень:

- побудова та чисельний аналіз математичних моделей радіотехнічних пристроїв із нелінійними елементами та зосередженими параметрами;
- застосування методу продовження розв'язків через диференціальні нерівності з функціями типу Ляпунова та Ла-Саля для дослідження математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл та потоків у мережах;

Комісія визначає, що впровадження результатів дисертаційної роботи Філіпковської М. С. сприятиме підвищенню якості викладання і засвоєння змісту дисциплін. Результати дисертаційних досліджень також використані при підготовці курсових та дипломних робіт.

Голова комісії

А. Г. Руткас

Члени комісії

Л. А. Власенко

П. С. Кабалянц

Згідно з оригіналом

Вчений секретар спецради Д.64.052.02

Л.В. Колесник