Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПІЧУГІНА ОКСАНА СЕРГІЇВНА

УДК 519.87

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи,
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
Підпис (Пічугіна О.С.)

Науковий консультант
Яковлев Сергій Всеволодович, доктор фізико-математичних наук, професор

Цей примірник дисертаційної роботи
ідентичний за змістом з іншими, поданими
до спеціалізованої вченої ради Д64.052.02

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 — *Підпис* / *Печатка* — Л.В. Колесник

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Пічугіна О.С. Моделювання евклідових комбінаторних конфігурацій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки, Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Міністерство освіти і науки України, Харків, 2018.

Дисертацію присвячено питанню формалізації екстремальних задач комбінаторного характеру як задач оптимізації на скінченних точкових конфігураціях у евклідовому просторі. У ній представлено новий погляд на комбінаторні конфігурації як математичні об'єкти і на його основі запропоновано інноваційні підходи до моделювання цих конфігурацій і застосування в області оптимізації.

Неухильне ускладнення реальних задач, які потребують вирішення на даний час, висуває нові вимоги до їх математичного моделювання та адаптації до застосування наявного математичного апарату. Це викликає необхідність введення нових математичних об'єктів, які дозволяють формалізувати ці задачі, з огляду на їх дискретно-неперервний і екстремальний характер. Такі об'єкти, з одного боку, повинні відображати комбінаторні структури, які виділяються у цих задачах, з іншого – повинні встановлювати зв'язок між комбінаторними просторами, що виникають при цьому, і неперервними, такими, як евклідів, для того щоб весь арсенал сучасної теорії оптимізації став застосовним до розв'язання екстремальних комбінаторних задач.

Метою роботи є розробка загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, відображених у евклідів простір. Для досягнення поставленої мети в дисертації були вирішені

наступні завдання.

– аналіз підходів до відображення комбінаторних конфігурацій в евклідів простір та виділення нових математичних об'єктів – евклідових комбінаторних конфігурацій, що є результатом даного відображення;

– аналіз і класифікація екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій залежно від вигляду допустимої області та заданих на ній функцій;

– формування типології множин евклідових комбінаторних конфігурацій та дослідження алгебро-топологічних і тополого-метричних властивостей різних класів таких множин;

– аналіз і побудова аналітичних моделей множин евклідових комбінаторних конфігурацій;

– дослідження властивостей функцій, заданих на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій, включаючи пошук шляхів побудови опуклих продовжень та оцінки мінімумів функцій для спеціальних класів множин і функцій;

– побудова та дослідження математичних моделей екстремальних комбінаторних задач як оптимізаційних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій;

– розроблення методології дослідження екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій та її реалізація на модельних задачах.

Особливий клас математичних моделей екстремальних комбінаторних задач (COPs) утворюють евклідові постановки, допустимої областю яких є скінчені точкові конфігурації у евклідовому просторі. Їх перевагою є можливість застосування до їх розв'язання: властивостей евклідова простору; переходу від дискретної множини до розгляду континуальних, таких, як опукла оболонка та описана гіперповерхня; поєднання класичних методів дискретного та нелінійного програмування зі специфікою допустимої області. Евклідова постановка відома на сьогоднішній день для вузького класу комбінаторних задач, а для тих, для яких вона відома, вона визначена неоднозначно в силу дискретності допустимої області. Відповідно, з'являється вибір математичної моделі, отже, і методу розв'язання поставленої задачі.

З точки зору комплексного застосування методів дискретного і неперервного програмування, особливий інтерес представляють евклідові постановки задач комбінаторної оптимізації в алгебраїчній формі (так звані неперервні формулювання), коли допустима дискретна область аналітично зображується скінченою кількістю функціональних залежностей, формуючи таким чином її «неперервну» модель. Тому актуальним є розширення числа евклідових постановок, побудова різних їх форм, у тому числі, неперервних, порівняння ефективності розв'язання COPs у різних евклідових постановках.

У даній роботі детально розглянуто перші два аспекти для множин комбінаторних конфігурацій за К. Бержем, елементами яких є відображення скінченої множини у скінчену множину векторів однакової розмірності. Такі множини часто виникають у теоретичних і практичних областях. Так, у задачах геометричного проектування (GD) геометрична інформація про об'єкти зазвичай задається саме у такій формі. Класичні геометричні конфігурації точок та ліній на площині також представляються впорядкованими вибірками булевих векторів і т. д.

У рамках виділення комбінаторної структури в GD-задачах та пошуку їх формулювань як задач математичного програмування, що передбачають відображенні (занурення) в евклідів простір, Ю.Г. Стояном було виділено клас так званих евклідових комбінаторних множин (е-множин), що дозволяють таке занурення без втрати суті задачі. Згодом дослідження екстремальних задач на образах е-множини сформувалося в напрям «Евклідова комбінаторна оптимізація» (ECO), в якому виділяються окремі напрямки – моделювання практичних задач у формі задач ECO (ECOPs), дослідження властивостей образів комбінаторних множин, вивчення поведінки заданих на них функцій, розроблення на їх основі методів комбінаторної оптимізації. Дана робота продовжує дослідження в області ЕСО у всіх зазначених напрямках, а також у вивченні можливостей їх поєднання.

На основі аналізу сучасних проблем математичного моделювання реальних задач у формі задач ЕСО та з метою їх розв'язання було введено новий клас математичних об'єктів – евклідові комбінаторні конфігурації (е-конфігурації) – і множини е-конфігурацій ($\mathcal{C}$–множини), які об'єднують поняття конфігурацій за К. Бержем та е-множин. $\mathcal{C}$–множина представляється композицією відображень, що переводять скінчену множину довільної комбінаторної природи у скінчену точкову конфігурацію (FPC). Досліджено різні способи таких відображень як способи моделювання $\mathcal{C}$–множин, включаючи ті, що зберігають інформацію про усі параметри конфігурацій.

Виділено основні характеристики $\mathcal{C}$–множин – індукуюча мультимножина (IM), твірна множина (GS) та розмірність простору n, в якому їх задано. Дослідження впливу комбінації IM/GS/n на властивості $\mathcal{C}$–множин покладено в основу першого напряму дослідження $\mathcal{C}$–множин – структурного аналізу (C-A). Другим напрямком є вивчення алгебро-топологічних і тополого-метричних властивостей $\mathcal{C}$–множин і пов'язаних з ними об'єктів, таких, як $\mathcal{C}$–многогранник і $\mathcal{C}$–граф (геометричний аналіз, G-A).

Представлено вичерпну типологію $\mathcal{C}$–множин, що ґрунтується на C-A, виділено основні комбінаторні типи (T) е-конфігурацій, що потребують різних підходів до моделювання. Серед них, е-конфігурації перестановок, перестановок зі знаком та розміщень. Крім цього, представлені їх узагальнення – е-конфігурацій поліперестановок і полірозміщень, перестановок та розміщень векторів, а також спеціальні класи – е-конфігурації з повтореннями і без повторень, булеві, трійкові, парні і т.п. З числа $\mathcal{C}$–множин, виділено клас базових ($\mathcal{C}_b$–множини), що володіють найбільш вираженою комбінаторною структурою серед $\mathcal{C}$–множин, заданих параметрами IM/GS/n/T, і тому дозволяють моделювання в термінах лише цих параметрів.

Запропоновано типологію $\mathcal{C}$–множин на основі їх G-A, ключовим фактором якої є встановлення зв'язку між $\mathcal{C}$–множиною як FPC, її опуклою оболонкою та описаними строго опуклими поверхнями. Зокрема, виділено класи вершинно- (VLSs), поверхнево розташованих (SLSs), поліедрально-поверхневих (PSSs) та багаторівневих $\mathcal{C}$–множин, а також встановлено взаємозв'язок між ними. Виділення VLS-класу та акцент на його дослідженні пов'язані з їх специфічними властивостями, зокрема, з можливістю застосування теорії опуклих продовжень (ОП) функцій, заданих на VLSs. Серед PSSs, особливе уваге приділено поліедрально-сферичним $\mathcal{C}$–множинам (PSpSs) як таким, що характеризуються специфікою при розв'язанні ECOPs на них.

Досліджено питання моделювання $\mathcal{C}_b$–множин за допомогою розбиття, теоретико-множинних операцій та лінійних перетворень над іншими $\mathcal{C}_b$–множинами. Так, у рамках вивчення питання моделювання цих множин як об'єднання інших $\mathcal{C}_b$–множин, запропоновано типологію способів їх декомпозицій залежно від мети моделювання та викладено загальні підходи до декомпозиції $\mathcal{C}$–множин на базі C-A і G-A. Здійснено C-A шляхів розбиття e-множин на класи еквівалентності за їх комбінаторною ізоморфністю. Досліджено властивості класів PSpSs та VLSs, а також запропоновано шляхи зведення дослідження будь-якої FPC до розгляду VLS, зокрема PSpS.

Як основний метод моделювання $\mathcal{C}$–множин було обрано їх представлення як $\mathcal{C}$–множин з додатковими функціональними обмеженнями або як результат теоретико-множинних операцій над іншими $\mathcal{C}$–множинами. Тому дослідженню властивостей виділених класів $\mathcal{C}_b$—множин та екстремальних властивостей функцій, заданих на цих множинах, приділено особливу увагу. Було поставлено ряд G-A-задач на $\mathcal{C}$–множинах і розв'язано їх для класів, введених вперше. Крім цього, було узагальнено і розвинуто результати даного напрямку для розглянутих раніше образів e-множин. Зокрема, було розглянуто задачу побудови H-представлень $\mathcal{C}$–многогранників та пошуку описаних сильно опуклих поверхонь, що є складовими поліедральних-поверхневих представлень (PSRs) $\mathcal{C}$–множин. У рамках дослідження екстремальних властивостей функцій, заданих на $\mathcal{C}$–множинах, було досліджено поведінку кількох класів функцій, таких, як лінійні, квадратичні, опуклі. Крім цього, буда адаптована до $\mathcal{C}$–множин та отримала подальший розвиток теорія оцінок мінімумів функцій.

Досліджено способи моделювання $\mathcal{C}$–множин у аналітичній формі в термінах декартових координат. З цією метою введено поняття неперервного функціонального представлення (f-представлення) $\mathcal{C}$–множини як її зображення системою функціональних залежностей. Представлено типологію f-представлень залежно від кількості та вигляду складових обмежень. Зокрема, виділено клас строгих f-представлень (SRs), які описують ці множини системами рівнянь; нестрогих f-представлень, в якому присутні тільки нерівності; та змішаних (MRs). За допомогою апарату дійсної алгебраїчної геометрії, узагальненого з кільця поліномів на кільце неперервних функцій, сформульовано основні методи побудови f-представлень $\mathcal{C}$–множин і їх еквівалентних перетворень з акцентом на тих, що ґрунтуються на C-A і G-A. Серед незвідних SRs, акцент зроблено на двох класах – n-компонентних (пересічні, ISRs) та опуклих двокомпонентних (дотичні f-представлення, TSRs), серед MRs – на PSRs. Інтерес до ISRs викликаний можливістю їх побудови на основі C-A. TSRs цікаві тим, що вони містять мінімальну кількість обмежень для визначення дискретної множини за допомогою обмежень-рівностей, заданих опуклими функціями. Для зображення VLSs PSRs привабливі тим, що породжують два типи релаксацій – поліедральну та поверхневу, комбінація яких дозволяє формувати ефективні методи розв'язання ECOps. Для введених класів $\mathcal{C}$–множин побудовано ряд f-представлень, зокрема, ISRs, TSRs та PSRs, і проведено їх порівняльний аналіз.

Отримала подальший розвиток теорія ОП у таких напрямках – дослідження умов існування ОП, введення нових класів продовжень функцій, узагальнення існуючих і пошук нових конструктивних способів побудови

ОП, що ґрунтуються на C-A і G-A, виділення класів функцій, для яких ОП будуються в явному вигляді. Зокрема, запропоновано загальну методологію побудови ОП квадратичних функцій з PSpSs. Для класу $\mathcal{C}_b$–множин перестановок встановлено існування ОП поліномів у формі позіномів.

Встановлено зв'язок різних класів продовжень функцій з f-представленнями $\mathcal{C}$–множин. Отримані результати застосовані до математичного моделювання COPs як задач ECOPs. Так, побудовано гнучку математичну модель, що включає різні комбінацій між прямими та функціональними обмеженнями, а також між залученими у ній $\mathcal{C}$–множинами. Це дозволило застосування до розв'язання ECOPs на виділених класах $\mathcal{C}$–множин, крім класичного апарату дискретного програмування, методів нелінійної оптимізації, а також спеціальних підходів, які використовують встановлені властивості $\mathcal{C}$–множин. Теорія ОП застосована у виробленні загальної концепції використання методів опуклої оптимізації до розв'язання COPs. Продемонстровано широку застосовність отриманих результатів побудови SRs і PSpSs у формуванні продовжень функцій з $\mathcal{C}$–множин та оптимізації на них.

Застосовність отриманих результатів до моделювання задач практичного та теоретичного змісту показано на прикладі: задачі розміщення об'єктів, заданих однаковим числом метричних характеристик, ряді задач теорії графів, а також SAT-задачі. Також деякі з відомих раніше евклідових постановок задач на образах e-множин переформульовано в термінах екстремальних задач на $\mathcal{C}$– та $\mathcal{C}_b$–множинах. У сукупності з можливістю вибору математичних моделей $\mathcal{C}_b$–множин з числа побудованих та запропонованих способів продовжень з них, це дозволило суттєво розширити сферу застосування різних оптимізаційних методів, як класичних, так і спеціальних, відповідно, свідчити про поліпшення результатів для відомих класів ECOPs та можливість розв'язання деяких нових класів задач комбінаторної оптимізації. За результатами проведеного дослідження формалізовано загальну методологію вивчення та розв'язання COPs через еквівалентні ECOPs.

Ключові слова: комбінаторна конфігурація, евклідова комбінаторна конфігурація, перестановка, розміщення, екстремальна комбінаторна задача, евклідова комбінаторна множина, евклідова комбінаторна оптимізація, опукле продовження, неперервне функціональне представлення, комбінаторний багатогранник, поліедрально-поверхнева множина, декомпозиція, релаксація.

Список публікацій здобувача

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації

Монографії

1. Пичугина О. Брус А. Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников: Классификация. Применение в оптимизации и теории геометрических графов: монография. Saarbriicken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 144 с. ISBN: 978-3-659-64672-0.

2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков: Константа, 2017. 404 с. ISBN: 978-966-342391-3.

3. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография. Харьков: Золотая миля, 2018. 312 с. ISBN: 978-966-1685-72-6.

Статті

4. Валуйская О.А., Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 2. С. 121-129.

5. Валуйська О. О., Ємець О. О., Пічугіна О. С. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 4. С. 94-101. [Входить до міжнародних наукометричних баз zbMath, Google Scholar].

6. Пічугіна О. С. Математичне моделювання практичних задач у вигляді лінійних задач на переставленнях та їх розв'язання із застосуванням властивостей комбінаторних многогранників // Математические машины и системы. 2007. Т. 1. № 3. С. 185-195.

7. Пічугіна О. С. Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимізації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2010. № 4. С. 176-189.

8. Pichugina O. S., Yakovlev S. V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. no. 6. P. 921-930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMath, WorldCat, Google Scholar].

9. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. Cham : Springer, 2016. P. 689-700. DOI: 10.1007/978-3-319-30379-6_62 [Входить до міжнародних наукометричних баз AMS Mathscinet, Springer Link, zbMATH, CrossRef, WorldCat, Google Scholar].

10. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. 2016. Vol. 4. no. 2. P. 129-152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103 [Входить до міжнародних наукометричних баз Web of Science, CrossRef, Ingenta Connect, WorldCat, Index Copernicus].

11. Pichugina O. Combinatorial approaches to the capital-budgeting problem // Econtechmod : an international quarterly journal on economics of technology and modelling processes. 2016. Vol. 5. no. 4. P. 29-36. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, Yadda].

12. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2016. Т. 79. № 1. С. 27-38. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, ResearchBib, WorldCat, Google Scholar].

13. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах Евклидовой комбинаторной оптимизации // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 144-160.

14. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика. 2016. № 1. С. 143-154.

15. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization // IOSR Journal of Mathematics. 2017. Vol. 13. no. 2. P. 12-25. DOI: 10.9790/5728-1302051225 [Входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, CrossRef, Google Scholar].

16. Пичугина О. С. Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Системні дослідження та інформаційні технології. 2017. № 4. С. 74-96. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.07 [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, WorldCat, Google Scholar].

17. Яковлев С. В., Пичугина О. С. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Питання прикладної математики і математичного моделювання. 2017. № 17. С. 258-264.

18. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. № 15. С. 152-158.

19. Пічугіна О. С., Колєчкіна Л. М. Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129-144.

20. Yakovlev S. V., Pichugina O. S. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. no. 1. C. 99-109. DOI: 10.1007/s10559-018-0011-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMATH, WorldCat, Google Scholar].

21. Farzad B., Pichugina O., Koliechkina L. Multi-Layer Networks: Origin, Community Detection, Applications // International Journal of Computers. Vol. 12. P. 92-104. 2018. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, NSD].

22. Пичугина О. С. Математическое моделирование комбинаторных конфигураций и применение в задачах оптимизации // Математичні машини і системи. № 1. С. 123-1374, 2018.

23. Пичугина О. С. Функционально-аналитические представления множеств евклидовых комбинаторных конфигураций в задачах оптимизации // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1. С. 1-9.

24. Пичугина О. С. Полиэдрально-сферические конфигурации: особенности и применение // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. № 17. С. 90-107.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації

Статті

25. Валуйская О. А., Пичугина О. С. Линейная условная и параметрическая оптимизация на евклидовых комбинаторных множествах и ее применение в экономике // Вісник Харківського державного політехнічного університету. 2000. № 92. С. 15-18.

26. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень поліномів на комбінаторних множинах // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. 2010. Т. 1. № 2. С. 141-150.

[Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, DOAJ].

27. Пічугіна О. С. Комбінаторні підходи до розв'язання задачі мінімізації часу виконання програмного пакету // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2010. № 7. С. 121-126.

28. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Задача розташування прямокутних модулів на чіпі та поліедральний підхід до її розв'язання // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2012. № 7. С. 135-141.

29. Pichugina O. S., Kolechkina L. N. On a diet menu modelling // Information technologies in economy research. 2016. № 2. С. 44-49.

30. Пичугина О. С. Одно обобщение гиперкуб-топологии сети передачи данных // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2016. Т. 80. № 6. С. 214-221. [Входить до міжнародних бібліометричних і наукометричних баз даних: Index Copernicus, Google Scholar, ICiteFactor, Infobase Index].

31. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2016. № 1. С. 18-26. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, OAJI, Scholar Steer, CiteFactor, I2OR].

32. Пичугина О. С. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций: проблемы и перспективы // Science Review. 2018. Т. 1. № 2. С. 10-15. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar].

33. Пичугина О. С. Выпуклые продолжения функций на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций // Scientific pages. 2018. № 13. С. 8-18. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, GIF, ResearcBib].

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

34. Пичугина О.С. Алгоритм построения выпуклого продолжения поли-

номов на полиперестановках и сфера его применения // Problems of Computer Intellectualization. 2012. С. 125-132.

35. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на одному класі розміщень та його застосування // Матеріали одинадцятого міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кіровоград: КНТУ, 2011. С. 138-146.

36. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Програмна реалізація однієї задачі розташування прямокутних модулів на чіпі // Збірник наукових праць за матеріалами V Всеукраїнського науково-практичного форуму установ НАН України та ВНЗ України. Полтава: ПНТУ, 2012. С. 90-95.

37. Пичугина О. С., Прохоренко А. Ю. Новые подходы к ортогональному проектированию в полиэдрально-сферической оптимизации на комбинаторных множествах // Материалы 4-ой международной научной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». Т. 2. Кишинеу: Эврика, 2014. С. 378-386.

38. Pichugina O. S, Farzad B. Human Communication Network Model // ICT in Education, Research and Industrial Applications. Kiev: http://ceur-ws.org. 2016. P. 33-40. [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Semantic Scholar, dblp, Google Scholar].

39. Пичугина О. С. Обобщенная задача построения функциональных представлений и продолжений с них и ее применение в оптимизации // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації". Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 285-290.

40. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv: KPI, 2017. P. 1167-1174. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100436 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google

Scholar].

41. Pichugina O. Placement problems in chip design: Modeling and optimization // 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). Kharkiv: KNURE, 2017. P. 465-473. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246440 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

42. Пічугіна О. С. Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції. Івано-Франківськ: п. Голіней О. М., 2017. С. 445-451.

43. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On Optimization Problems on the Polyhedral-Spherical Configurations with their Properties // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC). Kyiv: KPI, 2018. P. 94-100. DOI: 10.1109/SAIC.2018.8516801 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, IEEE Xplore, WorldCat, Google Scholar].

44. Пічугіна О. С. Комбинаторные конфигурации: подходы к моделированию и применение // Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кропивницький: ЛА НАУ, 2018. С. 138-146.

45. Пічугіна О. С. Методи декомпозиції множин евклідових комбінаторних конфігурацій і застосування у оптимізації // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XXXIII международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире» г. Киева. 2018. № 6 (31). С. 60-75.

46. Пічугіна О. С. Неперервні формулювання задач комбінаторної оптимізації // Матеріали 7-ої міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)». Харків-Коблево: ХНУРЕ, 2018. С. 123-127.

SUMMARY

Pichugina O.S. Modeling of Euclidean combinatorial configurations. – Qualification scientific study with manuscript copyright.

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science in Physics and Mathematics in specialty 01.05.02 – mathematical modelling and numerical methods. – Kharkiv National University of Radioelectronics, National Aerospace University named after N. E. Zhukovsky "Kharkiv Aviation Institute Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The thesis is dedicated to a formalization of extreme problems of a combinatorial nature as optimization problems on finite point configurations in Euclidean space. It presents a new perspective on combinatorial configurations as mathematical objects underlying innovative approaches to modeling the configurations and their applications in optimization.

The steady increase in complexity of the modern real-world problems that need solving today puts forward the new requirements for their mathematical modeling and adaptation for the application of existing mathematical tools. This necessitates the introduction of new mathematical objects, allowing formalization of these problems, given their discrete-continuous and extreme nature. Such objects, on the one hand, should reflect the combinatorial structures that can be singled out in these problems, and on the other hand, should establish a connection between the combinatorial spaces arising in this case and the continuous spaces, such as Euclidean, in order to make the whole arsenal of contemporary theoretical optimization tools applicable to solving the extreme combinatorial problems.

The goal of this work is to develop a general methodology for studying extreme problems on combinatorial configuration sets mapped into Euclidean space. To achieve this goal, the following tasks were solved in the thesis:

– analysis of approaches to the mapping of combinatorial configurations

into Euclidean space and singling out new mathematical objects – Euclidean combinatorial configurations – as a result of this mapping;

– analysis and classification of extreme problems on Euclidean combinatorial configurations' sets depending on their admissible domain type and functions given on it;

– typology formation of Euclidean combinatorial configurations' of sets and the study of algebraic topological and metric topological properties of different classes of the sets;

– analysis and construction of analytic models of Euclidean combinatorial configurations sets;

– investigating properties of functions given on Euclidean combinatorial configurations' sets including a search for approaches to constructing convex extensions and estimates of functions' minima for special classes of the sets and functions;

– construction and study of mathematical models of extreme combinatorial problems as optimization problems on Euclidean combinatorial configurations' sets and their exploring;

– the development of a methodology for investigating extreme problems on sets of Euclidean combinatorial configurations and its implementation for test problems.

A special class of mathematical models of extreme combinatorial problems (COPs) is a collection of their Euclidean statements, where an admissible domain is a finite point configuration in Euclidean space. Their advantage is the possibility of applying to their solving: properties of Euclidean space; a transition from a discrete set to considering continual ones, such as a convex hull or a circumsurface; combining discrete and nonlinear optimization techniques with properties of the admissible domain. By now, a Euclidean formulation is known for a narrow class of combinatorial problems, and for those for which it is available, such a formulation is defined ambiguously due to the discreteness of the domain.

Respectively, there is a choice of the mathematical model and, therefore, there is an alternative of methods to solve the optimization problem.

Regarding combining discrete and continuous optimization methods, Euclidean formulations of extreme combinatorial problems in algebraic form (continuous formulations) are of particular interest, where the admissible discrete domain is described by a finite set of functional dependencies, thereby generating its "continuous" model. Therefore, it is relevant to expand the class of Euclidean statements; to construct their various forms, including continuous ones; to compare the efficiency of solutions of COPs depending on the Euclidean statement form chosen.

In this work, we consider in detail the first two aspects for sets of combinatorial configurations according to C. Berge, whose elements are mappings of a finite set into a finite set of vectors of the same dimension. Such sets often arise in theoretical and practical areas. For instance, in problems of Geometric Design (GD), geometric information on objects is often given in this form; classic geometric configurations on a plane are represented by ordered samples of Boolean vectors, etc.

In the scope of detecting combinatorial structure in GD-problems and a search for their formulations as problems of mathematical programming, a class of so-called Euclidean combinatorial sets (e-sets) was singled out by Yu. G. Stoyan, allowing their immersion into the Euclidean space without losing the problem essence. Study of extreme problems on e-sets' images resulted in the formation of a new area of combinatorial optimization called Euclidean combinatorial optimization (ECO). In ECO, some directions are singled out, such as modeling combinatorial problems in the form of ECO-problems, investigating properties of the images, studying the behavior of functions defined on them, developing methods of combinatorial optimization based on results of the study.

Based on the analysis of modern problems of mathematical modeling of real problems in the form of ECO-problems and in order to solve them, a new class of mathematical objects, called Euclidean combinatorial configurations (e-configurations), as well as e-configuration sets ($\mathcal{C}$–sets), ware introduced, which combine the concepts of Berge's configurations and e-sets. A $\mathcal{C}$–set is represented by a composition of mappings transforming a finite set of arbitrary combinatorial nature into a finite point configuration (FPC). Various methods of the mappings as approaches to modeling $\mathcal{C}$–sets are studies, including those that keep information about all parameters Berge's configurations.

The following main characteristics of $\mathcal{C}$–sets are identified: an inducing multiset (IM), a generating set (GS), and the dimension of the space n, where they are given. The study of an effect of an IM/GS/n-combination on properties of $\mathcal{C}$–sets underlies the first direction of $\mathcal{C}$–sets' study called a constructive analysis (C-A). The second one is investigating algebraic topological and metric topological properties of $\mathcal{C}$–sets and related objects, such as a $\mathcal{C}$–polytope and a $\mathcal{C}$–graph called a geometric analysis (G-A).

An exhaustive typology of $\mathcal{C}$–sets based on C-A is presented. Main combinatorial types (T) of e-configurations that require different approaches to modeling are singled out. Among them, e-configurations of permutations, signed permutations, and partial permutations. Besides, their generalizations are presented, such as e-configurations of polypermutations and polypartial permutations, permutations and partial permutations of vectors, as well as their special classes, e.g., e-configurations with and without repetitions, Boolean, ternary, even e-configurations, etc. Among $\mathcal{C}$–sets, a class of basic $\mathcal{C}$–sets ($\mathcal{C}_b$-sets) was singled out. It has the most identified combinatorial structure among $\mathcal{C}$–sets with given parameters IM/GS/n/T. Therefore, it allows modeling in terms of these parameters only.

A typology of $\mathcal{C}$–sets based on their G-A is proposed, which key factor is establishing a connection between a $\mathcal{C}$–set as an FPC, its convex hull, and strictly convex circumsurfaces. In particular, classes of vertex- (VLSs), surface-located, polyhedral-surfaced (PSSs), and multi-level $\mathcal{C}$–sets are singled out, and their interconnection is established. The selection of the VLS-class and emphasis on its study is caused by specific properties of VLSs, such as the possibility of applying the theory of convex extensions (CE) of functions defined on such sets. Among the PSSs, special attention is paid to polyhedral-spherical $\mathcal{C}$–sets (PSpSs) due to their specifics in solving COPs on them.

An issue of modeling $\mathcal{C}_b$-sets by partitions, set-theoretic operations, and linear transformations over other $\mathcal{C}_b$-sets is investigated. In the scope of studying an issue of modeling these sets as a union of other $\mathcal{C}_b$-sets, a typology of decomposition methods depending on a purpose of modeling, as well as some general approaches to the decomposition based on C-A and G-A are offered. C-A of ways for partitioning $\mathcal{C}_b$-sets into equivalence classes in terms of their combinatorial isomorphism was conducted. Properties of PSpSs and VLSs are explored, and ways of converting exploring an arbitrary FPC to the consideration of PSpSs and VLSs are offered.

As primary methods of mathematical modeling of $\mathcal{C}$–sets, their representation as $\mathcal{C}_b$-sets subject to additional functional constraints or as a result of set-theoretic operations over other $\mathcal{C}_b$-sets are chosen. Therefore, special attention is paid to the study of peculiarities of the introduced $\mathcal{C}_b$-sets' classes and extreme properties of functions defined on them. A number of problems to study the algebraic topological and metric topological properties of $\mathcal{C}_b$-sets are posed. These problems are solved for the introduced $\mathcal{C}_b$-sets' classes and the relevant results for known e-sets' images were generalized and further developed. In particular, a problem of constructing compact H-representations of $\mathcal{C}_b$-polytopes was considered, including extended ones, and a search for the strongly convex circumsurfaces. They are both form a basis of polyhedral-surfaced representations (PSRs) of $\mathcal{C}_b$-sets. In the scope of a study of extreme properties of functions defined on $\mathcal{C}_b$-sets, the behavior of some classes of function such as linear, quadratic, convex, were investigated. Besides, the theory of minima estimates was adapted to $\mathcal{C}$-sets and further developed.

Approaches to modeling $\mathcal{C}_b$-sets in analytic form and terms of Cartesian coordinates are investigated. For this purpose, a concept of a continuous functional representation (an f-representation) of a $\mathcal{C}$–set as its representation in the form of a nonlinear system of constraints is introduced. A typology of f-representations depending on the number and type of constraints involved is offered. In particular, classes of strict f-representations (SRs) defining $\mathcal{C}$–sets by systems of equations; non-strict f-representations where only inequalities are involved; and mixed (MRs) are distinguished. With the help of tools of real algebraic geometry, generalized to a set of continuous functions, methods of constructing f-representations and their transformations are developed, both for $\mathcal{C}$-sets and for particular classes of $\mathcal{C}_b$-sets. Among SRs, the emphasis is made on two classes – intersecting (ISRs) and tangent (TRs), various methods for constructing them are offered, and a connection between them is established. Interest in ISRs is due to the possibility of their construction by IM/GS/n/T-analysis (IM/GS/n/T-A). Interest in TRs is due to the fact that the representations contain the minimum number of constraints for defining a discrete set by equality constraints given by convex functions. For the introduced classes of $\mathcal{C}_b$-sets, various f-representations were constructed, such as ISRs, TRs, PSs, and their comparative analysis was performed.

The theory of CEs was further developed in the following directions: a study of conditions on existence of CEs; an introduction of new classes of functions' extensions; the generalization of existing and a search for new constructive methods of forming CEs based on C-A; single outing classes of functions and extension domain types for which CEs are built explicitly. In particular, a general methodology for constructing CEs of quadratic functions from PSpSs is presented. For the class of $\mathcal{C}_b$-sets of permutations, the existence of a CE for polynomials in the form of posynomials is established.

An interconnection of various classes of functions' extensions from $\mathcal{C}$–sets and f-representations of the sets is established. The results of the study are applied to mathematical modeling of COPs as ECO-problems, e.g., a flexible mathematical model, including various variations between direct and functional constraints, as well as $\mathcal{C}_b$-sets involved in it, was built which allows using discrete programming techniques and nonlinear optimization methods, as well as special approaches that utilize the derived properties of $\mathcal{C}_b$-sets. CE theory is applied in the development of a general concept of applying convex optimization methods to solve COPs. The wide applicability of the results of constructing SRs and PSpSs in a formation of extensions of functions from the corresponding $\mathcal{C}$–sets and optimization on them is demonstrated.

The applicability of the study results for modeling problems from practical and theoretical domains is shown for examples of a layout problem for objects given by the same number of metric characteristics, some Graph Theory problems, as well as for the SAT problem. Besides, some of the known Euclidean statements of problems on images of e-sets are reformulated in terms of ECO-problems on $\mathcal{C}$–and $\mathcal{C}_b$-sets. Combined with the possibility of choosing a mathematical model of $\mathcal{C}_b$-sets from a list of the models constructed with the offered ways of functions extending from them, this significantly expands the scope of applications of various optimization methods, both classical and specific. Respectively, this allows expecting improving results for well-known classes of COPs as well as providing a possibility of solving new classes of such problems. Based on the results of the research, the general methodology for study and solving COPs with the help of ECOPs was formalized.

Key words: combinatorial configuration, Euclidean combinatorial configuration, permutation, partial permutation, extreme combinatorial problem, Euclidean combinatorial set, Euclidean combinatorial optimization, convex extension, continuous functional representation, combinatorial polytope, polyhedral-surfaced set, decomposition, relaxation.

List of applicant's published works

Published works with the main thesis' results:

Monographs:

1. Пичугина О. Брус А. Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников: Классификация. Применение в оптимизации и теории геометрических графов: монография. Saarbriicken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 144 с. ISBN: 978-3-659-64672-0.

2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков: Константа, 2017. 404 с. ISBN: 978-966-342391-3.

3. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография. Харьков: Золотая миля, 2018. 312 с. ISBN: 978-966-1685-72-6.

Research Papers

4. Валуйская О.А., Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 2. С. 121-129.

5. Валуйська О. О., Ємець О. О., Пічугіна О. С. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 4. С. 94-101. [Входить до міжнародних наукометричних баз zbMath, Google Scholar].

6. Пічугіна О. С. Математичне моделювання практичних задач у вигляді лінійних задач на переставленнях та їх розв'язання із застосуванням властивостей комбінаторних многогранників // Математические машины и системы. 2007. Т. 1. № 3. С. 185-195.

7. Пічугіна О. С. Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимiза-

ції // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2010. № 4. С. 176-189.

8. Pichugina O. S., Yakovlev S. V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. no. 6. P. 921-930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMath, WorldCat, Google Scholar].

9. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. Cham : Springer, 2016. P. 689-700. DOI: 10.1007/978-3-319-30379-6_62 [Входить до міжнародних наукометричних баз AMS Mathscinet, Springer Link, zbMATH, CrossRef, WorldCat, Google Scholar].

10. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. 2016. Vol. 4. no. 2. P. 129-152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103 [Входить до міжнародних наукометричних баз Web of Science, CrossRef, Ingenta Connect, WorldCat, Index Copernicus].

11. Pichugina O. Combinatorial approaches to the capital-budgeting problem // Econtechmod : an international quarterly journal on economics of technology and modelling processes. 2016. Vol. 5. no. 4. P. 29-36. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, Yadda].

12. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2016. Т. 79. № 1. С. 27-38. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, ResearchBib, WorldCat, Google Scholar].

13. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в зада-

чах Евклидовой комбинаторной оптимизации // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 144-160.

14. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика. 2016. № 1. С. 143-154.

15. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization // IOSR Journal of Mathematics. 2017. Vol. 13. no. 2. P. 12-25. DOI: 10.9790/5728-1302051225 [Входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, CrossRef, Google Scholar].

16. Пичугина О. С. Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Системні дослідження та інформаційні технології. 2017. № 4. С. 74-96. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.07 [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, WorldCat, Google Scholar].

17. Яковлев С. В., Пичугина О. С. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Питання прикладної математики і математичного моделювання. 2017. № 17. С. 258-264.

18. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. № 15. С. 152-158.

19. Пічугіна О. С., Колєчкіна Л. М. Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129-144.

20. Yakovlev S. V., Pichugina O. S. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. no. 1. C. 99-109. DOI: 10.1007/s10559-018-0011-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMATH, WorldCat, Google Scholar].

21. Farzad B., Pichugina O., Koliechkina L. Multi-Layer Networks: Origin, Community Detection, Applications // International Journal of Computers. Vol. 12. P. 92-104. 2018. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, NSD].

22. Пичугина О. С. Математическое моделирование комбинаторных конфигураций и применение в задачах оптимизации // Математичні машини і системи. № 1. С. 123-1374, 2018.

23. Пичугина О. С. Функционально-аналитические представления множеств евклидовых комбинаторных конфигураций в задачах оптимизации // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1. С. 1-9.

24. Пичугина О. С. Полиэдрально-сферические конфигурации: особенности и применение // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. № 17. С. 90-107.

Published works with the auxilliary thesis' results:

Research Papers

25. Валуйская О. А., Пичугина О. С. Линейная условная и параметрическая оптимизация на евклидовых комбинаторных множествах и ее применение в экономике // Вісник Харківського державного політехнічного університету. 2000. № 92. С. 15-18.

26. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень поліномів на комбінаторних множинах // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. 2010. Т. 1. № 2. С. 141-150. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, DOAJ].

27. Пічугіна О. С. Комбінаторні підходи до розв'язання задачі мінімізації часу виконання програмного пакету // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2010. № 7. С. 121-126.

28. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Задача розташування прямокутних

модулів на чіпі та поліедральний підхід до її розв'язання // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2012. № 7. С. 135-141.

29. Pichugina O. S., Kolechkina L. N. On a diet menu modelling // Information technologies in economy research. 2016. № 2. С. 44-49.

30. Пичугина О. С. Одно обобщение гиперкуб-топологии сети передачи данных // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2016. Т. 80. № 6. С. 214-221. [Входить до міжнародних бібліометричних і наукометричних баз даних: Index Copernicus, Google Scholar, ICiteFactor, Infobase Index].

31. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2016. № 1. С. 18-26. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, OAJI, Scholar Steer, CiteFactor, I2OR].

32. Пичугина О. С. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций: проблемы и перспективы // Science Review. 2018. Т. 1. № 2. С. 10-15. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar].

33. Пичугина О. С. Выпуклые продолжения функций на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций // Scientific pages. 2018. № 13. С. 8-18. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, GIF, ResearcBib].

Published works that provide evidence of thesis' approbation:

34. Пичугина О.С. Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения // Problems of Computer Intellectualization. 2012. С. 125-132.

35. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на одному класі розміщень та його застосування // Матеріали одинадцятого міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні

конфігурації та їх застосування». Кіровоград: КНТУ, 2011. С. 138-146.

36. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Програмна реалізація однієї задачі розташування прямокутних модулів на чіпі // Збірник наукових праць за матеріалами V Всеукраїнського науково-практичного форуму установ НАН України та ВНЗ України. Полтава: ПНТУ, 2012. С. 90-95.

37. Пичугина О. С., Прохоренко А. Ю. Новые подходы к ортогональному проектированию в полиэдрально-сферической оптимизации на комбинаторных множествах // Материалы 4-ой международной научной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». Т. 2. Кишинеу: Эврика, 2014. С. 378-386.

38. Pichugina O. S, Farzad B. Human Communication Network Model // ICT in Education, Research and Industrial Applications. Kiev: http://ceur-ws.org. 2016. P. 33-40. [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Semantic Scholar, dblp, Google Scholar].

39. Пичугина О. С. Обобщенная задача построения функциональных представлений и продолжений с них и ее применение в оптимизации // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації". Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 285-290.

40. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv: KPI, 2017. P. 1167-1174. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100436 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

41. Pichugina O. Placement problems in chip design: Modeling and optimization // 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). Kharkiv: KNURE, 2017. P. 465-473. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246440 [Входить до між-

народних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

42. Пічугіна О. С. Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції. Івано-Франківськ: п. Голіней О. М., 2017. С. 445-451.

43. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On Optimization Problems on the Polyhedral-Spherical Configurations with their Properties // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC). Kyiv: KPI, 2018. P. 94-100. DOI: 10.1109/SAIC.2018.8516801 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, IEEE Xplore, WorldCat, Google Scholar].

44. Пічугіна О. С. Комбинаторные конфигурации: подходы к моделированию и применение // Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кропивницький: ЛА НАУ, 2018. С. 138-146.

45. Пічугіна О. С. Методи декомпозиції множин евклідових комбінаторних конфігурацій і застосування у оптимізації // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XXXIII международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире» г. Киева. 2018. № 6 (31). С. 60-75.

46. Пічугіна О. С. Неперервні формулювання задач комбінаторної оптимізації // Матеріали 7-ої міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)». Харків-Коблево: ХНУРЕ, 2018. С. 123-127.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Суттєве ускладнення реальних задач, що потребують вирішення на даний момент, висувають нові вимоги до їх математичного моделювання і адаптації до застосування наявного математичного апарату. Це викликає необхідність введення нових математичних об'єктів, які б дозволили формалізувати ці задачі, враховуючи їх дискретно-неперервний та екстремальний характер. Такі об'єкти, з одного боку, мають відображати комбінаторні структури, що виділяються в задачах, а з іншого, – мають сполучати комбінаторні простори, що при цьому виникають, з неперервними, такими, як евклідів простір, для того, щоб весь арсенал сучасної теорії оптимізації став застосовним до розв'язання поставлених задач.

Так, класичними математичними об'єктами, що подають комбінаторні структури у формі відображень, є конфігурації за К. Бержем. Крім цього, в рамках виділення комбінаторної структури в задачах геометричного проектування свого часу Ю. Г. Стояном були введені евклідові комбінаторні множини (e-множини) як математичні об'єкти, розв'язання екстремальних задач на яких можливе шляхом оптимізації на образах e-множин у евклідовому просторі. Згодом дослідження екстремальних комбінаторних задач на образах e-множин виділилася у напрямок «евклідова комбінаторна оптимізація» (Euclidean combinatorial optimization, ECO), яка займається комплексним дослідженням властивостей образів e-множин, заданих на них функцій, розробленням на їх основі методів оптимізації та проблемами моделювання реальних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Таким чином, для вирішення проблем моделювання екстремальних комбінаторних задач як задач оптимізації актуальним є введення нових математичних об'єктів, що поєднують конфігурації за К. Бержем з e-множинами, а також пошук нових інструментальних засобів розв'язання цих задач методами нелінійної, зокрема дискретної, оптимізації. Тому важливим є як подальший розвиток евклідової комбінаторної оптимізації у зазначених напрямках, так і поєднання її з класичною теорією оптимізації. Все це приводить до необхідності вирішення актуальної проблеми розроблення загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, відображених у евклідів простір.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є математичне моделювання комбінаторних конфігурацій при їх відображеннях у евклідів простір та дослідження екстремальних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Досягнення мети роботи пов'язано із постановкою та розв'язанням таких задач:

– аналіз підходів до відображення комбінаторних конфігурацій в евклідів простір та виділення нових математичних об'єктів – евклідових комбінаторних конфігурацій, що є результатом даного відображення;

– аналіз і класифікація екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій залежно від вигляду допустимої області та заданих на ній функцій;

– формування типології множин евклідових комбінаторних конфігурацій та дослідження алгебро-топологічних і тополого-метричних властивостей різних класів таких множин;

– аналіз і побудова аналітичних моделей множин евклідових комбінаторних конфігурацій;

– дослідження властивостей функцій, заданих на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій, включаючи пошук шляхів побудови опуклих продовжень та оцінки мінімумів функцій для спеціальних класів множин і функцій;

– побудова та дослідження математичних моделей екстремальних комбінаторних задач як оптимізаційних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій;

– розроблення методології дослідження екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій та її реалізація на модельних задачах.

Методи дослідження. У роботі використані методи комбінаторного аналізу, моделювання, теорії множин, функціонального аналізу (для формалізації понять е конфігурацій і $\mathcal{C}$-множин та їх дослідження), методи декомпозиції, комбінаторного аналізу, моделювання, теорії множин (для проведення структурного аналізу $\mathcal{C}$-множин), методи евклідової і афінної геометрії, декомпозиції, поліедральної комбінаторики (для здійснення геометричного аналізу $\mathcal{C}$-множин), методи алгебраїчної геометрії, алгебраїчної комбінаторики, загальної алгебри, евклідової комбінаторної оптимізації, функціонального аналізу (для викладення теорії f-представлень), методи комбінаторного і функціонального аналізу, опуклого програмування, теорії алгоритмів (для дослідження поведінки функцій на $\mathcal{C}$-множинах, формалізації положень із розвитку теорії опуклих продовжень функцій), методи моделювання, функціонального аналізу, евклідової комбінаторної оптимізації, нелінійного, зокрема опуклого та дискретного, програмування, поліедральної комбінаторики, алгебраїчної комбінаторики, математичної логіки (для демонстрації сфери застосування е-конфігурацій, викладення загальної методології дослідження екстремальних комбінаторних задач та її реалізації для модельних прикладів).

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше виділено клас евклідових комбінаторних множин ($\mathcal{E}_c$-множин), що утворюють спеціальний клас множин конфігурацій за К. Бержем, породжених векторами однакової розмірності, які дозволяють будувати математичні моделі, еквівалентні широкому класу практичних задач.

2. Вперше описано нові математичні об'єкти – евклідову комбінаторну конфігурацію (е-конфігурацію) та множину е-конфігурацій ($\mathcal{C}$–множину),

що дозволяють застосування інструментарію відображень та властивостей евклідова простору у математичному моделюванні образів $\mathcal{E}_c$-множин.

3. Вперше здійснено структурну та геометричну класифікацію $\mathcal{C}$–множин, яка комплексно використовує конструктивні особливості їх формування, специфіку відображень та властивості евклідова простору у моделюванні цих множин, що дозволяє розширити математичний апарат, застосовуваний до розв'язання екстремальних задач на $\mathcal{E}_c$-множинах.

4. Вперше виділено клас базових $\mathcal{C}$–множин ($\mathcal{C}_b$-множин), комбінаторну структуру яких можна виразити засобами С-А. З його допомогою здійснено систематизацію наявних відомостей із теорії комбінаторних конфігурацій і е-множин і доповнено ці результати. Виділено ряд нових класів $\mathcal{C}_b$-множин, досліджено алгебро-топологічні та тополого-метричні їх властивості. Це дозволяє розвинути ЕСО в напрямку вивчення властивостей образів е-множин і можливостей їх застосування у розв'язанні екстремальних задач як у комбінаторних, так і у евклідових постановках.

5. Вперше систематизовано, доповнено та адаптовано до $\mathcal{C}$–множин основні положення теорії оцінок мінімумів функцій на образах е-множин. Досліджено поведінку та обґрунтовано властивості лінійних, квадратичних та опуклих функцій на різних класах $\mathcal{C}_b$-множин. Ці результати розвивають ЕСО у напрямку вивчення екстремальних властивостей функцій, заданих на $\mathcal{C}_b$-множинах, та є необхідною складовою організації схем аналізу варіантів розв'язання екстремальних задач на відповідних $\mathcal{C}$–множинах.

6. Вперше запропоновано єдиний підхід до аналітичного опису $\mathcal{C}$–множин як способу їх математичного моделювання шляхом побудови їх неперервних функціональних представлення (f–представлень), запропоновано типологію, методи побудови та перетворень f–представлень. Це дозволяє будувати еквівалентні математичні моделі екстремальних задач на $\mathcal{C}$–множинах як задач нелінійного програмування.

7. Вперше побудовано f-представлення скінченних точкових конфігура-

цій як математичні моделі ряду $\mathcal{C}_b$-множин, що дозволило запропонувати нові інструментальні засоби оптимізації на цих множинах методами нелінійного програмування.

8. Теорія опуклих продовжень набула подальшого розвитку у таких напрямках як: побудова загальної методології формування опуклих продовжень із поліедрально-сферичних множин; адаптація теорії опуклих продовжень до $\mathcal{C}$–множин як областей продовжень; розроблення нових підходів до побудови опуклих продовжень з образів e-множин; розширення класів продовжуваних функцій; створення єдиної методології побудови продовжень функцій на базі використання f–представлень $\mathcal{C}$–множин, що є областями продовжень; поєднання моделювання $\mathcal{C}$–множин із побудовою f–представлень відповідних $\mathcal{C}_b$-множин та продовженнями функцій з них. Це дозволяє розвинути ЕСО у напрямках дослідження поведінки функцій на образах e-множин, поєднання теорії опуклих продовжень та f–представлень з можливістю формування еквівалентних моделей екстремальних комбінаторних задач, у яких беруть участь опуклі функції.

9. Вперше запропоновано та теоретично обґрунтовано концепцію побудови еквівалентних математичних моделей екстремальних комбінаторних задач, яка доводить можливість застосування опуклого програмування у процесі їх розв'язанні.

10. Вперше побудовано ряд евклідових постановок модельних задач як задач оптимізації на $\mathcal{C}$–множинах. Серед них задачі геометричного проектування, формування евклідових постановок яких ґрунтується на виділенні комбінаторної структури нової природи, використанні e-конфігурацій як математичних моделей геометричних об'єктів складної структури та f–представлень відповідних $\mathcal{C}$–множин як математичних моделей виділених комбінаторних структур.

11. Досліджені властивості екстремальних задач на $\mathcal{C}$–множинах використані при вдосконаленні та створенні нових інструментальних засобів

евклідової комбінаторної оптимізації.

Особистий внесок здобувача. У роботах, написаних у співавторстві, у [25] автору належать постановка задачі ECO (ECOP) та методи розв'язання однопараметричних лінійних задач на образах e-множин (s-множинах) перестановок і розміщень; у [5, 25] – постановка задачі двопараметричної оптимізаційної задачі на s-множині та методи розв'язання однопараметричних лінійних задач на s-множинах перестановок і розміщень; у [4] – конструктивний метод побудови опуклого продовження поліномів із множин поліперестановок та оцінка його обчислювальної складності; у [28, 36] – математичні моделі задачі розташування модулів на чіпі і метод ECO її розв'язання; у [37] – частина, що стосується поліедрально-сферичної оптимізації; у [1] – систематизація та розвиток результатів дослідження тополого-метричних властивостей образів e-множин (s-множин) перестановок, вивчення властивостей графів їх багатогранників; у [31] – метод штрафних функцій розв'язання задач ECO (ECOPs) із використанням опуклих продовжень функцій; у [12] – введення поняття f-представлення s-множини, основна термінологія з f-представлень, побудова f-представлень загальної s-множин перестановок; у [9] – аналітичний метод побудови опуклого продовження квадратичної функції з булевої множини B_n, поліедрально-сферичний метод гілок та меж (B&B PSpM) квадратичної оптимізації на дворівневих поліедрально-сферичних множинах (PSpSs); узагальнення B&B PSpM на поліедрально-поверхневі множини і довільну цільову функцію; у [8] – основні положення теорії f-представлень s-множин; у [14] – дослідження образу множини матриць Π_n перестановок як PSpS, аналітичний вигляд опуклого продовження квадратичних функцій із Π_n; у [29] – математична модель харчового меню як ECOP та ECO-підходи до її розв'язання; у [38] – математична модель людської комунікації у соціальних мережах як ECOP на B_n; у [15] – основні підходи до побудови f-представлень вершинно-розташованих множин та їх реалізація для окремих класів s-множин; у [19] – математична модель однієї задачі оптимізації телекомунікаційних мереж як ECOP на s-множині перестановок і B_n із опуклими цільовою функцією функціональними обмеженнями; у [18] – концепція застосування опуклого програмування у ECOPs на PSpSs на базі використання опуклих продовжень; у [40] – основні підходи до поліедрально-сферичної оптимізації та дослідження її специфіки для деяких класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [17] – введення поняття е-конфігурації, постановка задачі оптимізації на множині е-конфігурацій; у [2] – введення поняття $\mathcal{E}_c$-, $\mathcal{C}$- і $\mathcal{C}_b$-множин, геометричний аналіз $\mathcal{C}$-множин і окремих класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [3] – формалізація основних положень теорії f-представлень $\mathcal{C}$-множин і її реалізація для окремих класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [20] – методи побудови опуклих продовжень поліномів із загальної $\mathcal{C}_b$-множини перестановок; у [43] – виділення ряду класів PSpSs на основі структурного аналізу $\mathcal{C}$-множин та дослідження їх властивостей як поліедрально-сферичних точкових конфігурацій; у [20] – математична модель задачі кластерного аналізу у багатошаровій мережі як квадратична ECOP і метод розв'язання, що ґрунтується на побудові опуклих продовжень. Роботи [6, 7, 11, 13, 16, 22-24, 26, 27, 30, 32-35, 39, 41, 42, 44-46] опубліковано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на 44 наукових конференціях, серед яких: The Southwestern Ontario Graduate Mathematics and Statistics Conference (Guelph, Canada, 2014), Conference on Graph Theory, Matrix Theory and Interactions (Kingston, Canada, 2014), Conference on Optimization, Transportation and Equilibrium in Economics (Toronto, Canada, 2014), The 2014 CMS Winter Meeting (Hamilton, Canada, 2014), Statistical and Computational Challenges in Networks and Cybersecurity Workshop (Montreal, Canada, 2015), The 2015 AMMCS-CAIMS Congress (Waterloo, Canada, 2015), Industrial-Academic Workshop on Optimization in Finance and Risk Management (Toronto, Canada, 2015), 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (Kyiv, Ukraine, 2016), 6th Polish Combinatorial Conference (Bedlewo, Poland, 2016), The 14th ESICUP Meeting (Liege, Belgium, 2017), 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering Kyiv, Ukraine, 2017), 4th International Scientific-Practical Conference «Problems of Infocommunications, Science and Technology» (Kharkiv, Ukraine, 2017), International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics and Optimization (Prague, Czech Republic, 2018), 29th European Conference On Operational Research (Valencia, Spain, 2018), International Conference on Innovations in Engineering, Technology and Sciences (Karnataka, India, 2018), IX International Conference Optimization and Applications (Petrovac, Montenegro, 2018), IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (Kyiv, Ukraine, 2018). Результати роботи обговорювалися на наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (2013-2017 рр.), відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України (2016 р.), кафедрі інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського (2018 р.). У повному обсязі робота доповідалася на 20-му міжнародному науково-практичному семінарі «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кропивницький, Україна, 13-14 квітня 2018 р.) та на 7-ій міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи та технології» (Коблево, Україна, 10-15 вересня 2018 р.).

Публікації. Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 46 наукових роботах [1-46]. З них – 3 монографії [1-3], 30 статей у наукових фахових виданнях [4-33] (із них 15 статей у виданнях іноземних держав або виданнях, що включені у провідні міжнародні наукометричні бази [5, 8-12, 15, 16, 20, 21, 26, 30-33], 16 статей у виданнях, уключених МОН України до переліку фахових видань з фізико-математичних наук [4-8, 13, 14, 16-20, 22-24], і 4 статті у інших виданнях [25, 27-29]), а також 13 тез і матеріалів міжнародних конференцій [34-46].

Структура й обсяг роботи. Дисертаційна робота є рукописом і складається зі вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел з 381 найменування і п'яти додатків. Повний обсяг роботи становить 484 сторінки, обсяг основного тексту становить 327 сторінок, обсяг додатків становить 85 сторінок.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертації, є важливими як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Вони розвивають теорію евклідової оптимізації в основних її напрямках – розширення класу евклідових комбінаторних множин і дослідження властивостей їх образів у евклідовому просторі, дослідження екстремальних властивостей функцій, заданих на них, розроблення нових методів оптимізації, адаптація та вдосконалення існуючих підходів, математичне моделювання практичних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційну роботу виконано в період з 2013 р. по 2018 р. на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки та кафедрі інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут». Дисертаційну роботу виконано відповідно до плану науково-дослідних робіт Харківського національного університету радіоелектроніки та наказу Міністерства освіти і науки України в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку», розділ №293-4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста» (№ ДР 0115U001522), в якій дисертант був одним із співвиконавців. У рамках виконаних робіт як виконавця автором досліджено нові властивості евклідових комбінаторних множин, розроблено методи евклідової комбінаторної оптимізації, побудовано математичні моделі практичних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Впровадження результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи впроваджено у наукову роботу та у навчальний процес університетів України, що підтверджується відповідними актами:

– Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» (акти впровадження від 03.05.2018 р. та 10.05.2018 р.);

– Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (акт впровадження від 12.06.2018 р.);

– Харківський національний університет радіоелектроніки (акт впровадження від 15.11.2018 р.).

Результати роботи використовувалися в лекційних курсах, курсових і дипломних (ОКР магістра та бакалавра) роботах студентів факультету систем управління літальних апаратів Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 113 «Прикладна математика». Вони також використані при виконанні фундаментальних держбюджетних тем (номер держреєстрації 0115U001522).

1 СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ

Сучасний стан комбінаторної оптимізації дозволяє сказати, що найбільш перспективним є пошук евклідових постановок екстремальних комбінаторних задач, зокрема, моделювання допустимих дискретних областей як підобластей евклідова простору, що передбачає їх відображення у цей простір, яке також називають "зануренням"("embedding") у евклідів простір. Можливість евклідових формулювань тісно пов'язана з комбінаторною природою допустимих областей, а також із можливістю адекватного їх представлення скінченними послідовностями числових параметрів. Так, це можливо для багатьох задач геометричного проектування, адже об'єкти та область розміщення задаються кортежами геометричних інформацій [358], які часто можуть вважатися числовими.

У евклідових постановках задач оптимізації дискретність допустимої області дозволяє достатню гнучкість форм запису математичної моделі та можливість переходу від однієї форми до іншої, відповідно, і від однієї групи застосовуваних методів оптимізації до іншої, що дає можливість вибору більш ефективних у тих чи інших випадках. Серед еквівалентних формулювань особливу роль відіграють так звані "неперервні"або "алгебраїчні"постановки, у яких допустима область представляється аналітично, відповідно, з'являється можливість застосовувати до її розв'язання класичні методи нелінійне програмування. У свою чергу, особливе значення мають ті з них, що дозволяють вважати цільову функцію та функціональні обмеження опуклими. Коли занурення здійснено, стає можливим розглядати про неперервні релаксації, такі, як поліедральна, яка одержується заміною умови належності дискретній області умовою належності багатограннику, що є її опуклою оболонкою. Відповідно, виникає потреба дослідження властивостей комбінаторних багатогранників, їх аналітичного опису та граневої структури. У свою чергу, останнє передбачає дослідження властивостей графу багатогранника.

1.1 Задачі геометричного проектування та евклідові комбінаторні множини

Під основною задачею геометричного проектування (a geometric design problem, GDP) розуміється задача пошуку заданих параметрів розміщення та метричних характеристик об'єктів розміщення та області/областей розміщення з метою оптимізації деякого критерію та за умови виконання обмежень для об'єктів/областей розміщення на їх взаємне розташування та розміщення об'єктів в області/областях розміщення. При цьому передбачається, що об'єкти і область/області розміщення задано геометричною інформацією $\langle \mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$, де $\mathbf{s}$ – форма (a shape), $\mathbf{m}$ – метричні характеристики (metric characteristics), $\mathbf{p}$ – параметри розміщення (placement parameters) [358], де $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$ задані у числовій формі.

У рамках пошуку нових підходів до розв'язання задач геометричного проектування, у роботах Ю. Г. Стояна [356, 357] було закладено основи евклідових комбінаторних множин (e-множин). Згідно з введеним означенням [356], елементи e-множин мають таку особливість, що вони мають однакову кількість компонент та відрізняються або складом, або порядком слідування елементів.

У термінології комбінаторного аналізу це означення представляється так: множина $\mathcal{P}$, елементами якої є упорядковані вибірки порядку n із мультимножини G [34, 198, 239, 267, 308] потужності $\eta = |G| \geq n$, називається евклідовою комбінаторною множиною (the Euclidean combinatorial set, e-set), якщо $\forall p = \langle p_1, ..., p_n \rangle \in \mathcal{P}$, $p_1, ..., p_n \in G$; $\forall p, p' \in \mathcal{P}$, де $p' = \langle p'_1, ..., p'_n \rangle$ виконано таке: якщо $\exists i \in J_n :$[1] $p_i \neq p'_j \Rightarrow\ p \neq p'$.

Введення поняття та розгляд e-множин було пов'язано з пошуком

---

[1] тут і далі $J_n = \{1, ..., n\}$

шляхів виділення комбінаторної структури у GDP та перспективами, що виникає в зв'язку з цим, застосування до її розв'язання методів дискретного програмування. Одним із ключових моментів реалізації цієї можливості є моделювання допустимої дискретної області, що являє собою e-множина, у формі скінченної множини точок евклідова простору. Це передбачає відображення e-множини у цей простір та перехід до розгляду отриманої множини, яка називається спеціальною комбінаторною множиною (s-множиною) [370], пошук розв'язку отриманої задачі дискретного програмування на цій множині і відтворення за ним розв'язку GDP. Подальші дослідження, пов'язані з e-множинами та їх зануреннями, проводилися учнями Ю.Г. Стояна – С. В. Яковлевим [364], І. В. Гребенніком [279], О. О. Ємцем [370] та його школою [289, 290, 293, 297, 363]. Вони досліджували різні найпростіші випадки e-множин, пов'язані з класичними комбінаторними структурами, такими як перестановки, розміщення і сполучення, а також з їх композиціями [276, 277, 279]. Доцільність переходу з часом до розгляду композицій e-множин була пов'язана з істотним ускладненням завдань, що потребують зараз вирішення у рамках геометричного проектування, що унеможливлює обмежитися дванадцятьма класами комбінаторних конфігурацій, запропонованих Д.-К. Ротою [37, 223], та потреби, що виникає у зв'язку з цим, математичного моделювання більш складних геометричних об'єктів, геометрична інформація про які задана в числовій формі. Як показав аналіз літературних джерел, спільним для розглянутих на даний момент часу e-множин є можливість їх формулювання у термінах відображень однієї скінченої множин у іншу віднесення до множин конфігурацій за К. Бержем [22].

К. Берж [22] увів строге математичне поняття конфігурації як відображення $\chi : B \to A$ деякої скінченної множини B у абстрактну множину A, що має певну структуру. Оскільки χ – відображення, а не просто функція множини A, передбачається наявність додаткових обмежень Λ на його вигляд.

Поєднуючи той факт, що досліджені на даний час s-множини є відображенням у евклідів простір множин, які, у свою чергу, одержуються в результаті відображень, дозволяють їх моделювати за допомогою послідовності відображень скінченної множин B у скінченну множину $\mathcal{E}$ у евклідовому просторі. Процес відображення множини $\mathcal{P}$ у $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ також називається її *зануренням* (у евклідів простір), у результаті якого формується образ $\mathcal{P}$ цієї множини у $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ [364, 370]. У зв'язку з цим, інтерес представляє дослідження різних способів моделювання таких відображень у залежності від вигляду χ, A, B, Λ та способу занурення, який представлятимемо відображенням $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, відповідно матиме місце $\mathcal{E} = \varphi(\mathcal{P})$.

Зауваження 1.1. Як було зазначено, при розв'язанні задач на $\mathcal{P}$ шляхом переходу до розгляду $\mathcal{E}$, окрім відображення у евклідів простір, передбачається можливість повернення у вихідний комбінаторний простір. Тому надалі як φ вибиратимемо бієктивне відображення. Це означає, що:

$$\exists\, \mathcal{N} \in \mathbb{N} : \; \mathcal{E} = \varphi(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}, \; \mathcal{P} = \varphi^{-1}(\mathcal{E}). \tag{1.1}$$

Зазначимо, що хоча компонентами $p \in \mathcal{P}$ можуть бути довільні об'єкти, у більшості робіт, пов'язаних із e-множинами [356, 357, 364, 370], вони передбачаються числовими, а в решті [279, 360] – числовими векторами однакової розмірності, що дозволяє безпосередній їх розгляд як точок евклідова простору, застосовуючи таким чином відображення φ у формі $\forall p = \langle p_1, ..., p_n \rangle$ $x = \varphi(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i \in \mathbb{R}^{n\dot{m}}$, де m – розмірність векторів-компонент $p_1, ..., p_n$. Саме тому в літературі до занурення e-множин часто також застосовується термін "e-множина" [259, 260, 370], хоча формально в елементах s-множин компоненти виділити не можна, адже це просто набір точок простору, що попарно відрізняються своїми координатами.

Головною метою виділення класу e-множин було створення інструментарію розв'язання задач оптимізації на них за допомогою занурення цих множин у евклідів простір із подальшим застосуванням до їх розв'язання засобів дискретної, неперервної оптимізації та поліедральної комбінаторики. Останній напрямок пов'язано з дослідженням тополого-метричних властивостей s-множин та їх опуклих оболонок – комбінаторних багатогранників. Другий – із вивченням можливостей аналітичних представлень s-множин та пов'язаних із ними структур, а також поведінки функцій, заданих на них. Перший – з дослідженням алгебро-топологічних особливостей занурень та їх поєднанням із результатами решти двох у класичних та спеціальних методах дискретного програмування.

1.2 Комбінаторна та евклідова постановки задач комбінаторної оптимізації

Нехай Π – множина комбінаторної природи та задано характеристичний предикат $\Lambda_{\Pi}(\pi)$ та критерії вибору розв'язку задачі, що поставлена на Π, які дозволяють перевірити довільний елемент на належність Π та оцінити його ефективність. При розгляді задачі вибору (задачі прийняття рішення, decision making problem, DP) одного чи кількох рішень на множини Π комбінаторної природи (a combinatorial DP, CDP), як правило, єдиним способом її розв'язання є перебір усіх можливих варіантів (повний перебір усіх варіантів вибору, an exhaustive search) [211]. Це стосується, зокрема, випадку, коли Π задана у явній формі – $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_{\Pi}\}$ [145].

Припустимо тепер, що про поставлену задачу відомо значно більше, а саме критерії вибору розв'язку записані у формі цільових функцій та обмежень, у результаті чого CDP набуває вигляду:

$$\phi_j(\pi) \to extr,\ j \in J(\Pi), \tag{1.2}$$

$$\varphi_i(\pi) \leq 0, i \in I(\Pi), \tag{1.3}$$

$$\pi \in \Pi. \tag{1.4}$$

Вважатимемо також, що як Π виступає множина комбінаторного характеру, про яку відносно все відомо, а як система (1.3) – «нерегулярні» обмеження, накладання яких приводить до розгляду множини $\Pi' = \{\pi \in \Pi :$ π задовольняє $(1.3)\}$, що наслідує деякі, але не всі, властивості Π і набуває нові, причому за останні нічого не відомо. До того ж, це стосується не тільки усіх, але і будь-якого окремого обмеження з системи (1.3).

CDP (1.2)-(1.4) є: а) звичайною однокритеріальною задачею комбінаторної оптимізації (задачею комбінаторної оптимізації, a combinatorial optimization problem, COP), якщо $|J| = 1$; б) багатокритеріальною COP (a multi-objective COP, MCOP) при $|J| > 1$; в) безумовною COP/MCOP, якщо $I = \varnothing$ (an unconstrained COP/MCOP, UCOP/UMCOP); г) задачею пошуку допустимої точки E (a feasibility problem, FP) при $J(\Pi) = \varnothing$.

Розглянемо COP, де як напрямок оптимізації обрано мінімізацію, $\exists\, m$: $I(\Pi) = J_m$, тобто її форма –

$$\phi(\pi) \to \min, \tag{1.5}$$

$$\pi \in \Pi', \tag{1.6}$$

$$\Pi' = \{\pi \in \Pi :\ \varphi_i(\pi) \le 0,\ i \in J_m\}. \tag{1.7}$$

Якщо DP розв'язується на множині комбінаторної природи, застосування цього способу пов'язано з попереднім розв'язанням задачі генерації цієї комбінаторної множини [129, 136], а при наявності додаткових обмежень – розв'язання також FP на цій множині. З огляду на те, що зазвичай комбінаторні множини мають потужність, яка експоненційно залежить від числа компонент їх елементів, організація повного перебору на них може перетвориться з трудомісткої задачі до такої, що практично не реалізовна.

Введення метрики ρ на множині Π перетворює CDP (1.2)-(1.4) на метричну постановку CDP (a metric CDP statement, MCDP) [273,284]. Це дозволяє застосувати до розв'язання CDP способи, пов'язані з використанням властивостей метричного простору. В першу чергу, це стосується застосування поняття близькості елементів Π у таких підходах як методи детермінованого локального пошуку, методи спуску і т.п. [136, 284, 351–353]. Коли (1.4) відсутні, відповідно $\Pi' = \Pi$, практична реалізація цих методів часто не викликає труднощів та пов'язана з генерацією незначної частини Π, порівнянню згенерованих елементів за ступенем корисності, формуванню околу заданої точки метричного простору, пошуку найближчого до неї і найбільш віддаленого елемента Π'. Проблема полягає в тому, що більшість цих методів належать до групи евристичних, відповідно, не дозволяють оцінити точність отриманого розв'язку, їх ефективність залежить від вибору метрики, але головне – ці методи перестають працювати при переході від розгляду «хорошої» множини Π до «поганої» множини $\Pi' \subset \Pi$. Прикладом є задача комівояжера у булевій постановці з обмеженням-рівністю на вмісткість, де Π є булевою множиною, а додавання даного обмеження не тільки COP, але і FP, перетворює на NP-повну задачу [59, 132, 173, 174, 211].

У разі, якщо ρ – евклідова метрика, представлення (1.2)-(1.4) називають евклідовою постановкою CDP (далі *ECDP*) [224, 262, 273]. Отже, ECDP – це задача вигляду (1.2)-(1.4), $\Pi \subset \mathbb{R}^n$.

Оскільки евклідів простір оснащений топологією, границями, неперервністю, повнотою, метрикою, скалярним добутком [139], очевидною перевагою використання саме цієї постановки є можливість використовувати у розв'язанні CDP весь цей інструментарій, а також багато інших засобів, таких як похідні, опуклість, оптимізаційні методи та ін. Саме тому геометричні властивості скінченних множин, занурених у евклідів простір, так широко використовуються у комбінаторному аналізі, зокрема, у комбінаторній оптимізації [11, 102, 139, 156, 349]. Залежно від числа компонент у (1.2), (1.3), серед ECDP можна виділити задачі пошуку одного розв'язку чи множини розв'язків, задачі однокритеріальної чи багатокритеріальної оптимізації, умовної та безумовної комбінаторної оптимізації.

Клас задач комбінаторної оптимізації, елементи вибору в яких або компоненти цих елементів є точками евклідова простору, в сукупності з групою методів, заснованих на застосуванні властивостей евклідова простору, незалежно отримали назву "Евклідова комбінаторна оптимізація"(Euclidean combinatorial optimization, ECO) [224,262,370]. При цьому в [224,262] здійснюється упорядкування елементів (шукається лінійний порядок α на множині Π), при якому досягається екстремум функції $f(\alpha,\Pi)$, у той час як у [370] – шукається безпосередньо елемент Π', який доставляє екстремум $\phi(\pi)$ на Π'.

Ми будемо використовувати поняття ECO в останньому контексті і під загальною задачею ECO (далі Euclidean COP, e-задача, *ECOP*), як і у [370], розумітимемо таке:

$$f(x) \to \min, \tag{1.8}$$

$$f_i(x) \leq 0,\ i \in J_m, \tag{1.9}$$

$$x \in E \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

де E – s-множина, що відповідає e-множині Π. У позначеннях

$$E' = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n :\ f_i(x) \leq 0,\ i \in J_m\}, \tag{1.11}$$

(1.8)-(1.10) набуває вигляду (1.11),

$$f(x) \underset{x \in E'}{\to} \min. \tag{1.12}$$

Постановка (1.8)-(1.10) представляє COP як задачу дискретної оптимізації на скінченній множині точок $\mathbb{R}^n$ або, згідно з термінологією [95], на *скінченній точковій конфігурації* (a finite point configuration, FPC). Це дозволяє застосовувати до її розв'язання як структурні властивості допустимої дискретної області, так і її геометричні особливості, такі, як вигляд опуклої оболонки – комбінаторного багатогранника, описаних поверхонь, а також поведінку функцій, заданих на E. Ці функції, в силу дискретності допустимої області, не обмежуючи загальності, можуть вважатися неперервними, а, в окремих випадках, і опуклими [251, 374]. У сукупності з компактністю допустимої області, опуклість цільової функції дозволяє отримувати її нижні оцінки, відповідно, дає можливість розробляти наближені методи розв'язання вихідної задачі. З іншого боку, з'являється можливість організації методів напрямленого пошуку, таких як метод гілок і меж, методи відсікань, в яких використовуються як структурні, так і геометричні властивості допустимої області [51, 59, 71, 132, 173, 174, 211].

Якщо ставиться задача розроблення точного методу розв'язання задач COP, тобто способу, відмінного від повного перебору, єдиним відомим на даний час прийомом є перехід до евклідової їх постановки з подальшим розв'язанням отриманої задачі. Під евклідової постановкою COP розуміється її модель формі ECOP, тобто задача вигляду (1.8)-(1.10), така що виконана умова

$$z_x^* = z_\pi^*, \tag{1.13}$$

де $\langle \pi^*, z_\pi^* \rangle$ – розв'язок COP, $\langle x^*, z_x^* \rangle$ – розв'язок ECOP.

З огляду на складність комбінаторних структур, що підлягають оптимізації, необхідність врахування зв'язку між окремими їх компонентами, евклідові постановки відомі лише для незначного класу COPs [145].

Більшість же класичних COPs сформульовано у формі COP вигляду (1.5),

$$\pi \in \Pi,$$

тобто в формі безумовної задачі COP (an unconstrained COP, UCOP), коли (1.3) відсутні, відповідно виконана умова $\Pi' = \Pi$. Як Π найчастіше виступають комбінаторні множини, такі, як множина P_n – перестановок із J_n та булева множина $\mathcal{B}_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \{0,1\} = \{0,1\}^n$ або їх підмножини [51, 59, 132, 173, 174, 211, 273]. У першому випадку COP відносять до класу задач оптимізації на перестановках (permutation-based problems, PBPs) [88, 155], у другому – до класу булевих задач (Boolean problems, BPs) [42, 174, 219, 221, 225].

Комбінаторну структуру певного типу в окремих випадках вдається виділити спеціальними засобами. Так, наприклад, виявлення фрагментарної структури у задачах комбінаторної оптимізації, які на перший погляд жодним чином не пов'язані з перестановками, автоматично переводить їх у розряд PBPs і демонструє вражаючі результати при розв'язанні широкого кола практичних задач, деякі з яких досі не розглядалися як об'єкти математичного моделювання у силу надзвичайної складності їх формалізації [134, 135, 301]. Ще один тип комбінаторної структури перестановочного характеру було виявлено у задачах геометричного проектування в ході застосування до їх розв'язання методу штучного розширення простору (the Method of Artificial Space Dilation, MASD) [250]. Так, у задачах розміщення, суть MASD полягає у тому, що сталі метричні характеристики об'єктів розміщення штучно вважаються змінними, а для забезпечення адекватності "розширеної" постановки вихідній задачі розміщення накладається умова належності допустимого розв'язку комбінаторній множині деяким чином пов'язаної з перестановками, та яка виражає неоднозначність нумерації об'єктів розміщення. Інші приклади виділення структур перестановок можна знайти, зокрема, у [133].

Покажемо, що одна і та сама задача може дозволяти формулювання як COP, ECOP, PBPs та BPs. Відповідно, такі задачі дозволяють у їх розв'язанні використовувати та комбінувати властивості цих класів комбінаторних множин із властивостями евклідова простору. Крім того, покажемо, що досить часто у COPs можна виділити комбінаторну структуру, елементами якої є вектори однакової розмірності.

Так, задача комівояжера (a travelling salesman problem, TSP), метою якої є пошук найкоротшого гамільтонова циклу в зваженому орієнтованому графі

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{V}, \mathcal{E}\}, |\mathbf{V}| = n, |\mathcal{E}| = m \tag{1.14}$$

із матрицею ваги $D = (d_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ формулюється як COP

$$\phi_D(\pi) \to \min$$

за умови виконання (1.6) (далі *TSP.M1*), де Π' – множина гамільтонових циклів у $\mathcal{G}$, $\phi_D(\pi)$ – довжина гамільтонова циклу π. TSP відносить до класу PBPs і дозволяє іншу постановку як COP, а саме:

$$\phi_D(\pi) = d_{\pi_1\pi_n} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi_i\pi_{i+1}} \to \min; \tag{1.15}$$

$$\pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \in P_n; \tag{1.16}$$

$$(\pi_i, \pi_{i+1}) \in \mathcal{E}, i \in J_{n-1},$$

де d_{ij} – вага дуги $(i, j) \in \mathcal{E}$ (далі *TSP.M2*).

У разі, якщо $\mathcal{G}$ – повний граф, TSP набуває вигляду (1.15), (1.16). Реальна TSP завжди може бути сформульована в цій формі. Для цього достатньо задати достатньо велику довжину для відсутніх дуг, що забезпечує їх відсутність у оптимальному маршруті. Саме цей факт робить метаевристичні підходи дуже популярними при розв'язанні TSP у формі [273, 284].

Ще однією популярною версією TSP є така, де $\mathcal{G}$ – повний , вершини якого є точками на площині або у тривимірному просторі, тобто $\mathbf{V} = \{x_i\}_{i\in J_n} \subset \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 2, 3$. У результаті чого цільова функція (1.15) набуває вигляду:

$$\phi_D(\pi) = \|x_{\pi_1} - x_{\pi_n}\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{\pi_i} - x_{\pi_{i+1}}\| \to \min, \tag{1.17}$$

а постановка (1.16), (1.17) є евклідовою TSP (далі *ETSP*) [262]. Зазначимо, що якщо ввести позначення $y_i = x_{\pi_i}$, $i \in J_n$, ETSP може бути представлена у вигляді:

$$\phi_D(\pi) = \|y_1 - y_n\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|y_i - y_{i+1}\| \to \min, \;\; y = (y_i)_{i \in J_n} \in P_n(\mathbf{V}),$$

де $P_n(\mathbf{V})$ – множина перестановок векторів із $\mathbf{V}$ (далі *TSP.M3*).

Для TSP також відома "алгебраїчна"форма моделі [145] :

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j \in J_n; \tag{1.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i \in J_n; \tag{1.20}$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n - 1, \;\; i \in J_n; \tag{1.21}$$

$$u_i \in J_{n-1}, \; i, j \in J_n; \tag{1.22}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \; i, j \in J_n, \tag{1.23}$$

(далі *TSP(ECO)*), що представляє її як задачу дискретного програмування на множині векторів $(x, u) = (vec(X), (u_i)_{i \in J_n})^T$ розмірності $n^2 + n$, більшість координат яких булеві, решта – цілочислові (тут і далі $X = (x_{ij})_{i,j \in J_n}$, $vec(X)$ – оператор векторизації матриці X).

ETSP, так само як TSP(ECO), дозволяє використовувати при їх розв'язанні алгебро-топологічні та тополого-метричні властивості FPCs, що є їх допустимими областями. Для ETSP це FPC $\mathbf{V}$, а для TSP(ECO) – множина

$$E^{xu} = \{(x, u) : x, u \text{ задовольняють (1.19)-(1.23)}\}.$$

Цей факт покладено в основу деяких методів її розв'язання TSP [224, 262]. Зазначимо, що ETSP не є задачею дискретного програмування, адже вона передбачає структурування, а саме упорядкування, всіх елементів FPC $\mathbf{V}$, а не вибір одного елемента або незначної частини елементів $\mathbf{V}$ згідно з зазначеним критерієм оптимальності. Між тим, була б цікавою побудова моделей TSP, що комбінує ETSP, TSP.M3 та представляє задачу у формі задачі дискретного програмування на векторах, що містять усю числову інформацію про елементи $\mathbf{V}$.

Наведемо ще декілька прикладів COPs, для яких відомі як комбінаторні, так і алгебраїчні постановки.

Лінійна задача про призначення. Нехай задано матрицю $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ вартостей витрат від призначень n претендентів на n посад. Лінійна задача про призначення (Linear Assignment Problem, *LAP*) [50] полягає у пошуку призначення претендентів на посади, при якому досягається мінімум лінійної функції. Як PBP, LAP має вигляд:

$$\phi_C(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi_i} \to \min$$

за умови виконання обмежень (1.16) (далі *LAP.M1*). Її алгебраїчною постановкою буде (1.18)-(1.20), (1.23) (далі *LAP.M2*). Нехай X – матриця призначень порядку n, то (1.23) переписується так:

$$X \subset \mathcal{B}_{n\times n}, \tag{1.24}$$

де $\mathcal{B}_{n\times n}$ – множина булевих матриць порядку n.

Стовпці матриці X являють собою перестановку векторів одиничного базису $\mathbf{E}(n) = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in J_n} \subset \mathbb{R}^n$, те саме стосується і рядків. Таким чином, у TSP(ECO) умови (1.19), (1.20), (1.24) можуть бути записані у двох формах:

$$\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in P_n(\mathbf{E}(n)); \tag{1.25}$$

$$\mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_n \in P_n(\mathbf{E}(n)), \tag{1.26}$$

де тут і далі $P_n(\mathbf{G})$ – множина перестановок векторів, що утворюють множину $\mathbf{G}$ потужності n, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ – вектори-стовпці, а $\mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_n$ – вектори-рядки матриці X відповідно. (1.18), (1.25) та (1.18), (1.26) – ще дві постановки LAP, але у даному випадку на перестановках векторів розмірності n.

Квадратична задача про призначення. Нехай D – матриця відстаней між об'єктами, а $W = (w_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця інтенсивності потоків між місцями призначень. Треба знайти призначення об'єктів місцям призначень мінімальної вартості. Це квадратична задача про призначення (Quadratic Assignment Problem, QAP) [50], яка відноситься до PBPs і у термінах перестановок має вигляд

$$\phi_D(\pi) = \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} d_{\pi_i \pi_j} \to \min .$$

з обмеженнями (1.16). Алгебраїчна її постановка – (1.24), (1.19), (1.20),

$$f(x) = \sum_{i,j,s,t=1}^{n} w_{ij} d_{st} x_{is} x_{jt} \to \min .$$

Задача про небаланс (Balancing Problem, BP). Нехай задано набір вантажів із масами $m_1, m_2, ..., m_n$. Вантажі необхідно розмістити у відсіки з центрами ваги у $A_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i \in J_n$, таким чином, щоб відхилення центра ваги системи відносно заданої точки $A_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ було мінімальним [236].

Обираючи за міру відхилення величину:

$$\phi(\pi) = \left[\alpha_0 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\pi_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right]^2 + \left[\beta_0 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i m_{\pi_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right]^2 + \left[\gamma_0 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i m_{\pi_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right]^2, \qquad (1.27)$$

приходимо до задачі (1.5), (1.16), (1.27) (далі *BP.M1*).

Введемо у (1.27) позначення $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $x_i = m_{\pi_i}, i \in J_n$, і отримаємо:

$$f(x) = \left[\alpha_0 - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right]^2 + \left[\beta_0 - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right]^2 + \left[\gamma_0 - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i\right]^2,$$

$$x \in E_{nk}(G)$$

(далі *BP.M2*), де $E_{nk}(G)$ – занурена у $\mathbb{R}^n$ множина перестановок, що індукована числовою мультимножиною $G = \{m_i\}_{i \in J_n}$, що містить k різних елементів. Перевага постановки BP.M2 порівняно з BP.M1 у тому, що вона сформульована як задача дискретного програмування, а її допустима область складається з $|E_{nk}(G)|$ елементів, що може бути значно меншим за $|P_n| = n!$, якщо G містить повторення.

Ще одним формулюванням BP у термінах перестановок є (1.16),

$$\phi'(\pi) = \left[\alpha_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\pi_i} m_i\right]^2 + \left[\beta_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \beta_{\pi_i} m_i\right]^2 + \left[\gamma_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \gamma_{\pi_i} m_i\right]^2$$

(далі *BP.M3*). У результаті заміни

$$x_i = \alpha_{\pi_i},\ y_i = \beta_{\pi_i},\ z_i = \gamma_{\pi_i},\ i \in J_n,$$

отримуємо модель на перестановках векторів (далі *BP.M4*):

$$f(x, y, z) \to \min;$$
$$f(x, y, z) = \left[\alpha_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i\right]^2 + \left[\beta_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i\right]^2 + \left[\gamma_0 - \tfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i m_i\right]^2;$$
$$(x, y, z) \in \mathbf{\Pi}_n(\mathbf{G}),$$

де $\mathbf{\Pi}_n(\mathbf{G})$ – множина перестановок тривимірних векторів, що індукована множиною $\mathbf{G} = \{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\}_{i \in J_n}$.

Умова (1.13) гарантовано виконана, якщо між елементами E, Π або принаймні між елементами E' та Π' встановлено бієкцію, тобто:

$$\varphi \text{ таке, що } \Pi : E \to \Pi, E = \varphi(\Pi); \Pi = \varphi^{-1}(E); \tag{1.28}$$
$$\text{або } \varphi \text{ таке, що } \Pi' : E' \to \Pi', E' = \varphi(\Pi'); \Pi' = \varphi^{-1}(E'),$$

а також $\phi(\pi) = f(\varphi(\pi))$, $\pi \in \Pi$. Надалі ми розглядатимемо такі евклідові постановки, що забезпечують виконання (1.28).

Процес моделювання COP як ECOP, тобто процес побудови евклідової її постановки, включає кілька етапів: а) занурення П у евклідів простір, тобто пошук відображення ϕ, що задовольняє (1.28); б) формулювання цільової функції та додаткових обмежень у термінах декартових координат.

Неважко бачити, що занурення дозволяє будь-яка комбінаторна множина, причому у простір заданої наперед розмірності. Так, занурення в $\mathbb{R}^1$ здійснюється простим зіставленням елементам П їх порядкових номерів із подальшим розглядом їх як точок на прямій $\mathbb{R}^1$. Але оскільки занурення нами розглядаються в контексті COPs, які містять також формулювання цільової функції і обмежень у термінах декартових координат, такий шлях навряд чи буде корисним. Інакше кажучи, занурення має бути кроком до досягнення основної мети – побудови адекватної моделі вихідної COP, адже це є запорукою можливості розв'язання замість неї ECOP та досягнення (1.13). Адекватність, тобто збереження суті задачі, може бути досягнута як забезпеченням (1.28), так і переведенням у числову форму всієї якісної та кількісної інформації про елементи П і їх взаємозв'язках, закладеної в вихідну COP.

Ще один клас множин комбінаторного характеру, який виник у процесі виділення комбінаторної структури у задачах практичного характеру, а саме в задачах геометричного моделювання, та пошуку можливостей застосування до їх розв'язання апарату дискретного програмування, – це е-множини, елементами яких є сукупності (множини або мультимножини) їх компонент комбінаторної природи, що відрізняються складом або порядком слідування їх елементів. У е-множині П, не обмежуючи загальності, можна вважати, що потужності цих сукупностей збігаються, інакше в П можуть бути виділені підмножини, що володіють цією властивістю, здійснено перехід до їх розгляду, розв'язання отриманих на них задач за подальшим об'єднанням результатів та отриманням остаточного розв'язку вихідної задачі. Таким чином, елементи

Π можуть вважатися впорядкованими вибірками однакового обсягу n, тобто $\exists n \in \mathbb{N} : \pi = \langle \pi_1, ..., \pi_n \rangle$, $\forall \pi \in \Pi$ а вони, в свою чергу, можуть бути відображені у простір $\mathbb{R}^n$ таким чином:

– Спосіб 1.2.1: $\pi \to x \in \mathbb{R}^n : \ x_j = i_j, \ j \in J_n$;

– Спосіб 1.2.2: $\pi \to y \in \mathbb{R}^n : \ x_j = f(e_{i_j}), \ j \in J_n$,

де $\pi = \langle e_{i_1}, ..., e_{i_n} \rangle$, $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i \in J_k}$ – основа (a ground set) мультимножини $\{\pi_1, ..., \pi_n\}_{\pi \in \Pi}$, f – бієктивне відображення $\mathcal{A}$ у $\mathbb{R}^1$.

Як видно, умова (1.28) виконується саме для Способу 1.2.2. Окрім вибору вигляду функції f, при зануренні гнучкість тут виникає, якщо у e_i, $i \in J_k$, можна також виділити однакову кількість числових або векторних підкомпонент, адже у такому випадку занурення можна здійснювати по цих підкомпонентах. Зокрема, це матиме місце, якщо елементами $\mathcal{A}$ будуть числові вектори однакової розмірності.

1.3 Неперервні постановки ECOPs

Розглянемо ECOP, виділивши в обмеженнях (1.9) рівняння і розглянувши її як задачу математичного програмування (далі *ECOP1*) вигляду (1.12), де $E' = \{x \in E : \ f_i^1(x) \le 0, i \in I^1; \ \ f_i^2(x) = 0, i \in I^2\}$, E – FPC у $\mathbb{R}^n$.

Методи розв'язання ECOP1 діляться на дві великі групи – методи дискретного програмування (дискретні методи), такі, як методи гілок і меж, методи відсікань та ін. [13,51,59,71,121,132,142,173,174,211,212,215,258,298,353], неперервні методи, що передбачають побудову неперервних формулювань дискретних задач, їх неперервних релаксацій та ін., із подальшим застосуванням до їх розв'язання методів нелінійного програмування [1, 21, 30, 163, 164, 175, 185, 219, 263]. Цей поділ доволі умовний. Так, методи гілок і меж потребують знаходження оцінок на кожному кроці перегляду дерева розв'язків, що зазвичай здійснюється по неперервних релаксаціях вихідної задачі. Методи відсікань також зводяться до розв'язання серії подібних неперервних релаксацій.

Методи гілок і меж ґрунтуються на побудові і напрямленому перегляді дерева розв'язків задачі, для формування якого досліджуються структурні властивості множини E з метою пошуку різних схем його декомпозиції на підмножини, зокрема, способів їх розбиття. Оскільки у нашому випадку E – множина точок евклідова простору, ці декомпозиції можна пов'язати з різними її розкладаннями по гіперплощинах, опуклих поверхнях тощо, а також використовувати властивості цих поверхонь та FPCs, отриманих у перетині з ними. Як зазначено у [145], ефективність розв'язання COP у формі ECOP1 суттєво залежить як від кількості компонент у розкладаннях, так і від вигляду поверхонь, взятих за їх основу.

У методах відсікань структурні властивості E використовуються для побудови правильних відсікань, тобто таких, що відтинають частину допустимої області неперервної релаксаційної задачі, не відтинаючи жодної допустимої точки ECOP1. Якомога глибше відсікання – це бажана мета і в цьому напрямку досліджень особливої важливості набувають не тільки шляхи виділення якомога більших областей багатогранника $P = conv\,E$, вільних від точок E, але і виділення таких "вільних"областей на опуклих поверхнях, описаних навколо E, у тих випадках, коли такі поверхні існують.

Неперервні або алгебраїчні [145, 333] формулювання ECOP1 передбачають пошук аналітичного опису E вигляду:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f_i^1(x) \leq 0, i \in I^3; \; f_i^2(x) = 0, i \in I^4\},$$

де функції $f_i^1(x), i \in I^3; \; F_i^2(x), i \in I^4$, відомі, визначені на E, більш того, неперервні в області $D \supset E$, у якій проводиться оптимізація.

Якщо таке представлення для E знайдено, ECOP дозволяє формулювання у формі задачі нелінійного програмування (далі неперервна постановка ECOP, a continuous ECOP-formulation, $CECOP$):

$$f(x) \to \min,$$
$$f_i^1(x) \le 0, i \in I^1 \cup I^3;\ f_i^2(x) = 0, i \in I^2 \cup I^4.$$

CECOP являє собою задачу на умовний екстремум, а у випадку $I^1 = I^3 = \emptyset$ – класичну задачу на умовний екстремум. Після переходу до CECOP, до розв'язання вихідної ECOP1 стає застосовуваним апарат нелінійного програмування $[21, 30, 164]$. Залежно від того, якими властивостями володіють функції, що присутні у CECOP, – диференційованість, опуклість і т.п., – арсенал застосовних методів неперервної оптимізації різний, але в будь-якому випадку передбачається неперервність цих функцій.

Таким чином, виникає питання пошуку різних представлень допустимої області ECOP у формі:

$$E' = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f_i^1(x) \le 0, i \in I^1 \cup I^3;\ f_i^2(x) = 0, i \in I^2 \cup I^4\},$$

де $f_i^1(x), i \in I^1 \cup I^3;\ f_i^2(x), i \in I^2 \cup I^4$ – неперервні на D. У роботах $[185–189, 254, 333]$, до них використовуються терміни "неперервне функціональне представлення"або "f–представлення".

Серед f–представлень, особливе місце займають два класи – строгі [333], коли CECOP являє собою класичну задачу на умовний екстремум, а також поліедрально-поверхневі, що складаються з лінійної системи обмежень багатогранника P та рівняння описаної навколо нього опуклої гіперповерхні S. Інтерес до побудови строгих f–представлень викликаний тим, що в результаті їх знаходження з'являється можливість застосовувати до розв'язання ECOP1 такі методи, як метод Ньютона, метод множників Лагранжа, штрафні методи, лагранжеві релаксації, прямо-двоїсті методи і т.п. $[25, 84, 121, 143, 164]$, а до поліедрально-поверхневих f–представлень – можливістю в окремих випадках еквівалентного формулювання ECOP1 у такій формі (далі a convex ECOP-formulation, *C'ECOP*) $[254, 331]$: знайти

$$\min_{x\in E} F(x),$$
$$F_i^1(x)\le 0,\ i\in I^1; F_i^2(x)\le 0,\ F_i^3(x)\le 0,\ i\in I^2,$$

де $F(x)$, $F_i^1(x), i\in I^1; F_i^2(x)$, $F_i^3(x)$, $i\in I^2$ – неперервні на D, а також опуклі і диференційовні на опуклому компакті $\mathcal{K}$: $D\supseteq\mathcal{K}\supseteq P$. Зокрема, це дозволяє, замість поліедральної релаксації ЕСОР вигляду: знайти

$$\min_{x\in P} f(x),$$
$$f_i^1(x)\le 0, i\in I^1;\ f_i^2(x)\le 0,\ i\in I^2,$$

отриманої з ЕСОР заміною умови $x\in E$ умовою $x\in P$, розглядати поліедральну релаксацію С'ЕСОР вигляду: знайти

$$\min_{x\in P} F(x),$$
$$F_i^1(x)\le 0, i\in I^1;\ F_i^2(x)\le 0,\ F_i^3(x)\le 0,\ i\in I^2,$$

що являє собою опуклу задачу оптимізації, відповідно, весь спектр методів опуклого програмування [27–29, 46, 200, 243] застосовуваний до її розв'язання. Якщо ж для E існує опукла описана поверхня S $\mathcal{K}\supseteq S$, з'являється можливість розглядати ще одну, так звану поверхневу [186], релаксацію С'ЕСОР вигляду: знайти

$$\min_{x\in S} F(x), F_i^1(x)\le 0, i\in I^1;\ F_i^2(x)\le 0,\ F_i^3(x)\le 0,\ i\in I^2.$$

Вона представляє собою задачу оптимізації опуклої функції на повній опуклій поверхні і може бути розв'язана методами, що узагальнюють методи опуклого програмування на даний випадок [64, 81, 93, 127].

Крім того, виникає можливість поєднувати поліедральну та поверхневу релаксації ЕСОР з метою отримання більш точних нижніх оцінок, а, відповідно, використовувати обидві ці релаксації як у схемах гілок і меж, так і в методах відсікань [185, 186, 188, 189, 236, 254, 314, 379]. Цю особливість оптимізаційних задач на множинах, що дозволяють поліедрально-поверхневі представлення, покладено в основу ряду методів ЕСО.

Так, прикладом групи методів типу гілок і меж є поліедрально-поверхневий метод гілок і меж (the Branch and Bound Polyhedral-Surface Method, B&B.PSM) нелінійної оптимізації на поверхнево розташованих дискретних множинах без додаткових функціональних обмежень [185, 186, 189, 236]. Прикладом методів відсікань є метод поверхнево-комбінаторних відсікань (the surfaced-combinatorial cutting method, MSCC) для умовних лінійних задач на сферично розташованих дискретних множинах [181, 314].

Ці самі релаксації – поліедральна та поверхнева – лежать також в основі наближених поліедрально-поверхневих методів [186, 189, 236, 327, 368, 379].

Слід зазначити, що безпосередню побудову поліедрально-поверхневих представлень у вихідному просторі дозволяють лише так звані вершинно-розташовані множини, тобто ті, що збігаються з множиною вершин своєї опуклої оболонки. Зазначимо, що ECOP завжди може бути зведена до задачі оптимізації на вершинно розташованій множині у розширеному просторі або до розв'язання серії задач на вершинно розташованих множинах у вихідному просторі [369], тобто всі методи, засновані на застосуванні поліедральних і поверхневих релаксаціях, застосовні до розв'язання ECOPs.

1.4 Неперервні постановки ECOPs: Приклади

Задача здійснимості булевих формул. Задача здійснимості булевих формул (the satisfiability problem, SAT-задача) є однією з класичних NP-повних задач комбінаторної оптимізації, що є центральною у математичній логіці, комп'ютерній теорії, штучному інтелекті, а також що має безліч практичних застосувань [107, 124, 126, 244].

Постановка задачі. Нехай $x_1, ..., x_n$ – множина булевих змінних, що бере участь у булевій формулі, де значення $y = 0$ відображає, що логічний вираз, що задається y, хибний (false), а $y = 1$ – що він істинний (true). Нехай також $\neg y$ позначає заперечення y. Літерал (a literal) – це змінна або її заперечення. Логічний вислів (a clause) – це вираз, який може бути побудований за допомогою літералів та логічної операції "або" ($\vee$).

Задача полягає в тому, щоб для заданої множини логічних висловів $C_1, ..., C_m$ перевірити, чи існує призначення змінним булевих значень, що робить булеву формулу $\phi = \phi(C_1, ..., C_m)$ виконуваною, тобто істиною. Якщо ϕ представлена у кон'юнктивній нормальній формі (a conjunctive normal form, CNF):

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \ldots \wedge C_m, \tag{1.29}$$

де $\wedge$ є логічною операцією "ізадача позначається CNFSAT. Окремим її випадком є k-SAT, коли кількість логічних операцій у кожному вислові не перевищує k, і яка є NP-повною при $k \geq 3$.

Вичерпний список методів розв'язання SAT наведений у [107, 126, 175]. Коротко перелічимо ті з них, що пов'язані із моделями як задач дискретного та неперервного програмування, та наведені у [175].

Так, SAT може бути представлена у формі задачі пошуку допустимого бінарного вектору $x' \in \mathbb{R}^m$, що задовольняє лінійні обмеження (далі *SAT.M1*):

$$\begin{aligned} &Ax' \leq a, \\ &x' \in B'_m, \end{aligned} \tag{1.30}$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

SAT.M1 може бути переформульована і представлена як задача оптимізації (далі *SAT.M2*) вигляду (1.30),

$$x'^T x \to \max,$$
$$-\mathbf{e} \le x' \le \mathbf{e},$$
$$x' \in \mathbb{R}^m,$$

що є задачею угнутого програмування[2)].

Згідно з [124], у такій "неперервній"постановці SAT значно ефективніше, ніж у формі SAT.M2, розв'язується методом внутрішньої точки (an interior point method) [46, 164], застосованим до SAT.M2, представленій у формі (1.31),

$$\psi(x) = log(n - x'^T x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_k^T x') \to \min$$
$$B^T x' \le b,$$

де $B = [A, \mathbf{E}, -\mathbf{E}] \in \mathbb{R}^{n\times K}$, $b = (a^T, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^K$, $B = (b_k)_{k\in K}$, $b_k^T \in \mathbb{R}^n$, $k \in J_K$, $k = m + 2n$, $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Ще один підхід пов'язаний із еквівалентним переходом від логічної форми φ до алгебраїчної шляхом перетворень булевих коннекторів $\vee, \wedge$ на $+, -$. У результаті такого перетворення отримується алгебраїчний вираз, що задається $\Phi(x) : B_n \to B_1$, і задача може бути сформульована у формі задачі пошуку розв'язку алгебраїчного рівняння $\Phi(x) = 1$ на множині B_n або у вигляді задачі оптимізації (далі *SAT.M3*)

$$\Phi(x) \to \max,\ x \in B_n. \tag{1.31}$$

Так, у [107] наведено два способи таких перетворень, у ході яких кожен логічний вислів представляється добутком кусково заданих функцій, що ставляться у відповідність кожному складовому літералу. В одному випадку $\Phi(x)$ є недиференційованою, у другому – диференційованою, відповідно,

[2)]Тут і далі $\mathbf{e}$ – вектор з одиниць відповідної розмірності

SAT.M3 є недиференційованою або диференційованою задачею глобальної оптимізації. Обчислювальні експерименти, проведені SAT.M3, та порівняння з класичними методами, показали значну перевагу застосування неперервних підходів до розв'язання SAT [107].

Задача про максимальну зважену незалежну множину вершин графа (the Maximum Weight Independent Set Problem, MWIS). Нехай граф (1.14) – неорієнтований, при цьому вершинам поставлені у відповідність ваги $\omega_i \geq 0$, $v_i \in \mathbf{V}$. Треба знайти незалежну множину вершин $V' \subseteq \mathbf{V}$, сумарна вага якої максимальна [13, 89]. Якщо усі ваги вершин одиничні, MWIS є задачею про максимальну незалежну множину вершин графа (the Maximum Independent Set Problem, MISP) .

Різні математичні моделі MWIS та MISP та методи розв'язання наведені у [175, 244]. Наведемо деякі з них, фокусуючись при цьому на їх евклідових постановках.

Математична модель MWIS як задачі комбінаторної оптимізації (далі *MWIS.M1*):

$$\varphi(V') = \sum_{v_i \in V'} w_i \to \max;$$
$$V' \subseteq \mathbf{V};\ \forall u, v \in V' \quad (u, v) \notin \mathcal{E}.$$

Евклідова модель цієї задачі (далі *MWIS.M2*):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max; \tag{1.32}$$
$$Ax \leq \mathbf{e};$$
$$x \in B_n, \tag{1.33}$$

де $A \in \mathcal{B}_{m \times n}$ – матриця інцидентності $\mathcal{G}$, що представляє MWIS у формі умовної лінійної булевої задачі. Ще одна постановка (далі *MWIS.M3*) цього класу має вигляд (1.32), (1.33),

$$x_i + x_j \leq 1,\ (v_i, v_j) \in \mathcal{E}. \tag{1.34}$$

У свою чергу, заміна умови (1.33) такою –

$$x_i^2\text{-}x_i = 0,\ i \in J_n, \tag{1.35}$$

приводить до формування алгебраїчної постановки MWIS вигляду (1.32), (1.34), (1.35) (далі *MWIS.M4*) як неопуклої квадратичної задачі оптимізації.

Ще одна постановка MWIS як задачі на умовний екстремум, у даному випадку класичної, має вигляд (1.32), (1.35),

$$x_i x_j = 0,\ (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \tag{1.36}$$

(далі *MWIS.M5*) [221,222]. Той факт, що (1.35), (1.36) представляє допустиму булеву область за допомогою квадратичних обмежень дозволило застосувати двоїсті квадратичні оцінки Н.З. Шора [221, 354] і показало гарні результати обчислювальних експериментів. У той же час як булеві постановки MWIS, такі, як MWIS.M2, MWIS.M3, дають достатньо точні верхні оцінки, натомість вимагаючи значних ресурсів, порівняно з іншими методами [177, 244].

Ще дві моделі MWIS такі:

а) MWIS.M6 –

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j \to \max; \\ \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{e}; \end{gathered} \tag{1.37}$$

б) MWIS.M7 – (1.37),

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i (1 - x_i) \prod_{(i,j)\in E} x_j \to \max.$$

Ці дві задачі є неопуклими оптимізаційними задачами на одиничному гіперкубі (1.37), причому MWIS.M6 – квадратична, MWIS.M7 – поліноміальна, степінь якої дорівнює максимальному степеню вершин $\mathcal{G}$. Обчислювальні результати для них стосовно MISP наведено у [1], інші математичні моделі – MWIS, MISP, зокрема, у класі задач напіввизначеного програмування [8], зібрані у [175].

Загальний висновок, що можна зробити по результатах проведеного аналізу, що деякі задачі комбінаторної оптимізації дозволяють різноманітні формулювання. "Неперервні"формулювання серед них займають особливе місце, демонструючи перспективність їх використання.

У розділі 8 буде встановлено зв'язок між моделями SAT.M1-3, MWIS.M1-7, побудовано нові математичні моделі та проведено їх порівняльний аналіз.

1.5 Евклідова комбінаторна оптимізація

Фундаментальні дослідження у евклідовій комбінаторній оптимізації умовно можна розділити на три взаємопов'язаних напрямки [279,364,370,378]:

– вивчення алгебро-топологічних та тополого-метричних властивостей е-множин, занурених у евклідів простір;

– дослідження поведінки функцій, заданих на образах евклідових комбінаторних множин, у тому числі вивчення властивостей опуклих продовжень [374] цих функцій на опуклі оболонки зазначених множин;

– розроблення нових методів евклідової комбінаторної оптимізації.

Основна задача, яка розглядається у ECO – це COP (1.5)-(1.7), де Π – е-множина, а основний інструмент її розв'язання – побудова еквівалентної ECOP вигляду (1.11), (1.12), де E – відповідна s-множина, з подальшим її розв'язанням та відшукання π^* за x^*.

Властивості евклідових комбінаторних множин, занурених у евклідів простір, та їх опуклих оболонок описані в роботах [17,173,258,279,364,370,378].

Зауважимо, що широкий клас е-множин володіє тією властивістю, що їх точки і тільки вони є вершинами своїх опуклих оболонок – комбінаторних багатогранників. Такі множини називаються вершинно розташованими [374], а ті з них, що лежать на гіперсфері, – поліедрально-сферичними [254, 369].

Теорія опуклих продовжень функцій, заданих на вершинно розташованих множинах, докладно викладена [366, 374] і отримала розвиток, у тому числі для поліедрально-сферичних множин, у роботах [189, 236, 251, 254, 255, 269, 271, 375, 378, 379].

Основні алгоритми і методи евклідової комбінаторної оптимізації висвітлені в [236, 252, 272, 279, 293, 350, 363, 364, 370, 379]. Зокрема, питанням умовної лінійної оптимізації на s-множинах присвячені роботи [256, 261, 292, 310, 363, 370, 377, 377], безумовної квадратичної оптимізації – роботи [185, 186, 189, 236, 379], дробово-лінійної оптимізації – [74, 117, 293], негладкої оптимізації – [291, 364].

Серед узагальнень ЕСОР (1.11), (1.12) слід назвати лінійні параметричні задачі ЕСО, де параметр може бути присутній як у цільовій функції [24, 270, 272], так і в параметрах s-множини [260, 341]. Ще один напрямок – це багатокритеріальна оптимізація [76, 214, 222], напряму пов'язаний із параметричною оптимізацією за умови застосування методу лінійної згортки [76]. З лінійною параметричною оптимізацією також пов'язана задача оптимізації дробово-лінійної функції [74, 293]. У свою чергу, для дробово-лінійної оптимізації на перестановках свою ефективність показав метод розширення простору і зведення задачі до оптимізації лінійної функції на багатограннику, породженому загальним багатогранником перестановок [74, 293]. Також слід відзначити напрямок ЕСО, пов'язаний із виділенням різноманітних класів лексикографічної еквівалентності [18, 117].

Практичні задачі оптимізації часто дозволяють різні формулювання – у вигляді задач на графах, цілочисельних, комбінаторних або неперервних оптимізаційних задач [17, 173, 258, 364, 370], представляючи допустиму область графом, цілочисльною решіткою з додатковими обмеженнями, комбінаторною множиною або перетином неперервних областей евклідова простору, відповідно. Кожна з таких постановок породжує свої методи оптимізації, серед яких останні формулювання, що використовують аналітичні описи (або неперервні функціональні представлення) дискретних множин, займають особливе місце, оскільки дозволяють використання всього арсеналу математичного програмування до їх розв'язання.

Оскільки евклідові комбінаторні множини дозволяють занурення, вони представляють особливий інтерес з точки зору можливості неперервних функціональних представлень [333, 369]. Один із напрямків їх формування пов'язаний із дослідженням їх геометричних образів (s-множин) та їх опуклих оболонок – відповідних комбінаторних багатогранників. Подібно до того, як аналітичним представленням багатогранника (H–представленням, P.HR) служить лінійна система його обмежень, неперервним представленням вершинно розташованої множини є H–представлення відповідного багатогранника, доповнене рівнянням описаної навколо багатогранника поверхні. У результаті чого будується так зване поліедрально-поверхневе представлення s-множини [186, 333, 369]. Таким чином, важливості набувають задачі пошуку H–представлень багатогранників, а серед них незвідних та розширених. Останні дві задачі націлені на вирішення проблеми уникнення розгляду H–представлень із надто великою кількістю обмежень (порядком H–представлення). Розширене формулювання (an extended formulation, розширене H-представлення, P.EHR) багатогранника [123] – це лінійна система обмежень, задана у іншому просторі, така що існує лінійне перетворення між вихідним та результуючим багатогранниками. Метою побудови P.EHRs, зазвичай, є зменшення кількості обмежень багатогранника, бажано суттєве і за рахунок незначного збільшення розмірності простору. Окрім цього, іноді P.EHR краще підкреслюють структуру вихідної задачі, оскільки не усі потрібні аспекти можуть бути лінійно описані у вихідному просторі, на відміну від результуючого. З розв'язанням задачі пошуку H–представлень, у тому числі релаксованих, пов'язано цілий розділ математики, що називається поліедральна комбінаторика (Polyhedral Combinatorics) [17, 104, 112, 195, 211, 258]. Той факт, що клас комбінаторних множин, які дозволяють розв'язати цю задачу, є досить обмеженим, закладено у терміні «a perfect formulation» задач комбінаторної оптимізації, для тих небагатьох із них, H–представлення відповідних багатогранників яких відомі [58].

Ще один напрямок формування аналітичних представлень е-множин пов'язаний із пошуком систем рівнянь, які задають у евклідовому просторі дійсне різноманіття, яке збігається з заданою е-множиною. Якщо при цьому шукається алгебраїчна система, ця задача є оберненою до проблеми дослідження властивостей області, заданої поліноміальними рівняннями, яка є основною задачею дійсної алгебраїчній геометрії (Real Algebraic Geometry, RAG) [36, 60, 79, 110, 245]. Для допомоги розв'язанню нашої задачі, RAG-інструментарій потребує розширення та вдосконалення, у т.ч., перенесення з кільця поліномів на кільце неперервних функцій.

1.6 Конфігурації

Згідно з [268], термін «конфігурація» (від пізднєлатинського *configuratio* – надання форми, розташування). Комбінаторні конфігурації, їх класифікацію та властивості розглянемо відповідно до [22, 116, 150, 204, 216, 283, 285, 286, 360, 361].

У математиці, конфігурація зазвичай відображає деяке розташування множини точок і прямих на площині або поверхонь у просторі [57, 105, 190]. Досить повний огляд публікацій, присвячених таким, так званим «геометричним», конфігураціям, представлений у [101].

Сучасне визначення конфігурації у геометричному сенсі можна сформулювати таким чином [61, 101]: «конфігурація – це скінченна інцидентна структура з v точок і r ліній, така що: а) k точок лежить на кожній лінії; б) у точності m ліній проходить через кожну точку; в) через будь-які дві точки проходить не більше однієї лінії».

Якщо припустити, що лініями є прямі, то під конфігурацією розуміється скінченна інцидентна структура з v точок і r прямих, така що k точок лежать на кожній прямій і в точності m прямих проходять через кожну точку.

Основні проблеми, досліджувані в теорії геометричних конфігурацій для заданих параметрів v, r, k, m, полягають у виділенні та доведенні існування різних класів конфігурацій, а також визначенні кількості неізоморфних конфігурацій.

Спочатку ці дослідження проводилися геометричними методами шляхом безпосередньої побудови конфігурацій на площині. Потім В. Мартінетті (V. Martinetti) було запропоновано комбінаторний підхід до дослідження геометричних конфігурацій [153]. При цьому задачу існування і перечислення конфігурацій пропонувалося розв'язувати рекурсивно, виходячи з розв'язків для конфігурацій меншої потужності.

Х. Шротер (H. Schroter) звернув увагу на те, що не всі такі «теоретичні» конфігурації В. Мартінетті можуть бути геометрично побудовані на площині. В результаті він відійшов від геометричної сторони конфігурацій, залишивши комбінаторну, і ввівши означення конфігурації у термінах «елемент» і «стовпець» [213] замість «точок» та «ліній». При цьому конфігурація представлялася булевою матрицею порядку $r \times v$, в якій стовпці відповідають прямим, рядки – точкам їх перетину, а сама вона є матрицею призначень прямих точкам ї перетину. На сьогодні, довільну булеву матрицю розглядають як конфігурацію, якій відповідає клас еквівалентності матриць, отриманих довільною перестановкою рядків і стовпців цієї матриці [202].

У роботах [94, 242] зустрічаються конфігурації в іншому контексті, а саме, множина точок у евклідовому просторі іменується точковою конфігурацією (a point configuration, PC), а скінченна така множина – a finite PC

(FPC). Сучасну класифікацію конфігурацій точок і ліній дає Б. Грюнбаум (B. Grunbaum) у [105], виділяючи серед них три види – топологічні, геометричні та комбінаторні. Конфігурацію називають топологічною, якщо вона задає деяке розміщення псевдоліній у проективній площині з множиною їх перетинів. Конфігурації відносять до геометричних, якщо лінії розглядаються в евклідовій або проективній площині, а точки формуються у перетині цих ліній. У комбінаторних конфігураціях як точки та лінії вибираються абстрактні множини.

На даний час, дослідження комбінаторних конфігурацій виділилося в окремий напрям дискретної математики, засновником якого вважається К. Берж (C. Berge). Згідно з К. Бержем [22], конфігурація – це відображення деякої вихідної множини елементів довільної природи у скінченну абстрактну результуючу множину певної структури за умови виконання заданого набору обмежень.

Відповідно до класифікації [22], виділені основні задачі, які розв'язуються у комбінаторному аналізі: вивчення відомих конфігурацій, формування нових класів конфігурацій із наперед заданими властивостями, формування нових класів конфігурації із наперед заданими властивостями, перечислення конфігурацій (перелічувальна комбінаторика), перерахування (генерація) конфігурацій, оптимізація на множини конфігурацій.

Дослідженню конфігурацій за К. Бержем присвячено, зокрема, роботи [23, 116, 136, 150, 204, 216, 283–286, 360, 361]. При цьому у випадку скінченної вихідної множин зазвичай використовується термін «комбінаторна конфігурація».

У роботах [116,216,283,285] поняття комбінаторної конфігурації отримало розвиток шляхом ослаблення умов на скінченність результуючої множини. Для виділення випадку її зліченності використовується поняття комбінаторного об'єкту, зокрема, комбінаторного об'єкту k-го порядку. Це дозволило значно розширити клас реальних задач, які можуть бути формалізовані з використанням понять комбінаторних конфігурацій та об'єктів.

1.7 Оцінки функцій

Нехай множина $E = E_{nk}(G) \subset \mathbb{R}^n$ – образ у $\mathbb{R}^n$ е-множини перестановок із числової мультимножини G потужності n, що містить k різних елементи, на якій задано функцію φ. Якщо φ опукла на K, що є опуклою надмножиною E, її нижню оцінку на E можна знайти згідно з результатами, наведеними у [365].

Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ – опукла замкнена множина, $E \subset K$, $\varphi : K \to \mathbb{R}^1$.

Теорема 1.1. Якщо $\varphi\,(x)$ – опукла та диференційовна на K, то $\forall\, x \in K$

$$\min_{y\in E} \varphi\ (y) \geq \varphi\ (x) - (\nabla\varphi\,(x), x) + \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\, x_i} y_i. \tag{1.38}$$

Теорема 1.2. Нехай $\varphi\,(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на K, то

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \geq \varphi(y^*) + \rho \min_{x\in E} \|x - y^*\|^2, \tag{1.39}$$

де $y^* = \arg\min_{y\in K} \varphi\ (y)$.

Теорема 1.3. Якщо $\varphi\,(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ та диференційовна на K, то $\forall x \in K$

$$\min_{y\in E} \varphi(y) \geq \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + \rho \min_{y\in E} \left\| y - \ x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x) \right\|^2. \tag{1.40}$$

Теорема 1.4. Для того, щоб точка $y^{**} \in E$ доставляла мінімум на E опуклої та диференційованої на K функції φ, достатньо, щоб

$$\min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\, x_i} y_i = (\nabla\varphi\,(y^*), y^*). \tag{1.41}$$

У роботі [249, 373, 379] ці оцінки було конкретизовано для класу $E_{nk}(G)$

та узагальнено на образи e-множин розміщень без повторень та з необмеженими повтореннями, зокрема, булевих. У роботі [367] цей результат було узагальнено на довільну скінченну множину $\mathbb{R}^n$ і доведено, що теореми 1.1-1.4 вірні для довільної вершинно розташованої FPC E.

У роботах [288,370] ці оцінки та достатню умову (1.41) було узагальнено на випадок недиференційованих функцій та досліджені шляхи покращення цих оцінок. Так, наприклад, узагальнення теореми 1.1 виглядає так.

Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ – опукла замкнена множина, $E \subseteq K$, $\varphi : K \to \mathbb{R}^1$.

Теорема 1.5. Якщо $\varphi(x)$ – опукла на K, то $\forall\, x \in K$

$$\min_{y\in E} \varphi\,(y) \geq \varphi\,(x) - (\bar{\nabla}\varphi\,(x), x) + \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_i \varphi\,(x) y_i,$$

де $\bar{\nabla}\varphi\,(x) = (\bar{\nabla}_i \varphi\,(x))_{i\in J_n}$ – субградієнт функції $\varphi\,(x)$ у точці x.

Аналогічні узагальнення мають місце для теорем 1.3, 1.4, у яких формули (1.40), (1.41) потребують заміни: $\nabla\varphi\,(x) \to \bar{\nabla}\varphi\,(x)$, $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\, x_i} \to \bar{\nabla}_i\varphi\,(x)$, $i \in J_n$ [288]. Зокрема, має місце такий результат. Для того, щоб точка y^* доставляла мінімум опуклої на K функції φ, достатньо, щоб

$$\min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_i \varphi\,(x) = (\bar{\nabla}\varphi\,(y^*), y^*).$$

У роботі [73] оцінки з [288] було конкретизовано для образу у $\mathbb{R}^n$ e-множини сполучень з необмеженими повтореннями [287, 296].

Окрім даного узагальнення результатів [367], далі розвиток теорії оцінок на образах e-множин відбувався у напрямку подальшої конкретизації (1.38)-(1.40) для окремих класів FPCs, таких як підмножини булевої множини B_n, що розташовані на однаковій відстані від певної її точки [274] (далі $B_n(x^0, m)$, де $x_0 \in B_n$, $m \in \mathbb{N}^1$), образи у евклідовому просторі e-множини поліперестановок [288], полірозміщень [291], а також деякі інші композиційні образи [275, 277, 279, 280].

У роботах [279–281] вивчалося також питання покращення оцінок (1.38)-(1.40) за допомогою оптимізації по x, ρ. Зазначимо, що можливість побудови цих нижніх оцінок пов'язана із можливістю ефективного вирішення лінійної оптимізаційної задачі на E та задачі проектування на E. Саме тому у роботах [249, 279, 365, 370, 379] увагу було зосереджено на розв'язанні цих двох задач.

Дані оцінки стосуються опуклих функцій. Можливість побудови нижніх оцінок функції довільного вигляду, заданої на FPC, лежить у пошуку можливостей переходу до розгляду замість $\varphi(x)$ опуклої функцій $\Phi(x)$ такої, що

$$\Phi(x) \underset{E}{\leq} \varphi(x). \tag{1.42}$$

Один із засобів це зробити – це побудова $\Phi(x) = \partial(conv\ \Psi(x))$ як границі опуклої оболонки $\Psi(x)$ надграфіка $\varphi(x)$, яку називають опуклою оболонкою (a convex envelope) функції $\varphi(x)$ і позначають $\Psi(x) = conv\ \varphi(x)$ [241]. У такому випадку (1.42) посилюється до $\Phi(x) \underset{conv\ E}{\leq} \varphi(x)$. Інший шлях пов'язаний з побудовою опуклих продовжень $\varphi(x)$ [251, 374], коли (1.42) виконується як рівність.

1.8 Продовження функцій

У математиці загальновживаним є поняття звуження функції з області її визначення у власну підмножину цієї області.

Означення 1.1. Нехай $F : E' \to D$, $E \subset E'$, то функція $f : E \to D$, що збігається із F на E, називається *звуженням* (a restriction) функції F на множину E.

Для функції f, що є звуженням функції F на E використовують позначення $f = F|_E$. Відповідно функція F називається *продовженням* функції f на множину E'.

Для відображення, що $\forall x \in E: \ f(x) = F(x)$, тобто F збігається з f

на E, використовують таке позначення [251]:

$$F(x) \underset{E}{=} f(x). \tag{1.43}$$

Продовження функції тепер можна визначити таким чином.

Означення 1.2. Продовженням (an extension) функції $f(x)$ з E на $E' \supset E$ називається функція $F(x)$, яка визначена на E' та задовольняє умову (1.43).

При цьому область E, з якої здійснюється продовження, називається *областю продовження* (an extension domain) [56].

З його допомогою, означення (1.2) можна переформулювати таким чином.

Означення 1.3. Продовженням функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ з E на $E' \supset E$ називається функція $F : E' \to \mathbb{R}^1$, яка задовольняє умову (1.43).

Продовження різних типів – опуклі, угнуті, гладкі, Ліпшицеві продовження і т.ін. – зустрічаються у науковій літературі [49, 63, 140, 179, 203, 241, 247, 257, 375]. Крім того, розглядаються різні типи області продовжень E та області E', на які вони проводяться. Так, як E вибирається границя деякої області або її частина, наприклад, множина її крайніх точок, опуклі, скінченні та зліченні множини і т.д., у той час як за E' може бути вибрано весь простір $\mathbb{R}^n$, опукла оболонка E та інша власна надмножини E.

Можна виділити три основні напрямки досліджень продовжень – це неперервні, диференційовані, у т.ч. аналітичні, а також опуклі та угнуті продовження.

Так, у роботі [247], Х. Уітні (H. Whitney) зазначає, що проблема побудови неперервного продовження на весь простір завжди розв'язувана, якщо область продовження є замкненою множиною. Так, при виконанні певного набору умов, таке продовження є розв'язком задачі Діріхле і функцією, гармонічною на $\overline{E} = \mathbb{R}^n \backslash E$ та такою, що набуває заданих значень на E.

Виходячи з цього, Х. Уітні поставив нові питання: а) чи можна побудувати таке неперервне продовження, що є диференційованим, а можливо і аналітичним, на $\overline{E}$; б) якщо так, то чи можна зробити це продовження гладким до певного порядку у разі, якщо f має цей порядок гладкості на E. Фундаментальним результатом [247] є така теорема.

Теорема 1.6. (Теорема Уітні про продовження/Whitney extension theorem) Нехай E – замкнена множина у $\mathbb{R}^n$, а $f(x) = f^{(0)}(x)$ – $\mathbf{C}^m(E)$-функція (m скінченне чи нескінченне) у сенсі $f^{(j)}(x)(\sigma_j \in J_m)$[3)]. У такому випадку існує функція $F(x) \in \mathbf{C}^m(E)$[4)] у звичайному сенсі, така що виконані умови (1.43)

$$\begin{aligned} &D^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) \in E(\sigma_j \in J_m), \\ &F(x) \text{ аналітична у } \mathbb{R}^n \backslash E. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Теорема 1.6 дає достатні умови існування диференційованого, у тому числі нескінченно диференційованого, продовження функції, аналітичного на $\overline{E}$, що забезпечує не тільки виконання (1.43), але і подібних умов на похідні. Крім того, у роботі [247] досліджено особливості продовжень з множини ізольованих точок, а результат сформульовано у вигляді теореми Х. Уітні про продовження для множини ізольованих точок, скінченної чи зліченної (Whitney extension theorem for isolated points (finite or countable)).

Перейдемо до розгляду опуклих продовжень. Серед усіх класів продовжень функцій вони займають особливе місце. З одного боку, це певним чином пов'язано із попередньою задачею побудови продовження заданого порядку гладкості, адже, згідно з [3], опуклі функції є двічі неперервно диференційованими майже усюди. З іншого боку, опуклі продовження мають багато практичних застосувань у геометричному аналізі, нелінійній динаміці, квантових обчисленнях та економіці (див. посилання у [257]) і, звичайно, у

[3)]у сенсі Уітні, тобто задовольняє умови Уітні [247]

[4)]$\mathbf{C}^m(E)$ – функція з порядком гладкості m на E

оптимізації [63, 186, 236, 241, 257].

Зазвичай, говорячи про побудову опуклих продовжень, мова йде про те, що не тільки область E', на яку вони відбуваються, але і область продовження E, опуклі. У такому випадку можна сказати, що опукле продовження завжди існує, адже для побудови $F(x)$, достатньо довизначити $f(x)$ на $\overline{E}$ значенням $+\infty$, а потім перейти до опуклої оболонки надграфіка одержаної функції [69]. Але, як зазначає автор [257], такий спосіб придатний у деяких застосуваннях таких як оптимізація, зокрема, опуклий аналіз, та теоретичних областях, таких як теорія двоїстості, але у варіаційному численні вже потрібні більш аналітичні підходи до побудови опуклих продовжень. Саме тому вирішенню цих питань приділяється особлива увага [69, 140, 203].

Між тим, не абиякий інтерес представляють питання побудови опуклих продовжень з неопуклих областей [179], зокрема з частини частин границь опуклих областей [241], у тому числі з множин вершин багатогранників [63, 251].

Так, у роботі [373] С. В. Яковлев сформулював ряд фундаментальних теорем про існування опуклих продовжень функцій зі скінченних множин, що збігаються з множиною вершин своєї опуклої оболонки, які у подальшому набули назви вершинно-розташованих множин [251, 374]. Наведемо деякі з них, необхідні для подальшого викладення.

Нехай E, E' – такі, що $E' = conv\, E$, $E = vert\, E'$, $n_E = |E|$.

Теорема 1.7. Для будь-якої функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ існує опукла функція $\varphi : E' \to \mathbb{R}^1$, така що $\varphi\left(x\right) \underset{E}{=} f\left(x\right)$.

При цьому функція $\varphi\left(x\right)$ будується у формі

$$\varphi\left(x\right) = \min_{\alpha \in \Lambda(x)} \sum_{i=1}^{n_E} \alpha_i f(x_i), \tag{1.45}$$

$$\Lambda(x) = \left\{(\alpha_1, ..., \alpha_{n_E}) : x = \sum_{i=1}^{n_E} \alpha_i x_i; \sum_{i=1}^{n_E} \alpha_i = 1;\ \alpha_i \in [0, 1],\ x_i \in E,\ i \in J_{n_E}\right\}.$$

і є, згідно з [373], опуклою оболонкою $f(x)$, отже, $\varphi(x) = conv\ f(x)$[5)] для $x \in E'$.

Теорема 1.8. Для будь-якої функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ і довільного $\rho > 0$ існує сильно опукла з параметром не менше ρ функція $\Psi : E \to \mathbb{R}^1$, така що $\Psi\,(x) \underset{E}{=} f\,(x)$.

Теорема 1.9. Для будь-якої функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ існує диференційовна опукла функція $\xi : E \to \mathbb{R}^1$, така що $\xi\,(x) \underset{E}{=} f\,(x)$.

Якщо $|E| > 1$, буде виконано $E \subset E'$, відповідно теореми 1.7-1.9 встановлюють існування опуклого, сильно опуклого та диференційованого продовжень довільної функції $f(x)$ з довільної вершинно розташованої множини E на невироджений у точку багатогранник E'. Ці теореми виражають достатні умови існування не тільки опуклих, але і сильно опуклих та диференційованих опуклих продовжень на багатогранник E'. Виникає питання, які є достатні умови цього і який має критерій існування опуклих продовжень функції в залежності від вигляду області продовження і функції f. Ще одне питання – це розширення області, на яку здійснюється продовження, з $conv\ E$ на опуклу множину $E' \supset convE$, у т.ч. на $E' = \mathbb{R}^n$.

Узагальненням теореми 1.7 є такий результат [179], пов'язаний із спостереженням авторів, що у задачах прийняття рішень в умовах ризику досить часто необхідно продовжити функції опуклим чином з неопуклих областей, що обумовило введення поняття опуклої функції, визначеної на довільній, не обов'язково опуклій, області. Ця потреба була пов'язана з тим, що достатньо часто спостережень, що є вхідними даними математичної моделі, задані на неопуклій, зокрема дискретній, частині простору, при цьому дуже бажано використати у розрахунках усі наявні дані. Для того, щоб відрізнити зазначене поняття із класичним поняттям опуклої функції, використовуватимемо термін "функція, опукла на множині в узагальненому сенсі"(the generalized

[5)]Опуклою оболонкою функції f називається єдиним чином визначене опукле її продовження φ, що задовольняє обмеження $\varphi(x) \geq \phi(x)$ для усіх опуклих продовжень ϕ функції f та $\forall x \in E'$ [63]

convex function, GCF).

Означення 1.4. Нехай $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Функція $f : E \to \mathbb{R}^1$ є GCF на E, якщо для усіх опуклих лінійних комбінацій елементів $\{x^i\}_{i \in I} \subseteq E$, виконано: якщо

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x^i \in E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\sum_{i \in I} \lambda_i x^i) \leq \sum_{i=1}^{|I|} \lambda_i f(x^i). \tag{1.46}$$

Таким чином, GCF є функцією, що задовольняє нерівність Йенсена лише для таких $\{x^i\}_{i \in I} \subseteq E$, опуклі лінійна комбінація яких та також є точкою E.

Теорема 1.10. [179] (extension theorem). Нехай V – лінійний простір над полем дійсних чисел, $E \subset V$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{-\infty, \infty\}$ – GCF. У такому випадку існує опукла функція $F : V \to \overline{\mathbb{R}}^1$, що є продовженням f на V.

Наслідок 1.1. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^1$ – GCF, то існує функція $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, що є опуклим продовженням f на V.

Оскільки при доведенні теореми 1.10 використовується опукле продовження, одержане з (1.45) із заміною min на inf, цей наслідок вказує на існування опуклого продовження будь-якої GCF f у формі (1.45). Оскільки функція, задана на вершинно розташованій множині, є GCF, має місце також такий наслідок.

Наслідок 1.2. Для довільних вершинно розташованої множини E, функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ та опуклої множини $E' \supset E$ існує опукле продовження f з E на E'.

Цей наслідок узагальнює теорему 1.2 з $E' = convE$ на $E' = \mathbb{R}^n$, отже і на довільну опуклу множину $E' \supset E$.

Нарешті, у [241] представлено необхідну і достатню умову існування опуклого продовження, яка використовує той факт, що виконання умови

(1.46) для точок, що представляються опуклою лінійною комбінацією інших точок E, є необхідною умовою існування опуклого продовження функцій.

Теорема 1.11. Опукле продовження $F : E' \to \mathbb{R}^1$ функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ на опуклу множину $E' \supset E$ існує тоді і тільки тоді, коли $\forall x \in E$

$$f(x) \quad \leq \min\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i f(x^i) : \sum_{i\in E}\lambda_i x^i = x; \sum_{i\in I}\lambda_i = 1; \lambda_i \in (0,1), x^i \in E\right\}. \quad (1.47)$$

де сумування відбувається по всіх $I \subset \mathbb{N}, |I| < \infty$.

Зауваження 1.2. При доведенні теореми 1.11, опукле продовження $F(x)$ формується у вигляді

$$F(x) = conv\,\phi(x), \text{ де } \phi(x) = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in E, \\ \infty, \text{ якщо } x \in E' \backslash E. \end{cases} \quad (1.48)$$

Таке опукле продовження перетворюється на (1.45) при виборі $E = vert\,conv\,E$, $E' = conv\,E$ та на запропонований у [69], коли $E \subset \mathbb{R}^n$ – опукла, $E' = \mathbb{R}^n$, тобто є узагальненням цих двох відомих способів формування опуклих продовжень.

Щодо існування опуклих диференційованих продовжень, що узагальнює теорему 1.3, відзначимо нещодавнє дослідження [14], де як область продовження E розглядається опуклий компакт, а також задана функція $f : E \to \mathbb{R}^1$ – опукла, та множина поліномів, що задовольняє умови Уітні (див. [247]). Таким чином, з теоремою 1.6, за умови виконання ряду вимог, існує неперервно диференційовне, до m-го порядку гладкості, продовження, що задовольняє також умови (1.44). Автори [14] досліджують питання, за яких умов можна гарантувати опуклість побудованого в результаті продовження. Вони також вказують на великий інтерес, що привертають в останні роки Уітні-типу продовження при побудові лінійний операторів продовжень із майже оптимальними нормами, при побудові продовжень у просторах, відмінних від евклідова, таких як простори Соболєва. Узагальнення результатів Уітні на клас опуклих функцій цікаве не тільки з теоретичної токи зору, але, на думку авторів [14], має застосування у диференціальній геометрії, частинних диференційних рівняннях тощо.

Що стосується строго та сильно опуклих продовжень, то певним результатом у напрямку їх існування та пошуку конструктивних шляхів побудови можна назвати теорему [235].

Теорема 1.12. Якщо E розташована на гіперсфері $S_r(x^0)$ із центром у точці x^0 радіуса r, функція $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ та має обмежені другі частинні похідні, то $\exists M \in \mathbb{R}^1_+$, таке що

$$F(x,\mu) = f(x) + \mu f_1(x), \tag{1.49}$$

опукла для довільного $\mu \geq M$, де

$$f_1(x) = (x - x^0)^2 - r^2. \tag{1.50}$$

У відповідності з [120], тут і далі величину (1.50) називатимемо *регуляризаційним доданком*, а μ – *параметром регуляризації*.

Наслідок 1.3. Нехай $\rho > 0$, тоді в умовах теореми 1.12 функція (1.49) – строго опукла при $\mu > M$ і сильно опукла з параметром ρ при $\mu \geq M + \rho$.

Теорема 1.12 та наслідок 1.3 вказують необхідні умови існування опуклих (строго/сильно опуклих) двічі неперервно диференційованих продовжень у формі (1.49), (1.50). Окрім того, у [235] отримано нижню оцінку M порогового значення μ, що забезпечує опуклість (1.49).

Наслідок 1.4. [235] Якщо E розташована на гіперсфері $S_r(x^0)$, $f \in \mathbf{C}^2(K)$, де $K \subset \mathbb{R}^n$ – опуклий компакт, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1_{>0}$, таке що для довільного $\mu \geq M(\varepsilon)/M(\varepsilon) + \varepsilon$ функція $F(x,\mu)$ вигляду (1.49), (1.50) є опуклою/сильно опуклою на K з параметром ε.

Можливість уопуклювання $f(x)$ за допомогою $f_1(x)$ можлива у силу сильної опуклості останньої. Виникає питання, чи можна узагальнити теорему 1.12 на випадок опуклих регуляризаційних доданків загального вигляду.

Після того, як існування опуклого продовження встановлено, виникає таке питання про пошук ефективних способів його побудови, що уникає залучення усіх елементів E, як це передбачалося у теоремах 1.7, 1.11, адже представлені у них опуклі продовження для реальних комбінаторних множин, що мають експоненційну потужність, має лише теоретичний інтерес.

У сукупності з вибором параметра регуляризації згідно з [235], формули (1.49), (1.50) дають конструктивний спосіб побудови опуклого продовження з гіперсфери та довільної її підмножини, дискретної чи континуальної.

У роботі [366] був запропонований конструктивний ітераційний підхід до побудови опуклих/угнутих, сильно опуклих/угнутих продовжень мономів з $E_{nk}(G)$, де $G \geq 0$, у ортант $\mathbb{R}^n_+$, складність побудови якого залежить від вигляду моному, зокрема, від його знаку та кількості змінних у ньому, а також від вигляду G, в результаті чого будується негладке опукле продовження. У подальшому цей спосіб набув назву "метод Стояна-Яковлева" [269, 295] (the Stoyan-Yakovlev Method, SYM) та був узагальнений у декількох напрямках. Так, у [269] було зазначено, що кількість арифметичних операцій побудови опуклих продовжень мономів конструктивним методом типу SYM суттєво залежить від способу їх розбиття на пари множників та запропоновано його модифікацію (the Modified SYM, $MSYM$), що використовують різні такі способи. Головним недоліком SYM та MSYM є непропорційне збільшення компонент у результуючому опуклому продовженні моному з додатним знаком при зміні знаку на протилежний. Крім того, у [269, 311] MSYM було перенесено на образ у $\mathbb{R}^n$ загальної множини поліпереставновок $E_{\overline{n}\overline{k}}(\overline{G})$ та дано оцінки складності SYM та різних версій MSYM. Крім того, у роботі [269, 311] було запропоновано спосіб побудови опуклих продовжень поліномів, кількість складових якого для мономів із від'ємним знаком лінійно залежить від кількості складових у відповідних мономах із додатним знаком. Крім того, було представлено три способи формування продовжень у залежності від розбиття мономів на множники та дано значно кращі за SYM, MSYM оцінки кількості арифметичних операцій, а саме квадратичну та кубічну. У роботі [379] було запропоновано спосіб побудови негладких та диференційовних опуклих продовжень поліномів з булевої множини B_n. Далі стосовно конструктивних способів побудови теорія опуклих продовжень розвивалася у напрямку пошуку аналітичних їх виразів у залежності від вигляду комбінаторної області продовження та вигляду функцій, що продовжуються. Головну увагу було приділено опуклим продовженням квадратичних поліномів у формі також квадратичних поліномів [185, 254, 323, 329, 338–340, 347], при цьому за області продовження вибиралися $E_{\overline{n}\overline{k}}(\overline{G})$, $E_{nk}(G)$, B_n, $B_n(m)$ – образ у $\mathbb{R}^n$ булевої множини перестановок, $\mathcal{E}_n$ – образ у $\mathbb{R}^{n^2}$ множини матриць перестановок порядку n, добуток Адамара $E_{nk}(G)$ і B_n. У роботі було розглянуто питання побудови опуклих продовжень кубічних поліномів з множини $E_{nk}(G)$.

Аналіз існуючих аналітичних способів побудови опуклих продовжень квадратичних функцій з комбінаторних множин, вписаних у сферу, дозволяє стверджувати, що у багатьох випадках вони дають опуклі продовження у формі (1.49), (1.50), де μ визначається матрицею квадратичної форми. Таким чином, виникає питання про виділення класів FPCs, для яких такий спосіб можливий, а також про порівняння різних опуклих продовжень у формі (1.49), (1.50) у залежності від вибору точки x^0.

1.9 Висновки за розділом 1

Для обґрунтування застосування в моделюванні реальних завдань, зокрема, задач геометричного проектування, дано історичний огляд виникнення комбінаторних конфігурацій як математичного об'єкта та їх тісному зв'язку з геометричними структурами.

Встановлено зв'язок скінченних точкових конфігурацій, які є образами евклідових комбінаторних множин, із множиною конфігурацій по К. Бержу, позначивши ще один аспект застосування геометричного аналізу для дослідження цих множин.

Наведено ряд задач оптимізації теоретичного та практичного характеру на множинах комбінаторних конфігурацій, що дозволяють побудову евклідових постановок дають можливість їх розв'язання методами нелінійного, в т.ч. дискретного, програмування на отриманих при відображенні в простір скінченних точкових конфігураціях.

Перелічено переваги використання евклідових постановок у оптимізації, серед яких можливість побудови неперервних релаксації на опуклих оболонках FPCs, уопуклення функцій, заданих на FPCs, і побудови їх оцінок.

Дано огляд теорії опуклих продовжень та означені відкриті питання у цьому напрямку.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [185–189, 254, 255, 270, 272, 323, 327, 329, 331, 333, 338–341, 347, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1,3,8,11,13,14,18–22,24,25,27–30,34,37,42,46,49, 51,56–59,61,63,64,69,71,73,76,79,81,84,88,89,93,95,101,102,105,107,114,116,117, 121,123,124,126,127,129,132–136,139,140,143,145,146,150,153,155,156,164,172–175,177,179,190,198,200,202–204,211,213–216,219,221–225,236,239,241–244,247, 249–251, 256–260, 260, 262, 267, 268, 276, 277, 279–281, 283–286, 289–291, 293, 293, 297, 298, 301, 308, 349, 351–354, 356–358, 360, 361, 363, 364, 366, 368, 370, 374–379].

2 ЕВКЛІДОВІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

У цьому розділі на основі поняття комбінаторної конфігурації та з метою поєднання з класом евклідових комбінаторних множин вводиться клас евклідових комбінаторних конфігурацій (е-конфігурацій), виділяються їх ключові характеристики, і на їх основі пропонується типологія.

2.1 Комбінаторні конфігурації

Використаємо поняття конфігурації по К. Бержу [22], застосовуючи для множин B, A терміни ”вихідна” та ”результуюча” відповідно. Під структуруванням відображення розумітимемо його розгляд як упорядкованої послідовності елементів відображення. Хоча формально тут не накладено обмежень на потужність множини B, фактично К. Берж обмежився випадком скінченної вихідної множини, і для таких конфігурацій зазвичай використовується термін ”комбінаторна конфігурація”.

Отже, під комбінаторною конфігурацією (с-конфігурацією) будемо розуміти відображення

$$\chi : B \to A \tag{2.1}$$

вихідної множини $B = \{b_1, ..., b_n\}$ елементів довільної природи у абстрактну результуючу множину $A = \{a_1, ..., a_k\}$ вказаної структури при виконанні заданих обмежень Ω.

Комбінаторна конфігурація повністю визначається четвіркою – "відображення – вихідна множина – результуюча множина – обмеження":

$$\langle \chi, B, A, \Omega \rangle \, , \tag{2.2}$$

а у результаті відображення (2.1) утворюється упорядкована послідовність π елементів A:

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_{j_1(\pi)} & \dots & a_{j_n(\pi)} \end{pmatrix} = \left\langle a_{j_1(\pi)}, a_{j_2(\pi)}, ..., a_{j_n(\pi)} \right\rangle, \tag{2.3}$$

де $\{j_1(\pi), ..., j_n(\pi)\} \subseteq J_k$.

Оскільки в результаті відображення (2.1) інформація про вихідну множину втрачається, завжди можна вважати, що $B = J_n$. Отже, можна здійснити бієкцію між множинами B та J_n та перейти від відображення (2.1) до такого:

$$\psi : J_n \to A, \tag{2.4}$$

при цьому для вихідної множини корисуватимемося терміном "нумеруюча".

Тепер (2.3) перетворюється на:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_{j_1(\pi)} & \dots & a_{j_n(\pi)} \end{pmatrix} = \left\langle a_{j_1(\pi)}, a_{j_2(\pi)}, ..., a_{j_n(\pi)} \right\rangle. \tag{2.5}$$

а четвірка (2.2) – на трійку

$$\langle \psi, A, \Lambda \rangle, \tag{2.6}$$

де A – результуюча множина, ψ – відображення (2.4), Λ – задана система обмежень на вигляд відображення ψ.

Як було зазначено вище, конфігурація (2.3) задається четвіркою (2.2) - "відображення χ - вихідна множина B - результуюча множина A - обмеження Ω". Мається на увазі, що π є конкретною реалізацією цього відображення, яке характеризується певною послідовністю $\langle j_1, ..., j_n \rangle$.

Комбінаторна конфігурація π є конкретною реалізацією відображень χ/ψ у четвірці (2.2) або тріаді (2.6), яке характеризується певною послідовністю $\langle j_1(\pi), ..., j_n(\pi) \rangle$. Для конкретних A, B та системи обмежень Ω, всілякі такі реалізації утворюють множину Π с-конфігурацій (далі $\mathcal{E}_c$-*множину*), до розгляду якої ми переходимо. Враховуючи (2.5),

$$\Pi = \{\pi^i = \langle \pi_{i1}, ..., \pi_{in} \rangle\}_{i \in |\Pi|} \quad (2.7)$$

можна задати двома способами $\langle \Xi, B, A, \Omega \rangle$, $\langle \Psi, A, \Lambda \rangle$, - як множину Ξ відображень (2.2) або множину Ψ відображень (2.6) відповідно.

Відзначимо таку особливість $\mathcal{E}_c$-множин – для пари $\pi, \pi' \in \Pi$, таких, що $\pi = \langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n} \rangle$, $\pi' = \langle a_{j_1}, ..., a_{j_n} \rangle$, виконано $\pi \neq \pi' \Leftrightarrow \langle j_1, j_2, ..., j_n \rangle \neq$ $\neq \langle j'_1, j'_2, ..., j'_n \rangle$, що і забезпечує відміну складів $\{a_{j_i}\}_{i \in J_n}$, $\{a_{j'_i}\}_{i \in J_n}$ даних с-конфігурацій або порядку слідування їх компонент.

Даний факт встановлює зв'язок $\mathcal{E}_c$-множин із класом е-множин. Можливість занурення у $\mathbb{R}^n$ забезпечується тим фактом, що здійснивши бієкцію між множинами A та $A' = \{a'_i\}_{i \in J_k} \subset \mathbb{R}^1$, маємо: $\exists \phi : A \to \mathbb{R}^1 : \ a'_i = \phi(a_i)$, $a_i = \phi^{-1}(a'_i)$, $i \in J_k$. У такому випадку множина

$$\mathcal{E} = \{x^i = (x_{ij})_{j \in J_n} = (\phi(\pi_{ij}))_{j \in J_n}\}_{i \in J_{|\mathcal{P}|}} \subset \mathbb{R}^n.$$

задовольняє умову (1.1) при виборі $\mathcal{N} = n$. Саме таке відображення розглядалося у роботах [356, 357, 364, 370]. Зауважимо, що можна запропонувати і інші способи відображення Π у евклідів простір. Так, якщо $n = k$, то, встановивши бієкцію між A та множиною векторів $a'_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j \in J_n$, s-множину $\mathcal{E}$ можна обрати так:

$$\mathcal{E} = \{x^i = (x_{ij})_{j \in J_N} = (j_1(\pi^i), ..., j_n(\pi^i), a'^T_{j_1(\pi^i)}, ..., a'^T_{j_n(\pi^i))}\}_{i \in J_{|\mathcal{P}|}} \subset \mathbb{R}^N,$$

де $N = m_1 + ... + m_n$. У даному випадку умова (1.1) виконується при виборі $\mathcal{N} = N + n$. У (2.1), блок $j_1(\pi^i), ..., j_n(\pi^i)$ введено для можливості відтворити π з x. Це не потрібно, якщо вектори a'_j, $j \in J_n$, мають однакову розмірність. А саме якщо $\exists m : m = m_j, j \in J_k$, замість (2.1) можна обрати

$$\mathcal{E} = \{x^i = (x_{ij})_{j \in J_N} = (a'^T_{j_1(\pi^i)}, ..., a'^T_{j_n(\pi^i))}\}_{i \in J_{|\mathcal{P}|}} \subset \mathbb{R}^N, \quad (2.8)$$

де $N = n \cdot m$. Саме випадок $m_1 = ... = m_n$ розглядатимемо далі. Доцільність його вибору обґрунтовується тим фактом, що довільним елементам вибору, що є компонентами вихідної множини B, у рамках конкретної задачі можна поставити у відповідність скінченну множину параметрів, яких достатньо для побудови адекватної моделі системи, що розглядається. Відповідно, кожному елементу B буде поставлено у взаємно однозначну відповідність кортеж обраних числових параметрів, інакше кажучи вектор, який є елементом результуючої множини A. При цьому розмірність таких векторів для різних елементів A однакова.

Як бачимо, $\mathcal{E}_c$-множини є е-множинами. Відповідно, їх образи в евклідовому просторі складають підклас s-множин, специфічною рисою яких є те, що вони утворюються в результаті певних відображень скінченної вихідної множини у цей простір.

2.2 Евклідові комбінаторні конфігурації: поняття і приклади

Виділимо такий клас с-конфігурацій. Нехай множина

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\} \tag{2.9}$$

являє собою сукупність векторів простору $\mathbb{R}^m$ однакової розмірності, тобто

$$\mathbf{a}_l = (a_{1l}, ..., a_{ml})^T \in \mathbb{R}^m, \quad l \in J_k. \tag{2.10}$$

Сформуємо мультимножину координат векторів (2.10) і виділимо з неї основу:

$$\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_K\} = S(\{a_{ij}\}_{i \in J_m,\, j \in J_k}),\ e_i < e_{i+1},\ i \in J_K. \tag{2.11}$$

Назвемо $\mathcal{A}$ *твірною множиною* (a generated set, E.GS) множини E.

Розглянемо множину (2.9) як результуючу при формуванні с-конфігурацій, тобто у формулі (2.6) покладемо

$$A = \mathbf{A}. \tag{2.12}$$

Згідно з (2.5), с-конфігурація π являтиме собою впорядковану послідовність векторів із $\mathbf{A}$, тобто

$$\pi = \langle \pi_1, ..., \pi_n \rangle = \langle \mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, ..., \mathbf{a}_{j_n} \rangle \,, \tag{2.13}$$

$$\text{де } \pi_i = (\pi_{li})_l \in \mathbb{R}^m : \; \pi_{li} = a_{lj_i}, l \in J_m, i \in J_n.$$

Кожній конфігурації π вигляду (2.13) поставимо у відповідність мультимножину:

$$\tilde{A}(\pi) = \{\alpha_i(\pi)\}_{i \in J_N} = \{a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}, a_{2j_1}, ..., a_{2j_n}, ..., a_{mj_1}, ..., a_{mj_n}\}$$

і точку

$$x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \; N{=}m \cdot n, \tag{2.14}$$

за таким правилом. По-перше, задамо бієктивне відображення φ_1 між множинами $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}'$:

$$\varphi_1 : \; \mathcal{A}' = \varphi_1(\mathcal{A}) = \{\varphi_1(e_i)\}_{i \in J_K}, \; \mathcal{A}' = S(\mathcal{A}').$$

По-друге, здійснимо певне упорядкування мультимножини $\tilde{A}(\pi)$ (далі відображення φ_2) і розглянемо результат як вектор. Вектор x формується за правилом:

$$x_i = \varphi_1(\alpha_{\beta_i}(\pi)), \; i \in J_N,$$

де $\beta = (\beta_i)_{i \in J_N}$ – деяка перестановка множини J_N.

Точка x є результатом відображень φ_1, φ_2 (далі відображення

$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$) і така, що:

$$x = \varphi(\pi), \ \pi = \varphi^{-1}(x), \tag{2.15}$$

причому φ забезпечує бієкцію між довільними е-конфігураціями вигляду (2.13), що задовольняють умову $S(\tilde{A}(\pi)) \subseteq \mathcal{A}$, та точками $x \in \mathbb{R}^N$, що задовольняють умову $S(\{x\}) \subseteq \mathcal{A}'$.

Означення 2.1. *Евклідовою комбінаторною конфігурацією* (е-конфігурацією) назвемо відображення:

$$\varphi : \langle \psi, \mathbf{A}, \ \Theta \rangle \to \mathbb{R}^N, \tag{2.16}$$

де $\mathbf{A}$ – результуюча множина вигляду (2.9), (2.10), ψ – відображення вигляду $\psi : J_n \to \mathbf{A}$, Θ – система обмежень на вигляд відображень φ, ψ.

Евклідова комбінаторна конфігурація повністю визначається кортежем

$$\langle \varphi, \psi, \mathbf{A}, \Theta \rangle \tag{2.17}$$

та являє собою образ комбінаторної конфігурації (2.5) у евклідовому просторі $\mathbb{R}^N$ при заданих відображеннях φ, ψ і є вектором x вигляду (2.15) розмірності N.

Залежно від вибору відображення φ, зокрема, від способу упорядкування мультимножини $\tilde{A}(\pi)$, можна отримати різні е-конфігурації.

Наприклад,

$$x = (a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}, a_{2j_1}, ..., a_{2j_n}, ..., a_{mj_1}, ..., a_{mj_n})^T \tag{2.18}$$

$$\text{або } x = (a_{1j_1}, ..., a_{mj_1}, a_{1j_2}, ..., a_{mj_2}, ..., a_{1j_n}, ..., a_{mj_n})^T. \tag{2.19}$$

Введемо у розгляд матрицю, що відповідає кортежу π вигляду (2.13) векторів однакової розмірності:

$$\pi \xrightarrow{\xi} (\pi) = (\pi_{li})_{l,i} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \qquad (2.20)$$

Формули (2.18), (2.19) представимо у вигляді:

$$x = vec((\pi)^T) = (\pi_{11}, ..., \pi_{1n}, ..., \pi_{m1}, ..., \pi_{mn}) = (\pi'^1, ..., \pi'^n)^T, \qquad (2.21)$$

та $x = vec((\pi)) = (\pi_{11}, ..., \pi_{m1}, ..., \pi_{1n}, ..., \pi_{mn}) = (\pi^1, ..., \pi^n)^T$ (2.22)

відповідно, де $vec(.)$ – оператор векторизації матриці,

$$\pi^j = (\pi_{ij})_{i\in J_m}, j \in J_n;\ \pi'^i = (\pi_{ij})_{j\in J_n}, i \in J_m.$$

Евклідові комбінаторні конфігурації (2.21), (2.22) відповідають випадку, коли φ_1 – це тотожне відображення. Саме цей випадок $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, не обмежуючи загальності, розглядатимемо далі. Приклади c-конфігурацій і відповідних e-конфігурацій див. у додатку B.1 (приклад B.1).

Надалі будемо використовувати відображення φ відповідно до (2.22) і не накладатимемо ніяких інших обмежень на вигляд цього відображення. У результаті маємо $\Theta = \Lambda$, внаслідок чого (2.16) перетворюється на:

$$\varphi : (\psi, \mathbf{A},\ \Lambda) \to \mathbb{R}^N, \qquad (2.23)$$

а формула (2.17) – на:

$$\langle \varphi, \psi, \mathbf{A},\ \Lambda \rangle. \qquad (2.24)$$

Результатом відображення $\mathcal{E}_c$-множини Π у $\mathbb{R}^N$ є множина $E = \varphi(\Pi) \subset \mathbb{R}^N$ усіх e-конфігурацій вигляду (2.24) (далі $\mathcal{C}$*–множина*). З іншого боку, з (2.15) слідує, що $\Pi = \varphi^{-1}(E)$. Обравши $\mathcal{P} = \Pi$, $\mathcal{E} = E$, $\mathcal{N} = N$, бачимо, що для пари Π, E виконана умова (1.1), тобто E є s-множиною, що відповідає $\mathcal{E}_c$-множині П.

Отже, $\mathcal{C}$–множини утворюють підклас s-множин, що є результатом відображення у простір $\mathbb{R}^{nm}$ $\mathcal{E}_c$-множин, які задовольняють умову існування $m \in \mathbb{N}$, яке задовольняє (2.12).

Зауваження 2.1. Як видно, дія відображення (2.20) на елементи П встановлює бієкцію між множиною с-конфігурацій та множиною матриць

$$\Pi^M = \{\pi^M \in \mathbb{R}^{m \times n} : \pi^M = \xi(\pi)\}_{\pi \in \Pi}, \tag{2.25}$$

а саме $\Pi^M = \xi(\Pi), \Pi = \xi^{-1}(\Pi^M)$. Отже, і між Π^M і множиною E існує бієкція, а саме $\Pi = \xi^{-1}(\Pi^M) = \varphi^{-1}(E) \Rightarrow \Pi^M = \xi(\varphi^{-1}(E))$, відповідно $\pi^M \in \Pi^M \Leftrightarrow \exists x \in E : \pi^M = \xi(\varphi^{-1}(E))$. Цим зв'язком будемо користуватися далі, вводячи класи $\mathcal{C}$–множин, пов'язані із класами матриць.

Далі у випадку $m > 1$ для координат $x \in E$ користуватимемося подвійною індексацією – $x = (x_{11}, ..., x_{m1}, ..., x_{1n}, ..., x_{mn})^T$, іншими словами представлятимемо декартовим добутком векторів-стовпців матриці $X = vec^{-1}(x)$:

$$X = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n), \text{ де } \mathbf{x}_j = (x_{ij})^T_{i \in J_m}, \ j \in J_n. \tag{2.26}$$

Крім того, користуватимемося представленням X через вектори-рядки:

$$X = (\mathbf{x}_1'^T, ..., \mathbf{x}_m'^T)^T, \text{ де } \mathbf{x}_i' = (x_{ij})_{j \in J_n}, \ i \in J_m. \tag{2.27}$$

Враховуючи спосіб побудови е-конфігурацій, при розгляді $\mathcal{C}$–множин обмежуємося розглядом тих множин матриць (2.25), сукупності векторів-стовпців яких утворюють підмультимножину $\mathbf{A}$.

$\mathcal{C}$-множину E представимо у формі:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N : \ x \ - \text{ е-конфігурація вигляду (2.23)}\} \tag{2.28}$$

і перейдемо до її дослідження.

Розглянемо множину $\mathcal{A}$ вигляду (2.11). Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$\forall\, j \in J_K \,\exists\, x = (x_i)_{i \in J_N} \in E : \ x_i = e_j, \tag{2.29}$$

інакше e_j може бути вилучене з A, відповідно, $\mathcal{A}$ може бути скорочена. Надалі вважатимемо, що умова (2.29) виконана.

2.2.1 $\mathcal{C}$-множина як скінченна точкова конфігурація

Нехай $\mathcal{C}$-множина (2.28) задана як скінчена точкова конфігурація [94] у формі:

$$E = \{x^i\}_{i \in J_{n_E}},\ x^i = (x_{ij})^T_{j \in J_N},\ i \in J_{n_E}. \tag{2.30}$$

Розглянемо мультимножину $X = \{x_{ij}\}_{i \in J_{n_E}, j \in J_N}$ координат точок E. Виділимо з неї мінімальну мультимножину $\tilde{A}$, таку що $\{x\} \subseteq \tilde{A}$ для всіх $x \in E$, і назвемо її *мультимножиною, що індукує* E (an induced multiset, E.IM). Для цього достатньо об'єднати мультимножини $\{x^i\}$ по $i \in J_{n_E}$:

$$\tilde{A} = \bigcup_{x \in E} \{x\}. \tag{2.31}$$

Виділимо її основу і порівняємо із множиною (2.11). Як виявляється, ці множини збігаються:

$$\mathcal{A} = S(\tilde{A}). \tag{2.32}$$

Це означає, що основа мультимножини, що індукує E, є твірною множиною для неї, а умову (2.32) можна використати як ознаку E.GS у разі, якщо E задана у формі (2.30) або просто за допомогою $\tilde{A}$.

е-конфігурації можна розглядати як точки дискретної решітки:

$$\mathcal{A}^N = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{A}, \tag{2.33}$$

що задовольняють заданій системі обмежень Λ. Відповідно, $\mathcal{C}$-множина E буде підмножиною решітки (2.33):

$$E \subseteq \mathcal{A}^N \subset \mathbb{R}^N. \tag{2.34}$$

Введемо в розгляд мультимножини окремих координат точок E:

$$X^j = \{x_{ij}\}_{i \in J_{n_E}},\ j \in J_N. \tag{2.35}$$

Їх твірні множини –

$$\mathcal{A}_j = S(X^j) = \{e_{ij}\}_{i \in J_{k_j}},\ e_{ij} < e_{i+1,j},\ i \in J_{k_j},\ j \in J_N. \tag{2.36}$$

Ввівши тепер у розгляд решітку

$$Grid = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{A}_j, \tag{2.37}$$

умову (2.34) можна посилити до:

$$E \subseteq Grid \subseteq \mathcal{A}^N. \tag{2.38}$$

Введемо у розгляд величину

$$\delta_E = |J|,\ \text{де } J = \{j \in J_N :\ k_j > 1\}, \tag{2.39}$$

що задає кількість координат е-конфігурацій, які набувають на E декілька значень.

Зауваження 2.2. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що

$$\delta_E = N. \tag{2.40}$$

Якщо дана умова не виконана, частину координат е-конфігурацій можна зафіксувати і здійснити перехід від E до розгляду нової $\mathcal{C}$–множини:

$$E' = \{x'^i\}_{i \in J_{n_E}} \subset \mathbb{R}^{\delta_E},\ x'^i = (x_{ij})^T_{j \in J},\ i \in J_{n_E}.$$

Згідно з [94] та враховуючи, що $\mathcal{C}$–множина є FPC, *розмірністю* $\mathcal{C}$–множини E назвемо розмірність її афінної оболонки і позначимо d_E.

Введемо у розгляд багатогранник

$$P = conv\, E, \tag{2.41}$$

(далі $\mathcal{C}$*–багатогранник*). У цих позначеннях $d_E = dim\, P$.

Величини δ_E, d_E пов'язані таким чином – $\delta_E \geq d_E$, адже $dim\ P \leq$ $\leq dim\, conv\, Grid = \delta_E$.

Наслідком виконання умови (2.40) буде те, що

$$d_E \geq 1;\ N, K, n_E, k_j \geq 2,\ j \in J_n, \tag{2.42}$$

тобто FPC E породжується щонайменше двома числами, а її опукла оболонка – невироджений у точку багатогранник.

2.2.2 Множини е-конфігурацій: $m = 1$

Зупинимося на випадку, коли $A \subset \mathbb{R}^1$, тобто результуюча множина комбінаторних конфігурацій є числовою. У термінах е-конфігурацій це означає, що $m = 1$. При цьому (2.10) спрощується до $\mathbf{a}_l = (a_l), \ \ l \in J_k$, де $a_l = a_{1l}$, $l \in J_k$.

Крім того, $K = k$, $A = \mathcal{A} = \{a_j\}_{j \in J_k}$, величина (2.39) збігається з потужністю вихідної множини – $\delta_E = N = n$. Відповідно, вирази (2.14), (2.22) набувають вигляду $x = (x_1, ..., x_n) = (a_{j_1}, ..., a_{j_n})$.

Крім того, формула (2.16) для задання е-конфігурацій має вигляд:

$$\varphi : (\psi, A, \ \Lambda) \to \mathbb{R}^n, \tag{2.43}$$

а індукована ними $\mathcal{C}$-множина (2.28) буде такою:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \ - \ \text{е-конфигурація вигляду (2.43)}\}. \tag{2.44}$$

Виходячи з (2.11), твірну множину можна представити у вигляді:

$$\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_k\}, \ e_i < e_{i+1}, \ i \in J_k. \tag{2.45}$$

Формули (2.30), (2.34)-(2.38), (2.40), (2.42) тепер набувають вигляду:

$$E = \{x^i\}_{i \in J_{n_E}}, \ x^i = (x_{ij})^T_{j \in J_n}, \ i \in J_{n_E}; \tag{2.46}$$

$$E \subseteq \mathcal{A}^n \subset \mathbb{R}^n;$$

$$X^j = \{x_{ij}\}_{i \in J_{n_E}}, \ j \in J_n;$$

$$\mathcal{A}_j = S(X^j) = \{e_{ij}\}_{i \in J_{k_j}}, \ e_{ij} < e_{i+1,j}, \ i \in J_{k_j}, \ j \in J_n; \tag{2.47}$$

$$E \subseteq Grid = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}^n; \tag{2.48}$$

$$\delta_E = n;$$

$$d_E \geq 1; \ n, k, n_E, k_j \geq 2, \ j \in J_n. \tag{2.49}$$

Для мультимножини, що індукує $\mathcal{C}$-множину E, використовуватимемо позначення G (або G_E), для її потужності $\eta = |G|$, у результаті чого формула (2.31) набуває вигляду $G = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Мультимножину G представимо у формах:

$$G = \{g_i\}_{i \in J_\eta} = \{e_1^{\eta_1}, ..., e_k^{\eta_k}\},$$
$$g_i \le g_{i+1},\ i \in J_{\eta-1},\ e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1}, \tag{2.50}$$

де $\eta_i = \mu_G(e_i) = \sum\limits_{g \in G} \mathbf{1}_{\{g\}} a$ – кратність елемента e_i $(i \in J_k)$. Її основою є множина (2.45), а первинною специфікацією – $[G] = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$ $(\sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i = \eta)$.

Зауваження 2.3. У подальшому, щоб відрізнити випадки $m = 1$ та $m > 1$, до E будемо застосовувати терміни ”числова” чи ”векторна” $\mathcal{C}$–множина відповідно.

2.3 Конструктивна класифікація $\mathcal{C}$-множин

Проведемо класифікацію $\mathcal{C}$–множин на основі аналізу мультимножин, що їх індукує, твірних множин, а також розмірності простору, у яких вони задані (далі конструктивний аналіз, a constructive analysis, C-A, $\mathcal{A}/G/n$-analysis, $\mathcal{A}/G/n$-A).

Зазначимо, що дана класифікація буде проведена для $\mathcal{C}$–множин, що відповідають $m = 1$, але оскільки вона використовує n як параметр, усі представлені результати безпосередньо переносяться на загальний випадок заміною $n \to N \ge n$. Отже, подальше викладення відбуватиметься для $\mathcal{C}$–множин, заданих у формі FPC $E \subset \mathbb{R}^n$.

Введемо декілька класів $\mathcal{C}$–множин. Класифікацію буде проведено за декількома напрямками, у залежності від того, на які характеристики $\mathcal{C}$–множини накладаються обмеження: а) на $\mathcal{A}$ (Constraint 1, C1, $\mathcal{A}$-A); б) на G (Constraint 2, C2, G/n-A); в) на елементи E (Constraint 3, C3,E-A); на тип відображення ψ (Constraint 4, C4, ψ-A). Ці чотири типи можуть комбінуватися, а також виражатися одне через інше. Важливою складовою аналізу є порівняння із розмірністю простору, де задана $\mathcal{C}$–множина.

1. *Constraint 1, $\mathcal{A}$-A*:

– *додатно значні* ($E \subset \mathbb{R}^n_{>0}$), *невід'ємно значні* ($E \subset \mathbb{R}^n_+$), *від'ємно значні* ($E \subset \mathbb{R}^n_{<0}$) $\mathcal{C}$–множини тощо. Їх ознаками будуть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^1_{>0}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^1_+$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^1_{<0}$ відповідно, інакше кажучи

$$e_1 > 0, \tag{2.51}$$

$$e_1 = 0, \tag{2.52}$$

$$e_k < 0;$$

– якщо $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$, E назвемо *цілочисельною* $\mathcal{C}$–множиною (an integer-valued $\mathcal{C}$–set, $\mathbb{Z}$S), якщо $\mathcal{A} \subset \mathbb{Q}$ – *раціонально значною* $\mathcal{C}$–множиною (a rational-valued $\mathcal{C}$–set, $\mathbb{Q}$S);

– якщо

$$\exists\, \Delta > 0 :\; e_{i+1} - e_i = \Delta,\; i \in J_{k-1},$$

E назвемо множиною рівномірно-розподілено значних е-конфігурацій (an uniformly distributed valued $\mathcal{C}$–set, $\mathbb{U}(\Delta)$S), де Δ – крок розподілу.

2. *G/n-A, Constraint 2*

$\mathcal{C}$–множину E назвемо множиною е-конфігурацій перестановок ($\mathcal{C}$–множиною перестановок, a permutation $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{P}$S), якщо мультимножина координат кожної її точки збігається із мультимножиною, що індукує усю множину E:

$$\forall\, x \in E \quad \{x\} = G, \tag{2.53}$$

де тут і далі $\{x\} = \{x_i\}_{i \in J_n} \subset \mathbb{R}^1$ для $x = (x_i)_{i \in J_n} \subset \mathbb{R}^n$.

Якщо умова (2.53) не виконана, множину E будемо називати множиною е-конфігурацій розміщень ($\mathcal{C}$–множиною розміщень, a partial permutation

$\mathcal{C}$–set, $\mathcal{PP}$S). Ознаку $\mathcal{PP}$S представимо у вигляді:

$$\forall\, x \in E \quad \{x\} \subset G. \tag{2.54}$$

Таким чином, усі $\mathcal{C}$–множини розбиваються на два класи – е-конфігурацій перестановок та е-конфігурацій розміщень. Будемо надалі використовувати еквівалентні до (2.53), (2.54) умови

$$\eta = n, \tag{2.55}$$

$$\eta > n \tag{2.56}$$

для $\mathcal{C}$–множин перестановок та розміщень відповідно.

Як видно, (2.53), (2.54) представлені у формі C1, у той час як (2.55), (2.56) – у формі C2.

Мультимножину, що індукує $\mathcal{C}$–множину перестановок, представлятимемо у вигляді:

$$G = \{e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\}\,,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

$\mathcal{C}$–множину E називатимемо множиною спеціальних е-конфігурацій (спеціальною $\mathcal{C}$–множиною, a specific $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{S}$S), якщо:

$$k_j = 2,\ j \in J_n.$$

Для $\mathcal{S}$S формула (2.48) перетворюється на

$$E \subseteq Grid = \prod_{i=1}^{n} \{e_{i1}, e_{i2}\}, \tag{2.57}$$

а для $\mathcal{S}$S мультимножина G має таку властивість:

$$G \subseteq \{e_{i1}, e_{i2}\}_{i \in J_n},$$

відповідно $\eta \leq 2n$. Визначимо такий параметр:

$$\eta^{\max} = \max_{x \in E} \sum_{i=1}^{n} \mu_{\{e_{i2}\}}(x_i),\ \eta^{\min} = \eta - \eta^{\max}. \tag{2.58}$$

Окремим випадком $\mathcal{S}$Ss є ті, що задовольняють умову

$$k = 2, \tag{2.59}$$

коли (2.57) спрощується до

$$E \subseteq Grid = \{e_1, e_2\}^n. \tag{2.60}$$

У даному випадку (2.58) перетворюється на:

$$\eta^{\max} = \eta_2,\ \eta^{\min} = \eta_1.$$

Якщо

$$\mathcal{A} = \{0, 1\}, \tag{2.61}$$

$\mathcal{C}$–множину E називатимемо множиною булевих е–конфігурацій (булевою $\mathcal{C}$–множиною, a Boolean $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{B}$S); якщо

$$\mathcal{A} = \{-1, 1\}, \tag{2.62}$$

то множиною бінарних е-конфігурацій (бінарною $\mathcal{C}$–множиною, a binary $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{B}'$S); якщо

$$\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}, \tag{2.63}$$

то множиною трійкових е–конфігурацій (трійковою $\mathcal{C}$–множиною, a ternary $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{T}$S). Для таких $\mathcal{B}$Ss, $\mathcal{B}'$Ss (2.60) перетворюється на $\mathcal{B}$S: $E \subseteq B_n$; $\mathcal{B}'$S: $E \subseteq B'_n$, де $B_n = \{0, 1\}^n$ – множина булевих векторів розмірності n,

$B'_n = \{-1, 1\}^n$ – множина бінарних векторів розмірності n.

Комбінуючи поняття е-конфігурацій перестановок і розміщень із поняттям спеціальних е-конфігурацій (2.59), уведемо в розгляд класи $\mathcal{C}$–множин спеціальних перестановок та спеціальних розміщень, зокрема, $\mathcal{C}$–множин булевих та бінарних перестановок та розміщень. Так, множини булевих та бінарних е-конфігурацій перестановок та розміщень індукуються відповідно мультимножинами:

$$G = \{0^{n_0}, 1^{n_1}\}, \ n_0 + n_1 = n,$$
$$G = \{0^{\eta_0}, 1^{\eta_1}\}, \ \eta_0 + \eta_1 > n.$$

Введемо клас $\mathcal{C}$–множин, що поєднує класи $\mathcal{P}$S, $\mathcal{PP}$S. $\mathcal{C}$–множину E, що індукується мультимножиною G_E, назвемо множиною е-конфігурацій перестановок зі знаком ($\mathcal{C}$–множиною перестановок зі знаком, a signed permutation $\mathcal{C}$-set, $\mathcal{SP}$S), якщо для E та множини

$$E' = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = (|x_i|)_{i \in J_n}\}_{x \in E}, \tag{2.64}$$

що індукована нею, виконані такі умови:

$$|G_E| > n, \ |G_{E'}| = n, \ |S(G_{E'})| \geq 2. \tag{2.65}$$

При цьому множину E' називатимемо такою, що породжує $\mathcal{SP}$S E. Оскільки умова (2.65) означає, що множина (2.64) – $\mathcal{P}$S, у класі $\mathcal{P}$Ss поєднуються таким чином: E є $\mathcal{PP}$S, але породжується вона (2.64), що є $\mathcal{P}$S.

Серед $\mathcal{SP}$Ss виділимо два підкласи за принципом додатнозначності $\mathcal{P}S$ E', об'єднавши таким чином C1, C2. Так, якщо для множини (2.64) виконана умова (2.52), називатимемо її $\mathcal{SP}$S першого типу (далі $\mathcal{SPS}^I$), а якщо для

E' виконана умова (2.51) – $\mathcal{SP}$S другого типу (далі $\mathcal{SP}S^{II}$).

Серед $\mathcal{SP}$Ss також виділимо підклас, для яких множина (2.64) є множиною спеціальних e-конфігурацій перестановок, тобто коли

$$|S(G_{E'})| = 2. \tag{2.66}$$

Такі множини називатимемо $\mathcal{C}$–множинами спеціальних перестановок зі знаком (спеціальними $\mathcal{C}$-множинами перестановок зі знаком, a specific signed permutation $\mathcal{C}$-set, $\mathcal{SSP}S$). Відповідно, якщо виконано (2.66), $\mathcal{SP}$S^{I} називатимемо $\mathcal{SSP}S$ першого типу (далі $\mathcal{SSP}S^{I}$), а $\mathcal{SP}$S^{II} – $\mathcal{SSP}S$ другого типу (далі $\mathcal{SSP}S^{II}$). У свою чергу, у класі $\mathcal{SSP}$S^{I} окрему увагу приділимо $\mathcal{C}$–множинам, для яких E' є $\mathcal{C}$–множиною булевих перестановок, і назвемо їх множинами трійкових e-конфігурацій перестановок зі знаком (трійковими $\mathcal{C}$-множинами перестановок зі знаком, ternary signed permutation $\mathcal{C}$-sets, $\mathcal{TSP}$Ss). Ознакою $\mathcal{TSP}$S є виконання умов (2.63), (2.65).

3. $\mathcal{A}/G$-A

$\mathcal{C}$–множину E назвемо множиною e-конфігурацій без повторень (a $\mathcal{C}$–set without repetitions, $\mathcal{R}^{-}$S), якщо сукупності координат усіх її елементів є множинами, тобто виконана умова $\forall\, x \in E \quad [\{x\}] = \mathbf{e}$, теж саме, що

$$\forall\, x \in E \quad |[\{x\}]| = n. \tag{2.67}$$

Якщо умова (2.67) не виконана, E називатимемо множиною e-конфігурацій з повтореннями (e-configuration set with repetitions, $\mathcal{R}^{+}$S). Її ознакою буде те, що

$$\exists\, x \in E \quad |[\{x\}]| < n. \tag{2.68}$$

Обмеження (2.67), (2.68) – це приклад С3-обмежень, але вони можуть бути сформульовані у термінах $\mathcal{A}$, G. Так, (2.67), (2.68) еквівалентні до

$$k = \eta, \tag{2.69}$$
$$k < \eta,$$

відповідно, тобто дані C3-обмеження можуть бути представлені у як комбінація C1- та C2-обмежень.

Усі $\mathcal{C}$–множини розбиваються на класи $\mathcal{C}$–множин з повтореннями та без повторень.

4. $\mathcal{C}/G/n$-A. У залежності від того, чи виконані умови (2.55), (2.69), усі $\mathcal{C}$–множини можна розбити таким чином:

– $\mathcal{C}$–множина перестановок без повторень:

$$\eta = k = n; \tag{2.70}$$

– $\mathcal{C}$–множина перестановок з повтореннями:

$$k < \eta = n; \tag{2.71}$$

– $\mathcal{C}$–множина розміщень без повторень:

$$n < k = \eta; \tag{2.72}$$

– $\mathcal{C}$–множина розміщень з повтореннями:

$$k, n \leq \eta. \tag{2.73}$$

Відповідно, $\mathcal{C}$–множини перестановок зі знаком, як спеціальний підклас $\mathcal{C}$–множини розміщень, можна розбити на підкласи $\mathcal{C}$–множин перестановок зі знаком без повторень та з повтореннями.

Якщо $\mathcal{PPS}$ індукована мультимножиною G, що задовольняє умову

$$\eta = n \cdot k, \tag{2.74}$$

називатимемо її $\mathcal{C}$–множиною розміщень *із необмеженими повтореннями.*

5. *Constraint 3: приклади*

Наведемо ще декілька класів множин е-конфігурацій, які можна виділити за допомогою обмежень типу C3, що накладаються на елементи введених раніше класів $\mathcal{C}$–множин.

Нехай $q : E \to \mathbb{Z}^1_+$. Оберемо $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ і розглянемо функцію $h(x,p) = q(x) \mod p$. Здійснимо розбиття E :

$$E_i = \{x \in E : \ h(x,p) = h_i\}_{h_i \in J^0_{p-1}}. \tag{2.75}$$

Так, обравши, $p = 2$, розбиття (2.75) відбуватиметься на дві підмножини E_0, E_1:

$$E = E_0 \cup E_1, \ E_0 \cap E_1 = \emptyset, \tag{2.76}$$

на першій з яких $q(x)$ набуває парного значення, на другій – непарного.

Нехай E – $\mathcal{C}$–множина перестановок без повторень, а функція $q(x)$ – задає кількість інверсій[1)] у е-конфігурації $x \in E$, тобто

$$q(x) = \iota(x) = \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^1_{>0}}(x_j - x_i).$$

У такому випадку використання функції $h(x,2)$ для декомпозиції (2.76), приводить до розбиття E на дві підмножини за ознакою парності кількості інверсій її елементів.

а) $\mathcal{C}$–множину перестановок без повторень E назвемо множиною е-конфігурацій парних перестановок ($\mathcal{C}$–множиною парних перестановок, an even $\mathcal{P}$S, $\mathcal{EP}$S), якщо кількість інверсій кожного з її елементів парна,

[1)] i-а і j-а координати точки $x = (x_i)_{i \in J_n}$ знаходяться в інверсії (an inversion) [40], якщо $i < j$ і при цьому значення x_i більше x_j, тобто значення координати точки x, що стоїть зліва, більше значення координати, що стоїть праворуч.

тобто

$$\forall\, x \in E \quad \iota(x) \equiv 0 \mod 2. \tag{2.77}$$

Так само, якщо для $\mathcal{C}$–множини E перестановок без повторень виконано:

$$\forall\, x \in E \quad \iota(x) \equiv 1 \mod 2,$$

називатимемо її множиною е-конфігурацій непарних перестановок ($\mathcal{C}$–множиною непарних перестановок, an odd $\mathcal{P}$S, $\mathcal{OP}$S).

б) Нехай тепер E є $\mathcal{S}S$. Виходячи з того, що, згідно з (2.57), кожна координата точки $x \in E$ набуває в точності два значення, а саме $x_i \in \{e_{1i}, e_{2i}\}$, $i \in J_n$, введемо в розгляд функцію

$$q(x) = \mu^{up}_{Grid}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\{e_{2i}\}}(x_i), \tag{2.78}$$

що визначає частоту набуття координатами точки $x \in E$ більшого значення з відповідної пари.

$\mathcal{S}$S E назвемо множиною парних спеціальних е-конфігурацій, якщо функція (2.78) набуває на ній парних значень, тобто $\forall\, x \in E\ \mu^{up}_{Grid}(x) \equiv 0 \mod 2$, множиною непарних спеціальних е-конфігурацій, якщо ця функція набуває на E непарних значень, тобто $\forall\, x \in E\ \mu^{up}_{Grid}(x) \equiv 1 \mod 2$.

Для множин булевих е-конфігурацій, як окремого випадку множин E спеціальних е-конфігурацій, функцію (2.78) можна задати у спрощеній формі $q(x) = \mu_{\{x\}}(1)$ і назвати відповідну $\mathcal{C}$–множину множиною парних булевих е-конфігурацій (парною булевою $\mathcal{C}$–множиною, an even Boolean $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{EB}$S), якщо виконана умова:

$$\forall\, x \in E \qquad \mu_{\{x\}}(1) \equiv 0 \mod 2, \tag{2.79}$$

і множиною непарних булевих е-конфігурацій (непарною булевою $\mathcal{C}$–множиною, an odd Boolean $\mathcal{C}$–set, $\mathcal{OB}$S), якщо

$$\forall\, x \in E \qquad \mu_{\{x\}}(1) \equiv 1 \mod 2. \tag{2.80}$$

Подальше розбиття цих двох класів можна здійснити на множини парних і непарних булевих е-конфігурацій перестановок та розміщень. Відзначимо, що всі елементи множини булевих е-конфігурацій перестановок можуть бути одночасно або парними, або непарними е-конфігураціями. В той же час, для булевих е-конфігурацій розміщень виділення підмножин парних і непарних е-конфігурацій має сенс, тому надалі, говорячи про $\mathcal{EB}$S чи $\mathcal{OB}$S E, матимемо на увазі, що E відноситься до $\mathcal{PP}$Ss.

в) $\mathcal{C}$–множина $E \subset \mathbb{R}^n$ породжує сім'ю множин е-конфігурацій, утворених із підмножин координат елементів E:

$$E(I) = \{(x_{ij})_{j \in I}\}_{i \in J_{n_E}}, \tag{2.81}$$

де $I \subset J_n$. У залежності від того, до якого класу відноситься $\mathcal{C}$–множина $E(I)$ для заданого I, можна ввести нові класи множин е-конфігурацій. Так, якщо для $\mathcal{P}$S E існує множина $I \subset J_n$, така що множина $E(I)$ є також $\mathcal{P}$S, E називатимемо множиною е-конфігурацій *поліперестановок* ($\mathcal{C}$–множиною поліперестановок, a polypermutation $\mathcal{C}$–set, $\overline{\mathcal{P}}S$). Дана назва викликана тим, що серед множин (2.81) можна виділити декілька $\mathcal{C}$–множин перестановок. Зокрема, $E(\overline{I})$, де $\overline{I} = J_n \backslash I$, також є $\mathcal{C}$–множиною перестановок, причому мультимножини, що індукують $E(I)$ та $E(\overline{I})$, будуть пов'язані таким чином:

$$G_{E(\overline{I})} = G_E \backslash G_{E(I)}. \tag{2.82}$$

Подібним чином можна ввести в розгляд $\mathcal{C}$–множини полірозміщень ($\mathcal{C}$–множини *полірозміщень*, a polypartial permutation $\mathcal{C}$–set, $\overline{\mathcal{PP}}$S) як такі $\mathcal{PP}$Ss, для яких існує множина $I \subset J_n$, така що $E(I)$ є $\mathcal{C}$–множиною розміщень, тобто

$$|G_{E(I)}| > |I|, \tag{2.83}$$

а для множини $E(\overline{I})$ виконана умова (2.82). Внаслідок цього $G_{E(\overline{I})}$ задовольнятиме умову $|G_{E(\overline{I})}| \geq |\overline{I}|$, тобто множина $E(\overline{I})$ може бути як $\mathcal{P}S$, так і $\mathcal{PP}S$, але в цілому множина E залишатиметься $\mathcal{C}$–множиною розміщень.

Відповідно, для класів $\mathcal{C}$–множин поліперестановок та полірозміщень введемо підкласи булевих, бінарних, спеціальних, із повтореннями і без повторень, парних і непарних е-конфігурацій поліперестановок та полірозміщень тощо.

Поєднуючи вищенаведені класи множин е-конфігурацій з $\mathbb{Z}$S-, $\mathbb{Q}$S-, $\mathbb{U}(\Delta)$S- класами, можна ввести в розгляд підкласи цілочисельних $\mathcal{P}$Ss, раціонально значних $\mathcal{PP}$Ss, рівномірно розподілено значних $\mathcal{SP}$Ss тощо.

6. *Constraint 4: приклади*

Наведемо приклади обмежень типу C4. Це можуть бути обмеження безпосередньо на тип відображення ψ, таких як вимога його бієктивності в разі $n = k$, сюр'єктивності у випадку $n > k$ або ін'єктивності в разі $n < k$. Так, вимога бієктивності відображення ψ є ознакою того, що E є $\mathcal{C}$–множиною перестановок без повторень ($\mathcal{R}^-\mathcal{P}S$), ін'єктивності – $\mathcal{C}$–множиною розміщень без повторень ($\mathcal{R}^-\mathcal{PP}S$), сюр'єктивності – множиною е-конфігурацій з повтореннями ($\mathcal{R}^+\mathcal{PP}S$), у якій не просто присутні е-конфігурацій з повтореннями, а усі без виключення елементи містять повторення координат.

C4-обмеження можуть також формулюватися у формах $j(\pi) \underset{\pi\in\Pi}{\subseteq} J$, $\langle j(\pi) \rangle \underset{\pi\in\Pi}{\subseteq} J'$, де $j(\pi) = \{j_1(\pi), ..., j_n(\pi)\}$ і т.п.

2.4 Базові $\mathcal{C}$-множини

Як було показано у п. 2.3 , окрім трійки $\langle \mathcal{A}, G, n \rangle$, $\mathcal{C}$–множини принципово відрізняються комбінаторним типом (далі T) е-конфігурацій, що є їх елементами. З врахуванням даної ключової характеристики, ця трійка перетворюється на четвірку

$$\langle \mathcal{A}, G, n, T \rangle . \tag{2.84}$$

Кожна така четвірка задає сім'ю $\mathcal{C}$–множин, серед якого виділимо таку множину E, що об'єднує усі множини цієї сім'ї, і назвемо базовою $\mathcal{C}$–множиною для заданої у (2.84) комбінації параметрів.

Визначимо $\mathcal{C}_b$–множину E іншим шляхом, а саме через е-конфігурації, що є її елементами.

Нехай $\mathcal{C}$–множина $E \subset \mathbb{R}^n$ об'єднує всі е-конфігурації комбінаторного типу T для заданих $G_E = E.\mathrm{IM}$ та $\mathcal{A}_E = E.\mathrm{GS}$. Назвемо E *базовою $\mathcal{C}$–множиною* ($\mathcal{C}_b$–множиною) для е-конфігурацій типу T та мультимножини G_E, що їх індукує.

Так, множини

$$E_{nk}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} = G\},$$
$$E_{\eta k}^n(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} \subset G\}$$

називатимемо загальними $\mathcal{C}_b$–множинами перестановок та розміщень, що індуковані мультимножиною G вигляду (2.50) потужності n та $\eta > n$ відповідно. Множину

$$E_{nk}^{\pm}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} \subseteq G_E, \{|x_i|\}_{i \in J_n} = G\},$$
$$\text{де } G_E = -G \cup G, \tag{2.85}$$

назвемо загальною $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок зі знаком, що породжена мультимножиною G вигляду (2.50) та індукована мультимножиною G_E вигляду (2.85).

Зауважимо, що оскільки у даному випадку E.ІМ повністю визначається породжуючою мультимножиною, при розгляді базових SPS індукуючу мультимножину не зазначатимемо.

Ці три класи $\mathcal{C}_b$-множин можна визначити так:

$$\begin{aligned} &E_{nk}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} = G\}, \\ &E^n_{\eta k}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} \subset G\}, \\ &E^{\pm}_{nk}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : \{x\} \subset G_E, \{|x_i|\}_{i \in J_n} = G\}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Наведемо декілька спеціальних класів $\mathcal{C}_b$-множин: якщо E, індукована мультимножиною G, задовольняє умову/умови:

– (2.70) – це $\mathcal{C}_b$-множина перестановок без повторень $E_n(G)$;

– (2.71) – це $\mathcal{C}_b$-множина перестановок із повтореннями $E_{nk}(G)$, $k < n$;

– (2.53), (2.59) – це спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок $E_{n2}(G)$;

– (2.53), (2.61)/ (2.62) – це $\mathcal{C}_b$-множина булевих перестановок $B_n(m)$/бінарних перестановок $B'_n(m)$, де $m = \mu_G(1)$;

– (2.72) – це $\mathcal{C}_b$-множина розміщень без повторень $E^n_k(G)$;

– (2.73) – це $\mathcal{C}_b$-множина розміщень з повтореннями $E^n_{\eta k}(G)$, $k < \eta$;

– (2.74) – це $\mathcal{C}_b$-множина розміщень з необмеженими повтореннями $\overline{E}^n_k(G)$;

– (2.54), (2.59) – це спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина розміщень $E^n_{\eta 2}(G)$;

– (2.59), (2.74) – це спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина розміщень із необмеженими повтореннями $\overline{E}^n_2(G)$;

– (2.54), (2.61) – це $\mathcal{C}_b$-множина булевих розміщень $B_n(m_1, m_2)$, де $m_1 = n - \mu_G(0)$, $m_2 = \mu_G(1)$, $m_1 < m_2$;

– (2.61), (2.74) – це булева $\mathcal{C}_b$-множина B_n;

– (2.62), (2.74) – це бінарна $\mathcal{C}_b$-множина B'_n;

– (2.63), (2.74) – це трійкова $\mathcal{C}_b$-множина T_n;

– (2.52)/(2.51), (2.65) – $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок зі знаком першого типу $E_{nk}^{\pm I}(G)$/другого типу $E_{nk}^{\pm II}(G)$, що породжується мультимножиною G;

– (2.65), (2.67) – $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок зі знаком без повторень $E_n^{\pm}(G)$, що породжується множиною G.

– (2.52), (2.65), (2.67) – $\mathcal{C}_b$-множиною $E_k^{\pm I}(G)$ перестановок зі знаком без повторень першого типу, що породжується множиною G;

– (2.51), (2.65), (2.67) – $\mathcal{C}_b$-множиною $E_k^{\pm II}(G)$ перестановок зі знаком без повторень другого типу, що породжується множиною G;

– (2.65), $|S(G)| = 2$, $n_0 = \mu_G(0) > 0$ – спеціальною $\mathcal{C}_b$-множиною $E_{n2}^{\pm I}(G)$ перестановок зі знаком, що породжується булевою мультимножиною G;

– (2.63), (2.65) – $\mathcal{C}_b$-множиною трійкових перестановок зі знаком $B_n^{\pm}(m)$, що породжується мультимножиною $G = \{0^{n-m}, 1^m\}$;

– (2.70), (2.77) – це $\mathcal{C}_b$-множина $E_n^e(G)$ парних перестановок, індукованих множиною G;

– (2.70), (2.77) – це $\mathcal{C}_b$-множина $E_n^o(G)$ непарних перестановок, індукованих множиною G;

– (2.61), (2.79) – це булева парна $\mathcal{C}_b$-напівмножина B_n^h ($\mathcal{C}_b$-множина парних булевих е-конфігурацій);

– (2.61), (2.80) – це булева непарна $\mathcal{C}_b$-напівмножина $\overline{B}_n^h$ ($\mathcal{C}_b$-множина непарних булевих е-конфігурацій).

Зауваження 2.4. Серед $\mathcal{C}$–множин, заданих четвіркою (2.84), множини (2.86) та їх спеціальні класи, а також E_n^e, B_n^h, володіють особливо чіткою комбінаторною структурою, що пов'язано, зокрема, із тим, що вони є образами у $\mathbb{R}^n$ певних груп [15, 68, 206, 248]. Так $E_n(J_n)$ – є образом симетричної групи (a symmetric group) $Sym(J_n)$, $E_n^{\pm}(J_n)$ – групи перестановок зі знаком (a hyperoctahedral group, a signed permutation group), а $E_n^e(J_n)$ – є образом групи парних перестановок (an even permutation group, an alternating group) $Alt(n)$.

Для прообразів вказаних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок введемо позначення:

$$\begin{gathered}P_{nk}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}(G)),\ P_n(G) = \varphi^{-1}(E_n(G)),\ \mathcal{B}_n(m) = \varphi^{-1}(B_n(m)),\\ P_n^o(G) = \varphi^{-1}(E_n^o(G)),\ P_n^e(G) = \varphi^{-1}(E_n^e(G)),\end{gathered} \tag{2.87}$$

а для прообразів вищезазначених $\mathcal{C}_b$-множин розміщень –

$$\begin{gathered}P_{\eta k}^n(G) = \varphi^{-1}(E_{\eta k}^n(G)),\ P_k^n(G) = \varphi^{-1}(E_k^n(G)),\ \overline{P}_k^n(G) = \varphi^{-1}(\overline{E}_k^n(G)),\\ \mathcal{B}_n = \varphi^{-1}(B_n),\ \mathcal{B}_n(m_1,m_2) = \varphi^{-1}(B_n(n-\eta_0,\eta_1)), \mathcal{B}_n^{\pm}(m) = \varphi^{-1}(B_n^{\pm}(m)),\\ \mathcal{B}_n' = \varphi^{-1}(B_n'),\ \mathcal{T}_n = \varphi^{-1}(T_n),\ \mathcal{B}_n^h = \varphi^{-1}(B_n^h),\ \overline{\mathcal{B}}_n^h = \varphi^{-1}(\overline{B}_n^h),\\ P_{nk}^{\pm}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}^{\pm}(G)),\ P_{nk}^{\pm I}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}^{\pm I}(G)),\ P_{nk}^{\pm II}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}^{\pm II}(G)),\\ P_k^{\pm}(G) = \varphi^{-1}(E_k^{\pm}(G)),\ P_k^{\pm I}(G) = \varphi^{-1}(E_k^{\pm I}(G)),\ P_k^{\pm II}(G) = \varphi^{-1}(E_k^{\pm II}(G)).\end{gathered} \tag{2.88}$$

Серед множин (2.87), (2.88) є евклідові комбінаторні множини, що розглядалися раніше (див., наприклад, [362, 364, 370]). Так, $P_{nk}(G), P_{\eta k}^n(G)$ – загальні е-множини перестановок та розміщень, $P_n(G), P_k^n(G)$ – е-множини перестановок та розміщень без повторень, $\overline{P}_k^n(G)$ – е-множина розміщень з необмеженими повтореннями. По аналогії можна ввести інші класи е-множин, наприклад, $\mathcal{B}_n(m)$ – е-множина булевих перестановок, $\mathcal{B}_n^{\pm}(m)$ – е-множина трійкових перестановок зі знаком, $\mathcal{B}_n^h$ – парна булева евклідова комбінаторна напівмножина тощо.

$\mathcal{C}$–множину E, що індукується мультимножиною G, назвемо *базовою полікомбінаторною* $\mathcal{C}$–множиною (полікомбінаторною $\mathcal{C}_b$-множиною), якщо існують розбиття нумеруючої множини J_n та E.IM на $L > 1$ підмножин

$$J_n = \bigcup_{l=1}^{L} I_l;\ I_l \cap I_{l'} = \emptyset,\ 1 \le l < l' \le l;\ n_l = |I_l| \ge 1, \tag{2.89}$$

$$\{G^l\}_{l \in J_L} : G = \bigcup_{l=1}^{L} G^l,\ \eta_l = |G^l| \ge 1,\ l \in J_L, \tag{2.90}$$

такі, що множини

$$E(I^l),\ l \in J_L, \tag{2.91}$$

сім'ї (2.81) є $\mathcal{C}_b$-множинами комбінаторного типу T_l, $l \in J_L$, що індукуються мультимножинами (2.90).

Ясно, що для базової полікомбінаторної множини буде виконана одна з умов (2.82), (2.83). У першому з цих випадків E складатиметься з е–конфігурацій поліперестановок, у другому – з е-конфігурацій полірозміщень. Але, як було зазначено вище, у другому випадку е-конфігурації полірозміщень можуть формуватися з е-підконфігурацій перестановок та розміщень, тобто T_l, $l \in J_L$, можуть відрізнятися.

У тому випадку, коли вони ідентичні, тобто $\exists T : T = T_l$, $l \in J_L$, E називатимемо полікомбінаторною $\mathcal{C}_b$-множиною типу T. Так, якщо (2.91) є: а) базовими $\mathcal{P}$Ss, E називатиметься $\mathcal{C}_b$-множиною поліперестановок; б) базовими $\mathcal{PP}$Ss – $\mathcal{C}_b$-множиною полірозміщень; в) $\mathcal{SP}$Ss – $\mathcal{C}_b$-множиною поліперестановок зі знаком; г) $\mathcal{PO}$Ss/$\mathcal{PE}$Ss – $\mathcal{C}_b$-множиною парних/непарних поліперестановок; д) $\mathcal{C}_b$-множиною парних/непарних булевих е-поліконфігурацій тощо. Класифікацію базових полікомбінаторних множин можна продовжувати далі, в залежності від того, $\mathcal{C}_b$-множинами якого типу є (2.91), а також враховуючи зв'язок між $\mathcal{C}_b$-множинами різних типів. Зокрема, можна ввести класи базових спеціальних $\overline{\mathcal{P}}$Ss, $\overline{\mathcal{PP}}$Ss, $\overline{\mathcal{SP}}$Ss.

2.5 Геометричні властивості $\mathcal{C}$-множин

Розглянемо $\mathcal{C}$–множину $E \subset \mathbb{R}^n$, що задовольняє умову (2.49) та задана у формі (2.46), а саме

$$E = \{x^1, ..., x^{n_E}\} \subset \mathbb{R}^n,\ n_E > 1. \tag{2.92}$$

Той факт, що ми маємо справу із множиною точок евклідова простору, дозволяє пов'язати G-A-класифікацію $\mathcal{C}$–множин із багатогранником P вигляду (2.41) та його підструктурами, такими як множини граней розмірності $i \in J^0_{d_P-1}$, серед яких множини вершин $\mathbf{V} = vert\, P$, ребер $\mathcal{E} = edges\, P$, гіперграней $\mathbf{F}$ тощо. Множина цих граней утворюють граничний комплекс (a boundary complex) $B(P)$ багатогранника P.

Щоб підкреслити, що багатогранник (2.41) є опуклою оболонкою $\mathcal{C}$–множини, називатимемо його $\mathcal{C}$–багатогранником, а якщо E є $\mathcal{C}_b$-множиною – $\mathcal{C}_b$–багатогранником. Виділення з $B(P)$ лише $\mathbf{V}$, $\mathcal{E}$ та розгляд їх у сукупності приводить до поліедрального графу $\mathcal{G}$ (графу багатогранника, a skeleton graph) вигляду (1.14), який називатимемо $\mathcal{C}$–графом, що відповідає E. Якщо E – $\mathcal{C}_b$-множина, $\mathcal{G}$ називатимемо $\mathcal{C}_b$-графом. Для $\mathcal{C}_b$-графу, що відповідає $E^{[.]}_{[.]}(.)$, використовуватимемо позначення $\mathcal{G}^{[.]}_{[.]}(.)$. Так, наприклад, $\mathcal{G}^n_{nk}(G)$ буде загальним $\mathcal{C}_b$-графом перестановок, $\mathcal{G}^n_{\eta 2}(G)$ – спеціальним $\mathcal{C}_b$-графом розміщень, $\mathcal{G}^{\pm}_n(G)$ – $\mathcal{C}_b$-графом перестановок без повторень зі знаком тощо.

2.5.1 $\mathcal{C}$-багатогранники

$\mathcal{C}$–багатогранник P, як і будь-який багатогранник, дозволяє різні представлення, перше з яких (2.41) – у формі опуклої оболонки $\mathcal{C}$–множини. P має ще два еквівалентних представлення – V- і H–представлення.

V–представлення (a V-presentation, параметрична форма задання) багатогранника P – це його задання в формі опуклої оболонки множини його вершин – $P = conv\, \mathbf{V}$. Це представлення є "мінімальним"у тому сенсі, що виключення будь-якого елементу з $\mathbf{V}$ і подальше формування опуклої оболонки одержаної $\mathcal{C}$–множини веде до утворення власної надмножини P: $\forall v \in \mathbf{V} \quad P \subset P' = conv(P \backslash \{v\})$. Відповідно, $\mathbf{V}$–представлення – мінімальне за потужністю множини, що породжує P. Випадок $E = \mathbf{V}$ виділимо особливо (див. означення 2.3).

H–представлення (a H-presentation, аналітична форма задання, (P.HR)) багатогранника P – це форма його задання лінійної системою:

$$A'x = a'_0,\ A''x \leq a''_0, \tag{2.93}$$

$$\text{де} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ A' = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{n' \times n},\ A'' = (a''_{ij}) \in \mathbb{R}^{n'' \times n},$$
$$a'_0 = (a'_{i0}) \in \mathbb{R}^{n'},\ a''_0 = (a''_{i0}) \in \mathbb{R}^{n''}.$$

У позначеннях $A' = (a'_{ij})_{i \in J_{n'}, j \in J_n}$, $a'_0 = (a'_{i0})^T_{i \in J_{n'}}$; $A'' = (a''_{ij})^T_{i \in J_{n''},\, j \in J_n}$, $a''_0 = (a''_{i0})_{i \in J_{n''}}$, система (2.93) може бути представлена у векторній формі:

$$\overline{a}'_i x = a'_{i0},\ i \in J_{n'}, \tag{2.94}$$

$$\overline{a}''_i x \leq a''_{i0},\ i \in J_{n''}, \tag{2.95}$$

де $\overline{a}'_i = (a'_{ij})_{j \in J_n}$, $i \in J_{n'}$; $\overline{a}''_i = (a'_{ij})_{j \in J_n}$, $i \in J_{n''}$.

Кожне рівняння (P.HR) задає гіперплощину багатогранника, а нерівність визначає півпростір, обмежувальна гіперплощина якого може бути чи не бути опорною до гіперграні P. Водночас, кожна гіпергрань P представлена в H–представленні деяким обмеженням-нерівністю, отже, $n'' \geq |\mathbf{F}|$. Зупинимося на випадку, коли ця нерівність перетворюється на рівність –

$$n'' = |\mathbf{F}|. \tag{2.96}$$

H–представлення багатогранника P, мінімальне по числу обмежень – компонент цього представлення, називається *незвідним H–представленням* багатогранника P (an irredundant H-presentation, ($P.IHR$)).

Система обмежень (2.93) є (P.IHR), якщо виключення з неї будь-якого обмеження приводить до формування релаксації P. Таким чином, H–представлення (2.94), (2.95) багатогранника P – незвідне, в тому і тільки в тому випадку, коли

$$\begin{aligned} &\forall\, i' \in J_{n'} \quad P \subset P'_{i'} = P'' \cap \{x \in \mathbb{R}^n :\ \overline{a}'_i x = a'_{i0}\}_{i \in J_{n'} \setminus \{i'\}}; \\ &\forall\, i'' \in J_{n''} \quad P \subset P''_{i''} = P' \cap \{x \in \mathbb{R}^n :\ \overline{a}''_i x \leq a''_{i0}\}_{i \in J_{n''} \setminus \{i''\}}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

де $P' = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{a}'_i x = a'_{i0},\ i \in J_{n'}\},\ P'' = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \overline{a}''_i x \le a''_{i0},\ i \in J_{n''}\}$.

Багатогранні області $P'_{i'}, P''_{i''}$ $(i' \in J_{n'}, i'' \in J_{n''})$ у (2.97) можуть бути як обмеженими, так і необмеженими. У першому випадку будемо застосовувати до них термін "релаксаційний"багатогранник.

Багатогранник P^0 називатимемо *релаксаційним багатогранником 1-го роду* для P, якщо $P^0 \supset P$ і H–представлення P^0 є підсистемою (P.IHR).

Багатогранник P^0 називатимемо *релаксаційним багатогранником 2-го роду* для P, якщо

$$vert\, P \subset\ vert\, P^0. \tag{2.98}$$

P^0, що є одночасно релаксаційним багатогранником для P першого і другого роду, будемо називати *релаксаційним багатогранником* для P. Його H–представлення формується з (P.IHR) шляхом вилучення частини обмежень зі збереженням умови (2.98). Залежно від послідовності вилучення обмежень, можуть формуватися різні релаксаційні багатогранники. Отже, може ставитися питання про побудову релаксаційного багатогранника, оптимального з певної точки зору, наприклад, заданого мінімальним числом обмежень.

Задача побудови незвідного H–представлення багатогранника полягає у пошуку лінійної системи обмежень вигляду (2.93), (2.97). Якщо ця задача розв'язана, то, оскільки кожна нерівність (2.93) визначає опорну площину до гіперграні P, система рівнянь множини $\mathbf{H}$ цих опорних гіперплощин, інакше кажучи, множини гіперграней P виділяється безпосередньо з (P.IHR), а саме $\mathbf{H}$: $A''x = a''_0$. Відповідно, для числа гіперграней P вірне співвідношення (2.96). Таким чином, (P.IHR) – це таке його H–представлення, що задовольняє умови (2.96), $rank(A') = \min\{n', n\}$.

Важливою проблемою в комбінаторної теорії багатогранників є задача класифікації і перечислення багатогранників із заданою структурою граней

[17,20,65,195,211,258,264], зокрема, багатогранників із заданим f вектором[2)].

Багатогранники P, P' із однаковою структурою граней називаються *комбінаторно еквівалентними* (комбінаторно ізоморфними, combinatorially equivalent polytopes) і позначаються

$$P \cong P'. \tag{2.99}$$

Необхідною умовою виконання (2.99) є збіжність f-векторів P, P'.

Деякі багатогранники отримуються одне з одного невиродженими афінними перетвореннями. У такому випадку вони називаються афінно еквівалентними.

Теорема 2.1. [264] Невироджені афінні перетворення не впливають на комбінаторну структуру багатогранника, тобто якщо $P \subset \mathbb{R}^n$ – багатогранник,

$$B, c: \ B \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ |B| \neq 0, \ c \in \mathbb{R}^n, \tag{2.100}$$

то $P' = B\,P + c$[3)] – багатогранник, комбінаторно еквівалентний до P.

Для багатогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ вони формують підклас P' комбінаторно еквівалентних до нього багатогранників, що мають особливість

$$\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ |B| \neq 0, \ \exists\, c \in \mathbb{R}^n: \ P' = B\,P + c. \tag{2.101}$$

Відповідно, для афінно евквівалентного багатограннику P багатогранника P' не тільки виконуватиметься (2.99), але зберігатиметься паралельність відповідних граней усіх розмірностей.

Означення 2.2. [8] Багатогранник P називається $lev(P)$-рівневим, якщо опорної гіперплощини $H_1 \in \mathbf{H}$ до будь-якої гіперграні $F_1 \in \mathbf{F}$ існує

[2)] $f \in \mathbb{R}^d$ – f-вектор багатогранника P, якщо $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$, де f_i – число i -граней P, $i \in J^0_{d-1} = J_{d-1} \cup \{0\}$

[3)] для $M \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \subset \mathbb{R}^n$ $M' = B\,M + b = \{x' \in \mathbb{R}^n : \ x' = B\,x + b, \ x \in M\}$

сім'я з $(levP)-1$)-ої гіперплощини $\{H_i\}_{i\in J_{lev\{P\}}\setminus\{1\}}$, паралельних до H_1, таких, що всі вершини $\mathbf{V}$ лежать на гіперплощинах $\{H_i\}_{i\in J_{lev\{P\}}}$.

Для невиродженого у точку багатогранника P, з яким ми маємо справу,

$$lev(P) \geq 2. \tag{2.102}$$

Широко відомими є *дворівневі багатогранники* (2-level polytopes, *2LPs*) [8, 9, 38, 82, 94, 95], для яких (2.102) перетворюється на рівність:

$$lev(P) = 2. \tag{2.103}$$

2LPs мають велику кількість специфічних властивостей. Вкажемо одну з них.

Теорема 2.2. [264] Кожен 2LP P афінно еквівалентний деякому $(0-1)$-багатограннику P'.

Теорема 2.2 свідчить про те, що якщо для P виконана умова (2.103), то виконані умови (2.99), (2.101),

$$vert\ P' \subseteq B_n. \tag{2.104}$$

Більш того, для 2LP P' завжди можна вважати, що виконана умова (2.104). Саме тому розгляд 2LPs зазвичай обмежують класом $(0-1)$-багатогранників [8, 9, 38, 53, 82, 94, 95].

2.5.2 Геометрична класифікація $\mathcal{C}$-множин

Здійснимо класифікацію $\mathcal{C}$–множин, виходячи з їх властивостей як геометричного місця точок у просторі (далі геометричний аналіз, a geometric analisis, *G-A*). У G-A розглядатимуться алгебро-топологічні та тополого-метричні властивості $\mathcal{C}$–множин.

Нехай E – $\mathcal{C}$–множина.

Означення 2.3. Множину E назвемо *вершинно розташованою* $\mathcal{C}$–множиною
(a vertex located $\mathcal{C}$–set, VLS), якщо вона збігається з множиною вершин власної опуклої оболонки, тобто

$$E = vert\, P, \tag{2.105}$$

де P – багатогранник (2.41).

Відповідно, можна здійснити розбиття усіх $\mathcal{C}$–множин на два класи – вершинно розташовані $\mathcal{C}$–множини (VLSs) та ті, що не є вершинно розташованими, відповідно, для яких виконано $E \backslash \mathbf{V} \neq \emptyset$.

Означення 2.4. Множину E назвемо поверхнево розташованою $\mathcal{C}$–множиною (a surface located $\mathcal{C}$–set, SLS), якщо існує функція $f(x)$, що є строго опуклою на опуклій множині $\mathcal{K} \supseteq E$, така що

$$f(x) \underset{E}{=} 0. \tag{2.106}$$

Узагальненням поняття поверхнево розташованої $\mathcal{C}$–множини буде поняття поверхнево розташованої точкової конфігурації, а саме $M \subset \mathbb{R}^n$ назвемо поверхнево розташованою точковою конфігурацією (a surface located point configuration), якщо існує функція $f(x)$, що є строго опуклою на опуклій множині $\mathcal{K} \supseteq M$ і такою, що $f(x) \underset{M}{=} 0$.

Класифікацію поверхнево розташованих $\mathcal{C}$–множин можна провести в залежності від вигляду функції $f(x)$ і, відповідно, типу поверхні

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = 0\}, \tag{2.107}$$

що нею задано.

Множину E назвемо *сферично розташованою* $\mathcal{C}$–множиною (a spherically located set, $SpLS$), якщо існують $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^1_{>0}$ такі, що:

$$E \subset S_r(a), \tag{2.108}$$

де $S_r(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\}$ – гіперсфера радіусу r із центром у точці a.

Введемо в розгляд ще два класи множин як узагальнення SpLS-класу:

– SLS E назвемо *еліпсоїдально розташованою* $\mathcal{C}$–множиною (an ellipsoidally located $\mathcal{C}$–set, ELS), якщо поверхня (2.107) має вигляд:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A (x-a) = 1 \right\}, \tag{2.109}$$

$$\text{де } A \succ 0,\ A \in \mathbb{S}_n, \tag{2.110}$$

$\mathbb{S}_n$ – множина симетричних матриць порядку n, тобто S є еліпсоїдом із центром у точці $a \in \mathbb{R}^n$;

– SLS E назвемо *суперсферично розташованою* (a superspherically located set, $SsLS$), якщо поверхня (2.107) задана рівнянням:

$$S = S_{r(\alpha),\alpha}(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^\alpha = r^\alpha(\alpha) \right\}, \tag{2.111}$$

де $\alpha \in (1, \infty)$, тобто S є суперсферою [96, 167] радіусу $r(\alpha)$ із центром у точці $a \in \mathbb{R}^n$ та коефіцієнтом деформації $\alpha/2$.

Означення 2.5. Множину E назвемо *поліедрально-поверхневою* $\mathcal{C}$–множиною (a polyhedral-surfaced $\mathcal{C}$–set, PSS), якщо існує гіперповерхня S, така що виконано:

$$E = P \cap S, \tag{2.112}$$

де P – багатогранник (2.41).

Для того, щоб встановити, що $\mathcal{C}$–множина є PSS, достатньо знайти функцію $f(x)$, що задовольняє умовам (2.106) та

$$f(x) \underset{P \setminus E}{<} 0, \tag{2.113}$$

і показати, що множина (2.107) є поверхнею. Умова (2.113) означатиме, що P лежить по один бік від поверхні S, яку в такому випадку називатимемо *описаною поверхнею* навколо E (a sircumsurface).

Так, множина вершин E довільного багатогранника P, представленого у канонічній формі, вписана в одиничну гіперсферу (a sircumsphere), а також у кусково-лінійну поверхню ∂P^{Δ} власного двоїстого багатогранника (a dual polytope P^{Δ}) [264].

У залежності від вигляду поверхні S, виділимо деякі класи поліедрально-поверхневих множин (PSLs). Так, PSS E називатимемо *поліедрально-сферичною* $\mathcal{C}$–множиною (a polyhedral-spherical $\mathcal{C}$–set, *PSpS*), якщо S є гіперсферою; *поліедрально-еліпсоідальною* $\mathcal{C}$–множиною (a polyhedral-ellipsoidally $\mathcal{C}$–set, *PES*), якщо S – еліпсоїд, відмінний від гіперсфери; *поліедрально-суперсферичною* $\mathcal{C}$–множиною (a polyhedral-superspherically $\mathcal{C}$–set, *PSsS*), якщо S є суперсферою, відмінною від гіперсфери тощо.

Встановимо зв'язок між класами вершинно-, поверхнево- розташованих та поліедрально-поверхневих $\mathcal{C}$–множин.

Теорема 2.3. Такі три твердження еквівалентні:

а) множина E – вершинно розташована;

б) множина E – поверхнево розташована;

в) множина E – поліедрально-поверхнева.

Доведення дивись у додаткуВ.1.

Теорема 2.3 вказує на три еквівалентні представлення вершинно розташованих множин – безпосереднє представлення (2.46) своїми елементами; (2.105) – як множину вершин багатогранника; (2.112) – як перетин поверхні з багатогранником.

Останнє представлення назвемо поліедрально-поверхневим (polyhedral-surface representation, PSR), якщо функція, що визначає описану поверхню S, строго опукла на опуклій множині

$$\mathcal{K} \supseteq C = conv\, S. \tag{2.114}$$

У такому випадку будемо говорити, що E дозволяє PSR.

Оскільки, згідно з (2.49), $d_E \geq 1$, C має вигляд:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq 0\} \tag{2.115}$$

і є строго опуклим тілом (a strictly convex body), а поверхня S є повною строго опуклою поверхнею цього тіла [348].

PSR, що включає як описану поверхню гіперсферу, назвемо поліедрально-сферичним (далі *PSpR*), еліпсоїда – поліедрально-еліпсоїдальним (далі *PER*), суперсфери – поліедрально-суперсферичним (далі *PSsR*).

Зауваження 2.5. У залежності від того, чи дозволяє $\mathcal{C}$–множина PSR, клас $\mathcal{C}$–множин розбивається на два підкласи. Зосередимо подальшу увагу на тих, що дозволяють таке представлення, а також на пошуку їх аналітичних поліедрально-поверхневих представлень (далі *E.PSRs*). Серед E.PSpRs/ E.PSsRs виділятимемо ті, що включають описану гіперсферу/суперсферу мінімального радіусу (далі E.PSpR/E.PSsR мінімального радіусу, $E.PSpR^{\min}$/ $E.PSsR^{\min}$). Параметрами $E.\mathrm{PSpR}^{\min}$ є координати центру $a^{\min}$ і радіус описаної навколо E гіперсфери $S^{\min} = S_{r^{\min}}(a^{\min})$ мінімального радіуса (далі *центр і радіус* E.PSpS). Параметрами $E.\mathrm{PSsR}^{\min}$ є координати центру і радіус описаної суперсфери $S^{\min}_{\alpha} = S_{r^{\min,\alpha}}(a^{\min,\alpha})$ (далі центр і радіус E.PSsS) для заданого коефіцієнта деформації $\alpha/2$.

Зауважимо, що умова строгої опуклості описаної поверхні для множин, що дозволяють PSR, – суттєва, адже якщо ослабити її лише до вимоги опуклості поверхні S, інакше завжди можна було б вважати, що умови (2.112), (2.114) виконані. Щоб це обґрунтувати, достатньо як S вибрати поверхню ∂P^{Δ} двоїстого до P багатогранника, попередньо спроектувавши P у $\mathbb{R}^{d_E}$ і сумістивши внутрішню його точку із початком координат.

Ще одне важливе питання для $\mathcal{C}$–множин, що дозволяють PSR, це питання про існування гладких описаних поверхонь і відповідних гладких PSRs (smooth PSRs, *SPSRs*). Ґрунтуючись на [54, 90, 171], можна стверджувати, що не кожна VLS має SPSR. Між тим, усі PSpRs, PERs, PSsRs є SPSRs. Саме тому ми зосередимо подальшу увагу на виділенні $\mathcal{C}$–множин саме цих трьох класів – PSpSs, PSsSs та PESs.

Надалі виділятимемо VLSs, SPSs, PSSs серед $\mathcal{C}_b$-множин, маючи на увазі, що отримані для цих класів результати безпосередньо розповсюджуються на усі $\mathcal{C}$–множини, що ними породжуються. Так, має місце таке твердження.

Твердження 2.1. Якщо E – VLS, то $\forall\, E' \subset E\ E'$ є VLS.

Доведення дивись у додатку B.1.

Твердження 2.2. Якщо E – SLS (PSS/дозволяє PSR), то довільна $E' \subset E$ також SLS (PSS/дозволяє PSR).

Доведення дивись у додатку B.1.

Приклад 2.1. Прикладом вершинно розташованої $\mathcal{C}_b$-множини є B_n, що, як відомо [108, 274], збігається з множиною вершин власної опуклої оболонки – одиничного гіперкуба $PB_n = conv\ B_n = [0, 1]^n$.

Множина B_n також є сферично розташованою, адже всі її елементи рівновіддалені від точки

$$a = \frac{\mathbf{e}}{2} \tag{2.116}$$

на відстань $\frac{\sqrt{n}}{2}$, отже $B_n \subset S$, де

$$S = S_{\frac{\sqrt{n}}{2}}(a) : \left(x - \frac{\mathbf{e}}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}. \tag{2.117}$$

Запишемо це рівняння у формі $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n}{4}$ і узагальнимо у двох напрямках: а) перший –

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2}{b_i^2}=1, \tag{2.118}$$

де $b_i\in[0.5,\infty),\ i\in J_n$; б) другий –

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^{2\alpha}=\frac{n}{2^{2\alpha}}, \tag{2.119}$$

де $\alpha\in(0.5,\infty)$.

Поверхні, задані рівняннями (2.118), (2.119), є строго опуклими

$$\forall\,\alpha,b_i\in(0.5,\infty),\ i\in J_n, \tag{2.120}$$

та їм задовольняють усі точки множини B_n. Отже, вона є SpLS, SsLS та ELS. Водночас, B_n є PSpS, PES і PSsS, де як P у представленні (2.112) бере участь гіперкуб PB_n. Крім того, умови (2.117)-(2.120) задають сім'ю строго опуклих описаних поверхонь, отже, B_n дозволяє PSpR, PER і PSsR.

Разом із B_n, довільна булева $\mathcal{C}$–множина та відповідний $0-1$-багатогранник вписані у поверхні (2.117)-(2.119). Отже, довільна $\mathcal{BS}\ E$ є VLS, SLS, PSS та дозволяє PSR, зокрема вона є PSpS.

Приклад 2.2. Нехай E – загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок, що індукована G. Згідно з [364], E – вершинно розташована. Наведемо ще один спосіб доведення цього факту, що ґрунтується на встановленні поверхневої розташованості цієї множини.

Як видно, $\forall\,p\geq 1$

$$\|x\|_p \underset{E}{=} \|g\|_p, \tag{2.121}$$

де $g=(G)=(g_1,...,g_n)$.

При $p\in(1,\infty)$ формула (2.121) задає сім'ю строго опуклих суперсфер, звідки слідує, що E – SsLS, зокрема, E є SpLS. Звідси маємо, що E – VLS та PSS, а також дозволяє PSR, у якому беруть участь багатогранник P та довільна поверхня з сім'ї

$$S_\alpha = S_{\|g\|_\alpha,\alpha}(\mathbf{0}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\alpha^\alpha = \|g\|_\alpha^\alpha\},\ \alpha \in (1, \infty), \tag{2.122}$$

суперсфер вигляду (2.111) радіуса $\|g\|_\alpha$ із центром у початку координат.

Подібно прикл. 2.2, довільна $\mathcal{C}$–множина перестановок є вписаною у поверхні (2.122). Звідси слідує, що довільна $\mathcal{P}S$ є VLS, SLS, PSS та дозволяє PSR.

Приклад 2.3. Довільна $\mathcal{C}$–множина E потужності $n_E \leq n+1$, така що $d_E = n_E - 1$, є VLS, адже P є $n_E - 1$-симплексом, а E збігається з множиною вершин цього симплекса. Крім того, множина E є SLS, а саме SpLS, параметри описаної гіперсфери S котрої можна визначити як розв'язок лінійної системи рівнянь порядку $n+1$ [208], доповнивши E попередньо $n - n_E$ точками до утворення $E' \supseteq E$ такої, що $d_{E'} = n$. Це свідчить також про те, що E є PSpS та дозволяє PSpR за участю гіперсфери S. Далі такі $\mathcal{C}$–множини будемо називати *симплексними*.

Згідно з означенням 2.2, рівневість (the levelness) багатогранника P визначається множиною $\mathbf{V}$, а саме кількістю гіперплощин, за якими $\mathbf{V}$ розкладається в напрямку нормалей до гіперграней P. Замінивши у цьому означенні $\mathbf{V}$ на FPC E вигляду (2.92) і розглянувши як P опуклу оболонку E, отримуємо означення багаторівневої FPC, наведене у [94]. Адаптуючи його до $\mathcal{C}$–множин, маємо таке.

Означення 2.6. $\mathcal{C}$–множина E називається $lev(E)$-рівневою, якщо для будь-якої гіперграні $F_1 \in \mathbf{F}$ і відповідної їй опорної гіперплощини $H_1 \in \mathbf{H}$ існує сім'я з $(lev(E)-1)$-ої гіперплощини $\{H_i\}_{i \in J_{lev(E)} \setminus \{1\}}$, паралельних до H_1, таких, що всі точки E лежать на гіперплощинах $\{H_i\}_{i \in J_{lev(E)}}$.

Наприклад,

$$lev(E) = 2 \tag{2.123}$$

означає, що $\mathcal{C}$–множина (2.92) – 2LS.

Оскільки $\mathbf{V} \subseteq E$, має місце оцінка:

$$lev(E) \geq lev(P). \tag{2.124}$$

Виникає питання, за яких умов ця нерівність перетворюється на рівність

$$lev(E) = lev(P). \tag{2.125}$$

Твердження 2.3. Якщо E – VLS, то виконана умова (2.125).

Це слідує з того, що $\mathbf{V} = E$, та означень багаторівневості багатогранника та $\mathcal{C}$–множини.

Об'єднуючи (2.102) и (2.124), отримуємо оцінку $lev(E) \geq 2$, яка, як видно, досягається на 2LSs і тільки на них.

Як буде показано у п. 5.3, 2LSs є VLSs. У сукупності з тверд. 2.3, це означає, що має місце такий факт.

Твердження 2.4.

$$lev(E) = 2 \Leftrightarrow lev(P) = 2. \tag{2.126}$$

Доведення дивись у додатку В.1.

Отже, поняття дворівневості $\mathcal{C}$–множини (2.92) і дворівневості багатогранника (2.41) взаємозамінні. Зазвичай використовується поняття дворівневих багатогранників [95], але оскільки нашою метою є дослідження $\mathcal{C}$–множин, користуватимемося поняттям дворівневої $\mathcal{C}$–множини.

Твердження 2.5. Якщо E дворівнева, то $\forall F \in \mathbf{F}$ існують опорна гіперплошина $H \in \mathbf{H}$ та $H'||H$, $H' \neq H$: $E \cap H \neq \emptyset$, $E \cap H' \neq \emptyset$.

Дійсно, якщо б це твердження будо хибне, то існувала би

$H \in \mathbf{H}$: $E = E \cap H$, а це б означало, що H – площина багатогранника.

2.6 Класифікація $\mathcal{C}$-множин при $m > 1$

Нехай $m > 1$. Розглянемо $\mathcal{C}$–множину (2.28), позначивши її E^N, та множину E вигляду (2.44). Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $E^N \subset \mathbb{R}^N_{>0}$. Нехай також $G^N = E^N$.IM, $\mathcal{A}^N = E^N$.GS, $\eta^N = |G^N|$, $k^N = |\mathcal{A}^N|$.

Задамо відображення $\zeta : E^N \to E$, таке що

$$E = \zeta(E^N),\ E^N = \zeta^{-1}(E). \tag{2.127}$$

З цією метою встановимо бієкцію між результуючими множинами E та Π, побудувавши функцію $\xi :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, таку що

$$a_l = \xi(\mathbf{a}_l), \mathbf{a}_l = \xi^{-1}(a_l),\ l \in J_k. \tag{2.128}$$

Як ξ можна обрати таку функцію (далі *Спосіб 2.6.1*), що залежить від параметра $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$:

$$\begin{gathered}\xi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \beta^{l_i^0},\ \mathbf{x} = (x_i)_i \in \mathbb{R}^m;\\ l_i = \left\lceil log_\beta \max_{l \in J_k} a_{il} \right\rceil,\ l_i^0 = \sum_{j=1}^{i-1} l_i, i \in J_m.\end{gathered} \tag{2.129}$$

Так, якщо вектори (2.10) – булеві, вибір $\beta = 2$ у (2.129) приводить до зчіпки їх координат.

Ще один шлях (далі *Спосіб 2.6.2*) полягає у знаходженні точки $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^m$ із різними відстанями до точок $\mathbf{A}$. Отже,

$$\xi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}_0)^2,$$

де $\mathbf{a}_0 : \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0\| \neq \|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0\|,\ 1 \le i < j \le k.$

Зв'язавши результуючі множини E та E^N за допомогою (2.128), забезпечено виконання (2.127) при виборі ζ у формі:

$$\forall\, y \in E^N \overset{\zeta}{\to} x = (\xi(\mathbf{x}_1), ..., \xi(\mathbf{x}_n)) \in E,$$

де $y = vec(X)$, X задано у формі (2.26).

Класифікація $\mathcal{C}$–множин, наведена у п. 2.3, цілком вірна при $m > 1$, але зазначимо, що E^N вже не буде базовою $\mathcal{C}$–множиною жодного з класів (2.87), (2.88), адже, окрім обмежень на $G^N, \mathcal{A}^N$, N, вона потребує виконання умови:

$$\mathbf{x}^j \in \mathbf{A}, j \in J_n. \tag{2.130}$$

Отже, щоб задати множину E^N, потрібно виділити найвужчий клас $\mathcal{C}_b$-множин з (2.87), (2.88), якому вона належить, та накласти обмеження (2.130).

При $m > 1$, запропонуємо класифікацію $\mathcal{C}$–множин у залежності від типу множини (2.127). Так, якщо E є $\mathcal{C}_b$-множиною типу T, E^N називатимемо $\mathcal{C}_b$-множиною типу T, додаючи слово "векторів", а також вказуватимемо множину векторів $\mathbf{A}$, якою вона породжується.

Наприклад, якщо $E = E_{nk}(G)$, то E^N буде *загальною $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок векторів*, що породжується множиною векторів $\mathbf{A}$, індукується числовою мультимножиною G^N та генерується множиною $\mathcal{A}^N$. Позначимо її $E^N = E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$.

Аналогічно можна ввести класи:

– $E_{G^N}(N, \mathbf{A})$ – $\mathcal{C}_b$-множин перестановок векторів без повторень;

– $E_{N2}(G^N, \mathbf{A})$ – спеціальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок векторів;

– $E^e_N(G^N, \mathbf{A})/E^o_N(N, \mathbf{A})$ – $\mathcal{C}_b$-множин парних/непарних перестановок векторів;

– $E^N_{\eta^N k^N}(G^N, \mathbf{A})$ – загальних $\mathcal{C}_b$-множин розміщень векторів;

– $\overline{E}^N_{k^N}(G^N, \mathbf{A})$/ $E^N_{k^N}(G^N, \mathbf{A})$ – $\mathcal{C}_b$-множин розміщень векторів без повторень/з необмеженими повтореннями;

– $E^N_{\eta^N 2}(G^N, \mathbf{A})$ – спеціальних $\mathcal{C}_b$-множин розміщень векторів;

– $E^{\pm}_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$ – загальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком векторів;

– $E^{\pm}_N(G^N, \mathbf{A})$ – $\mathcal{C}_b$-множин перестановок векторів зі знаком без повторень;

– $E^{\pm I}_{N2}(G^N, \mathbf{A})$ – спеціальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком векторів тощо.

Якщо $S(G^N) = \{0, 1\}$, відповідні $\mathcal{C}_b$-множини відносяться до $\mathcal{B}Ss$, зокрема, спеціальні базові множини перестановок/розміщень векторів називатимемо булевими $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок/розміщень векторів і позначатимемо $B_N(G^N, \mathbf{A})/B^N_{\eta^N}(G^N, \mathbf{A})$. У свою чергу, у класі $B^N_{\eta^N}(G^N, \mathbf{A})$ виділимо $\overline{B}_N(G^N, \mathbf{A})$ – булеву $\mathcal{C}_b$-множину розміщень векторів із необмеженими повтореннями та для неї проведемо розбиття на парну $\mathcal{C}_b$-напівмножину $B^h_N(G^N, \mathbf{A})$ та на непарну $\mathcal{C}_b$-напівмножину $\overline{B}^h_N(G^N, \mathbf{A})$.

Наведені $\mathcal{C}_b$-множини, що стосуються випадку $m{>}1$, є образами $\mathcal{E}_c$-множин, деякі з яких відомі у літературі [254,275–278,280]. Так, наприклад, прообраз $E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})/E^N_{\eta^N k^N}(G^N, \mathbf{A})$ при відображенні φ вигляду (2.22), називається композиційним образом перестановок/розміщень кортежів. Серед них доцільно виділити підкласи композиційних образів перестановок/розміщень кортежів без повторень та з необмеженими повтореннями, парних і непарних перестановок кортежів і т.д.

Нехай E – числова $\mathcal{C}$–множина, що індукована мультимножиною G, $|G| = n$, та породжена множиною $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = k$. Крім того, нехай Π^M вигляду (2.25) – множина булевих матриць порядку $k \times n$, стовпці яких є векторами одиничного базису $\mathbf{E}(k)$ простору $\mathbb{R}^k$, тобто

$$\Pi^M \subset B_{k \times n}, \tag{2.131}$$

$$\forall X = (x_{ij})_{i,j} \in \Pi^M \quad \mathbf{x}_j \in \mathbf{E}(k), j \in J_n, \tag{2.132}$$

де $\mathbf{x}_j, j \in J_n$, – вектори-стовпці X, а також виконана умова: $x \in E$, де

$$\forall\ X \in \Pi^M x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}} \in E, \tag{2.133}$$

а $g_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}) = (e_1, ..., e_k)^T$.

Зауваження 2.6. Враховуючи, що між $\mathbf{E}(k)$ та $\mathcal{A}$ є бієкція, а саме $\mathbf{e}_j^T g_{\mathcal{A}} = e_j$, $j \in J_k$, (2.133) можна посилити до критерію:

$$X \in \Pi^M \Leftrightarrow x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}} \in E. \tag{2.134}$$

Нехай E – $\mathcal{C}$–множина комбінаторного типу T, тоді множину Π^M, що задовольняє (2.131)-(2.134), називатимемо множиною матриць комбінаторного типу T ($\mathcal{M}$-множиною), що відповідає E. Якщо до того ж E є $\mathcal{C}_b$-множиною типу T, Π^M називатимемо базовою множиною матриць ($\mathcal{M}_b$-множиною) типу T. У такому випадку E^N буде $\mathcal{C}_b$-множиною булевих векторів типу T.

Так, якщо $E = E_{nk}(G)$, множину Π^M називатимемо загальною базовою множиною матриць перестановок (загальною $\mathcal{M}_b$-множиною перестановок) і позначатимемо $\Pi^M_{nk}(G)$, якщо $E = E^n_{\eta k}(G)$ – загальною базовою множиною матриць розміщень (загальною $\mathcal{M}_b$-множиною розміщень) і позначатимемо $\Pi^{nM}_{\eta k}(G)$. Зокрема, якщо $\eta = n$, то при $k < n$ – це буде базова множина матриць перестановок з повтореннями ($\mathcal{M}_b$-множиною перестановок з повтореннями, a set of multipermutation matrices [147]), а при $k = n$ – базовою множиною матриць перестановок (без повторень) $\Pi^M_n(G)$ ($\mathcal{M}_b$-множина перестановок, множина матриць перестановок, a set of permutation matrices, [48, 50, 329]). Якщо $\eta > n$, то при $k < n$ Π^M буде базовою множиною матриць розміщень з повтореннями ($\mathcal{M}_b$-множина розміщень з повтореннями, a set of partial multipermutation matrices), а при $k = n$ – базовою множиною матриць розміщень (без повторень) $\Pi_k^{Mn}(G)$ ($\mathcal{M}_b$-множина розміщень, a set of partial permutation matrices). Аналогічно можна ввести інші класи $\mathcal{M}_b$-множин для множин е-конфігурацій (3.14), (3.15), зокрема тих, що відповідають парним перестановкам Π_n^e і булевих векторів, а також перестановкам зі знаком.

Серед $E_{\eta^N k^N}^N(G^N, \mathbf{A})$ виділимо ще один клас, пов'язаний з е-конфігураціями перестановок зі знаком, а саме той, що задовольняє умовам (2.131), (2.132), $G \geq 0$ та

$$x = Y^T \cdot g_{\mathcal{A}} \in E, \text{ де } Y = (|x_{ij}|)_{i,j} \in \mathbb{R}_+^{m\times n}. \tag{2.135}$$

Якщо виконані умови (2.135) та $E = E_{nk}^{\pm M}(G)$, множину Π^M називатимемо загальною базовою множиною матриць перестановок зі знаком $\Pi_{nk}^{\pm M}(G)$ (загальною $\mathcal{M}_b$-множиною перестановок зі знаком). Якщо $k < n$, то це буде базова множина матриць перестановок зі знаком з повтореннями ($\mathcal{M}_b$-множина перестановок зі знаком), якщо є $k = n$ – базова множина матриць перестановок зі знаком (без повторень) $\Pi_n^{\pm M}(G)$ ($\mathcal{M}_b$-множина перестановок зі знаком).

Зауваження 2.7. З побудови видно, що Π^M залежить не від елементів G, а лише від $[G]$ – первинної специфікації G. Зокрема, для $n = k$ $[G] = (1, ..., 1)$, отже, у такому випадку у позначеннях $\mathcal{M}_b$-множин G можна опустити. У результаті, наприклад, множина матриць перестановок позначатиметься просто Π_n^M.

Цим множинам матриць поставимо у відповідність базові множини е-конфігурацій:

$$E^N = \varphi(\xi^{-1}(\Pi^M)) = \varphi(E) = \{vec(X)\}_{x\in\Pi^M}.$$

Так, $E^N = \varphi(\xi^{-1}(\Pi_{nk}^M))/\varphi(\xi^{-1}(\Pi_{\eta k}^{nM}))$ буде загальною $\mathcal{C}_b$-множиною матриць перестановок/розмішень, що породжені G (далі $\mathcal{E}_{nk}(G)/\mathcal{E}_{\eta k}^n(G)$ відповідно). Зокрема, $\mathcal{E}_n = \varphi(\xi^{-1}(\Pi_n))$ – є $\mathcal{C}_b$-множиною матриць перестановок, $\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G) = \varphi(\xi^{-1}(\Pi_{nk}^{\pm}(G)))$ – загальною $\mathcal{C}_b$-множиною матриць перестановок зі знаком, $\mathcal{E}_n^e = \varphi(\xi^{-1}(\Pi_n^e))$ – $\mathcal{C}_b$-множиною матриць парних перестановок.

2.7 Висновки за розділом 2

Дано формалізацію комбінаторної конфігурацій у термінах відображення однієї множини у іншу (вихідної у результуючу) і показано доцільність збереження інформації про обидві множини в результуючій конфігурації.

Множини евклідових комбінаторних конфігурацій виділено з класу евклідових комбінаторних множин, відповідно обґрунтовано можливість їх моделювання у формі скінченних точкових конфігурацій після відображення в евклідів простір.

Введено поняття множини евклідових комбінаторних конфігурацій (множини е-конфігурацій, $\mathcal{C}$–множини) як образу в евклідовому просторі множини комбінаторних конфігурацій, результуюча множина яких складається з векторів однієї розмірності. Таким чином, обґрунтовано спосіб моделювання $\mathcal{C}$–множин у термінах відображень і розглянуто різні такі відображення.

Введено поняття індукуючої мультимножини (E.IM) та твірної множини (E.GS) $\mathcal{C}$–множини, що являють собою основний інструмент їх дослідження, названого конструктивним аналізом та позначено C-A, зокрема, математичного моделювання.

Введено ряд класів $\mathcal{C}$–множин, виходячи з їх геометричних характеристик, серед яких вершинно-, поверхнево, поліедрально-поверхневі і багаторівневі $\mathcal{C}$–множини (VLSs, SLSs, PSSs, MLSs). На їх основі здійснено геометричний аналіз (G-A) $\mathcal{C}$–множин.

Представлено типологію $\mathcal{C}$–множин, заснована на C-A і G-A, зокрема, виділено клас базових $\mathcal{C}$–множин ($\mathcal{C}_b$-множин), що володіє найбільш чітко вираженою комбінаторною структурою. Основну увагу приділено числовим $\mathcal{C}$–множинам, тобто тим, що породжуються числовими результуючими множинами. Серед $\mathcal{C}$–множин загального вигляду виділено клас, що породжується множиною векторів одиничного базису. Встановлено його зв'язок із відомими класами булевих і трійкових матриць, серед яких матриці перестановок та розміщень, а також із $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок і перестановок зі знаком.

Представлено спосіб моделювання $\mathcal{C}$–множин загального вигляду за допомогою числових $\mathcal{C}$–множин і, тим самим, обґрунтовано необхідність глибокого дослідження останніх.

Встановлено біекцію між довільними числовими $\mathcal{C}$–множинами, породженими k елементами, і $\mathcal{C}$–множиною загального вигляду, індукованою векторами одиничного базису порядку k, тим самим, представлено ще один спосіб моделювання числових $\mathcal{C}$–множин за допомогою булевих і трійкових e-конфігурацій.

Основні результати другого розділу опубліковано у роботах [186, 254, 317–319, 321, 322, 324, 332, 333, 344, 369, 381].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [8, 9, 15, 17, 22, 38, 40, 53, 54, 65, 68, 82, 90, 94–96, 108, 167, 171, 195, 206, 208, 211, 248, 258, 264, 274, 348, 356, 357, 362, 364, 370].

3 ВЛАСТИВОСТІ $\mathcal{C}$-МНОЖИН

3.1 Зв'язок між класами $\mathcal{C}$-множин

Встановимо зв'язок між різними $\mathcal{C}_b$-множинами, відповідно, і між класами $\mathcal{C}$–множин.

Дві $\mathcal{C}$–множини E, E' називатимемо комбінаторно ізоморфними і позначатимемо

$$E \simeq E', \tag{3.1}$$

якщо між елементами E, E' існує бієкція, а їх опуклі оболонки – $P = conv\, E,\ P' = conv\, E'$ – комбінаторно еквівалентні багатогранники:

$$E \simeq E' \Leftrightarrow \exists \phi :\ E' = \phi(E),\ E = \phi^{-1}(E'); P \simeq P'.$$

Наслідок 3.1. (з теореми 2.1) Для $\mathcal{C}$–множин $E, E' \subset \mathbb{R}^n$, пов'язаних таким чином:

$$E' = B\, E + c, \tag{3.2}$$

де B, c задовольняють (2.100), умова (3.1) виконана.

Доведення дивись у додатку В.2.

Зауваження 3.1. Отже, такі операції як здвиг, масштабування, поворот, перенумерація координат $\mathcal{C}$–множини приводить до формування комбінаторно ізоморфних до неї $\mathcal{C}$–множин.

Теорема 3.1. Якщо $\mathcal{C}$–множини $E, E' \subset \mathbb{R}^n$ такі, що

$$E' = b \circ D\, E + c, \tag{3.3}$$

де $A \circ B$ – добуток Адамара множин $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, ..., d_n)$, $b \in B'_n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n_{>0}$, вони задовольняють умову (3.1).

Тут c – вектор здвигу, D – матриця масштабування (стиснення/розтягнення) E' вздовж координатних осей, а b – вектор, від'ємні координати якого вказують, відносно яких координатних площин відображається вихідна множина.

Доведення дивись у додатку В.2.

Встановимо зв'язок між мультимножинами G_E, G'_E, які індукують $\mathcal{C}$–множини $E, E' \subset \mathbb{R}^n$ відповідно, що задовольняють умови теореми 3.1. З цією метою представимо E' у формі $E' = \{x'^1, ..., x'^{n_E}\}$ і введемо в розгляд мультимножини X'^j окремих координат E' та їх основи – $\mathcal{A}'_j = S(X'^j)$, $j \in J_n$. З (3.3) маємо: $X'^j = \{x'_{ij}\}_{i \in J_{n_E}} = b_j d_j X^j + c_j$, $j \in J_n$. Звідси видно, що афінне перетворення (3.3) не впливає на рівневість $\mathcal{C}$–множини по кожній координаті, отже, $|\mathcal{A}'_j| = |\mathcal{A}_j| = k_j$, $j \in J_n$.

Оскільки у даному випадку лінійні перетворення координат E при переході до E' відбуваються незалежно одна від одної, мультимножини G_E та $G_{E'} = \bigcup\limits_{x' \in E'} \{x'\}$ можуть відрізнятися за потужністю у той чи інший бік. Єдине, що можна стверджувати, що

$$\eta' = |G_{E'}| \geq \max\{n, lev'(E)\}. \tag{3.4}$$

Враховуючи це, бажано вибирати перетворення (3.3) таким чином, щоб зменшити η'.

Абсолютна більшість $\mathcal{C}$–множин належить до $\mathcal{PPS}s$, але деякі з них дозволяють перехід до комбінаторно ізоморфних з $\mathcal{PS}s$, $\mathcal{BS}s$, $\mathcal{SPS}s$. Сформулюємо деякі умови для цього. Так, (3.4) дозволяє записати достатню умову для виділення класу $\mathcal{PP}$Ss.

Твердження 3.1. Якщо E – $\mathcal{PPS}$, така що $lev'(E) > n$, то довільна $\mathcal{C}$–множина E', одержана в результаті невиродженого афінного перетворення (3.3) над E, є $\mathcal{PPS}$.

Твердження 3.2. Для того, щоб для $\mathcal{C}$–множини E існувала $\mathcal{PS}$ E', одержана в результаті афінного перетворення (3.3), необхідно, щоб $lev'(E) \leq n$, а також $d_E \leq n-1$.

Доведення дивись у додатку B.2.

Твердження 3.3. Для того, щоб для $\mathcal{C}$–множини E існувала $\mathcal{SPS}$ E', одержана у результаті афінного перетворення (3.3), необхідно, щоб $lev'(E) \leq 2n$.

Симетрія базових $\mathcal{SP}$Ss відносно початку координат дозволяє сформулювати ще одну умову, що стосується розпізнавання структури перестановок зі знаком у $\mathcal{C}$–множині.

Твердження 3.4. Для того, щоб для $\mathcal{C}$–множини E такої, що $lev'(E) = 2n$, існувала $\mathcal{SPS}$ E', одержана у результаті афінного перетворення (3.3), необхідно, щоб $\forall j \in J_n : k_j = 2n$, $\mathcal{A}_j$ була симетричною відносно точки $\frac{1}{2}(e_{j1} + e_{j,2n})$.

Теорема 3.2. Для довільної $\mathcal{S}$S E' існує $\mathcal{B}S$ E, комбінаторно ізоморфна E'.

Доведення дивись у додатку B.2.

Наслідок 3.2. Довільна $\mathcal{S}S$ E є PSpS.

Доведення дивись у додатку B.2.

Наслідок 3.3.

$$E_{n2}(G) \simeq B_n(m), \text{ де } m = \mu_G(e_2);$$
$$E^n_{\eta 2}(G) \simeq B_n(m_1, m_2), \text{ де } m_i = \mu_G(e_i),\ i = 1, 2;$$
$$\overline{E}^n_2(G) \simeq B_n \simeq B'_n.$$

Умова (3.1) також виконана для пар E і E', що є $\mathbb{Q}$S і $\mathbb{Z}$S або $\mathbb{U}\Delta$S і $\mathbb{Z}$S відповідно. А саме: а) якщо E – $\mathbb{Z}$S, то $E' = \frac{1}{q}E$ – $\mathbb{Q}$S $\forall q \in \mathbb{N}$; б) якщо E – $\mathbb{Z}$S, то $E' = \Delta E$ – $\mathbb{U}\Delta$S $\forall \Delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Теорема 3.3. Такі класи $\mathcal{C}_b$-множин комбінаторно ізоморфні:

$$E_n^e \simeq E_n^o;$$

$$B_n^h \simeq \overline{B}_n^h; \tag{3.5}$$

$$E_{n2}^{\pm I}(G) \simeq B_n^{\pm}(n_1). \tag{3.6}$$

Доведення дивись у додатку В.2.

Зауваження 3.2. Наведені у теоремах 3.1-3.3 афінні перетворення над $\mathcal{C}$–множинами можна представити у вигляді (3.2), де B – мономіальна матриця [1)], $c \in \mathbb{R}^n$ – вектор здвигу.

Серед афінних перетворень ми не торкнулися поворотів, адже вони можуть вплинути на рівневість за координатами, а сформульовані вище умови стосуються аналізу саме цієї характеристики. Але слід зауважити, що, згідно з теоремою 2.2 та тверд.2.3, дворівневість $\mathcal{C}$–множини E дозоляє говорити про існування матриці B та вектора c у (2.100) таких, що для множина E' вигляду (3.2) є $\mathcal{B}$S. Відповідно, виконання (2.123) можна розглядати як ще одну достатню умову існування афінного перетворення, що переводить $\mathcal{C}$–множину у $\mathcal{B}$S. Переформулюємо теорему 2.2 у термінах 2LSs.

Теорема 3.4. Кожна дворівнева $\mathcal{C}$–множина комбінаторно ізоморфна $\mathcal{B}$S.

Зауваження 3.3. У подальшому увагу буде приділено дослідженню властивостей дворівневих $\mathcal{C}$–множин у цілому. Теорема 3.4 говорить, що досліджуючи даний клас, ми фактично вивчаємо клас дворівневих $\mathcal{B}$Ss, причому, можливо, після невиродженого афінного перетворень.

Твердження 3.5. Якщо $E \subset \mathbb{R}^n$ – базова полікомбінаторна $\mathcal{C}$–множина, що породжується $\mathcal{C}_b$-множинами (2.91) та розбиттями (2.89), (2.90), не обмежуючи загальності, можна вважати, що:

[1)] квадратна матриця є мономіальною, якщо кожен її рядок та стовпець містить у точності один додатний елемент, інші її елементи нульові [109]

$$n_l \geq n_{l+1},\ l \in J_{L-1}, \tag{3.7}$$

$$I_1 = J_{n_1},\ \ I_l = J_{n_l^0} \backslash J_{n_{l-1}^0},\ l \in J_{L-1} \tag{3.8}$$

$$\text{де } n_l^0 = \sum_{i=1}^{l} n_i,\ l \in J_L. \tag{3.9}$$

Доведення дивись у додатку В.2.

Переформулюємо тверд. 3.5 у термінах декартового добутку множин.

Твердження 3.6. Якщо $E \subset \mathbb{R}^n$ – полікомбінаторна $\mathcal{C}_b$-множина, що породжується $\mathcal{C}_b$-множинами (2.91) та розбиттями (2.89), (2.90), не обмежуючи загальності, можна вважати, що вона має вигляд:

$$E = \bigotimes_{l=1}^{L} E^l,\ \text{де } E^l \subset \mathbb{R}^{n_l},\ l \in J_L, \tag{3.10}$$

є $\mathcal{C}_b$-множинами, що породжують E, а $n_l \geq 1$, $l \in J_L$, задовольняють (3.7),

$$n = n_1 + ... + n_L. \tag{3.11}$$

Наслідок 3.4. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що загальні $\mathcal{C}_b$-множини поліперестановок і полірозміщень мають вигляд (3.10) та задовольняють умовам (3.7),

$$E_{\overline{n}\overline{k}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{n_l k_l}(G^l), \tag{3.12}$$

$$E_{\overline{\eta}\overline{k}}^{\overline{n}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{\eta_l k_l}^{n_l}(G^l),\quad \text{де } \eta_l \geq n_l,\ l \in J_L;\ \exists l_0:\ \eta_{l_0} > n_{l_0}, \tag{3.13}$$

де $\overline{n} = (n_l)_{l \in J_L}$, $\overline{k} = (k_l)_{l \in J_L}$, $\overline{\eta} = (\eta_l)_{l \in J_L}$.

Зауважимо, що серед (3.13) не обов'язково усі складові декартового добутку є $\mathcal{C}_b$-множинами розміщень. Тут позначення $E_{\eta_l k_l}^{n_l}(G^l)$ використано в узагальненому сенсі як для $\mathcal{C}_b$-множин розміщень $E_{\eta_l k_l}^{n_l}(G^l)$, $\eta_l > n_l$, так і для $\mathcal{C}_b$-множин перестановок $E_{n_l k_l}^{n_l}(G^l) = E_{n_l k_l}(G^l)$.

Зауваження 3.4. Теореми 3.2, 3.3, тверд. 3.6 та умова (2.49), дозволяють сказати, що при дослідженні $\mathcal{C}_b$-множин (2.87), (2.88) достатньо обмежитися:

а) серед $\mathcal{C}_b$-множин перестановок такими класами:

$$B_n(m), m \in J_{n-1};\ E_{nk}(G),\ 3 \leq k < n;\ E_n(G),\ E_n^e(G),\ n \geq 3; \quad (3.14)$$

б) серед $\mathcal{C}_b$-множин розміщень – такими класами:

$$\begin{gathered} B_n;\ B_n(m_1, m_2),\ 0 \leq m_1 < m_2 \leq n; E_{\eta k}^n(G),\ k < \eta,\ n < \eta < k \cdot n; \\ E_k^n(G),\ 2 \leq n < k;\ T_n;\ \overline{E}_k^n(G),\ k > 3;\ B_n^{\pm}(m),\ m \in J_{n-1}; B_n^h; \\ E_{nk}^{\pm}(G),\ 3 \leq k < n;\ E_n^{\pm I}(G), n \geq 3;\ E_n^{\pm II}(G); \end{gathered} \quad (3.15)$$

в) серед $\mathcal{C}_b$-множин поліперестановок та полірозміщень – такими класами:

$$\overline{\mathcal{P}}Ss : E_{\overline{n}\overline{k}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{n_l k_l}(G^l); \overline{\mathcal{P}\mathcal{P}}Ss : E_{\overline{\eta}\overline{k}}^{\overline{n}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{\eta_l k_l}^{n_l}(G^l).$$

Використовуючи властивості множин класів (3.14), (3.15) у сукупності із дослідженням особливостей декартових добутків $\mathcal{C}$–множин загального вигляду, з'являється можливість говорити про властивості чисельних класів полікомбінаторних множин, які можна з них утворити, ґрунтуючись на тверд. 3.6.

Зауваження 3.5. Крім того, можна завжди вважати, що для E.ІМ G виконана умова:

$$[G] \succeq [G'], \quad (3.16)$$

де G' задовольняє $[G'] = (\eta_k, ..., \eta_1)$, наприклад, $G' = \{(e_1 - e_1)^{\eta_k}, ..., (e_k - e_1)^{\eta_1}\}$.

Враховуючи (3.16), кількість булевих C_b-множин у сім'ї (3.14), (3.15) може бути скорочена накладанням таких умов:

$$B_n(m), m \in J_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor};\ B_n(m_1, m_2), m_1 \le \frac{n}{2}, n - m_1 \le m_2.$$

Теорема 3.5. Якщо $E \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{PS}$, $I \subset J_n$, $|I| = n - 1$, то множина E_I вигляду (2.81) є $\mathcal{PPS}$, яка комбінаторно ізоморфна E.

Доведення дивись у додатку В.2.

Твердження 3.7. Для того, щоб для $\mathcal{C}$–множини $E \subseteq \mathbb{R}^n$ існувала $\mathcal{PS}$ E', комбінаторно ізоморфна до неї вигляду (3.2), де B – невироджена діагональна матриця, необхідно, щоб

$$|\mathcal{A}_i| \le n,\ i \in J_n. \tag{3.17}$$

У роботі [274], досліджувалася така булева множина – $B_n(x_0, m) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x - x_0\|^2 = m\}$, де $x_0 \in B_n$, $m \in J_n$.

Твердження 3.8.

$$\forall m \in J_n,\ \forall x_0 \in B_n\ B_n(x_0, m) \simeq B_n(m). \tag{3.18}$$

Дійсно, перехід від $B_n(x^0, m)$ до $B_n(m)$ здійснюється замінами $x_i \to 1 - x_i$ для $i \in J_n :\ x_i^0 = 1$, які не впливають на комбінаторну ізоморфність.

3.2 Декомпозиції $\mathcal{C}$-множин

Виходячи з конструкції $\mathcal{C}_b$-множин, мають місце такі включення:

$$\begin{aligned} & B_n(m) \subset B_n;\ B_n(m) \subset B_n^{\pm}(m) \subset T_n; \\ & \forall m \in J_{m_2} \backslash J_{m_1 - 1} \quad B_n(m) \subset B_n(m_1, m_2); \\ & \forall G' \subset G :\ |G'| = n,\ |S(G')| = k_{G'} \quad E_{nk_{G'}}(G') \subset E_{\eta k}^n(G); \\ & E_n^e(G),\ E_n^o(G) \subset E_n(G);\ B_n^h, \overline{B}_n^h \subset B_n; \end{aligned} \tag{3.19}$$

якщо E – $\mathcal{C}$-множина, індукована G вигляду (2.50), то $E \subseteq \overline{E}_k^n(G'')$, де $G'' = \{e_i^n\}_{i \in J_k}$.

Це вказує на шляхи декомпозиції одних C_b-множин на інші, наприклад:

$$B_n(m_1, m_2) = \bigcup_{m=m_1}^{m_2} B_n\,(m); \tag{3.20}$$

$$B_n = \bigcup_{m=0}^{n} B_n\,(m); \tag{3.21}$$

$$B_n^h = \bigcup_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} B_n\,(2m); \tag{3.22}$$

$$\overline{B}_n^h = \bigcup_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} B_n\,(2m+1); \tag{3.23}$$

$$E_{\eta k}^n(G) = \bigcup_{\mathcal{G} \subset G, |\mathcal{G}|=n} E_{nk_{\mathcal{G}}}\,(\mathcal{G}); \tag{3.24}$$

$$E_n(G) = E_n^e(G) \cup E_n^o(G); \tag{3.25}$$

$$B_n = B_n^h \cup \overline{B}_n^h; \tag{3.26}$$

$$T_n = \bigcup_{m=0}^{n} B_n^{\pm}(m); \tag{3.27}$$

$$E_{nk}^{\pm}(G) = \bigcup_{y \in B_n'} E_{nk}(y, G); \tag{3.28}$$

$$E_{nk}^{\pm}(G) = \bigcup_{\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{G}}} E_{nk_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G}),\ \overline{\mathcal{G}} = \{\mathcal{G} = \{g_{j_i}\}_{i \in J_n} \subset G_E : \{|g_{j_i}|\}_{i \in J_n} = G\}, \tag{3.29}$$

де $E_{nk}(y, G) = y \circ E_{nk}(G)$, $B_n(0) = B_n^{\pm}(0) = \mathbf{0}$, $B_n(n) = \mathbf{e}$, $B_n^{\pm}(n) = B_n'$, $A \circ B$ добуток Адамара множин $A, B \subset \mathbb{R}^n$, G_E задовольняє (2.85).

А це, у свою чергу, дозволяє запропонувати шляхи декомпозиції $\mathcal{C}$–множин, виходячи з їх природи, і дослідити таким чином структурні властивості даного класу FPCs.

3.2.1 Загальні підходи до декомпозиції $\mathcal{C}$-множин

Якщо $\mathcal{C}$-множина E вигляду (2.46) представлена у формі:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}^i, \tag{3.30}$$

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}^i\}_{i \in J_{n_{\mathcal{E}}}},\ n_{\mathcal{E}} = |\mathcal{E}|, \tag{3.31}$$

$$\mathcal{E}^i \subset E,\ i \in J_{n_{\mathcal{E}}}, \tag{3.32}$$

тобто (3.32) є покриттям або розбиттям E, говорять, що здійснено декомпозицію E (a decomposition, $E.D$) на $n_{\mathcal{E}} \geq 2$ підмножин вигляду (3.31).

Коли мова йде про декомпозицію, ставляться такі задачі – перейти до розв'язку скінченної кількості редукованих задач, а саме скоротити область пошуку у одержаних підзадачах, ефективно визначити несумісні області, уникнути перегляд ідентичних областей пошуку, забезпечивши, щоб щоб одержані при цьому задачі розв'язувались не складніше за вихідну. Ідеальним варіантом є редукція вихідної задачі на задачі меншої розмірності, на гілки однакової потужності, на множини тієї самої комбінаторної природи або більш прості з точки зору застосування у розв'язанні поставлених задач. Сформулюємо ці задачі на $\mathcal{C}$-множинах у термінах їх декомпозиції.

Якщо для множин (3.31), (3.32) умова (3.30) не виконана, декомпозиція E існує у формі (далі ED_0):

$$E = \bigcup_{i=0}^{n_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}^i, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{E}^0 = E \backslash \bigcup_{i=1}^{n_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}^i. \tag{3.34}$$

Введемо позначення:

$$G^i = \mathcal{E}^i.\mathrm{IM},\ \mathcal{A}^i = \mathcal{E}^i.\mathrm{GS},\ \eta^i = |G^i|,\ k^i = |\mathcal{A}^i|,\ i \in J^0_{n_{\mathcal{E}}}. \tag{3.35}$$

У такому випадку маємо: $0 \leq k^i \leq \eta^i \leq \eta$, $i \in J^0_{n_{\mathcal{E}}}$; $G = \bigcup_{i=0}^{n_{\mathcal{E}}} G^i$, $\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^{n_{\mathcal{E}}} \mathcal{A}^i$.

Проведемо класифікацію декомпозицій $E.\mathrm{D}/E\mathrm{D}_0$, нумеруючи складові декомпозиції з одиниці/нуля відповідно.

Нехай

$$\mathcal{E}^{ij} = \mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^j,\ 1 \leq i < j \leq n_{\mathcal{E}}. \tag{3.36}$$

Якщо $\mathcal{E}^{ij} \subset \mathcal{E}^i$, $\mathcal{E}^{ij} \subset \mathcal{E}^j$, $1 \leq i < j \leq n_{\mathcal{E}}$, E.D будемо називати *якісною* (a qualitative decomposition, E.QD). E.QD передбачає відсутність у складі $\mathcal{E}$ таких множин, виключення яких залишає результат декомпозицією E, тобто якщо – E.QD, то $\forall j \in J_{n_{\mathcal{E}}} \quad E \subset \bigcup\limits_{i \neq j} \mathcal{E}^i$. Зокрема, це означає, що $\emptyset \not\subseteq \mathcal{E}$.

E.D, множини (3.36) у якій задовольняють умову: $\mathcal{E}^{ij} = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n_{\mathcal{E}}$, тобто є розбиттям E, буде *декомпозицією E на попарно непересічні підмножини* (декомпозиція-розбиття, a paiwise-disjoint decomposition, E.PD). У E.PD множини (3.36) задовольняють умову: $\mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n_{\mathcal{E}}$.

Ясно, що усі декомпозиції (3.20)-(3.27) – якісні, адже вони представляють базову C_b-множину об'єднанням множин, що містять щонайменше одну точку. Крім того, ці декомпозиції, за виключенням (3.28), є E.PD. При цьому, враховуючи (3.28) та розбиття $E^{\pm}_{nk}(G)$ на два класи, маємо:

$$E^{\pm I}_{nk}(G) = \bigcup_{y \in B'_n} E_{nk}(y, G), \quad \text{де } e_1 = 0; \tag{3.37}$$

$$E^{\pm II}_{nk}(G) = \bigcup_{y \in B'_n} E_{nk}(y, G), \quad \text{де } e_1 > 0. \tag{3.38}$$

Тут, (3.38) – $E^{\pm II}_{nk}(G)$.QPD, у той час як (3.37) – це звичайна $E^{\pm I}_{nk}(G)$.QD.

Ще один аспект, важливий при декомпозиції, – це розбиття на однакові чи близькі за потужністю підмножини E. Так, E.D вигляду (3.30) назвемо *збалансованою* (a balanced decomposition, E.BD), якщо множини сім'ї (3.31) задовольняють умову:

$$|\mathcal{E}^i| = |\mathcal{E}^j|, 1 \leq i < j \leq n_{\mathcal{E}}. \tag{3.39}$$

Зрозуміло, що E.BD є якісною, а для збалансованої E.PD (далі $E.BPD$) (3.39) набуває вигляду: $|\mathcal{E}^i| = \frac{|E|}{n_{\mathcal{E}}}$, $i \in J_{n_{\mathcal{E}}}$.

Так, декомпозиції (3.25), (3.26), (3.28) є збалансованими, до того ж (3.25) – $E_n(G)$.BPD, (3.26) – B_n.BPD, (3.28) – є $E^{\pm II}_{nk}(G)$.BPD.

Ще два аспекти, що представляють інтерес, – це декомпозиція $\mathcal{C}_b$-множини на $\mathcal{C}_b$-множини меншої розмірності, бажано цього ж комбінаторного типу, а також на комбінаторно ізоморфні $\mathcal{C}_b$-множини. Тобто метою декомпозиції є побудова E.PD на комбінаторно ізоморфні $\mathcal{C}_b$-множини того ж комбінаторного типу, що і E, але меншої розмірності (декомпозиція-редукція, a reduction decomposition, E.RD). Прикладом E.RD є (3.37), (3.37) при $k = n$.

3.2.2 Декомпозиції $\mathcal{C}$-множин: C-A

Представимо декілька шляхів декомпозиції довільної $\mathcal{C}$-множини E, що ґрунтується на $\mathcal{A}/G/n$-A. Потім перейдемо до дослідження особливостей декомпозиції $\mathcal{C}_b$-множин.

1. *Декомпозиції E на базі декомпозиції $\mathcal{A}$*

Сформуємо множини $\mathcal{A}^i = \mathcal{A} \backslash \{e_i\}$, $i \in J_k$. Вони задають покриття множини $\mathcal{A}$, більш того, якісну її декомпозицію, а сами породжують декомпозицію E на множини:

$$\mathcal{E}^i = \{x \in E : \, S(\{x\}) \subseteq \mathcal{A}^i\},\ i \in J_k, \tag{3.40}$$

$$\mathcal{E}^0 = E \backslash \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{E}^i. \tag{3.41}$$

Дана $E.\mathrm{D}_0$ задається формулами (3.34), (3.40), (3.41), де $n_{\mathcal{E}} = k$ (далі $E.D_0^I$). Якщо

$$\mathcal{E}_0 = \emptyset, \tag{3.42}$$

формули (3.30), (3.40) задаватимуть E.D (далі $E.D^I$).

Необхідною умовою того, щоб для заданого $i \in J_k$ множина $\mathcal{E}^i$ вигляду (3.40) не була порожньою, є $\eta - \eta_i \geq n$, а для $\mathcal{E}^0$ вигляду (3.41) – $k \geq n$. Звідси слідує, що для того, щоб формули (3.33), (3.40), (3.41) задавали $E\mathrm{QD}_0^I$, необхідно, щоб виконувалася ця умова, а також

$$\eta - \eta_i \geq n,\ i \in J_k. \tag{3.43}$$

Звідси слідує, що $\eta > n$, тобто ця декомпозиція застосовувана і може бути якісною лише для $\mathcal{PP}$S. Зокрема, для того, щоб (3.30), (3.40) задавали $E.\mathrm{QD}^I$, необхідно виконання умов (3.43), $k < n$.

Прикладом такої декомпозиції є $E.\mathrm{QD}^I/\ E\mathrm{D}_0^I$ для $E = E_k^n(G)$ є

$$E_k^n(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E_{k-1}^n(\mathcal{A}^i)\ (k < n), \tag{3.44}$$

$$E_k^n(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E_{k-1}^n(\mathcal{A}^i) \cup \mathcal{E}^0\ (k \geq n), \tag{3.45}$$

відповідно. Тут $\mathcal{E}^0$ – це усі е-конфігурації розміщень без повторень, індуковані G, що містять усі елементи $\mathcal{A}$ як свої координати – $\mathcal{E}^0 = \{x \in E_k^n(G) : \{x\} = \mathcal{A}\}$.

$E.\mathrm{D}^I$ може не бути $E.\mathrm{PD}$, адже, згідно з включенням (3.40), можливе існування $x \in E$, що належить різним множинам цієї сім'ї.

Якщо (3.40), (3.41) будуть виконані у формі:

$$\mathcal{E}^i = \{x \in E:\ S(\{x\}) = \mathcal{A}^i\},\ i \in J_k,$$
$$\mathcal{E}^0 = \{x \in E:\ S(\{x\}) = \mathcal{A}\},$$

декомпозиція $E.\mathrm{D}_0^I/E.\mathrm{D}^I$ буде $E.\mathrm{PD}$ (далі $E.PD_0^I/E.PD^I$).

Прикладом $E.\mathrm{QPD}_0^I$ є (3.45) при $k = n + 1$, а прикладом $E.\mathrm{QPD}^I$ – (3.44), причому оскільки всі складові (3.44) мають однакову потужність, це є $E.\mathrm{BPD}^I$.

2. *ED на базі декомпозиції* $\mathcal{A}_j,\ j \in J_n$. Формула (2.47) задає поелементну декомпозицію множин $\mathcal{A}_j$, $j \in J_n$. Згідно з нею, можна запропонувати також таку E-декомпозицію.

а) Введемо у розгляд множини:

$$E^{ij} = \{x \in E: \ x_j = e_{ij}\}, \ i \in J_{k_j}, \ j \in J_n, \tag{3.46}$$

які всі непорожні згідно з визначенням множин (2.47).

Зафіксуємо $j \in J_n$ і сформуємо сім'ю (3.31) таким чином $\mathcal{E} = \{E^{ij}\}_{i \in J_{k_j}}$, тоді (3.30), (3.46), де $n_{\mathcal{E}} = k_j$, задають E.QPD (далі $E.D^{II}$).

б) Зафіксуємо $i \le \min\limits_{j \in J_n} k_j$ у (3.46) і сформуємо сім'ю

$$\mathcal{E} = \{E^{ij}\}_{j \in J_n} \cup \mathcal{E}^0, \tag{3.47}$$

$$\mathcal{E}^0 = \{x \in E: \ x_j \ne e_{ij}, j \in J_n\}. \tag{3.48}$$

Формули (3.33), (3.47), (3.48), де $n_{\mathcal{E}} = n$, задають $E.\mathrm{D}_0$ (далі $E.D_0^{III}$). У разі виконання (3.42), формула (3.30), де $\mathcal{E} = \{E^{ij}\}_{j \in J_n}$, задає E.D (далі $E.D^{III}$). Враховуючи, що множини (3.47) непорожні, якщо (3.42) виконано, $E.\mathrm{D}^{III}$ буде якісною декомпозицією E (далі $E.QD^{III}$), якщо ні, то $E.\mathrm{D}_0^{III}$ буде якісною декомпозицією E (надалі $E.\mathrm{D}_0^{III}$).

3. *$E.D$ на базі декомпозиції G.* Нехай G: $\eta_G > n$, $\eta' : n \le \eta' < \eta$. Розглянемо як сім'ю (3.31)

$$\mathcal{E} = \{E(\mathcal{G})\}_{\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{\eta'}} \tag{3.49}$$

$$\text{де} \qquad E(\mathcal{G}) = \{x \in E : \{x\} \subseteq \mathcal{G}\}, \tag{3.50}$$

$$\mathbb{G}_{\eta'} = \{\mathcal{G} \subset G: \ |\mathcal{G}| = \eta'\}. \tag{3.51}$$

У такому випадкуформули (3.30), (3.49), де $n_{\mathcal{E}} = |\mathbb{G}_{\eta'}|$, задають E.D (далі $E.D^{IV}$). Зокрема, при виборі $\eta' = n$, (3.50) задаватиме $\mathcal{C}$-множину перестановок, що індукована мультимножиною $\mathcal{G}$ з сім'ї (3.51). Звідси слідує, що у даному випадку (3.30), (3.49) буде E.PD (далі $E.PD^{IV}$). Прикладом якісної $E.\mathrm{PD}^{IV}$ (далі $E.QPD^{IV}$) є $B_n(m_1, m_2).\mathrm{QPD}^{IV}$ вигляду (3.20), $B_n.\mathrm{QPD}^{IV}$ вигляду (3.21), $E^n_{\eta k}(G).\mathrm{QPD}^{IV}$ вигляду (3.24).

3.2.2.1 Декомпозиції $\mathcal{C}_b$-множин: C-A

Нехай E – $\mathcal{C}_b$-множина з сімей (3.14), (3.15). Для неї вірно:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_j,\ k = k_j,\ j \in J_n, \tag{3.52}$$

тому умова (3.46) набуватиме вигляду:

$$E^{ij} = \{x \in E :\ x_j = e_i\},\ i \in J_k,\ j \in J_n. \tag{3.53}$$

Зокрема, для множин B_n, B'_n, $B_n(m)$, $B_n(m_1, m_2)$, B_n^h виконана умова (2.59) відповідно, (3.53) перетворюється на $E^{0j} = \{x \in E :\ x_j = 0\}$, $E^{1j} = \{x \in E :\ x_j = 1\}$, $j \in J_n$.

Так, $B_n.\mathrm{D}_0^I$, $T_n.\mathrm{D}_0^I$ відповідно мають вигляд:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_1 = \mathbf{e},\ \mathcal{E}_2 = \mathbf{0},\ \mathcal{E}_0 = B_n(1, n-1);\\ \mathcal{E}_1 = B_n,\ \mathcal{E}_2 = B'_n,\ \mathcal{E}_3 = -B_n,\end{gathered} \tag{3.54}$$

де $\mathcal{E}_0$ – множина трійкових розміщень вигляду $\mathcal{E}_0 = \{x \in T_n : S(\{x\}) = \{-1, 0, 1\}\}$. Відзначимо, що для B_n ця декомпозиція є $B_n.\mathrm{QPD}_0^I$, а для T_n – $T_n.\mathrm{QD}_0^I$, адже точки $-\mathbf{e}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}$ є спільними для пар множин із (3.54).

Оскільки $E.\mathrm{D}_0^I$, $E.\mathrm{D}^I$, застосовувані лише до $\mathcal{C}_b$-множин, що індукуються мультимножиною G потужності вище за n, декомпозиція $E.\mathrm{D}^I$ показує, яким чином можна здійснити розбиття E на підмножини, що індукуються власними підмножинами G. Так, якщо виконані умови (3.43) та $k < n$, у результаті $E_{\eta k}^n(G).\mathrm{D}^I$ формується сім'я (3.40) $\mathcal{C}$-множин, що індуковані мультимножинами (3.35) вигляду:

$$\mathcal{E}^i = E_{\eta^i k^i}^n(G^i),\ G^i = G \backslash \{e_i^{\eta_i}\},\ i \in J_k. \tag{3.55}$$

Вони є $\mathcal{C}_b$-множинами розміщень для $i \in J_k :\ \eta^i > n$ та перестановок для $i : \eta^i = n$.

Якщо виконані умови (3.43), $k > n$, то має місце декомпозиція $E.\mathrm{QD}_0^I$ вигляду (3.40), (3.41), коли, окрім множин (3.55), також утворюється $\mathcal{E}^0 = \{x \in E : \mathcal{A} \subseteq \{x\}\}$.

Перейдемо до розгляду декомпозицій $E.\mathrm{D}^{II}$. Зафіксуємо $j \in J_n$ і сформуємо сім'ю (3.31) таким чином:

$$\mathcal{E} = \{E^{ij}\}_{i \in J_k}, \tag{3.56}$$

тоді $E.\mathrm{D}^{II}$ із $n_{\mathcal{E}} = k$ є $E.\mathrm{QPD}$. Оскільки точки $\mathcal{C}$-множин (3.56) мають фіксовану координату, їх розмірність принаймні на одиницю менше за розмірність E. Крім того, згідно з заув. 2.2, може бути проведена редукція та розмірність простору, в якому вони визначені, зменшена принаймні на одиницю.

Введемо позначення:

$$H^{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = e_i\},\ i \in J_k,\ j \in J_n, \tag{3.57}$$

і представимо множини (3.56) у формі $E^{ij} = H^{ij} \cap E,\ i \in J_k,\ j \in J_n$. Крім того, введемо позначення для проекцій множин (3.56) на площини (3.57):

$$E^{'ij} = Pr_{H^{ij}} E^{ij},\ i \in J_k,\ j \in J_n. \tag{3.58}$$

Ясно, що $E^{'ij} \simeq E^{ij},\ i \in J_k,\ j \in J_n$, але особливістю $\mathcal{C}_b$-множин (3.14), (3.15) є те, що у більшості випадків

$$E^{'ij} = Pr_{H^{ij}} E,\ i \in J_k,\ j \in J_n. \tag{3.59}$$

У такому випадку для здійснення $E.\mathrm{D}^{II}$ достатньо визначити, що собою являють множини (3.59) у залежності від класу E.

Оскільки $E^{'ij}$.IM не залежить від j, скористаємось позначенням $G^i = E^{'ij}$.IM, $j \in J_n$, застосуємо формулу (3.35) та отримаємо:

$$G^i = \{G \backslash \{e_i\}\}_{[n-1]}, \eta^i = |G^i|, k^i = |S(G^i)|, \ i \in J_k \tag{3.60}$$

(тут і далі $\forall \nu \in J_n$ $\{G\}_{[\nu]} = \{e_i^{\eta_i'}\}_{i \in J_k}$, $\eta_i' = \min\{\eta_i, \nu\}$, $i \in J_k$). Звідси видно, що: а) $k^i = k - 1$, якщо $\eta^i = 1$; б) $\eta^i = \eta - 1$, якщо $\max\limits_i \eta_i < n$. Друга умова виконується, зокрема, для $\mathcal{R}^-$S. Обидві ці умови виконуються, наприклад, для $\mathcal{PR}^-$S, коли (3.60) перетворюється на

$$G^i = G \backslash \{e_i\}, \eta^i = \eta - 1, k^i = k - 1, \ i \in J_k.$$

Отже, $\forall\, i \in J_k$, $\forall\, j \in J_n$ множини (3.58) є такими:

$$\begin{array}{ll}
E_{nk}(G): & E^{'ij} = E_{n-1,k^i}(G^i); \\
E_n(G): & E^{'ij} = E_{n-1}(G^i); \\
B_n(m): & E^{'ij} = B_{n-1}(\mu_{G^i}(1)); \\
E_n^e(G): & E^{'ij} \in \{E^e_{n-1,k-1}(G^i), E^o_{n-1,k-1}(G^i)\}, \\
E^n_{\eta k}(G): & E^{'ij} = E^n_{\eta^i k^i}(G^i), \\
E^n_k(G): & E^{'ij} = E^n_{k-1}(G^i), \\
B_n(m_1, m_2): & E^{'ij} = B_{n-1}(n - \mu_{G^i}(0), \mu_{G^i}(1)), \\
B_n: & E^{'ij} = B_{n-1}, \\
T_n: & E^{'ij} = T_{n-1}, \\
E^{\pm}_{nk}(G): & E^{'ij} = E^{\pm}_{n-1,k^i}(G^i), \\
E^{\pm}_n(G): & E^{ij} = E^{\pm}_{n-1}(G^i), \\
B^{\pm}_n(m): & E^{'ij} = B^{\pm}_{n-1}(\mu_{G^i}(1)), \\
B^e_n: & E^{i1} = B^e_{n-1}, \ E^{i2} = B^o_{n-1},
\end{array} \tag{3.61}$$

де $G^i = \{G \backslash \{e_i\}\}_{[n-1]}$, $\eta^i = |G^i|$, $k^i = |S(G^i)|$, $i \in J_k$.

Таким чином, при здійсненні декомпозиції $E.\mathrm{D}^{II}$ множин $\mathcal{C}_b$-множин (3.14), (3.15) комбінаторний тип T не змінюється.

В окремих випадках, таких як декомпозиція $B_n(1)$, $B_n(n-1)$, можлива ситуація утворення одноточкової множини як елемента декомпозиції $E.\mathrm{D}^{II}$, яку можна розглядати як вироджений випадок множини типу T.

Тепер розглянемо варіанти $E.\mathrm{D}^{III}$. Для фіксованого $i \in J_k$, компоненти сім'ї (3.47) визначатимуться формулами (3.53),

$$\mathcal{E}^0 = \{x \in E : \, x_j \neq e_i, j \in J_n\}.$$

$E.\mathrm{D}_0^{III}$, $E.\mathrm{D}^{III}$ будуть $E.\mathrm{PD}$, якщо $\eta_i = 1$. Множини E^{ij}, $j \in J_n$, – непорожні, отже, $E.\mathrm{D}^{III}$ буде якісною декомпозицією E за умови виконання (3.42). Це можливо, якщо $\eta - \eta_i < n$, $i \in J_k$, тобто для невеликих за потужністю G. Зокрема, це справджуватиметься для усіх $\mathcal{P}$Ss. Крім того, дана декомпозиція буде збалансованою, адже для фіксованого $i \in J_k$ усі складові сім'ї (3.47) із номерами $j \in J_n$ будуть комбінаторно ізоморфними. Наприклад, для $E_{nk}(G)$ та $E = E^{\pm}_{nk}(G)$ відповідно матимемо:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^j \simeq E_{n-1,k^i}(G^i), \; j \in J_n; \\ &\mathcal{E}^j \simeq E^{\pm}_{n-1,k^i}(G^i), \; j \in J_n. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Якщо умова (3.42) не виконана, матиме місце декомпозиція $E.\mathrm{QD}_0^{III}$. Так, для $E = E^{\pm II}_{nk}(G)$ множина $\mathcal{E}^0 \neq \emptyset$ і містить усі е-конфігурації перестановок зі знаком, індуковані G та координати яких, що дорівнюють за абсолютною величиною $|e_i|$, рівні $-e_i$.

Провівши для $\mathcal{E}^0$ таку саму декомпозицію, що і для E, отримаємо якісну декомпозицію на $2n$ $\mathcal{C}_b$-множин, комбінаторно ізоморфних базовим $\mathcal{SP}$Ss розмірності на одиницю менше за E, у разі, якщо $E \neq B^{\pm}_n(1)$. Якщо ж $E = B_n^{\pm}(1)$, декомпозиція здійснюватиметься на одноточкові множини. Зафіксуємо $i \in J_{k'}$ і представимо E покриттям $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}^{n+j}\}_{j\in J_n} \cup \mathcal{E}^{-0}$, $\mathcal{E}^{n+j} = E^{k'-i+1,j}$, $j \in J_n$, де $\mathcal{E}^{-0} = E \backslash \{\mathcal{E}^{n+j}\}_{j\in J_n}$.

Ясно, що $E^{k'-i+1,j} = \{x \in E :\ x_j = -e_i\}$, $j \in J_n$, тому вірно $\mathcal{E}^{-0} \neq \emptyset$,

$$\mathcal{E}^{n+j} \simeq E^{\pm}_{n-1,k^{i'}}(G^{i'}),\ j \in J_n,\ \text{де } i' = k' - i + 1. \tag{3.63}$$

Таким чином, для даної SPS має місце декомпозиція (3.33) вигляду:

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} (\mathcal{E}^j \cup \mathcal{E}^{j+n}), \tag{3.64}$$

де $\mathcal{E}^j, \mathcal{E}^{j+n}$, $j \in J_n$ задовольняють умови (3.62), (3.63) відповідно.

Для $E = E^{\pm I}_{nk}(G)$ декомпозиція (3.64) також має місце, якщо $i \in J_k$ обрано таким, що $e_i \neq 0$, тобто коли $i \neq 1$. Якщо $e_i = 0$, дана декомпозиція перетворюється на E.QBD^{III} вигляду (3.30), (3.62).

Формула (3.64) задаватиме $E^{\pm}_{nk}(G)$.BPD, якщо виконані умови: $e_i \neq 0$, $\eta_i = \eta_{k-i+1} = 1$. Вони будуть виконані для $E = E^{\pm II}_n(G)$, а також для $E = E^{\pm I}_n(G)$ за умови $i \neq 1$.

Об'єднаємо ці два випадки в один і отримаємо, що для $E = E^{\pm}_n(G)$ має місце E.QBPD^{III} вигляду (3.64), де $\mathcal{E}^j \simeq E^{\pm}_{n-1}(G^i)$, $j \in J$, при цьому $J = J_{2n-1}$ для $E^{\pm I}_n(G)$, а для $E^{\pm II}_n(G)$ $J = J_{2n}$. Певним недоліком E.D^{III}, E.D$_0^{III}$ є те, що зазвичай вони не є E.PD. Але комбінаторна структура $\mathcal{C}_b$-множин, що нами розглядається, є такою, що дозволяє запропонувати побудову E.PD на базі (3.33).

Для визначеності оберемо $i = 1$ і припустимо, що $\eta_1 > 1$, тоді множини (3.36) матимуть вигляд:

$$\mathcal{E}^{ij} = \{x \in E :\ x_i = x_j = e_1\},\ 1 \leq i < j \leq n. \tag{3.65}$$

Ясно, що, подібно до (3.61), $\mathcal{C}$-множини (3.65) мають розмірність принаймні на два менше за E і той самий комбінаторний тип, що і E. Представимо множину $\mathcal{E}^i \cup \mathcal{E}^j$ у (3.31) розбиттям:

$$\mathcal{E}^i \cup \mathcal{E}^j = \mathcal{E}^{ij} \cup \mathcal{E}'^{ij} \cup \mathcal{E}'^{ji}, \tag{3.66}$$

$$\text{де } \mathcal{E}'^{ij} = \{x \in E : \ x_i = e_1, \ x_j \geq e_2\}, \ i, j \in J_n. \tag{3.67}$$

Формула (3.66) задає $(\mathcal{E}^i \cup \mathcal{E}^j)$.PD, звідки слідує, що для E має місце $E.\mathrm{D}^{III}$ чи $E.\mathrm{D}_0^{III}$ у залежності від того, чи виконана умова (3.42). Ця декомпозиція задається розбиттям E вигляду $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}'^{ij}, \mathcal{E}^{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \cup \mathcal{E}^0$.

Зауважимо, що (3.65), (3.67) можуть бути представлені у формі:

$$\mathcal{E}^{ij} = \{x \in E : \ x_i + x_j = 2e_1\}, \ 1 \leq i < j \leq n. \tag{3.68}$$

$$\mathcal{E}'^{ij} = \{x \in E : \ \ x_i = e_1, x_i + x_j \geq e_1 + e_2\}, \ i, j \in J_n. \tag{3.69}$$

Крім того, $\mathcal{C}_b$-множини, що утворюються у проекції множини (3.68) на $n-2$-площину $x_i = x_j = e_1$, індукуватимуться $G^{ij} = \{G \backslash \{e_1^2\}\}_{n-2}$, а проекції множини (3.69) на $n-2$-площину $x_i + x_j = e_1 + e_2$ – мультимножиною $G'^{ij} = \{G \backslash \{e_1^2, e_2\}\}_{n-2}$. При цьому $d_{\mathcal{E}^{ij}} \leq n-2$, $d_{\mathcal{E}'^{ij}} \leq n-1$.

Що стосується $E.\mathrm{D}^{IV}$, то для $E = E_{\eta k}^n(G)$ матиме місце $E.\mathrm{QPD}^{IV}$, де сім'я (3.31) матиме форму (3.49), а саме:

$$\mathcal{E} = \{E_{nk_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G})\}_{\mathcal{G} \in \mathbb{G}_n}, \tag{3.70}$$

де $k_{\mathcal{G}} = |S(\mathcal{G})|$, $\mathbb{G}_n$ задовольняє (3.51). $|\mathbb{G}_n| = |C_{\eta k}^n(G)|$ – кількість n-сполучень із мультимножини G. З (3.70) слідує, що для $E = E_{nk}^{\pm}(G)$ матиме місце декомпозиція $E.\mathrm{QPD}^{IV}$ на загальні $\mathcal{C}_b$-множини перестановок вигляду (3.70), де сім'я (3.50) має форму $\mathbb{G}_n = \{\mathcal{G} \subset G : \ |\mathcal{G}| = |S(\mathcal{G})| = n\}$.

3.2.3 Декомпозиції $\mathcal{C}$-множин: G-A

Введення класів VLSs, SLSs, PSSs та тих, які дозволяють PSR, дає можливість розглядати декомпозицію $\mathcal{C}$-множини E на вершинно розташовані множини (далі $E.VLS–D$), на поверхнево розташовані множини (далі $E.SLS\text{-}D$), на поліедрально-поверхневі множини (далі $E.PSS\text{-}D$), на 2LSs (далі E.2LS-D) а також на множини, що дозволяють PSR (далі $E.PSR\text{-}D$). Так, множини (3.31), що задовольняють умови (3.30), (3.32), задаватимуть:

а) E.VLS-D, якщо

$$\mathcal{E}^i = vert\, P^i, \text{ де } P^i = conv\, \mathcal{E}^i,\ i \in J_{n_\mathcal{E}};$$

б) E.SLS-D, якщо

$$\exists f_i(x) :\ \mathcal{K}^i \to \mathbb{R}^1,\ f_i(x) \underset{\mathcal{E}^i}{=} 0,\ i \in J_{n_\mathcal{E}}, \tag{3.71}$$

функція $f_i(x)$ – строго опукла на опуклих компактах $\mathcal{K}^i \supseteq P^i$, $i \in J_{n_\mathcal{E}}$;

в) E.PSS-D, якщо існує сім'я поверхонь $\mathcal{S} = \{S^i\}_{i \in J_{n_\mathcal{E}}}$, така, що

$$\mathcal{E}^i = P^i \cap S^i,\ i \in J_{n_\mathcal{E}};$$

г) E.PSR-D, якщо виконана умова (3.71) в областях

$$\mathcal{K}^i \subseteq C^i = conv\, S^i :\ \mathcal{K}^i \supseteq C^i,\ i \in J_{n_\mathcal{E}};$$

е) E.2LS-D, якщо множини (3.32) є 2SLs.

Ґрунтуючись на теоремі 2.3 та тверд. 2.1, маємо – якщо множина E є VLS, то будь-яка її декомпозиція є водночас E.VLS-D, E.SLS-D та E.PSS-D. Так, як $\mathcal{S}$ можна використати єдину поверхню (2.107), тобто вибрати $S^i = S$, $i \in J_{n_\mathcal{E}}$, і, відповідно, єдину функцію, що визначає ці поверхні, а саме $f_i(x) = f(x)$, $i \in J_{n_\varepsilon}$.

Якщо до того ж E дозволяє PSR за участю S, кожна декомпозиція E буде E.PSR-D, адже умову (3.72) у даному випадку можна використовувати у такій формі:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^i \subseteq C^i = C,\ i \in J_{n_\varepsilon}. \tag{3.72}$$

При формуванні декомпозицій $\mathcal{C}_b$-множини E, нас насамперед цікавитиме її представлення за допомогою $\mathcal{C}_b$-множин меншої потужності, що можна зробити різними способами: а) тими, що описані у п. 3.2, коли E представлялася об'єднанням множин, породженими власними підмножинами E.GS (див., наприклад, $E.\mathrm{D}^I$), власними підмультимножинами E.IM (див. $E.\mathrm{D}^I$, $E.\mathrm{D}^{IV}$); б) меншої розмірності, що відбувається, наприклад, при фіксації частини координат E (див., наприклад, $E.\mathrm{D}^{II}$-$E.\mathrm{D}^{IV}$); в) меншого радіуса (для SpLS/SsSS E). Це стосується, наприклад, до $E.\mathrm{D}^{II}$, $E.\mathrm{D}^{III}$.

Представимо декілька шляхів декомпозиції $\mathcal{C}$-множини E, що ґрунтуються на властивостях заданих на ній функції. Зокрема, розглянемо питання розкладання $\mathcal{C}$-множини E по поверхнях, заданих деякою функцією.

Нехай існують функції

$$f_i(x):\ E \to \mathbb{R}^1, i \in J_{n_\varepsilon}, \tag{3.73}$$

такі, що $\forall\, i \in J_{n_\varepsilon}\ \exists x^i, y^i \in E:\ f_i(x^i) = 0, f_i(y^i) = 0$.

У такому випадку множини (3.32) можна визначити так:

$$\mathcal{E}^i = \{x \in E : f_i(x) = 0\},\ i \in J_{n_\varepsilon}.$$

Якщо виконана умова (3.42), то E.D називатимемо декомпозицію E, що задана сім'єю функцій (3.73) (далі $E.D^V$).

Прикладом $E.\mathrm{D}^V$ є $E_{nk}(G).\mathrm{D}^{III}$, $E^{\pm}_{nk}(G).\mathrm{D}^{III}$, коли сім'я (3.73) таке:

для $E_{nk}(G),\ j \in J_k: \quad n_{\mathcal{E}} = n,\ f_i(x) = x_i - e_j, i \in J_n;$

для $E^{\pm}_{nk}(G),\ j \in J_k: \quad n_{\mathcal{E}} = n,\ f_i(x) = x_i - e_j,\ f_{n+i}(x) = x_i + e_j,\ i \in J_n.$

Вираз (3.28) є ще одним прикладом декомпозиції $E.\mathrm{D}^V$, що задана сім'єю функцій $f(x,y) = y^T\mathbf{e}$, $y \in B'_n$, потужність якого 2^n.

Якщо E – VLS, то, враховуючи, що $E \subset \partial\, P$, можна запропонувати розкладання E по гіпергранях (далі $E.D^V_{d_E-1}$), гранях розмірності $d_E - 2$ (далі $E.D^V_{d_E-2}$), ребрах, вершинах (далі $E.D^V_0$) і взагалі по гранях заданої розмірності (далі $E.D^V_i$, $i \in J^0_{d_E}$).

Так, $E.\mathrm{D}^V_{d_E-1}$ задається сім'єю функцій $f_i(x) = a''_i x - b''_i$, $i \in J_{n''}$, що виділяється з (2.95). $E.\mathrm{D}^V_{d_E-2}$ задається сім'єю функцій: $f_{ij}(x) = \lambda_i f_i(x) + \lambda_j f_j(x),\ i,j \in J_{n''}$, де $\lambda_i, \lambda_j > 0,\ \lambda_i + \lambda_j = 1$, $F_i, F_j \in \mathbf{F}$, F_i, F_j – суміжні гіперграні. $E.\mathrm{D}^V_0$ задається такою сім'єю: $f_{I(x^j)}(x) = \sum\limits_{i \in I(x^j)} \lambda_i f_i(x)$, де $\|\lambda\|_1 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^{|I(x^j)|}_{>0}$, $I(x^j) = \{i \in J_{m''}: a''_i x^j - b''_i = 0\}$, $j \in J_{n_E}$.

Розглянемо випадок, коли функції (3.73) відрізняються лише константою. Нехай $h(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Множину $M \subseteq \mathbb{R}^n$ називатимемо різноманіттям, заданим функцією $h(x)$, якщо $\exists\, h_0 \in \mathbb{R}^1:\ h(x) \underset{M}{=} h_0$.

Нехай функція $h(x): E \to \mathbb{R}^1$, така що

$$\forall\, x \in E \quad h(x) \in \mathbf{h}_E, \tag{3.74}$$

$$\text{де } \mathbf{h}_E = \{h_i\}_{i \in J_{m_{h(x)}}},\ h_i < h_{i+1},\ i \in J_{m_{h(x)}-1}; \tag{3.75}$$

$$\forall\, i \in J_{m_{h(x)}}\ \exists\, y^i \in E:\ h(y^i) = h_i.$$

Сформуємо сім'ю (3.73) вигляду: $f_i(x) = h(x) - h_i,\ i \in J_{m_{h(x)}}$. Введемо у розгляд сім'ю різноманіть:

$$\mathcal{S}^i = \{x \in \mathbb{R}^n:\ h(x) = h_i\},\ i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{3.76}$$

заданих функцією $h(x)$. Будемо говорити, що множина E розкладається по різноманіттях (3.76), заданих $h(x)$, або по множинах рівня цієї функції та називатимемо її $m_{h(x)}$-*рівневою множиною по функції* $h(x)$. У залежності від вигляду $h(x)$, це буде розкладання по лінійних, лінійно зв'язних різноманіттях тощо.

Зауваження 3.6. Пошук $m_{h(x)}$ у випадку, коли (3.76) являють собою сім'ю гіперсфер у просторі, заданому метрикою ρ [67], із центром у точці $a \in E$, є задачею перевірки, що ця множина є a locally $m_{h(x)}$-distance set, достатньо широко представленою у науковій літературі [52, 77, 166, 169, 205, 237, 238, 240].

Так, FPC E називається a locally $m_{h(x)}$-distance set, якщо для довільної $a \in E$ існує не більше $m_{h(x)}$ різних відстаней від a до точок E. Узагальненням цього поняття є таке: множина E називається $m_{h(x)}$-distance set, якщо існує у точності m різних відстаней між парами точок E. Найчастіше розглядається евклідова метрика, в результаті чого шукається кількість рівнів розкладання E по функції $\|x - a\|_2$.

Нехай

$$\mathcal{E}^i = \{x \in E : \; h(x) = h_i\} = \mathcal{S}^i \cap E, \; i \in J_{m_{h(x)}}. \qquad (3.77)$$

Якщо $m_{h(x)} > 1$, тобто E є багаторівневою по функції $h(x)$, множини (3.77) – попарно непересічні. З іншого боку, згідно з (3.75), усі ці множини непорожні, тобто, має місце E.QPD вигляду (3.30), (3.77), де $n_{\mathcal{E}} = m_{h(x)}$ (далі $E.D^{VI}$).

Якщо у регулярних точках розмірність різноманіть (3.76) задовольняє умову:

$$dim\, \mathcal{S}^i = n - 1, \; i \in J_{i \in J_{m_{h(x)}}}, \qquad (3.78)$$

тобто (3.76) є сім'єю гіперповерхонь, будемо казати, що множина E розкладається по гіперповерхнях (3.76) або по гіперповерхнях рівня $h(x)$.

Ясно, що кількість рівнів розкладання $\mathcal{C}$-множин та властивості утворених у результаті декомпозиції $\mathcal{C}$-множин суттєво залежать від вибору функції $h(x)$.

У зв'язку з цим виникають такі питання: а) які властивості мають утворені $\mathcal{C}$-множини сім'ї (3.77) у залежності від вигляду множини E і функції $h(x)$; б) як знайти допустимі точки цих множин; в) яким чином обрати функцію $h(x)$, щоб зменшити або збільшити число компонент розкладань, перейти до розгляду компонент меншої розмірності тощо.

Залежно від того, яка функція буде взята за основу розкладання, формули (3.30), (3.77) задаватимуть розкладання E по паралельних площинах, вкладених гіперсферах, еліпсоїдах, кусково-лінійних поверхнях і т.п.

Зауваження 3.7. Надалі будемо розглядати розкладання E по функціях, опуклих у межах P, що є достатньою умовою для того, щоб формула (3.76) задавала розкладання E по поверхнях, опуклих, строго опуклих, сильно опуклих тощо в залежності від типу опуклої функції $h(x)$.

Якщо виконана умова (3.78) і при цьому E є однорівневою по $h(x)$, то E лежить на гіперповерхні $S = \mathcal{S}^1$. Якщо до того ж $h(x)$ є строго опуклою у $\mathcal{K} = P$, то E є SLS, а функція $f(x)$ у (2.107) має вигляд: $f(x) = h(x) - h_1$.

Якщо E – багаторівнева по $h(x)$, розкладання E по поверхнях породжує декомпозицію $E.\mathrm{D}^{VI}$ на $\mathcal{C}$-множини, кожна з яких лежить у окремій поверхні. Якщо при цьому $h(x)$ опукла і обмежена, (3.76) являє собою сім'ю вкладених одне в одне поверхонь. Зокрема, це відбувається, якщо $h(x)$ є строго опуклою. Так, наприклад, обравши $x^1 \in E$ та довільні $a \in \mathbb{R}^n$ (далі *центр розкладання E по поверхнях*) та $\alpha \in (1, \infty)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \succ 0$, і перевіривши умови:

$$h(x) = \|x - a\|^2 \underset{E}{=} h_1, \text{ де } h_1 = \|x^1 - a\|^2; \tag{3.79}$$

$$h(x) = \|x - a\|_\alpha^\alpha \underset{E}{=} h_1, \text{ де } h_1 = \|x^1 - a\|_\alpha^\alpha; \tag{3.80}$$

$$h(x) = \|x - a\|_A^2 \underset{E}{=} h_1,\ h_1 = \|x^1 - a\|_A^2,\ \text{де } \|x\|_A^2 = x^T A x, \tag{3.81}$$

можна встановити, що E є поверхнево розташованою, якщо хоч одна з них виконана, а описана навколо E поверхня S задана відповідним рівнянням із сукупності (3.79)-(3.81). Якщо ж жодна з цих умов не виконується, можна перейти до розгляду розкладання E по вкладених гіперсферах, суперсферах чи еліпсоїдах із центром у точці a та декомпозиції E вигляду (3.30) по сферично-, суперсферично- чи еліпсоїдально розташованих $\mathcal{C}$-множинах, що породжується цим розкладанням.

Зауваження 3.8. Так, наприклад, для $E = E_{nk}^{\pm}(G)$ умови (3.79), (3.80) виконуються при виборі $a = \mathbf{0}$, а саме

$$\|x\|^2 \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \|g\|^2, \tag{3.82}$$

$$\|x\|_\alpha^\alpha \underset{E_{nk}^{\pm}(G)}{=} \|g\|_\alpha^\alpha,\ \alpha \in (1, \infty), \tag{3.83}$$

і не виконуються при виборі центра розкладання у будь якій іншій точці.

Значно складніше за перевірку умов (3.79)-(3.81) є пошук самої декомпозиції, адже для цього необхідно знайти всю множину значень (3.75), що набуває функція $h(x)$ на $\mathcal{C}$-множині. Але у деяких випадках це зробити достатньо легко, виходячи зі структури $\mathcal{C}$-множини. Це стосується, зокрема, $\mathcal{C}_b$-множин, твірна множина яких має вигляд $\mathcal{A} = J_k$ або $\mathcal{A} = J_{k-1}^0$, тобто якщо $\mathcal{C}$-множина E є $\mathbb{UZ}_+ S$, $\mathbb{UZ}_{>0} S$.

Приклад 3.1. Нехай $a = \mathbf{0}$, $E = B_n$. Умова (3.79) не виконана, функція $h(x)$ має вигляд:

$$h(x) = \|x - a\|^2 = \|x\|^2 \tag{3.84}$$

та задовольняє умову (3.74) для

$$\mathbf{h}_E = J_n^0. \tag{3.85}$$

У результаті отримується розкладання множини B_n по вкладених гіперсферах із центром початку координат:

$$S^i = S_i(\mathbf{0}),\ i \in J_n^0, \tag{3.86}$$

серед яких S^0 – вироджена у точку гіперсфера радіусу 0. Цьому розкладанню відповідає декомпозиція (3.21) множини B_n по множинах булевих перестановок, адже

$$S^i \cap B_n = B_n(i),\ i \in J_n^0. \tag{3.87}$$

Приклад 3.2. Нехай тепер $a = \mathbf{0}$, $E = T_n$. У даному випадку (3.84)-(3.86) також мають місце, а (3.87) перетворюється на:

$$S^i \cap T_n = B_n^{\pm}(i),\ i \in J_n^0,$$

тобто, розкладаючи множину T_n по гіперсферах із центром у початку координат, отримується декомпозиція T_n вигляду (3.27) по множинах трійкових перестановок зі знаком.

Приклад 3.3. Для $\mathcal{C}_b$-множини перестановок $E = E_n(J_n)$, $n \geq 5$ можна запропонувати розкладання по гіперсферах із центром у $a \in E_n(J_n)$, ґрунтуючись на результатах [7]. Нехай, наприклад, $a = g = (1, ..., n)$,

$$h(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 = \frac{1}{2}\|x - g\|^2,$$

тоді, згідно з [7], (3.75) має вигляд:

$$\mathbf{h}_E = J_{n'}^0, \ \text{ де } n' = C_{n+1}^3. \tag{3.88}$$

Це означає, що існує розкладання $E_n(J_n)$ по вкладених гіперсферах із центром у точці g: $S^i = S^i(g)$, $i \in J^0_{n'}$, квадрати радіусів яких беруть усі парні значення з $[0, \frac{1}{3}(n^3 - n)]$. Воно породжує декомпозицію $E_n(J_n)$ на множини

$$\mathcal{E}^i = S^i \cap E_n,\ i \in J^0_{n'}, \tag{3.89}$$

що утворюють новий клас $\mathcal{C}$-множин, серед яких $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^{n'}$ – одноточкові, а саме $\mathcal{E}^0 = g$, $\mathcal{E}^{n'} = g' = (n, n-1, ..., 1)$; $\mathcal{E}^1 = N_P(g), \mathcal{E}^{n'-1} = N_P(g')$. У сім'ї (3.89), $\mathcal{E}^i$ об'єднує точки $E_n(J_n)$, що розташовані на евклідовій відстані $2i$ від точки g. Як буде показано у п. 3.4, розкладання $E_n(J_n)$ по вкладених гіперсферах еквівалентно її розкладанню по паралельних гіперплощинах до гіперплошини α, що проходить через $N_P(g)$. Нехай її рівняння $\alpha : a^T x = b$.

Зауваження 3.9. Отже, встановлено, що B_n та T_n є $m_{||x||^2_2} = n + 1$-рівневими, множина $E_n(J_n)$ $m_{||x-g||^2_2} = m_{a^T x} = n' + 1$-рівневою, де n' задано (3.88). Так, у прикладі (3.3) показано, що B_n, T_n – local $(n + 1)$-distance sets для точки $a = \mathbf{0}$, а, враховуючи їх симетрію, що вони є $(n + 1)$-distance sets. У той же час, E_n – local $C^3_{n+1} + 1$-distance set для точки $a = \mathbf{0}$ та загалом є $C^3_{n+1} + 1$-distance set.

Поняття багаторівневості $\mathcal{C}$-множини по функції узагальнимо на сім'ю функцій. Нехай $\mathcal{H}(x) = \{h_j(x)\}_{j \in J}$, $|J| \geq 1$. Розглянемо розкладання E по кожній з функцій з $\mathcal{H}(x)$ і визначимо величину:

$$lev(E, \mathcal{H}) = \max_{h(x) \in \mathcal{H}(x)} m_{h(x)}. \tag{3.90}$$

Далі називатимемо $\mathcal{C}$-множину E $lev(E, \mathcal{H})$-*рівневою за сім'єю функцій* $\mathcal{H}(x)$. Окремим випадком є розглянутий вище варіант $|\mathcal{H}(x)| = 1$, коли (3.90) перетворюється на $lev(E, h(x)) = m_{h(x)}$.

Нехай розкладання E відбувається по лінійних різноманіттях, заданих функцією

$$h(x) = \overline{n}^T x, \text{ де } \overline{n} \neq \mathbf{0}, \tag{3.91}$$

а сім'я (3.75) така, що $|\mathbf{h}_E| = m_{(\overline{n})}$. У даному випадку розкладання E відбувається по гіперплощинах:

$$H^i(\overline{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}^T x = h_i\},\ i \in J_{m_{(\overline{n})}},$$

паралельних $H(\overline{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}^T x = 0\}$. Воно породжує E.QPD вигляду (3.30), де $n_{\mathcal{E}} = m_{(\overline{n})}$, $\mathcal{E}^i = H^i(\overline{n}) \cap E$, $i \in J_{m_{(\overline{n})}}$. Це розкладання задається функцією (3.91), яка повністю визначається вектором $\overline{n}$, тому називатимемо його *розкладанням E в напрямку вектора $\overline{n}$*, а саму множину E – $m_{(\overline{n})}$*-рівневою в напрямку вектора $\overline{n}$*. Для того, щоб підкреслити, що розкладання стосується множини E, використовуватимемо також позначення $m_{(\overline{n})} = m(\overline{n}, E)$.

Так, наприклад, вибираючи $h(x) = x_1 + x_2$ при розкладанні $E = E_n(J_n)$, маємо $\overline{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, а також $h_1 = 1 + 2 = 3$, $h_2 = 1 + 3 = 4$, $h_3 = 1 + 4 = 2 + 5$, ..., $h_{m_{(\overline{n})}} = n - 1 + n = 2n - 1$. Отже, $m_{(\overline{n})} = 2n - 1$, відповідно, E є $2n - 1$-рівневою в напрямку $\overline{n}$.

Якщо $\overline{n} \in \{\mathbf{e}_j\}_{j \in J_n}$, тобто E розкладається по площинах, паралельних координатним, будемо називати його розкладанням E за j-ою координатою, а саму E – $m_{(\mathbf{e}_j)}$-рівневою за координатою x_j ($j \in J_n$). Кількість рівнів цього розкладання напряму пов'язана з множинами (2.47), а саме: $m_{(\mathbf{e}_j)} = k_j$, $j \in J_n$. Максимум цих величин позначимо через $lev'(E) = \max_{j \in J_n} m(\mathbf{e}_j, E)$ і назвемо числом рівнів розкладання множини E за координатами, а саму цю множину – *$lev'(E)$-рівневою за координатами.*

$lev'(E)$ обмежена зверху потужністю E.IS, а знизу, згідно з (2.49), – значенням 2, отже, $2 \leq lev'(E) \leq k$. Згідно з (3.52), для $\mathcal{C}_b$-множин, що нами розглядаються, $lev'(E) = k$. У термінах багаторівневості за сім'єю функцій $lev'(E) = lev(E, \mathcal{H})$, де $\mathcal{H} = \{\mathbf{e}_j x\}_{j \in J_n}$. Нехай

$$\mathcal{H}(j) = \{(\sum_{i \in \omega \subseteq J_n, |\omega|=j} \mathbf{e}_i)^T x\},\ j \in J_n, \tag{3.92}$$

тоді $\mathcal{H}(1) = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}(2) = \{(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T x\}_{i<j}$, ..., $\mathcal{H}(n) = \{\mathbf{e}^T x\}$. Відмінною особливістю $\mathcal{C}_b$-множин від відповідних $\mathcal{C}$-множин, є те, що $\forall j \in J_n$

$$lev(E, \mathcal{H}(j)) = lev(E, \{(\sum_{i=1}^{j} \mathbf{e}_i)^T x\}) = m_{(\overline{n}(j))}, \tag{3.93}$$

де $\overline{n}(j) = \sum\limits_{i=1}^{j} \mathbf{e}_i$. Таким чином, для визначення $lev(E, \mathcal{H}(j))$ достатньо визначити рівневість E у напрямку вектора $\overline{n}(j)$ $(j \in J_n)$.

Для базових $\mathcal{SPS}s$, сім'ю (3.92) можна розширити до

$$\mathcal{H}(j) = \{(\sum_{i \in \omega \subseteq J_n, |\omega|=j} \mathbf{e}_i)^T x \circ y\}_{y \in B'_n(j)},\ j \in J_n, \tag{3.94}$$

зі зберіганням властивості (3.93) (тут $B'_n(j) = 2B_n(j) - 1$). Це відбувається в силу того, що для фіксованого $j \in J_n$ $\forall h^1(x), h^2(x) \in \mathcal{H}(j)$, $h_0 \in \mathbb{R}^1$ виконано

$$\mathcal{E}^1 = \{x \in E:\ h^1(x) = h_0\} \simeq \mathcal{E}^2 = \{x \in E:\ h^2(x) = h_0\}.$$

Тому дослідження $\mathcal{C}$-множин, утворених у результаті розкладання E по функціях із (3.94), можна обмежити однією функцією для кожного j. Нехай це будуть функції вигляду $(\sum\limits_{i=1}^{j} \mathbf{e}_j)^T x$, $j \in J_n$. Утворимо з них сім'ю $\mathcal{H} = \{h_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{j} x_i\}_{j \in J_n}$ і розглянемо розкладання E по кожній з його компонент. Кількість утворених таким чином комбінаторно неізоморфних множин у точності збігатиметься з кількістю таких класів серед розкладань за сім'єю (3.94).

Враховуючи упорядкування елементів G.IM, $h_j(x) \in [\sum\limits_{i=1}^{j} g_i, \sum\limits_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1}]$, $j \in J_n \backslash \{1\}$. Розкладання по $h_1(x)$ – це розкладання за координатами, вже розглянуте вище. Тому перейдемо до випадку $j > 1$. Дослідимо, що собою являють $\mathcal{C}$-множини $\mathcal{E}^{\min,j} = \{x \in E : h_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{j} g_i\}$, $\mathcal{E}^{\max,j} = \{x \in E : h_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1}\}$, $j \in J_{n-1}\backslash\{1\}$.

За побудовою $\mathcal{E}^{\min,j}$, $\mathcal{E}^{\max,j}$ дозволяє розбиття множини координат на $I = J_j$ та $\overline{I} = J_n\backslash J_j$, при цьому $E(I)$ вигляду (2.81) індукується $|I|$-елементною мультимножиною $\{g_i\}_{i\in J_j}$ або $\{g_{\eta-j+i}\}_{i\in J_j}$. Отже, за означенням ці $\mathcal{C}$-множини будуть $\overline{\mathcal{P}}$Ss або $\overline{\mathcal{P}\mathcal{P}}$Ss у залежності від того, до якого класу – $\mathcal{P}$S чи $\mathcal{P}\mathcal{P}$S – належить E. При цьому якщо E – $\mathcal{C}_b$-множина перестановок, $\mathcal{E}^{\min,j}$, $\mathcal{E}^{\max,j}$ будуть базовими $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок, якщо E – $\mathcal{C}_b$-множина розміщень – $\mathcal{C}_b$-множинами полірозміщень.

Окремо треба сказати про випадок $j = n$, який приводить до розкладання E лише за умови, що E – $\mathcal{P}\mathcal{P}$S. При цьому $\mathcal{E}^{\min,j}$, $\mathcal{E}^{\max,j}$ індукуються n-елементними мультимножинами $\{g_i\}_{i\in J_n}$ або $\{g_{\eta-i+1}\}_{i\in J_n}$ відповідно, тобто за означенням є $\mathcal{P}$Ss, причому базовими, адже як E розглядається деяка $\mathcal{C}_b$-множина.

Перейдемо до розгляду особливостей розкладань E, пов'язаних із його опуклою оболонкою, – багатогранником P. У термінах розкладань у напрямку нормалі $\overline{n}_F$ до гіперграні $F \in \mathbf{F}$, величини $lev(P)$, $lev(E)$ є такими:

$$lev(P) = \max_{F\in\mathbf{F}} m(\overline{n}_F, \mathbf{V}); lev(E) = \max_{F\in\mathbf{F}} m(\overline{n}_F, E).$$

Проведемо їх узагальнення на випадок, коли замість $\mathbf{F}$ вибирається множина $\mathbf{F}_{P'}$ гіперграней багатогранника $P' \supset E$ – багатогранник. Введемо у розгляд величину: $lev(E, P') = \max\limits_{F\in\mathbf{F}_{P'}} m(\overline{n}_F, E)$. У цих позначеннях, $lev(P) = lev(\mathbf{V}, P)$, $lev(E) = lev(E, P)$.

Якщо $P' \supset P$ – релаксаційний багатогранник, $\mathbf{F}_{P'}$ – множина його гіперграней, то $2 \le lev(E, P') \le lev(P)$. Виходячи з цього, виникає питання виділення класу $\mathcal{C}$-множин, для яких існує релаксаційний багатогранник із заданою кількістю рівнів розкладання E, у тому числі таких, де $lev(E, P')$

досягає своєї нижньої оцінки два.

3.3 Шляхи формування нових класів $\mathcal{C}$-множини

Очевидно, що теоретико-множинні операції, лінійні та нелінійні перетворення та інші дії над $\mathcal{C}$-множиною/$\mathcal{C}$-множинами приводять до формування нових $\mathcal{C}$-множин. Властивості одержаних множин детально викладені у [369]. Визначивши комбінаторний тип T отриманої множини е-конфігурацій, твірну множину та індукуючу мультимножину, та в залежності від обмежень, що на них накладаються, можна вводити нові класи $\mathcal{C}$-множин, відповідно і $\mathcal{C}_b$-множин як множин усіх можливих е-конфігурацій типу T, що задовольняють ці обмеження.

Зауваження 3.10. Якщо $E^1,...,E^L$ – $\mathcal{C}_b$-множини, будемо вважати, множина E, отримана: а) в результаті теоретико-множинних операцій, таких як перетин, об'єднання, взяття декартова добутку та прямої суми (далі *Спосіб 3.1*); б) у результаті їх перетворень (лінійних та нелінійних) (далі *Спосіб 3.2*); в) якщо E є елементом розбиття $\mathcal{C}_b$-множини на комбінаторно-ізоморфні підмножини (далі *Спосіб 3.3*).

Тепер, увівши у розгляд лише $\mathcal{C}_b$-множину розміщень, усі вищенаведені $\mathcal{C}_b$-множини можуть бути визначені Способами 3.1-3.3. Так, якщо

$$E^1,...,E^L \subset \mathbb{R}^n,$$
$$E^l = E^n_{\eta k^l}(G^l),\ l \in J_L,$$
$$G = \bigcap_{l=1}^{L} G^l:\ |G| = n,$$

то $\mathcal{C}_b$-множина перестановок може бути визначена Способом 3.1 як

$$E_{nk}(G) = \bigcap_{l=1}^{L} E^n_{\eta k^l}(G^l).$$

Виходячи з (3.29), $\mathcal{C}_b$–множина перестановок зі знаком може бути також визначена як об'єднання $\mathcal{C}_b$–множин перестановок. Ще один шлях задання $\mathcal{C}_b$–множин цього класу – це формула (3.28), яка представляє їх як об'єднання 2^n комбінаторно-ізоморфних з $E = E_{nk'}(G')$ $\mathcal{C}_b$–множин, отриманих з E відображеннями відносно різних наборів координатних площин. В обох випадках тут використано Спосіб 3.1.

Вирази (3.22), (3.26) вказують два шляхи задання множини B_n^h – як об'єднання $\mathcal{C}_b$-множин булевих перестановок і як елемент розбиття булевої множини на комбінаторно-ізоморфні множини B_n^h, $\overline{B}_n^h$. У першому випадку використано Спосіб 3.1, у другому – Спосіб 3.3. Нарешті, Способом 3.3 можна задати $\mathcal{C}_b$-множини $E_n^e(G)$ і $E_n^o(G)$, виходячи з (3.25).

Із заув. 3.10, зокрема, слідує, що сума Мінковського $\mathcal{C}_b$-множин також є $\mathcal{C}_b$-множиною, адже, згідно з означенням:

$$E = E^1 + ... + E^L = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x = x^1 + ... + x^L, \; x^l \in E^l, \; l \in J_L\}, \quad (3.95)$$

тобто множину (3.95) можна представити об'єднанням $n_{E^2} \cdot ... \cdot n_{E^L}$ $\mathcal{C}_b$-множин, комбінаторно ізоморфних до E^1.

Це саме говорить про те, що добуток Адамара двох $\mathcal{C}$-множин, серед яких є $\mathcal{C}_b$–множина, є $\mathcal{C}_b$–множиною. Дійсно, нехай E^1 – $\mathcal{C}_b$–множина, E^2 – просто $\mathcal{C}$–множина. У такому випадку $\forall y \in E^2$ $y \circ E$ – є результатом лінійного перетворення над E, заданого матрицею $D = diag(y_1, ..., y_n)$, тобто є $\mathcal{C}_b$–множиною. А $E = E^1 \circ E^2$ є об'єднанням $|E^2|$ $\mathcal{C}_b$–множин, одержаних цим способом, відповідно, також є $\mathcal{C}_b$-множиною. Таким чином, для формування цієї $\mathcal{C}_b$-множини E використовуються Способи 3.1, 3.2.

Зауваження 3.11. Нарешті, Спосіб 3.2 формування $\mathcal{C}_b$-множин означає, що усі проекції $\mathcal{C}_b$-множини B_n на підпростори розмірності менше за n, є також $\mathcal{C}_b$-множинами. Паралельні проекції гіперкуба PB_n, які при цьому утворюються, називаються зонотопами (zonotopes) [39]. Їх особливістю є центральна симетрія як самого багатогранника, так і усіх його гіперграней [128,168]. Так, відомо, що багатогранник перестановок без повторень $\Pi_n(J_n)$ є зонотопом, зокрема $\Pi_n(J_4)$ є проекцією B_6. Таким чином, частина центрально-симетричних множин класів $E_{nk}(G)$, $E^n_{\eta k}(G)$, $E^{\pm}_{nk}(G)$ може бути віднесена до класу $\mathcal{C}_b$-множин по факту того, що вони формуються у результаті дії на множину B_n деякого лінійного перетворення.

Що стосується декартового добутку, то, згідно з (3.12), (3.13), декартовим добутком $\mathcal{C}_b$-множин перестановок є $\mathcal{C}_b$-множина поліперестановок, $\mathcal{C}_b$-множин перестановок та розміщень – $\mathcal{C}_b$-множина полірозміщень. Доцільно ввести також поняття $\mathcal{C}_b$-множини перестановок зі знаком як декартового добутку кількох $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком. Так само, можна виділити $\mathcal{C}_b$-множини спеціальних поліперестановок, булевих полірозміщень, трійкових перестановок зі знаком тощо.

Щодо прямої суми, то прикладом $\mathcal{C}_b$-множини, що є прямою сумою інших $\mathcal{C}_b$-множин, є $B^{\pm}_n(1)$, а саме $B^{\pm}_n(1) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B'_1$.

Зауваження 3.12. Для нових $\mathcal{C}_b$-множин, утворених із множин (3.14), (3.15) одним зі способів (див. заув. 3.10), усі декомпозиційні підходи, наведені у п. 3.2, цілком застосовувані після адаптації до способу їх формування.

Розглянемо $\mathcal{C}$-множину, утворену з $E^n_{\eta k}(G)$ накладанням умов вигляду $x_i \leq x_{i+1}$, $i \in J_n$. Ця множина є образом у $\mathbb{R}^n$ загальної е-множини n-сполучень із G [310, 325, 370]. Назвемо її загальною $\mathcal{C}_b$-множиною сполучень $S^n_{\eta k}(G)$. Її окремими класами будуть: а) $S^n_k(G) = S^n_{kk}(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина сполучень без повторень; б) $\overline{S}^n_k(G) = S^n_{n\cdot k,k}(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина сполучень з необмеженими повтореннями; в) $S^n_{\eta 2}(G)$ – спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина сполучень.

3.4 Властивості поліедрально-сферичних $\mathcal{C}$-множин

Нехай E – PSpS, що задовольняє (2.108). Для того, щоб підкреслити, що у (E.PSR) бере участь $S_r(a)$, використовуватимемо позначення $E(a, r)$, а якщо $S_{r^{\min}}(a^{\min})$ – $\hat{E}(\hat{a}, \hat{r})$, де $\hat{a} = a^{\min}$, $\hat{r} = r^{\min}$.

PSpSs виділимо окремо як клас $\mathcal{C}$-множин, що володіє спеціальними властивостями. При їх дослідженні виникає ряд питань, серед яких: а) як визначити, чи є $\mathcal{C}$-множина $X \subset \mathbb{R}^n$ поліедрально-сферичною множиною (задача ідентифікації, далі *Задача 3.1*); б) як знайти параметри E як PSpS, тобто як представити її у формі $E(a, r)$ (задача визначення параметрів, далі *Задача 3.2*), у тому числі параметри представлення $\hat{E}(\hat{a}, \hat{r})$ (задача визначення центра і радіуса PSpS, далі *Задача 3.3*); в) які існують способи декомпозиції PSpS, а також $\mathcal{C}$-множини на PSpSs (задача декомпозиції, далі *Задача 3.4*); г) як для довільної FPC E поставити у взаємно-однозначну відповідність PSpR E, можливо, за рахунок доповнення точок E додатковими координатами (задача пошуку PSpR або розширеного PSpR (an extended PSR), далі *Задача 3.5*) [255, 320] відповідно. Розглянемо ці питання.

У прикладах 2.1-2.3 та заув. 3.8 Задачі 3.1, 3.2 розв'язані для чотирьох класів $\mathcal{C}$-множин. Сформулюємо отримані у них результати у вигляді теореми.

Теорема 3.6. Якщо E – симплексна $\mathcal{C}$ множина, є $\mathcal{P}$S, $\mathcal{S}$S або $\mathcal{SP}$S, то вона є PSpS.

Розв'язки Задачі 3.3 для цих та інших класів будуть отримані у розділі 4 разом із розв'язками Задач 3.1, 3.2 для останніх. Відзначимо, що за умови виконання необхідної умови (3.17), щоб E була $\mathcal{P}S$, пошук невиродженого афінного перетворення (3.2) такого, що виконана (3.1), – це ще один спосіб розв'язати Задачу 3.1.

Теорема 3.7. Якщо $E \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$-множина, що задовольняє умови (2.108) та $d_E = n$, то центр і радіус PSpS E:

$$a^{min} = a,\ r^{min} = r. \tag{3.96}$$

Доведення дивись у додатку B.2.

Теорема 3.7 вказує на те, за яких умов центр та радіус PSpS визначаються єдиним чином і дають розв'язок Задачі 3.2.

3.4.1 Теоретико-множинні операції над PSpSs

Введемо в розгляд набір із $L \geq 2$ точкових конфігурацій, заданих у евклідовому просторі розмірності не вище n:

$$E^l \subset \mathbb{R}^{n^l},\ n_l \leq n,\ l \in J_L, \tag{3.97}$$

серед яких є PSpSs, тобто представимо цю умову таким чином:

$$\exists L' \in J_L \quad E^l \subseteq S^{l,\min} = S_{r^{l,\min}}\left(a^{l,\min}\right),\ l \in J_{L'}, \tag{3.98}$$

$$\exists L'' \in J_L :\ \left|E^l\right| < \infty,\ l \in J_{L''}. \tag{3.99}$$

Це означає, що

$$\{E^l\}_{l \in J_{L'''}},\ \text{де}\ L''' = \min\{L', L''\} \text{ – PSpSs;} \tag{3.100}$$

$\{E^l\}_{l \in J_{L'} \setminus J_{L'''}}$ – гіперсфери або їх нескінченні підмножини, $\{E^l\}_{l \in J_{L''} \setminus J_{L'''}}$ – FPCs, що не є PSpSs.

З (3.99) слідує, що $P^l = conv\ E^l,\ l \in J_{L''}$ – багатогранники. Нехай

$$P^l = \left\{x \in \mathbb{R}^{n^l} :\ A^l x = b^l,\ A'^l x \leq b'^l,\ A^l \in \mathbb{R}^{m^l \times n^l},\ A'^l \in \mathbb{R}^{m'^l \times n^l}\right\}, \\ l \in J_{L''}. \tag{3.101}$$

Узагальнимо поняття E.IM із $\mathcal{C}$-множини на довільну точкову конфігурацію $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Назвемо $G_E \subseteq \mathbb{R}^1$ мультимножиною, що індукує $E \subset \mathbb{R}^n$, якщо вона є результатом об'єднання мультимножин, що індукують всілякі скінченні підмножини E: $G_E = \bigcup\limits_{E^i \subseteq E, |E^i| < \infty} G_{E^i}$. Зауважимо, що E.IM буде скінченною для $\mathcal{C}$-множин, зліченою – для злічених та незліченною для незліченних PCs.

Будемо формувати $\mathcal{C}$-множину E як результат теоретико-множинних операцій над $\mathcal{C}$-множинами (3.99). При цьому будемо вважати, що утворена множина E не тільки є непорожньою, але і не вироджена у точку, тобто має вигляд (2.92). А це, в свою чергу, передбачає, що PSpSs (3.100) також не одноточкові. Отже, $1 < \left|E^l\right| < \infty,\ l \in J_{L'''}$, відповідно, $r^{l,\min} > 0,\ l \in J_{L'''}$.

Підмножина. Нехай $L = L' = L'' = 1$, $n_1 = n$; $E^1 = \hat{E}^1\left(a^{1,\min}, r^{1,\min}\right)$ – PSpS розмірності d_{E^1}, що індукована G_{E^1}, а $E \subset E^1$. Тоді E є PSpS, такою що $E = E\left(a^{1,\min}, r^{1,\min}\right)$, а також $G_E \subseteq G_{E^1}$, $d_E \leq d_{E^1}$. Відповідно E буде VLS, а для багатогранника P вигляду (2.41) буде виконано $P \subset P^1$.

Лема 3.1. Якщо $E \subseteq E^1$,

$$d_E = d_{E^1} \Rightarrow S^{\min} = S^{1,\min}. \tag{3.102}$$

Доведення дивись у додатку B.2.

Перетин. Нехай E утворюється в перетині $\mathcal{C}$-множин (3.97), що задовольняють умови (3.98), (3.99), отже,

$$E = \bigcap_{l=1}^{L} E^l, \tag{3.103}$$

$$E^l \subset \mathbb{R}^n,\ l \in J_L. \tag{3.104}$$

Вважатимемо, що в результаті операції (3.103) формується власна підмножина кожної з PCs (3.104), тобто

$$E \subset E^l,\ l \in J_L. \tag{3.105}$$

Вкажемо деякі властивості $\mathcal{C}$-множини (3.103). По-перше, вона є PSpS як підмножина PSpSs (3.100). Відповідно, E – VLS. Потужність та розмірність E задовольняють умовам:

$$n_E \leq \min_{l \in J_{L''}} \left| E^l \right|, \tag{3.106}$$

$$d_E \leq \min_{l \in J_{L''}} d_{E^l}. \tag{3.107}$$

Для E.IM виконано включення $G_E \subseteq \bigcap\limits_{l=1}^{L} G_{E^l}$. Для багатогранника P, за рахунок виконання умови (3.105) і вершинної розташованості $\mathcal{C}$-множин, що входять у сім'ю (3.104), виконано строге включення $P \subset \bigcap\limits_{l=1}^{L''} P^l$. Для радіуса PSpS E має місце оцінка: $r^{\min} \leq \min\limits_{l \in J_{L'}} r^{l,\min}$.

Перетин PSpS із гіперплощиною. Розглянемо окремий випадок формування E вигляду (3.103), коли $L = 2, L' = L'' = 1$, а PC E^2 являє собою гіперплощину, в результаті чого формули (3.98), (3.99), (3.103) набувають вигляду:

$$E = E^1 \cap E^2 \neq \varnothing, \tag{3.108}$$

де $E^1 \subseteq S^{1,\min} = S_{r^{1,\min}}\left(a^{1,\min}\right), \ \ |E^1| < \infty$, а для E^2 виконано:

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}^n, \ d_2 \in \mathbb{R}^1 : \ \|c_2\| = 1, \ E^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ c_2 x = d_2 \right\}. \tag{3.109}$$

Таким чином, досліджується $\mathcal{C}$-множина, що утворена в перерізі PSpS E^1 із площиною E^2. У даному випадку вірні всі вищенаведені властивості E як перетину двох FPCs, одна з яких – PSpS. Але специфіка E^2 дозволяє конкретизувати їх, а саме:

а) оскільки $d_{E^2} = n - 1$, формула (3.107) набуває вигляду

$$d_E \leq \min \left\{ d_{E^1}, n - 1 \right\}; \tag{3.110}$$

б) враховуючи незліченність E^2, формула (3.106) набуває вигляду:

$$n_E \leq \left|E^1\right|; \tag{3.111}$$

в) H–представлення багатогранника P можна побудувати додаванням до H–представлення (3.101) багатогранника P^1 рівняння площини, у якій лежить E^2, звідки:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{c}_2{}^T x = d_2, \ A^1 x = b^1, \ A'^1 x \leq b'^1, \ A^1 \in \mathbb{R}^{m^1 \times n}, \ A'^1 \in \mathbb{R}^{m'^1 \times n}\right\};$$

г) розв'язок Задачі 3.3 можна виписати в явному вигляді.

Твердження 3.9. Розв'язок Задачі 3.3 для множини (3.108), де E^1 – PSpS та E^2 – площина (3.109), має вигляд:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 - (c_2^T a^{1,\min} - d_2})^2, \tag{3.112}$$

$$a^{\min} = a^{1,\min} - c_2 \left(c_2^T a^{1,\min} - d_2\right). \tag{3.113}$$

Доведення дивись у додатку В.2.

Зауваження 3.13. Якщо для E^1 Задача 3.3 не розв'язана, тобто центр і радіус цієї PSpS невідомі, але є деякий розв'язок r^1, a^1 Задачі 3.2, можна скористатися узагальненням формули (3.112) і отримати явний розв'язок $r = \sqrt{r_1^2 - (c_2^T a^1 - d_2})^2$, $a = a^1 - c_2 \left(c_2^T a^1 - d_2\right)$ Задачі 3.2 для E.

Перетин PSpS із гіперсферою. Нехай знову формується $\mathcal{C}$-множина E вигляду (3.103) для $L = 2$, при цьому $L' = 2$, $L'' = 1$, тобто E^1 – PSpS, а E^2 – гіперсфера. У цьому випадку E буде не тільки PSpS як перетин PSpS E^1 зі сферично розташованою точковою конфігурацією E^2, але і лежатиме у площині перетину гіперсфер $S^{1,\min}, S^{2,\min}$.

Твердження 3.10. Розв'язок Задачі 3.3 для множини (3.108), де E^1 –

PSpS та E^2 – гіперсфера, має вигляд:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 - (c_3^T a^{1,\min} - d_3)^2}, a^{\min} = a^{1,\min} - c_3(c_3^T a^{1,\min} - \quad (3.114)$$

$$-d_3),\ \text{де}\ c_3 = \frac{a^{1,\min} - a^{2,\min}}{\|a^{1,\min} - a^{2,\min}\|},\ d_3 = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\|a^{1,\min} - a^{2,\min}\|}. \quad (3.115)$$

Доведення дивись у додатку В.2.

Зауваження 3.14. Міркування, викладені у заув. 3.13, вірні і коли для E^1, E^2 відомий лише розв'язок Задачі 3.2. У перетині цих двох $\mathcal{C}$-множин утворюється PSpS E, для якої можна знайти розв'язок Задачі 3.2 подібний до (3.115).

Також будуть вірні оцінки (3.110) і (3.111) для розмірності та потужності E, а згідно з (3.110), у перетині PSpS із гіперсферою або довільною сферично-розташованою PC формуватиметься PSpS розмірності як мінімум на одиницю менше за розмірність вихідної $\mathcal{C}$-множини E^1.

Зауваження 3.15. Зазначимо, що у перетині PSpSs із гіперсферою або гіперплощиною, якщо цей перетин задовольняє умову (2.92), утворюється PSpS меншої розмірності, центр і радіус якої можна знайти в явному вигляді, застосовуючи результати тверджень 3.9, 3.10 ітераційно, послідовно включаючи у розгляд таку $\mathcal{C}$-множину з сім'ї (3.104).

Об'єднання. Нехай виконана умова (3.104), а E є об'єднанням $\mathcal{C}$-множин вигляду (3.97)–(3.99), тобто виконано (3.104),

$$E = \bigcup_{l=1}^{L} E^l. \tag{3.116}$$

Будемо також вважати, що $E \supset E^l, l \in J_L$, а описані сфери мінімального радіуса навколо них відрізняються, тобто

$$\left[a^{i,\min}, r^{i,\min}\right] \neq \left[a^{j,\min}, r^{j,\min}\right],\ i,j \in J_L,\ i < j. \tag{3.117}$$

Ясно, що в результаті об'єднання довільних PSpSs, зазвичай формується $\mathcal{C}$-множина, що не є PSpS. З іншого боку, як було показано вище, можливе розкладання PSpS по паралельних площинах, у результаті чого здійснюється декомпозиція вихідної $\mathcal{C}$-множини на PSpSs меншої розмірності. Наведемо достатню умову того, щоб в об'єднанні PSpSs утворювалася PSpS.

Теорема 3.8. Нехай усі множини (3.104) – PSpSs, тобто у (3.98), (3.99) $L' = L'' = L$. Якщо існують $c_l, d_l, t_l \in \mathbb{R}^n,\ l \in J_L$ та $r^* \in \mathbb{R}^1_{>0}$ такі, що

$$c_l x \underset{E^l}{=} d_l t_l,\ l \in J_L; \tag{3.118}$$

$$a^{l,\min} + c_l t_l = a^{l+1,\min} + c_{l+1} t_{l+1},\ i \in J_{L-1}; \tag{3.119}$$

$$(c_l t_l)^2 + \left(r^{l,\min}\right)^2 = (c_{l+1} t_{l+1})^2 + \left(r^{l+1,\min}\right)^2,\ l \in J_{L-1}. \tag{3.120}$$

У такому випадку $\mathcal{C}$-множина (3.116) є PSpS, центр і радіус якої можна знайти за формулами:

$$a^{\min} = a^{1,\min} + c_1 t_1,\ r^{\min} = \sqrt{(c_1 t_1)^2 + (r^{1,\min})^2}. \tag{3.121}$$

Доведення дивись у додатку В.2.

Крім того, вірно

$$n_E \geq \max_{l \in J_L} \left|E^l\right|,\ d_E \geq \max_{l \in J_L} d_{E^l}. \tag{3.122}$$

Якщо виконані умови теореми 3.8, а також умова (3.117), то нерівності (3.122) будуть виконуватися строго, отже, $n_E > \max\limits_{l \in J_L} \left|E^l\right|$, $d_E > \max\limits_{l \in J_L} d_{E^l}$.

Декартовий добуток. Нехай виконані умови (3.11),

$$\text{де } E = \{x = (x^1, ..., x^L) \in \mathbb{R}^n :\ x^l \in E^l,\ l \in J_L\}, \tag{3.123}$$

тобто E є декартовим добутком множин (3.97), і представляється у формі (3.10).

Нехай також виконані умови (3.98), (3.99), тобто серед $\mathcal{C}$-множин (3.97) є PSpSs.

Дослідимо, за яких умов множина (3.10) буде PSpS.

Теорема 3.9. $\mathcal{C}$-множина вигляду (3.10) є PSpS тоді і тільки тоді, коли множини (3.97) – PSpSs.

Доведення дивись у додатку B.2.

Якщо для множин (3.97) Задачу 3.2 розв'язано, то остання формула дає розв'язок цієї ж задачі для E.

Зауваження 3.16. Якщо для PSpSs (3.97) розв'язано Задачу 3.3, а самі вони представлені у формі $E^l = \hat{E}^l \left(a^{\min,l}, r^{\min,l}\right), l \in J_L$, то розв'язок Задачі 3.3 для E вигляду (3.10) є таким –

$$a^{\min} = \bigotimes_{l=1}^{L} a^{l,\min},\ r^{\min} = \left(\sum_{l=1}^{L} \left(r^{l,\min}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{3.124}$$

Розмірність отриманої PSpS задається формулою $d_E = \sum\limits_{l=1}^{L} d_{E^l}$, а критерій її повномірності такий: $d_E = n \Leftrightarrow d_{E^l} = n^l, \in J_L$.

Пряма сума. Властивості прямої суми PSpSs детально розглянуто у [369].

Задача 3.4. Що стосується Задачі 3.4, ясно що довільна декомпозиція PSpS E є декомпозицією на PSpSs, розмірність та радіуси яких не перевищують розмірності та радіуса E. З іншого боку, якщо E – $\mathcal{C}$-множина вигляду (2.92), то, вибираючи за функцію $h(x)$ у (3.76) квадратичну функцію $h(x) = (x - x^0)^2$, де x^0 – задана точка, отримуємо декомпозицію E на PSpSs (3.77). У зв'язку з цим інтерес представляють пошук розв'язків Задач 3.1, 3.2 для компонент (3.77) цієї декомпозиції за їх розв'язками для E. Розглянемо ці та інші питання в рамках вивчення теоретико-множинних операцій над сукупностями точкових конфігурацій, серед яких є PSpSs.

Більш детально способи декомпозиції $\mathcal{C}$-множин див. у [320, 369].

Задача 3.5 Розв'язання Задачі 3.1 може бути пов'язане зі значними витратами часу. У той же час, у деяких випадках перехід від довільної $\mathcal{C}$–множини $E \subset \mathbb{R}^n$ до $\mathcal{PS}$ E' можна зробити достатньо ефективно, здійснюючи підйом у простір $\mathbb{R}^{n'}$, $n' > n$.

Нехай E – $\mathcal{C}$-множина вигляду (2.92), що не є PSpS або принаймні жодна з наведених вище умов поліедрально-сферичності не виконана, а саме E не є $\mathcal{PS}$, $\mathcal{SS}$ та симплексною $\mathcal{C}$-множиною. Представимо декілька шляхів розв'язання Задачі 3.5 для такої $\mathcal{PPS}$.

Спосіб 3.4.1. Довизначення у (2.46) е-конфігурацій $n'' = n_E - n - 1$-єю координатою, обраними довільним чином:

$$E' = \{(x^i, y^i)\}_{i \in J_{n_E}},\ y^i = (y_{ij})^T_{j \in J_{n''}} \in \mathbb{R}^{n''}\text{- фіксований},\ i \in J_{n_E}. \qquad (3.125)$$

Наприклад, $y^i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n''}$, $i \in J_{n_E}$. Побудована таким чином $\mathcal{C}$-множина є симплексною у просторі розмірності $n' = n + n''$, теж є PSpS. Цей прийом застосовний, якщо потужність E порівнювана з n.

Спосіб 3.4.2. Підйом у простір $\mathbb{R}^\eta$, де $\eta = |G| > n$. Формуємо множину E' вигляду (3.125), доповнюючи координати точок E $n'' = \eta - n$-координатами так, щоб у цілому виконувалося $\{(x^i, y^i)\} = G$, $i \in J_{n_E}\}$. Наприклад, це можна зробити так:

$$\{x_{ij}, y_{ij'}\}_{j \in J_n, j' \in J_{n''}} = G, \qquad (3.126)$$

$$y_{ij'} \le y_{i,j'+1}, j' \in J_{n''-1}, i \in J_{n_E}. \qquad (3.127)$$

За побудовою E' – $\mathcal{PS}$, що індукується G, відповідно, вона є PSpS (див. прикл. 2.2).

Спосіб 3.4.2 можна застосувати до тих $\mathcal{PPS}$s, що не є дворівневими за координатами. При цьому, враховуючи, що $\eta \le n^2$, для невеликих n розмірність розширеного простору збільшується не кардинально.

Спосіб 3.4.3. Даний спосіб пов'язаний із мінімальним збільшенням розмірності простору при переході від $\mathcal{C}$-множини, що не є PSpS, до PSpS.

Теорема 3.10. Для довільної $\mathcal{C}$-множини $E \subset \mathbb{R}^n$ існує PSpS вигляду (3.125), така що $E' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Доведення дивись у додатку В.2.

Відзначимо, що теорема 3.10 вказує швидкий шлях переходу від розгляду $\mathcal{C}$-множини E, що, наприклад, не є VLS, до вершинно розташованої $\mathcal{C}$-множини у просторі розмірності лише на одиницю вище.

Як центр описаної гіперсфери $S_{r^*}(x^0)$ можна вибрати початок координат $x^0 = \mathbf{0}$, у результаті чого

$$r_i = (\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - x_{0j})^2)^{1/2}, i \in J_{n_E},\ r^* = \max_{i \in J_{n_E}} r_i. \tag{3.128}$$

перетворюється на $r_i = \|x^i\|, r^* = \max\limits_{i \in J_{n_E}} \|x^i\|$. Можна також обрати центр мас E. Так, якщо $X = \{x_i\}_{i \in J_{|X|}}$, то у позначеннях

$$\Sigma_G^k = \sum_{y \in G} y^k,\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.129}$$

$$\overline{X} = \tfrac{1}{|X|}\Sigma_X^1, \tag{3.130}$$

це виглядає так – $x'^0 = (\overline{x}, 0)$, де $\overline{x} = (\overline{X^j})_{j \in J_n}$. Інші способи: а) $x^0 = (\overline{\mathcal{A}_j})_{j \in J_n}$; б) $x^0 = \overline{G}\mathbf{e}$; в) $x^0 = \overline{\mathcal{A}}\mathbf{e}$ тощо.

Зауважимо, що побудована PSpS E' вигляду (3.125),

$$y^i = (r^{*2} - r_i^2)^{1/2}, i \in J_{n_E}, \tag{3.131}$$

як і E, буде $\mathcal{PPS}$, але потужність η' мультимножини G', що її індукує, може бути значно більшою за η і досягати величини n_E.

Для зменшення η' бажано враховувати симетрію E, що відображено у трьох шляхах для Способу 3.4.3.

Так, якщо $E = E^n_{\eta k}(G)$, $k > 2$, $x^0 = \overline{G}\mathbf{e}$, то (3.128) перетворюється на

$$r_i = (\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{G})^2)^{1/2}, i \in J_{n_E};$$
$$r^* = \max\{(\sum_{i=1}^{n}(g_i - \overline{G})^2)^{1/2}, (\sum_{i=1}^{n}(g_{\eta-i+1} - \overline{G})^2)^{1/2}\},$$

при цьому $\eta' - \eta$ оцінюється зверху кількістю n-сполучень із G, тобто $\eta' \leq |S^n_{\eta k}(G)| + \eta$.

Аналогічно, можна зробити узагальнення з PSpS на PSsS, обравши у (3.128), замість евклідової, іншу l_p-норму.

Зробимо ще одне зауваження. Ми представили три способи як поставити у взаємно-однозначну відповідність до $\mathcal{C}$-множини $E \subset \mathbb{R}^n$ – SPsS $E' \subset \mathbb{R}^{n'}$, де $n' = n''_n > n$. Але якщо розв'язується деяка задача на E, наприклад, е-задача (1.12), де E' – $\mathcal{C}$-множина, еквівалентною до неї буде задача вигляду:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(x') \to \min, \\ &x' \in E', \end{aligned} \tag{3.132}$$

де $x' = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+n''}$, $\tilde{f}(x') : \ E \times \mathbb{R}^{n''} \to \mathbb{R}^1$, $\tilde{f}(x') \underset{x \in E, y \in \mathbb{R}^1}{=} f(x)$, а E' сформовано одним із Способів 3.4.1-3.4.3. Але з побудови видно, що є можливість збільшення області E' і при цьому (3.132) та е-задача (1.12) залишаються еквівалентними.

Наприклад, якщо обрано Спосіб 3.4.3, то ослабивши умову $y \geq 0$, $n+1$-а координата точок E' визначатиметься за формулою

$$y^i = (r^{*2} - r_i^2)^{1/2}, i \in J_{n_E}. \tag{3.133}$$

Відповідно, область пошуку (3.132) збільшиться, при цьому E залишається PSpS із тими самими параметрами.

Те саме здійснимо і для Способу 3.4.2, ослабляючи (3.127) і застосовуючи лише (3.126).

Зазначимо, що використовуючи таку модифікацію, кількість обмежень не збільшується, адже (3.133) можна представити у компактній формі $(y^i)^2 = r^{*2} - r_i^2, i \in J_{n_E}$, а додавання обмежень (3.127) у (3.126) може лише збільшити її.

3.5 Зв'язок між VLSs та FPCs

Подальше викладення буде тісно пов'язане з VLSs. Зазначимо, які шляхи існують для моделювання FPC E, що не є VLS, за допомогою VLS/VLSs.

Отже, нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ – не є VLS, тоді це $\mathcal{C}$-множина розміщень.

У п. 3.2 було вказано шляхи, пов'язані із декомпозицією E на декілька VLSs. При цьому C-A пропонує такі E.D на основі покриття $G = E$.IM n-елементними мультимножинами, що приводить до розбиття E на $\mathcal{C}$-множини перестановок (далі *Спосіб 3.5.1*). У той же час G-A рекомендує проводити таку E.D, ґрунтуючись на розкладанні E по строго опуклих вкладених поверхнях. (далі *Спосіб 3.5.2*).

Наступні способи пов'язані із зануренням E у розширений простір. Так, у п. 3.4 було показано три шляхи, що дозволяють від E перейти до PSpS $E' \subset \mathbb{R}^{n'}$, $n' > n$, яка автоматично є VLS (далі *Спосіб 3.5.3*).

Ще один спосіб пов'язаний з переходом від E до булевої E', яка автоматично є PSpS і VLS (далі *Спосіб 3.5.4*).

Цей спосіб є загальноприйнятим при переході від скінченних цілочисельних та дискретних множин до булевих множин [309] і детально описаний для $\mathcal{C}$-множин у [369]. Так, для $\mathbb{Z}$Ss він пов'язаний із двійковим представленням цілих чисел та підйомом у простір розмірності $n' = \sum\limits_{i=1}^{n} \lceil \log_2(b_i - a_i) + 1 \rceil$, де

$[a_i, b_i]$ – межі зміни x_i, $i \in J_n$. Те саме можна застосувати для $\mathbb{U}$Ss. Для скінченної дискретної множини, представленої у формі (2.38), $n' = \sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2 k_i \rceil$, де k_i, $i \in J_n$, задано (2.36).

Останній спосіб (далі *Спосіб 3.5.5*) буде ґрунтуватися на встановленому у п. 2.6 зв'язку між числовими $\mathcal{C}_b$-множинами та $\mathcal{C}_b$-множинами того же комбінаторного типу, компонентами яких є вектори одиничного базису.

Отже, якщо $E = E_{\eta k}^{n}(G)$ – не є VLS, тобто $\eta > n$, $k > 2$, тоді, перейшовши від розгляду E до загальної $\mathcal{C}_b$-множини матриць розміщень $\mathcal{E}_{\eta k}^{n}(G)$, приходимо до розгляду ще однієї булевої е-множини. При цьому розширеним простором виступає $\mathbb{R}^{nk}$, тобто розмірність щонайменше у три, щонайбільше у n разів більше за розмірність простору, у якому задано E.

Перевагою даного способу є ще і те, що, на відміну від попередніх, воно зберігає початкову комбінаторну структуру – так E залишатиметься $\mathcal{C}_b$-множиною розміщень, але вже не числовою, а векторною. Відповідно, вона зберігає свої структурні властивості, водночас набуваючи переваги булевих множин е-конфігурацій, зокрема, вершинну розташованість.

3.6 Висновки за розділом 3

Досліджено питання представлення одних $\mathcal{C}$-множин через інші як спосіб моделювання перших. У рамках цього підходу досліджено зв'язок між різними класами $\mathcal{C}$-множин, зокрема, пов'язаних із лінійними перетвореннями, а також можливість представлення однієї множини через іншу чи сукупність інших $\mathcal{C}$-множин у вихідному або розширеному просторі.

У першому контексті розглянуто питання виділення класів еквівалентності $\mathcal{C}$-множин з точки зору їх комбінаторної ізоморфності. У другому – питання декомпозиції $\mathcal{C}$-множин, у т.ч. на множини того ж комбінаторного типу.

Здійснено C-A і G-A способів декомпозиції і запропоновано ряд принциповo нових декомпозиційних підходів до розбиття та покриття $\mathcal{C}$-множин.

Основною метою моделювання $\mathcal{C}$-множин за допомогою інших множин е-конфігурацій обрано їх представлення як результат лінійних перетворень $\mathcal{C}_b$-множин, розбиття та теоретико-множинних операцій над $\mathcal{C}_b$-множинами. Показано, що ці три способи можуть бути використані як основний інструмент моделювання нових класів $\mathcal{C}_b$-множин.

Виділено три широких класу $\mathcal{C}$-множин, що володіють цікавими особливостями – це VLSs, сферично розташовані (PSpSs) та дворівневі (2LSs) $\mathcal{C}$-множини. Досліджено їх властивості та взаємозв'язок, зокрема, запропоновано шляхи представлення довільних $\mathcal{C}$-множин через VLSs та PSpSs.

Основні результати третього розділу опубліковано у роботах [186, 189, 254, 255, 310, 320, 322, 325, 326, 333, 344, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [7, 39, 52, 67, 77, 109, 128, 166, 168, 169, 205, 237, 238, 240, 309, 370].

4 БАЗОВІ $\mathcal{C}$-МНОЖИНИ ТА БАГАТОГРАННИКИ

Нехай множина E вигляду (2.92) є базовою множиною е-конфігурацій, а P – відповідний $\mathcal{C}_b$-багатогранник (2.41). Крім того, будемо вважати, що E є однією з множин (3.14), (3.15).

Так, E_2^e є одноточковою множиною і не задовольняє (2.92), тому виключаємо її з розгляду. Крім того, не розглядатимемо двоелементну множину $B_2^h = \{(0,0),(1,1)\}$. Отже, надалі $\mathcal{C}_b$–множини E_n^e, B_n^h розглядатимемо для $n \geq 3$.

Введемо у розгляд спеціальний клас $\mathcal{C}_b$–множин перестановок, що генеруються триелементною множиною $\mathcal{A}$ та індукуються мультимножиною:

$$G = \{e_1^{n_1}, e_2, e_3^{n_3}\} = \{e_1^{n_1}, e_2, e_3^{n-n_1-1}\}. \tag{4.1}$$

Для $\mathcal{C}_b$–множин перестановок, індукованих мультимножиною (4.1), будемо використовувати позначення $E'_{n3}(G)$, а для відповідного класу $\mathcal{C}_b$–багатогранників – $\Pi'_{n3}(G)$.

При дослідженні класу $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком та окремих його підкласів використаємо позначення:

$$E = E_{nk}^{\pm}(G),\ E^I = E_{nk}^{\pm I}(G),\ E^{II} = E_{nk}^{\pm II}(G). \tag{4.2}$$

Для загальної $\mathcal{C}_b$–множини перестановок зі знаком, зокрема, першого та другого типу, що породжується множиною $E'_{n3}(G)$, застосовуватимемо такі позначення:

$$E' = E_{n3}^{\prime\pm}(G); E^{\prime I} = E_{n3}^{\pm I}(G); E^{\prime II} = E_{n3}^{\pm II}(G). \tag{4.3}$$

Щоб об'єднати класи E^I, E^{II} в єдиному класі $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком, мультимножину G, що породжує клас (4.2), представимо у формі:

$$G = \{e_0^{n_0}, e_1^{n_1}, ..., e_\kappa^{n_\kappa}\} : \ |G| = n, \ 0 = e_0 < e_1 < ... < e_\kappa,$$
$$\text{де} \qquad \kappa = \begin{cases} k-1, \text{ якщо } E = E^I \text{ (далі } \textit{Випадок 4.1}\text{);} \\ k, \text{ якщо } E = E^{II} \text{ (далі } \textit{Випадок 4.2}\text{),} \end{cases} \tag{4.4}$$

при цьому $n_0 > 0$ у Випадку 4.1 і $n_0 = 0$ у Випадку 4.2.

Крім того, введемо у розгляд $\mathcal{C}_b$–множину $CE_n(e_1) = e_1 B_n^{\pm}(1)$ вершин гіпероктаедра (a cross-polytope, a hyperoctahedron) [72] $CP_n(e_1) = = conv\,(CE_n(e_1)) = e_1 PB_n^{\pm}(1)$ із центром у точці $\mathbf{0}$, де $e_1 \in \mathbb{R}^1_{>0}$.

4.1 Властивості $\mathcal{C}_b$-множин: основні задачі

Сформулюємо основні задачі дослідження властивостей $\mathcal{C}_b$–множини E і $\mathcal{C}_b$–багатогранника P:

– *Задача 4.1* – побудова H-представлення P, у т.ч. незвідного (далі *Задача 4.2*) та компактного розширеного (далі *Задача 4.3*);

– *Задача 4.4* – дослідження E на поверхневу розташованість;

– *Задача 4.5* – визначення, чи дозволяє E поліедрально-поверхневе представлення.

Враховуючи, що гіперсфера, еліпсоїд та суперсфера з коефіцієнтом деформації $\alpha/2 \in (0.5, \infty)$ є сильно опуклими, відповідно і строго опуклими, поверхнями, існування PSR буде встановлено, якщо буде доведено, що E є PSpS, PSsS або PES. Отже, акцент будемо робити на пошуку поверхонь цих трьох типів;

– *Задача 4.6* – пошук критерію вершини багатогранника P (пошук $\mathbf{V}$–представлення P);

Розв'язання цієї задачі передбачає виявлення ознаки, за якою з множини E однозначно виділяється $\mathbf{V}$. Ця ознака в ідеалі формулюється як необхідна і достатня умова того, що довільна точка $x \in E$ є елементом $\mathbf{V}$, тобто в формі критерію вершини P.

Дана задача спрощується для множин, що є SLSs, адже за теоремою 2.3 вони є VLSs, відповідно критерій вершини для них має вигляд: $x \in \mathbf{V} \Leftrightarrow x \in \mathbf{E}$.

– *Задача 4.7* – пошук критерію суміжності вершин P, зокрема, виявлення, чи всі вершини P мають однаковий степінь регулярності.

Розв'язання Задачі 4.7 передбачає формулювання ознаки, за якою довільній $x \in \mathbf{V}$ ставиться у відповідність її окіл $N_P(x) = \{y \in \mathbf{V} : y \leftrightarrow x\}$ точок, з'єднаних із нею ребром $(x, y) \in edges\, P$.

Нехай $\mathcal{R}_P(x) = |N_P(x)|$ – кількість суміжних із $x \in \mathbf{V}$ вершин P (*степінь* вершини, a vertex degree). Якщо $\exists\ \mathcal{R}(P) \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbf{V}$ $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}_P(x)$, тобто усі вершини мають однакове число суміжних, величина $\mathcal{R}(P)$ є *степенем регулярності* вершин P;

– *Задача 4.8* – виділення класу *простих* $\mathcal{C}_b$–багатогранників (simple $\mathcal{C}_b$–polytopes), тобто тих, для яких $\mathcal{R}(P) = d_E$;

– *Задача 4.9* – дослідження симетрії E и P, зокрема, встановлення, чи є P кулею у деякому нормованому просторі [67];

– *Задача 4.10* – дослідження багаторівневості E в цілому, за координатами, окремими напрямками, окремими функціями та сім'ями функцій.

– *Задача 4.11* – дослідження комбінаторної ізоморфності $\mathcal{C}_b$–множин та комбінаторної еквівалентності $\mathcal{C}_b$–багатогранників.

Задачі 4.1-4.11 стосуються дослідження алгебро-топологічних та тополого-метричних властивостей $\mathcal{C}_b$–множин. Внаслідок та в ході їх розв'язання виникають і потребують розв'язання різні задачі перечислення для множини E, а також: а) для її підмножин, таких як $\mathbf{V}$, $N_P(x)$, $\mathcal{R}_P(x)$ $(x \in E)$; б) для всього класу $\mathcal{C}_b$–множин, куди належить E та P, наприклад, для класів еквівалентності $\mathcal{C}_b$–багатогранників та комбінаторної ізоморфності $\mathcal{C}_b$–множин. В останньому випадку виникають дві задачі – визначення кількості класів еквівалентності багатогранників заданої розмірності та знаходження потужностей самих цих класів. Те саме стосується і комбінаторно ізоморфних $\mathcal{C}_b$–множин.

У рамках дослідження екстремальних властивостей функцій, заданих на $\mathcal{C}_b$–множинах, розглядаються такі задачі:

– *Задача 4.12* – встановити, чи є $\mathcal{C}_b$–множина E добре описуваною.

Множина E називається *добре описуваною* (a well described set, WDS) [24], якщо лінійна задача

$$LP(E,c): \ z^{lin,E} = \min_{x\in E} \mathrm{c}^T x, \ x^{lin,E} = \arg\min_{x\in E} \mathrm{c}^T x$$

ефективно, тобто за поліноміальний час, розв'язувана.

Розв'язання Задачі 4.12 передбачає розв'язання $LP(E,c)$ у явному вигляді або пошук поліноміального алгоритму її розв'язання (далі $MLP(E,c)$).

– *Задача 4.13* – задача проектування на $\mathcal{C}_b$–множину, тобто пошуку $y = \mathrm{Pr}_E x$ для $x \in \mathbb{R}^n$, узагальненням якої є задача комбінаторного заокруглення до елемента $\mathcal{C}_b$–множини.

Задача 4.13 є нелінійною задачею комбінаторної оптимізації, яку в окремих випадках можна ефективно розв'язати.

Лема 4.1. Якщо E – PES та WDS, то задача пошуку найближчої до $x \in \mathbb{R}^n$ точки у метриці $\|x\|_A^2 = x^T Ax$, де A задовольняє (2.110), може бути розв'язана за поліноміальний час.

Доведення дивись у додатку B.3.

Наслідок 4.1. [186] Якщо E – PSpS та WDS, то задача пошуку проекції на неї довільної точки $x \in \mathbb{R}^n$ може бути розв'язана за поліноміальний час.

Доведення дивись у додатку B.3.

Зауваження 4.1. Насл. 4.1 вказує шлях розв'язання Задачі 4.13 для PSpSs, а лема 4.1 – Задачі 4.13 для PESs.

– *Задача 4.14* – пошук нижніх оцінок опуклої функції на $\mathcal{C}_b$–множинах.

Розв'язання цієї задачі ґрунтується на теоремах 1.1-1.3, вірних для довільних множин, не обов'язково VLSs чи PSpSs.

Використаємо їх для $\mathcal{C}_b$–множин, отже, припустимо, що (1.38)-(1.40) застосовуються для оцінки функції на $\mathcal{C}_b$–множині E, де $K \supset E$ – замкнена опукла власна надмножина E.

Оцінку (1.38) доцільно використовувати для WDS E, адже останній доданок у ній є розв'язком лінійної задачі на E. Якщо до того ж E є PSpS, застосовуваними стають оцінки (1.39), (1.40), де Задача 4.13 розв'язується на етапі пошуку останніх доданків.

У даному розділі буде проведено дослідження нових класів $\mathcal{C}_b$–множин на базі властивостей відомих у літературі класів загальних $\mathcal{C}_b$–множин перестановок та розміщень [193, 258, 265, 290, 297, 310, 333, 363, 364, 369, 370]. Серед $\mathcal{C}_b$–множин, що відповідають випадку $m > 1$, буде розглянуто $\mathcal{C}_b$–множину матриць перестановок, а також деякі його узагальнення, представлені у п. 2.6. Зокрема, для $E_n^N(G)$ будуть систематизовані та адаптовані до $\mathcal{C}$–множин результати, що стосуються множини $\mathcal{P}_n$ матриць перестановок [48, 50, 258, 264, 265].

Вивчення відбувається у двох напрямах: а) конкретизація властивостей спеціальних класів $\mathcal{C}_b$–множин, таких як $\mathcal{C}_b$–множина перестановок без повторень, спеціальні $\mathcal{C}_b$–множини перестановок та розміщень і т. ін.; б) дослідження $\mathcal{C}_b$–множин, що є результатом розбиття E на комбінаторно еквівалентні підмножини (це стосується множин $E_n^e(G)$, B_n^h); в) вивчення нових властивостей $\mathcal{C}_b$–множин перестановок та розміщень; г) дослідження властивостей нових класів множин, таких як $\mathcal{C}_b$–множина перестановок зі знаком та її спеціальних класів.

Слід вказати на особливості розв'язання Задач 4.2-4.4 для $P' = conv\ E_n^e(G)/\ conv\ B_n^h$, виходячи з принципу побудови $\mathcal{C}_b$–множин $E' = E_n^e(G)/B_n^h$ з $E = E_n(G)/B_n$. Застосовуватимемо таку схему формування E. Задати початкову точку $x^0 \in E$, видалити усі суміжні до неї вершини, провести ребра до суміжних вершин до суміжних. Те саме зробити для $N'_P(x^0)$. Процедуру продовжувати далі, доки не залишиться половина елементів E. Для розв'язання Задачі 4.2 сформувати правильні відсікання точок $N_P(x)$, $x \in E'$ через точки $N_{P'}(x)$, доповнюючи ними (P.HR). Враховуючи можливість декомпозиції множини E' на $\mathcal{C}_b$–множини цього ж класу меншої розмірності (див. п. 3.2), що лежать у гіпергранях P, ознакою, того, що відповідне обмеження P буде суттєвим, буде те, що $\mathcal{C}_b$–багатогранники, одержані в результаті такої декомпозиції, мають розмірність на одиницю менше за P'. Ця особливість використовуватиметься при розв'язанні Задачі 4.4.

У даному розділі будуть наведені розв'язки Задач 4.1-4.13 для множини $E = E^{\pm}_{nk}(G)$ та спеціальних її підкласів, розв'язки Задач 4.1-4.5 для решти введених раніше $\mathcal{C}_b$–множин, а також деякі розв'язки задач Задач 4.6-4.13, необхідні для подальшого викладення. Відзначимо, що розв'язки решти Задач 4.1-4.13 для інших $\mathcal{C}_b$–множин (3.14), (3.15) можна знайти у [186, 189, 254, 258, 289, 297, 325, 333, 343, 364, 368–370, 379], розв'язки для $\mathcal{C}_b$–множин поліперестановок, полірозміщень та інших полікомбінаторних множин, що індукуються множинами (3.14), (3.15), можна виписати, виходячи з властивостей декартових добутків $\mathcal{C}$–множин, наведених у п. 3.3 та [369], зокрема, частково їх можна знайти у [295, 297, 363, 370, 371].

У даному пункті наведено розв'язки задачі визначення потужності введених раніше $\mathcal{C}_b$ множин:

$$E_{nk}(G), E^{n}_{\eta k}(G), E^{\pm}_{nk}(G), E^{e}_{n}(G), B^{e}_{n}, \tag{4.5}$$

а також для їх спеціальних класів.

4.2 Потужність $\mathcal{C}_b$-множин

$\mathcal{C}_b$-множини перестановок

– $E_{nk}(G)$:

$$|E_{nk}(G)| = \frac{n!}{n_1! \cdot ... \cdot n_k!}. \tag{4.6}$$

– Спеціальні класи $E_{nk}(G)$:

$$|E_n(G)| = n!,\ |E'_{n3}(G)| = C_n^{n_1}(n - n_1),\ |B_n(m)| = C_n^m. \tag{4.7}$$

$\mathcal{C}_b$-множини розміщень: – $E_{\eta k}^n(G)$:

Наслідок 4.2. [369]

$$\left|E_{\eta k}^n(G)\right| = n! \sum_{\mathcal{G}^i \subset \mathbf{G}} \frac{1}{n_1^i! \cdot ... \cdot n_{\kappa_i}^i!}, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{G} = \left\{\mathcal{G}^i\right\}_{i \in I}; \mathcal{G}^i \subset G,\ \left|\mathcal{G}^i\right| = n,\ i \in I';\ G = \bigcup_{i \in I} \mathcal{G}^i;$$

$$\forall i, i' \in I,\ i \neq i' \quad \mathcal{G}^i \neq \mathcal{G}^j;\ \left[\mathcal{G}^i\right] = \left(n_1^i, ..., n_{\kappa_i}^i\right),\ \ \kappa_i = \left|S\left(\mathcal{G}^i\right)\right|,\ i \in I.$$

Цей результат ґрунтується на декомпозиції (3.24).

– Спеціальні класи $E_{\eta k}^n(G)$:

$$|E_k^n(G)| = \frac{k!}{(k-n)!};\ \left|\overline{E}_k^n(G)\right| = k^n;\ \left|E_{n+1,k}^n(G)\right| = \frac{(n+1)!}{\eta_1! \cdot ... \cdot \eta_k!};$$

$$|B_n(m_1, m_2)| = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m;\ |B_n| = 2^n.$$

$\mathcal{C}_b$-множини парних перестановок і парних булевих векторів

$$|E_n^e| = \tfrac{n!}{2}; \tag{4.9}$$

$$\left|B_n^h\right| = 2^{n-1}.$$

$\mathcal{C}_b$-множини перестановок зі знаком

– $E_{nk}^{\pm}(G)$:

Теорема 4.1. Потужність множини $E_{nk}^{\pm}(G)$ обчислюється за формулою:

$$|E| = C_n^{n_0} \cdot \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{\kappa} n_i!} \cdot 2^{n-n_0}, \tag{4.10}$$

де κ визначено з (4.4).

Доведення дивись у додатку В.3.

– Спеціальні класи $E_{nk}^{\pm}(G)$:

$$|E_{nk}^{\pm I}(G)| = C_n^{n_0} \cdot \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} n_i!} \cdot 2^{n-n_0}; |E_{nk}^{\pm II}(G)| = 2^n \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_i!};$$
$$\left|E_n^{\pm I}(G)\right| = 2^{n-1}n!; \left|E_n^{\pm II}(G)\right| = 2^n n!; \left|B_n^{\pm}(m)\right| = C_n^m 2^m; |CE_n(1)| = 2n;$$
$$\left|E_{n3}^{\prime \pm I}(G)\right| = C_n^{n_0}(n-n_0)2^{n-n_0}; \left|E_{n3}^{\prime \pm II}(G)\right| = C_n^{n_1}(n-n_1)2^n.$$

4.3 Опуклі оболонки $\mathcal{C}_b$-множин

4.3.1 Опуклі оболонки $\mathcal{C}$-множин: загальна теорія

Нехай E – $\mathcal{C}$–множина вигляду (2.92), P – відповідний $\mathcal{C}$–множина (2.41). При дослідженні властивостей $\mathcal{C}_b$–множин (3.14), (3.15) та відповідних $\mathcal{C}_b$–багатогранників достатньо обмежитися двома класами багатогранників – повномірними (fulldimensional), тобто такими:

$$d_P = n, \tag{4.11}$$

та $n-1$-вимірними ($n-1$-dimensional) –

$$d_P = n-1. \tag{4.12}$$

Особливістю багатогранників класу (4.11) є те, що їхнє IHR визначено однозначно, складається з нерівностей, тобто має форму (2.95). Для комбінаторних багатогранників класу (4.12) властиве, що їхнє IHR містить єдине рівняння, відповідно (2.93) перетворюється на (2.95),

$$\beta: \ a'x = a'_0, \ a' \neq \mathbf{0}. \tag{4.13}$$

В останньому випадку (P.IHR) визначено неоднозначно, зокрема, якщо система (2.95), (4.13) задає (P.IHR), то $\forall \alpha = (\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^{n''}$ система (4.13),

$$(a''_i + \alpha_i a')x \leq a''_{i0} + \alpha_i a'_0, \ i \in J_{n''}, \tag{4.14}$$

також є IHR багатогранника P (далі $(P(\alpha).IHR)$).

У сім'ї ($P(\alpha)$.IHR) виділимо те (P.IHR), у якому опорні гіперплощини до гіперграней P ортогональні до β. Позначимо його (P.IHR*), а параметри $\alpha^* \in \mathbb{R}^{n''}$ визначимо з умови: $(a''_i + \alpha^*_i a')^T a' = 0, \ i \in J_{n''}$, звідки

$$\alpha^*_i = -\frac{a''^T_i a'}{\|a'\|^2}, \ i \in J_{n''}, \tag{4.15}$$

а (P.IHR*) збігається з ($P(\alpha^*)$.IHR).

Сім'я ($P(\alpha)$.IHR) незвідних H-представлень можна узагальнити на довільне H-представлення P, покладаючи, що система (2.95), (4.13) – це просто (P.HR). У такому випадку система (4.13), (4.14) задаватиме сім'ю H-представлень P (далі $(P(\alpha).HR)$), у якій виділимо (P.IHR*)=($P(\alpha^*)$.HR) із параметрами, що визначаються з (4.15).

Кожен багатогранник P дозволяє (P.HR), обмеження-нерівності якого представлені двосторонніми обмеженнями, яке має вигляд (2.94),

$$a'''_{i0} \leq a''_i x \leq a''_{i0}, \ i \in I \subseteq J_{n''} \tag{4.16}$$

(далі $(P.HR^I)$). Зокрема, якщо нормалі до усіх опорних гіперплощин до гіперграней P різні, воно матиме вигляд

$$a'''_{i0} \le a''_i x \le a''_{i0},\ i \in J_{n''}, \tag{4.17}$$

де $a'''_{i0} = \min_{x \in P} a''_i x,\ i \in J_{n''}$. У цьому випадку $(P.\mathrm{HR}^I)$ – звідне і має порядок $n' + 2n''$.

Незвідне Н-представлення P, виділене з $(P.\mathrm{HR}^I)$, позначимо $(P.IHR^I)$. Для його існування необхідно, щоб P був центрально симетричним. Таким чином, актуальним є виділення центрально-симетричних $\mathcal{C}_b$–множин, тобто тих, що:

$$\exists\, x^0 \in \mathbb{R}^n :\ E - x^0 = -(E - x^0), \tag{4.18}$$

адже відповідні $\mathcal{C}_b$–багатогранники також центрально-симетричні. Якщо $(P.\mathrm{IHR}^I)$ існує, а умова (4.18) не виконана, ознакою центральної симетричності P є $\exists\, x^0 \in \mathbb{R}^n :\ P - x^0 = -(P - x^0)$.

У разі існування, центр x^0 симетрії E/P може бути визначений з системи:

$$\overline{a}'_i x^0 = a'_{i0},\ i \in J_{n'},\ \overline{a}''_i x^0 = \tfrac{1}{2}(a'''_{i0} + a''_{i0}),\ i \in J_{n''}.$$

4.3.2 $\mathcal{C}_b$-багатогранники: позначення і розмірність

Заміна у (3.14), (3.15) E на Π, B на PB дає такі $\mathcal{C}_b$-множини:

$$PB_n(m),\ \Pi_{nk}(G),\ \Pi_n(G),\ \Pi^e_n(G)\ - \tag{4.19}$$

це відповідно гіперсимплекс (a hypersimplex) [199], загальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник перестановок (a generalized permutohedron) [197, 209, 370], $\mathcal{C}_b$–багатогранник перестановок без повторень (a permutohedron) [258, 265], $\mathcal{C}_b$–багатогранник парних перестановок (an even permutohedron) [258] відповідно, зокрема, $\Pi_{n2}(G)$ – це спеціальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник перестановок;

$$\begin{gathered}\text{а) } PB_n,\ PB_n(m_1,m_2),\ PB_n^h;\ \text{б) } \Pi_{\eta k}^n(G),\ \Pi_k^n(G),\ \overline{\Pi}_k^n(G);\\ \text{в) } PB_n^{\pm}(m),\ \Pi_{nk}^{\pm}(G),\ \Pi_{nk}^{\pm I}(G),\ \Pi_{nk}^{\pm II}(G),\ \Pi_n^{\pm I}(G),\ \Pi_n^{\pm II}(G),\end{gathered} \tag{4.20}$$

де: а) відповідно, одиничний гіперкуб (a hypercube) [108], $\mathcal{C}_b$–багатогранник булевих розміщень (a Boolean partial permutohedron), напівкуб (a semicube, a halfcube) [99, 138]; б) відповідно, загальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник розміщень (a generalized partial permutohedron) [370] (у т.ч. $\Pi_{\eta2}^n(G)$ – спеціальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник розміщень), $\mathcal{C}_b$–багатогранник розміщень без повторень (a partial permutohedron) [258], $\mathcal{C}_b$–багатогранник розміщень із необмеженими повтореннями (a partial permutohedron with unbounded repetitions) [379]; в) відповідно, $\mathcal{C}_b$–багатогранник трійкових перестановок зі знаком, загальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник перестановок зі знаком (a generalized signed permutohedron) [248, 369], загальні $\mathcal{C}_b$–багатогранники перестановок зі знаком першого та другого типу, $\mathcal{C}_b$–багатогранники перестановок зі знаком без повторень першого та другого типу відповідно.

Ця сама заміна у (4.2), (4.3) відповідно приводить до скорочених позначень P^I, P^{II}, P^+, P', P'^I, P'^{II} для загальних $\mathcal{C}_b$–багатогранників перестановок зі знаком першого та другого типу; загального $\mathcal{C}_b$–багатогранника перестановок, що відповідає E^+, та $\mathcal{C}_b$–багатогранникам перестановок зі знаком двох типів, що відповідають (4.3).

Об'єднаємо в одній теоремі результати [258, 265, 369], що стосуються розмірності $\mathcal{C}_b$–багатогранників.

Теорема 4.2. Багатогранники (4.19) є повномірними, а багатогранники (4.20) – $n-1$-вимірні. Площини багатогранників (4.19) задаються рівняннями:

$$\Pi_{nk}(G) : \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i; \tag{4.21}$$

$$\Pi_n(G), \Pi_n^e(G) : \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} e_i; \tag{4.22}$$

$$PB_n(m) : \sum_{i=1}^{n} x_i = m; \tag{4.23}$$

$$\Pi'_{n3}(G) : \sum_{i=1}^{n} x_i = n_1 e_1 + e_2 + n_3 e_3. \tag{4.24}$$

4.3.3 H-представлення $\mathcal{C}_b$-багатогранників

У даному пункті наводяться розв'язки Задачі 4.2, відповідно, і Задачі 4.1, для $\mathcal{C}_b$–багатогранників, що відповідають $\mathcal{C}_b$–множинам (4.5), та їх окремим класам, а також деякі розв'язки Задачі 4.3 для $\mathcal{C}_b$–багатогранників, звичайні H-представлення яких містять експоненційну кількість обмежень.

4.3.3.1 $\mathcal{C}_b$-багатогранники перестановок

– $\Pi_{nk}(G)$:

Теорема 4.3. [369][1)] Незвідним H-представленням багатогранника $\Pi_{nk}(G)$ (далі ($\Pi_{nk}(G).IHR1$)) є система обмежень, що включає рівняння (4.21) та нерівності спілок[2)]

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \ \omega \subset J_n \tag{4.25}$$

з номерами $i = |\omega| \in \overline{J} = J_{n-1} \backslash J$, де $i \in J = \overline{i^{\min}, n_1} \cup \overline{n - n_k, i^{\max}}$, $i^{\min} = \min\{2, n - n_k\}$,$i^{\max} = \max\{n - 2, n_1\}$.

Наслідок 4.3. [369] Система обмежень (4.21),

$$\sum_{j\in\omega'} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega'|} g_{n-j+1}, \ \omega' \subset J_n, \tag{4.26}$$

де $i = n - |\omega'| + 1$ задовольняє умови теореми 4.3, є незвідним H-представленням $\Pi_{nk}(G)$ (далі ($\Pi_{nk}(G).IHR2$)).

[1)]Ця теорема є уточненням теореми [294]

[2)]i-ою спілкою системи (4.25) називається сукупність нерівностей, що відповідає ω таким, що $|\omega| = i$

Доведення дивись у додатку В.3.

Зауваження 4.2. При даному перетворенні нумерацію спілок нерівностей залишимо незмінною, тобто кожному $|\omega'|$ поставимо у відповідність $n - |\omega'| + 1$-у спілку нерівностей (4.25).

Наслідок 4.4. $(\Pi_{nk}(G).\mathrm{HR}^I)$ має вигляд (4.21)

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{j\in\omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subset J_n,\ |\omega| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{4.27}$$

Як видно з (4.25), (4.26), Н-представлення містить максимум $n-1$-у спілку нерівностей з номерами $i \in J_n$, що виконано для (4.27), враховуючи заув. 4.2.

Теорема 4.4. Система обмежень (4.21),

$$\forall\ \omega \subset J_n\ \tfrac{i}{n-i} \textstyle\sum\limits_{j\notin\omega} x_j - \sum\limits_{j\in\omega} x_j + a_i \leq 0, \tag{4.28}$$

$$\text{де } i = |\omega|,\ a_i = -\tfrac{i}{n-i}\Sigma_G^1 - \tfrac{n}{n-i} \textstyle\sum\limits_{j=1}^{i} g_j,\ i \in J_{n-1}, \tag{4.29}$$

де Σ_G^1 знайдено за формулою (3.129), а $i = |\omega|$ задовольняє умови теореми 4.3, є IHR типу $(P.\mathrm{IHR}^*)$ (далі $(\Pi_{nk}(G).\mathit{IHR3})$).

Доведення дивись у додатку В.3.

– Спеціальні класи $\Pi_{nk}(G)$: HRs і IHRs $\mathcal{C}_b$–багатогранників перестановок наведено у [333, 369], зокрема,

$$(\Pi_n(G).\mathrm{IHR1}):\ (4.22), \textstyle\sum\limits_{j\in\omega} x_j \geq \sum\limits_{j=1}^{|\omega|} e_j,\ \omega \subset J_n;$$

$$(\Pi_n(J_n).\mathrm{IHR1}):\ (4.22), \textstyle\sum\limits_{j\in\omega} x_j \geq C^2_{|\omega|+1},\ \omega \subset J_n;$$

$$(\Pi'_{n3}(G).\mathrm{IHR}^I):\ (4.24), e_1 \leq x_i \leq e_3,\ i \in J_n.$$

Якщо $m \in J_{n-1}\backslash\{1\}$, то

$$(B_n(m).\mathrm{IHR2}):\ (4.23), x_i \le 1, \sum_{j\ne i} x_j \le m, i \in J_n;$$
$$(B_n(m).\mathrm{IHR3}):\ (4.23),\ -m \le (n-1)x_i - \sum_{j\ne i} x_j \le n-m,\ i \in J_n.$$

$\mathcal{C}_b$-багатогранники розміщень. – $E^n_{\eta k}(G)$:

Теорема 4.5. [370] Система нерівностей

$$\sum_{j\in\omega} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j,\ \omega \subseteq J_n; \tag{4.30}$$
$$\sum_{j\in\omega'} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega'|} g_{\eta-j+1},\ \omega' \subseteq J_n, \tag{4.31}$$

є $(\Pi^n_{\eta k}(G).\mathrm{HR})$.

Теорема 4.6. [369][3)] Незвідним Н-представленням багатогранника $\Pi^n_{\eta k}(G)$ (далі $(\Pi^n_{\eta k}(G).IHR)$) є система лінійних обмежень, що включає:

а) нерівності спілок (4.30) із номерами $i = |\omega| \in \overline{J}$, де

$$\overline{J} = J_n \backslash J, \tag{4.32}$$
$$J = \overline{i^{\min}, \eta_1} \cup \overline{\eta - \eta_k, i^{\max}}, \tag{4.33}$$
$$i^{\min} = \min\{2, \eta - \eta_k\},\ i^{\max} = \max\{\eta - 2, \eta_1\};$$

б) нерівності спілок (4.31) із номерами $i' = |\omega'| \in \overline{J'}$, де

$$\overline{J'} = J_n \backslash J', \tag{4.34}$$
$$J' = \overline{i'^{\min}, \eta_k} \cup \overline{\eta - \eta_1, i'^{\max}}, \tag{4.35}$$
$$i'^{\min} = \min\{2, \eta - \eta_1\},\ i'^{\max} = \max\{\eta - 2, \eta_k\}.$$

– Спеціальні класи $E^n_{\eta k}(G)$: незвідні Н-представлення цих множин представлені у [333], зокрема,

[3)]Ця теорема є уточненням теореми 3.1 [75, 297]

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_k^n\,(G)\,.\mathrm{IHR}): && \sum_{j\in\omega} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega|} e_j,\ \omega\subseteq J_n;\ \sum_{j\in\omega'} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega'|} e_{k-j+1},\ \omega'\subseteq J_n;\\
&(\Pi_k^n.\mathrm{IHR}): && \sum_{j\in\omega} x_j \ge C_{|\omega|}^2,\ \omega\subseteq J_n;\ \sum_{j\in\omega'} x_j \le \frac{k(2n-k+1)}{2},\ \omega'\subseteq J_n;\\
&(\overline{\Pi}_k^n.\mathrm{IHR}^I): && e_1\le x_i\le e_k,\ i\in J_n;\\
&(PB_n.\mathrm{IHR}^I): && 0\le x_i\le 1,\ i\in J_n; \qquad (4.36)\\
&(PB_n(m_1,n).\mathrm{IHR2}): && x_i\le 1,\ i\in J_n, \sum_{i=1}^{n} x_i\ge m_1 \text{ для } m_1\in J_{n-1}^0;\\
&(PB_n(n,m_2).\mathrm{IHR1}): && x_i\ge 0,\ i\in J_n, \sum_{i=1}^{n} x_i\le m_2 \text{ для } m_2\in J_n;\\
&(PB_n(n,m_2).\mathrm{IHR}^I): && 0\le x_i\le 1,\ i\in J_n, m_1\le \sum_{i=1}^{n} x_i\le m_2.
\end{aligned}
$$

4.3.3.2 $\mathcal{C}_b$-багатогранники парних перестановок та булевих векторів

– $\Pi_n^e\,(G)$:

Теорема 4.7. [258] ($\Pi_n^e\,(G)$.HR) має вигляд системи ($\Pi_n\,(G)$.HR), доповнену нерівностями:

$$
\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i} x_i \ge \Delta_G,\ \ \pi\in E_n^o(J_n), \tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{де } \Delta_G=\sum_{i=1}^{n} c_i e_i-\delta_G,\ \delta_G=(e_2-e_1)\,(e_n-e_{n-1})\,;\\
&c_1=e_n,\ c_2=e_{n-1},\ c_i=c_{i-1}-\frac{\delta_G}{e_i-e_{i-1}},\ \ i\in J_n\backslash J_2.
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Теорема 4.8. [333][4)], ($\Pi_n^e\,(G)$.IHR) включає рівняння (4.22) та нерівності (4.37). При $n\ge 5$ ($\Pi_n^e\,(G)$.IHR) також включає обмеження на змінні:

$$
e_1\le x_i\le e_n,\ i\in J_n. \tag{4.39}
$$

При $n\ \ge\ 6$ Н-представлення ($\Pi_n^e\,(G)$.IHR) також включає спілки ($\Pi_n\,(G)$.IHR) із номерами $i\in J_{n-3}\backslash J_2$.

[4)]теорема 4.8 є адаптацією до ($\Pi_n^e\,(G)$.IHR) результату, наведеного у [62]

– PB_n^e:

Теорема 4.9. [99] Багатогранник PB_n^e задається системою обмежень (4.36),

$$\sum_{i\in I} x_i \leq |I| - 1 + \sum_{i\notin I} x_i,\ I \subseteq J_n,\ \ |I| = 2l+1,\ l \in J^0_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}. \tag{4.40}$$

(далі $(PB_n^e.HR)$).

Теорема 4.10. [333] (PB_3^h.IHR) має вигляд (4.40). При $n \geq 4$ (PB_n^h.IHR) має вигляд (4.36), (4.40).

4.3.3.3 $\mathcal{C}_b$-багатогранники перестановок зі знаком

– $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$:

Сформулюємо у наших позначеннях, результат, наведений у [206].

Лема 4.2. Система обмежень

$$\sum_{i\in I'} x_i - \sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{i\in I'\cup J'} g_{n-i+1}, \forall I', J' \subseteq J_n : I' \cap J' = \emptyset, I' \cup J' \neq \emptyset, \tag{4.41}$$

є H-представленням $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$ (далі $(\Pi^{\pm}_{nk}(G).HR)$).

За величиною $i = |I' \cup J'|$, у ($\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.HR) можна виділити n-спілок нерівностей з номерами $i \in J_n$, частина яких можуть бути надлишковими.

Так, наприклад, відомо [265], що гіпероктаедр $CP_n(e_1)$ задається модульною нерівністю:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq e_1, \tag{4.42}$$

яку, розкриваючи знак модуля усіма можливими способами, є незвідною системою з 2^n лінійних нерівностей, що описує $CP_n(e_1)$.

У представленні (4.41) воно набуває вигляду:

$$\sum_{i\in I'} x_i - \sum_{j\in J'} x_j \leq \sum_{i\in I\cup J} g_i = e_1,\ \forall I', J' \subseteq J_n : I'\cap J' = \emptyset, I'\cup J' = J_n.$$

(далі $(CP_n(e_1).IHR)$). Як видно, $(CP_n(e_1)$.IHR) складається з єдиної спілки (4.41) із номером n. Решта обмежень $(\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.HR) у даному випадку є надлишковими.

Більш загальновживаною формою аналітичного опису гіпероктаедра $CP_n(e_1)$ є форма (4.42) [265]. Формально це кусково-лінійний аналітичний опис багатогранника $CP_n(e_1)$, який можна розуміти як компактний запис його Н-представлення. Далі таку компактну форму Н-представлення/незвідного Н-представлення багатогранника P позначатимемо $(P.HR^c)/(P.IHR^c)$ відповідно. У цих позначеннях, (4.42) – це $(CP_n(e_1)$.IHR^c). Надалі перевагу віддаватимемо саме цій формі, адже вона є більш наочною і дозволяє відобразити симетрію $\mathcal{C}_b$–багатогранників перестановок зі знаком відносно координатних площин.

Теорема 4.11. Багатогранник $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$ задається незвідною системою нерівностей (далі $(\Pi^{\pm}_{nk}(G).IHR^c)$:

$$\sum_{j\in\omega} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \in \overline{I}, \tag{4.43}$$

$$\overline{I} = J_n \backslash I,\ I = \overline{2, n_\kappa} \cup \overline{n-n_0, n-1}, \tag{4.44}$$

де κ визначено з (4.4), а знак модуля розкрито усіма можливими способами.

Доведення дивись у додатку В.3.

– Спеціальні класи $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$:

Так, для $CE_n(e_1)$ множина I є такою $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n-n_0, n-1} = \overline{2,1} \cup \overline{n-n+1, n-1} = \overline{1, n-1}$, а (4.43) набуває вигляду $(CE_n(e_1)$.IHR^c), зокрема, для одиничного гіпероктаедра $(PB^{\pm}_n(1).IHR^c)$ таке: $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1$.

Для решти спеціальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком $n_1 \geq 2$, тому множина (4.44) така – $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n-n_0, n-1} = \overline{2, n_1} \cup \overline{n_1, n-1} = \overline{2, n-1}$, отже, $(\Pi^{\pm}_{n2}(G)$.IHR^c) має вигляд:

$$|x_i| \le e_1, i \in J_n;\ \sum_{j=1}^{n} |x_j| \le n_1 e_1. \tag{4.45}$$

Зокрема, при $m \in J_{n-1}\backslash\{1\}$ $(PB_n^{\pm}(m).\mathrm{IHR}^c)$: $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le m,\ -\mathbf{e} \le x \le \mathbf{e}$.

Як видно з (4.42), (4.45), усі спеціальні багатогранники перестановок зі знаком є гіперкубами з симетрично усіченими кутами. $\Pi_{n3}^{\prime\pm I}(G)$ володіє цією ж властивістю, адже для нього (4.44) набуває вигляду:

$$I = \overline{2, n_2} \cup \overline{n - n_0, n - 1} = \overline{2, n_1} \cup \overline{n_2 + 1, n - 1} = \overline{2, n - 1}.$$

Звідси слідує, що $(\Pi_{n3}^{\prime\pm I}(G).\mathrm{IHR}^c)$ має форму:

$$-e_2 \le x_i \le e_2, i \in J_n;\ \sum_{j=1}^{n} |x_j| \le e_1 + n_2 e_2.$$

Для $\Pi_{nk}^{\pm II}(G)$ вірно – $I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n - 0, n - 1} = \overline{2, n_k}$, відповідно, набір гіперграней $\Pi_{nk}^{\pm II}(G)$ повністю визначається кратністю елемента e_k. Так, якщо $n_k = 1$, то $I = \varnothing$, тому $(\Pi_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{IHR}^c)$ має вигляд $\sum\limits_{j\in\omega} |x_j| \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \omega \subseteq J_n$. Зокрема,

$$(\Pi_n^{\pm II}(G).\mathrm{IHR}):\ \sum_{j\in\omega} |x_j| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} e_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n.$$

Якщо ж e_k – кратний елемент, $(\Pi_{nk}^{\pm II}(G).\mathrm{IHR}^c)$ набуває форму:

$$\sum_{j\in\omega} |x_j| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \in \{1\} \cup \overline{n_k + 1, n},$$

у т.ч. $(\Pi_{n2}^{\pm II}(G).\mathrm{IHR}^c)$ $\sum\limits_{j\in\omega} |x_j| \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \in \{1\} \cup \overline{n_2 + 1, n}$.

Наведемо ще одне формулювання теореми 4.11, що використовує лему 4.2 у формі наслідку з цієї теореми.

Наслідок 4.5. $(\Pi_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{IHR})$ має вигляд (4.41), де $|I' \cup J'| \in \overline{I}$, де $\overline{I}$ визначено з (4.44).

Зауваження 4.3. Певним недоліком H-представлень багатогранників класу $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ є те, що вони містять кількість обмежень, що експоненційно залежить від n. Між тим, для деяких із них існують P.EHRs з поліноміальною за n кількістю обмежень.

Так, незвідними EHR (an irredundant EHR, IEHR) трійкових багатогранників перестановок зі знаком є [369]:

а) при $m = 1$ –

$$(PB_n^{\pm}(1).\mathrm{IEHR}): \ y \geq \mathbf{0}, \ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq 1, \ -y_i \leq x_i \leq y_i, \ i \in J_n;$$

б) при $m \in J_{n-1} \setminus \{1\}$ –

$$(PB_n^{\pm}(m).\mathrm{IEHR}): \ y \geq \mathbf{0}, \ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq m, \ -1 \leq x_i \leq 1, \ -y_i \leq x_i \leq y_i, \ i \in J_n;$$

в) $(\Pi'^{\pm}_{n3}(G).\mathrm{IEHR})$ має вигляд:

$$y \geq \mathbf{0}, \ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq e_1 + n_2 e_2, \ -e_2 \leq x_i \leq e_2, \ -y_i \leq x_i \leq y_i, \ i \in J_n.$$

4.4 Поверхнева розташованість $\mathcal{C}_b$-множин

У даному пункті наводяться розв'язки Задачі 4.4 для $\mathcal{C}_b$–множин (4.5) та окремих їх класів. Як описані строго опуклі поверхні шукатимуться гіперсфера, суперсфера або еліпсоїд. Відповідно, для тих класів $\mathcal{C}_b$–множин, для яких буде встановлено поверхневу розташованість, автоматично буде доведено і існування їх поліедрально-поверхневого представлення за участі рівняння знайденої описаної поверхні. Таким чином, також буде розв'язано Задачу 4.5.

$\mathcal{C}_b$-множини перестановок: – $E_{nk}(G)$:

Теорема 4.12. Множина $E_{nk}(G)$ вписана у сім'ю строго опуклих суперсфер $S_{r(a,\alpha)}(a \cdot \mathbf{e})$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|^{\alpha} = r^{\alpha}(a, \alpha), \text{ раідуса } r(a, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} |g_i - a|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \qquad (4.46)$$

де $a \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in (1, \infty)$ – параметри.

Доведення дивись у додатку В.3.

$\forall\, a \in \mathbb{R}^1$, із (4.46) можна виділити сім'ю гладких поверхонь (4.46),

$$\alpha = 2\beta, \beta \in \mathbb{N}, \tag{4.47}$$

серед яких гіперсфера $S_{r(a,2)}(a \cdot \mathbf{e})$, біквадратна суперсфера $S_{r(a,4)}(a \cdot \mathbf{e})$ і т.д.

Теорема 4.13. [364] Множина $E_{nk}(G)$ вписана у сім'ю гіперсфер $S_{r(a)}(a \cdot \mathbf{e})$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = r^2(a), \text{ радіуса } r(a) = \sqrt{\Sigma_G^2 - 2a\Sigma_G^1 + na^2}, \tag{4.48}$$

де $a \in \mathbb{R}^1$ – параметр, Σ_G^1, Σ_G^2 знайдено за формулою (3.129).

У сім'ї (4.48):

$$S^0 : \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \Sigma_G^2; \tag{4.49}$$

$$S^{\min} : \quad \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{\Sigma_G^1}{n}\right)^2 = \Sigma_G^2 - \frac{(\Sigma_G^1)^2}{n}. \tag{4.50}$$

Теорема 4.12 встановлює, що $E_{nk}(G)$ – PSsS. Теорема 4.13 слідує з неї і встановлює, що $E_{nk}(G)$ – PSpS, та визначає її центр і радіус її як PSpS:

$$a^{min} = \overline{G}\mathbf{e}, \tag{4.51}$$
$$r^{min} = \left(\Sigma_G^2 - n\overline{G}^2\right)^{1/2},$$

де $\overline{G}$ знайдено за формулою (3.130).

Теорема 4.14. Множина $E_{nk}(G)$ є ELS.

Доведення дивись у додатку В.3. Зокрема, $\forall\lambda \in (0,1)$ рівняння

$$\lambda(\|x - a\mathbf{e}\|^2 - \|g - a\mathbf{e}\|^2) + (1 - \lambda)(x^T\mathbf{e} - g^T\mathbf{e})^2 = 0$$

задає описаний навколо $E_{nk}(G)$ еліпсоїд. Так при $\lambda = 0.5$ він матиме вигляд:

$$\|x - a\mathbf{e}\|^2 + (x^T\mathbf{e} - g^T\mathbf{e})^2 = \|g - a\mathbf{e}\|^2. \tag{4.52}$$

Наслідок 4.6. Множина $B_n(m)$ є ELS.

Доведення дивись у додатку В.3.

Спеціальні класи $E_{nk}(G)$: центри і радіуси деяких із них, як PSpSs, можна визначити за формулами [364, 369] –

$$E_n(G): \ \ a^{min} = \overline{\mathcal{A}}\mathbf{e},\ r^{min} = \left(\Sigma^2_{\mathcal{A}} - \overline{\mathcal{A}}^2\right)^{1/2}; \tag{4.53}$$

$$B_n(m): \ \ a^{min} = \frac{m}{n}\mathbf{e},\ r^{min} = \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}}, \tag{4.54}$$

причому для $E_n(J_n)$ $\overline{\mathcal{A}} = \frac{n+1}{2}$, $\Sigma^2_{\mathcal{A}} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$\mathcal{C}_b$-множини розміщень:

Теорема 4.15. Множина $E = E^n_{n+1,k}(G)$ є поверхнево-розташованою.

Доведення дивись у додатку В.3.

Зокрема, навколо E можна описати сім'ю строго опуклих при $\alpha \in (1, \infty)$ поверхонь вигляду (4.47),

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|^\alpha + \left| -\sum_{i=1}^{n+1} g_i + a + \sum_{i=1}^{n} x_i \right|^\alpha \underset{E^n_{n+1,k}(G)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} |g_i - a|^\alpha, \tag{4.55}$$

серед яких $\alpha = 2$ відповідатиме еліпсоїд. Це означає, що $E^n_{n+1,k}$ – ELS і має місце теорема.

Теорема 4.16. [369] Множина $E^n_{n+1,k}(G)$ вписана в еліпсоїд вигляду

$$x^T Ax + b^T x + c = 0, \tag{4.56}$$

$$\text{де } A = \mathbf{E} + \mathbf{I},\ b = -2\Sigma^1_G\mathbf{e},\ c = (\Sigma^1_G)^2 - \Sigma^2_G, \tag{4.57}$$

де $\mathbf{I}$ – матриця з одиниць порядку n.

Перейдемо до розгляду булевих $\mathcal{C}_b$–множин розміщень. Нехай m_1, m_2:

$$m_1, m_2 \in J^0_n, 0 \le m_1 < m_2 \le n.$$

Лема 4.3. $\mathcal{C}_b$–множина $B_n(m_1, m_2)$ вписана у сім'ю строго опуклих суперсфер $S_{r(0.5,\alpha)}\left(\frac{1}{2}\cdot\mathbf{e}\right)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\frac{1}{2}\right|^{\alpha}=r^{\alpha}(0.5,\alpha) \text{ раідуса } r(a,\alpha)=\frac{n^{1/\alpha}}{2}, \tag{4.58}$$

де $\alpha \in (1, \infty)$ – параметр.

Доведення дивись у додатку В.3.

Лема 4.4. $B_n(m_1, m_2)$ – PSpS, центр якої – точка (2.116), а радіус $\sqrt{n}/2$, отже,

$$a^{\min}=\frac{1}{2},\ r^{\min}=\frac{\sqrt{n}}{2}. \tag{4.59}$$

Доведення дивись у додатку В.3. Таким чином, для $B_n(m_1, m_2)$ гіперсфера $S^{\min}$ задається (2.117).

Лема 4.5. Множина $B_n(m_1, m_2)$ – PES і вписана у сім'ю еліпсоїдів вигляду (2.109), де $a=\dfrac{\mathbf{e}}{2}$, $A=A(b)=diag(d_1,...,d_n), d_i=\dfrac{1}{b_i}, i\in J_n$, що залежить від вектора параметрів $b\in\mathbb{R}^n_{\geq 0.5}$.

Доведення дивись у додатку В.3.

Об'єднаємо леми 4.3-4.5 в одну теорему.

Теорема 4.17. Множина $B_n(m_1, m_2)$ є повномірною PSpS, PSsS та PES.

$\mathcal{C}_b$-множини парних перестановок і булевих векторів:

Теорема 4.18. $E_n^e(G)$ є PSpS, PES, PSsS, а її центр та радіус як PSpS задається формулою (4.53).

Доведення дивись у додатку В.3.

Теорема 4.19. $B_n^h(G)$ є PSpS, PES, PSsS, а її центр та радіус як PSpS задається формулою (4.59).

Доведення дивись у додатку В.3.

$\mathcal{C}_b$-множини перестановок зі знаком: – $E_{nk}^{\pm}(G)$:

Формули (3.82), (3.83) вказують на поверхневу розташованість $E_{nk}^{\pm}(G)$, а саме має місце таке.

Теорема 4.20. Множина $E_{nk}^{\pm}(G)$ вписана у сім'ю строго опуклих суперсфер

$$S_{r(\alpha)}(\mathbf{0}):\ \sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\alpha}=r^{\alpha}(\alpha),\ \text{раідуса}\ r(\alpha)=(\sum_{i=1}^{n}|g_i|^{\alpha})^{1/\alpha},\ \ \alpha\in(1,\infty). \quad (4.60)$$

Доведення дивись у додатку В.3.

Наслідок 4.7. $E=E_{nk}^{\pm}(G)$ – PSpS, центр і радіус якої задаються формулою:

$$a^{\min}=\mathbf{0},\ r^{\min}=(\Sigma_G^2)^{1/2}. \quad (4.61)$$

Доведення дивись у додатку В.3.

Таким чином, для $E_{nk}^{\pm}(G)$,

$$S^0=S^{\min}:\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2=\Sigma_G^2. \quad (4.62)$$

– Спеціальні класи $E_{nk}^{\pm}(G)$ є PSpSs із центром $a^{min}=\mathbf{0}$ і радіусом r –

$$\begin{gathered}E_{nk}^{\pm I}(G):\ r=\left(\sum_{i=2}^{k}e_i^2\right)^{1/2};\ E_{n}^{\pm I}(G):\ r=\left(\sum_{i=2}^{n}e_i^2\right)^{1/2};\ E_{n}^{\pm II}(G):\ r=(\Sigma_{\mathcal{A}}^2)^{1/2};\\ E_{n2}^{\pm I}(G):\ r=e_1\cdot n_1^{1/2};\ E_{n2}^{\pm II}(G):\ r=(n_1e_1^2+n_2e_2^2)^{1/2};\\ E_{n2}^{\pm' I}(G):\ r=(e_2^2+n_3e_3^2)^{1/2},\ E_{n2}^{\pm' II}(G):\ r=(n_1e_1^2+e_2^2+n_3e_3^2)^{1/2};\\ B_n^{\pm}(m):\ r=\sqrt{m};\ CE_n(e_1):\ r=\sqrt{e_1}.\end{gathered} \quad (4.63)$$

4.5 Вершинна розташованість $\mathcal{C}_b$-множин

У цьому пункті будуть наведені розв'язки Задачі 4.6 для $\mathcal{C}_b$–багатогранників, що відповідають $\mathcal{C}_b$–множинам (4.5), з яких можна отримати розв'язки даної задачі для окремих класів цих множин, деякі з яких наведені у [186,

$312, 317, 369]$.

У п. 4.4 було показано, що, за виключенням класу $\mathcal{C}_b$–множин розміщень, усі $\mathcal{C}_b$–множини (3.14), (3.15) є SLSs, а, відповідно, і VLSs. Крім того, у класі $E^n_{\eta k}(G)$ було виділено такі SLSs як $E^n_{\eta 2}(G)$ (далі *Клас 1*) та $E^n_{n+1,k}(G)$ (далі *Клас 2*) і таким чином обґрунтовано їх вершинну розташованість.

Дослідимо, чи є інші VLSs у класі $E^n_{\eta k}(G)$.

Теорема 4.21. [370] Точка $x \in E^n_{\eta k}(G)$ є вершиною $\Pi^n_{\eta k}(G)$, тоді і тільки тоді, коли

$$\exists\ s, r \in J^0_n: \ s + r = n, \tag{4.64}$$

координати точки x утворюються перестановками чисел:

$$g_1, g_2, ..., g_s, g_{\eta-r+1}, ..., g_\eta. \tag{4.65}$$

Теорема 4.22. Серед $\mathcal{C}_b$-множини розміщень вершинно розташованими є множини Класів 1 і 2 і тільки вони.

Доведення дивись у додатку В.3.

4.6 Критерій суміжності вершин

Критерії суміжності вершин багатогранників, що відповідають $\mathcal{C}_b$–множинам (3.14), (3.15), детально розглянуті у [369] разом із питаннями про визначення степеня регулярності багатогранників та виділення $\mathcal{C}_b$–багатогранників, для яких ця величина визначена. Нижче наведено розв'язки Задачі 4.7 для $\mathcal{C}_b$–багатогранників (4.5).

$\mathcal{C}_b$-багатогранники перестановок.

Теорема 4.23. [364] Вершинами багатогранника $\Pi_{nk}(G)$, суміжними з вершиною x, є всі точки, отримані з x суміжною транспозицією (an adjacent transposition [264]), тобто перестановкою компонент твірної множини $\mathcal{A}$, рівних e_i, e_{i+1} (далі $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-*транспозицією*) ($i \in J_{k-1}$), і тільки вони.

Теорема 4.24. [370]

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}(G)) = \prod_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{4.66}$$

$\mathcal{C}_b$-багатогранники розміщень.

Теорема 4.25. [370] Якщо $x \in vert\, \Pi_{\eta k}^{n}(G)$, то усі суміжні до неї вершини отримуються одним із двох способів – суміжною $g_i \leftrightarrow g_{i+1}$-транспозицією для

$g_i \neq g_{i+1},\ i \in J_{s-1} \cup J_{\eta-1} \backslash J_{\eta-r}$ або заміною компоненти g_s на $g_{\eta-r}$ (далі $g_s \to$ $\to g_{\eta-r}$-*заміною*) для $g_s \neq g_{\eta-r}$ чи $g_{\eta-r+1} \to g_{s+1}$-заміною для $g_{\eta-r+1} \neq g_{s+1}$, де s, r визначаються з (4.64).

Лише вузький клас $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$ має регулярні вершини. Виділення класу таких багатогранників, разом із критеріями суміжності вершин для спеціальних класів $\mathcal{C}_b$–багатогранників розміщень, наведені у [369].

$\mathcal{C}_b$-багатогранники парних перестановок.

Твердження 4.1. [333] Вершинами багатогранника $\Pi_n^e(G)$, суміжними з

$x \in E_n^e(G)$, є усі е-конфігурації перестановок, отримані з x двома транспозиціями різних послідовних елементів $\mathcal{A}$.

Теорема 4.26. [333] Степінь регулярності вершин $\Pi_n^e(G)$ –

$$\mathcal{R}(\Pi_n^e(G)) = \frac{n^2 - n - 2}{2}. \tag{4.67}$$

Напівкуби: $\mathcal{C}_b$-багатогранники парних булевих векторів.

Теорема 4.27. [47] Вершинами PB_n^h, суміжними з $x \in B_n^h$, є $(0-1)$-вектори, що розташовані від x на відстані Хеммінга[5)] два:

[5)] $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, відстань Хеммінга (Hamming distance) $Hd(x,y)$ – кількість різних відповідних координат

$$\forall x, y \in B_n^h \quad x \underset{PB_n^h}{\leftrightarrow} y \Leftrightarrow Hd\,(x, y) = 2.$$

Інакше кажучи, $\forall x \in B_n^h$ точка $y \in N_{PB_n^h}(x)$ формується двома $0 \to 1$-замінами або двома $1 \to 0$-замінами чи $0 \leftrightarrow 1$-транспозицією.

Теорема 4.28. [369] Степінь регулярності вершин PB_n^h:

$$\mathcal{R}(PB_n^h) = C_n^2. \tag{4.68}$$

$\mathcal{C}_b$-багатогранники перестановок зі знаком.

Теорема 4.29. (Критерій суміжності і степінь регулярності вершин $P = \Pi_{nk}^{\pm}\,(G)$).

У Випадку 4.1, тобто якщо $E = E^{II}$, для довільної точки $x \in E$ суміжні до неї вершини багатогранника P утворюються з x заміною максимум двох координат x_i, x_j, абсолютні значення яких є послідовними елементами $\mathcal{A}$, значеннями $sgn\ x_i \cdot |x_j|$, $sgn\ x_j \cdot |x_i|$ (далі *Спосіб 4.1*) або зміною на протилежний знаку координати x, абсолютна величина якої e_1.

У Випадку 4.2, суміжні до $x \in E$ вершини P відрізняються від x не більше, ніж двома координатами, і формуються з неї або Способом 4.1, або транспозицією нульової координати та координати з абсолютним значенням e_1 із подальшою зміною знаку ненульової координати на протилежний.

Степінь вершини багатогранника P:

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm I}\,(G)) = 2n_0 n_1 + \sum_{i=1}^{k-2} n_i n_{i+1}, \tag{4.69}$$

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm II}\,(G)) = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{4.70}$$

Доведення дивись у додатку В.3.

---

x, y. Для $x, y \in B_n$ $Hd(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

4.7 Прості $\mathcal{C}_b$-багатогранники

Наведемо розв'язки Задачі 4.8 для $\mathcal{C}_b$–багатогранників, що відповідають $\mathcal{C}_b$–множинам (4.5), а також деяких їх окремих класів.

Прості багатогранники класу $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.30. [369] Загальний багатогранник перестановок $\Pi_{nk}(G)$ простий тоді і тільки тоді, коли первинна специфікація мультимножини, що його індукує, задовольняє умову:

$$n_i \cdot n_{i+1} = \max\{n_i, n_{i+1}\},\ i \in J_{k-1}. \tag{4.71}$$

Зауважимо, що умова (4.71) еквівалентна такій:

$$\min\{n_i, n_{i+1}\} = 1,\ i \in J_{k-1}. \tag{4.72}$$

Зауваження 4.4. Формула (4.72) показує, що, серед розглянутих нами спеціальних класів многранників $\mathcal{C}$-множин перестановок, простими є $\Pi_n(G)$, $PB_n(1)$, $PB_n(n-1)$ та $\Pi'_{n3}(G)$.

Прості багатогранники класу $\Pi^n_{\eta k}(G)$

Твердження 4.2. [369] (достатня умова простоти $\Pi^n_{\eta k}(G)$) Якщо $\mathcal{C}_b$–многогранник розміщень належить до одного з нижченаведених класів, він простий: а) $P = \Pi^n_k(G)$; б) $P = \overline{\Pi}^n_k(G)$; в) $P = \Pi^n_{n+1k}(G)$ такий, що $\eta_i \cdot \eta_{i+1} = \max\{\eta_i, \eta_{i+1}\}$, $i \in J_{k-1}$; г) $P = \Pi^n_{2n-2,2}(\{e_1^{n-1}, e_2^{n-1}\})$; д) $P = \Pi^n_{2n-1,2}(\{e_1^{n-1}, e_2^{n}\})$; е) $P = \Pi^n_{2n-1,2}(\{e_1^{n}, e_2^{n-1}\})$. Більш того, для спеціальних $\mathcal{C}_b$–багатогранників розміщень ці умови є необхідними і достатніми.

Наслідок 4.8. У класі спеціальних багатогранників перестановок простими є $\Pi^n_{n+1,2}(\{e_1^n, e_2\})$, $\Pi^n_{n+1,2}(\{e_1, e_2^n\})$, $\Pi^n_{2n-2,2}(\{e_1^{n-1}, e_2^{n-1}\})$, $\Pi^n_{2n-1,2}(\{e_1^{n-1}, e_2^{n}\})$,

$\Pi^n_{2n-1,2}(\{e^n_1, e^{n-1}_2\})$, $\overline{\Pi}^n_2(\{e^n_1, e^n_2\})$ і тільки вони.

4.7.0.4 Прості багатогранники класу $\Pi^e_n(G)$, PB^h_n

Наслідок 4.9. (з теореми 4.26) У класі $\Pi^e_n(G)$ простим є $\Pi^e_3(G)$ і тільки він.

Наслідок 4.10. (з теореми 4.28) У класі PB^h_n простим є PB^h_2 і тільки він.

4.7.0.5 Прості багатогранники класу $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$

Наслідок 4.11. (із теореми 4.30) Загальний багатогранник перестановок зі знаком $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$ простий тоді і тільки тоді, коли первинна специфікація мультимножини, що породжує $E^{\pm}_{nk}(G)$, задовольняє умови

$$n_0 \in \{0, 1\},\ n_1 = 1,\ \min\{n_i, n_{i+1}\} = 1,\ i \in J_{\kappa-1}\backslash\{1\}, \tag{4.73}$$

де κ визначено з (4.4).

Доведення дивись у додатку В.3.

Так, простими будуть усі багатогранники перестановок зі знаком без повторень $\Pi^{\pm}_n(G)$, а також $\Pi^{\pm'I}_{n3}(\{e_0, e_1, e^{n-2}_2)$, $\Pi^{\pm'II}_{n3}(\{e_1, e_2, e^{n-2}_3)$.

4.8 Центральна симетрія $\mathcal{C}_b$-множин

У даному пункті будуть наведені розв'язки Задачі 4.9 для $\mathcal{C}_b$–множин (4.5) та деяких їх окремих класів.

Теорема 4.31. [369] Множина $E_{nk}(G)$ центрально-симетрична тоді і тільки тоді, коли для G виконана умова:

$$\frac{g_i + g_{n-i+1}}{2} = \overline{G},\ i \in J_{[\frac{n+1}{2}]}, \tag{4.74}$$

де $\overline{G}$ знайдено за формулою (3.130). Центром симетрії є точка (4.51) – центр $S^{\min}$.

Наслідок 4.12. [369] 1) Множина $E_n(G)$ центрально-симетрична тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ така, що:

$$\frac{e_i + e_{n-i+1}}{2} = \overline{\mathcal{A}},\ i \in J_{[\frac{n+1}{2}]}. \tag{4.75}$$

Якщо (4.75) виконана, центром симетрії $E_n(G)$ є точка (4.53).

2) Множина $B_n(m)$ центрально-симетрична тоді і тільки тоді, коли n – парне і $m = \frac{n}{2}$, і у такому випадку має центр симетрії у точці (2.116).

Теорема 4.32. [369] Множина $E^n_{\eta k}(G)$ центрально симетрична в тому і тільки в тому випадку, якщо

$$g_i = g_{\eta-i+1},\ i \in J_{\left[\frac{\eta+1}{2}\right]}. \tag{4.76}$$

При цьому центром симетрії $E^n_{\eta k}(G)$ є точка (4.51).

Твердження 4.3. Множина $E = E^{\pm}_{nk}(G)$ має центр симетрії у початку координат.

Дійсно, оскільки E – $\mathcal{C}_b$–множина перестановок зі знаком, $\forall x \in E$ виконано $y = -x \in E$.

Теорема 4.33. Множина $E = E^e_n(G)$ центрально симетрична тоді і тільки тоді, коли $n(n-1)$ – кратне чотирьом, а E.GS задовольняє умову (4.75). При цьому центром симетрії є точка (4.53).

Доведення дивись у додатку B.3.

Твердження 4.4. [333] Множина B^h_n центрально-симетрична тоді і тільки тоді, коли n парне. У такому випадку центром її симетрії є точка (2.116).

Зауваження 4.5. Разом із центрально симетричними $\mathcal{C}_b$–множинами виділяються деякі класи центрально симетричних $\mathcal{C}_b$–багатогранників, а це, у свою чергу, дозволяє говорити про можливість представлення цих багатогранників кулями у деякому нормованому/напівнормованому просторі $(X, \|.\|_E)$.

Нехай E – центрально симетрична $\mathcal{C}_b$–множина. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що центр її симетрії $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

У такому випадку для E, що є $\mathcal{C}_b$–множиною перестановок чи розміщень, $\|.\|_E$ буде суперпозицією норм та напівнорм:

$$\|x\|_{\{\nu\}} = \max_{\omega \subseteq J_n, |\omega|=\nu} |\sum_{j\in\omega} x_j|, \ \nu \in J_n; \tag{4.77}$$

для $\mathcal{C}_b$–багатогранників перестановок зі знаком – суперпозицією норм:

$$\|x\|_{[\nu]} = \max_{\omega \subseteq J_n, |\omega|=\nu} \sum_{j\in\omega} |x_j|, \ \nu \in J_n; \tag{4.78}$$

для $\mathcal{C}_b$–багатогранників парних перестановок – суперпозицією (4.77) та норми

$$\|x\|_* = \max_{\pi \in E_n^o(J_n)} |\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i} x_i|,$$

де c_{π_i} визначено за (4.38) для $i \in J_n$.

Твердження 4.5. [369] $\Pi_{nk}^{\pm}(G) = \{x : \|x\|_{E_{nk}^{\pm}(G)} \leq 1\}$, де $\|x\|_{E_{nk}^{\pm}(G)} = \max\limits_{\nu \in J_n} \frac{\|x\|_{[\nu]}}{\Sigma_{G,\nu}^{max}}$, де $\Sigma_{G,\nu}^{max} = \sum\limits_{i=1}^{\nu} g_{n-i+1}$, $\|x\|_{[\nu]}$ – норма (4.78).

Звідси слідує, що $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ має центр симетрії у початку координат і є кулею у нормованому просторі, заданому нормою $\|x\|_{E_{nk}^{\pm}(G)}$.

Відповідно, і $E_{nk}^{\pm}(G)$ є центрально симетричною множиною як множина вершин такого багатогранника.

4.9 Рівневість $\mathcal{C}_b$-множин

Задачу 4.10 для $\mathcal{C}_b$–множин (4.5) та їх окремих класів стосовно рівневості E у цілому за координатами детально досліджено у монографії [369] і наведено значення чи оцінки для $lev(E)$, $lev'(E)$.

У даному пункті, ми лише сформулюємо у вигляді теореми наведені там результати, що стосуються дворівневих $\mathcal{C}_b$–множин серед (2.87), (2.88).

Теорема 4.34. Серед $\mathcal{C}_b$–множин перестановок дворівневими є клас $E_{n2}(G)$, зокрема $B_n(m)$. Серед $\mathcal{C}_b$–множин розміщень – 2LSs-класи $\overline{E}_{n2}(G)$ та $\overline{E}_{n+1,2}(G)$ і лише вони. Серед $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком дворівневими є лише $CE_n(e_1)$, зокрема $B_n^{\pm}(1)$. E_3^e – єдина дворівнева $\mathcal{C}_b$–множина парних перестановок. Дворівневі $\mathcal{C}_b$–множини парних булевих векторів – це B_2^e та B_3^e – і лише вони.

Теорема 4.35. Якщо $n \geq 2$, то

$$lev(B_n^{\pm}(m)) = m + 1. \qquad (4.79)$$

Доведення дивись у додатку В.3.

4.10 Комбінаторно ізоморфні $\mathcal{C}_b$-множини

Задачу 4.10 частково досліджено у п. 3.1. Тут лише зауважимо, що для вершинно розташованих $\mathcal{C}_b$–множин дана задача виділення комбінаторно ізоморфних множин, відповідно, розбиття класів $\mathcal{C}_b$–множин на класи еквівалентності, еквівалентна до задачі виділення комбінаторно еквівалентних $\mathcal{C}_b$–багатогранників.

Для множин, що не є VLSs, таких як $E_{\eta k}^n(G)$, $2 < k$, $\eta > n + 1$, також потрібне забезпечення бієкції між парами $\mathcal{C}_b$–множин з одного класу еквівалентності.

Для $\mathcal{C}_b$–множин перестановок розв'язанню Задачі 4.11, а саме виділенню комбінаторно еквівалентних багатогранників, присвячено роботи [258, 325, 369], для $\mathcal{C}_b$–множин розміщень це питання висвітлювалося у публікаціях [258, 325, 369]. Зокрема, має місце $\Pi_{n+1,k}(G) \cong \Pi^n_{n+1,k}(G)$, $\Pi^n_k(G) \cong \Pi^n_{n+1}(G)$.

Перше з них, у сукупності із вершинною розташованістю $E_{n+1k}(G)$, означає, що $E_{n+1,k}(G) \simeq E^n_{n+1k}(G)$, друге – що при виділенні класів комбінаторної еквівалентності серед $\mathcal{C}_b$–багатогранників розміщень достатньо обмежитися $\Pi_{n+1,k}(G) \cong \Pi^n_{n+1k}(G)$.

Сім'я $\{B^h_n, n \in \mathbb{N}\}$ розбивається на класи еквівалентності стосовно їх комбінаторної ізоморфності за величиною $d_E = n$, у кожному з яких в точності одна $\mathcal{C}_b$–множина.

Що стосується $\mathcal{C}_b$–множин парних перестановок, то тут, очевидно, вірні співвідношення:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, G, G' : |S(G)| = |S(G')| \quad E^e_n(G) \simeq E^e_n(G'), E^e_n(G) \simeq E^o_n(G).$$

Звідси слідує, що сім'я $\{E^e_n(G),\ G : |S(G)| = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ розбивається на класи еквівалентності за величиною $d_E = n - 1$.

Перейдемо до розгляду $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком. Переформулюємо результат, наведений у [369], у термінах комбінаторно ізоморфних $\mathcal{C}_b$–множин.

Теорема 4.36. [317] Для фіксованого n кількість $M_n(E^{\pm}_{nk}(G))$ класів комбінаторної ізоморфності $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком визначається за формулою:

$$M_n(E^{\pm}_{nk}(G)) = 2^n - 1,$$

у тому числі першого та другого типу:

$$M_n(E^{\pm I}_{nk}(G)) = 2^{n-1} - 1,\ M_n(E^{\pm II}_{nk}(G)) = 2^{n-1}.$$

4.11 Властивості базових полікомбінаторних множин

У монографії [369] представлені розв'язки Задач 4.1-4.10 для $\mathcal{C}$–множин вигляду (3.10), що породжуються $\mathcal{C}$–множинами $E^l, l \in J_L$, для яких ці задачі розв'язані.

У даному розділі наведено розв'язки Задач 4.1-4.10 для $\mathcal{C}_b$–множин класів (3.14), (3.15).

З іншого боку, згідно з тверд. 3.6, базові полікомбінаторні множини, породжені множинами цих класів, можуть бути представлені у формі (3.10) після відповідної перенумерації координат. Звідси слідує, що для усіх базових полікомбінаторних множин, що породжені множинами (3.14), (3.15), розв'язки Задач 4.1-4.10 також знайдено. Зокрема, будуть одержані розв'язки цих задач для загальних полікомбінаторних $\mathcal{C}_b$–множин перестановок та розміщень, деякі з яких відомі у літературі [288, 291, 295, 297, 363].

4.12 Інші властивості $\mathcal{C}_b$-множин

Встановимо зв'язок між $E^{\pm}_{nk}(G)$ із іншими $\mathcal{C}_b$–множинами, а також між $E^{\pm I}_{nk'}(G)$ та $E^{\pm II}_{nk}(G)$.

Твердження 4.6.

$$E^{\pm}_{nk}(G) = E_{nk}(G) \circ B'_n.$$

Отже, існує зв'язок не лише між $\mathcal{C}_b$–множинами перестановок зі знаком та перестановок, але і між $\mathcal{C}_b$–множинами перестановок зі знаком та булевими $\mathcal{C}_b$–множинами.

Твердження 4.7.

$$E^{\pm II}_{nk}(G) = E^{\pm I}_{nk}(G') + e_1 B'_n,$$

де $G' \subset \mathbb{R}^1_+$, $S(G') = \{e_i'\}_{i \in J_k}$, $e_i' = e_i - e_1$ $(i \in J_k)$, $[G'] = [G]$.

Цим твердженням встановлюється зв'язок між $E^{\pm I}_{nk}(G)$ та $E^{\pm II}_{nk}(G)$.

Зауваження 4.6. Для $\mathcal{C}_b$–множин перестановок, розміщень та перестановок зі знаком та довільної $x \in \mathbb{R}^n$ ефективно може бути також розв'язана задача перевірки умови $x \in P$ (далі *Задача 4.15*).

Так, для $E \in \{E_{nk}(G), E^n_{\eta k}(G)\}$ її розв'язання зводиться до упорядковування координат x за неспаданням і перевірки у одержаній допоміжній точці y виконання одного обмеження з кожної спілки (P.IHR) [370]. Зокрема, для B_n, ця задача зводиться до перевірки виконання обмежень на змінні у точці x. Для $E = E^{\pm}_{nk}(G)$, точка y будується упорядкуванням модулів координат x за неспаданням, після чого Задача 4.15 зводиться до перевірки виконання єдиного обмеження з кожної спілки ($\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.IHR) [317].

Виходячи з вигляду ($\Pi^e_n(G)$.IHR) та (Π^h_n.IHR), Задача 4.15 на $E^e_n(G)$, B^h_n зводиться до її розв'язання для $E_n(G)$, B_n і перевірки одного обмеження з (4.37) або (4.40) відповідно у допоміжній точці y, одержаній у ході процесу.

4.13 $\mathcal{C}_b$-графи

Деякі з Задач 4.1-4.11 характеризують основні властивості $\mathcal{C}_b$–графів, що відповідають (3.14), (3.15).

Так, розв'язання Задачі 4.6 дозволяє сформувати множину вершин $\mathbf{V}$ графу $\mathcal{G}$, зокрема, для VLSs встановити збіжність $\mathbf{V}$ з E, а також визначити його порядок $|\mathbf{V}|$. Розв'язок Задачі 4.7 допомагає у формуванні множини $\mathcal{E}$ ребер $\mathcal{G}$ та визначенні його розміру $|\mathcal{E}|$.

Виділення $\mathcal{C}_b$–багатогранників, для яких визначено $\mathcal{R}(P)$, дозволяє водночас говорити про виділення відповідних регулярних $\mathcal{C}_b$–графів, а простих $\mathcal{C}_b$–багатогранників – простих $\mathcal{C}_b$–графів.

Нарешті, у ході розв'язання Задачі 4.11, одночасно з встановленням комбінаторної еквівалентності $\mathcal{C}_b$–багатогранників, виділяються також ізоморфні $\mathcal{C}_b$–графи.

Ці та багато інших задач розглядаються в теорії графів [13, 89], застосовуючи, як правило, до їх розв'язання теоретико-графові методи (a graph-theoretic way). Серед них перевірка наявності гамільтонових циклу та шляху, Ейлерова шляху, пошук хроматичного та клікового чисел графу, його діаметру, максимальної незалежної множини тощо.

Для дослідження $\mathcal{C}_b$–графів, як ці, так і поліедральні методи є корисними, оскільки вони належать до геометричних графів. Деякі з $\mathcal{C}_b$–графів відомі у літературі і досліджені у більшій чи меншій мірі [5, 108, 258].

Так, про граф $\mathcal{G}_n(J_n)$ багатогранника перестановок без повторень відомо, що він є графом Келі, а саме $\mathcal{G}_n(J_n) = Cayley(\mathbb{S}_n; \{f(12); (23); ...; (n-1\ n)\})$. $\mathcal{G}_n(J_n)$ є гамільтоновим, а гамільтонів цикл може бути найдений у ньому за допомогою алгоритму Джонсона-Троттера (the Steinhaus-Johnson-Trotter algorithm) генерації множини перестановок. Його діаметр $diam(\mathcal{G}_n(J_n)) = C_n^2$.

Серед $\mathcal{C}_b$–графів перестановок відомий також $\mathcal{G}_n(m) = J(n, k)$ – граф Джонсона (Johnson graph, граф гіперсимплексу). $diam(\mathcal{G}_n(J_n)) = \min\{m, n-m\}$, а сам він є гамільтоновим [5].

Найбільш вивченим є граф гіперкуба (a hypercube graph) $\mathcal{G}_n = Q_n$ [108]. Так, діаметр $diam(\mathcal{G}_n) = n$, він є дводольним, відповідно, його хроматичне число – два. Крім того, він є простим, гамільтоновим, а гамільтонів цикл у ньому може бути знайдений за допомогою коду Грея (the Gray code) [129,136].

Усі ці $\mathcal{C}_b$–графи є регулярними, а їх порядок і розмір легко можуть бути знайдені на базі наведених вище результатів даного розділу.

Що стосується решти зазначених $\mathcal{C}_b$–графів, то, ґрунтуючись на [325, 369] та пунктах 4.2, 4.5, 4.6, можна сказати, що усі вони регулярні, за виключенням деяких $\mathcal{G}^n_{\eta k}(G)$, $\eta > n+1$. Серед $\mathcal{G}^n_{\eta k}(G)$, $diam(\mathcal{G}^n_{\eta k}(G)) \in [1, C^2_{n+1}]$, причому нижня межа досягається на n-симплексах $\mathcal{G}_n(0, 1), \mathcal{G}_n(n-1, n)$, а верхня – на $\mathcal{G}^n_k(G)$.

Серед $\mathcal{G}_{nk}(G)$, $diam(\mathcal{G}^n_{\eta k}(G)) \in [1, C^2_n]$, нижня межа досягається на $n-1$-симплексах $\mathcal{G}_n(1), \mathcal{G}_n(n-1)$, верхня – на $\mathcal{G}_n(G)$. Деякі інші властивості графів $\mathcal{G}_{nk}(G)$, $\mathcal{G}^n_{\eta k}(G)$ досліджено у [312, 325].

4.14 Екстремальні властивості функцій на $\mathcal{C}_b$-множинах

У цьому пункті наведемо: а) розв'язки Задачі 4.12 для $\mathcal{C}_b$–множин (4.5) та їх окремих класів; б) розв'язки Задачі 4.13 для поліедрально-сферичних множин серед них та множини $\overline{E}^n_k(G)$; в) у рамках дослідження Задачі 4.14 – нижні оцінки функції, заданої на $\mathcal{C}$–множині, для різних класів функцій.

*Задача 4.12.*Нехай

$$\begin{gathered}\{i_j\}_{j\in J_n}:\ \{i_j\}_{j\in J_n}{=}J_n,\, c_{i_j}\ge c_{i_{j+1}},\ j\in J_{n-1},\\ s\in J^0_n:\ c_{i_s}\ge 0,\ c_{i_{s+1}}<0,\end{gathered} \tag{4.80}$$

де $i_0 = 0, i_{n+1} = n+1,\ c_0 = M,\ c_{n+1} = -M,\ M > 0$ – константа.

Теорема 4.37. [236]

$$x^{lin,E_{nk}(G)}_{i_j} = g_j,\ j \in J_n;\ z^{lin,E_{nk}(G)} = \sum_{j=1}^{n} c_{i_j} g_j. \tag{4.81}$$

Наслідок 4.13.

$$\begin{gathered}x^{lin,E_n(G)}_{i_j} = e_j,\ j \in J_n;\ z^{lin,E_{nk}(G)} = \sum_{j=1}^{n} c_{i_j} e_j;\\ x^{lin,B_n(m)}_{i_j} = 0,\ j \in J_{n-m};\ x^{lin,B_n(m)}_{i_j} = 1,\ j \in J_n \backslash J_{n-m},\\ z^{lin,B_n(m)} = \sum_{j=n-m+1}^{n} c_{i_j}.\end{gathered}$$

Теорема 4.38. [370]

$$x_{i_j}^{lin,E_{\eta k}^n(G)} = g_j,\ j \in J_s; x_{i_{n-j+1}}^{lin,E_{\eta k}^n(G)} = g_{\eta-j+1},\ j \in J_{n-s};$$
$$z^{lin,E_{\eta k}^n(G)} = \sum_{j=1}^{s} c_{i_j} g_j + \sum_{j=1}^{n-s} c_{i_{n-j+1}} g_{\eta-j+1}. \tag{4.82}$$

Наслідок 4.14.

$$x_{i_j}^{lin,E_k^n(G)} = e_j,\ j \in J_s; x_{i_{n-j+1}}^{lin,E_k^n(G)} = e_{k-j+1},\ j \in J_{n-s};$$
$$z^{lin,E_k^n(G)} = \sum_{j=1}^{s} c_{i_j} e_j + \sum_{j=1}^{n-s} c_{i_{n-j+1}} e_{k-j+1}; \tag{4.83}$$

$$x_i^{lin,\overline{E}_k^n} = \begin{cases} e_1, \text{ якщо } c_i \ge 0, \\ e_k, \text{ якщо } c_i < 0, \end{cases} \quad (i \in J_n),$$
$$z^{lin,\overline{E}_k^n} = e_1 \sum_{i \in J_n : c_i > 0} c_i + e_k \sum_{i \in J_n : c_i < 0} c_i. \tag{4.84}$$

Нехай $E = B_n(m_1, m_2)$, $m_1' = \min\{n - m_1, s\}$, $m_2' = \min\{m_2, n - s\}$. На E буде виконана принаймні одна з умов:

$$m_1' = n - m_1, \tag{4.85}$$

$$m_2' = m_2, \tag{4.86}$$

що дозволяє записати розв'язок лінійної задачі на E у такій формі.

Наслідок 4.15. Якщо для $B_n(m_1, m_2)$ виконана: а) умова (4.85), то

$$x_{i_j}^{lin,B_n(m_1,m_2)} = 0,\ j \in J_{n-m_2'};\ x_{i_j}^{lin,(m_1,m_2)} = 1,\ j \in J_n \backslash J_{n-m_2'},$$
$$z^{lin,B_n(m_1,m_2)} = \sum_{j=n-m_2'+1}^{n} c_{i_j};$$

б) умова (4.86), то

$$x_{i_j}^{lin,B_n(m_1,m_2)} = 0,\ j \in J_{m_1'};\ x_{i_j}^{lin,(m_1,m_2)} = 1,\ j \in J_n \backslash J_{m_1'},$$
$$z^{lin,B_n(m_1,m_2)} = \sum_{j=m_1'+1}^{n} c_{i_j};$$

Наслідок 4.16.

$$x_i^{lin,B_n}=\begin{cases}0, \text{ якщо } c_i\ge 0,\\ 1, \text{ якщо } c_i<0,\end{cases}\quad (i\in J_n),\ z^{lin,B_n}=\sum_{i\in J_n:c_i<0} c_i.$$

Таким чином, $E_{nk}(G)$, $E_{\eta k}^n(G)$ – класи WDSs. $MLP(E,c)$ для них полягає в упорядкуванні (4.80) координат вектору c, порівнянні їх із нулем та присвоюванні (4.82) або (4.83). Зокрема, для $\overline{E}_n^k(G)$ упорядкування не потрібно, а присвоювання відбувається згідно з (4.84).

Теорема 4.39. Множини $E_n^e(G)$, B_n^h – WDSs.

Доведення дивись у додатку В.3.

Теорема 4.40. [317, 343]

$$x_{i_j}^{lin,E_{nk}^{\pm}(G)}=sgn\left(c_{i_j}\right)\cdot g_j,\ j\in J_n;\ z^{lin,E_{nk}^{\pm}(G)}=\sum_{j=1}^{n}|c_{i_j}|g_j,$$
$$\text{де } \{i_j\}_{j\in J_n}=J_n,\ \left|c_{i_j}\right|\ge\left|c_{i_{j+1}}\right|,\ j\in J_{n-1}.$$

Наслідок 4.17.

$$x_{i_j}^{lin,B_n^{\pm}(m)}=\begin{cases}0, \text{ якщо } j\in J_{n-m},\\ 1, \text{ якщо } j\ge n-m, c_{i_j}<0,\\ -1, \text{ якщо } j\ge n-m, c_{i_j}\ge 0;\end{cases}\qquad z^{lin,B_n^{\pm}(m)}=\sum_{j=n-m+1}^{n}|c_{i_j}|.$$

Теорема 4.41. Якщо $E^l\subset\mathbb{R}^{n_l}$, $l\in J_L$, – WDSs, то їх декартовий добуток (3.10) – є також WDS за умови, що $L>1$ – фіксоване.

Доведення дивись у додатку В.3.

Наслідок 4.18. Полікомбінаторні $\mathcal{C}_b$–множини, що породжуються фіксованою кількістю множин сімей (3.14), (3.15), є WDSs.

Зауваження 4.7. Наслідок 4.18 у сукупності із теоремами 4.37-4.40

узагальнює результати [288, 363] з загальних $\mathcal{C}_b$–множин поліперестановок і полірозміщень на інші полікомбінаторні множни, породжені (3.14), (3.15).

Задача 4.13. Вилучимо з (3.15) $\mathcal{C}_b$–множини розміщень $E^n_{\eta_k}(G)$ для $k > 2$ і об'єднаємо з (3.14) у єдину сім'ю (далі *Сім'я 4.1*).

Теорема 4.42. Для множини E з Сім'ї 4.1 задача пошуку $y^* = Pr_E x$ для $x \in E$ еквівалентна розв'язанню $LP(E, a - x)$, де a – центр описаної навколо E гіперсфери, і розв'язується за поліноміальний час.

Доведення дивись у додатку B.3.

Окрім $E^n_{\eta k}(G)$, Задача 4.13 також може бути ефективно розв'язана для ще одного класу $\mathcal{C}_b$–множин розміщень.

Наслідок 4.19. [379] Для $E = \overline{E}^k_n(G)$, $y^* = Pr_E x$ може бути знайдена за формулою:

$$y^*_i = \begin{cases} e_1, \text{ якщо } x_i \le e_1, \\ e_k, \text{ якщо } x_i \ge e_k, \\ e_j, \text{ якщо } e_1 < x_i < e_k, \end{cases} \qquad (i \in J_n) \tag{4.87}$$
$$\text{де } j \in J_k : |e_j - x_i| \le \min_{k \ne j} |e_k - x_i|.$$

Ясно, що пошук (4.87) потребує виконання поліноміального за n числа операцій.

Доповнимо Сім'ю 4.1 класом $\overline{E}^k_n(G)$ і сформуємо *Сім'ю 4.2.*

Наслідок 4.20. Для полікомбінаторних $\mathcal{C}_b$–множин, що породжені множинами Сім'ї 4.2, для $x \in \mathbb{R}^n$ Задача 4.13 розв'язується за поліноміальний час.

Доведення дивись у додатку B.3.

Зауваження 4.8. У роботах [275, 277, 279, 280] показано, що на деяких векторних $\mathcal{C}_b$–множинах лінійна задача також розв'язується ефективно.

Так, наприклад, для множини $E = E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$ її розв'язання зводиться до лексикографічного упорядкування векторів $\mathbf{A}$, яке є узагальненням упорядкувань (4.80), (4.81), та подальшого присвоювання, що здійснюється за поліноміальний час. Отже, E – WDS. Крім того, E – PSpS як підмножина $\mathcal{C}_b$–множини N-перестановок, що індукована G^N.

Зокрема, звідси слідує, що булеві векторні $\mathcal{C}_b$–множини, які пов'язані із $\mathcal{M}_b$-множинами перестановок, є WDSs та PSpSs. Серед множин цього класу, про $\mathcal{C}_b$–множину матриць перестановок $\mathcal{E}_n$ відомо, що вона є WDS [50, 186] та PSpS [50, 186, 329].

Те саме тепер можна сказати про весь клас $\mathcal{E}_{nk}(G)$, зокрема, про $\mathcal{C}_b$–множину матриць перестановок з повтореннями.

*Задача 4.14.*Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^1$, $K \supseteq E$ – опуклий компакт, $\Phi : K \to \mathbb{R}^1$ – опукле продовження φ на K, то мають місце такі теореми, що узагальнюють теореми 1.1-1.5 на випадок довільної функції $\varphi(x)$, а також леми 1, 2 [251] з $K = P$ на компакт $K \supseteq P$.

Теорема 4.43. $\forall\, x \in K$

$$\min_{y\in E} \varphi\ (y) \geq \Phi\ (x) - (\bar{\nabla}\Phi\,(x), x) + \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_i\Phi\,(x) y_i, \tag{4.88}$$

де $\bar{\nabla}\Phi\,(x) = (\bar{\nabla}_i\Phi\,(x))_{i\in J_n}$ – субградієнт функції $\Phi\,(x)$ у точці x.

Ця теорема слідує з теореми 1.5 та властивості продовження функції з E, що $\forall x \in E\ \varphi(x) = \Phi(x)$.

Наслідок 4.21. Якщо $\Phi(x)$ – диференційовна на K, то $\forall\, x \in K$

$$\min_{y\in E} \varphi\ (y) \geq \Phi\ (x) - (\nabla\Phi\,(x), x) + \min_{y\in E} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial\, x_i} y_i. \tag{4.89}$$

Теорема 4.44. Якщо $\Phi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на K, то

$$\min_{x\in E}\varphi(x)\geq\Phi(y^*)+\rho\min_{x\in E}\|x-y^*\|^2, \tag{4.90}$$

де $y^*=\arg\min_{y\in K}\Phi\ (y)$.

Зауважимо, що, оскільки умова $\Phi(x)\underset{x\in K}{\leq}\varphi(x)$ не обов'язково виконана, оцінка (4.90) може бути покращенням (1.39) при відповідному виборі $\Phi(x)$.

Теорема 4.45. Якщо $\Phi\,(x)$ сильно опукла з параметром $\rho>0$ на K, то $\forall x\in K$

$$\min_{y\in E}\varphi(y)\geq\Phi(x)-\frac{1}{4\rho}\left\|\overline{\nabla}\Phi(x)\right\|^2+\rho\min_{y\in E}\left\|y-\ x+\frac{1}{2\rho}\overline{\nabla}\Phi(x)\right\|^2. \tag{4.91}$$

Наслідок 4.22. Якщо $\Phi\,(x)$ – диференційовна та сильно опукла з параметром $\rho>0$ на K, то $\forall x\in K$

$$\min_{y\in E}\varphi(y)\geq\Phi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\Phi(x)\|^2+\rho\min_{y\in E}\left\|y-\ x+\frac{1}{2\rho}\nabla\Phi(x)\right\|^2. \tag{4.92}$$

Теорема 4.46. Якщо $y^{**}\in E$ задовольняє умову $\min\limits_{y\in E}\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{\nabla}_i\varphi\,(x)=$ $=(\bar{\nabla}\Phi\,(y^{**}),y^{**})$, а у разі диференційованості $\Phi(x)$ – $\min\limits_{y\in E}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=$ $=(\nabla\Phi\,(y^{**}),y^{**})$, то $y^{**}=\arg\min\limits_{x\in E}\varphi(x)$.

Зауваження 4.9. Як видно, застосування оцінок (4.88), (4.90), (4.91) можливо за умови розв'язання задачі побудови опуклого/сильно опуклого продовження $\varphi(x)$, а також Задач 4.12, 4.13 на E.

Як було встановлено вище, ці задачі ефективно розв'язуються для $\mathcal{C}_b$–множин Сім'ї 4.2, а також полікомбінаторних $\mathcal{C}_b$–множин, що ними породжуються.

Що стосується опуклого/сильно опуклого продовження, то, згідно з теоремами 1.7, 1.8, воно існує для усіх множин Сім'ї 4.1 та полікомбінаторних множин, ними породжених, адже усі вони – вершинно розташовані.

Щодо оцінок (4.89), (4.92), то для множин Сім'ї 4.1 та породжених ними полікомбінаторних множин вони застосовувані за умови використання як $\Phi(x)$ диференційованого опуклого продовження $\varphi(x)$, яке існує для цих $\mathcal{C}_b$–множин згідно з теоремою 1.9.

Розглянемо питання побудови нижніх оцінок функцій для $\mathcal{C}$–множин та $\mathcal{C}_b$–множин, що не є WDSs та PSpSs. Нехай E' – $\mathcal{C}$-множина, що не є WDS, а $E \supset E'$ – $\mathcal{C}_b$–множина, що є WDS і PSpS. У такому випадку з врахуванням того, що $\min\limits_{x\in E'}\varphi(x) \geq \min\limits_{x\in E}\varphi(x)$, отримуємо низку оцінок, які ґрунтуються на використанні (4.88), (4.90), (4.91).

Так, із (4.88) слідує:

$$\min_{y\in E'}\varphi\ (y) \geq \Phi\ (x) - (\bar{\nabla}\Phi\,(x), x) + \min_{y\in E}\sum_{i=1}^{n}\bar{\nabla}_i\Phi\,(x)y_i. \tag{4.93}$$

Якщо E' має вигляд (3.103) або (3.116), де складові множини (3.104) – WDSs та PSpSs, то мають місце відповідно оцінки:

$$\min_{y\in E'}\varphi\ (y) \geq \Phi\ (x) - (\bar{\nabla}\Phi\,(x), x) + \max_{l\in J_L}\min_{y\in E^l}\sum_{i=1}^{n}\bar{\nabla}_i\Phi\,(x)y_i;$$
$$\min_{y\in E'}\varphi\ (y) \geq \Phi\ (x) - (\bar{\nabla}\Phi\,(x), x) + \min_{l\in J_L}\min_{y\in E^l}\sum_{i=1}^{n}\bar{\nabla}_i\Phi\,(x)y_i.$$

Зауваження 4.10. Враховуючи (3.18) та застосовуючи у наведених оцінках розв'язки Задач 4.12, 4.13 для числових $\mathcal{C}_b$–множин та заув. 4.8 стосовно векторних $\mathcal{C}_b$–множин, можна сказати, що наведені у даному пункті оцінки узагальнюють результати [249, 251, 274, 275, 277, 279, 280, 288, 365, 367, 370, 373, 379].

Виключеннями є множини композицій перестановок E' та $\mathcal{C}_b$–множини сполучень із повтореннями $E'' = \overline{S}_k^n(G)$. Але до цих двох класів застосовувана оцінка (4.93) при виборі: а) для E' – $E = E_{nk}(G)$, де $G = E'.\mathrm{IM}$; б) для E'' – $E = \overline{E}_k^n(G'')$, де $G'' = \{E''.\mathrm{GS}\}^n$. Останнє вірно також для усіх підмножин $\overline{E}_k^n(G'')$, $\overline{S}_k^n(G'')$, зокрема, до загальних $\mathcal{C}_b$–множин n-перестановок, n-розміщень та n-сполучень, що індукуються власними підмножинами G''.

4.15 Властивості деяких $\mathcal{C}_b$-множин: $m > 1$

Дослідимо деякі властивості $\mathcal{C}_b$–множин $\mathcal{E}_{nk}(G)$, $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n^e$, $\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$, скориставшись їх зв'язком із множинами (3.14), (3.15), а також із множинами матриць перестановок P_n^M та перестановок з повтореннями $P_{nk}^M(G)$, $k < n$.

Отже, нехай

$$E^N \in \{\mathcal{E}_{nk}(G), \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{\eta k}^n(G), \mathcal{E}_k^n, \mathcal{E}_n^e, \mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)\} \tag{4.94}$$

Введемо у розгляд $\mathcal{C}_b$–багатогранник $P^N = conv\, E^N$, у т.ч. для множин сім'ї (4.94) це буде $\mathcal{P}_{nk}(G) = conv\, \mathcal{E}_{nk}(G)$ – загальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник матриць перестановок, $\mathcal{P}_n = conv\, \mathcal{E}_n$ – $\mathcal{C}_b$–багатогранник матриць перестановок (багатогранник Біркгоффа, the Birkgoff polytope [19, 48]), $\mathcal{P}_n^e = conv\, \mathcal{E}_n^e$ – $\mathcal{C}_b$–багатогранник матриць парних перестановок, $\mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G) = conv\, \mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$ – загальний $\mathcal{C}_b$–багатогранник матриць перестановок зі знаком.

4.15.1 Потужність E^N

Враховуючи, що $E^N = \varphi(E)$, де φ – бієктивне відображення, то має місце $|E^N| = |E|$, відповідно, за формулами (4.6), (4.7), (4.9), (4.10):

$$|\mathcal{E}_{nk}(G)| = \tfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}; |\mathcal{E}_n| = n!; |\mathcal{E}_n^e| = \tfrac{n!}{2};$$
$$\left|\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)\right| = C_n^{n_0} \cdot \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_i!} \cdot 2^{n-n_0}; \left|\mathcal{E}_{\eta k}^n(G)\right| = \left|E_{\eta k}^n(G)\right|; |\mathcal{E}_k^n(G)| = \tfrac{n!}{(n-k)!}.$$

4.15.2 Зв'язок E^N із іншими булевими $\mathcal{C}_b$-множинами

Нехай $m = k$, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_1'^T, ..., \mathbf{x}_m'^T$ мають форму (2.26), (2.27).

Теорема 4.47.

$$E^N = \mathcal{E}_{nk}(G) = \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_{nk}}(\overline{n}), \tag{4.95}$$

$$\text{де } \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) = \prod_{j=1}^{n} B_k(1); \tag{4.96}$$

$$\mathbf{B'_{nk}}(\overline{n}) = \ \{x \in \mathbb{R}^N : x' = vec(X^T) \in \prod_{i=1}^{k} B_n(n_i)\}, \tag{4.97}$$

$\overline{n} = ([G])^T = (n_1, ..., n_k)^T$.

Враховуючи (4.96), звідси слідує, що $\forall x \in E^N$ виконано:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = \mathbf{x}_j^T \mathbf{e} = 1, j \in J_n; \tag{4.98}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathbf{x}'_i \mathbf{e} = n_i, i \in J_k. \tag{4.99}$$

Доведення дивись у додатку В.3.

Наслідок 4.23.

$$\mathcal{E}_n = \mathbf{B_n}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_n}(\mathbf{e}), \tag{4.100}$$

де $\mathbf{B_n}(\mathbf{e}) = \mathbf{B_{nn}}(\mathbf{e})$, $\mathbf{B'_n}(\mathbf{e}) = \mathbf{B'_{nn}}(\mathbf{e})$.

Зокрема, для $\mathcal{E}_n$ (4.99) перетворюється на

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathbf{x}_i'^T \mathbf{e} = 1, i \in J_n. \tag{4.101}$$

Наслідок 4.24. Довільна точка $x \in \mathcal{E}^{\pm}_{nk}(G)$ задовольняє обмеження:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{ij}| = 1, j \in J_n; \tag{4.102}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| = n_i, i \in J_k. \tag{4.103}$$

Наслідок 4.25.

$$\mathcal{P}_{nk}(G) \subseteq \mathbf{PB_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{PB'_{nk}}(\overline{n}), \tag{4.104}$$

$$\text{де } \mathbf{PB_{kn}}(\mathbf{e}) = \prod_{j=1}^{n} B_k(1), \mathbf{PB'_{nk}}(\overline{n}) = \prod_{i=1}^{k} PB_n(n_i).$$

Теорема 4.48.

$$E^N = \mathcal{E}^n_{\eta k}(G) = \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_{nk}}(\overline{\eta}', \overline{\eta}), \tag{4.105}$$

$$\mathbf{B'_{nk}}(\overline{\eta}', \overline{\eta}) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ x' = vec(X^T) \in \prod_{i=1}^{k} B_n(\eta'_i, \eta_i)\},$$

де $\overline{\eta}' = (\eta'_1, ..., \eta'_k)^T$, $\overline{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_k)^T$, $\eta'_i = \max\{0, n - \eta + \eta_i\}$, $i \in J_k$.

Доведення аналогічно теоремі 4.47 із врахуванням, що (4.98) виконано, а (4.99) перетворюється на

$$\eta'_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathbf{x}'_i\mathbf{e} \leq \eta_i, i \in J_k.$$

Наслідок 4.26.

$$\mathcal{P}^n_{\eta k}(G) \subseteq \mathcal{P}'^n_{\eta k}(G),$$

$$\text{де } \mathcal{P}'^n_{\eta k}(G) = \mathbf{PB_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{PB'_{nk}}(\overline{\eta}', \overline{\eta}). \tag{4.106}$$

Наслідок 4.27.

$$E^N = \mathcal{E}^n_k(G) = \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_{nk}}(\mathbf{0}, \mathbf{e}),$$

де $\mathbf{B'_{nk}}(\mathbf{0}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{k} B_n(0, 1)$.

4.15.3 Н-представлення P^N

Теорема 4.49. [147] Н-представленням $\mathcal{P}_{nk}(G)$ (далі $(\mathcal{P}_{nk}(G).HR)$) є система обмежень (4.98), (4.99),

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \ i \in J_k, \ j \in J_n.$$

Враховуючи вигляд ($B_n(m)$.HR), теорема 4.49 означає, що (4.104) виконується як рівність, отже,

$$\mathcal{P}_{nk}(G) = \mathbf{PB_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{PB'_{nk}}(\overline{n}). \tag{4.107}$$

Наслідок 4.28.

$$\mathcal{E}_{nk}(G) = \mathcal{P}_{nk}(G) \cap B_{nk}.$$

Теорема 4.50. Незвідним Н-представленням $\mathcal{P}_{nk}(G)$ (далі ($\mathcal{P}_{nk}(G).IHR$)) є система (4.98), (4.99), з якої вилучене одне довільне обмеження, що доповнена нерівностями:

$$x_{ij} \geq 0,\ i \in J_k,\ j \in J_n; \tag{4.108}$$

$$x_{ij} \leq 1,\ j \in J_n,\ \text{для } i \in J_k : n_i > 1. \tag{4.109}$$

Доведення теореми ґрунтується на застосуванні ($B_n(m)$.IHR) до (4.107).

Наслідок 4.29. (4.98), (4.101)

$$x_{ij} \geq 0,\ i, j \in J_n, \tag{4.110}$$

це ($\mathcal{P}_n$.HR) і є звичайним аналітичним описом багатогранника Біркгоффа [147, 265], а після вилучення одного довільного рівняння – це ($\mathcal{P}_n$.IHR).

Наслідок 4.30. $\mathcal{C}_b$–багатогранник перестановок $\Pi_{nk}(G)$ дозволяє побудову компактного розширеного незвідного Н-представлення (далі ($\Pi_{nk}(G)$.EIHR)) у формі ($\mathcal{P}_{nk}(G)$.IHR), (2.133).

На відміну від ($\Pi_{nk}(G)$.IHR), представлення ($\Pi_{nk}(G)$.EIHR) має поліноміальний порядок, а саме містить $n + k$ рівнянь, а також до $2kn$ нерівностей.

Для $P = \mathcal{P}^{n}_{\eta k}(G)$ запишемо умову (4.105), позначивши праву частину P'. Багатогранник P' має вигляд (4.106) і задається системою (4.98), (4.108),

$$x_{ij} \le 1,\ i \in J_k, j \in J_n;$$
$$\eta_i' \le \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathbf{x}_i'\mathbf{e} \le \eta_i, i \in J_k.$$

P' – релаксаційний багатогранник для P, але для $\mathcal{E}_{\eta k}^{n}(G)$ має місце такий результат, подібний до (4.104), який можна довести аналогічно теоремі 4.47.

Твердження 4.8.

$$\mathcal{E}_{\eta k}^{n}(G) = \mathcal{P}_{\eta k}^{n}(G) \cap B_{n \cdot k}.$$

Наслідок 4.31.

$$\mathcal{E}_{\eta k}^{n}(G) = vert(\mathcal{P}_{\eta k}^{n}(G) \cap B_{n \cdot k}).$$

Для $\mathcal{P}_n^e$ побудуємо розширене Н-представлення, враховуючи вигляд ($\mathcal{P}_n(x)$.HR) та зв'язувальне співвідношення (2.133). Для визначеності у (4.38) покладемо $G = J_n$ і одержимо ($\mathcal{P}_n^e$.EHR) вигляду (4.37), де $\Delta_G = \sum_{i=1}^{n} ic_i - 1$; $c_1 = n$, $c_2 = n-1$, $c_i = c_{i-1} - 1$, $i \in J_n \backslash J_2$, (2.133), $g_{\mathcal{A}} = (1, 2, ..., n)$, (4.98), (4.101), (4.110). Після вилучення з ($\mathcal{P}_n^e$.EHR) довільного рівняння, згідно з теоремою 4.8, воно перетворюється на незвідне Н-представлення при $n \ge 5$.

Для $\mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G)$, виходячи з зв'язку між $\mathcal{E}_{nk}(G)$ і $\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$, на основі ($\mathcal{P}_{nk}(G)$.IHR), маємо, що $\forall x \in \mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G)$ виконані нелінійні обмеження (4.102), (4.103) та лінійні нерівності:

$$-1 \le x_{ij} \le 1,\ j \in J_n, i \in J_k : n_i > 1. \tag{4.111}$$

Для побудови Н-представлення $\mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G)$ перейдемо до опуклої оболонки множини E', заданої (4.102), (4.103):

$$conv E' : \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| \le 1, j \in J_n; \sum_{i=1}^{k} |x_{ij}| \le n_i, i \in J_k. \qquad (4.112)$$

У результаті маємо компактне Н-представлення $\mathcal{P}^{\pm}_{nk}(G)$ вигляду (4.111), (4.112), яке, очевидно, незвідне (далі $(\mathcal{P}^{\pm}_{nk}(G).CIHR)$). Розкриваючи у (4.112) знаки модулів усіма можливими способами, $(\mathcal{P}^{\pm}_{nk}(G)$.CIHR) перетвориться на $(\mathcal{P}^{\pm}_{nk}(G)$.IHR). Зокрема, $(\mathcal{P}^{\pm}_{n}$.CIHR) матиме вигляд $\sum_{i=1}^{n} |x_{ij}| \le 1$, $j \in J_n$; $\sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| \le 1$, $i \in J_n$.

4.15.4 Поверхнева розташованість E^N

Зауваження 4.11. Оскільки (4.94) – $\mathcal{B}$Ss у просторі $\mathbb{R}^N$, усі вони є PSsSs та PSpSs як підмножини B_N, що належать класам PSsSs та PSpSs. Далі ми скористаємося іншими властивостями цих множин, а саме принципом їх формування, щоб не тільки встановити їх сферичну розташованість, але і знайти параметри описаної гіперсфери S^{min}.

Щоб показати поверхневу розташованість $E^N = \mathcal{E}_{nk}(G)$, скористаємося її представленням (4.95). Згідно з (4.96), (4.97), його складові – $E^{N1} = \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e})$, $E^{N2} = \mathbf{B'_{nk}}(\overline{n})$ – PSpSs як декартові добутки PSpSs класу $B_n(m)$. Згідно з (3.124), (4.54), параметри $\hat{E}^{Ni} = \hat{E}^{Ni}(a^{i,min}, r^{i,min})$, $i = 1, 2$:

$$a^{1,min} = (1/k, ..., 1/k) \in \mathbb{R}^N, r^{1,min} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{k-1}{k}\right)^{1/2} = \sqrt{n(1 - \tfrac{1}{k})}; \qquad (4.113)$$

$$a^{2,min} = (\tfrac{n_1}{n}, ..., \tfrac{n_k}{n}, ..., \tfrac{n_1}{n}, ..., \tfrac{n_k}{n}), r^{2,min} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n-n_i)}{n}\right)^{1/2}. \qquad (4.114)$$

Параметри $\hat{E}^N = \hat{E}^N(a^{min}, r^{min})$ можна знайти за формулами (3.114), (3.115). Отже, має місце така теорема.

Теорема 4.51. Множина $E^N = \mathcal{E}_{nk}(G)$ – PSpS, параметри представлення $\hat{E}^N$ якої можна знайти за формулами (3.114), (3.115), де $a^{i,min}, r^{i,min}$, $i = 1, 2$, знайдені за формулами (4.113), (4.114).

Наслідок 4.32. Множина $E^N = \mathcal{E}_n$ – PSpS, параметри представлення $\hat{E}^N$ якої – такі:

$$a^{min} = (1/n, ..., 1/n) \in \mathbb{R}^N, r^{min} = \sqrt{n-1}. \qquad (4.115)$$

Дійсно, для $\mathcal{E}_n(G)$ параметри (4.113), (4.114) описаних гіперсфер співпадають та перетворюються на (4.115).

Наслідок 4.33. Множина $E^N = \mathcal{E}_n^e$ – PSpS, параметри представлення $\hat{E}^N$ якої можна знайти за формулою (4.115), якщо $dim\ P^N = dim\ conv\ \mathcal{E}_n^e$.

Наслідок 4.34. Множина $E^N = \mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$ – PSpS, параметри представлення $\hat{E^N}$ якої можна знайти за формулою:

$$a^{min} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N, r^{min} = \sqrt{n}. \qquad (4.116)$$

Дійсно, точки $\mathcal{E}_{nk}(G) \subset E^N$ рівновіддалені від $\mathbf{0}$ на відстань $\sqrt{n}$. Те саме стосується решти точок E^N, виходячи з її центральної симетрії відносно $\mathbf{0}$. До того ж P^N – повномірний (див. тверд. 4.11), отже, для E^N, P^N описана гіперсфера визначена однозначно, і її параметри задані формулою (4.116).

Твердження 4.9. Множина $E^N = \mathcal{E}_{\eta k}^n(G)$ – PSpS, що лежить на перетині гіперсфер із параметрами (4.113),

$$a^{3,min} = (1/2, ..., 1/2) \in \mathbb{R}^N, r^{3,min} = \sqrt{nk}/2. \qquad (4.117)$$

Параметри представлення $\hat{E}^N$ для даної множини можна визначити, використовуючи у тверд. 3.10 параметри (4.116), (4.117).

Теорема 4.52. Множини сім'ї (4.94) є поверхнево розташованими, зокрема,

– $\mathcal{E}_{nk}(G), \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^e$, $\mathcal{E}_{\eta k}^n(G)$ – PSpSs, PSpSs, PESs;

– $\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$ – PSpSs, PSpSs.

Доведення дивись у додатку В.3.

Зокрема, для вказаних класів PESs, використавши у побудові рівняння

$$\|x\|^2 - m + (x^T\mathbf{e} - m)^2 = 2\|x\|^2 - 2m \cdot x^T\mathbf{e} + m^2 - m = 0, \quad (4.118)$$

отримаємо рівняння еліпсоїда, описаного навколо $\mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e})$, відповідно, навколо такої множини E^N:

$$\sum_{j=1}^{n}(\|\mathbf{x}_j\|^2 - \mathbf{x}_j^T\mathbf{e}) = 0. \quad (4.119)$$

4.15.5 Розмірність P^N

Теорема 4.53.

$$dim\,\mathcal{P}_{nk}(G) = n \cdot k - n - k + 1. \quad (4.120)$$

Доведення дивись у додатку В.3.

Тепер відома формула про розмірність багатогранника Біркгоффа [264, 265] отримується як наслідок із теореми 4.53.

Наслідок 4.35.

$$dim\,\mathcal{P}_n(G) = (n-1)^2.$$

Наслідок 4.36.

$$dim\mathcal{P}_n^e(G) \le (n-1)^2.$$

Твердження 4.10.

$$dim\mathcal{P}_{\eta k}^n(G) = k \cdot n - n.$$

Твердження 4.11.

$$dim\mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G) = k \cdot n.$$

Доведення дивись у додатку В.3.

4.15.6 Вершинна розташованість E^N

Наслідок 4.37. (з теореми 4.52) Множини сім'ї (4.94) є VLSs.

4.15.7 Рівневість E^N

Теорема 4.54. Множина $E^N = \mathcal{E}_{nk}(G)$ – 2LS.

Доведення дивись у додатку В.3.

Теорема 4.55.

$$lev\, \mathcal{E}^{\pm}_{nk}(G) = 1 + \max_{i \in J_k}\{n_i, 2\}. \tag{4.121}$$

Доведення дивись у додатку В.3.

Наслідок 4.38. Якщо $E^N = \mathcal{E}^{\pm}_{nk}(G)$, то

$$lev\, E^N = 3 \Leftrightarrow n_i \leq 2, i \in J_k.$$

Зокрема, $lev\, \mathcal{E}^{\pm}_{n}(G) = 3$.

Теорема 4.56.

$$lev\, \mathcal{E}^{n}_{\eta k}(G) = \max_{i \in J_k}\{\eta_i - \eta'_i + 1\}.$$

4.16 Висновки за розділом 4

Поставлено 14 задач дослідження алгебро-топологічних та топологометричних властивостей $\mathcal{C}_b$–множин та їх опуклих оболонок – $\mathcal{C}_b$–багатогранників, а також вивчення екстремальних властивостей функцій, заданих на них. Зокрема, розглянуто питання поверхневої розташованості $\mathcal{C}_b$–множин та аналітичного опису $\mathcal{C}_b$–багатогранників. Тим самим досліджено можливість їх аналітичного представлення за допомогою аналітичних описів опуклої гіперповерхні і багатогранника.

У рамках вивчення екстремальних властивостей функцій розглянуто поведінку лінійних та деяких квадратичних функцій, а також питання побудови нижніх оцінок функцій за допомогою їх опуклих продовжень. Тим самим обґрунтовано доцільність та актуальність розвитку теорії опуклих продовжень.

Основні класи розглянутих числових $\mathcal{C}_b$–множин – загальні $\mathcal{C}_b$–множини перестановок і парних перестановок, перестановок зі знаком, розміщень і парних булевих розміщень та їх спеціальні класи. Серед векторних $\mathcal{C}_b$–множин – множини перестановок та розміщень векторів одиничного базису, у т.ч. одиничних векторів зі знаком.

Для перерахованих класів $\mathcal{C}_b$–множин та їх спеціальних класів наведено розв'язки поставлених задач, які систематизують та розвивають відомі в літературі властивості деяких із них як образів е-множин, для інших, таких як клас $\mathcal{C}_b$–множин перестановок зі знаком, ці задачі розв'язуються вперше.

Встановлено поверхневу розташованість і можливість описати навколо квадратичну сильно опуклу поверхню для всіх введених раніше $\mathcal{C}_b$–множин, за винятком деяких видів $\mathcal{C}_b$–множин розміщень.

Отримані у даному розділі результати розвивають ECO у двох напрямках – дослідження властивостей образів е-множин і вивчення поведінки функцій – лінійних, квадратичних та опуклих – на цих множинах. Крім цього, вони можуть бути використані у розробці спеціальних методів ECO.

Так, дослідження симетрії [159] $\mathcal{C}_b$–множин та багатогранників дозволяє скоротити область пошуку оптимального розв'язку; встановлення вершинно розташованості $\mathcal{C}_b$–множин – вказує на можливість розв'язання ECOPs на них поєднанням двох релаксацій – поліедральної та поверхневої, а також за допомогою графо-теоретичних підходів після переходу до розгляду графу багатогранника; винайдення критерію суміжності вершин є основою побудови схем випадкового пошуку, що ґрунтуються на побудові шляхів по суміжних вершинах $\mathcal{C}_b$–багатогранника [220] тощо.

Основні результати даного розділу опубліковано у роботах [182, 186, 188, 189, 254, 310, 312, 317, 321, 325, 329, 331, 333, 343, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [5, 13, 24, 40, 47, 48, 50, 62, 67, 72, 75, 85, 89, 99, 108, 129, 136, 138, 147, 159, 159, 193, 197, 199, 206, 209, 220, 236, 248, 249, 258, 264, 265, 274, 275, 277, 279, 280, 287–291, 294, 295, 297, 363–365, 367, 368, 370, 371, 373, 379].

5 НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ $\mathcal{C}$-МНОЖИН

Даний розділ присвячений побудові аналітичних описів $\mathcal{C}$–множин. Головну увагу приділено дослідженню цих описів для $\mathcal{C}_b$–множин.

5.1 Термінологія, класифікація, приклади

Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$–множина вигляду (2.92), $\mathcal{F}$ – сім'я функцій:

$$\mathcal{F} = \{f_j(x)\}_{j \in J_m}, \tag{5.1}$$

$$\text{де } f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \text{ – неперервні, } j \in J_m. \tag{5.2}$$

Означення 5.1. Зображення $\mathcal{C}$–множини E за допомогою функціональних залежностей:

$$f_j(x) = 0, \ j \in J_{m'}, \tag{5.3}$$

$$f_j(x) \le 0, \ j \in J_m \backslash J_{m'} \tag{5.4}$$

назвемо *неперервним функціональним представленням* (f–представленням, a functional representation, $(E.FR)$) цієї множини.

Систему (5.3) назвемо *строгою частиною* (a strict part) f–представлення, систему (5.4) – *нестрогою частиною* (an unstrict part), а кількість обмежень – його *порядком* (an order). Так, m буде порядком f–представлення (5.3), (5.4), а m', $m'' = m - m'$ – порядком його строгої і нестрогої частин відповідно. Окремі обмеження f–представлення (5.3), (5.4) будемо називати його *компонентами*, а власне його – m-компонентним f–представленням E.

Зауваження 5.1. Якщо для E має місце представлення (5.3), (5.4), а неперервність функцій (5.1) забезпечується лише на частині $\mathbb{R}^n$, тобто

$$f_j : K \to \mathbb{R}^1 \text{ – неперервні, } j \in J_m,$$

де $K \subset \mathbb{R}^n : K \supseteq E$, будемо говорити, що (5.3), (5.4) є f–представленням E на множині K.

f–представлення геометрично представляє E як перетин m' дійсних різноманіть:

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) = 0\}, \ j \in J_{m'}, \tag{5.5}$$

після чого з утвореної надмножини E виділяється безпосередньо сама E за допомогою нерівностей (5.4), які задають у просторі деякі області:

$$C_j = \{x \in \mathbb{R}^n : f_{j+m'}(x) \le 0\}, \ j \in J_{m''}, \tag{5.6}$$

у результаті чого має місце – $E = \left(\bigcap\limits_{j \in J_{m'}} S_j \right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{i \in J_{m''}} C_j \right)$.

Якщо розмірність різноманіть (5.5) дорівнює $n - 1$ –

$$dim\, S_j = n - 1, j \in J_{m'}, \tag{5.7}$$

тобто всі вони є гіперповерхнями, а різноманіття (5.6) – n-вимірні та обмежені, то f–представлення (5.3), (5.4) задає E як множину точок перетину поверхонь (5.5) і тіл (5.6). Так, наприклад, це матиме місце, якщо усі функції (5.1) – строго опуклі в опуклій області $K \supseteq E$.

Поняття f–представлення може бути застосовано до довільної підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$. Тому здійснимо класифікацію f–представлень множини X у залежності від вигляду функцій (5.1), що його визначають, а також порядку строгої і нестрогої його частин та f–представлення в цілому. Далі вкажемо, які з них застосовуванні до $\mathcal{C}$–множин.

По вигляду функцій (5.1) серед f–представлень множини X можуть бути виділені лінійні та нелінійні, диференційовані, гладкі, опуклі, поліноміальні, тригонометричні f–представлення і т.п. У свою чергу, для цих видів може бути здійснена подальша класифікація. Наприклад, (5.3), (5.4) – поліноміальне (або алгебраїчне) f–представлення множини X, якщо всі функції сім'ї $\mathcal{F}$ – поліноми. Ввівши поняття *степеня поліноміального f–представлення* як найвищого степеня цих поліномів, можна виділити лінійні, квадратичні, кубічні, біквадратні та поліноміальні f–представлення степенів, вище за чотири (далі f_{P_d}*–представлення*, де d – степінь поліноміального f–представлення).

Зауваження 5.2. Представлення (5.3), (5.4) може мати ті чи інші властивості в підобластях $\mathbb{R}^n$, тому, в разі необхідності, вказуватимемо його тип і область його дії.

Проведемо класифікацію f–представлень у залежності від співвідношення параметрів m, m', m''. Відповідно до цього введемо у розгляд кілька типів f–представлень.

Означення 5.2. Систему (5.3), (5.4) назвемо:

– *строгим* представленням E (a strict representation, $(E.SR)$), якщо в ньому присутня тільки строга частина, тобто

$$m' = m,\ m'' = 0; \tag{5.8}$$

– *нестрогим* (an unstrict representation, $(E.UR)$) – якщо в f–представленні є тільки нестрога частина, отже, $m' = 0,\ m'' = m$;

– *змішаним* f–представленням (a mixed representation, $(E.MR)$), якщо воно включає строгу та нестрогу частини, тобто $m'\,(m - m') > 0$.

Якщо множина E дозволяє PSR, то її E.PSR є змішаним f–представленням, строга частина (5.3) якого включає рівняння описаної строго опуклої поверхні, а нестрога частина (5.4) – нерівності H–представлення

$P = convE$. Такий аналітичний опис E називатимемо *поліедрально-поверхневим f–представленням* (a polyhedral-surfaced f-representation, *(E.PSR)*) множини E.

Відповідно до класифікації PSRs, наведеної у п. 2.5, введемо декілька класів E.PSRs у залежності від типу описаних поверхонь. Якщо (5.41) – рівняння гіперсфери, E.PSR назвемо *поліедрально-сферичним f–представленням* (a polyhedral-hyperspherical f-representation, ($E.PSpR$)); якщо (5.41) задає еліпсоїд, E.PSR будемо називати *поліедрально-еліпсоїдальним f–представленням* (a polyhedral-ellipsoidal f-representation, ($E.PER$)); у разі, якщо (5.41) – це рівняння суперсфери, то E.PSR називатимемо *поліедрально-суперсферичним f–представленням* (a polyhedral-superspherical f-representation, ($E.PSsR$)).

Так, f–представленням гіперсфери $S_r\left(x^0\right)$ є $f_1\left(x\right) = \left(x - x^0\right)^2 - r^2 = 0$ (далі ($S_r(x^0).FR1$)), кулі $C_r\left(x^0\right) = conv\ S_r\left(x^0\right)$ – нерівність $f_1\left(x\right) = \left(x - x^0\right)^2 - r^2 \leq 0$ (далі ($C_r(x^0).FR$)), багатогранника P – його H–представлення. Перші два – однокомпонентні і квадратичні f–представлення, причому ($S_r(x^0)$. FR1) – строге, ($C_r(x^0)$.FR) – нестроге.

Неперервні функціональні представлення множин визначено неоднозначно. Так, $S_r\left(x^0\right)$ може бути задана рівнянням $\left\|x - x^0\right\|_2^2 = r^2$ або $\left\|x - x^0\right\|_2 = r$. Останнє приводить до такого f–представлення гіперсфери: $f_1\left(x\right) = \sqrt{\left(x - x^0\right)^2} - r = \left|x - x^0\right| - r = 0$, яке, на відміну від ($S_r(x^0)$.FR1), вже не є поліноміальним.

Нехай X – деякий багатогранник. Довільне (X.HR) є лінійним f–представленням X, нестрогим або змішаним. Відзначимо, що будь-яке H–представлення невиродженого у точку багатогранника є нестрогим його f–представленням, якщо він повномірний, і може вважатися змішаним, якщо цей багатогранник не є повномірним. Представлене у формі (2.93), воно має параметри $m = n' + n''$, $m' = n'$, $m'' = n''$. Що стосується FPC, строге лінійне f–представлення існує тільки для одноточкової множини, яку можна розглядати і як вироджений у точку багатогранник, і як вироджену у точку гіперсферу. У першому контексті її можна представити системою n лінійно-незалежних лінійних рівнянь, у другому – рівнянням гіперсфери радіуса нуль.

Перейдемо до розгляду особливостей f–представлень $\mathcal{C}$–множини E. Оскільки за умовою вона не є одноточковою, будь-яке її f–представлення – нелінійне. Загальна задача побудови (E.FR) множини (2.92) полягає в знаходженні деякої системи обмежень (5.3), (5.4), яка задає множину E. Неважко бачити, що E має незліченну кількість f–представлень, тому дана задача завжди розв'язувана. Щоб побудувати таке представлення, достатньо сформувати n різних інтерполяційних поліномів по точках E, наклавши додаткові обмеження на лінійну незалежність їх градієнтів у точках E, що можливо зробити згідно з [85, 157]. У результаті такої побудови можлива ситуація, що поверхні, які задаються цими інтерполяційними поліномами, матимуть і інші спільні точки, окрім E. Їх можна вирізати обмеженнями вигляду (5.4). Наприклад, "зайва"точка x^* вирізається обернено опуклим обмеженням вигляду $(x-x^*)^2 \geq r^{*2}$, де $r^* > 0$ – радіус околу точки x^*, в яку не потрапляє жодна точка E. В результаті такої побудови буде сформовано $\mathrm{f}_{P_{n_E-1}}$–представлення E (далі (E.*FR1*)), що є (E.SR) порядку $m = n$ або (E.MR) порядку $m > n$.

Отже, теоретично розв'язувана не тільки задача існування f-представлення E, але і задача знаходження її f_{P_d}–представлення. Більш того, може ставитися питання про існування та побудову f_{P_d}–представлень нижчих степенів до степеня два включно, адже два є мінімальним степенем такого представлення $\mathcal{C}$–множини. Відповідно, початкова загальна задача побудови (E.FR) може бути звужена до задачі побудови квадратичного, кубічного, біквадратного f–представлень тощо. Ще одна задача, яка виникає в ході побудові f–представлень, – це зменшення їх порядку. Як виявляється, зниження степеня f_{P_d}–представлення $\mathcal{C}$–множин приводить, як правило, до збільшення його порядку. І навпаки, спроба зменшити порядок f–представлення – до ускладнення аналітичного вигляду функцій, що присутні у ньому.

Продемонструємо це на прикладі, представивши таким чином ще один спосіб побудови f_{P_d}–представлення $\mathcal{C}$–множини E вигляду (2.92). Кожну її точку задамо рівнянням виродженої гіперсфери:

$$x^j : \; f_j(x) = (x - x^j)^2 = 0, \; j \in J_{n_E}. \tag{5.9}$$

Перемноживши рівняння системи (5.9), отримаємо таке рівняння:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n_E} f_j(x) = \prod_{i=1}^{n_E} (x - x^j)^2 = 0, \tag{5.10}$$

якому, як неважко бачити, задовольняють точки E і тільки вони, тобто (5.10) – це ще одне строге поліноміальне f–представлення E (далі ($E.FR2$)). Воно однокомпонентне, тобто виграє в порівнянні з (E.FR1) за порядком. З іншого боку, його степінь дорівнює $2n_E$, що значно гірше за (E.FR1). Зауважимо також, що якщо потужність E велика, то (E.FR1), (E.FR2) стають практично незастосовними, оскільки оперують з усіма точками E. Між тим, існують $\mathcal{C}$–множини, для яких існують квадратичні f–представлення, незважаючи на те, що потужність цих множин неполіноміально залежить від розмірності простору, де вони визначені. Їх побудова ґрунтується на дослідженні геометричних властивостей $\mathcal{C}$–множин, їх опуклих оболонок, а також властивостей функцій на цих множинах.

Так, умову $x \in \{0, 1\}$ можна представити аналітично у вигляді: $x(x - 1) = x^2 - x = 0$. Відповідно, умова булевості вектора $x \in \mathbb{R}^n$ буде такою – $x(x - \mathbf{e}) = x^2 - x\mathbf{e} = 0$, а у координатній формі –

$$f_i(x) = x_i^2 - x_i = 0, \; i \in J_n. \tag{5.11}$$

Системі (5.11) задовольняють точки B_n і тільки вони, отже, її можна розглядати як строге f–представлення множини B_n (далі $(B_n.SR1)$), яке до того ж є опуклим, адже усі функції, що його задають, – опуклі. Геометрично $(B_n.\text{SR1})$ задає булеву $\mathcal{C}_b$–множину як перетин n поверхонь другого порядку, які розпадаються на n пар паралельних площин $x_i = 0$ та $x_i = 1$ $(i \in J_n)$. Параметри цього f–представлення: $m(B_n.\text{SR1}) = m'(B_n.\text{SR1}) = n$, а степінь – два. $(B_n.\text{SR1})$ – це не єдине квадратичне f–представлення множини B_n. Її можна задати і іншим способом [185]:

$$f_1(x) = (x - 0.5\mathbf{e})^2 - \tfrac{n}{4} = 0;$$
$$f_{i+1}(x) = x_i - 1 \leq 0,\ f_{i+n+1}(x) = -x_i \leq 0,\ i \in J_n, \tag{5.12}$$

отримавши таким чином змішане f–представлення B_n. Геометрично воно задає B_n як перетин одиничного гіперкуба з описаною навколо нього гіперсферою, тобто є подіедрально-сферичним представленням B_n (далі $(B_n.PSpR)$). Воно є f_{P_2}–представленням, а його параметри: $m'(B_n.\text{PspR}) = 1$, $m''(B_n.\text{PspR}) = 2n$, $m(B_n.\text{PspR}) = 2n + 1$. $(B_n.\text{PspR})$ може бути узагальнене шляхом заміни рівняння сфери рівнянням суперсфери

$$S^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - 0.5\mathbf{e}|^\alpha - \frac{n}{2^\alpha} = 0\}, \tag{5.13}$$

$\alpha > 0$, що дозволяє сформувати сім'ю f–представлень (далі $(B_n.MR(\alpha))$) вигляду (5.12), $f_1(x) = |x - 0.5\mathbf{e}|^\alpha - \frac{n}{2^\alpha} = 0$, які залежать від параметра $\alpha \in \mathbb{R}^1_{>0}$. Якщо $\alpha \in (1, \infty)$, суперсфера (5.13) – строго опукла, тому $(B_n.\text{MR}(\alpha))$ є поліедрально-суперсферичним f–представленням B_n (далі $(B_n.PSsR(\alpha))$).

Так, $(B_n.\text{PSpR}) = (B_n.\text{PSsR}(2))$, f–представлення $(B_n.\text{MR}(1))$ – кусково-лінійне, що задає булеву множину як перетин одиничного гіперкуба з поверхнею гіпероктаедра. Нарешті, $(B_n.\text{PSsR}(4))$ – біквадратне f–представлення множини B_n, коли вона задається як перетин суперсфери

$S^4 = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - 0.5\mathbf{e})^4 - \frac{n}{16} = 0\}$ із гіперкубом PB_n.

Узагальнимо поняття (P.IHR), яке у нашій термінології є лінійним f–представленням багатогранника P, що не містить надлишкових обмежень, на довільну РС E.

Представлення (5.3), (5.4) множини E будемо називати *незвідним* f–представленням (an irredundant f-representation, ($E.IR$)), якщо виключення будь-якого з його обмежень приводить до задання власної надмножини E, тобто

$$\forall\, j \in J_{m'}\ E \backslash S_j \supset E;\ \forall\, i \in J_{m''}\ E \backslash C_i \supset E. \tag{5.14}$$

Якщо умова (5.14) порушується, f–представлення називатимемо *звідним* (a redundant f-representation, ($E.RR$)). Тепер, вибираючи як E: а) $\mathcal{C}$–множину, одержуємо поняття незвідного f–представлення $\mathcal{C}$–множини; б) багатогранник, – незвідного його f–представлення тощо. Відповідно, можна ввести поняття незвідного строгого ($E.ISR$), нестрогого ($E.IUR$) та змішаного ($E.IMR$) f–представлення.

Однокомпонентне f–представлення $\mathcal{C}$–множини можна завжди вважати строгим. Крім того, воно, очевидно, незвідне. Якщо ж $m(E.ISR) > 1$, то матиме місце: $\forall\, j' \in J_{m'} \quad E \subset \bigcap\limits_{j \in J_{m'} \backslash \{j'\}} S_j$.

Зауваження 5.3. Для того, щоб перевірити диференційовне (E.SR) на незвідність, достатньо показати, що градієнти функцій (5.3) лінійно незалежні в деякій точці E, тобто $\exists x^0 \in E$:

$$rank\, B(x^0) = m', \text{де}\ \ B(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i \in J_{m'}, j \in J_n}. \tag{5.15}$$

Для (E.SR) порядку n ця умова перетворюється на:

$$\exists\, x^0 \in E :\ |B(x^0)| \neq 0. \tag{5.16}$$

Виділимо два типи (E.ISRs), для яких виконана умова (5.7), тобто (5.5) є множиною поверхонь:

– двокомпонентне (E.ISR) назвемо *дотичним* (a tangential representation, ($E.TR$)), якщо множина E збігається з множиною точок дотику поверхонь S_1, S_2;

– n-компонентне (E.ISR) назвемо *пересічним* (an intersecting irredundant representation, ($E.IIR$)).

Зауваження 5.4. Для того, щоб встановити, що n-компонентне (E.ISR) $\mathcal{C}$–множини E є пересічним, необхідно перевірити, що виконана умова (5.7), а також що воно незвідне. Надалі будемо розглядати обидва ці два аспекти – незвідність f–представлень і представлення E як перетину двох поверхонь, але повна перевірка того, чи є f–представлення (E.IIR), здійснюватися не буде, тому зазвичай користуватимемося позначенням (E.SR).

Відповідно до введеної класифікації строгих незвідних представлень, (B_n.SR1) – це IIR. Це легко перевірити за допомогою умови (5.16), що набуває, приміром у точці $x^0 = \mathbf{e}$, вигляд $|B(\mathbf{e})| = 2|\mathbf{E}| = 2 \neq 0$.

Як приклад дотичного представлення булевої множини (далі ($B_n.TR1$)) множини B_n, можна навести таку [185, 188]:

$$S_1 : \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}; \quad S_2 : \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{n}{16},$$

яке представляє цю множину як перетин гіперсфери S_1 і суперсфери S_2 із коефіцієнтом деформації 2, центром яких є точка $0.5\mathbf{e}$.

(B_n.TR1) можна узагальнити, побудувавши сім'ю пар суперсфер із різними коефіцієнтами деформації (далі ($B_n.TR2(\alpha_1, \alpha_2)$)) –

$$S_1 : \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - \frac{1}{2}\right|^{\alpha_1} = \frac{n}{2^{\alpha_1}}; \; S_2 : \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - \frac{1}{2}\right|^{\alpha_2} = \frac{n}{2^{\alpha_2}}, \quad \text{де } 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty.$$

Зауважимо, що не всі f–представлення у цій сім'ї є гладкими, а саме, гладкими серед них будуть лише ті, для яких $\alpha_1 \geq 2$. Між тим, усі точки B_n є точками диференційованості функцій $f_1(x), f_2(x)$, що задають S_1, S_2. Враховуючи симетрію B_n, щоб це показати, достатньо зробити перевірку диференційованості цих функцій у точці $\mathbf{e}$, враховуючи, що $f_j(x) \underset{x \geq 0.5\mathbf{e}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^{\alpha_j}$. Відповідно $\nabla f_j(x) \underset{x \geq 0.5\mathbf{e}}{=} \alpha_j(\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^{\alpha_j - 1})_{i \in J_n}$, звідки $\nabla f_j(\mathbf{e}) = \alpha_j \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_j - 1} \mathbf{e} \neq 0,\ j = 1, 2$.

Розглянемо питання еквівалентних перетворень f–представлень $\mathcal{C}$–множин, що зменшують порядок цих представлень. Один зі шляхів – дослідити f–представлення на незвідність й перейти до розгляду (E.IR). Другий – це згортка всіх або частини компонент f–представлення.

На прикладі побудованих вище f–представлень B_n покажемо ці можливості. Неважко бачити, що усі вони є (B_n.IRs), отже, скорочення їх порядку можливе лише за допомогою згортки обмежень. Згорнемо компоненти (B_n.SR1) наступним чином: $f_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i)^2 = 0$, отримавши рівняння, що задає множину B_n і є її однокомпонентним f–представленням (далі (B_n.*SR2*)). Те саме зробимо з компонентами (B_n.TR1), отримавши ще одне однокомпонентне f–представлення (далі (B_n.*SR3*)) – $f_1(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n}{4}\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{n}{16}\right)^2 = 0$. Порівнюючи їх, бачимо, що (B_n.SR2) – однокомпонентне строге f_{P_4}–представлення, опукле в будь-який опуклій підобласті множини $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x_i - 0.5| \geq 0.5,\ i \in J_n\}$, у той час як ($B_n$.SR3) – однокомпонентне строге f_{P_8}–представлення, опукле в будь-якій опуклій підобласті $D' = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x - 0.5\mathbf{e})^2 \geq \frac{n}{4}\}$. Вони обидва не є опуклими, на відміну від отриманих раніше f–представлень B_n. Звідси видно, що мінімальний порядок опуклого f–представлення $\mathcal{C}$–множини дорівнює двом, а опуклі дотичні f–представлення – це опукле f–представлення цього виду мінімального порядку.

Узагальнимо ці спостереження на довільну $\mathcal{C}$–множин. Отже, такі особливості f–представлень $\mathcal{C}$–множин мають місце – серед них існують опуклі багатокомпонентні, такі, як (B_n.SR1), але не існує однокомпонентних опуклих. При цьому однокомпонентні f–представлення є строгими.

Якщо множина $E \subset \mathbb{R}^n$ аналітично описується в деякому розширеному просторі $\mathbb{R}^{n'}$, $n' > n$, будемо говорити про існування *розширеного f–представлення* множини E (an extended f-representation, $(E.ER)$). Підйом у простір більшої розмірності [16] буває зручний при формуванні f–представлень заданого вигляду, наприклад, квадратичних. Якщо (E.ER) побудовано, проектування у вихідний простір в окремих випадках дозволяє знайти (E.FR).

Побудуємо розширене f–представлення B_n (далі $(B_n.ER)$) на базі (B_n.SR2), увівши в останньому заміну змінних:

$$y_i = (x_i - 0.5)^2,\ i \in J_n, \tag{5.17}$$

та отримавши

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{n}{4};\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{n}{16}. \tag{5.18}$$

(B_n.ER) має вигляд (5.17), (5.18), є строгим і квадратичним, а також має порядок $n + 2$.

5.2 Підходи до побудови f-представлень $\mathcal{C}$-множин

Нехай E – деяка $\mathcal{C}$-множина, і перед нами стоїть задача побудови її f–представлення (далі *Задача 5.1*) на область $K \supset E$. Викладемо підходи до розв'язання цієї задачі, спочатку що стосується строгих f–представлень (далі *Задача 5.1.1*), а потім нестрогих та змішаних (далі *Задача 5.1.2*).

Якщо накладається обмеження, що сім'я (5.1) складається виключно з поліномів, до побудови f-представлень E застосовуваний апарат алгебраїчної геометрії (Algebraic Geometry, AG) [36, 92, 194, 245], зокрема дійсної алгебраїчної геометрії (Real AG, AG) [36, 60, 79, 110, 245]. Так, задача знаходження E.SR є задачею пошуку її аналітичного зображення як алгебраїчної множини (дійсного різноманіття, RV), у той час як задача знаходження E.MR та E.UR є задачею пошуку зображення E як алгебраїчної напівмножини. Тому загальні підходи до побудови f-представлень $\mathcal{C}$-множин та їх перетворень викладемо з використанням засобів RAG, які підлягають узагальненню з кільця $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ дійсних поліномів n змінних на кільце $\mathbf{C}(K)$ неперервних на $K \subseteq \mathbb{R}^n$ функцій.

RAG узагальнюється у декількох напрямках, серед яких алгебраїчна геометрія неперервних функцій [2]. Саме її засоби використовуватимемо далі, враховуючи, що побудову f–представлень $\mathcal{C}$–множини E ми обмежили кільцем $\mathbf{C}(K)$[1)] дійних неперервних функцій, заданих на $K \supset E$.

5.2.1 Підходи до побудови строгих f-представлень

Розглянемо підході до розв'язання Задачі 5.1.1, тобто покладатимемо, що f–представлення $\mathcal{C}$-множин шукається у класі, де для $\mathcal{F}$ виконана умова (5.8).

За означенням, (5.3) – це (E.SR), якщо має місце:

$$x \in E \Longleftrightarrow x \text{ задовольняє (5.3).} \tag{5.19}$$

Пошук системи рівнянь (5.3), що задовольняє (5.19), ґрунтується на виділенні з усієї множини функцій, що визначені на E, тих, що неперервні у $\mathbb{R}^n$ та набувають на E нульового значення. Ці функції утворюють сім'ю (далі ($I(E)$)), кількість елементів якого незліченна, і в число яких входять диференційовані функції, зокрема поліноми. Якщо вдається виділити сім'ю $I(E)$, область пошуку $\mathcal{F}$ обмежується нею.

Пошук $I(E)$ для конкретної FPC може ґрунтуватися на дослідженні

[1)] тут і далі K – континуальна множина її особливостей як геометричного місця точок евклідова простору (далі *Спосіб 5.1*), зокрема, зв'язку E із різноманіттями (5.5). Оскільки як E розглядається $\mathcal{C}$-множина, також з'являється ще один спосіб (далі *Спосіб 5.2*) побудови $\Phi(E)$, що ґрунтується на C-A. RAG також пропонує свій апарат для розв'язання Задачі 5.1.1 (далі *Спосіб 5.3*), а також пов'язаних з нею задач. Так, перевірку f–представлення на незвідність Способом 5.3 можна здійснити, зокрема, за допомогою виділення базису Гребнера (the Groebner basis) [60, 100].

Сформулюємо Задачу 5.1.1 у термінах AVs та ідеалів, що генеруються AVs. У нашому випадку, як AVs виступають $\mathcal{C}$ множини, а множини неперервних функцій, що набувають на них значення 0, – як їх ідеали. Так, для $\mathcal{C}$ множини E ідеалом функцій, що визначають її як RV, буде множина функцій (ідеал, який генерується RV E):

$$I(E) = \{f(x) \in \mathbf{C}(K) : f(x) \underset{E}{=} 0\}.$$

Довільна сім'я функцій $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(K)$, з одного боку, породжує ідеал функцій

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{ \sum_{f_i \in \mathcal{F}} f_i(x) \cdot g_i(x),\ \forall g_i(x) \in \mathbf{C}(K),\ i \in J_{|\mathcal{F}|}\} \subset \mathbf{C}(K).$$

а з іншого – індукує точкову конфігурацію

$$E'(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0,\ \forall f_i \in \mathcal{F}\} - \tag{5.20}$$

нуль множину (a vanishing locus, zero set) сім'ї $\mathcal{F}$, при цьому $\mathcal{F}$ є генератором (базисом, a generator) RV $E'(\mathcal{F})$. Відповідно, Задача 5.1.1 – це задача пошуку скінченної сім'ї функцій $\mathcal{F}$, такої, що

$$E = E'(\mathcal{F}) \tag{5.21}$$

$$\text{або } I(E) = \langle \mathcal{F} \rangle\,, \tag{5.22}$$

отже, це задача пошуку генератора E як RV такого, що $|\mathcal{F}| = m$.

Залежно від вигляду та кількості компонент у $\mathcal{F}$, а також можливості їх скорочення без втрати властивості отриманої сім'ї породжувати саме множину E, її генератори можуть бути скінченними та нескінченними, поліноміальними, гладкими, незвідними та звідними тощо, а задача пошуку генератору E із тими чи іншими властивостями є задачею пошуку (E.SR) відповідного вигляду.

Для $\mathcal{C}_b$-множини E пропонується підхід до розв'язання Задачі 5.1.1, який полягає у: а) проведенні C-A і G-A з виділення сім'ї функцій $\Phi(E) \subseteq I(E) \subseteq \mathbf{C}(K)$ (Задача 5.2); б) виділення з $\Phi(E)$ сім'ї $\mathcal{F}$ вигляду (5.1), що забезпечує виконання умови (5.22). В ході розв'язання Задачі 5.2 ставиться допоміжна задача побудови якомога ширшої сім'ї $\Phi(E)$ для того, щоб другий етап був здійсненний (Задача 5.3), а також щоб Задачу 5.2 для $\mathcal{C}_b$-множини $E' \subset E$ можна було розв'язати доповненням $\Phi(E)$ множиною функцій, які приймають нульового значення на E' та ненульового на E.

У термінах ідеалів, ці етапи представляються як задачі пошуку $\Phi(E) \subset \mathbf{C}(K)$, $\mathcal{F} \subseteq \Phi(E)$ таких, що:

– для Задача 5.1.1 виконана умова $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \Phi(E) \rangle$ (Умова 5.1.1);

– для Задачі 5.2 – $\Phi(E) \subseteq I(E)$, $\langle \Phi(E) \rangle = I(E)$ (Умова 5.2);

– для Задачі 5.3 – $\forall E' \subset E\, \langle \Phi(E') \rangle \supset \langle \Phi(E) \rangle$ (Умова 5.3);

– для Задачі 5.4 – задачі побудови (E.ISR) –

$$\Phi(E) \neq \langle \mathcal{F} \backslash \{f_i\} \rangle\,, \, \forall i \in J_m. \tag{5.23}$$

Зауваження 5.5. RV (5.20), що задовольняє умову (5.21), є математичною моделлю $\mathcal{C}$–множини E (далі $E.MM$), у якій ця множина представляється за допомогою функціональних залежностей, заданих неперервними функціями. Будемо називати таку E.ММ неперервною моделлю E (a continuous model of E, E.CM). Отже, Задача 5.1 є задачею пошуку деякої E.CM.

Нехай Задача 5.2 розв'язана і вибрана сім'я функцій (5.1) така, що $\mathcal{F} \in \Phi(E)$ і серед її компонент є нелінійні функції. Ставиться питання перевірки, чи задає (5.3) строге f–представлення E, тобто чи виконана Умова 5.1.1. Розглянемо, як можна застосувати до цього Спосіб 5.1. Перший шлях (далі *Спосіб 5.1.1*) обґрунтування того, що має місце (5.19), – це аналітично розв'язати нелінійну систему рівнянь (5.3).

Для сім'ї (5.1), що складається з пари диференційованих на E функцій, виконання умови (5.19) означає, що (5.3) – це (E.TR), а перевірка, чи воно виконується, може бути здійснена способами, наведеними нижче (див. п. 5.4). Ще один спосіб (далі *Спосіб 5.1.2*) – це безпосередня перевірка умови (5.19) в обидві сторони:

$$\text{необхідність:} \qquad x \in E \Rightarrow x \in E'; \tag{5.24}$$

$$\text{достатність:} \qquad x \in E' \Rightarrow x \in E. \tag{5.25}$$

Умова (5.24) виконана для будь-якої підсім'ї функцій з $I(E)$, зокрема для обраної для перевірки сім'ї $\mathcal{F} \subset \Phi(E)$. Значно більшу складність представляє перевірка умови (5.25). Зауважимо, що необхідною умовою її виконання є дискретність області (5.3), тому попередньо доцільно здійснити перевірку, що $dim\ E' = 0$, тобто $\mathcal{F}$ містить достатньо обмежень, щоб задати дискретну область. Виходячи з цього, можна запропонувати таку ітераційну схему розв'язання Задача 5.1.1.

1) Обрати як (5.1) m' диференційованих функцій з $\Phi(E)$, що не мають сингулярностей у точках E. Показати, що умова (5.15) виконана на E, тобто

$$\forall\, x^0 \in E: \ rank\, B(x^0) = m', \tag{5.26}$$

зокрема, при виборі $m' = n$ це потребує виконання умови (5.16) на E, яка набуває вигляду: $\forall\, x^0 \in E:\ |B(x^0)| \neq 0$.

Якщо (5.26) виконана, можна стверджувати, що система рівнянь

$$f_i(x) = 0,\ i \in J_{m'}, \tag{5.27}$$

задає дискретну надмножину $E' \supseteq E$, а (5.27) є (E'.SR).

2) Перевірити, що $E'' = E' \backslash E = \emptyset$:

– якщо $E'' = \emptyset$, система рівнянь (5.27) є шуканим (E.SR), і процес завершується;

– якщо $E'' \neq \emptyset$, із сім'ї $\Phi(E)$ виділяється функція, що набуває на E'' ненульового значення, додається у сім'ю (5.1), і перевірка здійснюється для $m' = m' + 1$.

У зв'язку з вищевикладеним, виникає питання про виділення сім'ї $\Phi(E)$ для кожного класу $\mathcal{C}_b$-множин, тобто про розв'язання Задача 5.2. Коли вона розв'язана для введених вище класів $\mathcal{C}_b$-множин, нові класи $\mathcal{C}_b$-множин можуть формуватися Способами 3.1-3.3.

Дослідимо, як формуються базиси ідеалів, а, відповідно, і самі ідеали $\mathcal{C}$–множин, одержаних у результаті лінійних перетворень та деяких теоретико-множинних операцій, зокрема, розглянемо питання формування f-представлень $\mathcal{C}_b$-множин, сформованих Способами 3.1, 3.2. З цією метою адаптуємо результат, наведений у [218], до $\mathcal{C}$–множин та кільця $\mathbf{C}(K)$.

Для $\mathcal{C}_b$ множини E, отриманої з $\mathcal{C}_b$ множин $E^1, ..., E^L$ Способами 3.1, 3.2, розв'язки цих Задач 5.1.1, 5.2 можна знайти за розв'язками Задач 5.1.1, 5.2 для $E^1, ..., E^L$ на основі такої теореми.

Теорема 5.1. Нехай $E^1, E^2 \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$–множини такі, що

$$E^l = E'^l(\mathcal{F}^l),\ \text{де}\ \mathcal{F}^l = \{f_1^l, ..., f_{m^l}^l\},\ f_i^l \in \mathbf{C}(K),\ i \in J_{m^l},\ l = 1, 2.$$

У такому випадку має місце:

а) якщо $E = E^1 \cap E^2$, то $E = E'(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2)$;

б) якщо $E = E^1 \cup E^2$, то $E = E'(\{f_i^1 \cdot f_j^2\}_{i \in J_{m^1}, j \in J_{m^2}})$;

в) якщо $E = \varphi(E^1)$, де $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – невироджене лінійне перетворення, то

$$E = E'(\{f_i^1 \circ \varphi\})_{i \in J_{m^1}}. \tag{5.28}$$

Теорема (5.1) справедлива для довільної пари генераторів множин E^1, E^2, і в разі скінченності $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$, вони дають розв'язок Задачі 5.1.1. Застосована до $\Phi(E^1), \Phi(E^2)$, ця теорема дає розв'язок Задачі 5.2, до $I(E^1), I(E^2)$ – дозволяє знайти $I(E)$.

Наслідок 5.1. Якщо $E = E^1 \times E^2$, де $E^l \in \mathbb{R}^{n^l}$, $l = 1, 2$ – $\mathcal{C}$–множини такі, що $E^l = E'^l(\{f_1^l(x^l), ..., f_{m^l}^l(x^l)\})$, $l = 1, 2$, то $E = E'(\{F_i^l\}_{i \in J_{m^l},\, l=1,2})$, де $F_i^l : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^1$, $F_i^l(x^1, x^2) \underset{x^{3-l} \in \mathbb{R}^{3-l}}{=} f_i^l(x^l)$, $i \in J_{m^l}$, $l = 1, 2$.

Теорема 5.2. Якщо E – $\mathcal{C}$–множина, для якої виконано (5.21), $E^1 \subset E$, то

$$E^1 = E^{'1}(\mathcal{F}^1), \tag{5.29}$$

де $E^{'1}(\mathcal{F}^1) = E^{'}(\mathcal{F}) \cup \{f\}$, $f \in \overline{\Phi}(E) = \Phi(E^1) \backslash \Phi(E)$:

$$f(x) \underset{E \backslash E^1}{\neq} 0. \tag{5.30}$$

Доведення дивись у додатку В.4. Дана теорема дозволяє ще одне формулювання.

Теорема 5.3. Нехай E – $\mathcal{C}$ множина, для якої виконана умова (5.22) та $E^1 \subset E$. Якщо $f \in \bar{\Phi}(E) = \Phi(E^1) \backslash \Phi(E)$: виконана умова (5.30), то $E^1 = E^{'1}(\mathcal{F}^1)$, де $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F} \cup \{f\}$.

Дана теорема вказує на те, за яких умов одна $\mathcal{C}$–множина виділяється з іншої за допомогою єдиного обмеження-рівності.

Розглянемо Задачу 5.2, тобто перейдемо до побудови сім'ї $\Phi(E)$ $\mathcal{C}_b$–множин (2.87), (2.88). Будемо вважати, що виконана умова (5.2). Якщо $K \subset \mathbb{R}^n$, то всі результати, наведені нижче, безпосередньо узагальнюються з кільця $\mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ на кільце $\mathbf{C}(K)$.

Лема 5.1. Якщо E – множина евклідових конфігурацій перестановок, то довільна симетрична функція постійного постійного значення на E.

Доведення дивись у додатку В.4.

Лема 5.2.

$$\begin{aligned} & I(E_{nk}(G)) \supseteq \langle \Phi_n^{sym}(G) \rangle \,, \\ & \text{де } \Phi_n^{sym}(G) = \{f(x) - f(g),\ f \in \Phi_n^{sym}\}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

Φ_n^{sym} – кільце неперервних симетричних функцій n змінних.

Доведення дивись у додатку В.4.

Таким чином, функціональна частина строгих f–представлень загальної $\mathcal{C}_b$-множини перестановок може бути сформована з симетричних функцій.

Наслідок 5.2. Якщо E – $\mathcal{P}S$, така що $E \subset E_{nk}(G)$, то

$$\langle \Phi_n^{sym}(G) \rangle \subset I(E). \tag{5.32}$$

Це означає, що $\Phi_n^{sym}(G)$ є також розв'язком Задачі 5.3 і можна вважати, що множина $\Phi(E) \backslash \Phi_n^{sym}$ складається з несиметричних функцій, які виділяють E з $E_{nk}(G)$. Включення (5.32) вірно в силу властивості ідеалів:

$$A \subset B \Leftrightarrow I(B) \subset I(A).$$

Лема 5.3. Якщо E – множина e-конфігурацій перестановок зі знаком, то довільна парна симетрична функція набуває постійного значення на E.

Лема 5.4.

$$I(E_{nk}^{\pm}(G)) \supseteq \langle \Phi_n^{sym}(G) \cap \Phi_n^{e}(G) \rangle \,, \tag{5.33}$$

$$\text{де} \quad \Phi_n^e(G) = \{f(x) - f(g) : \ f(x) \in \Phi_n^e\}, \tag{5.34}$$

Φ_n^e – множина функцій n змінних, парних по будь-якому набору своїх координат (even functions).

Доведення дивись у додатку B.4.

Наслідок 5.3. Для довільної $\mathcal{SPS}\ E \subset E_{nk}^{\pm}(G)$ має місце $I(E) \supset \left\langle \Phi(E_{nk}^{\pm}(G)) \right\rangle$.

Теорема 5.4.

$$I(B'_n) \supseteq \{\Phi_n^e(\{\mathbf{e}\})\rangle\,, \tag{5.35}$$

$$\text{де } \Phi_n^e(\{\mathbf{e}\}) = \{f(x) - f(\mathbf{e}) : \ f(x) \in \Phi_n^e\}. \tag{5.36}$$

Доведення дивись у додатку B.4.

Наслідок 5.4.

$$\Phi(B_n) = \{f(2x - \mathbf{e}) - f(\mathbf{e}) : \ f(x) \in \Phi_n^e\}. \tag{5.37}$$

Доведення дивись у додатку B.4.

Для того, щоб побудувати $\Phi(B_n^h)$, так само як і у попередньому випадку, розглянемо бінарний аналог $B_n^h - B_n^{'h} = 2B_n^h - \mathbf{e}$ і назвемо його $\mathcal{C}_b$–*множиною непарних бінарних векторів*, які характеризуватимуться парною сумою координат елементів для парних n і непарною сумою для непарних n, отже:

$$B_n^{'h} = \{x \in B'_n : x\mathbf{e} = m\}, \text{ де } \qquad m \mod 2 = n \mod 2. \tag{5.38}$$

Нехай також $PB_n^{'h} = convB_n^{'h}$.

Лема 5.5. Довільна функція $f(x)$, непарна по кожній координаті x_i, $i \in J_n$, на $B_n^{'h}$ набуває постійного значення.

Доведення дивись у додатку B.4.

Нехай $\Phi_n^{odd,1}$ – множина непарних по кожній координаті неперервних функцій, що не включає $f(x) \equiv 0$, а

$$\Phi_n^{odd,1}(B_n'^h) = \{f(x) - f(-\mathbf{e}) : \; f(x) \in \Phi_n^{odd,1}\}. \tag{5.39}$$

Зауважимо, що якщо $x \in B_n'^h$, то $f(y) \underset{y \in N_{PB_n'}(x)}{=} -f(x)$, а це означає, додавання у $\Phi(B_n')$ функції з $\Phi_n^{odd,1}(B_n'^h)$ дозволяє виділити $B_n'^h$ із B_n', а доповнення $\Phi(B_n')$ усією множиною (5.39) дозволяє сформувати $\Phi(B_n'^h)$. Отже, має місце теорема.

Лема 5.6.

$$\Phi(B_n'^h) = \Phi(B_n') \cup \Phi_n^{odd,1}(B_n'^h),$$

де $\Phi(B_n')$, $\Phi_n^{odd,1}(B_n'^h)$ знайдено за формулами (5.36), (5.39) відповідно.

Наслідок 5.5.

$$\Phi(B_n^h) = \Phi(B_n) \cup \Phi_n^{odd,1}(B_n^h),$$

де $\Phi(B_n)$ знайдено за формулою (5.37),

$$\Phi_n^{odd,1}(B_n^h) = \{f(2x - \mathbf{e}) - f(\mathbf{e}) : \; f(x) \in \Phi_n^{odd,1}(B_n'^h)\}.$$

$\Phi(E_n^e(G))$ побудуємо з $\Phi(E_n(G))$ подібно лемі 5.5 та теоремі 5.6.

Лема 5.7. Довільна знакопочережна функція (alternating function) $f(x)$ є постійною на $E_n^e(G)$.

Доведення дивись у додатку В.4.

Введемо позначення Φ_n^a для множини неперервних знакопочережних функцій n змінних, а

$$\Phi_n^a(E_n^e(G)) = \{f(x) - f(g) : \; f(x) \in \Phi_n^a\}. \tag{5.40}$$

Оскільки $\forall\, x \in E_n^e(G)$, $\forall\, x \in \Phi_n^a$ $f(y) \underset{y \in N_{\Pi_n^e(G)}(x)}{=} -f(x)$, то додавання у

$\Phi(E_n(G))$ функції з $\Phi_n^a(E_n^e(G))$ дозволяє виділити множину $E_n^e(G)$ з $E_n(G)$ та сформувати ідеал множини $E_n^e(G)$. Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 5.5.

$$\Phi(E_n^e(G)) = \Phi(E_n(G)) \cup \Phi_n^a(E_n^e(G)),$$

де $\Phi(E_n(G))$ та $\Phi_n^a(E_n^e(G))$ знайдено за (5.31), (5.40) відповідно.

5.2.2 Підходи до побудови нестрогих та змішаних f-представлень

Наведемо два способи формування (E.MRs), (E.URs) $\mathcal{C}$–множини E. Перший – якщо обґрунтовано існування E.PSR, то це пошук безпосередньо f–представлення (E.PSR), тобто рівняння строго опуклої описаної поверхні S та H–представлення P. Другий – виділення функцій, для яких відомі межі зміни значень на E, формування на їх основі обмежень (5.3), (5.4) та перевірка умови (5.19). За побудовою, $\mathcal{F}$ матиме при цьому форму:

$$f_j(x) \underset{E}{=} 0,\ j \in J_{m'},\ h_j^{\min} \le h_j(x) \le h_j^{\max},\ j \in J_{m''/2},$$

де $h_j^{\min} = \min\limits_{x \in E} h_j(x); h_j^{\max} = \max\limits_{x \in E} h_j(x),\ j \in J_{m''/2}$. Потім необхідна перевірка умови (5.25).

У багатьох випадках виділення E з $E' \supset E$ з відомим (E'.FR) можливе додаванням обмежень-нерівностей. У такому випадку (E'.SR), (E'.MR) є базою для утворення (E.MRs), а (E'.UR) – для побудови (E.URs).

Так, наприклад, змішане f–представлення $B_n(m_1, m_2)$ (далі ($B_n(m_1, m_2)$.MR1)) можна побудувати об'єднавши (B_n.SR1) із $m_1 \le x\mathbf{e} \le m_2$, а нестроге – додавши до цієї подвійної нерівності (B_n.UR1) (далі ($B_n(m_1, m_2)$.*UR1*)). Аналогічно додавання цієї подвійної нерівності до (B_n.PSpR) приводить до формування змішаного f–представлення, що є поліедрально-сферичним для $B_n(m_1, m_2)$ (далі ($B_n(m_1, m_2)$.*PSpR*)).

5.3 Поліэдрально-поверхневі f-представлення

Враховуючи, що PSR (2.112) задає E як перетин строго опуклої поверхні S із багатогранником (2.112), (E.PSR) включає рівняння

$$f(x) = 0 \tag{5.41}$$

цієї поверхні та H–представлення багатогранника P вигляду (2.41). Це нелінійне f–представлення вигляду (2.93), (5.41), що задається у формі (5.3), (5.4) наступним чином:

$$\begin{aligned} &f_0(x) = f(x) = 0; \\ &f_i(x) = \overline{a}_i^{\prime T} x - a'_{i0} = 0,\ i \in J_{n'}; \quad f_{i+n'}(x) = \overline{a}_i^{\prime\prime T} x - a''_{i0} \le 0,\ i \in J_{n''}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Строга його частина має вигляд $f_i(x) = 0,\ i \in J^0_{n'}$. Оскільки $n'' > 0$, (5.42) є змішаним f–представленням E і має параметри

$$m' = n' + 1, m'' = n'',\ m = n' + n'' + 1. \tag{5.43}$$

Оскільки всі його обмеження, за винятком (5.41), лінійні, тип (E.PSR) повністю визначається виглядом функції $f(x)$. Так, якщо вона квадратична – в цілому це буде f_{P_2}–представлення, якщо біквадратна – f_{P_4}–представлення тощо.

Зауваження 5.6. Необхідною умовою того, щоб (E.PSR) було незвідним, є використання як (2.93) незвідного H–представлення P. Але гарантувати, що при цьому (E.PSR) також є незвідним, можна лише для простих багатогранників. Саме тому у розділі 4 увагу було приділено виділенню класу простих $\mathcal{C}_b$–багатогранників.

Зауважимо також, що додавання обмежень у систему (5.42) залишатиме її поліедрально-поверхневим f–представленням деякої $\mathcal{C}$–множини

$E' \subseteq E$, порядок якого відрізняється від m (5.43) у більшу сторону. З іншого боку, якщо замість P взяти релаксаційний багатогранник P' другого роду, що задовольняє умову $E = P' \cap S$, E дозволятиме (E.PSR) за участю H–представлення P', а його порядок відрізнятиметься від m з (5.43) у меншу сторону.

Ясно, що E дозволяє побудову: а) (E.PSpR), якщо вона поліедрально-сферична; б) (E.PER), якщо вона є поліедрально-еліпсоїдальною; в) необхідною умовою існування (E.PSsR) є поліедрально-суперсферичність E.

Для довільної $\mathcal{C}$–множини питання про те, чи дозволяє вона PSR, залишається відкритим [90, 171]. Оскільки за означенням PSR дозволяють лише поліедрально-поверхневі множини, а вони, згідно з теоремою 2.3, є вершинно розташованими, виділення окремих класів $\mathcal{C}$–множин, що дозволяють PSR, обмежується класом VLS.

Безпосередній шлях встановити, що E дозволяє PSR, є пошук строго опуклої поверхні S, описаної навколо E (далі (*PSR.Scheme 1*)). Якщо це вдається зробити, одночасно доводиться і вершинна розташованість цієї множини.

Наведемо деякі класи $\mathcal{C}$–множин, PSR яких існує. Відповідно, задача побудови конкретного (E.PSR) для цих класів зводиться до пошуку (P.HR) та рівняння S.

Приклад 5.1. Як було показано у прикл. 2.3, симплексна $\mathcal{C}$-множина E є PSpS, отже, для побудови (E.PSR) треба сформувати H–представлення d_E-симплекса та скласти рівняння описаної гіперсфери.

Приклад 5.2. Спеціальна $\mathcal{C}$-множина E також дозволяє побудову (E.PSpR), оскільки, як видно з (2.47), усі її точки рівновіддалені від точки x^0 : $x_i^0 = \frac{1}{2}(e_{i1} + e_{i2})$, $i \in J_n$, інакше кажучи, лежать на гіперсфері з центром у x^0.

Ще один клас множин, що дозволяє PSR, – це 2LSs. Цей факт встановлюється такою теоремою.

Теорема 5.6. Довільна 2LS E дозволяє побудову (E.PSR).

Доведення дивись у додатку В.4.

Зауваження 5.7. У ході доведення теореми 5.6 будується сім'я

$$S^{\kappa} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_0(x, \kappa) - |\mathbf{F}| = 0\}, \ \kappa \in \mathbb{R}^1_{>0}, \tag{5.44}$$

$$\text{де } f_0(x, \kappa) = \sum_{F \in \mathbf{F}} |\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F^{\prime}|^{\kappa}, \tag{5.45}$$

$$\overline{n}_F^{\prime T} x, a_F^{\prime} : \ |\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F^{\prime}| = 1, \ F \in \mathbf{F}. \tag{5.46}$$

Зауваження 5.8. Сім'я поверхонь $f_0(x, \kappa)$ задано виразом (5.45), побудоване на основі H–представлення багатогранника P, яке має бути відомим. Доповнивши (P.HR) рівнянням

$$f_0(x, \kappa) - |\mathbf{F}| \underset{E}{=} 0, \tag{5.47}$$

де $\kappa \in (1, \infty)$, отримуємо сім'ю поліедральних-поверхневих представлень 2LS E, які далі можна досліджувати на незвідність.

Зауваження 5.9. У сім'ї (5.44) обмежених поверхонь, S^1 – багатогранна поверхня, S^2 – еліпсоїд, $S^{\infty} = \lim\limits_{\kappa \to \infty} S^{\kappa} = \partial P$.

Відзначимо також, що вибір із нього підсім'ї поверхонь

$$S^{2\kappa'} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_0(x, 2\kappa') - |\mathbf{F}| = 0\}, \ \kappa' \in \mathbb{N}, \tag{5.48}$$

дозволяє виділити сім'ю поліедрально-поверхневих $\mathrm{f}_{P_{2\kappa'}}$–представлень множини E, що має форму (P.HR), $f_0(x, 2\kappa') = |\mathbf{F}|$, де $f_0(x, 2\kappa') = \sum_{F \in \mathbf{F}} (\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F^{\prime})^{2\kappa'}$.

Наслідок 5.6. Довільна 2LS E дозволяє побудову PER (далі (*E.2LS.PER*)) вигляду (P.HR) з рівнянням (2.109), де

$$A = \sum_{F \in \mathbf{F}} \overline{n}'_F \overline{n}'^T_F,\ b = 2 \sum_{F \in \mathbf{F}} a'_F \overline{n}'^T_F,\ c = \sum_{F \in \mathbf{F}} a'^2_F - |\mathbf{F}|. \tag{5.49}$$

Доведення дивись у додатку B.4.

Наведемо ще один спосіб побудови (E.PSR) для VLS, заданої у формі (2.92) (далі (*PSR.Scheme2*)). Він ґрунтується на виборі як $f(x)$ кусково-лінійної функції, яка задає ∂P. За побудовою ця функція задовольняє умову $f(x) \underset{\partial P}{=} 0$, звідки слідує співвідношення (2.106). Зафіксуємо параметр $\rho > 0$ і побудуємо сильно опукле продовження $F(x)$ із параметром ρ функції $f(x)$ з E на $\mathcal{K} = P$. З цією метою можна скористатися прийомами, запропонованими у $[251, 282, 374, 378]$. Продовжимо $F(x)$ з P на $\mathbb{R}^n$ зі збереженням виразу функції і отримаємо $\hat{F} :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, що є сильно опуклою, отже, і строго опуклою, на P. Якщо ця функція залишається строго опуклою в області $C = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \hat{F}(x) \le 0\}$, то за означенням E дозволяє PSR за участю строго опуклої поверхні $S = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \hat{F}(x) = 0\}$. Якщо строга опуклість функції $F(x)$ не розповсюджується на всю область C, для E також має місце представлення (2.112). Це означає, що (P.HR) разом із рівнянням $\hat{F}(x) = 0$ також задають E і формують (E.MR).

5.4 Дотичні f-представлення

Наведемо загальну схему побудови дотичних f–представлень $\mathcal{C}$–множини E, що ґрунтується на дослідженні властивостей диференційовних функцій (далі (*TR.Scheme1*)). Дотичне представлення будуватимемо у формі

$$f_1(x) = 0, \tag{5.50}$$

$$f_2(x) = 0. \tag{5.51}$$

На першому етапі вибираємо диференційовані функції $f_1(x), f_2(x) \in \Phi(E)$, $f_1(x) \ne f_2(x)$ такі, що

$$f_1(x) \underset{E}{=} 0,\ f_2(x) \underset{E}{=} 0, \tag{5.52}$$

задають у просторі поверхні

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f_j(x) = 0\},\ j = 1, 2, \tag{5.53}$$

наприклад, $f_1(x), f_2(x)$ – опуклі. На другому етапі перевіряємо виконання умови (5.26) для $m' = 2$, яку можна представити так:

$$\forall x \in E \quad \exists k(x) \neq 0 :\ \nabla f_2\,(x) \underset{E}{=} k(x) \cdot \nabla f_1\,(x)\,. \tag{5.54}$$

Далі фіксуємо $j \in J_2$ та методом множників Лагранжа розв'язуємо задачу:

$$f_j\,(x) \underset{S_{3-j}}{\rightarrow} extr. \tag{5.55}$$

Нехай

$$\begin{aligned} &X^{j\min} = Arg\min_{S_{3-j}}\ f_j\,(x)\,,\ Z^{j\min}\min_{X^{j\min}} = f_j(x);\\ &X^{j\max} = Arg\max_{S_{3-j}}\ f_j\,(x)\,,\ Z^{j\max}\max_{X^{j\min}} = f_j(x)\ \ - \end{aligned} \tag{5.56}$$

повний розв'язок задачі (5.55).

У такому випадку система рівнянь (5.50), (5.51) буде дотичним f–представленням E, якщо виконано одну з умов: $X^{j\min} = E,\ Z^{j\min} = 0$ або $X^{j\max} = E,\ Z^{j\max} = 0$.

Далі для визначеності будемо вважати, що розв'язується задача (5.53), (5.55) для $j = 2$. У позначеннях $S = S_1,\ f(x) = f_2(x) - f_2(\mathbf{0})$ вона набуває вигляду:

$$f(x) \underset{x \in S}{\rightarrow} extr, \tag{5.57}$$

де $f(\mathbf{0}) = 0$,

$$S = \{x :\ f_1(x) = 0\}. \tag{5.58}$$

Нехай

$$z^{\min} = \min_S f(x),\ X^{\min} = Arg\min_S f(x); \tag{5.59}$$

$$z^{\max} = \max_S f(x),\ X^{\max} = Arg\max_S f(x). \tag{5.60}$$

Вони пов'язані з (5.56) таким чином:

$$X^{\min} = X^{2\min},\ z^{\min} = Z^{2\min} - f_2(\mathbf{0});\ X^{\max} = X^{2\max},\ z^{\max} = Z^{2\max} - f_2(\mathbf{0}).$$

TR.Scheme1 може бути застосована для досить вузького класу функцій $f_1(x),\ f(x)$, що дозволяють розв'язати задачу (5.57), (5.58) в явному вигляді (див. приклади застосування у п. 6.4). Між тим, цей метод може бути використаний для побудови f–представлень $\mathcal{C}$-множин порядку $m > 2$, що отримуються з дотичних f–представлень $\mathcal{C}_b$-множин додаванням деяких обмежень.

Ще один шлях (далі (*TR.Scheme2*)) аналітичного обґрунтування існування дотичних f–представлень 2LSs.

Теорема 5.7. Якщо множина E дворівнева та задовольняє умову (4.11), вона допускає представлення у формі: $E = S^2 \cap S^4$, де S^2, S^4 – поверхні з сім'ї (5.48).

Доведення дивись у додатку B.4.

У термінах дотичних f–представлень дана теорема може бути переформульована наступним чином.

Теорема 5.8. 2LS E, опукла оболонка якої – повномірний дворівневий багатогранник P, має дотичне f–представлення вигляду

$$S^2:\ f_0(x,2) = \sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^2 - |\mathbf{F}| = 0, \tag{5.61}$$

$$S^4:\ f_0(x,4) = \sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^4 - |\mathbf{F}| = 0. \tag{5.62}$$

(далі (*E.2LS.TR1*)), де $\mathbf{F}$ – множина гіперграней P, а $\overline{n}_F'^T \in \mathbb{R}^n$, $a_F' \in \mathbb{R}^1$ задовольняють умову (5.46) для всіх $F \in \mathbf{F}$.

Зауваження 5.10. Якщо умова (4.11) не виконана, (P.HR) містить стро-
гу
частину, що в термінах (5.42) можна представити $\exists\ n' \in \mathbb{N}$: $f_i(x) = \overline{a}_i'^T x - a_{i0}' = 0,\ i \in J_{n'}$.

Для побудови дотичного f–представлення E в цьому випадку скористаємося тим саме прийомом, що і у теоремі 5.7, використавши у лівій частині рівнянь (5.61) строгу частину H–представлення (5.42) та отримавши допоміжний еіпсоїд:

$$S'^2:\ f_0'(x,2) = \sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^2 + \sum_{i=1}^{n'} (\overline{a}_i'^T x - a_{i0}')^2 - |\mathbf{F}| = 0.$$

Тепер знайдемо межі зміни функцій $\overline{a}_i'^T x$ на S' ($i \in J_{n'}$), скориставшись таким фактом.

Лема 5.8. Еліпсоїд є WDS.

Доведення див. у додатку B.4.

Скористаємося також наведеними у додатку B.4 розв'язками (B.55), (B.56) лінійної задачі на еліпсоїді (див. доведення леми 5.8). Нехай $C'^2 = convS'^2$,

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \min\{1, \frac{2}{a_i^{\max} - a_i^{\min}}\},\ i \in J_{n'}, \\ &\text{де } a_i^{\min} = \min_{C'^2} \overline{a}_i'^T x,\ a_i^{\max} = \max_{C'^2} \overline{a}_i'^T x. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Побудуємо S^2, S^4 таким чином:

$$S^2:\ f_0(x,2) = \sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^2 + \sum_{i=1}^{n'} (\alpha_i(\overline{a}_i'^T x - a_{i0}'))^2 - |\mathbf{F}| = 0; \tag{5.64}$$

$$S^4:\ f_0(x,4) = \sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^4 + \sum_{i=1}^{n'} (\alpha_i(\overline{a}_i'^T x - a_{i0}'))^4 - |\mathbf{F}| = 0, \tag{5.65}$$

де α_i – коефіцієнт нормування (5.63), $i \in J_{n'}$. За побудовою, вони забезпечують виконання умови $|\alpha_i(\overline{a}_i'^T x - a_{i0}')| \le 1$ для $i \in J_{n'}$ у довільній точці опуклого тіла C'^2. Оскільки $C^2 = conv(S^2) \subseteq C'^2$, ця нерівність виконана і в межах опуклого тіла C^2. Повторюючи доведення теореми 5.7 із урахуванням того, що $\sum\limits_{i=1}^{n'}(\overline{a}_i' x - a_{i0}')^2 \underset{E}{=} 0$, $(\alpha_i(\overline{a}_i'^T x - a_{i0}'))^2 \underset{C^2}{\le} (\alpha_i(\overline{a}_i'^T x - a_{i0}'))^4$, можна показати, що (5.64), (5.65) у цьому випадку задає дотичне f–представлення 2LS (далі (*E.2LS.TR2*)). Додаючи припущення, що $n' \in \mathbb{Z}_+$, (E.2LS.TR1) можна розглядати як окремий випадок (E.2LS.TR2), що відповідає $n' = 0$.

Об'єднаємо результати теореми 5.8 і заув. 5.10 у єдиній теоремі.

Теорема 5.9. Якщо E – 2LS, то (E (2-level).TR2) – її дотичне представлення, де $\mathbf{F}$ – множина гіперграней P; $\overline{n}_F'^T \in \mathbb{R}^n$, $a_F' \in \mathbb{R}^1$ задовольняють умову (5.46) для $F \in \mathbf{F}$; $\overline{a}_i' \in \mathbb{R}^n$, $a_{i0}' \in \mathbb{R}^1$ ($i \in J_{n'}$) – параметри строгої частини (P.HR).

Ще один метод побудови дотичних f–представлень (далі (*TR.Scheme3*)) застосовуваний у випадку, якщо рівняння (5.50), (5.51) можна представити в термінах деякої норми:

$$\exists\, \|.\|_{(\alpha)},\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1_+ :\ f_1(x) = \|x\|_{(\alpha_1)} - 1;\ f_2(x) = \|x\|_{(\alpha_2)} - 1. \tag{5.66}$$

Відповідно, поверхні (5.53) є сферами в відповідному нормованому просторі (далі $\|.\|_{(\alpha_i)}$-*сфери*, $i = 1, 2$).

Доведення того, що дана норма строго монотонна по α, тобто $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1_+$, де $\alpha_1 \ne \alpha_2$, виконана одна з умов:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\|_{(\alpha_1)} \ge \|x\|_{(\alpha_2)}, \tag{5.67}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\|_{(\alpha_1)} \le \|x\|_{(\alpha_2)}, \tag{5.68}$$

є обґрунтуванням того, що (5.50), (5.51) є (E.SR). Якщо до того ж ця норма є диференційованою функцією в області $K \supset E$, (5.50), (5.51) буде (E.TR).

А це означає, що, у разі виконання (5.67) $S_1 \subseteq C_2$, причому $E = S_1 \cap \partial C_2$, а у випадку (5.68) – $E = S_2 \cap \partial C_1$, де $C_i = conv\, S_i$, $i = 1, 2$. Інакше кажучи, у випадку (5.67) S_1 вписана в S_2, а в разі (5.68) S_1 описана навколо S_2. При цьому, в термінах норми $\|.\|_{(\alpha)}$, (5.52), (5.66) представляються у вигляді:

$$\|x\|_{(\alpha_1)} \underset{E}{=} \|x\|_{(\alpha_2)} \underset{E}{=} 1.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 5.10. Якщо існує строго монотонна по α функція $\|.\|_{(\alpha)}$ така, що функції $f_1(x), f_2(x)$ вигляду (5.66) задовольняють умови (5.52), (5.66), то пара рівнянь (5.50), (5.51) є (E.SR), а у випадку диференційованості $f_1(x), f_2(x)$ у спільних точках S_1, S_2 – це (E.TR).

5.5 Еквівалентні перетворення f-представлень

У даному пункті наведемо декілька способів формування нових f–представлень $\mathcal{C}$–множини E із відомого (E.FR). Перетворення з компонентами f–представлень, які при цьому відбуваються, називатимемо еквівалентними, якщо вони не змінюють скінченної точкової конфігурації, яку вони задають.

Зауваження 5.11. Якщо для множини E побудоване строге або змішане f–представлення, таке що

$$m' > 1, \tag{5.69}$$

з нього можна сформувати інші f–представлення, згортуючи в одне рівняння усі або частину рівнянь (5.3) і зменшуючи тим самим його порядок. Нехай, наприклад,

$$f_{1,m'}(x) = \sum_{j=1}^{m'} f_j^2(x) = 0, \tag{5.70}$$

тоді, якщо виконано (5.69), то (5.4), (5.70) – (E.FR) порядку $m - m' + 1$. Подібним же чином можуть формуватися нові f–представлення на базі часткової згортки компонент строгої частини (E.FR).

Узагальнимо даний спосіб твердженні.

Твердження 5.1. [186] Нехай, E задано f–представленням (5.3), (5.4), а $I \subseteq J_{m'}$, таке що $\forall i \in I$

$$\exists\, h_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \backslash \{\mathbf{0}\}, \tag{5.71}$$

$$\exists s_i(y) :\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1_+,\ s_i(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0. \tag{5.72}$$

У такому випадку якщо

$$f_0\,(x) = \sum_{i \in I} h_i(x) \cdot s_i\,(f_i(x)), \tag{5.73}$$

то система обмежень (5.4),

$$f_j(x) = 0,\ j \in J^0_{m'} \backslash I \tag{5.74}$$

також є f–представленням E.

Доведення дивись у додатку B.4.

Так, наприклад, вибираючи у (5.71), (5.72) $I = J_{m'},\ h_i\,(x) \equiv 1$, $s_i\,(y) = y^2,\ i \in I$, отримуємо (5.70).

Наслідок 5.7. Якщо (5.3) – це строге f–представлення E, то (5.70) є однокомпонентним (E.SR).

Зауваження 5.12. Умову (5.72) можна записати в еквівалентній формі:

$$\exists s_i(y) :\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1_+,\ s_i(y) \le 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Це показує, яким чином можна від (E.SR) переходити до (E.MR) та

(E.UR) заміною рівнянь $f_i(x) = 0$, $i \in J_m$, парами нерівностей $f_i(x) \geq 0$, $f_i(x) \leq 0$, $i \in J_m$, із подальшим вилученням надлишкових із них. Цей приклад підтверджує, що в окремих випадках ослаблення знака рівності в f–представленні E приводить до побудови нового (E.FR). Цей спосіб використовується, наприклад, у методі точної квадратичної регуляризації [303–305].

Даний засіб, застосований до (B_n.PSpR), приводить до формування нестрогого f–представлення B_n:

$$f_1(x) = (x - 0.5\mathbf{e})^2 - \frac{n}{4} \geq 0;$$
$$f_{i+1}(x) = x_i - 1 \leq 0,\ f_{i+n+1}(x) = -x_i \leq 0,\ i \in J_n$$

(далі ($B_n.UR1$)), що задає цю множину як перетин одиничного гіперкуба і доповнення до відкритої одиничної кулі.

Згортка нестрогої частини f–представлень може бути проведена на основі виділення у ній двосторонніх нерівностей. Так, подвійне обмеження $f' \leq f(x) \leq f''$, де $f' < f''$, представляється у вигляді модульного обмеження:

$$|f(x) - f^0| \leq \delta^0, \text{ де } f^0 = \frac{1}{2}(f' + f''),\ \delta^0 = \frac{1}{2}(f'' - f') > 0, \qquad (5.75)$$

що дозволяє скоротити порядок f–представлення на одиницю.

Застосувавши цей засіб до нестрогої частини (B_n.PSpR), отримуємо f–представлення (далі ($B_n.MR1$)) вигляду:

$$f_1(x) = (x - 0.5\mathbf{e})^2 - \frac{n}{4} = 0;\ f_{i+1}(x) = \left|x_i - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2},\ i \in J_n.$$

Як видно, скорочення порядку f–представлення привело до його переведення з класу квадратичних у клас опуклих неполіноміальних. Переписавши першу нерівність у (5.75) у формі: $|f(x) - f^0|^\alpha \leq (\delta^0)^\alpha$, $\alpha > 1$, можна запропонувати інші f–представлення на основі згортки. Так, вибір $\alpha = 2$ приводить до побудови f_{P_2}–представлення (далі ($B_n.MR4$)) вигляду:

$$f_1(x) = (x - 0.5\mathbf{e})^2 - \frac{n}{4} = 0;\ f_{i+1}(x) = x_i^2 - x_i \le 0,\ i \in J_n.$$

Ще один спосіб – це задання нестрогої частини f–представлень у формі $\varphi_{m'+i}(x) \le 1,\ i \in J_{m''}$, що завжди здійснене діленням обох частин обмежень, заданих функціями $f_i(x) = h_i(x) - h_i(\mathbf{0})$, на $h_i(\mathbf{0})$, якщо $h_i(\mathbf{0}) \ne 0$, або додаванням одиниці до обох частин нерівностей, якщо $h_i(\mathbf{0}) = 0$ ($i \in J_{m''}$), із таким представленням нестрогої частини f–представлення у вигляді:

$$\max_{i \in J_{m''}} \varphi_{m'+i}(x) \le 1. \tag{5.76}$$

Заміна нестрогої частини f–представлення нерівністю (5.76) скорочує його порядок на величину $m - 1$, але приводить, як правило, до негладкості нового f–представлення.

Так, застосувавши цей прийом до (B_n.PspR), отримаємо двокомпонентне негладке f–представлення (далі ($B_n.MR3$)):

$$f_1(x) = (x - 0.5\mathbf{e})^2 - \frac{n}{4} = 0;\ f_2(x) = \max_{i \in J_n} |2x_i - 1| \le 1,$$

що в термінах l_p-норми представляється у вигляді

$$f_1(x) = \|x - 0.5\mathbf{e}\|_2^2 - \frac{n}{4} = 0;\ f_2(x) = \|x - 0.5\mathbf{e}\|_\infty \le \frac{1}{2^n}.$$

(B_n.MR3) показує, що застосування норм – це ще один спосіб формування f–представлень.

5.6 Релаксації та еквівалентні моделі $\mathcal{C}$-множин

Формалізуємо та розширимо результати попереднього пункту, що стосуються перетворень строгих f–представлень, у термінах ідеалів $\mathcal{C}$–множин. Далі розповсюдимо їх на нестрогі f–представлення.

Як було зазначено вище, RV $E'(\mathcal{F})$ вигляду (5.20), що задана сім'єю $\mathcal{F}$ неперервних функцій на $K \subseteq E$ функцій, є неперервною моделлю $\mathcal{C}$–множини E (E.CM), якщо виконана умова (5.21). E.CM називатимемо *незвідною $E.CM$* (an irredundant E.CM, $E.ICM$), якщо виконана умова (5.23).

Для випадку, коли (5.21) порушується, також введемо два класи моделей, а саме RV $E'(\mathcal{F})$ називатимемо: а) *релаксаційною неперервною моделлю* E (a relaxation E.CM, $E.RCM$), якщо $E \subset E'(\mathcal{F})$; б) *посиленою неперервною моделлю* E (a toughened E.CM, $E.TCM$), якщо $E \supset E'(\mathcal{F})$.

Таким чином, задача побудови (E.SR) належить класу задач формування E.CM, у той час як задача побудови (E.IR), зокрема (E.ISR), – є задачею побудови E.ICM.

Нехай $E'(\mathcal{F})$ – E.CM, а

$$E''(\mathcal{F}'') = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i''(x) = 0,\ \forall f_i'' \in \mathcal{F}''\}, \tag{5.77}$$

де $f_i'' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $f_i'' \in \mathcal{F}'' \subset \mathbf{C}(K'')$, де $K'' \supset E$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}''$, при цьому $\mathcal{F}'' \neq \mathcal{F}$.

Якщо $E''(\mathcal{F}'')$ також є E.CM, RVs $E'(\mathcal{F})$ та $E''(\mathcal{F}'')$ називатимемо *еквівалентними неперервними моделями* $\mathcal{C}$–множини E (equivalent E.CMs, $E.ECMs$). Умову, яка відображає, що $E'(\mathcal{F}), E''(\mathcal{F}'')$ задають у просторі одну і ту саму FPC, представлятимемо так:

$$E'(\mathcal{F}) \cong E''(\mathcal{F}''), \tag{5.78}$$

Аналогічно, якщо $\mathcal{F}''$ задає у просторі власну надмножину E, тобто

$$E'(\mathcal{F}) \subset E''(\mathcal{F}''), \tag{5.79}$$

$E''(\mathcal{F}'')$ буде E.RCM. Якщо

$$E'(\mathcal{F}) \supset E''(\mathcal{F}''), \tag{5.80}$$

$E''(\mathcal{F}'')$ являтиме собою E.TCM.

Нехай $E'(\mathcal{F})$ – E.ICM. Наведемо декілька шляхів побудови еквівалентних E.CMs.

Теорема 5.11. Нехай $E''(\mathcal{F}'')$ є RV вигляду (5.77), тоді:

– $E''(\mathcal{F}'')$ є E.ICM, якщо $f_i \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}'' = h(f_i) \cup \mathcal{F} \backslash \{f_i\}, \tag{5.81}$$

$$h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 : h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0. \tag{5.82}$$

Зокрема, якщо $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+$, $\forall f_i \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1_{>0}$, $\mathcal{F}'' = f_i^\alpha \cup \mathcal{F} \backslash \{f_i\}$, або якщо $f_i \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1_{>0}$, $\mathcal{F}'' = |f_i|^\alpha \cup \mathcal{F} \backslash \{f_i\}$;

– $E''(\mathcal{F}'')$ буде E.CM, якщо $\mathcal{F}'' = F(\mathcal{F}) \cup \mathcal{F}$, де $F(\mathcal{F})$ – результат арифметичних операцій над елементами $\mathcal{F}$, таких як додавання, віднімання, множення, підведення до невід'ємного степеня, наприклад, $f_i, f_j \in \mathcal{F}$, $k_i, k_i \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^1_{>0}$ та

$$\mathcal{F}'' = \{k_i f_i + k_j f_j\} \cup \mathcal{F} \text{ або } \mathcal{F}'' = \{f_i \cdot f_j\} \cup \mathcal{F}, \text{ або } \mathcal{F}'' = \{f_i^\alpha\} \cup \mathcal{F}.$$

Якщо $f_i,\ f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+,\ f_i, f_j \in \mathcal{F}$, $k_i, k_i \geq 0, k_i + k_j = 1$, то для

$$\mathcal{F}'' = k_i f_i + k_j f_j \cup \mathcal{F} \backslash \{f_i, f_j\}$$

має місце: а) (5.78), якщо $k_i, k_j > 0$; б) (5.79), якщо $k_i \cdot k_j = 0$.

Зазначимо, що якщо (5.81) виконано, а (5.82) – ні, $E''(\mathcal{F}'')$ буде E.RCM.

Перейдемо до розгляду нестрогих та змішаних f–представлень, тобто до випадку $m'' > 0$. Виділимо у (5.1) дві частини:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathbf{1}} \cup \mathcal{F}^{\mathbf{2}}, \mathcal{F}^1 = \{f_i(x)\}_{i \in J_{m'}},\ \mathcal{F}^2 = \{t_j(x)\}_{j \in J_{m''}}, \tag{5.83}$$

де $t_j(x) = f_{j+m'}(x)$, $j \in J_{m''}$.

Узагальненням (5.20) на цей випадок буде точкова конфігурація, задана функціональними обмеженнями загального виду:

$$E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0,\ \forall f_i \in \mathcal{F}^1;\ t_j(x) \leq 0,\ \forall t_j \in \mathcal{F}^2\}.$$

Дане RV також називатимемо E.CM. Відповідно, якщо $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2$ породжує (E.IR) вигляду (5.3), (5.4), $E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ називатимемо E.ICM.

У даному випадку, задача формування E.CM може бути сформульована як проблема пошуку $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$:

$$E = E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2), \tag{5.84}$$

а проблема пошуку E.ICM як задача пошуку E.CM, що задовольняє (5.14).

Нехай умова (5.84) виконана. Узагальнимо поняття E.ECMs, E.RCM, E.UCM і відповідні умови (5.78)-(5.80). Отримаємо умову еквівалентності пари E.CMs:

$$E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2) = E''(\mathcal{F}^{''1}, \mathcal{F}^{''2}). \tag{5.85}$$

Крім того, $E''(\mathcal{F}^{''1}, \mathcal{F}^{''2})$ є E.RCM, якщо $E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2) \subset E''(\mathcal{F}^{''1}, \mathcal{F}^{''2})$ та E.TCM у разі $E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2) \supset E''(\mathcal{F}^{''1}, \mathcal{F}^{''2})$.

Теорема 5.12. Нехай $E'(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ є E.ICM, тоді має місце (5.85), якщо:

а) $f_i \in \mathcal{F}^{''1}$ і

$$\mathcal{F}''^1 = \mathcal{F}^1 \backslash \{f_i\}, \mathcal{F}''^2 = \mathcal{F}^2 \cup \{f_i, -f_i\};$$

б) $f_i \in \mathcal{F}''^1$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+$ та

$$\mathcal{F}''^1 = \mathcal{F}''^1 \backslash \{f_i\}, \mathcal{F}''^2 = \mathcal{F}''^2 \cup \{f_i\};$$

в) $f_i, f_j \in \mathcal{F}^1$, $t_{i'}, t_{j'} \in \mathcal{F}^2$, $k_i, k_j \in \mathbb{R}^1$, $k'_{i'}, k'_{j'} \in \mathbb{R}^1_+$ та $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}$, де $\mathcal{F}' = \{k_i f_i + k_j f_j, k'_{i'} t_{i'} + k_j f_j, k'_{i'} t_{i'} + k'_{j'} t_{j'}, f_i \dot{f}_j, f_i \dot{h}_{j'}, h_{i'} \dot{h}_{j'}\}$;

г) якщо h задовольняє умову (5.82), а h' – зростаюча, така що $h' : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 : h'(\mathbf{0}) = 0$, а $\mathcal{F}''$ сформовано одним із способів:

$$\mathcal{F}'' = h(f_i) \cup \mathcal{F} \backslash \{f_i\}, \text{ або } \mathcal{F}'' = h'(t_j) \cup \mathcal{F} \backslash \{h_j\}.$$

Теореми 5.11, 5.12 узагальнюють способи перетворень f–представлень, наведені у п. 5.2, а їх доведення ґрунтується на застосуванні теореми 5.1.

5.7 Висновки за розділом 5

У даному розділі викладено основні положення теорії неперервних функціональних представлень $\mathcal{C}$–множин (f–представлень), які задають множини е-конфігурацій системами рівнянь і/або нерівностей, що зв'язують неперервні функції, задані на $\mathcal{C}$–множинах. Наведено класифікацію f–представлень, зокрема виділено класи поліноміальних та опуклих f–представлень, та представлено основні підходи до їх побудови залежно від їх типу та обраного інструментарію – алгебраїчна геометрія (AG), C-A або G-A. Засоби C-A, G-A та дійсної алгебраїчної геометрії, узагальненої з кільця поліномів на кільце неперервних функцій, використано в комплексі, зокрема, для викладення основних підходів до побудови еквівалентних та релаксаційних моделей $\mathcal{C}$–множин як інструменту математичного моделювання екстремальних задач на цих множинах.

Серед розглянутих класів f–представлень $\mathcal{C}$–множин особливу увагу приділено опуклим, що дозволяє застосування властивостей опуклих функцій при зведенні ECOPs на цих множинах до задач глобальної оптимізації. Особливу увагу приділено двом класам опуклих f–представлень – поліедрально-поверхневим і дотичним, які за умови побудови поліноміальних f–представлень гарантують мінімальний степінь перших і мінімальний порядок останніх. Викладено загальні підходи до їх побудови.

Інтерес до побудови f–представлень викликаний тим, що вони дозволяють моделювання $\mathcal{C}$–множин, заданої як FPC, аналітичними засобами, що відкриває нові перспективи розв'язання екстремальних задач на цих множинах неперервними методами. Так, f–представлення дозволяє довільну задачу комбінаторної оптимізації записати в формі задачі на умовний екстремум, а в окремих випадках – класичної задачі на умовний екстремум. Знаходження цієї моделі обґрунтовує можливість застосування методів нелінійного програмування до розв'язання ECOPs та актуальність дослідження методів побудови f–представлень як перспективного підходу до моделювання $\mathcal{C}$–множин, їх реалізації для окремих класів $\mathcal{C}_b$–множин, а також порівняння, у т.ч. із точки зору ефективності застосування в оптимізації.

Основні результати п'ятого розділу опубліковано у роботах $[181, 182, 185–189, 254, 313, 317–319, 321, 328, 329, 333, 369]$.

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел $[2, 16, 36, 60, 79, 90, 92, 100, 110, 157, 171, 194, 218, 245, 251, 282, 303–305, 374, 378]$.

6 НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ $\mathcal{C}_b$-МНОЖИН

Нехай E – $\mathcal{C}_b$-множина, така що G – E.IM, $\mathcal{A}$ – E.GS, $|G| = \eta$, $k = |\mathcal{A}| = k_j$, $j \in J_n$. Виходячи із проведених вище досліджень та класифікації, представимо різні способи аналітичного опису умови $x \in E$.

6.1 f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин на основі С-А

Аналітично представимо деякі з обмежень, за якими формувалася $\mathcal{A}/G/n$-типологія $\mathcal{C}$-множин. Далі сформуємо f-представлення деяких $\mathcal{C}_b$-множин, комбінуючи відповідні обмеження, демонструючи таким чином Спосіб 5.2 формування f-представлень.

Умова $E \subseteq Grid$. Представимо умову (2.48) у вигляді $x_j \in \mathcal{A}$, $j \in J_n$. Інше її представлення – $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} H_{ij}$, $j \in J_n$, де $\{H_{ij}\}_{i,j}$ – гіперплощини (3.57). Враховуючи, що гіперплощини задаються строгими однокомпонентними лінійними f-представленнями, а їх об'єднання, за теоремою 5.1 (частина б), можна задати добутком їх компонент, отримуємо f-представлення решітки $Grid$ вигляду:

$$(\mathit{Grid.SR1}) \qquad \prod_{i=1}^{k} (x_j - e_i) = 0, \ j \in J_n.$$

Так, наприклад, (B_n.SR1) є окремим випадком ($Grid$.SR1), що відповідає $k = 2$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Ще одним f-представленням $Grid$ буде:

$$(\mathit{Grid.SR2}) \qquad \prod_{i=1}^{k} (x_j - e_i)^2 = 0, \ j \in J_n.$$

Особливістю ($Grid$.SR2) є те, що $f_{ij} = (x_j - e_i)^2 \geq 0$, причому $f_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_j - e_i = 0$ ($i \in J_k$, $j \in J_n$). Відповідно, це дозволяє використати теорему 5.11 (частина а) і згорнути компоненти ($Grid$.SR2), отримавши однокомпонентне f_{P_k}-представлення $Grid$:

$$(Grid.SR3) \qquad \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}(x_j-e_i)^2=0.$$

Якщо E – $\mathbb{U}(\Delta).S$, f-представлення відповідної $Grid$ (далі $Grid_\Delta$) можна побудувати з використанням періодичних функцій. Так, $\cos(2\pi x_i)-1=0,\ i\in J_n \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}^n$, тому має місце змішане тригонометричне f-представлення:

$$(Grid_\Delta.MR4) \qquad 1-\cos\tfrac{2\pi}{\Delta}(x_i-e_1)=0,\ e_1\le x_i\le e_k,\ i\in J_n.$$

Враховуючи невід'ємність функцій $1-\cos\frac{2\pi}{\Delta}(x_i-e_1),\ i\in J_n$, можна скористатися результатом теореми 5.11 (частина б), у результаті чого одержуємо нове f-представлення:

$$(Grid_\Delta.MR5) \qquad n-\sum_{i=1}^{n}\cos\tfrac{2\pi}{\Delta}(x_i-e_1)=0,\ e_1\le x_i\le e_k,\ i\in J_n.$$

Наостанок, виходячи з невід'ємності лівих частин рівнянь f-представлень ($Grid$.SR2)-($Grid_\Delta$.MR5), знаки рівності в них можна замінити знаком $\le$, у результаті будуть отримані нестрогі f-представлення ($Grid$.UR2)-($Grid_\Delta$.UR5), відповідно. Враховуючи, що $Grid=\overline{E}_k^n(G)$, таким чином, знайдено ряд f-представлень $\mathcal{C}_b$-множини розміщень із повтореннями. Наприклад,

$$(\overline{E}_k^n(J_n).\mathrm{UR3}): \quad \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}(x_j-i)^2=0;$$
$$(\overline{E}_k^n(J_n^0).\mathrm{UR5}): \quad n-\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{\Delta}x_i\le 0,\ 0\le x_i\le n,\ i\in J_n.$$

Оскільки B_n, B_n' є окремими випадками $Grid_\Delta$, що відповідають $\mathcal{A}=\{0,1\}$ та $\mathcal{A}=\{-1,1\}$, автоматично усі наведені f-представлення цієї множини застосовні до цих $\mathcal{C}_b$-множин. Серед них наведене вище (B_n.SR1), бінарним аналогом якого є (B'_n.SR1) – $x_i^2 - 1 = 0$, $i \in J_n$. Прикладом тригонометричного представлення B_n є ($Grid_1.MR4$) для $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Його вигляд – $\cos 2\pi x_i = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i \in J_n$.

Умова: E – $\mathcal{R}^- S$. Умову (2.67) легко записати в декартових координатах, виходячи з її змісту – $x_i \neq x_j,\ 1 \leq i < j \leq n$. Представимо її так:

$$|x_i - x_j|^r \geq \delta^r,\ 1 \leq i < j \leq n, \tag{6.1}$$

де $r \in \mathbb{R}^1_{>0}$, $\delta = \min\limits_{i \in J_{k-1}} \{e_{i+1} - e_i\}$. Звідси безпосередньо слідує:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^r \geq \delta^{rC_n^2}. \tag{6.2}$$

І хоча (6.2) є релаксацією умови (6.1), для дискретної області, що розглядається, вона також виражає умову (2.67). До того ж $f(x) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^r \in \Phi^{sym}$, отже, для $\mathcal{P}$S E умову (6.2) можна посилити до: $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^r \geq \Delta_r$, де $\Delta_r = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} |e_i - e_j|^r$, або навіть до

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^r = \Delta_r. \tag{6.3}$$

f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин без повторень. Додавання у f-представлення $Grid$ однієї з умов (6.1), (6.2) дозволяє сформувати нестрогі або змішані f-представлення C_b-множин перестановок та розміщень без повторень. Так, наприклад, ($Grid$.SRl) у сукупності з (6.1) є змішаним f-представленням $E_k^n(G)$ (далі ($E_k^n(G).MR1$)), а ($Grid$.UR2) із (6.2) – нестрогим f-представленням $E_k^n(G)$ (далі ($E_k^n(G).UR2$)).

Для $E_n(G)$ врахуємо, що $\eta = n = k$, тобто в усіх наведених вище ($Grid$.FRs) можлива заміна $k \to n$. Для визначеності, $Grid$ у даному випадку позначатимемо $Grid'$. У результаті отримуємо ряд ($Grid'$.FRs).

Так, $(Grid'.SR1)$ матиме вигляд $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_j - e_i) = 0,\ j \in J_n$, а $(Grid'.UR2)$ – $\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_j - e_i)^2 \le 0$.

Комбінуючи f-представлення $Grid'$ із (6.1) або (6.2), отримаємо змішані та нестрогі f-представлення $E_n(G)$. Серед них представлення $E_n(G)$ вигляду ($Grid'$.SR1), (6.1) (далі $(E_n(G).MR1)$), а також f-представлення ($Grid'$.UR2), (6.2) (далі $(E_n(G).UR2)$). ($Grid$.SR1)-($Grid$.SR3), доповнені умовою (6.3) (далі $(E_n(G).SR1)$-$(E_n(G).SR3)$), є прикладами строгих f-представлень $E_n(G)$.

f-представлення $E_n^e(G)$, $E_n^o(G)$. За теоремою 5.2, для того, щоб виділити $E_n^e(G)$ з $E_n(G)$, достатньо додавання до ($E_n(G)$.FR) одного обмеження, що задається функцією з сім'ю $\overline{\Phi}(E_n(G))$, відмінну від нуля на $E_n^o(G)$. За таке обмеження оберемо рівняння, що визначається поліномом Вандермонда (the Vandermonde polynomial):

$$F(x) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) \in \Phi_n^a.$$

Згідно з (2.50) та $g \in E_n^e(G)$, маємо: $F(x) \underset{E_n^e}{=} F(g) > 0$, $F(x) \underset{E_n^o}{=} -F(g) < 0$, отже,

$$\prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n}(g_j - g_i) \tag{6.4}$$

є обмеженням, що виділяє $E_n^e(G)$ з $E_n(G)$, та

$$\prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = -\prod_{1 \le i < j \le n}(g_j - g_i) \ - \tag{6.5}$$

умовою виділення $E_n^o(G)$ з $E_n(G)$. Комбінуючи знайдені вище ($E_n(G)$.FRs) із (6.4) або (6.5), одержуємо f-представлення цих двох $\mathcal{C}_b$-множин. Наприклад, ($E_n(G)$.SR1) разом із (6.4) задають строге f-представлення $E_n^e(G)$ (далі $(E_n^e(G).SR1)$), а ($E_n(G)$.MR3) у сукупності із (6.5) визначають $E_n^o(G)$ (далі $(E_n^o(G).MR3)$).

f-представлення B_n^h, $\overline{B}_n^h$. Розглянемо спочатку питання побудови f–представлень множин $B_n'^h$, $\overline{B}_n'^h$. За теоремою 5.2, виділення цих $\mathcal{C}_b$-множин із B_n' забезпечується додаванням до (B_n'.FR) єдиного обмеження, що визначається функцією з сім'ї Φ_n^{odd}. Одна з таких функцій – це $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \in \Phi_n^{odd}$.

Згідно з (5.38),

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \underset{x \in B_n'^h}{=} \alpha_n, \text{ де } \alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \mod 2 \equiv 0, \\ -1, & \text{якщо } n \mod 2 \equiv 1. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Тому рівняння $f(x) = \alpha_n$, де α_n та $f(x)$ задовольняє (6.6), доповнене f-представленням B_n', є ($B_n'^h$.FR). Наприклад, (B_n'.SR1) з (6.6) – строге f-представлення цієї множини (далі ($B_n'^h$*.SR1*)).

Аналогічно для виділення $\overline{B}_n'^h$ із $\overline{B}_n'$, до (B_n'.FR) достатньо додати

$$f(x) = 1 - \alpha_n, \qquad (6.7)$$

де $f(x)$ та α_n знайдені з (6.6). Наприклад, бінарним аналогом (B_n.MR(2)) є

$$(B_n'.MR(2)): \; x^2 - n = 0; \; -1 \le x_i \le 1, \; i \in J_n,$$

яке, разом із (6.7), є f-представленням $\overline{B}_n'^o$ (далі ($\overline{B}_n'^o$*.MR(2)*)).

Здійснюючи заміну $x \to \frac{1}{2}(x + \mathbf{e})$ у (6.6), маємо $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i+1}{2} \underset{x \in B_n^h}{=} \alpha_n$ або

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i + 1) \underset{x \in B_n^h}{=} 2^n \alpha_n. \qquad (6.8)$$

Звідси маємо – довільне (B_n.FR) разом із (6.8) є (B_n^e.FR), а разом із

$$f(x) = 2^n (1 - \alpha_n) \qquad (6.9)$$

є (B_o^e.FR), при цьому α задовольняє умову (6.6). Так, строге f-представлення

B_n^e, що відповідає ($B_n'^e$.SR1), має вигляд (B_n.SR1), (6.8) (далі (B_n^e*.SR1*)); змішане f-представлення B_n^o, що відповідає ($B_n'^o$.MR(2)), має вигляд (B_n.MR(2)), (6.9) (далі (B_n^o*.MR(2)*)).

6.2 Поліедрально-поверхневі f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин: $m = 1$

У розділі 4 наведені властивості таких базових множин евклідових комбінаторних конфігурацій, як загальні $\mathcal{C}_b$-множини перестановок $E_{nk}(G)$, розміщень $E_{\eta k}^n(G)$ і перестановок зі знаком $E_{nk}^{\pm}(G)$, а також їх векторні узагальнення та спеціальні класи і підмножини, такі, як $\mathcal{C}_b$-множина парних перестановок $E_n^e(G)$ і парних булевих векторів B_n^h тощо.

Усі вони, за винятком $E_{\eta k}^n(G)$, $k > 2$, є VLSs і PSpSs, тобто допускають побудову (E.PSpR). У класі $E_{\eta k}^n(G)$, $k > 2$, єдиним вершинно розташованим подкласом є ELSs класу $E_{n+1k}^n(G)$. Для всіх зазначених класів VLSs, у розділі 4 наведені рівняння описаної сильно опуклої поверхні S та незвідних H-представлень багатогранника P.

Комбінуючи рівняння S із (P.IHR), отримаємо конкретне (E.PSR), якщо E – повномірна, або цілі сім'ї (E.PSRs) у тих випадках, якщо $d_E < n$. Враховуючи незвідність H-представлень, що беруть у них участь, параметри утвореного (E.PSR) будуть задовольняти такі умови: $m'(E.\mathrm{PSR}) = m'(P.\mathrm{IHR}) + 1$, $m''(E.\mathrm{PSR}) = m''(P.\mathrm{IHR}) = |\mathbf{H}(P)|$, $m(E.\mathrm{PSR}) = m(P.\mathrm{IHR}) + 1$.

Обмежимося класом квадратичних PSRs $\mathcal{C}_b$-множин, а серед PSpRs – тими, що мають мінімальний радіус. Так, для $E_{nk}(G)$, комбінуючи (4.50) із одним з H-представлень ($\Pi_{nk}(G)$.IHR1)-($\Pi_{nk}(G)$.IHR3) та ($\Pi_{nk}(G)$.HR^I), отримаємо чотири поліедрально-сферичні представлення (далі відповідно, ($E_{nk}(G)$*.PSpR1*)-($E_{nk}(G)$*.PSpR3*), ($E_{nk}(G)$*.PSpR*^{I})). Вибираючи замість (4.50) рівняння еліпсоїда (4.52), отримуємо набір поліедрально-еліпсоїдальних представлень $E_{nk}(G)$ (далі ($E_{nk}(G)$*.PER1*)-($E_{nk}(G)$*.PER3*), ($E_{nk}(G)$*.PER*^{I}) відповідно).

Для $E_{\eta k}^n(G)$, поліедрально-еліпсоїдальне представлення отримується доповненням $(\Pi_{\eta k}^n(G))$ рівнянням (4.56) із параметрами (4.57). Для $E_{\eta 2}^n(G)$, що є ще одним класом VLSs серед $\mathcal{C}_b$-множин розміщень, PSpR достатньо навести для $B_n(m_1, m_2)$. Його вигляд (далі $(B_n(m_1, m_2).PSpR)$) – рівняння (2.117), доповнене: а) $(PB_n(m_1, m_2)$.IHR) при $1 < m_1, m_2 < n$; б) $(PB_n(m_1, n)$.IHR) при $m_1 > 1, m_2 = n$; в) $(PB_n(0, m_2)$.IHR) при $m_1 = 1, m_2 < n$; г) $(PB_n$.IHR) при $m_1 = 0; m_2 = n$.

Для $E_{nk}^{\pm}(G)$, PSpR має вигляд $(\Pi_{nk}^{\pm}(G)$.IHR) плюс рівняння гіперсфери (4.62). Подібно до $E_{nk}(G)$, доповнюючи $(\Pi_n^e(G)$.IHR) рівнянням (4.50), маємо PSpR множини $E_n^e(G)$, а рівнянням (4.52) – її PER. Так само, $(PB_n^h$.IHR) із (2.117) дає $(B_n^h$.PSpR).

PSpRs/PERs базових полімножин, породжених вищезазначеними $\mathcal{C}_b$-множинами, що є PSpRs, одержується об'єднанням H-представлень відповідних $\mathcal{C}_b$-багатогранників та додаванням до них рівнянь описаних гіперсфер/еліпсоїдів навколо складових $\mathcal{C}_b$-множин [333, 369].

6.2.1 PSRs $\mathcal{C}_b$-множин на базі релаксацій

Продемонструємо цей прийом на прикладі $E = E_{nk}(G)$. Скористаємося $(\Pi_{nk}(G).\mathrm{HR}^I)$, яке представимо у такій формі:

$$|\sum_{j\in\omega} x_j - c_{|\omega|}| \leq d_{|\omega|},\ \omega \subset J_n, \tag{6.10}$$

$$\text{де } c_{|\omega|} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{|\omega|}(g_j + g_{n-j+1}),\ d_{|\omega|} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{|\omega|}(g_{n-j+1} - g_j),\ \omega \subset J_n.$$

Вибираючи $i \in J_n$, підводячи для $\omega \subset J_n$ таких, що $|\omega| = i$, обидві частини нерівностей (6.10) до степеня $\alpha \in (1, \infty)$ та додаючи одержані нерівності (6.10), отримаємо

$$C_i^\alpha: \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} x_j - c_i|^\alpha \le C_n^i d_i^\alpha, \tag{6.11}$$

За побудовою C_i^α є строго опуклим тілом і таким, що $E \subseteq C_i^\alpha$, тобто є $E_{nk}(G)$.RCM. Між тим, у лівій частині (6.11) стоїть симетрична функція, отже, виконано

$$\sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} x_j - c_i|^\alpha \underset{E_{nk}(G)}{=} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} g_j - c_i|^\alpha. \tag{6.12}$$

Це рівняння задає строго опуклу поверхню S_i^α, описану навколо E, яку можна вибирати як нелінійну компоненту PSRs даної $\mathcal{C}_b$-множини. Комбінуючи (6.12) для різних $i \in J_n$, одержуємо інші описані навколо E гіперповерхні. Представимо це таким чином: нехай $I \subset J_n$, $I \neq \emptyset$,

$$S_I^\alpha: \sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} x_j - c_i|^\alpha = \sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} g_j - c_i|^\alpha.$$

Ще одна сім'ю $S_I'^\alpha$ строго опуклих поверхонь, описаних навколо $E_{nk}(G)$, одержуємо, комбінуючи рівняння S_I^α із рівнянням площини (4.21), у якій лежить ця множина, наприклад, таким чином:

$$\sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} x_j - c_i|^\alpha + (\sum_{i=1}^n x_i)^\alpha = \sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} |\sum_{j\in\omega} g_j - c_i|^\alpha + (\sum_{i=1}^n g_i)^\alpha.$$

Цей спосіб також можна використати для побудови строго описаних поверхонь, відмінних від гіперсфери, еліпсоїда та суперсфери для інших множин, пов'язаних із перестановками, наприклад, для $E_n^e(G)$. Для множини $E_{nk}^\pm(G)$, враховуючи її симетрію відносно $\mathbf{0}$, він дає такі рівняння описаних поверхонь для обраних $I \subset J_n$, $\alpha \in (1, \infty)$:

$$S_i^\alpha: \sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} \sum_{j\in\omega} |x_j|^\alpha = \sum_{i\in I} \sum_{\omega\subset J_n, |\omega|=i} \sum_{j\in\omega} |g_j|^\alpha.$$

Зазначимо, що при застосуванні даного способу до дворівневих $\mathcal{C}_b$-множин, таких як B_n, $B_n(i,i+1)$, $B_n^{\pm}(1)$, границею тіла C_i^{α} буде безпосередньо S_i^{α}, тобто $S_i^{\alpha} = \partial C_i^{\alpha}$. Аналогічно, $S_I^{\alpha} = \partial C_I^{\alpha}$ для випадку $|I| > 1$.

6.3 Строгі n-компонентні f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин: $m = 1$

У даному пункті, наведемо деякі строгі f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин порядку щонайменше n та вкажемо умови, при яких вони є пересічними. Як основний засіб побудови, використаємо С-А. Крім того, застосовуватимемо зв'язок е-конфігурацій із відображеннями.

6.3.1 Пересічні $E_{nk}(G)$-представлення

Нехай $E = E_{nk}(G)$ – це $\mathcal{C}_b$-множина перестановок з повтореннями, тобто виконана умова $n > k$. У даному випадку умова (6.2) не дозволяє виділити E з $Grid$, оскільки $\delta = 0$. У той же час, згідно з теоремою 5.1, функція $f_r(x)$ вигляду (6.3) набуває постійного значення на множині E, адже $f_r(x) \in \Phi^{sym}$. Перевіримо, чи дозволяє умова (6.3) виділити E. Як видно, умова (5.30) у теоремі 5.2 не справджується, адже вона виконана на усіх е-конфігураціях з повтореннями, що лежать у $Grid$, а не тільки у точках E. Отже, для побудови f-представлень $E_{nk}(G)$ потрібні інші засоби.

У наступній теоремі покажемо інший спосіб побудови SRs $\mathcal{C}_b$-множин, що ґрунтується на їх С-А, стосується Способу 5.2 побудови f-представлень і полягає у аналітичному записі умови $n = \eta$, яку можна також представити у формі: $\forall x \in E_{nk}(G)$

$$\{x_1, ..., x_n\} = \{g_1, ..., g_n\}, \tag{6.13}$$

із подальшим розглядом отриманих співвідношень як рівнянь поверхонь у просторі.

Теорема 6.1. Кожна із систем рівнянь

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega}x_i=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega}g_i,\ j\in J_n, \tag{6.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^j=\sum_{i=1}^{n}g_i^j,\ j\in J_n, \tag{6.15}$$

задає строге неперервне функціональне представлення множини $E_{nk}(G)$.

Позначимо (6.14) – ($E_{nk}(G).SR1$), (6.15) – ($E_{nk}(G).SR2$).

Доведення дивись у додатку В.5.

Зауваження 6.1. Достатньою умовою виконання (5.16) для f-представлень $E_{nk}(G)$ є

$$k\geq 3. \tag{6.16}$$

Таким чином, (6.16) є достатньою умовою того, щоб f-представлення (6.14), (6.15) були незвідними, інакше кажучи, являли собою ($E_{nk}(G)$.IIRs). Як буде показано далі, для випадку, коли (6.16) не виконана, тобто при $k=2$, в окремих випадках ($E_{n2}(G)$.SRi), $i=1,2,$ – звідні, і з них можуть бути виділені дотичні f-представлення цих $\mathcal{C}_b$-множин.

Наслідок 6.1. Кожна із систем рівнянь

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega}x_i=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega}e_i,\ j\in J_n;$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^j=\sum_{i=1}^{n}e_i^j,\ j\in J_n,$$

є строгим пересічним f-представленням $E_n(G)$ (у наших позначеннях це ($E_n(G)$.SR1), ($E_n(G)$.SR2) відповідно.

Наслідок 6.2. [333] Кожна із систем рівнянь

$$f_j(x)=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=j}}\prod_{i\in\omega}x_i-C_m^j=0,\ j\in J_m,\ f_j(x)=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=j}}\prod_{i\in\omega}x_i=0,\ j\in J_n\backslash J_{n-m};$$

$$f_j(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^j-m=0,\ j\in J_n.$$

є строгим f-представленням $B_n(m)$ (далі ($B_n(m).SR1$), ($B_n(m).SR2$) відповідно).

($E_{nk}(G)$.SR1), ($E_{nk}(G)$.SR2) для інших спеціальних класів $\mathcal{C}_b$-множини перестановок наведені у [333].

Сформулюємо узагальнення теореми 6.1.

Теорема 6.2. Якщо ξ – бієктивне відображення між елементами $\mathcal{E} = E_{nk}(G)$.GS й множиною $\mathcal{E}' = \left\{e_1^{'}, ..., e_k^{'}\right\} \in \mathbb{R}^1$, то кожна із систем рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(x_i)^j = \sum_{i=1}^{n} \xi(g_i)^j,\ j \in J_n; \tag{6.17}$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \xi(x_i) = \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \xi(g_i),\ j \in J_n, \tag{6.18}$$

задає строге неперервне функціональне представлення $\mathcal{C}$-множини $E_{nk}(G)$.

Доведення дивись у додатку B.5.

Скористаємося ($E_{nk}(G)$.SRi), $i = 1, 2$, у побудові SRs деяких класів $\mathcal{C}_b$-множин.

6.3.2 Розширені $E_{\eta k}^n(G)$-представлення

Теорема 6.3. Система рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{k} n_i e_i^j,\ j \in J_n, \tag{6.19}$$

$$\prod_{j=0}^{\eta_i} (n_i - j) = 0,\ i \in J_k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n, \tag{6.20}$$

є розширеним f-представленням множини $E_{\eta k}^n(G)$ (далі ($E_{\eta k}^n(G).ESR1$)).

Доведення дивись у додатку B.5.

6.3.3 Пересічні $E_{nk}^{\pm}(G)$-представлення

Наслідок 6.3. (з теореми 6.2) В умовах теореми 6.2,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi(x_i)|^j = \sum_{i=1}^{n} |\xi(g_i)|^j,\ j \in J_n;$$
$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j} \prod_{i\in\omega} |\xi\,(x_i)\,| = \sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j} \prod_{i\in\omega} |\xi\,(g_i)\,|,\ j \in J_n,$$

задає строге неперервне функціональне представлення $\mathcal{C}$-множини $E_{nk}^{\pm}\,(G)$ (далі $(E_{nk}^{\pm}\,(G).SR1)$).

Наслідок 6.4. (з теореми 6.2) В умовах теореми 6.2,

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(x_i)^{2j} = \sum_{i=1}^{n} \xi(g_i)^{2j},\ j \in J_n;$$
$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \xi^2\,(x_i) = \sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \xi^2\,(g_i),\ j \in J_n,$$

задає строге неперервне функціональне представлення $\mathcal{C}$-множини $E_{nk}^{\pm}\,(G)$ (далі $(E_{nk}^{\pm}\,(G).SR2)$).

Наслідок 6.5. [333] $\sum_{i=1}^{n} x_i^{2j} = \sum_{i=1}^{n} g_i^{2j},\ j \in J_n$, є строгим $f_{P_{2n}}$-представленням $E_{nk}^{\pm}\,(G)$ (далі $(E_{nk}^{\pm}\,(G).SR3)$).

Зауваження 6.2. Подібно до заув. 6.1, виконання (6.16) є достатньою умовою незвідності $(E_{nk}^{\pm}\,(G)$.SRi), $i = 1, 2$, а відповідно і їх пересічності. У той же час, умова (6.16) не виконується для $\mathcal{SSP}$Ss. Як виявляється, для цих множин ці f-представлення можуть бути звідними, більш того, дозволяють виділення з них деяких дотичних f-представлень (див. п. 6.4).

6.3.4 Строгі f-представлення $E_n^e\,(G)$, B_n^e

Твердження 6.1. Довільне $(E_n\,(G)$.SRi), доповнене умовою (6.4), є строгим f-представленням $E_n^e\,(G)$ (далі $(E_n^e\,(G).SRi)$), а будь-яке $(B_n$.SRi), доповнене рівнянням (6.8), – строге f-представлення B_n^e (далі $(B_n^h.SRi)$).

Вигляд знайдених SRs множин $E_{nk}(G), E_{nk}^{\pm}(G), B_{n'}$ демонструє, що обернені до (5.31), (5.33), (5.35) включення також вірні і має місце такий результат:

Теорема 6.4. $I(E_{nk}(G)) = \langle\Phi_n^{sym}(G)\rangle$, $I(B'_n) = \langle\Phi_n^e(\{\mathbf{e}\})\rangle$, $I(E_{nk}^{\pm}(G)) =$

$= \langle \Phi_n^{sym}(G) \rangle \cup \langle \Phi_n^e(G)) \rangle$.

6.4 Дотичні f-представлення $\mathcal{C}_b$-множин

6.4.1 Застосування TR.Scheme1

Виділимо у $(E_{nk}(G).\mathrm{SR1}(a))$ пару компонент: $f_{j_1}(x) = 0$, $f_{j_2}(x) = 0$, де $j_1 < j_2$, та дослідимо питання побудови дотичних f-представлень $\mathcal{C}$-множин на їх основі. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $a = \mathbf{0}$, отже, розглядається $(E_{nk}(G).\mathrm{SR1})$, а також $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i^{j_1} = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i^{j_2} = b$, у результаті чого приходимо до задачі (5.57) з

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_2},\ S = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_1} - 1 = 0\}. \tag{6.21}$$

(далі *Задача 6.4.*(j_1, j_2)), де

$$j_1,\ j_2 \in J_n \backslash \{1\},\ j_1 < j_2. \tag{6.22}$$

Розв'яжемо дану задачу для різних комбінацій j_1, j_2, попередньо виділивши серед них чотири групи – $\exists\, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$:

$$\text{Випадок 6.4.1}:\ \ l_1 < l_2,\ \ j_1 = 2l_1,\ \ j_2 = 2l_2; \tag{6.23}$$

$$\text{Випадок 6.4.2}:\ \ l_1 < l_2,\ \ j_1 = 2l_1 + 1,\ \ j_2 = 2l_2 + 1; \tag{6.24}$$

$$\text{Випадок 6.4.3}:\ \ l_1 < l_2,\ j_1 = 2l_1,\ \ j_2 = 2l_2 + 1; \tag{6.25}$$

$$\text{Випадок 6.4.4}:\ \ l_1 > l_2,\ j_1 = 2l_1,\ \ j_2 = 2l_2 + 1. \tag{6.26}$$

Теорема 6.5. Розв'язком Задачі 6.4.(j_1, j_2) буде:

– у Випадку 6.4.1 –

$$z^{\min} = n^{-\frac{j_2 - j_1}{j_1}},\ X^{\min} = \overline{E}_2^n\,(G)\,,\ \text{де}\ \ S\,(G) = \left\{-n^{-\frac{1}{j_1}},\ n^{-\frac{1}{j_1}}\right\}; \tag{6.27}$$

$$z^{\max} = 1,\ X^{\max} = CE_n\left(1\right); \tag{6.28}$$

– у Випадку 6.4.2 –

$$X^{\min} = x^{\min} = \mathbf{\Delta}^{\min} = \mathbf{n}^{-\frac{1}{j_1}}, \tag{6.29}$$

$$X^{\max} = \bigcup_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} E_{nk_j}\left(G^j\right), \tag{6.30}$$

$$G^j = \left\{-1^j, 0^{n-2j-1}, 1^{j+1}\right\},\ k_j = \left|S\left(G^j\right)\right| \in \{2, 3\},\ j \in J^0_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}; \tag{6.31}$$

– у Випадку 6.4.3 –

$$z^{\min} = -1,\ X^{\min} = -B_n(1); \tag{6.32}$$

$$z^{\max} = 1,\ X^{\max} = B_n(1); \tag{6.33}$$

– у Випадку 6.4.4 –

$$\begin{aligned} &z^{\min} = -n^{1-\frac{j_2}{j_1}},\ X^{\max} = x^{\max} = -\mathbf{n}^{-\frac{1}{j_1}}, \\ &z^{\max} = n^{1-\frac{j_2}{j_1}},\ X^{\max} = x^{\max} = \mathbf{n}^{-\frac{1}{j_1}}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Доведення дивись у додатку В.5.

Введемо у розгляд нову $\mathcal{C}$-множину, що виникла в ході доведення теореми 6.5 (див. (6.30)):

$$E = \bigcup_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} E_{nk_j}\left(G^j\right), \tag{6.35}$$

де G^j – трійкові мультимножини (6.31).

Теорема 6.5 дозволяє виписати ряд дотичних представлень множини (6.35) та деяких із введених вище $\mathcal{C}_b$-множин.

Наслідок 6.6. 1. Множина B'_n дозволяє дотичні f-представлення вигляду:

$$(B'_n.TR(j_1,j_2)):\ f_1(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_1}-n=0,\ f_2(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_2}-n=0,$$

де j_1, j_2 задовольняють умову (6.23).

2. Множина $B_n^{\pm}(1)$ дозволяє дотичні f-представлення вигляду:

$$(B_n^{\pm}(1).TR(j_1,j_2)):\ f_1(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_1}-1=0,\ f_2(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_2}-1=0,$$

де j_1, j_2 задовольняють умову (6.23).

3. Множина $B_n(1)$ має такі дотичні f-представлення:

$$(B_n(1).TR(j_1,j_2)):\quad f_1(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_1}-1=0,\ f_2(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_2}-1=0,$$

де j_1, j_2 задовольняють умову (6.25).

Множина (6.35) має дотичні f-представлення вигляду:

$$f_1(x)=\textstyle\sum_{i\in J_n} x_i^{j_1}-1=0,\ f_2(x)=\sum_{i\in J_n} x_i^{j_2}-1=0, \qquad (6.36)$$

де j_1, j_2 задовольняють умову (6.25) (далі $(E.TR(j_1,j_2))$).

Зауваження 6.3. Серед наведених у наслідку 6.6 дотичних f-представлень, мінімальний степінь мають: а) $(B'_n.\mathrm{TR}(2,4))$, $(B_n^{\pm}(1).\mathrm{TR}(2,4))$, що представляє бінарну $\mathcal{C}_b$-множину та множину $B_n^{\pm}(1)$ як перетин гіперсфери з суперсферою із коефіцієнтом деформації 2 (далі *біквадратної суперсфери*); б) $(B_n(1).\mathrm{TR}(2,3))$, що задає $\mathcal{C}_b$-множину $B_n(1)$ перетином гіперсфери і кубічної поверхні Ферма [161]; $(E.\mathrm{TR}(3,5))$, що представляє множину E вигляду (6.35) як перетин поверхні Ферма з поліноміальною поверхнею степеня 5. Саме ці f-представлення беремо у подальшому за основу і називатимемо "базовими"f-представленнями відповідної сім'ї.

Використовуючи зв'язок між B'_n та іншими множинами класу $\overline{E}_2^n(G)$, між $B_n^{\pm}(1)$ та класом $CE_n(r)$, на базі насл. 6.6 можна записати їх TRs [188, 333], серед яких дотичні f-представлення B_n (далі $(B_n.TR(j_1, j_2))$) вигляду:

$$f_l(x) = \sum_{i\in J_n} \left(\frac{x_i - 0.5}{2}\right)^{j_l} - \frac{n}{2^{j_l}} = 0,\ l = 1, 2, \tag{6.37}$$

де j_1, j_2 задовольняють умову (6.23). Це сім'я поліноміальних f-представлень B_n, що входить у сім'ю $(B_n.\mathrm{TR2}(j_1, j_2))$, $i_1.j_2 \in \mathbb{N}, i_1 < j_2$, і серед яких $(B_n.\mathrm{TR1}) = (B_n.\mathrm{TR}(2, 4))$.

Додавання рівняння $x\mathbf{e} = a$, де $a \in \mathbb{R}^1$ у дотичні f-представлення B_n та множини (6.35) дозволяє сформувати трикомпонентні строгі компоненти двох класів $\mathcal{C}_b$-множин, а обмеження на суму координат, дозволяє виділити $B_n(m_1, m_2)$ із B_n та побудувати змішане f-представлення цієї множини порядку не вище чотирьох.

Наслідок 6.7. $\mathcal{C}_b$-множина $B_n(m)$ має строге f-представлення порядку $m = 3$ вигляду (6.37),

$$f_3(x) = \sum_{i\in J_n} x_i - m = 0, \tag{6.38}$$

де $m \in J_{n-1}$, j_1, j_2 задовольняють умову (6.23) (далі $(B_n(m).SR(j_1, j_2))$).

Множина $B_n(m_1, m_2)$ має змішане f-представлення вигляду (6.37),

$$f_3(x) = \sum_{i\in J_n} x_i - m_2 \le 0;\ f_4(x) = -\sum_{i\in J_n} x_i + m_1 \le 0,$$

де $1 \le m_1 < m_2 \le n - 1$, j_1, j_2 задовольняють умову (6.23) (далі $(B_n(m_1, m_2).MR(j_1, j_2))$).

Трійкові $\mathcal{C}_b$-множини перестановок, що індуковані мультимножинами вигляду (6.31), мають строгі f-представлення вигляду (6.36), (6.38) (далі $(E_{nk_j}.SR(j_1, j_2))$), де k_j задовольняє умову (6.31), а j_1, j_2 – умову (6.25).

$\mathcal{C}_b$-множина B_n^h має строге f-представлення вигляду (6.8), (6.37) (далі $(B_n^h.SR(j_1, j_2))$), де j_1, j_2 задовольняють умову (6.25).

Зауваження 6.4. Серед SRs, наведених у насл. 6.7, базовими є

$(B_n(m).\mathrm{SR}(2,4))$, $(B_n(m_1,m_2).\mathrm{SR}(2,4))$, $(E_{nk_j}.\mathrm{SR}(2,3)))$, $(B_n^h.\mathrm{SR}(2,4)))$. Таким чином, $B_n(m)$, $B_n(m_1,m_2)$ мають строгі опуклі поліноміальні f-представлення степеня 4 і порядку 3; деякі трійкові $\mathcal{C}_b$-множини перестановок дозволяють строгі поліноміальні f-представлення третього степеня і порядку три; B_n^h дозволяє побудову f_{P_n}-представлення.

6.4.2 Застосування TR.Scheme2

У розділі 4 було виділено чотири класи дворівневих $\mathcal{C}_b$-множин – B_n, B_n', CE_n, $B_n(m)$, $B_n(m'-1,m'), m' \in J_n$. Для побудови їх TRs можна скористатися теоремами 5.8, 5.9.

Почнемо з B_n'. Враховуючи, що у $(PB_n'.\mathrm{IHR})$ відсутня строга частина, тобто $n' = 0$, скористаємося $(E.\mathrm{2LS.TR1})$ і отримаємо $f_0(x,2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n = 0$, $f_0(x,4) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 - n = 0$, що являє собою ($B_n'$.TR1(2,4)).

Аналогічно для $E = B_n^{\pm}(1)$ f-представлення $(E.\mathrm{2LS.TR1})$ матиме форму:

$$f_0(x,2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{y \in B_n'} (y_i x_i)^2 - 2^n = 0,\; f_0(x,4) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{y \in B_n'} (y_i x_i)^4 - 2^n = 0,$$

яке після спрощення перетворюється на $(B_n^{\pm}(1).\mathrm{TR}(2,4))$.

Для побудови TRs множин $B_n(m), m \in J_{n-1}$, скористаємося $(E.\mathrm{2LS.TR2})$, для чого перепишемо обмеження $\left(\dfrac{x_i - 0.5}{2}\right)^2 = 1/4$ у "нормованій"формі $(2x_i - 1)^2 = 1$ $(i \in J_n)$, звідки отримуємо TR цієї множини вигляду:

$$f_0(x,2) = \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1)^2 + \alpha_1^2 (\sum_{i=1}^{n} x_i - m)^2 - n = 0,$$
$$f_0(x,4) = \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1)^4 + \alpha_1^4 (\sum_{i=1}^{n} x_i - m)^4 - n = 0$$

(далі $(B_n(m).\alpha.\mathit{TR1})$), де $\alpha_1 \in [0,1]$ обрано згідно з (5.63) та яке представляє цю $\mathcal{C}_b$-множину як перетин еліпсоїда та біквадратної опуклої поверхні.

Ще одне TR множини цього класу побудуємо на базі $(B_n(m).\mathrm{HR}^I)$. Нормуванню підлягає обмеження $(n-1)x_i - \sum\limits_{j\neq i} x_j \in \{-m, -m+1, ..., n-m\}$, яке представимо у вигляді $|(n-1)x_i - \sum\limits_{j\neq i} x_j - \frac{n-2m}{2}| = \frac{n}{2}$ або $\frac{2}{n}|(n-1)x_i - - \sum\limits_{j\neq i} x_j - \frac{n-2m}{2}| = 1$. $(E.2\mathrm{LS.TR2})$ у даному випадку дає:

$$f_0(x,2) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((n-1)x_i - \sum_{j\neq i} x_j - \frac{n-2m}{2}\right)^2 + \alpha_1^2(\sum_{i=1}^{n} x_i - m)^2 - n = 0,$$
$$f_0(x,4) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((n-1)x_i - \sum_{j\neq i} x_j - \frac{n-2m}{2}\right)^4 + \alpha_1^4(\sum_{i=1}^{n} x_i - m)^4 - n = 0$$

(далі $(B_n(m).\alpha.\mathit{TR1})$), де $\alpha_1 \in [0,1]$ обрано з умови (5.63).

Зафіксуємо $m' \in J_n$. Для формування $B_n(m'-1, m')$, запишемо обмеження $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \dfrac{m'-1}{2}\right)^2 = 1/4$ у "нормованому"вигляді – $(2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m' + 1)^2 = 1$, звідки, використавши $(E.2\mathrm{LS.TR2})$, одержуємо дотичне f-представлення:

$$f_0(x,2) = \sum_{i=1}^{n}(2x_i-1)^2 + (2\sum_{i=1}^{n} x_i - m' + 1)^2 - n - 1 = 0,$$
$$f_0(x,4) = \sum_{i=1}^{n}(2x_i-1)^4 + (2\sum_{i=1}^{n} x_i - m' + 1)^4 - n - 1 = 0$$

(далі $(B_n(m'-1, m').\mathit{TR1})$).

Зауважимо, що в останніх випадках квадратичною компонентою TRs є еліпсоїди. Вибираючи в них замість біквадратної компоненти H-представлення відповідного багатогранника, одержимо поліедрально-еліпсоїдальні f-представлення відповідних $\mathcal{C}_b$-множин.

6.4.3 Застосування TR.Scheme3

Дотичні f-представлення $(B'_n.\mathrm{TR}(j_1, j_2))$, $(B^{\pm}_n.\mathrm{TR}(j_1, j_2))$ також можна побудувати за допомогою l_p-норми $\|.\|_p$ $(p \geq 1)$ та масштабованої l_p-норми $\|.\|_{(p)} = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ $(p \in [1, \infty))$. Відомо, що обидві ці норми монотонні, а саме l_p-норми зростаюча, а масштабована l_p-норма спадна [91, 178]. Таким чином, для побудови TRs застосовна теорема 5.10.

Сім'я одиничних суперсфер із центром у $\mathbf{0}$ є сім'єю одиничних l_p-сфер $S^\alpha = \{x : \|x\|_\alpha = 1\}, \alpha \in [1, \infty)$ у l_p-просторі. Спільними точками $S^{\alpha_1}, S^{\alpha_2}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, є точки $E = B_n^{\pm}$. $\|x\|_\alpha$ є диференційованою у точках E при $\alpha \in [2, \infty)$, отже, умови теореми 5.10 виконані і $(B_n^{\pm}.\mathrm{TR}(\alpha_1, \alpha_1))$ існує $\forall \alpha_1, \alpha_2 : \ 2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$. А взагалі існує сім'я опуклих строгих f-представлень $B_n^{\pm}$, які в евклідовій нормі представляються так:

$$(B_n^{\pm}.\mathrm{SR}(\alpha_1, \alpha_2)) : \ \|x\|_{\alpha_1} = 1, \ \|x\|_{\alpha_2} = 1, \text{ де } 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2.$$

Для B_n' вірні аналогічні міркування, а саме компоненти $(B_n.\mathrm{TR}(j_1, j_2))$ представляються у вигляді:

$$S^{\alpha_1} : \ \|x\|_{(\alpha_1)} = 1, \ S^{\alpha_2} : \ \|x\|_{(\alpha_2)} = 1, 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2, \tag{6.39}$$

причому $B_n' \subset S^{\alpha_1}$, $l = 1, 2$. Оскільки $\|.\|_{(p)}$ строго монотонна, має місце $B_n' = S^{\alpha_1} \cap S^{\alpha_1}$ і (6.39) завжди є строгим опуклим f-представленням B_n' (далі $(B_n'.SR(\alpha_1, \alpha_1))$). До того ж, $\|x\|_{(\alpha_1)}$ – диференційована на B_n' при $\alpha_2 < \infty$, отже, (6.39) задає сім'ю TRs (далі $(B_n'.TR(\alpha_1, \alpha_1))$) при $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$.

6.4.4 TRs декартових добутків $\mathcal{C}_b$-множин

Нехай $E_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, \ n_1, n_2, \ i = 1, 2$, мають TRs вигляду:

$$f_1^1(x) = 0, \ f_2^1(x) = 0; \tag{6.40}$$

$$f_1^2(y) = 0, \ f_2^2(y) = 0. \tag{6.41}$$

Ставиться питання побудови на їх основі f-представлень множини $E \subset \mathbb{R}^n$, де $E = E_1 \times E_2$, $n_1 + n_2 = n$. Ясно, що система (6.40), (6.41), розглянута у розширеному для E^1, E^2 просторі $\mathbb{R}^n$, є строгим чотирикомпонентним f-представленням E. Виникає питання про пошук TRs. У [333] було запропоновано підхід вирішення цього питання шляхом визначення константи $\alpha \in (0,1)$ у представленні E вигляду:

$$f_1(x,y) = \alpha f_1^1(x) + (1-\alpha) f_1^2(y) = 0; f_2(x,y) = \alpha f_2^1(x) + (1-\alpha) f_2^2(y) = 0.$$

Зокрема, було доведено таку теорему.

Теорема 6.6. [333] Для довільних $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, система рівнянь

$$\left(-1+\sqrt{5}\right) \sum_{i=1}^{n_1} x_i^4 + \left(3-\sqrt{5}\right) \sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 = \left(-1+\sqrt{5}\right) n_1 + \left(3-\sqrt{5}\right),$$
$$\left(-1+\sqrt{5}\right) \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \left(3-\sqrt{5}\right) \sum_{j=1}^{n_2} y_j^4 = \left(-1+\sqrt{5}\right) n_1 + \left(3-\sqrt{5}\right)$$

задає дотичне f-представлення множини $E = B'_{n_1} \times B^{\pm}_{n_2}(1)$.

6.5 f-представлення $\mathcal{C}$-множин: $m > 1$

На прикладі множини $E = \mathcal{E}_{nk}(G)$ продемонструємо, яким чином можна застосовувати результати побудови f-представлень числових $\mathcal{C}_b$-множин до аналітичних описів векторних $\mathcal{C}_b$-множин. Як спеціальний клас E, для якого також наведемо f-представлення, оберемо множину $E' = \mathcal{E}_n$. Зазначимо, що для інших множин сім'ї (4.94) можуть бути застосовані такі самі засоби.

Для даної множини E, обидві гіперсфери

$$S_{r^{1,min}}(r^{1,min}): \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - a_{ij}^{l,min})^2 = (r^{1,min})^2, \ l = 1,2 - \tag{6.42}$$

із параметрами (4.113), (4.114), є описаними навколо E. Отже, (6.42) у сукупності із ($\mathcal{P}_{nk}(G)$.IHR) дають два PSpRs $\mathcal{E}_{nk}(G)$ (далі ($\mathcal{E}_{nk}(G).PSpR1$), ($\mathcal{E}_{nk}(G).PSpR2$)). Вони збігаються і тому дають PSpR мінімального радіуса лише в одному випадку, коли $k = n$. У цьому випадку одержується поліедрально-сферичне f-представлення E, що включає ($\mathcal{P}_n$.PSpR) та рівняння гіперсфери

$$S_{r^{min}}(r^{min}):\ \sum_{i,j=1}^{n}(x_{ij}-a_{ij}^{min})^2=(r^{min})^2,$$

із параметрами (4.115) (далі *($\mathcal{E}_n$.PSpR)*). Використавши у цих PSpRs рівняння еліпсоїда (4.119), отримаємо набір PERs $\mathcal{E}_{nk}(G)$, $\mathcal{E}_n$.

Для побудови такого f-представлення множини E скористаємося її представленням (4.95) через декартові добутки булевих $\mathcal{C}_b$-множин перестановок, а також використаємо ($B_n(m)$.SR1), у результаті маємо строге f-представлення вигляду:

$$\sum_{i=1}^{k}x_{ij}^{k'}=1,\ j\in J_n,k'\in J_k;\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{n'}=n_i,\ i\in J_k,n'\in J_n$$

(далі ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.*SR1*)).

Враховуючи наявність ($B_n(1)$.TR$(2,3)$), для E' кількість компонент у цьому f-представленні може бути суттєво скорочена до

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{k'}=1,\ j\in J_n;\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{k'}=1,\ i\in J_n,k'=2,3,$$

(далі ($\mathcal{E}_n$.*SR1*)). Зауважимо, що це f-представлення є кубічним, а також опуклим у $\mathbb{R}^{n^2}$.

Враховуючи (4.95), E можна представити у формі:

$$E=B_{kn}\cap D,$$
$$\text{де } D:\mathbf{x}_j^T\mathbf{e}=1,j\in J_n;\mathbf{x}_i'\mathbf{e}=n_i,i\in J_k. \tag{6.43}$$

Відповідно, адаптуючи до B_{kn} будь-яке з f-представлень булевої $\mathcal{C}_b$-множини, у сукупності із (6.43), одержимо відповідну кількість f-представлень множини E. Так, застосування (B_n.TR(2,4)) приводить до побудови опуклого біквадратного f-представлення E вигляду (6.43),

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-0.5)^2=\frac{kn}{4},\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-0.5)^4=\frac{kn}{16}$$

(далі ($\mathcal{E}_{nk}(G).SR2$)), яке для E' набуває вигляду:

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_{ij}-0.5)^2=\frac{n^2}{4},\sum_{i,j=1}^{n}(x_{ij}-0.5)^4=\frac{n^2}{16}$$

(далі ($\mathcal{E}_n.SR2$)). Нарешті, адаптація (B_n.SR1) до множини E приводить до формування її строгого опуклого квадратичного f-представлення вигляду (6.43), $x_{ij}^2-x_{ij}=0,\ i\in J_k, j\in J_n$ (далі ($\mathcal{E}_{nk}(G).SR3$)). Зокрема, ($\mathcal{E}_n$.SR3) матиме вигляд (6.43), $x_{ij}^2-x_{ij}=0,\ i,j\in J_n$.

Серед побудованих f-представлень E мінімальний степінь два – мають ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.PSpR1), ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.PSpR2) та ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.SR3), а мінімальний порядок – у біквадратному f-представленні ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.SR2). Те саме стосується і до f-представлень E'. Подальші дослідження зі зменшення порядку біквадратного f-представлення множини E можуть проводитися у напрямку побудови її дотичного f-представлення, яке існує, враховуючи її дворівневість E та результат теореми 5.9. Виходячи з вигляду ($\mathcal{P}_{nk}(G)$.HR), має місце такий результат.

Наслідок 6.8. Існують $\alpha,\beta_i\in(0,1), i\in J_k$, такі, що множина $\mathcal{E}_{nk}(G)$ має таке біквадратне дотичне f-представлення (далі ($\mathcal{E}_{nk}(G).TR$)):

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(2x_{ij}-1)^2+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-n_i)^2+\beta\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}-1)^2=nk,$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(2x_{ij}-1)^4+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-n_i)^4+\beta\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}x_{ij}-1)^4=nk.$$

Наслідок 6.9. Існують $\alpha,\beta\in(0,1)$ такі, що множина $\mathcal{E}_n$ має таке біквадратне дотичне f-представлення (далі ($\mathcal{E}_n.TR$)):

$$\sum_{i,j=1}^{n}(2x_{ij}-1)^2+\alpha^2\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-1)^2+\beta^2\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-1)^2=n^2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}(2x_{ij}-1)^4+\alpha^4\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-1)^4+\beta^4\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-1)^4=n^4.$$

Інші f-представлення $\mathcal{E}_n$ можна знайти у роботах [186, 188, 329].

Для $\mathcal{C}_b$-множини матриць перестановок та їх узагальнень з сім'ї (4.94) f-представлення знаходяться комбінацією кількох чинників – властивостей їх генераторів, представлення за допомогою теоретико-множинних операцій над множинами класу $B_n(m)$. Розширені f-представлення сім'ї (4.94) пропонується будувати з використанням співвідношення (2.133) у формі зв'язуючого рівняння $x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}}$, доповненого f-представленням відповідної числової $\mathcal{C}_b$-множини з сімей (3.14), (3.15).

6.6 Розширені f-представлення $\mathcal{C}$-множин: $m > 1$

Подібний підхід пропонується використовувати до побудови розширених f-представлень інших векторних $\mathcal{C}_b$ множин, а саме для векторної $\mathcal{C}_b$-множини $E^N \subset \mathbb{R}^{mn}$ із числа наведених у п. 2.6 пропонується єдиний підхід до побудови розширених f-представлень на базі f-представлень відповідної числової $\mathcal{C}_b$-множин $E \subset \mathbb{R}^n$ та встановленого у п. 2.6 зв'язку між E^N і E. Зв'яжемо результуючі множини E та E^N за допомогою співвідношень (2.128), забезпечивши таким чином виконання умови (2.127) при виборі ζ у формі $\forall\, vec(X) \in E^N \xrightarrow{\zeta} x = (f(\mathbf{x}^1), ..., f(\mathbf{x}^n)) \in E$, де $X = (\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^n)$.

Це дозволяє будувати f-представлення E^N на базі f-представлень E. Дійсно, нехай (5.3), (5.4) є (E.FR). Додавши умову $x = (f(\mathbf{x}^1), ..., f(\mathbf{x}^n))$, що зв'язує вектори $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^N$, отримуємо f-представлення E^N (далі ($E^N.FR1$)), яке у векторній формі має вигляд:

$$f_j(f(\mathbf{x}^1), ..., f(\mathbf{x}^n)) = 0,\ j \in J_{m'}, f_j(f(\mathbf{x}^1), ..., f(\mathbf{x}^n)) \le 0,\ j \in J_m \backslash J_{m'},$$

де $\mathbf{x}^j \in \mathbb{R}^m$, $j \in J_n$, а f задовольняє умову (2.129).

Ще один спосіб наведено у [182]. Він полягає у виділенні однієї координати кортежів, що забезпечує бієкцію з множиною кортежів з подальшою побудовою набору інтерполяційних поліномів для інших координат та застосування f-представлення для множини допустимих значень обраної координати. У результаті будується розширене f-представлення векторної $\mathcal{C}_b$-множини. Якщо такої координати знайти не вдається, пропонується розширити вектори результуючої множини координатою з їх номером та використати цю штучну координату для побудови розширеного f-представлення шуканої множини.

6.7 Висновки за розділом 6

У шостому розділі теорію неперервних функціональних представлень FPCs, а саме її підходи, пов'язані із застосуванням C-A і G-A, застосовано до побудови аналітичних представлень $\mathcal{C}_b$-множин.

Переважна більшість побудованих f-представлень – поліноміальні, а серед них – строгі поліноміальні степеня n і змішані квадратичні поліедрально-поверхневі f-представлення, тобто вони є представленням цих множин як алгебраїчних і напівалгебраїчних відповідно. Відповідно, до побудови таких представлень можуть бути застосовані класичні засоби дійсної алгебраїчної геометрії [36, 79, 110]. Так, строге функціональне представлення $(B_n(m).\mathrm{SR3})$ $\mathcal{C}_b$-множини $B_n(m)$, отримане таким чином, можна знайти у [94]. Відмітною особливістю побудованих у даній роботі f-представлень вони суттєво використовують той факт, що вони є інструментом аналітичного опису FPCs, більш того – множин e-конфігурацій. Саме це дозволило знайти ефективні шляхи формування f-представлень широкого класу множин комбінаторного характеру засобами структурного та геометричного аналізу. Отримані результати безпосередньо можна адаптувати на довільну FPC після представлення її як $\mathcal{C}$-множин після виділення її з скінченної решітки аналітичними засобами за допомогою функціональних обмежень.

У даному розділі теорія неперервних функціональних представлень застосована до ряду базових $\mathcal{C}$-множин як числових, так і векторних, а також проведено порівняння побудованих у результаті f-представлень. Головною сферою застосування цих результатів є оптимізаційні задачі на $\mathcal{C}$-множинах, для яких з побудовою f-представлень цих множин, з'являється можливість їх розв'язання не тільки методами дискретного, але і неперервного, програмування, а також їх комбінування.

У зв'язку з тим, що для ряду класів $\mathcal{C}_b$-множин було побудовано ряд f-представлень, виникає потреба у додатковому дослідженні ефективності їх використання для різних класів задач оптимізації.

Оскільки більшість f-представлень $\mathcal{C}$-множин, запропонованих у роботі, є поліноміальними, їх застосування до широкого класу задач поліноміальної комбінаторної оптимізації [8, 70, 86, 111, 119, 120, 141] дозволяє їх розв'язання методами поліноміального програмування, а після переходу до розгляду вершинно розташованих множин е-конфігурацій, що, як встановлено, завжди можливо для $\mathcal{C}$-множин, – також опуклої поліноміальної оптимізації [102, 160, 243].

Основні результати шостого розділу опубліковано у роботах [181, 182, 185–189, 254, 313, 317–319, 321, 328, 329, 333, 339, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [8, 35, 36, 44, 70, 79, 86, 91, 94, 102, 110, 111, 119, 120, 141, 160, 161, 217, 243, 306].

7 ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З $\mathcal{C}$-МНОЖИН

Згідно з означенням 1.2, $F(x)$ є продовженням функції

$$f:\ E \to \mathbb{R}^1 \tag{7.1}$$

з множини $E \subset \mathbb{R}^n$ на $E' \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо виконані наступні умови – (1.43), $F:\ E' \to \mathbb{R}^1$; $E' \supset E$.

Як зазначено у п. 1.8, продовжувати можна довільну функцію з довільної власної підмножини $\mathbb{R}^n$, дискретної чи континуальної. Далі будемо вважати, що областю продовження є $\mathcal{C}$-множина E і досліджуватимемо властивості таких продовжень. Якщо $E' = \mathbb{R}^n$, область, на яку відбувається продовження, не вказуватимемо.

Здійснимо класифікацію продовжень функції за виглядом функції $F(x)$. Так, якщо $F(x) \in \mathbf{C}(E')$, вона буде неперервним продовженням $f(x)$ ($\mathbf{C}$-продовженням, $f.\mathbf{C}$-E), якщо $F(x) \in \mathbf{C}^1(E')$ – неперервно диференційовним продовженням ($\mathbf{C}^1$-продовженням, $f.\mathbf{C}^1$-E), якщо $F(x) \in \mathbf{C}^2(E')$ – двічі неперервно диференційовним продовженням ($f.\mathbf{C}^2$-E), якщо $F(x) \in \mathbf{C}^\infty(E')$ – нескінченно неперервно диференційовним (нескінченно гладким) продовженням ($f.\mathbf{C}^\infty$-E); якщо E' – опукла і $F(x)$ опукла (строго/сильно опукла) на E' – опуклим продовженням (a convex extension, CE, f.CE) (строго/сильно опуклим продовженням) (a strictly/strongly CE) $f(x)$ з E; якщо $F(x)$ угнута (строго/сильно угнута) – угнутим (a concave extension) (строго/сильно угнутим) продовженням (a strictly/strongly concave extension) $f(x)$ з E на E' тощо.

Оскільки функція $-F(x)$ є угнутим продовженням для $-f(x)$, у подальшому акцент зробимо на побудові опуклих продовжень.

Продовження $F(x)$ функції $f(x)$ назвемо *строгим продовженням* (a strict extension, $f.SE$) з множини E, якщо виконано:

$$F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{E}, \tag{7.2}$$

інакше нестрогим.

Встановимо зв'язок між строгими f-представленнями множин та продовженнями з них. Представимо функцію $F(x)$ у формі $F(x) = f(x) + \Delta_F(x)$, тоді умову (7.2) можна переписати у вигляді $\Delta_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{E}$, що означає, що $\Delta_F(x) = 0$ – строге однокомпонентне f-представлення E. Як було показано у розд. 5, однокомпонентні f-представлення $\mathcal{C}$-множин формуються з їх строгих f-представлень, що ще раз свідчить про актуальність розв'язання задачі їх побудови для різних класів $\mathcal{C}_b$-множин, яка була розглянута у розділах 5, 6.

Якщо побудовано строге продовження функції з $\mathcal{C}_b$-множини E, то воно буде просто її продовженням з кожної $\mathcal{C}$-множини $E' \subset E$, яку породжує E, і строгим лише з E.

Основні питання, які будуть досліджено у даному розділі, – це існування продовжень заданого типу з $\mathcal{C}$-множин певного типу (далі *Задача 7.1*), головним чином опуклих та угнутих, та пошук конструктивних способів їх побудови (далі *Задача 7.2*).

Оскільки основне питання, що ми досліджуємо, – моделювання $\mathcal{C}$-множин, покажемо, яким чином до її розв'язання можна застосувати продовження функцій з них. Нехай $E \neq Grid$, а це означає, що $\exists E' \supset E$: $E' \subseteq Grid$. У такому випадку представлення E у формі:

$$E = \{x \in E' : \ \phi_i(x) = 0, i \in J_{\mu'}; \ \phi_i(x) \leq 0, i \in J_\mu \backslash J_{\mu'}\} \tag{7.3}$$

за допомогою прямого обмеження, що виділяє з $\mathbb{R}^n$ FPC E', та функціональних, які виділяють E з E', є E.ММ. Тут передбачається, що

$$\phi_i(x) : E' \to \mathbb{R}^1,\ i \in J_\mu. \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. Якщо

$$\Phi_i(x) : E' \to \mathbb{R}^1,\ i \in J_\mu,\ \text{– продовження (7.4) з } E \text{ на } E' \supset E, \tag{7.5}$$

$$\text{то } E = \{x \in E', \Phi_i(x) = 0, i \in J_{\mu'},\ \Phi_i(x) \le 0, i \in J_\mu \backslash J_{\mu'}\}\ - E.\text{MM}. \tag{7.6}$$

Доведення дивись у додатку В.6.

Оскільки математичні моделі (7.3), (7.6) – E.EMMsтеорема 7.1 вказує нові шляхи математичного моделювання $\mathcal{C}_b$-множин за допомогою продовжень функцій, що задають функціональні обмеження, які виділяють ці множини з *Grid*. Як було показано у розд. 6, $\mathcal{C}_b$-множини (3.14), (3.15) дозволяють побудову E.CMs. Виникає питання про існування CMSs довільних $\mathcal{C}$-множин. Теорема 7.1 вказує способи вирішення даного питання. Так, якщо як E' вибрати деяку $\mathcal{C}_b$-множину, а як E – $\mathcal{C}$-множину $E \subset E'$, а потім неперервно продовжити $\phi_i(x), i \in J_\mu$, з E на континуальну множину $K \supset E$, то буде побудовано неперервну модель E, що складається з E'.CM та функціональної частини (7.6), яка є еквівалентною до (5.3), (5.4). Задача, яка при цьому вирішується, – це побудова E.CM для заданої $\mathcal{C}$-множини E (далі *Задача 7.3*). Зауважимо, що задача побудови $\phi_i.\mathbf{C}^\infty$-E завжди розв'язувана, адже як продовження можна вибрати інтерполяційні поліноми $\Phi_i(x) \underset{E}{=} \phi_i(x), i \in J_\mu$.

Як видно, із застосуванням продовжень до моделювання $\mathcal{C}$-множин пов'язане ще одне важливе питання – виділення класів множин, функцій та продовжень, які дозволяють заміняти компоненти f-представлень множин їх продовженнями, адже це відкриває нові перспективи побудови E.ECMs множини у формі $E = \{F_i(x) = 0, i \in J_{m'},\ F_i(x) \le 0, i \in J_m \backslash J_{m'}\}$, де $F_i : K \to \mathbb{R}^1$ – неперервне продовження $f(x)$ з E на K, $i \in J_m$.

Сформулюємо Задачу 7.3 у термінах ідеалів. Нехай виконана умова

(5.84), де (5.83) має вигляд:

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}^{\mathbf{1}}\cup\mathcal{F}^{\mathbf{2}},\ \mathcal{F}^{1}=\{f_i(x)\}_{i\in J_{m'}},\ \mathcal{F}^{2}=\{f_i(x)\}_{i\in J_m\setminus J_{m'}}. \tag{7.7}$$

Нехай також

$$\mathcal{F}''=\mathcal{F}^{''\mathbf{1}}\cup\mathcal{F}^{''\mathbf{2}},\ \mathcal{F}^{''1}=\{F_i(x)\}_{i\in J_{m'}},\ \mathcal{F}^{''2}=\{F_i(x)\}_{i\in J_m\setminus J_{m'}}. \tag{7.8}$$

Задача 7.3 полягає у побудові сім'ї неперервних продовжень $F_i(x)$ функцій $f_i(x)$ $(i\in J_m)$ з E на континуальну множину $K\supset E$, тобто сім'ї (7.8), що задовольняє умову $E=E''(\mathcal{F}'')$, де $E''(\mathcal{F}'')=\{x\in\mathbb{R}^n: f_i(x)=0,\ \forall f_i\in\mathcal{F}''\}$.

Сформулюємо ще одну задачу (далі *Задача 7.4*). Вона полягає у виділенні таких класів $\mathcal{C}$-множин та сімей функцій (7.7), (7.8), для яких виконана умова (5.85). Таким чином, Задача 7.3 пов'язана із побудовою CMs для конкретного класу $\mathcal{C}$-множин, у той час як Задача 7.4 є стосується сукупностей таких класів.

Означення 7.1. Функцію $F: E^{'1}\times E^{'2}\to\mathbb{R}^1$ назвемо *розширеним продовженням* (an extended extension, $f.EE$) функції (7.1) з E на $E^{'12}=E^{'1}\times E^{'2}$, якщо $E\subset E^{'1}$, $\exists n_2\geq 1:\ E^{'2}\subseteq\mathbb{R}^{n_2}$, а також виконані умови

$$F(x,y)\underset{(x,y)\in E\times E^{'2}}{=}f(x);\ \exists(x,y)\in E':F(x,y)\neq F(x,\mathbf{0}).$$

Умова (7.9) означає, що f.EE – це не просто функція f, розглянута у розширеному просторі, а що у її формулюванні використовуються нові змінні.

Розширені продовження функцій є головним інструментом побудови CMs E у розширеному просторі (далі розширених CMs E, extended CMs, E.EMs). У попередніх розділах ми вже зустрічалися із EMs. Так, у розділі 3 було показано схему переходу від довільної $\mathcal{C}$-множини E до вершинно розташованої булевої у розширеному просторі, а також три способи перетворень $\mathcal{C}$-множин, що не є PSpSs, у поліедрально-сферичні множини. При цьому також виникають додаткові співвідношення, що зв'язують початкові та нові змінні, які є компонентами E.EMs, з котрих можна виділити деякі EEs функцій, заданих на E. Крім того,у розд. 4 було наведено розширені H-представлення деяких комбінаторних багатогранників, які також є елементами розширених f-представлень E, а зв'язуючі співвідношення, тобто компоненти цих представлень, які включають як вихідні, так і додаткові змінні, є розширеними продовженнями відповідних елементів сім'ї (5.1).

7.1 Існування опуклих/угнутих продовжень з $\mathcal{C}$-множин

Розглянемо Задачу 7.1. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ – область продовження $f : E \to \mathbb{R}^1$, а K – опукла множина така, що $K \supset E$, і на яку будується опукле продовження F.

Необхідну і достатню умову існування F дає теорема 1.11, яка в термінах звужень функції має наступний вигляд.

Теорема 7.2. Опукле продовження F функції f з E на K існує тоді і тільки тоді, коли f є звуженням деякої опуклої на K функції.

Наслідок 7.1. Для довільної поверхнево розташованої точкової конфігурації E існує опукле продовження F функції f з E на K.

Доведення дивись у додатку B.6.

Вибираючи у насл. 7.1 як E усю поверхню S або $\mathcal{C}$-множину, одержимо такий результат:

Наслідок 7.2. З довільної строго опуклої поверхні S існує опукле продовження функції $f : S \to \mathbb{R}^1$ на довільну опуклу множину $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Наслідок 7.3. Для довільної VLS E існує опукле продовження функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ на довільну опуклу множину $K \supset E$.

Насл. 7.2 є узагальненням теореми 1.12, а насл. 7.3 – теореми 1.7. Зокрема, останній розширює область, на яку можливі опуклі продовження, з $P = convE$ на довільну опуклу множину $K \supseteq P$.

Наслідок 7.4. Якщо E – $\mathcal{C}$-множина, що не є VLS, то опукле продовження F функції f з E на K існує тоді і тільки тоді, коли умова (1.47) виконана для точок $E \backslash vertP$.

Як конструктивний спосіб побудови F можна також вибрати (1.48).

Теорема 7.3. Для довільної VLS E існує строго опукле продовження F будь-якої функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ на довільну опуклу множину $K \supset E$.

Доведення дивись у додатку В.6.

Сформулюємо узагальнення теореми 1.7.

Теорема 7.4. Для довільної SLS E, вписаної у сильно опуклу поверхню

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x) = 0\}, \tag{7.9}$$

існує сильно опукле продовження F будь-якої функції $f : E \to \mathbb{R}^1$ на опуклу множину $K \supset E$.

Доведення дивись у додатку В.6.

Наведені у розд. 1 конструктивні способи побудови f.CE ґрунтуються на використанні (1.48), що передбачає залучення у формуванні усіх точок E, що є проблемою, яка практично не реалізується, для множин великої потужності, і до яких належить переважна більшість $\mathcal{C}_b$-множин. Тому потрібен пошук шляхів побудови опуклих продовжень, що використовують фундаментальні властивості множин, з яких вони будуються, а також вигляд функції $f(x)$. Далі будуватимемо опуклі продовження з VLSs, адже, як зазначалося у розд. 3, множину E, не обмежуючи загальності, завжди можна вважати вершинно розташованою.

Отже, нехай E – VLS. Згідно з теоремою 2.3, E – є також SLS зі строго опуклою описаною поверхнею, заданою (7.9). Розглянемо питання, за яких умов опуклі продовження функцій, заданих на E, існують у формі (1.49).

Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ – VLS, на якій задано функцію $f(x)$ (далі *Умова 7.1*):

$$f(x) \in \mathbf{C}^2(X), \tag{7.10}$$

Крім того,відомо, що E – SLS, описана поверхня S якої задана строго опуклою функцією $f_1(x)$ (далі *Умова 7.2*):

$$f_1(x) \in \mathbf{C}^2(X_1), \tag{7.11}$$

Необхідно розв'язати Задачу 7.2 на опуклому компакті $K : E \subset K \subseteq \subseteq X \cap X_1$. Для її вирішення сформулюємо узагальнення теореми 2.5 з [163].

Теорема 7.5. [163] Нехай $f \in \mathbf{C}^2([0,1]^n)$, $X \subseteq [0,1]^n$, $f_0 \in \mathbf{C}^2(X)$, f_0 – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на X. У такому випадку $\exists M > 0$ таке, що для довільного $\mu > M$ функція (1.49) – строго опукла на X.

Теорема 7.6. Якщо виконані умови (7.10), (7.11), при цьому $X \subseteq [0,1]^n$, $X \cap X_1 \neq \emptyset$, то для довільного опуклого компакту $K \subseteq X \cap X_1 \quad \exists \mu^*(K) > 0$ таке, що $\forall \mu > \mu^*(K)$ функція $F(x, \mu)$ виду (1.49) – строго опукла на K.

Доведення дивись у додатку В.6.

Теорема 7.7. Якщо для $E, f(x), f_1(x)$ виконані Умови 7.1, 7.2, (7.10), (7.11), то для довільного опуклого компакту $K \subseteq X \cap X_1 \quad \exists \mu^*(K) > 0$ таке, що $\forall \mu > \mu^*(K)$ функція (1.49) є строго опуклим продовженням $f(x)$ з E на K.

Доведення дивись у додатку В.6.

Зауваження 7.1. Обмеження $X \subseteq [0,1]^n$ в умовах теореми 7.7 можна послабити до наступного – $X \subseteq [a, b]$, де $a < b, a, b \in \mathbb{R}^n$, адже перехід від $x \in [0,1]^n$ до $x' \in [a, b]$ здійснюється невиродженим лінійним перетворенням, яке не впливає на строгу опуклість функції, що перетворюється.

Зауваження 7.2. Нехай E – SSsS, тобто має місце (2.111), тоді, враховуючи (1.49), для довільних $f : E \to \mathbb{R}^n$ та $\alpha \in (1, \infty)$ існує $\mu^*(K, \alpha) > 0$ таке, що

$$F(x, \mu(\alpha), \alpha) = f(x) + \mu(\alpha)(\|x - x^0(\alpha)\|_\alpha^\alpha - r^\alpha(\alpha)),\ \mu(\alpha) > \mu^*(K, \alpha) -$$

сім'я сильно опуклих продовжень $f(x)$. Серед них

$$F(x, \mu(\alpha), \alpha) = f(x) + \mu(\alpha)((x - x^0(\alpha))^\alpha - r^\alpha(\alpha)),\ \mu(\alpha) > \mu^*(K, \alpha), \quad (7.12)$$

де $\alpha > 1$, $\alpha \mod 2 = 0$, – сім'я двічі неперервно диференційовних таких продовжень. При $\alpha = 2$, (7.12) перетворюється на (1.49), (1.50), а теорема 7.7 – у насл. 1.3.

Наслідок 7.5. Якщо функція $f_1(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на K, то $\forall\ \rho' \in \mathbb{R}^1_{>0}\ \exists\ \mu'(K) \in \mathbb{R}_{>0}$ та, що $\forall \mu > \mu'$ функція (1.49) сильно опукла на K з параметром не менше ρ'.

Доведення дивись у додатку В.6.

Теорема 7.7 дає достатню умову існування розв'язку Задачі 7.2.1 у формі (1.49).

Що стосується Задачі 7.2.2, то, здійснюючи заміни $f(x) \to -f(x)$, $F(x) \to -\tilde{F}(x)$ в умовах теореми 7.6, отримуємо таке.

Наслідок 7.6. Якщо функція $f_1(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на K, то $\exists\ \mu^*(K) \in \mathbb{R}_{>0}$: $\forall \mu > \mu^*(K)$ функція $\tilde{F}(x, \mu) = f(x) - \mu f_1(x)$ – строго угнута на K.

Зауваження 7.3. Область K, на яку здійснюється опукле продовження, має властивість $K \supseteq P$, отже, багатогранник P – найменша множина, на яку може відбуватися таке продовження. Нас насамперед цікавитиме випадок, коли $K \supseteq C$, де C – опукле тіло $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x) \le 0\}$, тобто

f.CE будується щонайменше на внутрішність замкненого контуру, заданого рівнянням $f_1(x) = 0$.

У [323], наведено деякі нижні оцінки порогового параметру регуляризації $\mu^*(K)$, що забезпечує строгу опуклість функції (1.49) в межах K.

7.2 Конструктивні методи побудови CEs з VLSs

У попередньому пункті було розглянуто способи конструктивного формування опуклих продовжень $f(x)$ з SLSs на базі її аналітичного виразу та рівняння описаної поверхні або так званої регуляризації [120]. Таким чином, було представлено спосіб розв'язання Задачі 7.2.1, який безпосередньо переноситься на Задачу 7.2.2.

Наступний спосіб розв'язання Задачі 7.2.1 для $f(x)$ полягає у її редукції до Задач 7.2.1, 7.2.2 з більш простими функціями. Ця редукція триватиме, доки не будуть одержані складові функції, CEs та угнуті продовження яких можуть бути знайдені аналітично.

Введемо позначення: а) $F(x)$, $F^{[\cdot],k}(x)$ – розв'язки Задачі 7.2.1 для $f(x)$ і $(f^{[\cdot]}(x))^k$ відповідно; б) $\tilde{F}^{[\cdot],k}(x)$ – розв'язок Задачі 7.2.2 для $(f^{[\cdot]}(x))^k$, $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$.

Теорема 7.8. Для функції $f(x)$ вигляду (7.1) такої, що:

$$f(x) = f^1(x) \cdot f^2(x), \text{ де } f^1(x), f^2(x) \underset{K}{\geq} 0, \tag{7.13}$$

розв'язок Задачі 7.2.1 існує у формі:

$$\begin{aligned} F(x) = (F^{1,1}(x) \cdot F^{2,1}(x))_+ + \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (F^{2,1}(x))^2 - \\ - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Доведення дивись у додатку В.6.

Згідно з (7.14), побудова CE добутку двох невід'ємних на E функції зведена до побудови CEs цих функцій та угнутих продовжень їхніх квадратів.

Зауважимо, що за умовою функції $f^{1,1}(x), f^{2,1}(x)$ невід'ємні на K. Якщо вони також є добутками невід'ємних на K функцій, теорема 7.8 може бути також застосована до побудови $F^{1,1}(x),\ F^{2,1}(x)$.

Теорема 7.9. Якщо функція (7.1) має вигляд

$$f(x) = -f^1(x) \cdot f^3(x),\ \text{де}\ f^1(x), f^3(x) \underset{E}{\geq} 0;\ \exists\, M > 0:\ f^3(x) \underset{K}{\leq} M, \qquad (7.15)$$

то розв'язок Задачі 7.2.1 існує у формі:

$$\begin{aligned} F(x) = (F^{1,1}(x)(M - \tilde{F}^{3,1}(x)))_+ + \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (\tilde{F}^{3,1}(x))^2 - \\ - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)) + M(F^{3,1}(x) - \tilde{F}^{1,1}(x) - \tilde{F}^{3,1}(x)). \end{aligned} \qquad (7.16)$$

Доведення дивись у додатку B.6.

Формула (7.16) говорить про те, що для побудови CE добутку двох невід'ємних на E функції, взятому зі знаком мінус, достатньо побудови опуклих та угнутих продовжень цих функцій та угнутих продовжень їхніх квадратів.

Наслідок 7.7. Якщо в умовах теореми 7.9 функція $f^2(x)$ обмежена зверху на K, розв'язок Задачі 7.2.2 існує у формі:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) = -(F^{1,1}(x)(M - \tilde{F}^{3,1}(x)))_+ - \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (\tilde{F}^{3,1}(x))^2 - \\ - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)) + M(\tilde{F}^{1,1}(x) + \tilde{F}^{3,1}(x) - F^{3,1}(x)), \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{R}^1_{>0}$ таке, що $f^2(x) \underset{K}{\leq} M$.

Зауважимо, що, як і у попередньому випадку, в разі, якщо в умовах теореми 7.9 функції $f^{1,1}(x)$, $f^{3,1}(x)$ представлені добутками невід'ємних на K функцій, то $F^{1,1}(x), F^{3,1}(x)$ у (7.16) можуть бути знайдені з використанням теореми 7.8, $\tilde{F}^{1,1}(x), \tilde{F}^{3,1}(x)$ – за допомогою теореми 7.9, а $\tilde{F}^{1,2}(x), \tilde{F}^{3,2}(x)$ –

із використанням наслідку 7.7.

Теорема 7.10. Якщо визначена на E функція $f(x)$ має вигляд (7.15), то розв'язок Задачі 7.2.1 існує у формі:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}((F^{1-3}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)), \tag{7.17}$$

$$\text{де } F^{1-3}(x) = \max\{F^{1,1}(x) - \tilde{F}^{3,1}(x), F^{3,1}(x) - \tilde{F}^{1,1}(x)\}. \tag{7.18}$$

Доведення дивись у додатку В.6.

Застосування даного способу потребує побудови опуклих і угнутих продовжень функцій $f^1(x), f^3(x)$ та угнутих продовжень їхніх квадратів. Результатом є зазвичай недиференційоване f.CE.

Зауваження 7.4. Для застосування наведених засобів потрібні способи побудови як опуклих, так і угнутих продовжень функцій, що є множниками $f(x)$, а також їх парних степенів. Так, якщо $f(x)$ – це поліном, ітераційний процес проводиться для кожного моному і триває до тих пір, доки його складовими будуть функції вигляду $(a^T x + b)^k$, наприклад, x_i^k $(k \in \mathbb{N})$.

Зауваження 7.5. Послідовна редукція Задачі 7.2.1 для функції, що представляється добутком кількох функцій, дозволяє звести її до розв'язання Задач 7.1, 7.2 для цих множників. З іншого боку, ці дві задачі для суми функцій зводяться до розв'язання цих задач для складових цієї суми. Між тим, залишається питання про побудову опуклих та угнутих продовжень функцій, які вже не представляються сумою чи добутком інших. Воно вирішене для поліномів, що свідчить про те, що представлені вище прийоми можуть бути успішно застосовані до побудови опуклих продовжень поліномів. При цьому ітераційний процес застосовується послідовно до кожного моному, після чого CEs формуються для кожного моному окремо в залежності від його знаку. Так, якщо $f(x)$ має вигляд поліному степеня l:

$$f(x) = P_l(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{il_i}(x),\ l = \max_{i \in J_m} l_i, \tag{7.19}$$

$$\text{де } p_{il_i}(x) = a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{l_{ij}},\ \text{де } l_{ij} \geq 0,\ a_i \neq 0,\ l_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij},\ i \in J_m, - \tag{7.20}$$

мономи, з яких він складається, то кількість кроків ітераційного процесу редукції для моному (7.20) оцінюється знизу величиною $\lceil log_2 \kappa_i \rceil$, де κ_i – кількість змінних у ньому, а для всього поліному (7.19) – числом $\left\lceil log_2 \max\limits_{i \in J_m} \kappa_i \right\rceil$. Щоб досягти вказаної нижньої оцінки, розбиття множників $x_j^{l_{ij}}$, де $l_{ij} > 0$ може відбуватися на підгрупи, перша з яких містить $\lceil \frac{\kappa_i+1}{2} \rceil$ змінних, друга – решту $\lceil \frac{\kappa_i}{2} \rceil$ змінних чи навпаки.

Зауваження 7.6. Якщо $\kappa = \max\limits_i \kappa_i \geq 3$, CE моному (7.20), побудоване у формі (7.14) при $a_i > 0$, та у формі (7.16) при $a_i < 0$, вже не буде поліноміальним. Якщо $\kappa = 2$, опуклі та угнуті продовження поліному (7.19) можуть бути знайдені у поліноміальній формі.

Твердження 7.1. Якщо E – PSsS, вписана у сім'ю суперсфер із центром у початку координат, тобто

$$\|x\|_\alpha^\alpha \underset{E}{=} r^\alpha(\mathbf{0}, \alpha) = r_\alpha^\alpha,\ \alpha \in (1, \infty),$$

то для моному вигляду $f(x) = x_i^{k_i} x_j^{k_j}$, $k_i \neq k_j, k_i, k_j \in \mathbb{N} i < j\ f$.CE з множини E існує у формі:

$$F(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}(\|x\|_{2k_i}^{2k_i} + \|x\|_{2k_j}^{2k_j} - r_{2k_i}^{2k_i} - r_{2k_j}^{2k_j}). \tag{7.21}$$

Доведення дивись у додатку В.6.

Зокрема, це стосується квадратичних поліномів та продовжень з PSpS E, причому в даному випадку не має значення, де розташований центр описаної гіперсфери (див. п. 7.2.1).

7.2.1 Опуклі продовження квадратичних функцій з PSpSs

Перейдемо до розгляду класу квадратичних поліномів та підходів до розв'язання Задачі 7.2.1 для них.

Квадратичні поліноми – це клас функцій, який дозволяє залишатися у класі квадратичних поліномів при переході від функції до її CEs. Більш того, для них застосовувані формули (7.14), (7.17), а також такі продовження можна будувати на весь простір $\mathbb{R}^n$.

Нехай $E \subset S_r(a)$, $K = \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c, \tag{7.22}$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A \in \mathbb{S}_n,\ b \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 7.11. Розв'язок Задачі 7.2.1 існує у формі:

$$F(x) = f(x) + \mu((x - x^0)^2 - r^2), \tag{7.23}$$
$$\text{де } \mu = \tfrac{1}{2}(||A||_1 - d_A^+ + d_A^-), \tag{7.24}$$
$$d_A^+ = \sum_{a_{ii}>0} |a_{ii}|, d_A^- = \sum_{a_{ii}<0} |a_{ii}|. \tag{7.25}$$

Доведення дивись у додатку B.6.

Представимо f.CE (7.23) у формі (4.56):

$$F(x) = f(x) + \mu((x - x^0)^2 - r^2) = x^T Ax + b^T x + c + \mu x^2 - 2\mu x^T x^0 +$$
$$+ x^{02} - r^2) = x^T(A + \mu\mathbf{I}x) + (b - 2\mu x^0)^T x + (c + x^{02} - r^2).$$

звідки маємо:

$$F(x) = x^T A' x + b'^T x + c',$$
$$A' = A + \mu\mathbf{I},\ b' = b - 2\mu x^0,\ c' = c + x^{02} - r^2.$$

Зауваження 7.7. Якщо $d_E < n$, формула (7.23) задає сім'ю f.CEs

$$F(x,a) = f\,(x) + \mu((x - x^0(a))^2 - r^2(a)), \tag{7.26}$$

де $a \in \mathbb{A}$, а $\mathbb{A}$ – множина параметрів.

Серед опуклих продовжень (7.26) перевагу віддаватимемо тим, які залучають S^{min}, тобто CEs вигляду:

$$F^{min}(x) = f\,(x) + \mu((x - x^{min})^2 - r^{min,2}), \tag{7.27}$$

де параметр регуляризації μ знайдено з (7.24).

Якщо E є декартовим добутком PSpSs, квадратичні CEs з неї побудуємо з урахуванням цієї особливості.

Теорема 7.12. CE функції (7.22) з PSpS $E \subset \mathbb{R}^n$ вигляду (3.10), де $E^l \subset S_{r^l}\left(x^{0l}\right) \subset \mathbb{R}^{n^l}$, $l \in J_L$, існує у формі:

$$F(x) = f(x) + \sum_{l=1}^{L} \mu_l \varphi_l(x) + \sum_{l,l'=1, l<l'}^{L} \mu_{ll'}(\varphi_l(x) + \varphi_{l'}(x)), \tag{7.28}$$

$$\begin{gathered} \mu_l = \frac{1}{2}(\|A_l\|_1 - d^+_{A_l} + d^-_{A_l}),\ d^+_{A_l} = \sum_{i \in I_l, a_{ii}>0} |a_{ii}|,\ d^-_{A_l} = \sum_{i \in I_l, a_{ii}<0} |a_{ii}|, \\ \mu_{ll'} = \frac{1}{2}\|A_{ll'}\|_1, 1 \le l < l' \le L; \end{gathered} \tag{7.29}$$

$$\begin{gathered} \varphi_l(x) = (x^l - x^{0l})^2 - r^{l2},\ l \in J_L;\ I_l = J_{n^0_l} \backslash J_{n^0_{l-1}},\ n^0_l = \sum_{i=1}^{l} n_l,\ \ l \in J_L; \\ A_l = (a_{ij})_{i,j \in I_l},\ l \in J_L;\ A_{ll'} = (a_{ij})_{i \in I_l, j \in I_{l'}},\ 1 \le l < l' \le L. \end{gathered} \tag{7.30}$$

Доведення дивись у додатку B.6.

7.2.2 Квадратичні опуклі продовження з деяких PSpSs

Загальний підхід до побудови f.CE з поліедрально-сферичних $\mathcal{C}$-множин ґрунтується на використанні у ньому рівняння описаної гіперсфери мінімального радіусу. Нехай E – $\mathcal{C}$-множина, що є областю продовження квадратичної функції $f(x)$, а для E' – поліедрально-сферична $\mathcal{C}_b$-множина, така, що $E' \subset E$, $\hat{E}' = \hat{E}'(x^{min}, a^{min})$. У такому випадку квадратичне опукле продовження $f(x)$ можна знайти за теоремою 7.11, а якщо до того ж E' є базовою полікомбінаторною множиною – за теоремою 7.12.

Наслідок 7.8. (з теореми 7.11) Якщо E – $\mathcal{C}$-множина перестановок така, що $E \subseteq E' = E_{nk}(G)$, CE квадратичної функції (7.22) існує у формі (7.27), а саме

$$F^{min}(x) = f\,(x) + \mu((x - \overline{G}\mathbf{e})^2 - \Sigma_G^2 + n\overline{G}^2),$$

де μ задано виразом (7.24).

Цей наслідок застосовний, зокрема, до побудови f.CEs з $\mathcal{C}_b$-множин парних та непарних перестановок.

Наслідок 7.9. (з теореми 7.11) Якщо E – $\mathcal{C}$-множина булевих перестановок така, що $E \subseteq E' = B_n(m)$, CE квадратичної функції (7.22) існує у формі

$$F^{min}(x) = f\,(x) + \mu\left(\left(x - \frac{m}{n}\right)^2 - \frac{m\,(n-m)}{n}\right), \qquad (7.31)$$

де μ задано виразом (7.24). Зокрема, для $E' = B_n(1)$ вираз (7.31) має вигляд:

$$F^{min}(x) = f\,(x) + \mu\left(\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Наслідок 7.10. (з теореми 7.11) Якщо E – $\mathcal{C}$-множина булевих розміщень, CE функції (7.22) з множини E існує у формі:

$$F^{min}(x) = f\,(x) + \mu\left(\left(x - \frac{\mathbf{e}}{2}\right)^2 - \frac{n}{4}\right) = f\,(x) + \mu\left(x^2 - x\mathbf{e}\right), \qquad (7.32)$$

де μ задано виразом (7.24).

Даний наслідок можна застосувати, наприклад, при побудові f.CEs з $\mathcal{C}_b$-множин парних та непарних булевих векторів.

Наслідок 7.11. (з теореми 7.11) Якщо E – $\mathcal{C}$-множина перестановок зі знаком така, що $E \subseteq E' = E^{\pm}_{nk}(G)$, СЕ квадратичної функції (7.22) існує у формі (7.27), а саме $F^{min}(x) = f\,(x) + \mu(x^2 - g^2)$, де μ задано виразом (7.24).

Наслідок 7.12. (з теореми 7.12) Якщо E – $\mathcal{C}$-множина поліперестановок (3.12), то СЕ функції (7.22) існує у формі (7.28), де μ_l, $\mu_{ll'}\,(1 \le l, l' \le n,\, l < l')$ задано виразами (7.29), а також функції (7.30) мають форму:

$$\varphi_l(x) = (x^l - \overline{G^l}\mathbf{e})^2 - \Sigma^2_{G^l} + n_l\overline{G^l}^2,\ l \in J_L. \tag{7.33}$$

Якщо E – $\mathcal{C}$-множина булевих поліперестановок $E' = \mathbf{B}_{\overline{n}L}(\overline{m}) = \overset{L}{\underset{l=1}{\otimes}} B_{n_l}(m_l)$, то (7.33) набуває вигляду:

$$\varphi_l(x) = \left(\left(x^l - \frac{m_l}{n_l}\right)^2 - \frac{m_l\,(n_l - m_l)}{n_l}\right),\ l \in J_L. \tag{7.34}$$

Зокрема, для $E' = B_{n,}$, $L = n$, (7.34) набуває вигляду:

$$\varphi_l(x) = \left(\left(x^l - \frac{1}{n}\right)^2 - 1 + \frac{1}{n}\right),\ l \in J_n. \tag{7.35}$$

Враховуючи включення $E = \mathcal{E}_n$ у це E', для конструювання опуклих продовжень з $\mathcal{C}$-множин матриць перестановок може бути використана (7.35).

7.2.3 Опуклі продовження поліномів з деяких $\mathcal{C}$-множин

Нехай функція $f(x)$, для якої будується СЕ з $\mathcal{C}$-множини E, є поліномом (7.19) степеня l. Він складається з m мономів (7.20), які також можна представити у вигляді:

$$p_{il_i}\,(x) = a_i \prod_{j \in I_i} x_j^{l_{ij}},\ \text{де}\ I_i = \{j \in J_n :\ l_{ij} > 0\},\ i \in J_m. \tag{7.36}$$

Загальний підхід до побудови поліноміального СЕ $F(x)$ полінома (7.19) полягатиме у побудові поліноміального СЕ кожного монома (7.20) і формування:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} F_{il_i}(x), \tag{7.37}$$

де $F_{il_i}(x)$ – СЕ $p_{il_i}(x)$ з E на K, $i \in J_m$.

Розглянемо шляхи побудови СЕ монома (7.36) у залежності від типу області продовження E та знаку коефіцієнта a. Отже, покладатимемо у (7.19), що $m = 1$, у результаті чого (7.19) перетворюється на:

$$f(x) = p_l(x) = a \prod_{j=1}^{n} x_i^{l_j}, \ a \neq 0, \ l_j \in \mathbb{Z}_+, \ l = \sum_{j=1}^{n} l_j. \tag{7.38}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $|a| = 1$, а змінні занумеровані таким чином, що виконано умову:

$$l_j \geq l_{j+1}, \ j \in J_n,$$

у результаті чого (7.36) спрощується до

$$f(x) = p_l(x) = sgn\, a \prod_{j=1}^{|I|} x_i^{l_j}. \tag{7.39}$$

7.2.3.1 Опуклі продовження поліномів з $\mathcal{C}$-множин перестановок

Нехай $E \subseteq E' = E_{nk}(G)$, $G > 0$, $a > 0$. Побудуємо СЕ $F(x)$ монома (7.38) з E', відповідно, воно служитиме опуклим продовженням і з E.

Введемо в розгляд мультимножину $\mathcal{L} = \{l_j\}_{j \in J_n}$ і загальну $\mathcal{E}_c$-множину перестановок $\Pi = \Pi_{n,|S(\mathcal{L})|}(\mathcal{L})$, що нею індукована.

Побудуємо мономіальний симетричний поліном на базі (7.39):

$$P_l(x) = \sum_{y \in \Pi} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j}, \tag{7.40}$$

де $y = \langle y_1, ..., y_n \rangle$. Згідно з теоремою 5.2, поліном (7.40) набуває постійного значення на E', а саме:

$$P_l(x) \underset{E'}{=} P_l(g) = |\Pi| p_l(g)\,.$$

Теорема 7.13. Якщо $a > 0$, СЕ $F(x)$ монома (7.38) з $E' = E_{nk}(G)$, $G > 0$, у ортант $\mathbb{R}^n_{>0}$ існує у формі:

$$F(x) = a \cdot ln^{\mu} u_n(g) \prod_{j=1}^{n} x_j^{l_j - \mu}, \\ \text{де } \mu = \max_{i \in J_n} l_i, \tag{7.41}$$

$u_n(g)$ – елементарний симетричний поліном:

$$u_j(x) = \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} x_i, \; j \in J_n, \tag{7.42}$$

Доведення дивись у додатку В.6.

Наслідок 7.13. Якщо $a > 0$, СЕ монома (7.38) з $\mathcal{P}$Ss, що індуковані $G > 0$, у ортант $\mathbb{R}^n_{>0}$ існує у формі (7.41).

Наслідок 7.14. СЕ полінома (7.19), для випадку $a_i > 0$, $i \in J_m$, з $E' = E_{nk}(G)$, $G > 0$ у ортант $\mathbb{R}^n_{>0}$ існує у формі:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i ln^{\mu_i} u_n(g) \prod_{j=1}^{n} x_j^{l_{ij} - \mu_i}, \text{ де } \mu_i = \max_{i \in J_n} l_{ij}, \; i \in J_m. \tag{7.43}$$

Зауваження 7.8. f.СЕ вигляду (7.43) є гладким.

Зауваження 7.9. Завжди можна вважати, що умова $G > 0$ виконана, інакше попередньо проводиться здвиг E' на вектор $g_1\mathbf{e} + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, і таким чином, здійснюється перехід $E' \to E' + g_1\mathbf{e} + \varepsilon \subset \mathbb{R}^+_n$.

Зауваження 7.10. Крім того,можна вважати, що умова $a > 0$ виконана, адже довільний моном вигляду $-p_l(x) = -\prod_{j=1}^{n} x_j^{l_j}$, з точністю до константи, може бути представлений на E' сумою мономів із додатними знаками, а саме:

$$-p_l(x) \underset{E'}{=} -P_l\,(g) + \sum_{y \in \Pi \setminus \langle l_1,\dots,l_n \rangle} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j}. \tag{7.44}$$

Якщо потужність I у (7.36) постійна чи принаймні поліноміально залежить від n, кількість доданків у (7.44) також поліноміально залежатиме від n. Відповідно, задача побудови СЕ монома в даному випадку зводиться до задачі (7.37) для $m = |\Pi| - 1$.

7.2.3.2 Опуклі продовження поліномів з булевих $\mathcal{C}$-множин

Перш за все, застосуємо властивість $\mathcal{B}Ss$: якщо E – $\mathcal{B}S$, то

$$\forall\, k \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}\; x_i^k = x_i,\; i \in J_n.$$

Застосуємо її до (7.36) і одержимо:

$$p_{il_i}\,(x) \underset{E}{=} a_i \prod_{j \in I_i} x_j, = f_i(x),\;\; i \in J_m.$$

Зафіксуємо $i \in J_m$ і побудуємо $F_i(x)$, що є f_i.СЕ. У разі $a_i > 0$ шукатимемо $F_i(x)$, скориставшись результатами [379], у формі

$$F_i(x) = \begin{cases} F_i^+(x), \text{ якщо } a_i > 0, \\ F_i^-(x), \text{ якщо } a_i < 0, \end{cases} \tag{7.45}$$

$$\begin{aligned} &\text{де } F_i^+(x) = |a_i|(\sum_{j \in I_i} x_j - |I_j| + 1)_+ = a_i(\sum_{j \in I_i} x_j - |I_j| + 1)_+; \\ &F_i^+(x) = -|a_i| \min_{j \in I_i} x_j = a_i \min_{j \in I_i} x_j,\; i \in J_m. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Обидві функції (7.46) – опуклі та є продовженнями $f_i(x)$, отже, (7.45) задає p_{il_i}.CE. Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 7.14. CE $F(x)$ полінома (7.19) з $E' = B_n$ існує у формі:

$$F(x) = \sum_{i \in J_m, a_i > 0} a_i (\sum_{j \in I_i} x_j - |I_j| + 1)_+ + \sum_{i \in J_m, a_i < 0} a_i \min_{j \in I_i} x_j. \qquad (7.47)$$

Наслідок 7.15. CE полінома (7.19) з $\mathcal{B}$Ss існує у формі: (7.47).

Зауваження 7.11. f.CE вигляду (7.47) не є диференційованим. Для побудови диференційованих продовжень можна використати спеціальні прийоми, наприклад, при $k \in (1, \infty)$ функція $(F_i^+(x))^k$ диференційовна. При цьому, оскільки $F_i^+(x)$ невід'ємна у $\mathbb{R}^n$, підведення до ненульового степеня приводить до формування нового опуклого продовження $f_i(x)$, що є диференційованим.

Зауваження 7.12. У цілому побудовані опуклі продовження (7.43) мономів з $\mathcal{C}$-множин перестановок та продовження (7.47) з булевих $\mathcal{C}$-множин поліномів вже виходять за межі класу поліномів.

Що стосується векторних $\mathcal{C}$-множин, для них вірні наведені у даному розділі опуклі продовження в залежності від типу T е-конфігурацій, з яких ці множини складаються. До того ж для множини $\mathcal{E}_n$ різноманітні опуклі продовження, що використовують специфіку саме цієї множини, наведено у [323] та запропоновано спосіб побудови CEs квадратичних функцій з $\mathcal{E}_n$, що використовує її поліедрально-сферичність, а також належність то класів $\mathcal{P}$Ss та $\mathcal{B}$Ss.

7.3 Висновки за розділом 7

У даному розділі знайшла своє узагальнення та розвиток теорія опуклих продовжень [235, 236, 251, 269, 271, 365, 366, 368, 373–375, 378, 379]. Так, наведено критерій існування опуклого продовження функції, заданої на довільній точковій конфігурації, розширено класи продовжень функцій, області продовжень та області, на які продовження будуються. У сукупності із результатами, наведеними у розд. 3, що стосуються зв'язку FPCs із VLSs та PSpSs, це свідчить про існування опуклого продовження довільної функції, заданої на будь-якій FPCs, у вихідному чи розширеному просторах, а також про можливість його побудови шляхом регуляризації цільової функції [120], у якій бере участь рівняння описаної гіперсфери. Розв'язавши задачу існування опуклого продовження, постає проблема пошуку ефективних конструктивних способів його побудови, тобто тих, що не потребують залучення елементів FPCs. У даному розділі запропоновано ряд таких конструктивних шляхів побудови опуклих і угнутих продовжень функцій з $\mathcal{C}$-множин, явних та рекурсивних, залежно від вигляду функції, класу $\mathcal{C}_b$-множин, що є областями продовжень, областей, на які продовження відбуваються тощо. Крім того, представлено єдиний підхід до побудови квадратичних опуклих продовжень квадратичних функцій з PSpSs, що узагальнює відомі результати у цьому напрямку стосовно $\mathcal{C}_b$-множин перестановок, поліперестановок та множини B_n, та розповсюджується на усі поліедрально-сферичні $\mathcal{C}_b$-множини та $\mathcal{C}$-множини, що ними породжуються. Розглянуто питання побудови явних опуклих продовжень поліномів із двох класів $\mathcal{C}_b$-множин – $E_{nk}(G)$ та B_n. Розв'язок цієї задачі знайдено у класі опуклих позіномів для опуклих продовжень з $E_{nk}(G)$ та у класі опуклих кусково-неперервних функцій для B_n. Враховуючи зв'язок класів $E_{nk}(G)$ та B_n, це свідчить про те, що ця задача вирішена для усіх введених вище класів вершинно-розташованих $\mathcal{C}_b$-множин. При цьому для $\mathcal{C}_b$-множини E, що не є VLSs, квадратичне опукле продовження квадратичної функції існує у розширеному просторі $\mathbb{R}^{\eta-1}$, де образ E є комбінаторно ізоморфним $\mathcal{E}$.

Крім того, висвітлене питання формування сімей опуклих продовжень, пов'язаних із представленням області продовження перетином кількох вершинно розташованих $\mathcal{C}_b$-множин, що дозволяє ставити задачі пошуку оптимального опуклого продовження за обраним критерієм оптимальності.

Результати цього розділу в сукупності з тими, що наведені у розд. 8 та [333], відкривають нові перспективи застосування опуклого програмування до розв'язання оптимізаційних задач на $\mathcal{C}_b$-множинах.

Крім цього, вони демонструють актуальність постановки та розв'язання задачі побудови опуклого продовження функції заданого типу у вихідному та розширеному просторах. Так, результати роботи [355], що стосуються формування суттєвих обмежень бінарного квадратичного багатогранника, який виникає при лінеаризації безумовної булевої квадратичної задачі (the unconstrained binary quadratic problem, UBQP) [32, 33, 86], можна значно легше отримати, використовуючи досліджені властивості множини B_n та її зв'язок із B'_n для непарних n та розв'язуючи задачу побудови лінійних опуклих розширених продовжень квадратів функцій, перетворення яких розглядаються у [355] при формуванні нових спілок суттєвих обмежень багатогранника. Цей підхід може бути також використано при формуванні функціонально надлишкових обмежень, додавання яких у релаксаційну задачу до ECOPs дозволяє покращити нижні оцінки цільової функції при застосуванні до їх розв'язання прямо-двоїстих методів [225, 354]. З цією метою допоміжні задачі формування розширених лінійних чи квадратичних продовжень мають бути вирішені, причому у другому випадку можуть бути використані двоїсті квадратичні оцінки Н З. Шора [221, 354].

Основні результати сьомого розділу опубліковано у роботах [185, 186, 250, 254, 271, 272, 311, 314, 318, 321, 327, 329–331, 333, 343, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [32, 33, 86, 120, 163, 221, 225, 235, 236, 251, 269, 271, 354, 355, 365, 366, 368, 374, 375, 378, 379].

8 ЗАСТОСУВАННЯ Е-КОНФІГУРАЦІЙ У МОДЕЛЮВАННІ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

8.1 Математична модель, що зв'язує COP з ECOP

Розглянемо COP (1.5), (1.6). Нехай

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi' \subseteq \Pi} \phi(\pi), \tag{8.1}$$

де Π' – множина допустимих розв'язків задачі, Π – множина c-конфігурацій (2.7), причому вихідна та результуюча множини складаються з векторів однакової розмірності, отже, виконано умови (2.10), (2.12) та

$$b_i = (b_{1i}, ..., b_{si})^T \in \mathbb{R}^s, \quad i \in J_n. \tag{8.2}$$

Будемо також вважати, що вся необхідна інформація про задачу оптимізації зосереджена у комбінаторній конфігурації, а саме в таких параметрах четвірки (2.2), як множини A, B. Враховуючи, що c-конфігурація зберігає інформацію про результуючу множину, таку COP (8.1) можна переписати у такому вигляді: знайти

$$\pi^* = \arg \min \phi(\mathbf{b}, \pi), \tag{8.3}$$

$$\pi \in P\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right), \tag{8.4}$$

$$\text{де } P\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \left\{\pi \in \Pi\left(\mathbf{a}\right): \ \varphi_i\left(\mathbf{b}, \pi\right) \leq 0, \ i \in J_t\right\}, \tag{8.5}$$

$$\mathbf{b} = \left\langle b_i \right\rangle_{i \in J_n}, \ \mathbf{a} = \left\langle a_j \right\rangle_{j \in J_k}. \tag{8.6}$$

Враховуючи (8.5), представимо умову (8.4) у формі:

$$\pi \in \Pi\left(\mathbf{a}\right), \tag{8.7}$$

$$\varphi_i\left(\mathbf{b},\pi\right)\leq 0,\ i\in J_t, \tag{8.8}$$

і перейдемо до розгляду задачі (8.3), (8.7), (8.8).

Покладемо тепер, що елементи вихідної множини можуть бути змінними, а елементи результуючої множини – фіксовані [318]. Домовимося використовувати позначення a та $\overline{a}$ для числової величини чи вектора, що розглядається як константа та змінна відповідно, у результаті чого формула (8.6) перетворюється на $\overline{\mathbf{b}}=\left\langle \overline{b}_i\right\rangle_{i\in J_n},\ \mathbf{a}=\left\langle a_j\right\rangle_{j\in J_k}$, а задача (8.3), (8.7), (8.8) набуває форму: знайти

$$\pi^*=\ \arg\ \min\phi\left(\overline{\mathbf{b}},\pi\right), \tag{8.9}$$

$$\varphi_i\left(\overline{\mathbf{b}},\pi\right)\leq 0,\ i\in J_t, \tag{8.10}$$

а також виконана умова (8.7). При цьому (2.2) переходить у четвірку $\left\langle A,\overline{B},\psi,\Omega\right\rangle$, де $\overline{B}=\left\{\overline{b}_1,...,\overline{b}_n\right\}$.

Сформулюємо COP (8.7), (8.9), (8.10) як задачу оптимізації на множині e-конфігурацій. З цією метою задамо бієктивне відображення між результуючою множиною і множиною дійсних чисел $\mathcal{A}'$: $\mathcal{A}'=\left\{e_1,...,e_k\right\},\ e_i<e_{i+1}$, $i\in J_{k-1}$, де $e_j=\xi\left(\mathbf{a}_j\right),\ \mathbf{a}_j{=}\xi^{-1}\left(e_j\right),\ j\in J_k$. У такому випадку множина

$$E=\varphi\left(\Pi\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ x=\varphi(\pi){=}\left(\xi\left(\pi_1\right),...,\xi\left(\pi_n\right)\right)\right\}_{\pi\in\Pi}$$

є множиною e-конфігурацій вигляду (2.44), твірною множиною яких виступає множина $\mathcal{A}$. Представимо задачу (8.7), (8.9), (8.10) у еквівалентній формі: знайти

$$x^*=\ \arg\ \min\ f\left(\overline{\mathbf{b}},\varphi^{-1}\left(x\right)\right), \tag{8.11}$$

$$h_i\left(\overline{\mathbf{b}},\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\leq 0,\ i\in J_t, \tag{8.12}$$

$$x\in E. \tag{8.13}$$

Задача (8.11)-(8.13) (далі *Задача 8.1*) являє собою ECOP на $\mathcal{C}$–множині E, розв'язавши яку та враховуючи бієкцію між E та Π, ми одночасно знайдемо оптимальний розв'язок π^* вихідної задачі. Ще одна ECOP, але вже на множині $E^N \subset \mathbb{R}^{mn}$, формується застосуванням у моделі (8.7), (8.9), (8.10) функції ξ, що задовольняє умову (2.128). Це можна зробити, наприклад, Способами 2.6.1, 2.6.2.

Щоб представити (8.11)-(8.13) як задачу нелінійного програмування, потрібен аналітичний запис умови (8.13) належності допустимого розв'язку дискретній множині E, для чого можна використати інструментарій f–представлень $\mathcal{C}_b$–множин, викладений у розділах 5, 6.

8.2 $\mathcal{C}$-множини у евклідовій комбінаторній оптимізації

Продемонструємо, яким чином можна застосувати отримані результати до розв'язання ECOP на $\mathcal{C}$-множині E, яка є 2LS та WDS [24]. У ECO-постановці це відповідає випадку $E' = E$. Припустимо також, що (P.HR) відоме. Як було встановлено вище, E – VLS і PES, а як гладка строго опукла поверхня S, описана навколо неї, може бути вибраний еліпсоїд. Оскільки E – VLS, цільова функція ECOP, не обмежуючи загальності, може вважатися опуклою як на P (див. теорему 1.7), так і на опуклій множині $K \supset P$ (див. насл. 7.3). Якщо це не так, для неї будуємо опукле продовження з E на опукле тіло C вигляду (2.115) і здійснюємо перехід до оптимізації побудованої функції. В результаті приходимо до розгляду C'ECOP вигляду: знайти $\min\limits_{x \in E} F(x)$. У разі, якщо $f(x) \in \mathbf{C}^2(C)$, f.CE існує у формі $F(x) = f(x) + $ $+ M f_1(x)$ (див. теорему 7.7), де $f_1(x) = 0$ – рівняння описаного еліпсоїда S. Більш того, можна вважати, що $F(x)$ є строго/сильно опуклим продовженням $f(x)$. Згідно з [192], використання саме таких продовжень у опуклих релаксаційних задачах на C або P позитивно впливає на швидкість та точність одержання їх розв'язку.

Дворівневість дозволяє здійснювати декомпозицію E по парах попарно непересічних $\mathcal{C}$-множини E^1, E^2, що лежать у паралельних гіперплощинах і визначаються гіпергранню або двома паралельними гіпергранями P. Ці множини або вироджуватимуться в точку, або матимуть той самий комбінаторний тип, що і E, а саме, будуть VLSs, ELSs та 2LSs, але меншої розмірності. Зауважимо також, що будь-яка 2LS дозволяє побудову строгих поліноміальних f–представлень, мінімальний степінь яких дорівнює двом. Справді, виходячи з дворівневості множини E, нами було отримано (див. розд. 5) сім'ю її строгих f–представлень вигляду

$$|\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F'|^{\kappa} = 1, \; F \in \mathbf{F}, \tag{8.14}$$

що залежать від параметра $\kappa \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Так, при виборі $\kappa = 2$ отримуємо

$$(\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F')^2 = 1, \; F \in \mathbf{F}, \; -$$

що є квадратичним f–представленням E (далі (E*.2LS.SR1*)). Ще одне строге f–представлення, яке дозволяє E як 2LS, – це дотичне біквадратне f–представлення (E.2LS.TR2), одна з компонент якого задає описаний навколо E еліпсоїд S^2 із сім'ї (5.44), а друга – біквадратну поверхню S^4 із тієї ж сім'ї. Нарешті, змішаним f–представленням E є (E.2LS.PER), яке включає H–представлення дворівневого багатогранника P, відоме за умовою, а також рівняння побудованого на його основі рівняння еліпсоїда S^2.

Виходячи зі сказаного вище, до розв'язання ECOP на 2LS можуть бути застосовані декілька підходів, які систематизовані у [186] і використовують зазначену специфіку задач на даному класі $\mathcal{C}$-множин. Три з них – *Підхід 1-Підхід 3* – ґрунтуються на застосуванні поліедрально-поверхневого представлення E, яке в даному випадку буде (E.PER). Ґрунтуючись на цьому f–представленні для E, подібних f–представленнях для E^1, E^2 та всіх подальших подібних декомпозицій цих двох множин, вихідна задача може бути зведена до розв'язання послідовності неперервних релаксацій трьох типів. Так, Підхід 1 передбачає розв'язання опуклої задачі оптимізації $F(x)$ на опуклому тілі C вигляду (2.115) (C-relaxations), Підхід 2 та Підхід 3 використовують цю релаксацію, а також поліедральну та поверхневу за участі P і S. Підхід 2 (the Branch&Bound Polyhedral-Surfaced Method, B&B PSM [186]) узагальнює Branch&Bound Polyhedral-Spherical Method (B&B PSpM) [185, 327] квадратичної оптимізації на 2LS B_n на більш широкий клас дискретних множин та цільових функцій. Підхід 3 (the Greedy Polyhedral-Surface Method, GPSM) узагальнює Greedy Polyhedral-Spherical Method (GPSpM) [236, 327, 368] квадратичної оптимізації на $\mathcal{C}_b$-множині перестановок на інші класи вершинно розташованих $\mathcal{C}$-множин і довільну цільову функцію. *Підхід 4* полягає у побудові строгого f–представлення множини E, переході до неперервного формулювання вихідної задачі як класичної задачі на умовний екстремум і подальшого її розв'язання методами нелінійного програмування.

Отже, після того як будь-яке (E.SR) знайдене, ECOP дозволяє неперервне формулювання: знайти

$$\min\ f(x), \tag{8.15}$$

$$s.t.\ f_i(x) = 0,\ i \in J_m, \tag{8.16}$$

а після побудови опуклого продовження $F(x)$ – неперервне формулювання у формі класичної задачі на умовний екстремум: знайти

$$\min\ F(x), \tag{8.17}$$

за умови виконання обмежень (8.16).

Тепер до розв'язання CECOP (8.15), (8.16) можна застосовувати неперервні підходи [26, 64, 130], такі, як метод множників Лагранжа, штрафні методи, Лагранжеві релаксації, Ньютонівські методи і т. д. До СЕСОР (8.16), (8.17) також можуть бути застосовані методи гілок і меж, методи відсікань та інші комбінаторні методи, що використовує опуклі поліедральні релаксації [25, 45, 46, 71, 175, 200, 219, 241].

У термінах продовжень цільової функції з допустимої множини E, що дозволяє представлення (8.16), ці методи оперують із такою задачею: знайти

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x,.), \tag{8.18}$$

де цільова функція: а) для методу множників Лагранжа [25, 26, 30] –

$$\phi(x,\overline{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \overline{\lambda} = (\lambda_i)_i \in \mathbb{R}^m; \tag{8.19}$$

б) для методу штрафних функцій із квадратичною функцією штрафу [26, 158, 163, 330] –

$$\phi(x,\mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x),\ \mu > 0; \tag{8.20}$$

в) для розширеного методу множників Лагранжа [26], лагранжіан комбінується зі штрафної функцією, наприклад, (8.19) із (8.20) дає

$$\phi(x,\overline{\lambda},\mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x); \tag{8.21}$$

г) для методу Лагранжевих релаксацій [26,30,84,121,143,165], множина (8.16) розбивається на дві непорожні підмножини, перша з яких $\{f_i(x)\}_{i\in I}$ ($I \neq \{\emptyset\}$) включається в цільову функцію, друга залишається в складі функціональних обмежень. Задача (8.18) розв'язується із такою цільовою функцією та обмеженнями:

$$\phi(x,\overline{\lambda}) = f(x) + \textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i f_i(x),\ \overline{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in I}, \tag{8.22}$$

$$f_i(x) = 0,\ i \notin I, \tag{8.23}$$

при цьому множина I вибирається таким чином, щоб задача (8.18), (8.22) в області (8.23) розв'язувалася простіше за (8.15), (8.16).

Функції (8.19)-(8.22) визначені у розширеному просторі, тобто являють собою розширене продовження цільової функції. У той час як для фіксованих параметрів $\overline{\lambda}$ і μ це звичайне продовження функції $f(x)$ з E на власну надмножину E. Єдиним строгим продовженням f є функція (8.20). Цей факт лежить в основі методів штрафних функцій, забезпечуючи наближення послідовності розв'язків допоміжних задач до деякої точки x^{**} з E:

$$x^k = arg\min \phi(x,\mu^k) \underset{k\to\infty}{\to} x^{**} \in E. \tag{8.24}$$

У той же час, (8.19) дозволяє побудувати опуклі продовження з використанням опуклих функцій в (8.16). Застосування продовження (8.21) має дві суттєві переваги – досягнення екстремуму у точці E при $\mu \to \infty$ та можливість використання опуклих методів до розв'язання задачі при невеликих μ. У комбінації вони дозволяють отримання більш точних розв'язків, ніж міг би дати, наприклад, окремо взятий метод штрафних функцій або чисельний метод множників Лагранжа. Один із прикладів, який використовує ідею цього поєднання, – це метод штрафних функцій на основі функціональних представлень (the Functional Representtion Penalty Method, FRPM) [185, 186, 330, 331].

Приведення ECOP до безумовної нелінійної задачі та застосування одержаної неперервної моделі дозволяє покращення як нижніх, так і верхніх оцінки в ході реалізації зазначених вище методів. Так, якщо побудована послідовність (8.24) наближених розв'язків задачі (8.18), то комбінаторне заокруглення елементів цієї послідовності дає точку $z^u \in E$:

$$z^u = \min_k f(y^k),\ y^k = R_E\, x^k,\ \forall k,$$

де $R_E x$ – результат комбінаторного заокруглення точки $x \in \mathbb{R}^n$ до точки E, наприклад, проекція на цю множину.

Одним із найважливіших застосувань поліноміальних f–представлень $\mathcal{C}$–множин, особливо строгих, є напіввизначені релаксації (semidefinite relaxations, SDRs) [8], що широко використовується у розв'язанні задач комбінаторної оптимізації [8, 125, 137, 151, 152, 176]. При оптимізації на $E \subset \mathbb{R}^n$, спочатку формується розширене формулювання задачі у просторі щонайменше $\mathbb{R}^{n\times n}$, для якого далі формується SDR. Суттєвим моментом при цьому, що залежить від вибору f–представлення, є його порядок та степінь, що впливає на розмірність SDR. Для лінійних задач на $\mathcal{C}$–множинах, допустима область яких задана системою поліноміальних рівнянь, складність розв'язання SDRs напряму залежить від їх рівневості [92, 94]. Відповідно, питання виникає про побудову поліноміальних SRs, а якщо їх декілька, питання про вибір ефективнішого при застосуванні у розв'язанні CECOPs. Зокрема, для тих постановок на 2LSs, що розглядаються у даному пункті, складність розв'язання SDR такої задачі буде лінійно залежати від n [94], а в якості поліноміальних f–представлень можуть бути обрані квадратичні (E.2LS.PER) та (E.2LS.SR1) або біквадратне (E.2LS.TR2).

Теорема 8.1. [254] Задача евклідової комбінаторної оптимізації у формі ECOP1 на VLS E еквівалентна C'ECOP, де $F(x)$ – опукле продовження $f(x)$, з E; $F_i^1(x)$ – опукле продовження $f_i^1(x)$, $i \in I^1$, з E; $F_i^2(x)$ – опукле продовження $f_i^2(x)$, $F_i^3(x)$ – опукле продовження $-f_i^2(x)$, $i \in I^2$, з E.

Доведення дивись у додатку B.7.

Відзначимо деякі моменти, які можна застосувати до розв'язання ECOP у разі, коли ставиться задача оптимізації на 2LS із додатковими функціональними обмеженнями, тобто перейдемо до розгляду випадку $E' \neq E$. У першу чергу, зауважимо, що за теоремою 8.1, усі ці обмеження можна вважати опуклими. Якщо це не так, здійснюється упуклювання функціональних обмежень [254,331], що полягає у їх представленні у формі $f_i(x) \leq 0$, $i \in I$, та побудові опуклих продовжень $F_i(x)$, $i \in I$, з E цих функцій з подальшим переходом від CECOP до розгляду C'ECOP. Поліедральна релаксація C'ECOP буде опуклою задачею нелінійного програмування. Крім того, деякі з сформованих обмежень після перенесення їх у цільову, в т.ч. штрафну, функцію залишають її опуклою [331]. Це також є перевагою, оскільки дозволяє застосовувати опуклі методи до розв'язання отриманої задачі, зокрема, знаходити нижні оцінки цільової функції. Зауважимо також, що, оскільки за умовою E – WDS, до розв'язання отриманої опуклої задачі на багатограннику P може бути застосована модифікація методу умовного градієнта [186, 331, 343], де на кожному кроці допоміжна лінійна задача вибору допустимого напрямку розв'язується відповідним ефективним алгоритмом. Для того ж, щоб у результаті забезпечити збіжність методу штрафних функцій до допустимої точки E, у штрафний функції має використовуватися строге f–представлення E, що бере участь у штрафному доданку [186, 330].

Зауважимо, що якщо ECOP – лінійна, то (E.PER), доповнене додатковими обмеженнями $Ax \leq b$, буде PER допустимої області E', причому не обов'язково заданим у формі $E' = S \cap P'$, де $P' = convE'$. Справді, багатогранник $P'' = S \cap P' \cap\ D$, де $D = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \leq b\}$ лише у виняткових випадках збігатиметься з P', у інших же він матиме вершини, відмінні від точок E, а отже, буде релаксаційним багатогранником для P'. Незважаючи на це, весь арсенал поліедрально-поверхневих методів застосовуваний в цьому випадку також. Єдина складність може виникнути на етапі розв'язання опуклих задач на P'' у разі, коли число його обмежень – експоненційне за n і при цьому E', на відміну від E, вже не є WDS.

Зупинимося на методах відсікань розв'язання умовних задач на 2LSs. Припустимо, що розв'язується умовна лінійна задача на 2LS E, і для даної множини ефективно розв'язувана Задача 4.15, тобто відомий поліноміальний алгоритм перевірки приналежності точки $x \in \mathbb{R}^n$ багатограннику P (оракул, an oracle), а число додаткових обмежень, що задають D, поліноміальне за n. Звідси слідує, що є можливість за поліноміальний час перевірити, чи належить точка x багатограннику P''.

Метод поверхневих і комбінаторних відсікань (the surface-combinatorial cutting method, SCCM) оптимізації на PSpSs був запропонований у [314]. Викладемо основну його ідею, адаптуючи до оптимізації на ELSs, зокрема на 2LS E. На першому етапі розв'язується лінійна задача на обмеженій множині D, що включає додаткові обмеження та незначну частину обмежень P. Далі отриманий розв'язок x^0 перевіряється на приналежність E. Якщо $x^0 \in E$, задачу розв'язано, інакше застосовується оракул для перевірки умови $x^0 \in P$. У разі її невиконання додається обмеження P, що порушується у x^0, і процес пошуку розв'язку лінійної задачі повторюється. Це триває до тих пір, доки не буде отримана $x^i \in P$, а, відповідно, і $x^i \in P'$, що є розв'язком поліедральної релаксаційної задачі. Викладена тут схема формування невеликої підсистеми P, достатньої для розв'язання лінійної умовної задачі, носить назву методу послідовного під'єднання обмежень (МППО). Вона була запропонована в [370] і успішно застосована до оптимізації на $\mathcal{C}_b$-множинах перестановок та розміщень та окремих класах множин сполучень, для яких H–представлення опуклих оболонок відомі [310, 363]. На другому етапі SCCM здійснюється перевірка умови $x^i \in E$. Якщо вона виконана, задачу розв'язано, інакше здійснюється перехід до побудови поверхневого відсікання. З цією метою ребра P, які виходять із x^i, продовжуються до перетину з поверхнею еліпсоїда S, утворюючи основу багатогранного конуса з вершиною в x^i. Залежно від кількості отриманих точок S та розмірності P, через усі або частину отриманих точок S проводиться гіперплощина, що відсікає точку x^i разом із частиною багатогранника та поверхні еліпсоїда, залишаючи кінці побудованих ребер, що лежать на S допустимими точками. Далі кроки отримання допустимих точок P та їх поверхневих відсікань повторюються до досягнення точки E, що є шуканим розв'язком x^*. У ході реалізації даної ітераційної процедури, нижні оцінки визначаються розв'язками поліедральних релаксаційних задач. У той же час, послідовність допустимих розв'язків вихідної задачі і, відповідно, уточнень верхньої оцінки може бути проведена в ході усього процесу, якщо здійснювати комбінаторне заокруглення від точок, отриманих у ході його виконання, з подальшою перевіркою належності отриманих точок області D. SCCM є узагальненням методу комбінаторних відсікань (МКВ) розв'язання лінійних задач на VLSs [261, 292], яке потребує попереднього формування (E.PSR), відповідно, і (E'.PSR). Саме це дозволяє проводити відсікання не просто через суміжні до x^i вершини P', як це передбачено у МКВ, а через точки S, що утворюються у продовженні ребер, що виходять із x^i. Це, з одного боку, дозволяє побудувати більш жорсткі відсікання, а з іншого – не вимагає пошуку множини суміжних вершин до x^i, для визначення якої, взагалі кажучи, потрібно багаторазове застосування МППО, адже за побудовою, до формування x^i залучається лише незначна частина обмежень P. Щодо вибору описаної поверхні, що бере участь у процесі, то це може бути довільна, не обов'язково строго опукла поверхня така як еліпсоїд. Так, вона може бути кусково-лінійною поверхнею S^1. Головною вимогою є виконання умови (2.112). Так, як S^1 може бути обрано поверхню двоїстого до P багатогранника. Використання S^1 у певному сенсі краще за еліпсоїд S^2, адже S^1 – описана навколо S^2 поверхня, відповідно, для неї ребра можуть бути продовжені більше порівняно з S^1, тому правильне відсікання буде більш жорстким. Проблема полягає в тому, як знайти точки перетину ребер із кусково-лінійною поверхнею. В цьому сенсі, квадратичні поверхні – гіперсфери або еліпсоїди – привабливіші, оскільки точки їх перетину з прямою, заданою точкою та напрямним вектором, визначаються в явному вигляді [314].

Отже, на прикладі 2LS E продемонстровано, які можливості застосування неперервної оптимізації в поєднанні з властивостями $\mathcal{C}$-множин цього класу дає розв'язок задачі побудови їх f–представлень, особливо строгих і поліедрально-поверхневих.

Слід зазначити, що отримані результати поширюються на випадок множин, дворівневих по заданій множині напрямків. Так, якщо для множини E', яка не є, взагалі кажучи 2LS, вдається побудувати релаксаційний багатогранник P^R, який зберігає властивість поліедрально-поверхневості за участі поверхні S, наведені вище поліедрально-поверхневі підходи та SCCM також застосовні, адже тут має місце представлення $E = P^R \cap S$ і, відповідно, $E' = P^R \cap S \cap D$.

Як ілюстрацію використання PSR $\mathcal{C}$–множини за участі релаксаційного до комбінаторного багатогранника, розглянемо булевий квадратичний багатогранник (Boolean Quadric Polytope) BQP_n [154, 162, 170] та бінарний квадратичний багатогранник $BiQP_n$ (Binary Quadratic Polytope) [355], які виникають у задачах булевої квадратичної оптимізації. Так, бінарний квадратичний багатогранник має вигляд: $BiQP_n = convBiQE_n$, де

$$BiQE_n = \{(x, y) \in B'_{n'} : x \in B'_n, y_{ij} = x_i x_j,\ 1 \le i < j \le n\}, \tag{8.25}$$

$n' = C^2_{n+1}$, а булевий квадратичний багатогранник – $BQP_n = convBQE_n$, де $BQE_n = \{(x, y) \in B_{n'} : x \in B_n, y_{ij} = x_i x_j,\ 1 \le i < j \le n\}$, при цьому $BQP_n \simeq BiQP_n$. Зупинимося детальніше на $BiQE_n, BiQP_n$. Відомо що

$$\begin{aligned} &x_i + x_j + y_{ij} \ge -1,\ -x_i - x_j + y_{ij} \ge -1,\ -x_i + x_j - y_{ij} \ge -1,\\ &x_i - x_j - y_{ij} \ge -1,\ 1 \le i < j \le n, \end{aligned} \tag{8.26}$$

є системою правильних нерівностей $BiQP_n$, що задає багатогранник (далі $RBiQP_n$). Більш того, $E = vert\, BiQP_n \subset E^R = vert\, RBiQP_n$, а сам BQP_n не є цілочисельним [307]. Крім того, в кожному з $4n'$ напрямків, що визначаються обмеженнями (8.26), множина E є дворівневою. Таким чином,

$RBiQP_n$ є релаксаційним багатогранником для $BiQP_n$, у той час як $BiQE_n$ є дворівневою у $RBiQP_n$. З іншого боку, оскільки E – множина бінарних е-конфігурацій, вона вписана в гіперсферу $S : (x, y)^2 = n'^2$, так само, як і E^R. Таким чином, E дозволяє (E.PSpR) вигляду:

$$E = S \cap RBiQP_n. \tag{8.27}$$

При реалізації поліедральних-сферичних підходів до розв'язання оптимізаційних задач на E з використанням представлення (8.27), слід зазначити такі особливості. Задане як f–представлення, (E.PSpR) містить поліноміальне за n число обмежень, тобто може використовуватися цілком у обчислювальних алгоритмах для задач великих розмірностей. З іншого боку, незважаючи на поліедрально-сферичність, множина E не дозволяє побудову ефективних алгоритмів проектування точки простору на цю множина. Це пояснюється тим, що, оскільки ця задача еквівалентна лінійній задачі на E, а ця задача, в свою чергу, еквівалентна UBQP, що належить до NP-складних [32, 33, 86]. Відповідно, E не є WDS. Тому, замість розв'язання задачі проектування на множину, тут можна використовувати схеми комбінаторного заокруглення.

Наступна теорема показує, яким чином побудувати PER для класу $\mathcal{C}$–множин, що є дворівневими у релаксаційному багатограннику P^R.

Теорема 8.2. Якщо $\mathcal{C}$–множина E – дворівнева у релаксаційному багатограннику P^R до багатогранника $P = convE$, то E допускає PER вигляду (P^R.HR), доповненому рівнянням еліпсоїда (5.47), де $\mathbf{F}$ – множина гіперграней P^R, а функції (5.45), (5.46) знайдено на основі використання (P^R.HR).

Наведені підходи до оптимізації стосуються VLSs. Коли оптимізація відбувається на множині E, що не є VLS, такій, як $\mathcal{C}_b$-множина розміщень, індукована $\eta > n + 1$-елементними мультимножиною та утворена $k > 2$-елементною множиною, до неї можуть бути застосовані викладені вище підходи після переходу до еквівалентної задачі на VLS або сукупності розгляду VLSs, що можна зробити одним з методів, викладеними у п. 3.5.

8.3 $\mathcal{C}_b$-множини задач оптимізації

Допустимою множиною E' ECO-задач можуть бути як $\mathcal{C}_b$–множини, так і $\mathcal{C}$–множини, що є їх власними підмножинами. Будемо називати їх *$\mathcal{C}_b$–множинами заданого класу ECOP*. Наведемо три приклади таких задач оптимізації та побудуємо PSRs та SRs $\mathcal{C}_b$–множин цих задач.

Приклад 8.1. UBQP має вигляд: $f(x) = x^T Ax + c^T x \underset{x \in B_n}{\rightarrow} \min$ або $f(x) = x^T Ax + c^T x \underset{x \in B'_n}{\rightarrow} \min$, де $A \in \mathbb{S}_n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Розглядатимемо UBQP у останній постановці. Тут, допустимою множиною, відповідно, і $\mathcal{C}_b$–множиною цієї задачі, буде множина B'_n. $f(x)$, взагалі кажучи, неопукла, але її уопуклювання можна здійснити за формулою (7.32), де μ задано виразом (7.24), побудувавши таким чином її квадратичне опукле продовження $F^{\min}$, після чого перейти до UBQP із ним як цільовою функцією.

Відома також інша постановка UBQP [225] (далі *UBQP2*):

$$c^T x + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} y_{ij} \to \min,\ (x, y) \in BiQE_n,$$

де $E = BiQE_n$ – множина вигляду (8.25), яку називатимемо *$\mathcal{C}_b$–множиною UBQP2*. Вона виникає при перетворенні UBQP у UBQP2, і для її побудови точки вихідної $\mathcal{C}_b$-множини B'_n доповнюються C_n^2-ма координатами за правилом:

$$y_{ij} = x_i x_j,\ 1 \le i < j \le n. \tag{8.28}$$

У результаті утворюється власна підмножина $E' = B'_{C^2_{n+1}}$, що є вершинно- і сферично розташованою $\mathcal{C}$-множиною. Оскільки функціональні представлення бінарної $\mathcal{C}_b$-множини відомі, так само як функціональний зв'язок між y_{ij}, $1 \le i < j \le n$ та $x_i, i \in J_n$, задача побудови f–представлення E, воно ж розширене f–представлення B_n, вирішена. Так, у сукупності з (8.28),

(B'_n.SR1) є строгим неопуклим f–представленням E порядку C^2_{n+1}. Крім того, легко знайти описану гіперсферу навколо E, вибираючи як S описану гіперсферу навколо E'. Незважаючи на це, якщо ставиться задача побудови PSpR E за участі $P = BiQP_n$, вона складно реалізується, оскільки P задається неполіноміальним числом обмежень. У той же час, як було показано, (E.PSpR) за участю $P' = RBiQP_n$ вже знайдено. Ще одне f–представлення отримаємо, використовуючи дворівневість E у P, ілюструючи тим самим теорему 8.2. З цією метою (8.26) доповнимо до двосторонніх нерівностей:

$$3 \geq x_i + x_j + y_{ij} \geq -1;\ 3 \geq -x_i - x_j + y_{ij} \geq -1;\ 3 \geq -x_i + x_j - y_{ij} \geq -1;$$
$$3 \geq x_i - x_j - y_{ij} \geq -1,\ 1 \leq i < j \leq n, \tag{8.29}$$

які у точках E виконані як рівності. Таким чином, має місце: $\forall (x, y) \in E$

$$\forall i, j, 1 \leq i < j \leq n : 0.5|x_i + x_j + y_{ij} - 1| = 1;\ 0.5| - x_i - x_j + y_{ij} - 1| = 1;$$
$$0.5| - x_i + x_j - y_{ij} - 1| = 1; 0.5|x_i - x_j - y_{ij} - 1| = 1. \tag{8.30}$$

Зауважимо, що $x \in vert\ P' \backslash E$ задовольнятиме як рівність достатню кількість нерівностей (8.29), щоб бути вершиною P', але не всі обмеження (8.30), тобто виконання (8.30) є необхідною і достатньою умовою належності E. А це означає, що згортка (8.30) для α такого, що $1 < \alpha < \infty$ дає:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^\alpha}\sum_{i\in I}(|x_i + x_j + y_{ij} - 1|^\alpha + | - x_i - x_j + y_{ij} - 1|^\alpha + \\ &+ | - x_i + x_j - y_{ij} - 1|^\alpha + |x_i - x_j - y_{ij} - 1|^\alpha) = 4C^2_n -\end{aligned} \tag{8.31}$$

рівняння строго опуклої поверхні, описаної навколо E. Більш того, враховуючи, що в межах P' $|x_i + x_j + y_{ij} - 1|^\alpha \geq |x_i + x_j + y_{ij} - 1|^\beta$, та $\forall \beta > \alpha$ система (8.26), (8.31),

$$\frac{1}{2^\beta}\sum_{i\in I}(|x_i+x_j+y_{ij}-1|^\beta+|-x_i-x_j+y_{ij}-1|^\beta+ \\ +|-x_i+x_j-y_{ij}-1|^\beta+|x_i-x_j-y_{ij}-1|^\beta)=4C_n^2- \tag{8.32}$$

задаватиме E, якщо $\alpha\neq\beta$. Зокрема, при виборі $\alpha=2,\beta=4$ система (8.26), (8.31), (8.32) є біквадратним f–представленням E. Для того, щоб побудувати дотичне f–представлення E, можна скористатися прийомом, наведеним у заув. 5.10 і провести попереднє нормування обмежень (8.31), (8.32) на базі леми 5.8.

Зауважимо, що з використанням (8.31) можна побудувати ($BiQE_n$.PER) вигляду (8.26), (8.31) з $\alpha=2$, перевагою якого по відношенню до вищенаведеного ($BiQE_n$.PSpR) є те, що у перетині еліпсоїда з решіткою $\{-1,1\}^n$ утворюється саме $BiQE_n$. А це означає, що нижню оцінку цільової функції можна знайти, розв'язавши лінійну задачу на еліпсоїді (див. лему 5.8). Покращенням цієї оцінки буде розв'язок поліедральної релаксаційної задачі на P'. Далі оцінку можна покращувати, а згодом знайти точний розв'язок задачі, застосовуючи SCCM оптимізації на PESs. Слід зазначити, що на кожній ітерації SCCM верхня оцінка може бути покращена за допомогою комбінаторного заокруглення розв'язків поліедральних релаксаційних задач. Це можна зробити, наприклад, проектуванням вектора перших n координат на B_n, а решту координат визначаючи з (8.25).

Покажемо, що $E=BiQE_n$ є не тільки $\mathcal{C}_b$–множиною задачі UBQP2, але і просто $\mathcal{C}_b$–множиною. Згідно заув. 3.10, FPC Y векторів останніх C_n^2 координат елементів E, знайдені як результат дії нелінійного перетворення над B_n, заданого формулою (8.28). Відповідно, Y знайдено Способом 3.2 і є $\mathcal{C}_b$–множиною, а E є декартовим добутком $\mathcal{C}_b$–множин B_n, Y, тобто утворюється Способом 3.2 формування $\mathcal{C}_b$–множин.

Приклад 8.2. Представимо декілька нових моделей MWIS, використовуючи той факт, що $\mathcal{C}_b$–множиною цієї задачі є

$$E = \{x \in B_n : x \text{ задовольняє } (1.35)\} \tag{8.33}$$

(далі $\mathcal{C}_b$–*множина MWIS*), а також використаємо підходи, наведені у прикладі 8.1. А саме, використаємо дворівневість E по напрямках, заданих нормалями до гіперграней багатогранника, що є допустимою областю поліедральної релаксації MWIS, яка має вигляд $x_i \in [0,1]$, $i \in J_n$, (1.35), адже має місце $\forall x \in E$ $x_i \in \{0,1\}$, $i \in J_n$; $x_i + x_j \in \{0,1\}$, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. Представляючи першу умову у формі $(2x_i - 1)^2 = 1$, $i \in J_n$, а другу – так: $|2x_i + 2x_j - 1| = 1$, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, підводячи другу до квадрату та згортуючи отримані співвідношення, отримуємо: а) для пари вершин $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ $|2x_i + 2x_j - 1|^2 + (2x_i - 1)^2 + (2x_j - 1)^2 = 3$ або $x_i^2 + x_j^2 + x_i x_j - x_i - x_j = 0$ – рівняння n-вимірного еліптичного циліндра; б) для усієї множини E –

$$\sum_{(v_i,v_j)\in\mathcal{E}} (x_i^2 + x_j^2 + x_i x_j - x_i - x_j) = 0 \ - \tag{8.34}$$

рівняння еліпсоїда, описаного навколо E.

Незважаючи на те, що багатогранник P' вигляду (1.34), (4.36) є релаксаційним для $P = convE$ у випадках, коли граф $\mathcal{G}$ не є дводольним, доповнення його H–представлення (1.34), (4.36) рівнянням (8.34) є f–представленням E, а саме співвідношення (1.34), (4.36), (8.34) є PER множини (8.33) порядку $2n + m + 1$. Відповідно, (1.32), (1.34), (4.36), (8.34) є математичною моделлю MWIS (далі *MWIS.M8*), яку можна розв'язати, наприклад, SCCM для ELSs (див. приклад 8.1). Неважко перевірити, що у системі координат Ox_ix_j

$$x_i^2 + x_j^2 + x_i x_j - x_i - x_j = 0,\ x_i^2 + x_j^2 - x_i - x_j = 0, \tag{8.35}$$

є строгим f–представленням множини $\{(x_i^l, x_j^l)\}_{l\in J_3} = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Таким чином, замінюючи у MWIS.M5 обмеження (1.35), (1.36) системою (8.35) для $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, одержуємо нову модель (далі *MWIS.M9*), що використовує строге квадратичне f–представлення (8.35) множини E, яке є опуклим та має більший порядок за f–представлення (1.35), (1.36), що є перевагою при застосуванні до її розв'язання квадратичних двоїстих оцінок Н. З. Шора [221, 222, 225, 354]. Цю задачу можна розв'язати як класичну задачу на умовний екстремум, методами напіввизначеного програмування [8, 125, 137, 151, 152] та ін.

Приклад 8.3. Запропонуємо для SAT.M3 два способи формування алгебраїчної функції $\Phi(x)$, ґрунтуючись на продовженні функцій. Наша мета побудувати продовження функції (1.29) як функцію від $x \in \mathbb{R}^n$, тобто знайти вираз для $\Phi(x)$:

$$\phi(C_1, ..., C_m) \underset{B_n}{=} \Phi(x). \tag{8.36}$$

Представимо застереження $C_1, ..., C_m$ у формі

$$C_i = (\bigvee_{i' \in I_i} x_{j_{i'}}) \bigvee (\bigvee_{i' \in I'_i} \neg x_{j_{i'}}),\ i \in J_m. \tag{8.37}$$

Спосіб 8.1. Неважко помітити, що $\forall i, j \in J_n$

$$x_i \bigwedge x_j \underset{B_n}{=} \min\{x_i, x_j\},\ x_i \bigvee x_j \underset{B_n}{=} \max\{x_i, x_j\},\ \neg x_i \underset{B_n}{=} 1 - x_i. \tag{8.38}$$

Об'єднуючи (8.36)-(8.38), маємо:

$$\Phi(x) = \min_{i \in J_m} \max\{\max_{i' \in I_i} x_{j_{i'}}, \max_{i' \in I'_i}(1 - x_{j_{i'}})\} = \min_{i \in J_m} \max\{\max_{i' \in I_i} x_{j_{i'}}, 1 - \max_{i' \in I'_i} x_{j_{i'}}\}.$$

У результаті приходимо до розв'язання задачі (1.31) з цією негладкою та неопуклою цільовою функцією.

Спосіб 8.2. Дослідимо шляхи зведення SAT до оптимізації гладкої функції. З цією метою підберемо симетричні квадратичні функції для продовжень булевих функцій $x_i \wedge x_j$, $x_i \vee x_j$, а саме

$$x_i \bigwedge x_j \underset{B_n}{=} x_i x_j,\ x_i \bigvee x_j \underset{B_n}{=} x_i + x_j - x_i x_j,\ \neg x_i \underset{B_n}{=} 1 - x_i. \tag{8.39}$$

Двічі застостовуючи другий вираз із (8.39), маємо:

$$x_i \bigvee x_j \bigvee x_k \underset{B_n}{=} x_i + x_j + x_k - x_i x_j - x_i x_k - x_j x_k + x_i x_j x_k.$$

Як видно, зі збільшенням $|I_i|$ у C_i, алгебраїчний вираз стає все більш громіздким. Для уникнення цього, перейдемо до заперечення C_i і отримаємо:

$$\begin{gathered} C_i \underset{B_n}{=} 1 - (\neg C_i) = 1 - (\neg(\bigvee_{i' \in I_i} x_{j_{i'}}) \bigvee (\bigvee_{i' \in I'_i} \neg x_{j_{i'}})) = \\ = 1 - (\bigwedge_{i' \in I_i} \neg x_{j_{i'}}) \bigwedge (\bigwedge_{i' \in I'_i} x_{j_{i'}}) = 1 - \prod_{i' \in I_i} (1 - x_{j_{i'}}) \prod_{i' \in I'_i} x_{j_{i'}},\ i \in J_n. \end{gathered} \tag{8.40}$$

Застосовуючи (8.39), (8.40) до (1.29), маємо:

$$\Phi(x) = \prod_{i \in J_m} (1 - \prod_{i' \in I_i} (1 - x_{j_{i'}}) \prod_{i' \in I'_i} x_{j_{i'}}). \tag{8.41}$$

Отримана задача (1.31), (8.41) є задачею булевої поліноміальної оптимізації, але при цьому функція $\Phi(x)$ – неопукла.

Наведемо два способи побудови опуклого продовження $F(x,.)$ цієї функції. Перший використовує насл. 1.4, зважаючи на поліедрально-сферичність B_n, а саме $B_n = \hat{B}_n(0.5\mathbf{e}, \frac{\sqrt{n}}{2})$. Опукле продовження $\Phi(x)$ з B_n на опуклий компакт $K \supset B_n$ існує у формі $F(x, \mu) = \Phi(x) + \mu((x - 0.5\mathbf{e})^2 - \frac{n}{4}) = \Phi(x) + \mu(x^2 - x^T \mathbf{e})$, де μ можна знайти способами, наведеними у [185,323].

Використаємо зв'язок (8.38) із (8.39), у результаті чого для (8.41) маємо:

$$\Phi(x) \underset{x \in B_n}{=} \prod_{i \in J_m} (1 - \min\{ \min_{i' \in I_i} (1 - x_{j_{i'}}), \min_{i' \in I'_i} x_{j_{i'}} \}) = \Phi'(x).$$

Для перетворення $\Phi'(x)$ використаємо результат з [379], отримуючи:

$$\Phi'(x) \underset{x\in B_n}{=} \sum_{i\in J_m}((1-\min\{\min_{i'\in I_i}(1-x_{j_{i'}}),\min_{i'\in I_i'} x_{j_{i'}}\})-n_i+1)_+=\Phi''(x),$$

де $n_i = |I_i| + |I_i'|$, $i \in J_m$. Так, для випадку $n_i = |I_i|$, $i \in J_m$, подальші перетворення $\Phi''(x)$ будуть такими:

$$\begin{gathered}\Phi''(x) \underset{x\in B_n}{=} \sum_{i\in J_m}(1-\min_{i'\in I_i}(1-x_{j_{i'}})-n_i+1)_+ = \\ = \sum_{i\in J_m}(\max_{i'\in I_i} x_{j_{i'}}-n_i+1)_+ = F(x).\end{gathered} \tag{8.42}$$

У правій частині (8.42) стоїть опукла функція $F(x)$, що і є шуканим Ф.СЕ, при цьому це опукле продовження поліному знайдене серед функцій, що лежать поза межами класу поліноміальних продовжень, більш того – це продовження є негладким.

Зауваження 8.1. $\mathcal{C}_b$–множинами задач UPQP2 та SAT є $\mathcal{C}_b$–множини $E = BiQE_n$ і B_n відповідно. E – $\mathcal{C}_b$–множина MWIS не буде базовою множиною е-конфігурацій, адже жоден зі Способів 3.1-3.3 не дозволяє відобразити умову (1.34). Тим не менш, є усі підстави вважати, що, зважаючи на спосіб формування E має структурні та геометричні особливості, які доцільно досліджувати і використовувати в оптимізації.

8.4 е-конфігурації у геометричному проектуванні

Перспективним напрямком досліджень, пов'язаних з е-конфігураціями, є задачі розміщення, покриття та розбиття геометричних об'єктів [98, 182, 226–234, 250, 282, 299, 300, 364, 369, 372, 378]. При цьому для моделювання реальних матеріальних об'єктів базовим є поняття геометричної інформації $\mathbf{g}$ про об'єкт $O \subset \mathbb{R}^s$ $(s = 2, 3)$, що включає: просторову форму $\mathbf{s}$ як клас еквівалентності на сукупності точкових конфігурацій $\mathbb{R}^l$; метричні характеристики

$\mathbf{m}$, що задають «розміри» об'єкта форми $\mathbf{s}$[1)]; параметри розміщення $\mathbf{p}$, що визначають позицію об'єкта у просторі $\mathbb{R}^l$.

Геометрична інформація $\mathbf{g} = (\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{p})$ при фіксованій формі $\mathbf{s}$ породжує простір геометричних інформацій $\mathcal{G}$ [358, 364], ізоморфний евклідовому простору, розмірність якого визначається числом компонент $\mathbf{m}$ і $\mathbf{p}$. У свою чергу, сукупності геометричних об'єктів

$$\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in J_n} \tag{8.43}$$

відповідає декартів добуток $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_n$ просторів геометричних інформацій $\mathcal{G}_i$, $i \in J_n$, породжених кожним з об'єктів.

У монографії [364] виділено клас задач геометричного проектування, що формалізуються як відображення простору $\mathcal{G}$ у себе при виконанні заданої системи обмежень, у яких можна виділити комбінаторну структуру [234, 250, 318, 364, 376].

Здійснимо відображення множини геометричних об'єктів (8.43) із фіксованою формою та метричними характеристиками у скінченну множину власних параметрів розміщення $\mathbf{p}_j, j \in J_k$.

Відповідно до введених у п. 2.2 позначень, ототожнимо множину $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ із множиною параметрів розміщення, поклавши $\mathbf{a}_j = \mathbf{p}_j$, $j \in J_k$. $\mathbf{A}$ індукує $\mathcal{E}_c$-множину Π, складовими якої є с-конфігурації вигляду:

$$\pi = \begin{pmatrix} O_1 & \ldots & O_n \\ \mathbf{p}_{j_1} & \ldots & \mathbf{p}_{j_n} \end{pmatrix} = \langle \mathbf{p}_{j_1} \mathbf{p}_{j_2} ... \mathbf{p}_{j_n} \rangle \,. \tag{8.44}$$

Поставивши π у взаємно-однозначну відповідність вектор

$$\mathbf{g} = (p_{1j_1}, ..., p_{1j_n}, p_{2j_1}, ..., p_{2j_n}, ..., p_{mj_n}, ..., p_{mj_n}) \in \mathcal{G},$$

[1)] пласкі об'єкти характеризуються трьома параметрами розміщення, а для просторових об'єктів число параметрів розміщення, з урахуванням кутів Ейлера, дорівнює 6 отримаємо е-конфігурацію з параметром $m = 6$ для $O_i \subset \mathbb{R}^3$ та $m = 3$ для $O_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in J_n$. Такі вектори утворюють $\mathcal{C}$–множину $E = \varphi(\Pi)$, яка не тільки є підмножиною $\mathbb{R}^{m \times n}$, але і простору $\mathcal{G}$.

Розглянемо детальніше задачу розміщення сукупності об'єктів у області розміщення, виділивши у її структурі множину е-конфігурацій перестановок векторів. Крім цього, продемонструємо використання математичної моделі Задачі 8.1 у задачах розміщення. Зауважимо, що у той час як у (8.44) як результуючу множину було вибрано вектори параметрів розміщення, які є змінними для об'єктів розміщення, то у моделі, яку буде представлено зараз, відображення відбуватиметься на множину заданих метричних характеристик. Зрозуміло, що у кожній математичній моделі задачі розміщення як задачі на множині е-конфігурацій, незважаючи на те, що вибрано за результуючу множину, беруть участь і метричні характеристики, і параметри розміщення. Вважаючи їх постійними і змінними відповідно для (8.43), обидві математичні моделі по суті будуть ідентичними. Але теорія f–представлень у поєднанні із MASD [250] дозволяє перейти до розгляду принципово різних математичних моделей, у першій з яких використовується f–представлення множини векторів параметрів розміщення, а у другій – f–представлення множини векторів метричних характеристик [182, 318, 321]. З точки зору одержання більш точного розв'язку, другий шлях є перспективнішим, адже він не тільки збільшує область пошуку, але й потребує розгляду розширеного простору. Перейдемо до детального розгляду відповідної математичної моделі.

Постановка задачі [318]. Нехай множина (8.43) m-вимірних об'єктів із відомими метричними характеристиками розміщуються в області $O_0 \subset \mathbb{R}^m$ із фіксованими параметрами розміщення. Необхідно знайти параметри розміщення об'єктів та метричні характеристики області розміщення, при яких досягається екстремум функції ϕ, при цьому об'єкти розміщення попарно не перетинаються і розташовані в області розміщення.

Побудуємо математичну модель даної задачі як задачі оптимізації на $\mathcal{P}$S. Як вихідну множину виберемо сукупність векторів параметрів розміщення, а результуючу – різні вектори метричних характеристик об'єктів розміщення. Нехай $\mu_i = (\mu_{1i}, ..., \mu_{mi})^T$ – вектор метричних характеристик об'єкта O_i, $i \in J_n$. Для побудови результуючої множини $\mathbf{A}$ вигляду (2.9) виділимо основу $\mathcal{A}$ з мультимножини $\mathbf{G} = \{\mu_i\}_{i \in J_n}$ і здійснимо присвоювання $\mathbf{A} = \mathcal{A}$.

Враховуючи наявність області розміщення O_0, нумерацію об'єктів будемо здійснювати з нуля – $\{O_i\}_{i \in J_n^0}$, і саме вона буде виступати вихідною множиною для формування конфігурацій. Параметрами векторів (8.2) будуть параметри розміщення об'єктів, а саме координати їх полюсів.

Згідно з умовою задачі, параметри розміщення області O_0 задані, решту треба знайти. Таким чином, формула (8.2) набуває вигляду: $b_0 = (b_{10}, ..., b_{s0})^T$, $\bar{b}_i = \left(\bar{b}_{1i}, ..., \bar{b}_{si}\right)^T \in \mathbb{R}^s$, $i \in J_n$, де s – число параметрів розміщення, $\bar{b}_0 \in O_0$ – полюс області розміщення, $\{b_i\}_{i \in J_n}$ – множина полюсів об'єктів розміщення. Формули (2.10), (2.12) перетворюються на $\bar{a}_0 = (\bar{a}_{10}, ..., \bar{a}_{m0})^T \in \mathbb{R}^s$, $a_i = (a_{1i}, ..., a_{mi})^T \in \mathbb{R}^m$, $l \in J_k$, де m – кількість метричних характеристик, є змінними для області розміщення, решта – фіксовані. Задача (8.3), (8.7), (8.8) еквівалентна такій: знайти

$$\pi^* = \arg\ \min\ f\left(b_0, \overline{\mathbf{b}}, \pi\right), \tag{8.45}$$

$$\pi \in \Pi\left(\bar{a}_0, \mathbf{a}\right), \tag{8.46}$$

$$\varphi_i\left(b_0, \overline{\mathbf{b}}, \pi\right) \leq 0,\ i \in J_t, \tag{8.47}$$

де $\pi = \begin{pmatrix} b_0 & \bar{b}_1 & ... & \bar{b}_n \\ \bar{a}_0 & a_{j_1} & ... & a_{j_n} \end{pmatrix} = \langle \bar{a}_{j_0}, a_{j_1}, ..., a_{j_n} \rangle$.

Тут система обмежень (8.47) включає два блоки: а) умови попарного неперетину об'єктів розміщення:

$$\Phi^{O_{i'}O_{i''}} \geq 0,\ 1 \leq i' < i'' \leq n; \tag{8.48}$$

б) умови їх розміщення в області O_0:

$$\Phi^{O_0^* O_{i'}} \geq 0,\ i' \in J_n, \tag{8.49}$$

де O_0^* – доповнення O_0, $\Phi^{[\cdot]}$ – фі-функція [55]. У термінах метричних характеристик і параметрів розміщення, умови (8.48), (8.49) представимо так:

$$\Phi\left(\overline{b}_{i'}, a_{i'}, \overline{b}_{i''}, a_{i''}\right) \geq 0,\ 1 \leq i' < i'' \leq n, \tag{8.50}$$

$$\Phi'\left(b_0, \overline{a}_0, \overline{b}_{i'}, a_{i'}\right) \geq 0,\ i' \in J_n. \tag{8.51}$$

Формалізуємо обмеження (8.46), переписавши його наступним чином:

$$\pi \in \Pi_{nk}\left(\mathbf{G}\right), \tag{8.52}$$

$$a_0^{\min} \leq \overline{a}_0 \leq a_0^{\max}, \tag{8.53}$$

де $\mathbf{G}$ – мультимножина векторів метричних характеристик, а $[a_0^{\min}, a_0^{\max}] \subset \mathbb{R}_+^m$ – паралелепіпед, у межах якого можуть змінюватися метричні характеристики O_0, $\Pi = \Pi_{nk}\left(\mathbf{G}\right)$ – $\mathcal{E}_c$-множина перестановок векторів, що є прообразом при відображенні φ загальної $\mathcal{C}_b$–множини перестановок векторів, $E^N = E^N_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$, що породжується множиною векторів $\mathbf{G}$, індукується мультимножиною G^N, що об'єднує мультимножини метричних характеристик об'єктів (8.43) та генерується множиною $\mathcal{A}^N = S(G^N)$. Умова (8.52) відображає той факт, що допустиме розміщення визначається з точністю до перенумерації об'єктів розміщення. Тепер можна здійснити перехід до розгляду $\mathcal{C}_b$–множини $E^N_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$ за вищенаведеною схемою у розд. 2 і ECOP на ній. Для цього умову (8.52) замінити такою: (2.128),

$$x \in E_{nk}(G), \tag{8.54}$$

де $E = E_{nk}(G)$ – прообраз E^N при відображенні ζ (див. (2.127)). Використовуючи математичну модель E у формі f–представлення, такого, як ($E_{nk}(G)$.SR2), одержимо математичну модель даної задачі розміщення. Ми побудували змішано-комбінаторну оптимізаційну модель (8.45), (8.50), (8.51), (8.53), (8.54), у якій змінними є метричні характеристики та параметри розміщення об'єктів, а також метричні характеристики області розміщення. Завдяки умові (8.54) допустимим розв'язком цієї задачі буде допустиме розміщення об'єктів (8.43) заданих спочатку розмірів. Штучне додавання цієї умови дозволяє суттєво, а саме у $|\Pi_{nk}(\mathbf{G})| = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ разів, збільшити область пошуку оптимального розв'язку порівняно з традиційними постановками задач розміщення, в яких метричні характеристики об'єктів фіксовані [55, 98, 364], і, відповідно, збільшити ймовірність отримання кращого розв'язку при застосуванні наближених методів до її розв'язання. Крім того, це демонструє, яким чином практично може бути застосований MASD [182, 250, 376], у якому змінні метричні характеристики об'єктів розміщення виступають узагальненими змінними [234], при розв'язанні реальних задач.

Зауважимо, що ідея розгляду задач геометричного проектування з об'єктами, що мають змінні метричні характеристики, не є новою [229, 372], але у даних джерелах вона використовувалася у іншому контексті. Так, у [372], зокрема, досліджуються задачі розміщення, коли метричні характеристики об'єктів розміщення змінюються у заданих межах, а також випадок, коли ці характеристики, як і форма об'єктів, залежать від параметрів розміщення. У [229] змінність метричних характеристик розуміється у тому сенсі, що на початковому кроці усі об'єкти розміщення мають нульовий об'єм (площу), щоб випадкове початкове розміщення було допустимим, а потім розмір об'єктів поступово збільшується до їх реальних розмірів, не порушуючи при цьому умови на взаєморозташування об'єктів та області розміщення. Між тим, запропонована у даному пункті математична модель безпосередньо узагальнюється на випадки, розглянуті у [372], а також може бути застосована у підході, викладеному у [229] для одержання допустимого розміщення. При цьому, оскільки метричні характеристики не будуть прив'язані до конкретного об'єкта розміщення, то, за рахунок суттєвого збільшення області пошуку, можна очікувати поліпшення результатів розв'язання реальних задач геометричного проектування при використанні представленої математичної моделі задачі розміщення.

8.5 Прикладні задачі на множинах e-конфігурацій

Перелічимо деякі додатки отриманих результатів у практичних і теоретичних областях. Будемо вважати, що розглядається ECOP вигляду: знайти $\min\limits_{x \in E} f(x)$, де E – $\mathcal{C}_b$–множина, а $f(x)$ – квадратична функція (далі the unconstrained quadratic $\mathcal{C}_b$-set problem, $(E.UQP)$). Так, задача (B_n.UQP) – це UBQP, що належить до NP-складних [12, 148] і виникає в багатьох областях досліджень як основна, так і допоміжна задача [4, 32, 43, 87, 118, 130, 152, 172, 175, 185, 196, 219, 220]. Чисельні задачі геометричного проектування, логістики, призначення, розбиття, кластеризації, різноманітні задачі теорії графів формулюються як (B_n.UQP). Так, серед графових задач – це the classic vertex coloring problem, the generalized independent set problem (GIS), the classic set partitioning (SP) problem, set packing problem, the Linear Ordering (LO), the Sum Coloring Problem, the Robust Graph Coloring Problem (RGCP), the Generalized Vertex Covering Problem (GVCP) [130]. Крім того, деякі умовні лінійні задачі на B_n еквівалентно формулюються як (B_n.UQP) [12, 41, 78, 103, 113, 122, 125, 137, 151, 180, 183, 191, 201].

Розглянемо клас NP-складних задач ($B_n(m)$.UQP), до розв'язання яких зводяться деякі задачі теорії графів [32], такі, як the densest k-subgraph problem (DkS) [137, 148, 151], the heaviest k-subgraph problem (HSP) [137, 151], the minimum bisection problem (MB) [12, 66, 125, 137] і т.п. Лише деякі з областей практичного застосування (HSP) – це телекомунікації, розміщення складських приміщень, оборона, соціальні та молекулярні мережі та ін. [137]. Численні додатки (MB) включають у себе VLSI-дизайн, обробку зображень, комп'ютерне бачення, наукові обчислення, паралельне програмування, задача балансування, маршрутизацію і т.п. [137].

($B_n(m)$.UQP) належить класу ($E_{nk}(G)$. UQP) NP-складних проблем, також відомого численними своїми додатками [236, 364]. Те саме стосується і умовних квадратичних задач на $E_{nk}(G)$ (далі ($E_{nk}(G).QP$)) [83, 273]. Ось лише деякі з додатків ($E_{nk}(G)$.UQP) і ($E_{nk}(G)$.QP): – проблеми балансування, пов'язані з дизайном чіпів, завантаженням судна, оснащенням літаків, балансуванням турбін, геометричним проектуванням, проблемами розміщення об'єктів [83, 98, 236, 250, 273, 284, 286, 321, 350, 363, 370, 376].

($\mathcal{E}_n$.UQP) – це QAP [50], що має численні застосування в задачах компоновки, дизайні чіпів, плануванні, комунікаціях, балансуванню турбін, ергономіці і т. д. Узагальнення QAP на випадок призначення одного суб'єкта на декілька посад або кілька суб'єктів на одну посаду моделюються за допомогою ($\mathcal{E}_{nk}(G)$.UQP), де $n > k$ [106]. Крім цього $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{nk}(G)$ знаходять застосування у криптографії та інших практичних областях [147].

Приклади задач оптимізації на полікомбінаторних $\mathcal{C}_b$-множинах, що породжується $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок і булевих розміщень/перестановок, можна знайти, наприклад, у [32, 184, 334, 337, 345–347]. Вони пов'язані з теорією розкладів, VLSI-дизайном, геометричним проектуванням, телекомунікаціями тощо. Як декартові добутки $\mathcal{C}_b$-множин, полікомбінаторні множини формуються Способом 3.1. У [33] представлена математична модель дискретної томографії (DT) як умовна булева квадратична задача. При цьому структура обмежень дозволяє переформулювати її у вигляді задачі оптимізації на $\mathcal{C}_b$-множині, що утворюється в перетині двох $\mathcal{C}_b$-множин булевих поліперестановок, тобто також формується Способом 3.1. (DT) виникає в різних областях, таких як неруйнівний контроль, обробка зображень, електронна мікроскопія, захист даних, промислова томографія і матеріалознавство. Слід зазначити, що Прикладами практичних задач, що моделюються в формі ECOP із поліноміальної цільовою функцією степеня вище двох є: задача балансування для $E_{nk}(G)$ [236]; кубічні, біквадратні та інші N-адичні задачі про призначення – для $\mathcal{E}_n$ [50]; багатовимірна інтерполяція, методи кінцевих елементів – для $B_n(1)$ [127].

Прикладом практичного застосування дискретних задач неполіноміальної оптимізації є the single row facility layout problem (SRFLP) [6], яка формулюється як задача кусково-лінійної оптимізації на $E_n(J_n)$. Її окремим випадком є задача про мінімізацію довжини зв'язуючої сітки [364].

Огляд математичних моделей практичних задач, що представлені у роботах [80, 180–184, 312, 334–337, 342, 345–347], їх інтерпретація у термінах е-конфігурацій та огляд підходів до їх розв'язання, пов'язаних із використанням властивостей допустимих областей задач як $\mathcal{C}$–множин, наведена у додатку В.7.

8.6 Класифікація ECOPs на $\mathcal{C}$-множинах

ECOP розглядатимемо у формі (1.12), де E' – $\mathcal{C}$–множина вигляду (1.11), E – $\mathcal{C}_b$–множина, що є надмножиною E', при цьому $f(x)$, $f_i(x) \in \mathbf{C}(K)$, $i \in J_m$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ – опукла область оптимізації, така, що $E \subset K$ (далі ECOP на $\mathcal{C}_b$–множині E або *ECOP2*). Зауважимо, що довільна ECOP може представлена у формі ECOP2, адже для довільної $\mathcal{C}$–множини E' виконано $E' \subseteq E = \overline{E}_k^n(G)$, у якості K може бути обрано гіперкуб $\overline{\Pi}_k^n(G)$ або куля, описана навколо нього, а $f(x)$, $f_i(x)$, $i \in J_m$ за необхідності можуть бути замінені інтерполяційними поліномами, побудованими по точках E.

Класифікацію ECOP2s здійснимо за кількома напрямками: а) за типом результуючої множини $\mathcal{E}_c$-множини $\Pi = \varphi^{-1}(E)$ – числові ECOP2s, якщо $m = 1$, та векторні ECOP2s, якщо $m > 1$; б) за виглядом цільової функції та функціональних обмежень – лінійні, квадратичні, кубічні, біквадратні, поліноміальні степеня вище чотирьох, тригонометричні, гладкі та негладкі, з опуклими цільовою функцією (1.8) та функціональними обмеженнями (1.9) тощо; б) за наявністю прямих обмежень (1.10) (так, якщо (1.10) відсутнє, ECOP представлена у формі CECOP); в) за наявністю функціональних обмежень – безумовні ($m = 0$) та умовні ($m > 0$) ECOPs на $\mathcal{C}_b$–множинах (далі unconstrained/constrained optimization problem on $\mathcal{C}_b$-set E, E.UP/E.CP відповідно, ECOPs на $\mathcal{C}_b$–або $\mathcal{C}$–множинах відповідно); г) за виглядом $\mathcal{C}_b$–множини:

– відповідно до C-A-типології, наведеної у пп. 2.2-2.4, 2.6 (наприклад, ECOP2s на $\mathcal{P}$Ss, $\mathcal{SP}$Ss, $\overline{\mathcal{PP}}$Ss, $\mathcal{B}$Ss і т.д.);

– відповідно до G-A-типології, наведеної у п. 2.5 (наприклад, ECOP2s на VLSs, PSpSs, 2LSs тощо);

– відповідно до того, які з Задач 4.1-4.15 розв'язані для E та $P = convE$ (наприклад, ECOP2s на WDSs, на множинах, що дозволяють ефективно шукати проекцію (далі well-projected sets, *WPDs*) або нижні оцінки f, на $\mathcal{C}_b$-множинах із відомими PSRs тощо).

Комбінація різних цих ознак приводить до подальшого розбиття вказаних вище класів ECOP2s на підкласи, з яких у даному пункті було розглянуто, зокрема, ECOP2s на різних класах $\mathcal{C}_b$–множин, квадратичні E.UPs – E.UQPs – та квадратичні E.CPs, поліноміальні та негладкі ECOP2s, числові та векторні ECOP2s, ECOP2 на 2LSs із відомим розв'язком Задачі 4.3 та таких, що є WDSs, та інші класи задач.

Зауваження 8.2. Представлена типологія ECOP2s дозволяє запропонувати також нові класи релаксаційних задач, а саме: а) $\mathcal{C}_b$–релаксацією умовної ECOP2 назвемо безумовну ECOP2, отриману з неї ослабленням обмежень (1.9); б) WDS-релаксацією E.UP на E, що не є WDS, назвемо ECOP2 на WDS $E'' \supset E$; в) WPS-релаксацією E.UP на E, що не є WPS, назвемо

ECOP2 на WPS $E'' \supset E$; г) лагранжевою $\mathcal{C}_b$–релаксацією E.CP буде E.UP вигляду: знайти $\min\limits_{x \in E} \phi(x, \overline{\lambda})$, де $\phi(x, \overline{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_i)_i \in \mathbb{R}_+^m$.

8.7 Методологія розв'язання COPs

На базі результатів роботи запропоновано методологію дослідження COP на $\mathcal{E}_c$-множині Π полягає в наступному. Спочатку проводиться бієктивне відображення результуючої множини даної $\mathcal{E}_c$-множини на числову множину A чи множину векторів однакової розмірності $\mathbf{A}$ таким чином, щоб ключова інформація, що залучається у дану екстремальну задачу, була відображена у результуючій множині. На наступному кроці COP "занурюється"у евклідів простір і формується її евклідова постановка, що є задачу евклідової комбінаторної оптимізації у формі ECOP. З цією метою, здійснюється бієктивне відображення множини Π у евклідів простір і отримується числова або векторна $\mathcal{E}_c$-множина E, а цільова функція та функціональні обмеження, що виділяють допустиму область Π' з Π, формулюються в термінах декартових змінних. Таким чином, допустима множина E' виділяється з E аналітично та формується еквівалентна постановка COP як задачі дискретної оптимізації. Наступним кроком є застосування конструктивного та геометричного аналізу до класифікації E. А саме, запропонована типологія застосовується до визначення класу E (далі параметр A) як $\mathcal{C}$–множини, до класу цільової функції (далі параметр B) та функціональних обмежень (далі параметр C). У випадку, якщо E не є $\mathcal{C}_b$–множині, здійснюється перехід до еквівалентної моделі, що є ECOP2 або сукупністю ECOP2s на $\mathcal{C}_b$–множинах, які бажано є VLSs, WDSs, WRSs та з відомим PSRs. Цей перехід можливо зробити: а) пошуком E'' надмножини E, що є $\mathcal{C}_b$–множиною з подальшим доповненням системи (1.9) для виділення E з E''; б) декомпозицією E на $\mathcal{C}_b$–множини, кількість яких поліноміально залежить від n із подальшим переходом до послідовного розгляду отриманих ECOPs; в) підйому у розширений простір, де образом П є деяка $\mathcal{C}_b$–множина, що фактично означає, що відображення П у простір відбувається способом, відмінними від (2.19) та (2.19).

Залежно від комбінації параметрів A, B, C визначається клас даної ECOP2 (див. п. 8.6) та вона представляється у вигляді задачі оптимізації на $\mathcal{C}_b$–множині $E'' \supseteq E$, представленої як теоретико-множинних операцій над добре описаними $\mathcal{C}_b$–множинами.

Подальша методологія дослідження ECOP2 передбачає побудову дерева можливих підходів до розв'язання цієї задачі, у якому передбачені схеми пошуку точного, наближеного, та наближеного з оцінкою точності розв'язків, а також адаптації відомих методів дискретної оптимізації до розв'язання ECOP2 шляхом її переформулювань, у тому числі у розширеному просторі. Ці нові формулювання у вихідному просторі передбачають, зокрема, застосування теорії f–представлень до аналітичного опису $\mathcal{C}_b$–множини E'', у результаті чого формується нова математична модель ECOP, що відрізняється від попередньої новою комбінацією параметрів B, C, відповідно, набір методів її розв'язання поповнюється тими методами евклідової комбінаторної оптимізації та нелінійного програмування, що застосовні до цієї комбінації. У тому випадку, якщо до здійснюється занурення у розширений простір, $\mathcal{C}_b$–множина E'' породжує нову $\mathcal{C}$–множину E''', що отримується з E'' розширенням координат її елементів, значеннями, що одержуються у результаті застосування зв'язуваних обмежень. До E''' знову застосовується типологія, у результаті чого побудована розширена постановка ECOP характеризуватиметься новою комбінацією усіх трьох параметрів A, B, C, тим самим, арсенал методів, застосовуваних до розв'язання ECOP2, доповнюється далі. Слід зазначити, що, оскільки E''' отримується з $\mathcal{C}_b$–множина E'' застосуванням єдиних зв'язуваних обмежень, що пов'язані з класом задач оптимізації, слід очікувати, що вона також має комбінаторну структуру, яку також можна виразити аналітично, та утворює клас $\mathcal{C}$–множин, що називається $\mathcal{C}_b$–множиною даного типу ECOP2.

Отже, не обмежуючи загальності, вважаємо, що ECOP є ECOP2, відповідно E – $\mathcal{C}_b$–множина, а E' – допустима область. Основна схема, що передбачається даною методологією до розв'язання ECOP2, пов'язана із застосуванням теорії опуклих продовжень, f–представлень та оцінок мінімумів функцій до розв'язання ECOP. Тому виділимо у ієрархії підходів до розв'язання ECOP2 два напрямки (далі *Напрямок 1* та *Напрямок 2*). Напрямок 1 передбачає використання ECOP2 на VLS/VLSs (далі Задача 8.2). З цією метою проводиться попередня перевірка E на вершинну розташованість за допомогою тестів, запропонованих у розд. 2. Якщо ці тести не підтверджуються, що можливо лише для окремих класів $\mathcal{C}$–множин розміщень, проводиться декомпозиція E на VLSs, наприклад, на $\mathcal{C}$–множини перестановок, або відбувається підйом у розширений простір та перехід до розгляду отриманої VLS замість E'' (див. розд. 2). У результаті застосування обох цих підходів змінюється комбінація параметрів A, B, C, відповідно, з'являються можливість розв'язання ECOP2 методами, які досі не були застосовні. Вибір підходу до переходу до Задачі 8.2 залежить від специфіки ECOP2. Так, якщо E має неполіноміальну потужність, декомпозиційний підхід формування Задачі 8.2 застосовується лише у випадку поліноміальної кількості складових цієї декомпозиції. Те саме стосується і схем підйому – кількість нових координат, а також обчислювальна складність формування E''' має бути поліноміальною за n, де n – розмірність вихідного простору.

Переходимо до розгляду Задачі 8.2, що характеризується трійкою $\langle A, B, C \rangle$. Залежно від комбінації A, B формуємо опукле продовження цільової функції і переходимо до його оптимізації на множині E, функціональні обмеження якої замінюються системою опуклих обмежень, вигляд яких залежить від комбінації A, C, і здійснюємо перехід до розгляду C'ECOP на $\mathcal{C}_b$–множині E'' з додатковими опуклими обмеженнями (далі Задача 8.3). До Задачі 8.3 застосовуємо одну з розв'язувальних схем, що передбачає використання опуклості допустимої області поледральної релаксації Задачі 8.3, того факту, що E'' – $\mathcal{C}_b$–множина, що є WDS або представляється за допомогою добре описаних $\mathcal{C}_b$–множин, а також декомпозиційних підходів, що застосовні до E'' як $\mathcal{C}_b$–множини та дозволяють редукцію Задачі 8.3.

Напрямок 2 ґрунтується на застосуванні теорії f–представлень до розв'язання Задачі 8.2. Він передбачає розв'язання Задачі 5.1 і формування f–представлення E та перехід до розгляду CECOP, тобто до моделі ECOP2 як задачі на умовний екстремум, у тому числі як класичної задачі на умовний екстремум, до якої застосовний апарат нелінійного програмування. Обидва ці підходи пропонується використовувати у комплексі, формуючи таким чином гибридні оптимізаційні підходи. Так, наприклад, можна розв'язувати ECOP2 у формі Задачі 8.3, а нижні оцінки отримувати за допомогою її постановки як Задачі 8.2. І навпаки, оскільки область пошуку точного розв'язку Задачі 8.2 методами гілок та меж залежить суттєво від обох оцінок мінімумів – верхньої та нижньої, а для одержання верхньої оцінки треба розв'язати задачу допустимості, то використання для цієї цілі постановки у формі Задачі 8.3 є ефективнішим.

8.8 Висновки за розділом 8

У даному розділі викладено методологію дослідження екстремальних комбінаторних задач і представлено схему її застосування до розв'язання ряду модельних задач, серед яких ECOP на дворівневій $\mathcal{C}_b$-множині, MWIS, SAT, UBQP та ін.

У рамках дослідження сфери застосування e-конфігурацій у GDP, побудовано математичну модель, що зв'язує COP та ECOP на множині e-конфігурацій, вихідною та результуючою множинами яких виступають вектори однакової розмірності. Модель сформульовано у термінах c-конфігурацій, що зберігають інформацію про вихідну та результуючу множини та дозволяють змінність довільного числа параметрів. Дана модель застосована до задач розміщення, а саме побудовано модель розміщення геометричних об'єктів із однаковим числом метричних характеристик як задачу оптимізації на множині е-конфігурацій перестановок векторів, де вихідною множиною є вектора параметрів розміщення, а результуючою – вектора метричних характеристик. Дана модель дозволяє варіювання множини змінних характеристик, у результаті чого вона охоплює як традиційну модель розміщення об'єктів, де метричні характеристики об'єктів розміщення фіксовані, так і випадок, коли усі або частина з них змінні, при цьому збіжність до допустимої точки забезпечується додатковими обмеженнями, що використовують f–представлення $\mathcal{C}_b$–множини перестановок та зв'язок числової та векторної $\mathcal{C}_b$–множин перестановок.Представлено поняття $\mathcal{C}_b$–множини класу ECOPs, наведено приклади таких множин та досліджено властивості. За рахунок цих множин, клас $\mathcal{C}_b$–множин розширюється допустимими областями багатьох класів COPs. Їх дослідження як $\mathcal{C}$–множин дозволяє винайти їх нові особливості, які можуть бути використані у створенні нових та вдосконаленні існуючих методів розв'язання COPs.

Наведено області практичного та теоретичного застосування е-конфігурацій, розглянутих у даній роботі. Проведене дослідження показало, що область застосування результатів даного доцільно розширити на інші класи евклідових комбінаторних множин та екстремальних задач, а також на інші задачі геометричного проектування та оптимального планування.

Основні результати восьмого розділу опубліковано у роботах [80, 180–186, 254, 310, 312, 314, 318, 321, 323, 327, 330, 331, 334–337, 342–347, 369].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [4, 6, 8, 12, 24–26, 30, 32, 33, 41, 43, 45, 46, 50, 55, 64, 66, 78, 83, 84, 86, 87, 87, 92, 94, 98, 103, 106, 113, 118, 121, 122, 125, 127, 130, 137, 143, 147, 148, 151, 152, 154, 158, 162, 163, 165, 170, 172, 175, 176, 185, 191, 192, 196, 200, 201, 219–222, 225–234, 236, 241, 250, 261, 273, 282, 284, 286, 292, 299, 300, 307, 309, 350, 354, 355, 358, 363, 364, 368, 370, 372, 376, 378, 379].

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного в дисертаційній роботі дослідження вирішено важливу наукову проблему створення загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, що полягає у відображенні допустимої множини комбінаторних конфігурацій у евклідів простір, формуванні евклідової постановки екстремальної задачі, застосуванні запропонованої типології до визначення типу отриманої задачі евклідової комбінаторної оптимізації як екстремальної задачі на множині е-конфігурацій та, залежно від класу отриманої задачі, подальшого її розв'язання відповідними методами, що комплексно використовують досліджені алгебро-топологічні та тополого-метричні властивості множин е-конфігурацій, теорію їх неперервних функціональних представлень, теорію опуклих продовжень та оцінок мінімумів функцій, а також наявний на даний момент апарат математичного програмування. У процесі вирішення поставлених завдань з розроблення даної методології одержано ряд нових наукових результатів.

1. У роботі проведено аналіз сучасного стану теорії конфігурацій та евклідової комбінаторної оптимізації, перспектив використання евклідових, у тому числі неперервних, постановок задач комбінаторної оптимізації та застосування теорії нелінійного, зокрема дискретного, програмування до розв'язання екстремальних комбінаторних задач. У результаті проведеного дослідження вперше виділено спеціальний клас е множин ($\mathcal{E}_c$-множин), що складаються з комбінаторних конфігурацій, породжених векторами. Встановлено, що $\mathcal{E}_c$-множини є математичними моделями допустимих областей чисельних практичних задач, зокрема задач геометричного проектування, що формалізують їх у термінах відображень.

2. Вперше введено нові математичні об'єкти – евклідову комбінаторну конфігурацію (е-конфігурацію) як відображення скінченної множини комбі-

наторного характеру у точку евклідова простору та множину е-конфігурацй ($\mathcal{C}$–множину) – та досліджено їх властивості. Це дало можливість поєднати структурні властивості $\mathcal{E}_c$-множин та геометричні особливості $\mathcal{C}$–множин у математичному моделюванні допустимих областей екстремальних комбінаторних задач, а зберігання усієї інформації про комбінаторні конфігурації у $\mathcal{C}$–множинах дозволило розширити клас евклідових постановок задач комбінаторної оптимізації та використати $\mathcal{C}$–множини у побудові еквівалентних математичних моделей численних задач практичного та теоретичного змісту.

3. Виділено фундаментальні характеристики $\mathcal{C}$–множин, такі, як індукуюча мультимножина, твірна множина та розмірність простору, у якому ці множини задано. Ці характеристики покладено в основу напрямку дослідження $\mathcal{C}$–множин – конструктивного аналізу (C-A), який став головним інструментом типології та моделювання $\mathcal{C}$–множин, зокрема побудови їх аналітичних описів. Дослідження $\mathcal{C}$–множин як скінченних точкових конфігурацій виділено як окремий напрямок геометричний аналіз (G-A), присвячений вивченню алгебро-топологічних властивостей $\mathcal{C}$–множин та їх опуклих оболонок. У комплексі C-A і G-A стали інструментом поєднання екстремальних задач на $\mathcal{E}_c$-множинах із задачами евклідової комбінаторної оптимізації на $\mathcal{C}$–множинах і задачами дискретного програмування, а також з нелінійним, зокрема дискретним, програмуванням як засобом їх розв'язання, який з'явився після відображення в евклідів простір.

4. Вперше виділено клас базових $\mathcal{C}$–множин ($\mathcal{C}_b$-множин), а серед них – числові та векторні $\mathcal{C}_b$-множини, та встановлено їх зв'язок із відомими комбінаторними та евклідовими комбінаторними множинами. Дослідження алгебро-топологічних та тополого-метричних властивостей множин набуло подальшого розвитку для таких класів, як загальні $\mathcal{C}_b$-множини перестановок і розміщень; $\mathcal{C}_b$-множини парних перестановок і парних булевих векторів, поліперестановок і полірозміщень, матриць перестановок і перестановок з повтореннями. Вперше досліджено властивості загальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок

зі знаком, матриць розміщень і перестановок зі знаком. Це розвиває теорію ЕСО у напрямку дослідження властивостей образів $\mathcal{E}_c$-множин, служить підґрунтям для вдосконалення існуючих і розроблення нових спеціальних методів ЕСО, а результати, що стосуються аналітичних описів $\mathcal{C}_b$ багатогранників та описаних поверхонь, служать основою поліедрально-поверхневих аналітичних описів $\mathcal{C}_b$-множин.

5. Теоретичні відомості про поведінку лінійних, квадратичних і функцій на образах е множин було вперше систематизовано, адаптовано до $\mathcal{C}$–множин і доповнено для введених вперше класів $\mathcal{C}_b$-множин. З їх допомогою теорія оцінок мінімумів функцій, заданих на образах е множин, дістала подальшого розвитку для $\mathcal{C}$ і $\mathcal{C}_b$-множин, що дозволило її використання у методах ЕСО, як точних, так і наближених з оцінкою точності.

6. Вперше запропоновано та розроблено теорію неперервних функціональних представлень (f–представлень) $\mathcal{C}$–множин як інструмент їх математичного моделювання аналітичними засобами, дослідження поведінки заданих на них функцій, побудови неперервних постановок задач ЕСО, а також як засіб моделювання $\mathcal{E}_c$-множин, що є їх прообразами. Теорія f–представлень є одним з головних елементів методології дослідження екстремальних задач, який встановлює їх зв'язок із задачами нелінійного програмування.

7. Теорія f–представлень була застосована до побудови аналітичних описів виділених класів $\mathcal{C}_b$-множин, у тому числі вперше було запропоновано та застосовано метод побудови f–представлень, що ґрунтується на С-А $\mathcal{C}_b$-множин. У поєднанні з тим фактом, що f–представлення є засобом формулювання екстремальних комбінаторних задач у формі задач нелінійної оптимізації, це відкриває перспективи застосування нелінійного програмування до задач, що моделюються як задачі оптимізації на $\mathcal{C}$–множинах.

8. Дістала подальшого розвитку та була адаптована до $\mathcal{C}$–множин як областей продовження теорія опуклих продовжень функцій. Розвиток відбувався у напрямках: а) вирішення проблеми існування опуклих продовжень

різних типів у областях, що є власними надмножинами опуклих оболонок $\mathcal{C}$–множин; б) систематизації, вдосконалення, узагальнення відомих і пошуку нових конструктивних методів побудови опуклих продовжень залежно від вигляду продовжуваної функції, множини е-конфігурацій, що є областю продовження, та опуклої множини, на яку продовження відбувається; в) введення нових класів продовжень, формування їх типології, визначення сфери застосування та встановлення зв'язку між різними класами продовжень. Разом із встановленим тісним зв'язком між продовженнями з $\mathcal{C}$–множин і строгими f–представленнями цих множин, між опуклими продовженнями та можливістю застосування теорії оцінок мінімумів, а також продовжень із багатьма інструментальними засобами нелінійної, у тому числі опуклої, оптимізації це дозволяє свідчити про теорію продовжень функцій як про невід'ємну частину загальної методології дослідження екстремальних задач.

9. Теорія опуклих продовжень була застосована до побудови еквівалентної математичної моделі екстремальної задачі на $\mathcal{E}_c$-множині як задачі оптимізації на вершинно розташованій $\mathcal{C}_b$-множині з опуклими цільовою функцією та додатковими обмеженнями. Це обґрунтовує можливість застосування апарату опуклого програмування та теорії оцінок мінімумів функцій у розв'язанні задач комбінаторної оптимізації, а теорії продовжень функцій у моделюванні $\mathcal{C}$–множин та формуванні еквівалентних математичних моделей екстремальних комбінаторних задач.

10. Наведено математичні моделі ряду модельних задач, у тому числі геометричного проектування та теорії графів як задач оптимізації на множинах е-конфігурацій, та запропоновано підходи до їх розв'язання. Вони ґрунтуються на сумісному використанні досліджених властивостей множин е-конфігурацій, зокрема їх f–представлень, а також продовжень заданих на них функцій, та дозволяють одержувати точні або наближені з оцінкою точності розв'язки цих задач методами нелінійного, зокрема дискретного та опуклого, програмування.

11. Досліджені властивості екстремальних задач на $\mathcal{C}$–множинах використані при вдосконаленні та створенні нових інструментальних засобів евклідової комбінаторної оптимізації. Розроблено методологію їх використання в залежності від класу екстремальної задачі. Обґрунтовано, що вибір підходів до оптимізації згідно із запропонованою методологією дозволяє поліпшити відомі на даний момент чисельні результати, що стосуються розглянутих модельних задач.

Оскільки клас $\mathcal{C}$–множин включає булеву область, зокрема, множину матриць перестановок, а також образ у евклідовому просторі множини перестановок, які є допустимими областями широкого кола практичних задач [9, 38, 82, 95, 122, 207, 264, 273, 364, 370], представлена методологія дослідження екстремальних задач цілком застосовна до їх розв'язання, а також до розв'язання задач оптимізації на множинах комбінаторної природи, у моделюванні яких бере участь скінченна множина числових параметрів цих множин, таких, як задачі геометричного проектування.

Окрім екстремальних комбінаторних задач, результати даної роботи можуть бути застосовані до розв'язання інших DP-задач, таких, як FP – задача допустимості, MCOP – багатоекстремальна задача комбінаторної оптимізації тощо. Так, нові шляхи розв'язання FP з'являються після представлення відповідної FPC за допомогою f–представлення.

Подальші дослідження планується проводити у більш тісному зв'язку з практичними застосуваннями результатів роботи. Вони стосуються, у першу чергу, експериментального дослідження ефективності застосування різних f–представлень у розв'язанні реальних задач, що, як ми очікуємо, стане поштовхом наступного етапу теоретичних досліджень із обґрунтування оптимального вибору f–представлень залежно від класу задач. Те саме стосується і напрямку досліджень, пов'язаного із застосуванням теорії опуклих продовжень, відкритим питанням у якому залишився пошук опуклого продовження, що дає максимальну можливу нижню оцінку цільової функції серед опуких продовжень із заданої $\mathcal{C}$–множини. Щодо розвитку теорії евклідових комбінаторних конфігурацій та дослідження їх властивостей як скінченних точкових конфігурацій, то тут перспективні плани стосуються розгляду образів множин комбінаторних конфігурацій більш складної структури, що досі не розглядалися нами як базові множини е-конфігурацій, таких, як множини циклічних перестановок [131, 246], перестановок із заданою кількістю підйомів та спусків, зокрема почережних перестановок [246], повних перестановок [246], множин перестановок, що розташовані на заданій відстані (у евклідовій, інверсійній [115] та інших метриках), інші FPCs, пов'язані з перестановками [97], а також образи у евклідовому просторі композиційних образів базових е-множин [149, 275–279]. Серед булевих множин як нові класи $\mathcal{C}_b$–множин та $\mathcal{C}_b$–множин ECOPs, інтерес представляють інші класи булевих комбінаторних матриць, а також множини вершин дворівневих многогранників, таких, як многогранники порядку, Ханнера, Хансена, та інших $0-1$-многогранніков [9, 38, 82, 95, 122, 207, 264]. Крім цього, перспективним напрямком, на наш погляд, є виділення та вивчення нових класів $\mathcal{C}_b$–множин ECOPs та розробка спеціальних методів ECO для розв'язання відповідних екстремальних задач на основі проведеного дослідження.

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [9, 38, 82, 95, 97, 115, 122, 131, 149, 207, 246, 264, 273, 275–279, 364, 370].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] J. Abello, S. Butenko, P. M. Pardalos, and M. G. C. Resende, "Finding independent sets in a graph using continuous multivariable polynomial formulations," *Journal of Global Optimization*, vol. 21, no. 2, pp. 111-137, Oct. 2001.

[2] N. Addington, "Algebraic geometry of the ring of continuous functions," p. 5, 2007. [Online]. Available: http://pages.uoregon.edu/adding/notes/cont_-ag.pdf

[3] A.D. Alexandrov, "Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and related properties of convex surfaces connected with it," *Leningrad State Univ. Annals [Uchenye Zapiski] Math. Ser.*, 6, pp. 3-35, 1939.

[4] B. Alidaee and H. Wang, "A note on heuristic approach based on UBQP formulation of the maximum diversity problem," *J Oper Res Soc*, pp. 1-9, Sep. 2016.

[5] Alspach, "Johnson graphs are Hamilton-connected," *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, vol. 6, no. 1, pp. 21-23, 2013.

[6] A. R. S. Amaral and A. N. Letchford, "A polyhedral approach to the single row facility layout problem," *Math. Program.*, vol. 141, no. 1-2, pp. 453-477, Mar. 2012.

[7] G. Amato, F. Falchi, F. Rabitti, and L. Vadicamo, "Some Theoretical and Experimental Observations on Permutation Spaces and Similarity Search," in *Similarity Search and Applications*, 2014, pp. 37-49.

[8] M. F. Anjos and J. B. Lasserre, Eds., *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization, 2012 edition.* New York: Springer, 2011.

[9] M. Aprile, A. Cevallos, and Y. Faenza, "On Vertices and Facets of Combinatorial 2-Level Polytopes," in *Combinatorial Optimization*, 2016, pp. 177-188.

[10] F. Ardila, C. Benedetti, and J. Doker, "Matroid Polytopes and their Volumes," *Discrete Comput Geom*, vol. 43, no. 4, pp. 841-854, Nov. 2009.

[11] F. Ardila, "Algebraic and Geometric Methods in Enumerative Combinatorics," in *Handbook of Enumerative Combinatorics*, M. Bona, Ed. Chapman and Hall/CRC, 2015, pp. 3-172.

[12] M. Armbruster, C. Helmberg, M. Fügenschuh, and A. Martin, "On the Graph Bisection Cut Polytope," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 22, no. 3, pp. 1073-1098, Jul. 2008.

[13] D. Avis, A. Hertz, and O. Marcotte, Eds., *Graph Theory and Combinatorial Optimization*. Springer US, 2005.

[14] D. Azagra and C. Mudarra, "Smooth convex extensions of convex functions," *arXiv:1501.05226 [math]*, Jan. 2015.

[15] M. Baake, "Structure and representations of the hyperoctahedral group," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 25, no. 11, pp. 3171-3182, Nov. 1984.

[16] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuéjols, "A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs," *Mathematical Programming*, vol. 58, no. 1-3, pp. 295-324, Jan. 1993.

[17] M. L. Balinski and A. J. Hoffman, Eds., *Polyhedral Combinatorics: Dedicated to the Memory of D.R.Fulkerson*. Amsterdam; New York : Elsevier Science Ltd, 1978.

[18] T. N. Barbolina, "Solution of Mixed Combinatorial Optimization Problems on Arrangements by the Method of Construction of Lexicographic Equivalence," *Cybern Syst Anal*, vol. 49, no. 6, pp. 922-931, Nov. 2013.

[19] B. Baumeister, "On permutation polytopes," *Advances in Mathematics*, vol. 222, no. 2, pp. 431-452, Oct. 2009.

[20] M. M. Bayer and C. W. Lee, "Chapter 2.3 - Combinatorial Aspects of Convex Polytopes," in *Handbook of Convex Geometry*, P. M. Gruber and J. M. Wills, Eds. Amsterdam: North-Holland, 1993, pp. 485-534.

[21] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming : Theory And Algorithms*, 3rd edition. Wiley India, 2017.

[22] C. Berge, *Principes de combinatoire*. Paris: Dunod, 1968.

[23] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, 1 edition. Cambridge; New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1997.

[24] Y. Berstein, J. Lee, S. Onn, R. Weismantel, "Parametric nonlinear discrete optimization over well-described sets and matroid intersections," *Mathematical Programming*, 124(1/2), pp. 233-253, 2010.

[25] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, 1 edition. Belmont, Mass: Athena Scientific, 1996.

[26] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2 edition. Belmont, Mass: Athena Scientific, 1999.

[27] D. Bertsekas, with A. Nedic, and A. Ozdaglar, and A. Nedic, *Convex Analysis and Optimization*. Belmont, Mass: Athena Scientific, 2003.

[28] D. P. Bertsekas, *Convex Optimization Theory*, 1st edition. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 2009.

[29] D. P. Bertsekas, *Convex Optimization Algorithms*, 1 edition. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 2015.

[30] D. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 3rd edition. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 2016.

[31] C. Bierwirth, D. C. Mattfeld, and H. Kopfer, “On permutation representations for scheduling problems,” in *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN IV*, 1996, pp. 310-318.

[32] A. Billionnet, S. Elloumi, and M.-C. Plateau, “Improving the performance of standard solvers for quadratic 0-1 programs by a tight convex reformulation: The QCR method,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, pp. 1185-1197, Jan. 2009.

[33] A. Billionnet, F. Jarray, G. Tlig, and E. Zagrouba, "Reconstructing Convex Matrices by Integer Programming Approaches," *J Math Model Algor*, vol. 12, no. 4, pp. 329-343, Jul. 2012.

[34] W. D. Blizard, "The development of multiset theory," *Mod. Log.*, vol. 1, no. 4, pp. 319-352, 1991.

[35] B. Blum-Smith and S. Coskey, "The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory," *The College Mathematics Journal*, vol. 48, no. 1, pp. 18-29, 2017.

[36] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, 1998 edition. Berlin; New York: Springer, 1998.

[37] K. P. Bogart, *Combinatorics Through Guided Discovery.* CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017.

[38] A. Bohn, Y. Faenza, S. Fiorini, V. Fisikopoulos, M. Macchia, and K. Pashkovich, "Enumeration of 2-Level Polytopes," in *Algorithms - ESA 2015*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2015, pp. 191-202.

[39] J. Bokowski, *Computational Oriented Matroids: Equivalence Classes of Matrices Within a Natural Framework.* Cambridge : Cambridge University Press, 2006.

[40] M. Bona, *Combinatorics of Permutations, Second Edition.* Chapman and Hall/CRC, 2016.

[41] F. Bonomo, J. Marenco, D. Saban, and N. E. Stier-Moses, "A polyhedral study of the maximum edge subgraph problem," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 160, pp. 2573-2590, Dec. 2012.

[42] E. Boros and P. L. Hammer, "Pseudo-Boolean optimization," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 123, no. 1, pp. 155-225, Nov. 2002.

[43] E. Boros, P. L. Hammer, R. Sun, and G. Tavares, "A max-flow approach to improved lower bounds for quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)," *Discrete Optimization*, vol. 5, no. 2, pp. 501-529, May 2008.

[44] P. Borwein and T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities.* New York: Springer-Verlag, 1995.

[45] J. Borwein and A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.

[46] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 1 edition. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2004.

[47] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

[48] R. A. Brualdi, *Combinatorial matrix classes.* Cambridge : Cambridge University Press, 2006.

[49] O. Bucicovschi and J. Lebl, "On the continuity and regularity of convex extensions," *arXiv:1012.5796 [math]*, Dec. 2010.

[50] R. E. Burkard, "Quadratic Assignment Problems," in *Handbook of Combinatorial Optimization*, P. M. Pardalos, D.-Z. Du, and R. L. Graham, Eds. New York: Springer, 2013, pp. 2741-2814.

[51] S. Butenko, P. M. Pardalos, and V. Shylo, Eds., *Optimization Methods and Applications : In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday.* Cham: Springer International Publishing, 2017.

[52] V. Chandrasekaran, B. Recht, P. A. Parrilo, and A. S. Willsky, "The Convex Geometry of Linear Inverse Problems," *Found Comput Math*, vol. 12, no. 6, pp. 805-849, Dec. 2012.

[53] T. Chappell, T. Friedl, and R. Sanyal, "Two Double Poset Polytopes," SIAM J. *Discrete Math.*, vol. 31, no. 4, pp. 2378-2413, Jan. 2017.

[54] H. Chen and J.-M. Schlenker, "Weakly Inscribed Polyhedra," *arXiv:1709.10389 [math]* , Sep. 2017.

[55] N. Chernov, Y. Stoyan, and T. Romanova, "Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem," *Comput. Geom.*, vol. 43, no. 5, pp. 535-553, 2010.

[56] M. Christ, “The extension problem for certain function spaces involving fractional orders of differentiability,” *Ark. Mat.*, vol. 22, no. 1-2, pp. 63-81, Dec. 1984.

[57] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, Eds., Handbook of Combinatorial Designs, 2 edition. Chapman and Hall: CRC Press, 2006.

[58] M. Conforti, G. Cornuéjols, and G. Zambelli, “Extended formulations in combinatorial optimization,” *Ann Oper Res*, vol. 204, no. 1, pp. 97-143, Jan. 2013.

[59] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, *Combinatorial optimization.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[60] D. A. Cox, J. Little, and D. Oshea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 4th ed.* Switzerland : Springer International Publishing, 2015.

[61] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd edition. New York: Dover Publications, 1973.

[62] H. S. M. Coxeter, “Regular and semi-regular polytopes. III,” *Math Z*, vol. 200, no. 1, pp. 3-45, Mar. 1988.

[63] Y. Crama, “Concave extensions for nonlinear 0-1 maximization problems,” *Mathematical Programming*, vol. 61, no. 1-3, pp. 53-60, Aug. 1993.

[64] J. Dahl, “Convex optimization in signal processing and communications,” Doctor of Philosophy Dissertation, Department of Communication Technology, Aalborg University, 2003.

[65] A. Deza, K. Fukuda, T. Mizutani, and C. Vo, “On the Face Lattice of the Metric Polytope,” in *Discrete and Computational Geometry*, J. Akiyama and M. Kano, Eds. Berlin Heidelberg : Springer, 2002, pp. 118-128.

[66] D. Delling, D. Fleischman, A. V. Goldberg, I. Razenshteyn, and R. F. Werneck, “An exact combinatorial algorithm for minimum graph bisection,” *Mathematical Programming*, no. 2, pp. 417-458, 2015.

[67] M. M. Deza and E. Deza, *Encyclopedia of Distances, 3rd ed.* 2014 edition. New York: Springer, 2014.

[68] J. D. Dixon and B. Mortimer, *Permutation Groups*, 1996 edition. New York: Springer, 1996.

[69] F. Dragomirescu and C. Ivan, "The smallest convex extensions of a convex function," *Optimization*, vol. 24, no. 3-4, pp. 193-206, Jan. 1992.

[70] P. Dreesen and B. D. Moor, "Polynomial Optimization Problems are Eigenvalue Problems," in *Model-Based Control*, P. M. J. Hof, C. Scherer, and P. S. C. Heuberger, Eds. US : Springer, 2009, pp. 49-68.

[71] M. Elf, C. Gutwenger, M. Jünger, and G. Rinaldi, "Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization and Their Implementation in ABACUS," in *Computational Combinatorial Optimization*, Berlin, Heidelberg : Springer, 2001, pp. 157-222.

[72] E. L. Elte, *The semiregular polytopes of the hyperspaces.* Groningen: Gebrieders Hoitsema, 1912.

[73] O. A. Emets, "Extremal properties of nondifferentiable convex functions on Euclidean sets of combinations with repetitions," *Ukrainian Math. J.*, vol. 46, no. 6, pp. 735-747, 1994.

[74] O. A. Emets, S. I. Nedobachii, and L. N. Kolechkina, "An irreducible set of combinatorial polyhedron constraints in the linear-fractional optimisation problem on permutations," *Discrete Mathematics and Applications*, vol. 11, no. 1, pp. 95-103, 2009.

[75] O. O. Emets, O. V. Roskladka, and S. I. Nedobachii, "Irreducible System of Constraints for a General Polyhedron of Arrangements," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 1, pp. 1-12, Jan. 2003.

[76] M. Ehrgott, Ed., "Multiobjective Combinatorial Optimization," in *Multicriteria Optimization*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, pp. 197-220.

[77] P. Erdos, "On Sets of Distances of n Points," *The American Mathematical Monthly*, vol. 53, no. 5, pp. 248-250, 1946.

[78] E. Erkut, "The discrete p-dispersion problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 46, no. 1, pp. 48-60, May 1990.

[79] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, 1996 edition. New York: Springer, 1996.

[80] B. Farzad, O. Pichugina, and L. Koliechkina, "Multi-Layer Networks: Origin, Community Detection, Applications," *International Journal of Computers*, vol. 12, pp. 92-104, 2018.

[81] O. P. Ferreira, A. N. Iusem, and S. Z. Németh, "Concepts and techniques of optimization on the sphere," *TOP*, vol. 22, no. 3, pp. 1148-1170, Oct. 2014.

[82] S. Fiorini, V. Fisikopoulos, and M. Macchia, "Two-Level Polytopes with a Prescribed Facet," in *Combinatorial Optimization*, 2016, pp. 285-296.

[83] F. Fogel, R. Jenatton, F. Bach, and A. d'Aspremont, "Convex Relaxations for Permutation Problems," *SIAM J. Matrix Anal. & Appl.*, vol. 36, no. 4, pp. 1465-1488, Jan. 2015.

[84] D. Fontaine, LaurentMichel, and P. V. Hentenryck, "Constraint-Based Lagrangian Relaxation," in *Principles and Practice of Constraint Programming*, B. O'Sullivan, Ed. Switzerland: Springer International Publishing, 2014, pp. 324-339.

[85] M. Gasca and T. Sauer, "Polynomial interpolation in several variables," *Advances in Computational Mathematics*, vol. 12, no. 4, pp. 377-410, Mar. 2000.

[86] F. Glover, J.-K. Hao, and G. Kochenberger, "Polynomial unconstrained binary optimisation - Part 1," *International Journal of Metaheuristics*, vol. 1, no. 3, pp. 232-256, Jan. 2011.

[87] F. Glover and G. Kochenberger, "A Tutorial on Formulating QUBO Models," *arXiv:1811.11538 [cs, math]*, 2018.

[88] J. Gmys, *Heterogeneous cluster computing for many-task exact optimization - Application to permutation problems*, Phd[Thesis], Mons, Lille :

Universite de Mons (UMONS); Universite de Lille, 2017. [Online]. Available: https://hal.inria.fr/tel-01652000/document

[89] M. C. Golumbic and I. B.-A. Hartman, Eds., *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms: Interdisciplinary Applications.* US : Springer, 2005.

[90] B. Gonska and A. Padrol, "Neighborly inscribed polytopes and delaunay triangulations," *Advances in Geometry*, vol. 16, no. 3, pp. 349-360, 2016.

[91] J. Gotoh and S. Uryasev, "Two pairs of families of polyhedral norms versus ℓ_p-norms: proximity and applications in optimization," *Math. Program.*, vol. 156, no. 1-2, pp. 391-431, Mar. 2016.

[92] J. Gouveia, P. Parrilo, and R. Thomas, "Theta Bodies for Polynomial Ideals," *SIAM J. Optim.*, vol. 20, no. 4, pp. 2097-2118, Jan. 2010.

[93] M. Gräf and R. Hielscher, "Fast Global Optimization on the Torus, the Sphere, and the Rotation Group," *SIAM J. Optim.*, vol. 25, no. 1, pp. 540-563, Jan. 2015.

[94] F. Grande, *On k-level matroids: geometry and combinatorics*, Doctor of Natural Sciences [Dissertation], Berlin : Institut für Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, 2015. [Online]. Available: https://refubium.fu-berlin.de/handle/fub188/13395

[95] F. Grande and J. Rué, "Many 2-Level Polytopes from Matroids," *Discrete Comput Geom*, vol. 54, no. 4, pp. 954-979, Oct. 2015.

[96] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd edition. Boca Raton: CRC Press, 1997.

[97] I. V. Grebennik and O. S. Chorna, "Special Transpositions of Permutation Elements and Properties of Their Composition," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 53, no. 1, pp. 67-77, Jan. 2017.

[98] I. V. Grebennik, A. A. Kovalenko, T. E. Romanova, I. A. Urniaieva, and S. B. Shekhovtsov, "Combinatorial Configurations in Balance Layout Optimization Problems," *Cybern Syst Anal*, vol. 54, no. 2, pp. 221-231, Mar. 2018.

[99] R. M. Green, “Homology representations arising from the half cube, II,” *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, vol. 117, no. 8, pp. 1037-1048, 2010.

[100] G.-M. Greuel, F. Seelisch, and O. Wienand, “The Groebner basis of the ideal of vanishing polynomials,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 46, no. 5, pp. 561-570, May 2011.

[101] H. Gropp, “Configurations between geometry and combinatorics,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 138, no. 1, pp. 79-88, Mar. 2004.

[102] M. Grötschel, L. Lovasz, and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, 2nd ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

[103] M. Grötschel, “Cardinality homogeneous set systems, cycles in matroids, and associated polytopes,” in *The Sharpest Cut: The Impact of Manfred Padberg and His Work*, SIAM, Philadelphia, PA, 2004, pp. 99-120.

[104] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

[105] B. Grunbaum, *Configurations of Points and Lines*, New edition. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2009.

[106] D. A. Grundel, P. A. Krokhmal, C. A. S. Oliveira, and P. M. Pardalos, “On the number of local minima for the multidimensional assignment problem,” *J. Comb. Optim.*, vol. 13, no. 1, pp. 1-18, Jan. 2007.

[107] J. Gu, P. W. Purdom, J. Franco, and B. W. Wah, “Algorithms for the Satisfiability (SAT) Problem: A Survey,” in *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 1996, pp. 19-152.

[108] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, “A survey of the theory of hypercube graphs,” *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, vol. 15, no. 4, pp. 277-289, 1988.

[109] N. Harman, “Representations of monomial matrices and restriction from GL_n to S_n,” *arXiv:1804.04702 [math]*, Apr. 2018.

[110] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*. New York: Springer-Verlag, 1992.

[111] S. He, Z. Li, and S. Zhang, "Approximation Algorithms for Discrete Polynomial Optimization," *J. Oper. Res. Soc. China*, vol. 1, no. 1, pp. 3-36, Mar. 2013.

[112] M. Henk, J. Richter-Gebert, and G. M. Ziegler, "Basic properties of convex polytopes," in *Handbook of Discrete and Computational Geometry, J. E. Goodman and J. O'Rourke, Eds.* Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 1997, pp. 243-270.

[113] D. A. Holton and J. Sheehan, *The Petersen graph.* Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

[114] L. Hulianytskyi and I. Riasna, "Formalization and Classification of Combinatorial Optimization Problems," in *Optimization Methods and Applications*, Cham: Springer, 2017, pp. 239-250.

[115] D. Golenko-Ginzburg, "Metrics in the permutation space," *Applied Mathematics Letters*, vol. 4, no. 2, pp. 5-7, Jan. 1991.

[116] L. F. Hulyanitskii and I. V. Sergienko, "Metaheuristic downhill simplex method in combinatorial optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 44, no. 3, pp. 822-829, May 2008.

[117] O. O. Iemets and T. M. Barbolina, "Lexicographic Equivalence in Mixed Combinatorial Optimization of Linear-Fractional Functions on Arrangements," *Cybern Syst Anal*, vol. 53, no. 2, pp. 244-254, Mar. 2017.

[118] H. Ishikawa, "Transformation of General Binary MRF Minimization to the First-Order Case," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 33, no. 6, pp. 1234-1249, Jun. 2011.

[119] B. Jiang, "Polynomial Optimization: Structures, Algorithms, and Engineering Applications," [Dissertation], Minnesota: The University of Minnesota, 2013. [Online]. Available: https://conservancy.umn.edu/handle/11299/159747

[120] B. Jiang, Y. Liu, and Z. Wen, "L_p-norm Regularization Algorithms for Optimization Over Permutation Matrices," *SIAM J. Optim*, vol. 26, no. 4, pp. 2284-2313, Jan. 2016.

[121] M. Jünger and D. Naddef, Eds., *Computational Combinatorial Optimization: Optimal or Provably Near-Optimal Solutions, 2001 edition*. Berlin, New York: Springer, 2001.

[122] V. Kaibel, "On the Expansion of Graphs of 0/1-Polytopes," in *The Sharpest Cut, 0 vols, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2004, pp. 199-216.

[123] V. Kaibel and A. Loos, "Branched Polyhedral Systems," in *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, F. Eisenbrand and F. B. Shepherd, Eds. Berlin Heidelberg : Springer, 2010, pp. 177-190.

[124] A. P. Kamath, N. K. Karmarkar, K. G. Ramakrishnan, and M. G. C. Resende, "Computational experience with an interior point algorithm on the satisfiability problem," *Ann Oper Res*, vol. 25, no. 1, pp. 43-58, Dec. 1990.

[125] S. E. Karisch, F. Rendl, and J. Clausen, "Solving Graph Bisection Problems with Semidefinite Programming," *INFORMS Journal on Computing*, vol. 12, no. 3, pp. 177-191, Summer 2000.

[126] Y. Kilani, M. Bsoul, A. Alsarhan, and A. Al-Khasawneh, "A Survey of the Satisfiability-problems Solving Algorithms," *Int. J. Adv. Intell. Paradigms*, vol. 5, no. 3, pp. 233-256, Sep. 2013.

[127] E. de Kierk, "The complexity of optimizing over a simplex, hypercube or sphere: a short survey," *Central European Journal of Operations Research*, vol. 16, no. 2, pp. 111-125, Jun. 2008.

[128] C. J. Klivans and E. Swartz, "Projection Volumes of Hyperplane Arrangements," *Discrete Comput Geom*, vol. 46, no. 3, pp. 417-426, Jul. 2011.

[129] D. E. Knuth,*Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3 edition*. Reading, Mass: Addison-Wesley Professional, 1997.

[130] G. Kochenberger et al., "The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey," *Journal of Combinatorial Optimization*, no. 1, p. 58-81, 2014.

[131] J. F. Korsh and P. S. LaFollette, "Loopless Array Generation of Multiset Permutations," *Comput. J.*, vol. 47, no. 5, pp. 612-621, Jan. 2004.

[132] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 6th ed.* 2018 edition. New York, NY: Springer, 2018.

[133] C. Koukouvinos and D. E. Simos, "Combinatorial Optimization for Weighing Matrices with the Ordering Messy Genetic Algorithm," in *Experimental Algorithms*, 2011, pp. 148-156.

[134] I. V. Kozin, O. V. Kryvtsun, and V. P. Pinchuk, "Evolutionary-Fragmentary Model of the Routing Problem," *Cybern Syst Anal*, vol. 51, no. 3, pp. 432-437, May 2015.

[135] I. V. Kozin, N. K. Maksyshko, and V. A. Perepelitsa, "Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems," *Cybern Syst Anal*, vol. 53, no. 6, pp. 931-936, Nov. 2017.

[136] D. L. Kreher and D. R. Stinson, *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search, 1 edition.* Boca Raton, Fla: CRC Press, 1998.

[137] N. Krislock, J. Malick, and F. Roupin, "Computational results of a semidefinite branch-and-bound algorithm for k-cluster," *Computers & Operations Research*, vol. 66, pp. 153-159, Feb. 2016.

[138] K. Kubjas, "Low degree minimal generators of phylogenetic semigroups," *European Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 2-24, Mar. 2015.

[139] T. Lane, B. Yackley, S. Plis, S. McCracken and B. Anderson, *Geometric Embedding for Learning Combinatorial Structures*, p. 3. [Online]. Available: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.387.7534

[140] Y. P. Laptin, "Exact Penalty Functions and Convex Extensions of Functions in Schemes of Decomposition in Variables*," *Cybern Syst Anal*, vol. 52, no. 1, pp. 85-95, Feb. 2016.

[141] M. Laurent, "Sums of Squares, Moment Matrices and Optimization Over Polynomials," in *Emerging Applications of Algebraic Geometry*, M. Putinar and S. Sullivant, Eds. New York : Springer, 2009, pp. 157-270.

[142] J. Lee, *A First Course in Combinatorial Optimization*, 1 edition. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2004.

[143] C. Lemaréchal, "Lagrangian Relaxation," in *Computational Combinatorial Optimization*, Berlin, Heidelberg : Springer, 2001, pp. 112-156.

[144] T. Lengauer, *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout.* Vieweg+Teubner Verlag, 1990.

[145] V. K. Leont'ev, "Discrete optimization," *Comp. Math. and Math. Phys.*, vol. 47, no. 2, pp. 328-340, Feb. 2007.

[146] A.-M. Li, U. Simon, G. Zhao, and Z. Hu, *Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.

[147] X. Liu and S. C. Draper, "LP-Decodable Multipermutation Codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 62, no. 4, pp. 1631-1648, Apr. 2016.

[148] M. Liazi, I. Milis, and V. Zissimopoulos, "A constant approximation algorithm for the densest k-subgraph problem on chordal graphs," *Information Processing Letters*, vol. 108, no. 1, pp. 29-32, Sep. 2008.

[149] V. Grebennik and O. S. Lytvynenko, "Generating combinatorial sets with given properties," *Cybernet. Systems Anal.*, vol. 48, no. 6, pp. 890-898, 2012.

[150] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis, Dover Ed edition.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2004.

[151] J. Malick and F. Roupin, "Solving k-cluster problems to optimality with semidefinite programming," *Mathematical Programming*, vol. 136, no. 2, pp. 279-300, Dec. 2012.

[152] J. Malick and F. Roupin, "On the bridge between combinatorial optimization and nonlinear optimization: a family of semidefinite bounds for 0-1 quadratic problems leading to quasi-Newton methods," *Mathematical Programming*, vol. 140, no. 1, pp. 99-124, Aug. 2013.

[153] V. Martinetti, “Sulle configurazioni piane $\mu 3$,” *Annali di Matematica*, vol. 15, no. 1, pp. 1-26, Apr. 1887.

[154] A. N. Maksimenko, “A Special Role of Boolean Quadratic Polytopes among Other Combinatorial Polytopes,” *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 23-40, Feb. 2016.

[155] M. Mehdi, *Parallel Hybrid Optimization Methods for permutation based problems*, Phd[Thesis], Lille : Universite des Sciences et Technologie de Lille, 2011. [Online]. Available: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00841962/document

[156] G. Meurant, *Handbook of Convex Geometry, 1 edition.* Amsterdam, New York: North Holland, 2014.

[157] H. M. Moller and B. Buchberger, “The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros,” in *Computer Algebra*, 1982, pp. 24-31.

[158] W. Murray and K.-M. Ng, “An algorithm for nonlinear optimization problems with binary variables,” *Comput Optim Appl*, vol. 47, no. 2, pp. 257-288, 2010.

[159] S. Negami, “Faithful Embeddings of Planar Graphs on Orientable Closed Surfaces,” in *Symmetries in Graphs, Maps, and Polytopes*, 2014, pp. 249-262.

[160] I. E. Nesterov, A. Nemirovskii, and Y. Nesterov, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming.* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.

[161] L. Ness, “Curvature on the Fermat cubic,” *Duke Math. J.*, vol. 45, no. 4, pp. 797-807, 1978.

[162] A. V. Nikolaev, “On Vertices of the Simple Boolean Quadric Polytope Extension,” in *Optimization Problems and Their Applications*, 2018, pp. 155-169.

[163] Kien-Ming Ng, *A continuation approach for solving nonlinear optimization problems with discrete variables*, Phd[Thesis],

Stanford : Stanford University, 2003. [Online]. Available: https://web.stanford.edu/group/SOL/dissertations/kmthesis.pdf

[164] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.

[165] M. V. Novozhilova and I. E. Lazareva, "Application of the method of lagrangian multipliers in the combinatorial problem of rectangle arrangement," *Cybern Syst Anal*, vol. 35, no. 3, pp. 464-469, May 1999.

[166] H. Nozaki and M. Shinohara, "On a generalization of distance sets," *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 117, no. 7, pp. 810-826, Oct. 2010.

[167] S. Onaka, "Superspheres: Intermediate Shapes between Spheres and Polyhedra," *Symmetry*, vol. 4, no. 3, pp. 336-343, Jul. 2012.

[168] S. Onn, "Convex discrete optimization," in *Encyclopedia of Optimization, C. A. Floudas and P. M. Pardalos, Eds.* US : Springer, 2008, pp. 513-550.

[169] J. Pach, R. Pollack, and J. Spencer, "Graph Distance and Euclidean Distance on the Grid," in *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, Physica-Verlag HD, 1990, pp. 555-559.

[170] M. Padberg, "The boolean quadric polytope: Some characteristics, facets and relatives," *Mathematical Programming*, vol. 45, no. 1-3, pp. 139-172, Aug. 1989.

[171] A. Padrol and G. M. Ziegler, "Six Topics on Inscribable Polytopes," in *Advances in Discrete Differential Geometry*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2016, pp. 407-419.

[172] S. Pan, T. Tan, and Y. Jiang, "A global continuation algorithm for solving binary quadratic programming problems," *Comput Optim Appl*, vol. 41, no. 3, pp. 349-362, Nov. 2007.

[173] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Unabridged edition. Dover Publications, 2013.

[174] P. M. Pardalos, D.-Z. Du, and R. L. Graham, Eds., *Handbook of Combinatorial Optimization, 2nd ed. 2013 edition.* New York: Springer, 2013.

[175] P. M. Pardalos, O. A. Prokopyev, and S. Busygin, "Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems," in *Handbook on Modelling for Discrete Optimization*, G. Appa, L. Pitsoulis, and H. P. Williams, Eds. US : Springer, 2006, pp. 39-60.

[176] P. A. Parrilo, *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*, Phd[Thesis], Pasadena, California : California Institute of Technology, 2000. [Online]. Available: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.10.4148

[177] P. A. Parrilo, "An Explicit Construction of Distinguished Representations of Polynomials Nonnegative Over Finite Sets," Automatic Control Laboratory, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, Tech. Rep. AUT02-02, 2002.

[178] K. Pavlikov and S. Uryasev, "CVaR norm and applications in optimization," *Optim Lett*, vol. 8, no. 7, pp. 1999-2020, Oct. 2014.

[179] H. J. M. Peters and P. P. Wakker, "Convex functions on non-convex domains," *Economics Letters*, vol. 22, no. 2, pp. 251-255, Jan. 1986.

[180] O. Pichugina, *Community Detection in Multi-Layer Networks*, MS in Mathematics[Thesis], St.Catharines: Brock University, 2015. [Online]. Available: https://dr.library.brocku.ca/handle/10464/7324

[181] O. Pichugina, "Combinatorial approaches to the capital-budgeting problem," *Econtechmod*, vol. 5, no 4, pp. 29-36, 2016.

[182] O. Pichugina, "Placement problems in chip design: Modeling and optimization," in *2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST)*, 2017, pp. 465-473.

[183] O. Pichugina and B. Farzad, "A Human Communication Network Model," in *ICT in Education, Research and Industrial Applications*, Kyiv, 2016, pp. 33-40.

[184] O. S. Pichugina and L. N. Kolechkina, "On a diet menu modelling," *Information technologies in economic research*, no. 2, pp. 44-49, 2016.

[185] O. Pichugina and S. Yakovlev, “Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems,” in *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering*, Switzerland : Springer, 2016, pp. 689-700.

[186] O. Pichugina and S. Yakovlev, “Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications,” *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, vol. 4, no. 2, pp. 129-152, Jun. 2016.

[187] O. S. Pichugina and S. V. Yakovlev, “Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization,” *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 52, no. 6, pp. 921-930, Nov. 2016.

[188] O. Pichugina and S. Yakovlev, “Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization,” *IOSR Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 02, pp. 12-25, May 2017.

[189] O. Pichugina and S. Yakovlev, “Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications,” in *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kiev, 2017, pp. 1167-1174.

[190] T. Pisanski and B. Servatius, “Combinatorial Configurations,” in *Configurations from a Graphical Viewpoint*, Birkhauser, Boston, 2013, pp. 157-196.

[191] D. Pisinger, “Upper bounds and exact algorithms for p-dispersion problems,” *Computers and Operations Research*, vol. 33, pp. 1380-1398, Jan. 2006.

[192] C. Planiden and X. Wang, “Strongly Convex Functions, Moreau Envelopes, and the Generic Nature of Convex Functions with Strong Minimizers,” *SIAM J. Optim.*, vol. 26, no. 2, pp. 1341-1364, Jan. 2016.

[193] A. Postnikov, “Permutohedra, Associahedra, and Beyond,” *IMRN: International Mathematics Research Notices*, vol. 2009, no. 6, pp. 1026-1106, Mar. 2009.

[194] J. Povh, “From Combinatorial Optimization To Real Algebraic Geometry And Back,” *Croatian Operational Research Review*, vol. 5, no. 2, pp. 105-117, Jan. 2015.

[195] W. R. Pulleyblank, "Edmonds, matching and the birth of polyhedral combinatorics," *Documenta Mathematica*, pp. 181-197, 2012.

[196] A. P. Punnen and P. Pandey, "Representations of quadratic combinatorial optimization problems: A case study using the quadratic set covering problem," *arXiv:1802.00897 [cs, math]* , Feb. 2018.

[197] R. Rado, "An Inequality," *J. of the London Math. Society*, vol. 27 (Part 1), no. 105, pp. 1-6, 1952.

[198] V. N. Red'ko, D. B. Bui, and Y. A. Grishko, "Current State of the Multisets Theory from the Essential Viewpoint," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 51, no. 1, pp. 150-156, Jan. 2015.

[199] F. J. Rispoli, "The Graph of the Hypersimplex," *arXiv:0811.2981 [math], Nov. 2008.*

[200] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996.

[201] F. Roupin and A. Billionnet, "A deterministic approximation algorithm for the Densest k-Subgraph Problem," *International Journal of Operational Research*, vol. 3, no. 3, pp. 301-314, Jan. 2008.

[202] H. J. Ryser, "Combinatorial Configurations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 17, no. 3, pp. 593-602, 1969.

[203] W. Rzymowski, "Convex Extension Preserving Lipschitz Constant," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 212, no. 1, pp. 30-37, Aug. 1997.

[204] V. N. Sachkov, *Combinatorial Methods in Discrete Mathematics, Reissue edition.* Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[205] J. Santmyer, "For All Possible Distances Look to the Permutohedron," *Mathematics Magazine*, vol. 80, no. 2, pp. 120-125, 2007.

[206] R. Sanyal, F. Sottile, and B. Sturmfels, "Orbitopes," *Mathematika*, vol. 57, no. 2, pp. 275-314, Jul. 2011.

[207] R. Sanyal, A. Werner, and G. M. Ziegler, "On Kalai's Conjectures Concerning Centrally Symmetric Polytopes," *Discrete Comput Geom*, vol. 41, no. 2, pp. 183-198, Sep. 2008.

[208] P. Schneider and D. H. Eberly, *Geometric Tools for Computer Graphics*, 1 edition. Amsterdam: Morgan Kaufmann, 2002.

[209] P. H. Schoute, *Analytical treatrnent of the polytopes regularly derived frorn the regular polytopes*. Amsterdam: Johannes Muller, 1911.

[210] A. Schrijver, "Polyhedral Combinatorics," in *Handbook of Combinatorics (vol. 2)*, R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, Eds. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1995, pp. 1649-1704.

[211] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

[212] A. Schrijver, "On the History of Combinatorial Optimization (Till 1960)," in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 12, K. Aardal, G. L. Nemhauser, and R. Weismantel, Eds. Amsterdam: North Holland, 2005, pp. 1-68.

[213] H. Schroter, "Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3," *Gottinger Nachrich*, pp. 237-253, 1888.

[214] N. V. Semenova and L. N. Kolechkina, "A polyhedral approach to solving multicriterion combinatorial optimization problems over sets of polyarrangements," *Cybern Syst Anal*, vol. 45, no. 3, pp. 438-445, May 2009.

[215] I. V. Sergienko, *Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity*, vol. 72. New York, NY: Springer, 2012.

[216] I. V. Sergienko, L. F. Gulyanitskii, and S. I. Sirenko, "Classification of applied methods for combinatorial optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 45, no. 5, pp. 732-741, 2009.

[217] R. Seroul, *Programming For Mathematicians*. Berlin, New York: Springer, 2000.

[218] A. Sheffer, "Chapter 2: Basic Real Algebraic Geometry," p. 9. 2015. [Online]. Available: http://www.math.caltech.edu/ 2014-15/3term/ma191c-sec2/2%20Basic%20real%20AG.pdf

[219] H. D. Sherali and W. P. Adams, *A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[220] J. Shi, Q. Zhang, B. Derbel, and A. Liefooghe, "A Parallel Tabu Search for the Unconstrained Binary Quadratic Programming problem," in *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2017, pp. 557-564.

[221] N. Z. Shor, "Dual quadratic estimates in polynomial and Boolean programming," *Ann. Oper. Res.*, vol. 25, no. 1-4, pp. 163-168, 1990.

[222] N. Z. Shor and P. I. Stetsyuk, "Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems," *J. Global Optim.*, vol. 23, no. 1, pp. 1-41, 2002.

[223] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 1*, 2 edition. Cambridge, NY: Cambridge University Press, 2011.

[224] J. M. Steele, "Probability and Problems in Euclidean Combinatorial Optimization," *Statist. Sci.*, vol. 8, no. 1, pp. 48-56, Feb. 1993.

[225] P. I. Stetsyuk, "Functionally redundant constraints for Boolean quadratic-type optimization problems," *Cybern Syst Anal*, vol. 41, no. 6, pp. 932-935, Nov. 2005.

[226] Y. Stoyan, A. Pankratov, and T. Romanova, "Placement Problems for Irregular Objects: Mathematical Modeling, Optimization and Applications," in *Optimization Methods and Applications*, Cham : Springer International Publishing, 2017, pp. 521-559.

[227] Y. G. Stoyan and V. M. Patsuk, "Covering a compact polygonal set by identical circles," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 46, no. 1, pp. 75-92, 2010.

[228] Y. G. Stoyan and V. M. Patsuk, "Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 91, no. 9, pp. 2010-2020, 2014.

[229] Y. Stoyan and T. Romanova, "Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications," in *Modeling and optimization in space engineering*, vol. 73, New York : Springer, 2013, pp. 363-388.

[230] Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov, and A. Chugay, "Optimized object packings using quasi-phi-functions," in *Optimized packings with applications*, vol. 105, Cham: Springer International Publishing, 2015, pp. 265-293.

[231] Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov, A. Kovalenko, and P. Stetsyuk, "Balance Layout Problems: Mathematical Modeling and Nonlinear Optimization," in *Space Engineering*, Cham : Springer International Publishing, 2016, pp. 369-400.

[232] Y. G. Stoyan, T. Romanova, G. Scheithauer, and A. Krivulya, "Covering a polygonal region by rectangles," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 48, no. 3, pp. 675-695, 2011.

[233] Y. Stoyan, P. Stetsyuk, and T. Romanova, "Optimal Balanced Packing Using Phi-Function Technique," in *Examining Robustness and Vulnerability of Networked Systems*, Amsterdam: IOS Press Inc, 2014, pp. 251-271.

[234] Y. G. Stoyan and S. V. Yakovlev, "Configuration Space of Geometric Objects," *Cybern Syst Anal*, pp. 716-726, Sep. 2018.

[235] Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, O. A. Emets, and O. A. Valuiskaya, "Construction of convex continuations for functions defined on a hypersphere," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 34, no. 2, pp. 27-36, 1998.

[236] Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, and O. V. Parshin, "Quadratic optimization on combinatorial sets in $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 27, no. 4, pp. 561-567, Jul. 1991.

[237] K. J. Swanepoel, "Cardinalities of k-distance sets in Minkowski spaces," *Discrete Mathematics*, vol. 197-198, pp. 759-767, Feb. 1999.

[238] K. Swanepoel, "Combinatorial distance geometry in normed spaces," in *New Trends in Intuitive Geometry*, G. Ambrus, I. Barany, K. J. Boroczky, G. Fejes Toth, and J. Pach, Eds. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2017.

[239] A. Syropoulos, "Mathematics of Multisets," in *Multiset Processing*, 2000, pp. 347-358.

[240] I. Talata, "On Hadwiger Numbers of Direct Products of Convex Bodies," in *Combinatorial and Computational Geometry*, 2007, pp. 517-528.

[241] M. Tawarmalani and N. V. S., *Convexification and Global Optimization in Continuous and Mixed-Integer Nonlinear Programming: Theory, Algorithms, Software, and Applications*, 1st ed. Dordrecht, US: Springer, 2002.

[242] C. D. Toth, J. O'Rourke, and J. E. Goodman, Eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2017.

[243] H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, 2nd ed. 2016 edition. New York, NY: Springer, 2016.

[244] K. Verhetsel, *Solving the maximum weight independent set problem : application to indirect hex-mesh generation*, MS in Computer Science and Engineering[Thesis], London: University College of London, 2017. [Online]. Available: https://dial.uclouvain.be/memoire/ucl/en/object/thesis

[245] C. Vinzant, *Real Algebraic Geometry in Convex Optimization* , Phd in Mathematics [Dissertation], Berkeley : University of California, 2011. [Online]. Available: https://escholarship.org/uc/item/5dt9t63z

[246] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2002.

[247] H. Whitney, "Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets," in *Hassler Whitney Collected Papers*, Birkhäuser Boston, 1992, pp. 228-254.

[248] C. Wilmott, H. Kampermann, and D. Bruß, "Quantum sign permutation polytopes," *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 43, no. 50 (505306), pp. 1-17, 2010.

[249] S. V. Yakovlev, "Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets," *Cybernetics*, vol. 25, no. 3, pp. 385-391, May 1989.

[250] S. V. Yakovlev, "The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 53, no. 5, pp. 725-731, Sep. 2017.

[251] S. Yakovlev, "Convex Extensions in Combinatorial Optimization and Their Applications," in *Optimization Methods and Applications*, Cham : Springer International Publishing, 2017, pp. 567-584.

[252] S. V. Yakovlev and I. V. Grebennik, "Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 29, no. 5, pp. 727-734, Sep. 1993.

[253] S. Yakovlev, O. Kartashov, and O. Yarovaya, "On Class of Genetic Algorithms in Optimization Problems on Combinatorial Configurations," in *2018 IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*, 2018, vol. 1, pp. 374-377.

[254] S. V. Yakovlev and O. S. Pichugina, "Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 54, no. 1, pp. 99-109, Feb. 2018.

[255] S. Yakovlev, O. Pichugina, and O. Yarovaya, "On Optimization Problems on the Polyhedral-Spherical Configurations with their Properties," in *2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC)*, 2018, pp. 94-100.

[256] S. V. Yakovlev and O. A. Valuiskaya, "Optimization of Linear Functions at the Vertices of a Permutation Polyhedron with Additional Linear Constraints," *Ukr. Math. J.*, vol. 53, no. 9, pp. 1535-1545, Sep. 2001.

[257] M. Yan, "Extension of Convex Function," *arXiv:1207.0944 [math]*, Jul. 2012.

[258] V. A. Yemelichev, M. M. Kovalëv, and M. K. Kravtsov, *Polytopes, graphs and optimisation.* Cambridge : Cambridge University Press, 1984.

[259] O. Yemets, “The Optimization of Linear and Convex-Functions on a Euclidean Combinatorial Set of Polypermutations,” *Comp. Math. and Math. Phys.*, vol. 34, no. 6, pp. 737-748, 1994.

[260] O. A. Yemets and A. A. Roskladka, “Algorithmic solution of two parametric optimization problems on a set of complete combinations,” *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 35, no. 6, pp. 981-986, Nov. 1999.

[261] O. A. Yemets, Y. M. Yemets, and T. V. Chilikina, “Combinatorial Cutting while Solving Optimization Nonlinear Conditional Problems of the Vertex Located Sets,” JAI(S), vol. 42, no. 5, pp. 21-29, 2010.

[262] J. E. Yukich, *Probability Theory of Classical Euclidean Optimization Problems.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

[263] X. Zheng, Y. Pan, and X. Cui, “Quadratic convex reformulation for nonconvex binary quadratically constrained quadratic programming via surrogate constraint,” *J Glob Optim*, p. 17, Feb. 2018.

[264] G. M. Ziegler, “Lectures on 0/1-Polytopes,” in *Polytopes — Combinatorics and Computation*, G. Kalai and G. M. Ziegler, Eds. Birkhäuser Basel, 2000, pp. 1-41.

[265] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes.* New York: Springer, 2013.

[266] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1948.

[267] В. И. Баранов, Б. С. Стечкин, *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения*, Второе издание. Москва: Физматлит, 2004.

[268] *Большой энциклопедический словарь*, 2-е издание. Москва: Большая Российская энциклопедия, 2002.

[269] О. А. Валуйская, О. А. Емец, Н. Г. Романова, “Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным мето-

дом Стояна-Яковлева," *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 42, № 4, С. 591-596, 2002.

[270] О. А. Валуйская, О. С. Пичугина, "Линейная условная и параметрическая оптимизация на евклидовых комбинаторных множествах и ее применение в экономике," *Вісник Харківського державного політехнічного університету*, № 92, С. 15-18, 2000.

[271] О. А. Валуйская, О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, "Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения," *Радиоэлектроника и информатика*, № 2 (15), С. 121-129, 2001.

[272] О. О. Валуйська, О. О. Ємець, О. С. Пічугіна, "До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах," *Вісник Львівського університету. Сек. приклад. матем. і інформатика*, no. 4, pp. 94-101, 2002.

[273] Э. Х. Гимади и М. Ю. Хачай, *Экстремальные задачи на множествах перестановок*, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Урал. отд. Рос. акад. наук, Институт математики им. С. Л. Соболева Сиб. отд. Рос. акад. наук. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.

[274] И. В. Гребенник, "Декомпозиция множества допустимых решений и экстремальные свойства целевых функций в задачах оптимизации с булевыми переменными," *Радиоэлектроника и информатика*, Т. 16, № 3, С. 93-99, 2001.

[275] И. В. Гребенник, "Комбинаторное множество перестановок кортежей и его свойства," *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 1 (13), 2005, С. 92-98.

[276] И. В. Гребенник, "Свойства классов композиционных образов комбинаторных множеств, отображенных в евклидово пространство," *Радиоэлектроника и информатика*, № 1, 2005, С. 66-70.

[277] И. В. Гребенник, "Экстремальные свойства функций на композиционных образах комбинаторных множеств," *Радиоэлектроника и информа-*

тика, № 2, С. 36-44, 2005.

[278] И. В. Гребенник, “Классы композиционных образов комбинаторных множеств в математических моделях задач геометрического проектирования,” *Радиоэлектроника и информатика*, № 3, 2005, С. 69-73.

[279] И. В. Гребенник, “Математические модели и методы комбинаторной оптимизации в геометрическом проектировании,” Дис... д-ра техн. наук: 01.05.02, Харьковский национальный ун-т радиоэлектроники, Харьков, 2006.

[280] И. В. Гребенник и А. В. Баранов, “Оценки минимума выпуклых функции на классах комбинаторных множеств перестановок,” *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, Т. 20, № 1, 2009.

[281] И. В. Гребенник и Д. А. Лапко, “Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах,” *Радиоэлектроника и информатика*, Т. 18, № 1, С. 109-113, 2002.

[282] В. В. Грицик, А. I. Шевченко, О. М. Кiсельова, С. В. Яковлев, П. I. Стецюк и др., *Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів: монографія.* Донецьк: Наука і освіта, 2012.

[283] Л. Ф. Гуляницкий, “До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації,” *Теорія оптимальних розв'язків*, Т. 7, С. 45-49, 2008.

[284] Л. Ф. Гуляницький, О. Ю. Мулеса, *Прикладні методи комбінаторної оптимізації : навчальний посібник.* Київ: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет,” 2016.

[285] Л. Ф. Гуляницкий, С. И. Сиренко, “Определение и исследование комбинаторных пространств,” *Теорія оптимальних розв'язків*, Т. 9, С. 17-25, 2010.

[286] Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна, *Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях.* Полтава: ПУЕТ, 2011.

[287] О. А. Емец, “Множество сочетаний с повторениями, отображенное в $\mathbf{R^k}$, и свойства задач оптимизации на нем,” *Докл. АН УССР. Сер. А*, № 4, С. 69-72, 1991.

[288] О. А. Емец, “Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок,” *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 34, № 6, pp. 737-748, 1994.

[289] О. А. Емец, Т. Н. Барболина, *Комбинаторная оптимизация на размещениях.* Київ: Наукова думка, 2008.

[290] О. А. Емец, О. А. Черненко, *Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях.* Киев: Наукова думка, 2011.

[291] О. О. Ємець, Є. М. Ємець, “Безумовна оптимізація на полірозміщеннях: достатні умови та оцінки мінімумів сильно опуклих цільових функцій,” *Вісник Запорізького державного університету*, № 1, С. 44-48, 2000.

[292] О. О. Ємець, Є. М. Ємець, “Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації,” *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, № 9, С. 105-109, 2000.

[293] Ємець О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, *Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.* Київ: Наукова думка, 2005.

[294] О. О. Ємець, С. І. Недобачій, “Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней,” *Наукові вісті НТУУ “КПІ,”* № 1, С. 100-106, 1998.

[295] О. О. Ємець, Н. Г. Романова, *Оптимизация на полиперестановках.* Київ: Наукова думка, 2010.

[296] О. О. Ємець, О. В. Роскладка, “Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації па сполученнях,” *Укр. мат. Журн.*, Т. 51, № 08, С. 1118-1121, Aug. 1999.

[297] О. О. Ємець, О. В. Роскладка, *Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування.* Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006.

[298] М. З. Згуровский, А. А. Павлов, *Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений.* Киев: Наукова думка, 2016.

[299] Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы: Монография.* Киев: Наукова думка, 2015.

[300] Е. М. Киселева, Н. З. Шор, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения.* Киев: Наукова думка, 2005.

[301] И. В. Козин, С. Е. Батовский, В. И. Сардак, "Фрагментарная модель и эволюционный алгоритм 2D упаковки объектов," *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*, № 15, С. 74-79, 2017.

[302] Л. М. Колєчкіна, О. С. Пічугіна, "Математичне моделювання при оптимізації телекомунікаційних мереж," *Матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"*, Івано-Франківськ, 2016, pp. 180–182.

[303] А. И. Косолап, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи: Монография.* Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2007.

[304] А. И. Косолап, *Методы глобальной оптимизации: Монография. Днепропетровск: Наука и образование*, 2013.

[305] А. И. Косолап, *Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации: Монография.* Днепропетровск: ПГАСА, 2015.

[306] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры.* Москва: Наука, 1968.

[307] И. Кшеминьска, "Полиэдральный подход в задачам комбинаторной оптимизации," Автореф. дис... к-та физ.-мат наук: 01.01.09, Институт математики АН Баларуси, Минск, 1995.

[308] А. Б. Петровский, *Пространства множеств и мультимножеств.* Москва: Едиториал УРСС, 2003.

[309] Н. Н. Писарук, *Модели и методы смешанно-целочисленного программирования.* Минск: БГУ, 2008.

[310] О. С. Пичугина, "Методы и алгоритмы решения некоторых задач оптимизации на множествах сочетаний и размещений," Дис. ... канд.физ.-мат. наук: 01.05.02, Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1996.

[311] О. С. Пичугина, "Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения," *Problems of Computer Intellectualization*, С. 125-132, 2012.

[312] О. С. Пичугина, "Одно обобщение гиперкуб-топологии сети передачи данных," *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, Т. 80, № 6, С. 214-221, 2016.

[313] О. С. Пичугина, "Обобщенная задача построения функциональных продолжений и продолжений с них и ее применение в оптимизации," у *матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації,"* Полтава, 2016, С. 285-290.

[314] О. С. Пичугина, "Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах евклидовой комбинаторной оптимизации," *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*, Т. 1, № 13, С. 144-160, Март 2016.

[315] О. С. Пичугина, "Полиэдрально-сферический метод решения нелинейных задач о назначениях," *Тези доповідей 11-ої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС'2016»*, Чернігів-Жукін, 2016, С. 277-281.

[316] О. С. Пичугина, "Обобщенная модель упаковки шаров," *Тези доповідей 12-ої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та*

імітаційне моделювання систем. МОДС'2016», Чернігів, 2017, С. 310-312.

[317] О. С. Пичугина, "Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком," *Сист. досл. та інф. техн.*, № 4, С. 74-96, 2017.

[318] О. С. Пичугина, "Математическое моделирование комбинаторных конфигураций и применение в задачах оптимизации," *Математичні машини і системи*, № 1, С. 123-137, 2018.

[319] О. С. Пичугина, "Множества евклидовых комбинаторных конфигураций: проблемы и перспективы," *Science Review*, Т. 1, № 2(9), С. 10-15, 2018.

[320] О. С. Пичугина, "Полиэдрально-сферические конфигурации: особенности и применение," *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*, № 17, С. 90-107, 2018.

[321] О. С. Пичугина, "Функционально-аналитические представления множеств евклидовых комбинаторных конфигураций в задачах оптимизации," *Радиоэлектроника и информатика*, № 1, С. 30-39, 2018.

[322] О. С. Пичугина, "Комбинаторные конфигурации: подходы к моделировнию и применение," У *Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»*, Кропивницький, 2018, С. 94-99.

[323] О. С. Пичугина, "Выпуклые продолжения функций на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций," *Scientific pages*, no. 13, pp. 8-18, Июль 2018.

[324] О. С. Пичугина, "Неперервні формулювання задач комбінаторної оптимізації *Материалы 7-ой международной научно-технической конференции "Информационные системы и технологии (ИСТ-2018)"*, Харьков-Коблево, С. 123-127, 2018.

[325] О. Пичугина, А. Брус, *Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников : Классификация. Применение в оптими-*

зации и теории геометрических графов. Монография. Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2014.

[326] О. С. Пичугина, А. Ю. Прохоренко, “Новые подходы к ортогональному проектированию в полиэдрально-сферической оптимизации на комбинаторных множествах,” в *Материалы 4-ой международной научной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии»*, Кишинэу, 2014, Т. 2, С. 378-386.

[327] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Полиэдрально-сферический подход к решению некоторых классов комбинаторных задач,” *Праці VI Міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень»*, Ужгород, 2012, С. 152-153.

[328] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества,” *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, Т. 79, № 1(4), С. 27-38, 2016.

[329] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах,” *Компьютерная математика*, № 1, С. 143-154, 2016.

[330] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах,” *Радиоэлектроника и информатика*, № 1, С. 18-26, 2016.

[331] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах,” *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*, Т. 1, № 15, С. 152-158, 2017.

[332] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Оптимизационные задачи на евклидовых комбинаторных конфигурациях,” *Материалы 6-ой международной научно-технической конференции ИСТ-2017*, Коблево, 2017, С. 169-170.

[333] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, *Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография.* Харьков:

Золотая миля, 2018.

[334] О. С. Пічугіна, "Математичне моделювання практичних задач у вигляді лінійних задач на переставленнях та їх розв'язання із застосуванням властивостей комбинаторних многогранників," *Математические машины и системы*, Т. 1, № 3-4, С. 185-195, 2007.

[335] О. С. Пічугіна, "Математична модель складання меню як лінійна комбінаторна задача на полірозміщеннях," *Третя науково-практична конференція з міжнародною участю "Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС ' 2008". Тези доповідей*, Київ, 2008, С. 160-164.

[336] О. С. Пічугіна, "Застосування властивостей комбінаторних множин в розв'язанні задач одновимірного упакування," *Четверта науково-практична конференція з міжнародною участю „Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС ' 2008". Тези доповідей*, Київ, 2009, С. 263-266.

[337] О. С. Пічугіна, "Комбінаторні підходи до розв'язання задачі мінімізації часу виконання програмного пакету," *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, № 7, С. 121-126, 2010.

[338] О. С. Пічугіна, "Метод побудови опуклих продовжень поліномів на комбінаторних множинах," *Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки*, Т. 1, № 2 (53), С. 141-150, 2010.

[339] О. С. Пічугіна, "Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимізації," *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. Науки*, № 4, С. 176-189, 2010.

[340] О. С. Пічугіна, "Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на одному класі розміщень та його застосування," у *Матеріали одинадцятого міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»*, Кіровоград, 2011, pp. 138-146.

[341] О. С. Пічугіна, "Метод розв'язання двопараметричної лінійної задачі на переставленнях та розміщеннях," *Тези доповідей 6-ої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС'2011»*, Чернігів, 2011, С. 124-125.

[342] О. С. Пічугіна, "Модель однієї задачі двовимірного упакування та поліедральний підхід до її розв'язання," *Тези доповідей 7-ої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС'2012»*, Чернігів-Жукин, 2012, С. 325-329.

[343] О. С. Пічугіна, "Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах," у *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання : матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції*, Івано-Франківськ, 2017, С. 445-451.

[344] О. С. Пічугіна, "Методи декомпозиції множин евклідових комбінаторних конфігурацій і застосування у оптимізації," *мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус», Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XXXIII международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире» г. Киева*, № 6(31), С. 60-75, 2018.

[345] О. С. Пічугіна, В. Г. Дяченко, "Задача розташування прямокутних модулів на чіпі та поліедральний підхід до її розв'язання," *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, № 7, С. 135-141, 2012.

[346] О. С. Пічугіна, В. Г. Дяченко, "Програмна реалізація однієї задачі розташування прямокутних модулів на чіпі," у *Проблеми й перспективи розвитку академічної та університетської науки: збірник наукових праць за матеріалами V Всеукраїнського науково-практичного форуму установ НАН України*, Полтава, 2012, С. 90-95.

[347] О. С. Пічугіна, Л. М. Колєчкіна, "Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж," *Математичні машини і системи*, № 4, С. 129-144, 2017.

[348] А. В. Погорелов, *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* Москва: Наука, 1969.

[349] А. М. Райгородский, “Комбинаторно-геометрические свойства точечных множеств,” Автореф. дис... к-та физ.-мат наук: 01.01.06, МГУ, Москва, 2001.

[350] Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. *Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання.* Киев: Наук. думка, 2009.

[351] И. В. Сергиенко, *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.* Київ: Наукова думка, 1988.

[352] И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая, *Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.* Київ: Наукова думка, 1981.

[353] И. В. Сергиенко, В. П. Шило, *Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования.* Киев: Наукова думка, 2003.

[354] П. И. Стецюк, *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы.* Кишинэу: Эврика, 2014.

[355] П. И. Стецюк, Н. Ю. Золотых, “Бинарный квадратичный многогранник и его аппроксимации,” *Журн. обчисл. та прикл. Математики*, №. 2, С. 139-149, 2010.

[356] Ю. Г. Стоян, “Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 85),” Харьков, 1980.

[357] Ю. Г. Стоян, “Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 173),” Харьков, 1982.

[358] Ю. Г. Стоян, “Пространства геометрических информаций (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 223),” Харьков, 1985.

[359] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, "Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства," *Пробл. машиностроения*, Т. 8, № 3, С. 56-62, 2005.

[360] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, "Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 10, С. 28-31, 2008.

[361] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, "Комбинаторные виды для перечисления комбинаторных конфигураций со специальными свойствами," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 7, С. 28-32, 2010.

[362] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, О. А. Емец, "Комбинаторные множества размещений и их свойства (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 342)," Харьков, 1990.

[363] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець, *Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи.* Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005.

[364] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.* Киев: Наукова думка, 1986.

[365] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, "Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике," *Докл. АН УССР. Сер. А*, Т. 88, № 3, С. 69-72, 1988.

[366] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, "Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике," *Докл. АН УССР. Сер. А*, № 5, С. 68-70, 1988.

[367] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, И. В. Гребенник, "Экстремальные задачи на множестве размещений (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 347)," Харьков, 1990.

[368] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. В. Паршин, "Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в $\mathbb{R}^n$," *Докл. АН УССР. Сер. А*, № 5, С. 73-77, 89, 1989.

[369] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, *Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография.* Харьков: Константа, 2017.

[370] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації.* Київ: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993.

[371] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець, "Множество полиразмещений в комбинаторной оптимизации," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. Науки*, № 8, С. 37-41, 1999.

[372] І. А. Чуб, М. В. Новожилова, В. А. Андронов, *Моделювання прикладних оптимізаційних задач розміщення об'єктів з метричними характеристиками, що змінюються.* Харків: НУЦЗ України, 2017.

[373] С. В. Яковлев, "Теория и оптимизационные методы геометрического проектирования в системах управления, наблюдения и контроля," Дис... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.01, Томский государственный ун-т, Томск, 1990.

[374] С. В. Яковлев, "Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников," *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 34, № 7, С. 1112-1119, 1994.

[375] С. В. Яковлев, "Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 8, С. 20-26, 2017.

[376] С. В. Яковлев, "О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 9, С. 26-32, 2017.

[377] С. В. Яковлев, О. А. Валуйская, "О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений," *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. Науки*, № 11, С. 103-107, 1999.

[378] С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк, И. В. Аристова и др., *Элементы теории геометрического проектирования: Монография.* Киев: Наукова думка, 1995.

[379] С. В. Яковлев, И. В. Гребенник, “О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах,” *Изв. вузов. Математика*, № 11, С. 74-86, 1991.

[380] С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, “О представлении дискретных множеств в R^n в задачах дискретной оптимизации,” *Материалы 3-й международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии (ИСТ-2014)»*, Харьков, 2014, С. 148-149.

[381] С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, “Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства,” *Пит. прикл. матем. і матем. модел.*, Вип. 17, С. 258-264, 2017.

А ДОДАТОК. Список публікацій здобувача і відомості про апробацію результатів дисертації

А.1 Список публікацій здобувача

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації

Монографії

1. Пичугина О. Брус А. Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников: Классификация. Применение в оптимизации и теории геометрических графов: монография. Saarbriicken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 144 с. ISBN: 978-3-659-64672-0.

2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков: Константа, 2017. 404 с. ISBN: 978-966-342391-3.

3. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография. Харьков: Золотая миля, 2018. 312 с. ISBN: 978-966-1685-72-6.

Статті

4. Валуйская О.А., Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 2. С. 121-129.

5. Валуйська О. О., Ємець О. О., Пічугіна О. С. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 4. С. 94-101. [Входить до міжнародних наукометричних баз zbMath, Google Scholar].

6. Пічугіна О. С. Математичне моделювання практичних задач у вигляді лінійних задач на переставленнях та їх розв'язання із застосуванням

властивостей комбінаторних многогранників // Математические машины и системы. 2007. Т. 1. № 3. С. 185-195.

7. Пічугіна О. С. Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимізації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2010. № 4. С. 176-189.

8. Pichugina O. S., Yakovlev S. V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. no. 6. P. 921-930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMath, WorldCat, Google Scholar].

9. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. Cham : Springer, 2016. P. 689-700. DOI: 10.1007/978-3-319-30379-6_62 [Входить до міжнародних наукометричних баз AMS Mathscinet, Springer Link, zbMATH, CrossRef, WorldCat, Google Scholar].

10. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. 2016. Vol. 4. no. 2. P. 129-152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103 [Входить до міжнародних наукометричних баз Web of Science, CrossRef, Ingenta Connect, WorldCat, Index Copernicus].

11. Pichugina O. Combinatorial approaches to the capital-budgeting problem // Econtechmod : an international quarterly journal on economics of technology and modelling processes. 2016. Vol. 5. no. 4. P. 29-36. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, Yadda].

12. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский

журнал передовых технологий. 2016. Т. 79. № 1. С. 27-38. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, ResearchBib, WorldCat, Google Scholar].

13. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах Евклидовой комбинаторной оптимизации // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 144-160.

14. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика. 2016. № 1. С. 143-154.

15. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization // IOSR Journal of Mathematics. 2017. Vol. 13. no. 2. P. 12-25. DOI: 10.9790/5728-1302051225 [Входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, CrossRef, Google Scholar].

16. Пичугина О. С. Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Системні дослідження та інформаційні технології. 2017. № 4. С. 74-96. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.07 [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, WorldCat, Google Scholar].

17. Яковлев С. В., Пичугина О. С. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Питання прикладної математики і математичного моделювання. 2017. № 17. С. 258-264.

18. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. № 15. С. 152-158.

19. Пічугіна О. С., Колєчкіна Л. М. Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129-144.

20. Yakovlev S. V., Pichugina O. S. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets // Cybernetics and Systems

Analysis. 2018. Vol. 54. no. 1. C. 99-109. DOI: 10.1007/s10559-018-0011-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMATH, WorldCat, Google Scholar].

21. Farzad B., Pichugina O., Koliechkina L. Multi-Layer Networks: Origin, Community Detection, Applications // International Journal of Computers. Vol. 12. P. 92-104. 2018. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, NSD].

22. Пичугина О. С. Математическое моделирование комбинаторных конфигураций и применение в задачах оптимизации // Математичні машини і системи. № 1. С. 123-1374, 2018.

23. Пичугина О. С. Функционально-аналитические представления множеств евклидовых комбинаторных конфигураций в задачах оптимизации // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1. С. 1-9.

24. Пичугина О. С. Полиэдрально-сферические конфигурации: особенности и применение // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. № 17. С. 90-107.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації

Статті

25. Валуйская О. А., Пичугина О. С. Линейная условная и параметрическая оптимизация на евклидовых комбинаторных множествах и ее применение в экономике // Вісник Харківського державного політехнічного університету. 2000. № 92. С. 15-18.

26. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень поліномів на комбінаторних множинах // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. 2010. Т. 1. № 2. С. 141-150. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, DOAJ].

27. Пічугіна О. С. Комбінаторні підходи до розв'язання задачі мінімізації часу виконання програмного пакету // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2010. № 7. С. 121-126.

28. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Задача розташування прямокутних модулів на чіпі та поліедральний підхід до її розв'язання // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2012. № 7. С. 135-141.

29. Pichugina O. S., Kolechkina L. N. On a diet menu modelling // Information technologies in economy research. 2016. № 2. С. 44-49.

30. Пичугина О. С. Одно обобщение гиперкуб-топологии сети передачи данных // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2016. Т. 80. № 6. С. 214-221. [Входить до міжнародних бібліометричних і наукометричних баз даних: Index Copernicus, Google Scholar, ICiteFactor, Infobase Index].

31. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2016. № 1. С. 18-26. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, OAJI, Scholar Steer, CiteFactor, I2OR].

32. Пичугина О. С. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций: проблемы и перспективы // Science Review. 2018. Т. 1. № 2. С. 10-15. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar].

33. Пичугина О. С. Выпуклые продолжения функций на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций // Scientific pages. 2018. № 13. С. 8-18. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, GIF, ResearcBib].

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

34. Пичугина О.С. Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения // Problems of Computer

Intellectualization. 2012. С. 125-132.

35. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на одному класі розміщень та його застосування // Матеріали одинадцятого міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кіровоград: КНТУ, 2011. С. 138-146.

36. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Програмна реалізація однієї задачі розташування прямокутних модулів на чіпі // Збірник наукових праць за матеріалами V Всеукраїнського науково-практичного форуму установ НАН України та ВНЗ України. Полтава: ПНТУ, 2012. С. 90-95.

37. Пичугина О. С., Прохоренко А. Ю. Новые подходы к ортогональному проектированию в полиэдрально-сферической оптимизации на комбинаторных множествах // Материалы 4-ой международной научной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». Т. 2. Кишинеу: Эврика, 2014. С. 378-386.

38. Pichugina O. S, Farzad B. Human Communication Network Model // ICT in Education, Research and Industrial Applications. Kiev: http://ceur-ws.org. 2016. P. 33-40. [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Semantic Scholar, dblp, Google Scholar].

39. Пичугина О. С. Обобщенная задача построения функциональных представлений и продолжений с них и ее применение в оптимизации // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації". Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 285-290.

40. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv: KPI, 2017. P. 1167-1174. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100436 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

41. Pichugina O. Placement problems in chip design: Modeling and optimization // 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). Kharkiv: KNURE, 2017. P. 465-473. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246440 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

42. Пічугіна О. С. Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції. Івано-Франківськ: п. Голіней О. М., 2017. С. 445-451.

43. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On Optimization Problems on the Polyhedral-Spherical Configurations with their Properties // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC). Kyiv: KPI, 2018. P. 94-100. DOI: 10.1109/SAIC.2018.8516801 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, IEEE Xplore, WorldCat, Google Scholar].

44. Пічугіна О. С. Комбинаторные конфигурации: подходы к моделированию и применение // Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кропивницький: ЛА НАУ, 2018. С. 138-146.

45. Пічугіна О. С. Методи декомпозиції множин евклідових комбінаторних конфігурацій і застосування у оптимізації // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XXXIII международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире» г. Киева. 2018. № 6 (31). С. 60-75.

46. Пічугіна О. С. Неперервні формулювання задач комбінаторної оптимізації // Матеріали 7-ої міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)». Харків-Коблево: ХНУРЕ, 2018. С. 123-127.

А.2 Відомості про апробацію результатів дисертації

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
1.	4-а міжнародна наукова конференція «Математичне моделювання, оптимізація та інформаційні технології»	Кишинеу, Молдова	25-28 березня 2014 р.	заочна
2.	The Southwestern Ontario Graduate Mathematics and Statistics Conference	the University of Guelph, Guelph, Canada	May 20-21, 2014	full-time participation
3.	Conference on Graph Theory, Matrix Theory and Interactions	Queen's University, Kingston, Canada	June 20-21, 2014	full-time participation
4.	Conference on Optimization, Transportation and Equilibrium in Economics	University of Toronto, The Fields Institute, Toronto, Canada	September 15-19, 2014	full-time participation
5.	3-я міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології (ICT 2014)»	Харків	15-21 вересня 2014 р.	заочна
6.	VI Міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень»	29 вересня-4 жовтня 2014 р.	УжНУ, Ужгород	заочна
7.	The 2014 CMS Winter Meeting	McMaster University, Hamilton, Canada	December 5-8, 2014	full-time participation
8.	III Міжнародна науково-практична конференція "Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи) (ComInt 2015)"	КНУ, Київ	12-15 травня 2015 р.	заочна
9.	Statistical and Computational Challenges in Networks and Cybersecurity Workshop	University of Montreal, Montreal, Canada	May 4-8, 2015	full-time participation

Продовження таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
10.	The 2015 AMMCS-CAIMS Congress	Wilfrid Laurier University, Waterloo, Canada	Jun 7-12, 2015	full-time participation
11.	Industrial-Academic Workshop on Optimization in Finance and Risk Management	University of Toronto, The Fields Institute, Toronto, Canada	October 5-6, 2015	full-time participation
12.	XIII міжнародна науково-практична конференція "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем MPZIS-2015"	ДНУ, Дніпропетровськ	18-20 листопада 2015 р.	заочна
13.	VII Всеукраїнська науково-практична конференція за міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2016)»	ПУЕТ, Полтава	10-12 берез. 2016 р.	очна
14.	Міжнародна науково-практична конференція "Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації"	ПУЕТ, Полтава	12-13 травня 2016 р.	очна
15.	VII міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (OPTIMA2016)»	Кам’янець-Подільський НУ, Кам’янець-Подільський	21-22 квітня 2016 р.	очна
16.	CYBER FORUM DESSERT 2016	Kharkiv-Kyiv-Chernivtsi	May 18-23, 2016	full-time participation

Продовження таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
17.	Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання»	Івано-Франківськ	23-28 травня 2016 р.	очна
18.	12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer	KNU, Kyiv	June 21-24, 2016	full-time participation
19.	8-а міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС'2013»	IPMMS, Чернігів-Жукін	27 червня-1 липня, 2016 р.	очна
20.	VIII Міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень»	УжНУ, Ужгород	26 вересня-1 жовтня 2016 р.	очна
21.	6th Polish Combinatorial Conference	Będlewo, PolandSeptember 19-23, 2016		distance participation
22.	5-а міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології (ICT 2016)»	Харків-Коблево	12-17 вересня 2016 р.	очна
23.	XIV міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016)»	ДНУ, Дніпро	16-18 листопада 2016 р.	очна

Продовження таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
24.	VIII Всеукраїнська науково-практична конференції за міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2017)»	ПУЕТ, Полтава	16-18 березня 2017 р.	очна
25.	IV Міжнародна науково-практична конференція "Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи) (ComInt 2017)"	КНУ, Київ	16-18 травня 2017 р.	очна
26.	Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання»	Івано-Франківськ	15-20 травня, 2017 р.	заочна
27.	The 14th ESICUP Meeting	Liège, Belgium	May 3-5, 2017	full-time participation
28.	19-я Міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології - SAIT 2017»	КПІ, Київ	22-25 травня 2017 р.	очна
29.	2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON)	KPI, Kyiv	May 29-June 2, 2017	full-time participation
30.	Дванадцята міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС'2017»	ІПММС, Чернігів	26-29 червня, 2017 р.	заочна

Продовження таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
31.	6-а міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології (ICT 2017)»	Харків-Коблево	11-16 вересня 2017	очна
32.	Міжнародна наукова конференція "Питання оптимізації обчислень (ISCOPT -XLIV)"	Кам'янець-Подільський НУ, Кам'янець-Подільський	26-29 вересня 2017 р.	заочна
33.	4th International Scientific-Practical Conference «Problems of Infocommunications, Science and Technology» (PICS&T-2017)	KNURE, Kharkiv	October 10-13, 2017	full-time participation
34.	XV Міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2017)»	Дніпро, ДНУ	22-24 листопада 2017 р.	заочна
35.	2-nd International Scientific and Practical Conference "Modern Methodology of Science And Education"	Warsaw, Poland	February 19, 2018	distance participation
36.	Двадцятий Міжнародний науково-практичний семінар «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»	ЛА НАУ, Кропивницький	13-14 квітня 2018 р.	очна
37.	VIII міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (OPTIMA2018)»	Кам'янець-Подільський НУ, Кам'янець-Подільський	18-20 квітня 2018 р.	заочна

Кінець таблиці А.1

№	Назва конференції	Місце проведення	Дати проведення	Форма участі
38.	ICCAIRO: International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics and Optimization	Prague, Czech Republic	May 19-21, 2018	full-time participation
39.	The 29th European Conference on Operational Research (EURO2018)	Valencia, Spain	July 8-11, 2018	full-time participation
40.	XXXIII международная научно-практическая конференция: «Наука в современном мире»	Київ	Липень, 2018	заочна
41.	7-а міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології (ICT 2018)»	Харків-Коблево	10-15 вересня 2018	очна
42.	International Conference on Innovations in Engineering, Technology and Sciences (ICIETS)	NIE Institute of Technology, Karnataka, India	September 20-21, 2018	distance participation
43.	IX International Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2018)	Petrovac, Montenegro	October 1-5, 2018	distance participation
44.	IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)	Kyiv, Ukraine	October 08-12, 2018	full-time participation

В ДОДАТОК. Приклади і доведення

В.1 Додатки до розділу 2

Приклад В.1. 1. Якщо $A = \{0, 1\}$, то c–конфігурація π^1 буде упорядкованою булевою послідовністю, яка визначає склад підмножини $B(\pi^1) \subseteq B$, де $a_{j_i} = 1$ означає, що об'єкт b_i включається у $B(\pi^1)$, а $a_{j_i} = 0$ – що ні. e–конфігурація $x^1 = \varphi(\pi^1)$ є характеристичним вектором множини $B(\pi^1)$.

2. Якщо $A = J_l^0$, $l > 1$, то елементи c–конфігурації π^2, яка являє собою цілочислову послідовність, можна розуміти як кратності об'єктів з B у мультимножині $B(\pi^2) \subseteq B$. При цьому $|B(\pi^2)| = a_{j_1} + ... + a_{j_n}$, e–конфігурація x^2 – це π^2, розглянута як вектор.

3. Граф порядку k і розміру n можна представити c–конфігурацією π^3, для якої B – множина ребер графу, а A – булеві вектори довжини k, а її одиничні позиції відповідають номерам інцидентних ребру вершин, тобто $A = \{\mathbf{e}_{ij}\}_{1 \le i < j \le k}$, $\mathbf{e}_{ij} = (e_{ijl})_{l \in J_k} \in \{0, 1\}^k$, де $e_{iji} = e_{ijj} = 1$, $||\mathbf{e}_{ij}||^2 = 2$, $1 \le i < j \le k$. $x^1 = \varphi(\pi^1)$. π^3 буде кортежем стовпців з A, який можна розглянути як матриці π^3, а $x^3 = \varphi(\pi^3)$ – результатом векторизації цієї матриці.

4. Розглянемо як A – одиничний базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$ і бієктивне відображення χ. У такому випадку c–конфігурація π^4 являтиме перестановку векторів цього базису, а e–конфігурація $x^4 = \varphi(\pi^4)$ – це результат векторизації матриці (π^4).

5. Якщо $A = J_n$, а χ – бієктивне відображення, c–конфігурація π^5 являтиме собою перестановку з J_n. Її можна інтерпретувати по-різному, наприклад, як формування мультимножини потужності C_n^2, у якій присутні усі елементи B, а кратності задаються конфігурацією π^4. Ще одна інтерпретація полягає в тому, що елементи c–конфігурації вказують позиції елементів вихідної множини у деякій упорядкованій послідовності. Розглядаючи послі-

довність π^5 як вектор, одержуємо е–конфігурацію x^5.

6. Нехай $k < n$, тоді с–конфігурацією π^6 є деяка упорядкована n–елементна мультимножина, сформована з елементів B, а е–конфігурацією x^6 буде π^5, розглянутою як вектор $\mathbb{R}^n$.

Доведення. (теореми 2.3) Нехай E – VLS. Покажемо, спочатку, що E – SLS, а потім що вона є PSS.

Введемо в розгляд поверхню $S^0 = \partial P$. Вона задається деякою кусково-лінійною неперервною функцією $f_0(x)$ такою, що $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f_0(x) = 0\}$.

Виберемо $\rho > 0$ і побудуємо сильно опукле продовження $F(x)$ функції $f_0(x)$ з E на P, яке існує для VLS E згідно з теоремою 1.8. Отримана функція $F : \, P \to \mathbb{R}^1$ задовольнятиме умову $F\left(x\right) \underset{E}{=} f_0(x) \underset{E}{=} 0$. Продовжимо функцію $F(x)$ на весь простір $\mathbb{R}^n$ із зберіганням її виразу, тобто розглянемо функцію $f : \, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$: $f(x) \underset{P}{=} F(x)$. $f(x)$ задовольняє умову (2.106) і також є сильно опуклою з параметром ρ на $\mathcal{K} = P$, отже, E є SLS. Геометричне місце точок (2.107) є деякою поверхнею, не обов'язково опуклою.

Покажемо, що E є SLS. S є поверхнею, умова (2.106) виконана, а умову (2.113) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^{n_E}, \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_i = 1, \; \exists j, j' \in J_{n^E}, j \neq j', \; \lambda_j, \lambda_{j'} > 0 : \\ &f(x) < 0, \;\; \text{де } x = \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_i \cdot x^i. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Функція $f(x)$ є строго опуклою на P, отже, за нерівністю Йенсена (Jensen's Inequality) для строго опуклих функцій, умова (B.1) виконана.

Тепер припустимо, що E – це PSS. Покажемо, що вона є VLS і SLS. Розглянемо функцію $f(x)$, що задає поверхню S у представленні (2.112). Те, що E є PSS, означає, що $f(x)$ задовольняє умови (2.106), (B.1).

Припустимо, що E – не є вершинно розташованою, тоді

$$\exists\, x^i \in E,\; \exists\, \lambda^i \in \mathbb{R}_+^{n_E}, \sum_{j\neq i} \lambda_j^i = 1 :\; x^i = \sum_{j\neq i} \lambda_j^i \cdot x^j.$$

Звідси слідує, що $f(x^i) = \sum\limits_{j\neq i} \lambda_j^i \cdot f(x^j) = 0$, а це протирічить (B.1) при виборі $\lambda = \lambda^i$. Отже, E – VLS.

Тепер покажемо, що E – SLS. Для побудови строго опуклої функції виберемо $\rho > 0$ і побудуємо сильно опукле продовження $F(x)$ із параметром ρ для функції $f(x)$ з E на P, яке існує в силу її вершинної розташованості. За означенням продовження, $F(x)$ задовольнятиме умову $F(x) \underset{E}{=} f(x) \underset{E}{=} 0$. До того ж $F(x)$ сильно, отже, і строго опукла на P, що і доводить, що E є SLS. □

Доведення. (тверд. 2.1) За означенням VLS, жоден з елементів E не є опуклою лінійною комбінацією інших елементів E. Ця властивість зберігається після видалення довільної підмножини E і переходу до $E' \subset E$. □

Доведення. (тверд. 2.2) Той факт, що якщо E – SLS(PSS), то довільна $E' \subset E$ також SLS/PSS, є безпосереднім наслідком з теореми 2.3 та тверд. 2.1.

Якщо E – дозволяє PSR, то $E' \subset E$ також, де як описана поверхня виступає повна строго опукла поверхня, описана навколо E. □

Доведення. (тверд. 2.4) За теоремою 2.2, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $vert\, P \subseteq B_n$. Множина B_n – VLS, тому E – VLS згідно з тверд. 2.1. Враховуючи те, що $lev(P) = 2$, і скориставшись тверд. 2.3, отримаємо (2.126). □

B.2 Додатки до розділу 3

Доведення. (насл. 3.1) Відображення ϕ, що задано формулами (2.100), (3.2), задовольняє умови $E' = \phi(E)$, $E = \phi^{-1}(E')$. До того ж, згідно з теоремою 2.1, залишає незмінною комбінаторну структуру опуклої оболонки $\mathcal{C}$-множини. □

Доведення. (теореми 3.1) Множини E, E' задовольняють умову (3.2), де $B = diag(d_1 b_1, ..., d_n b_n)$. За умовою $b \in B'_n$, $d \in \mathbb{R}^n_{>0}$, отже, (2.100) виконана. Згідно з насл. 3.1, умова (3.1) також виконана. □

Доведення. (тверд. 3.2) Необхідність виконання $lev'(E) \leq n$ є наслідком тверд. 3.1. Крім того, відзначимо, якщо E' – $\mathcal{P}$S, індукована G', то згідно з (2.55), $\forall x \in E'$ $x\mathbf{e} = \Sigma_{G'}$, тобто E лежить у площині α, заданої цим рівнянням (далі площинно розташованою множиною, a plane-located set, PLS). У результаті перетворення (3.3) буде одержано E, що також є PLS, отже, $d_E \leq n-1$ виконана. □

Доведення. (теореми 3.2) Враховуючи, що для $x \in [a, b]$, $a < b$ вірно, що $y = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$, для переводу $\mathcal{S}S$ E у $\mathcal{B}S$ E' достатньо обрати у (3.3):

$$b = \mathbf{e},\ d_i = \delta_i^{-1},\ c_i = -\frac{e_{i1}}{\delta_i},\ \text{де } \delta_i = e_{i2} - e_{i1},\ i \in J_n.$$

За теоремою 3.1, E та E' – комбінаторно ізоморфні. □

Доведення. (насл. 3.2) Так само, як $\mathcal{B}$S E' є PSpS,, комбінаторно ізоморфна з нею $\mathcal{S}$S E є PSpS, адже точки E рівновіддалені від $c = (c_i)_{i \in J_n}$ на відстань $r = |d|$, де $d_i = \dfrac{e_{i2} - e_{i1}}{2}$, $c_i = \dfrac{e_{i2} + e_{i1}}{2}$, $i \in J_n$. □

Доведення. (теореми 3.3) $\forall x \in E_n(G)$ виконано, що довільна транспозиція координат змінює парність e–конфігурації перестановок x [40]. Так, транспозицію x_i, x_j, $i \neq j$, можна представити лінійним перетворенням (3.2) вигляду:

$$\begin{aligned} &c = \mathbf{0};\ B:\ b_l = 1,\ l \neq i, j;\ b_{ij} = b_{ji} = 1; \\ &b_{i'j'} = 0,\ \forall \{i', j'\} \notin \{\{i, j\}, \{l, l\}\}_{l \neq i,j}, i', j' \in J_n. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Нехай $E \subset E_n(G)$ – $\mathcal{EPS}$, тоді множина E' вигляду (3.2), (B.2), з одного боку, є $\mathcal{OPS}$, адже складається з непарних e–конфігурацій перестановок. Водночас, E, E' – комбінаторно ізоморфні, адже задане таким чином перетворення (3.2) є невиродженим афінним. Зокрема, вибираючи як E базову $\mathcal{EPS}$, матимемо, що E' буде базовою $\mathcal{OPS}$. Отже, має місце (3.5).

Щоб довести (3.5), використаємо властивість булевих векторів, що парність $x \in B_n$ змінюється заміною координати x_i значенням $1 - x_i$.

Зафіксуємо $i \in J_n$ і задамо афінне перетворення (3.2), що здійснює заміну $x_i \to 1 - x_i$:

$$c_i = \mathbf{e}_i,\ B = diag(d_1, ..., d_n),\ \text{де } d_i = -1,\ i \in J_n. \tag{B.3}$$

Аналогічно попередньому випадку, маємо – якщо E є $\mathcal{EBS}$, то множина E' вигляду (3.2), (B.3) є $\mathcal{OBS}$, а множини E, E' – комбінаторно ізоморфні у силу невиродженості такого перетворення. Беручи як E базову $\mathcal{ESS}$, отримуємо базову $\mathcal{EPS}$ цієї ж розмірності як E'. Звідси слідує, що має місце (3.5).

Нарешті, щоб довести (3.6), задамо перетворення (3.2) як гомотетію, що переводить точку $x = (0^{n_0}, 1^{n_1}) \in B_n^{\pm}(n_1)$ у $y = (0^{n_0}, e_1^{n_1}) \in E_{n2}^{\pm I}(G)$. Для цього виберемо у (3.2) $c = \mathbf{0}$, $B = e_1\mathbf{E}$. Дія даного перетворення на усі елементи $B_n^{\pm}(n_1)$ приводить до формування $E_{n2}^{\pm I}(G)$. Більш того, згідно з теоремою 3.1, ці $\mathcal{C}$-множини – комбінаторно ізоморфні, тобто має місце (3.6). □

Доведення. (тверд. 3.5) Згідно з заув. 3.1, перенумерація координат $\mathcal{C}$-множин не змінює їх комбінаторної структури. Отже, полікомбінаторна $\mathcal{C}$-множина E', що породжується $\mathcal{C}_b$-множинами (2.91), (3.7), буде комбінаторно ізоморфною до вихідної E. □

Доведення. (теореми 3.5) Нехай E та $E' = E_I$ задовольняють умови теореми. У такому випадку якщо E індукована G, то E'.IM=G в силу (2.49). При цьому E' визначена у просторі $\mathbb{R}^{n'}$, де $n' = n - 1$, тобто за означенням є $\mathcal{PPS}$. З іншого боку, між елементами E, E' існує бієкція, оскільки E' утворюється з E відкиданням однієї координати, яку однозначно можна знайти з умови $x_1 + ... + x_n = g_1 + ... + g_n$. Афінне перетворення, що переводить E у E', задається невиродженою матрицею $B: \ (b_{ij})_{i,j\in J_{n-1}} = = \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \ (b_{in})_{i\in J_n} = \mathbf{e}_n, \ (b_{nj})_{j\in J_{n-1}} = -\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Отже, P, P' комбінаторно еквівалентні, відповідно, E, E' комбінаторно ізоморфні. $\square$

Доведення. (теореми 3.7) З E можна виділити повновимірну симплексну $\mathcal{C}$-множину E', навколо якої гіперсфера описується єдиним чином. У силу (2.108), вона є описаною навколо E, отже, має місце (3.96). $\square$

Доведення. (леми 3.1) Якщо при переході від E^1 до E розмірність $\mathcal{C}$-множини не зменшилася, в E можна виділити симплексну конфігурацію E' розмірності d_E і описати навколо неї гіперсферу S' мінімального радіуса. Ця гіперсфера визначається єдиним чином, і в неї будуть вписані як E, так і E^1, тобто $S' = S^{\min} = S^{1,\min}$, отже, умова (3.102) виконана. $\square$

Доведення. (тверд. 3.9) $a^{\min}$ – проекція $a^{1,\min}$ на площину E^2, відповідно, $h = \|a^{\min} - a^{1,\min}\|$ дорівнює відстані від $a^{1,\min}$ до цієї площини. Отже, $h = \frac{\|c_2^T a^{1,\min} - d_2\|}{c_2} = \|c_2^T a^{1,\min} - d_2\|$. З іншого боку, має місце $(r^{1,\min})^2 = (r^{\min})^2 + +h^2$, звідки слідує (3.112). Крім того, має місце $a^{\min} - a^{1,\min} = b \cdot h \cdot c_2$, де b набуває одне зі значень $1, -1$, а саме $b \cdot h = -c_2^T a^{1,\min} + d_2$, звідки маємо (3.113). $\square$

Доведення. (тверд. 3.10) Віднімемо рівняння $S^{l,\min}: \ \left(x - a^{l,\min}\right)^2 = \left(r^{l,\min}\right)^2$, $l = 1, 2$. У результаті отримаємо рівняння гіперплощини (далі PC E^3): $2(a^{1,\min} - a^{2,\min})x = r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2$. Перепишемо його у формі (3.109):

$$\frac{(a^{1,\min} - a^{2,\min})x}{\|a^{1,\min} - a^{2,\min}\|} = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\|a^{1,\min} - a^{2,\min}\|}. \tag{B.4}$$

E представимо в еквівалентній формі – $E = E^1 \cap E^3 \neq \varnothing$, де E^1 – PSpS і $\exists c_3 \in \mathbb{R}^n, \exists d_3 \in \mathbb{R}^1$ такі, що $E^3 = \{x \in \mathbb{R}^n: \ c_3 x = d_3\}$. З урахуванням (3.112), (B.4), отримуємо формулу (3.115) для визначення необхідних характеристик c_3, d_3 площини E^3. $\square$

Доведення. (теореми 3.8) Умова (3.118) означає, що розмірність складових $\mathcal{C}$–множин менша за розмірність простору, в якому вони задані, задає площини, у яких вони розташовані. Кожна зі складових розкладання PSpS лежить на сім'ї гіперсфер із центрами на прямих, напрямними векторами яких є нормалі до відповідної площини (3.118), що проходять через центр відповідної PSpS. Необхідною умовою того, щоб E була PSpS, є те, що всі ці прямі мають спільну точку O', що і представлено умовою (3.119). (3.120) виражає вимогу, щоб точки усіх складових PSpSs були рівновіддалені від O'. Якщо ця умова виконана, і точка O' визначена однозначно, вона є центром отриманої PSpS, а її параметри задаються формулою (3.121). $\square$

Доведення. (теореми 3.8) *Необхідність.* Зафіксуємо $l \in J_L$. Розглянемо сферу $S_r(a)$, описану навколо E, і разом із множиною E спроектуємо на підпростір: $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_i = 0, \ i \in \{1, ..., n^0_{l-1} - 1, n^0_l + 1, ..., n\}\}$, де n^0_l визначено з (3.9), здійснивши таким чином спуск у простір $\mathbb{R}^{n_l}$. У результаті отримаємо $n_l - 1$-сферу, рівняння якої задовольняють усі точки E^l, звідки слідує, що E^l – PSpS. У силу довільності вибору l, отримуємо, що сім'я (3.97) – PSpSs.

Достатність. Припустимо, що $\mathcal{C}$–множини (3.97) – PSpSs. Рівнянню $\left(x^l - a^l\right)^2 = r^{l2}$ задовольнятимуть не тільки точки E^l, але і всі точки E у представленні (3.123), $l \in J_L$. Додавши усі ці рівняння, отримаємо $\sum\limits_{l=1}^{L} \left(x^l - a^l\right)^2 = \sum\limits_{l=1}^{L} r^{l2}$. Це рівняння гіперсфери, якому задовольняють усі точки множини (3.10), а її параметри – $a = \bigotimes\limits_{l=1}^{L} a^l$, $r = \left(\sum\limits_{l=1}^{L} r^{l2}\right)^{1/2}$. $\square$

Доведення. (теореми 3.10) Виберемо точку $x^0 \in \mathbb{R}^n$ довільним чином. Знайдемо величини (3.128). Побудуємо гіперсферу радіусу r^* із центром у $x'^0 = (x^0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Довизначимо елементи E однією координатою так, щоб

$x'^i = (x^i, y^i) \in S_{r^*}(x'^0), i \in J_{n_E}$. Це можливо для (3.133), але для забезпечення бієкції між E та E' вигляду (3.125), для визначеності виберемо область $y \geq 0$, тобто вважатимемо, що (3.131). За побудовою множина E' є PSpS, заданою у $\mathbb{R}^{n+1}$. □

В.3 Додатки до розділу 4

Доведення. (леми 4.1) Нехай E – WDS, що задовольняє (2.109), (2.110). Треба розв'язати задачу:

$$y^* = arg\min_{x \in E} h\left(x, y\right), \text{ де } h\left(x, y\right) = \|x - y\|_A. \tag{В.5}$$

$$h\left(x, y\right) = \|x - y\|_A = (x-y)^T A (x-y) = ((x-a)+(a-y))^T A \cdot$$
$$((x-a)+(a-y)) = (x-a)^T A(x-a) + 2(x-a)^T A(a-y) +$$
$$+(a-y)^T A \cdot (a-y) \underset{(2.109)}{=} (x-a)^T A(x-a) + 2(x-a)^T A(a-y) + 1.$$

Перший доданок у правій частині даного виразу – константа, отже, (В.5) еквівалентна задачі мінімізації $h'\left(x, y\right) = (x-a)^T A(a-y) = b^T(x)(a-y) = = b^T(x)a - b^T(x)y$, де

$$b(x) = A(x-a). \tag{В.6}$$

Враховуючи, що вектори a, x фіксовані, маємо, що y^* є розв'язком лінійної задачі:

$$y^* = arg\min_{x \in E} h''\left(x, y\right), \tag{В.7}$$

де $h''\left(x, y\right) = -b^T(x)y$, а $b(x)$ задано формулою (В.6). За умовою, ця задача ефективно розв'язувана. □

Доведення. (леми 4.1) Нехай $E = E(a, r)$, тоді у (В.6) – матриця $A = \frac{1}{r^2}E$, отже, (В.6) перетворюється на $b(x) = \frac{1}{r^2}(x-a)$, а функцію h'' у (В.7) можна вважати такою, що $h''(x,y) = (a-x)^T y$. $\square$

Доведення. (теореми 4.1) Для загальної $\mathcal{C}_b$-множини перестановок, що індукує E вигляду (4.2), тут і далі використаємо позначення:

$$E^+ = E \cap \mathbb{R}^n_+ = E_{nk'}(G). \tag{B.8}$$

Виділимо три етапи формування елементів E, позначивши число способів їх здійснити N_1, N_2, N_3 відповідно. На перших двох етапах формується множина E^+. Так, на *першому етапі* фіксуються позиції нульових елементів $x \in E^+$, що можливо зробити $N_1 = C_n^{n_0}$-ма способами. На *другому етапі* решта елементів G переставляються. Це $n - n_0$ додатні елементи G, що утворюють мультимножину $\{e_1^{n_1}, ..., e_\kappa^{n_\kappa}\}$, відповідно, цей етап можна здійснити $N_2 = \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{\kappa} n_i!}$-ма способами. На *третьому етапі* відбувається відображення кожного елемента x утвореної множини (B.8) відносно $n - n_0$ координатних площин, що відповідають ненульовим координатам x. У результаті цього кожна точка $x \in E^+$ породжує 2^{n-n_0} точок E, враховуючи себе. У цілому, множина E^+ збільшиться у $N_3 = 2^{n-n_0}$ разів.

За правилом множення, загальне число способів формування елемента E – $N = N_1 N_2 N_3$, звідки слідує (4.10). $\square$

Доведення. (насл. 4.3) Виберемо $\omega \subset J_n$ і підставимо рівняння (4.21) у відповідне обмеження i-ої спілки (4.25), одержавши обмеження зверху на суму $i' = n - i + 1$-єї координати точок $\Pi_{nk}(G)$: $\sum\limits_{j \notin \omega} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n-i+1} g_{n-j+1}$. Позначивши $\omega' \subset J_n \backslash \omega$, його можна переписати у формі $\sum\limits_{j \in \omega'} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega'|} g_{n-j+1}$. Діючи аналогічно для решти $\omega \subset J_n$, отримуємо H–представлення $\Pi_{nk}(G)$ вигляду (4.26), еквівалентне до (4.25). Враховуючи, що $i' = n - i + 1$ та застосовуючи теорему 4.3, отримуємо, що ненадлишкові спілки мають задовольняти умови теореми 4.3 для $i = n - i' + 1$. $\square$

Доведення. (теореми 4.4) Системи нерівностей (4.25), (4.26) об'єднаємо наступним чином:

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j,\ -\sum_{j\notin\omega} x_j \geq -\sum_{j=1}^{n-|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega\subset J_n,$$

далі формуючи лінійні комбінації пар нерівностей відповідних спілок. У результаті утворюється узагальнена система обмежень $\Pi_{nk}\left(G\right)$, що включає рівняння (4.21) та нерівності

$$\alpha_{|\omega|}\sum_{j\in\omega} x_j + (1-\alpha_{|\omega|})\sum_{j\notin\omega} x_j \geq \alpha_{|\omega|}\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j + (1-\alpha_{|\omega|})\sum_{j=1}^{n-|\omega|} g_{n-j+1}, \tag{B.9}$$

де $\alpha_{|\omega|}\in[0,1]$, $\omega\subset J_n$,

(далі $(\Pi_{nk}\left(G\right).\mathit{HR3(\alpha)})$ [1]), де $\alpha\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Виділимо у сім'ї $(\Pi_{nk}\left(G\right).\ \mathrm{HR3}\ (\alpha))$ те Н–представлення типу $(P.\mathrm{HR}^*)$, у якому опорні гіперплощини до (B.9) ортогональні площині (4.21). Для будь-якого $\omega\subset J_n$ нормаль $\overline{n}_\omega=(n_{\omega,i})_i$ до опорної гіперплощини до (B.9) – $n_{\omega,i}=\begin{cases}\alpha_\omega,\ i\in\omega,\\ \alpha_\omega-1,\ i\notin\omega,\end{cases}$ $(i\in J_n)$, а до гіперплощини (4.21) – $\overline{n}=\mathbf{e}$. Вони ортогональні, якщо $0=\overline{n}_\omega\cdot\overline{n}=|\omega|\cdot\alpha_\omega-(1-\alpha_\omega)\left(n-|\omega|\right)$, звідки

$$\alpha_\omega=\frac{n-|\omega|}{n}. \tag{B.10}$$

У результаті підстановки (B.10) у (B.9) маємо:

$$\frac{|\omega|}{n-|\omega|}\sum_{j\notin\omega} x_j - \sum_{j\in\omega} x_j \leq \frac{|\omega|}{n-|\omega|}\Sigma_G - \frac{n}{n-|\omega|}\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j.$$

У позначеннях $i=|\omega|$ остаточно маємо (4.28), (4.29). □

---

[1] $(\Pi_{nk}\left(G\right).\mathrm{HR1})$, $(\Pi_{nk}\left(G\right).\mathrm{HR2})$ – окремі випадки $(\Pi_{nk}\left(G\right).\mathrm{HR3}(\alpha))$, що відповідають $\alpha=\mathbf{e}$ та $\alpha=\mathbf{0}$ у $\mathbb{R}^{n-1}$ відповідно

Доведення. (теореми 4.11) Введемо у розгляд допоміжну загальну $\mathcal{C}_b$-множину n-розміщень $\overline{E}$, що індукована мультимножиною:

$$\overline{G} = G \cup \{0\}^{n-n_0} = \{0^n, g_{n-n_0+1}, ..., g_n\} = \{0^n, e_1^{n_1}, ..., e_\kappa^{n_\kappa}\}. \tag{B.11}$$

Вона має вигляд $\overline{E} = E^n_{\tilde{\eta},k}\left(\overline{G}\right)$, де $\tilde{\eta} = \left|\overline{G}\right| = 2n - n_0$, а її опуклою оболонкою є загальний багатогранник розміщень

$$\overline{P} = conv\,\overline{E} = P \cap \mathbb{R}^1_+ = \Pi^n_{\tilde{\eta}k}\left(\overline{G}\right).$$

За теоремою 4.6, ($\overline{P}$.IHR) є таким:

$$x \geq \mathbf{0}; \tag{B.12}$$

$$\sum_{j\in\omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \in \overline{I},\ \text{де } I = \overline{2, n_\kappa} \cup \overline{n-n_0, n-1}. \tag{B.13}$$

Дійсно, з урахуванням (B.11) підсистема (4.31) набуває вигляду $\sum\limits_{j\in\omega} x_j \leq \sum\limits_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \omega \subseteq J_n$. За теоремою 4.6, надлишковими в ній є: а) нерівності (4.31) спілок $|\omega| \in \overline{2,n}$, у результаті чого у ($\overline{P}$.IHR) залишається лише спілка (B.12); б) нерівності (4.31) спілок $|\omega| \in \overline{2, n_\kappa}$ і $|\omega| \in \overline{2, n_\kappa} \cup \overline{\eta - n, n-1} = = \overline{2, n_\kappa} \cup \overline{n-n_0, n-1}$. Отже, ($\overline{P}$.IHR) має вигляд (B.12), (B.13).

Перейдемо до розгляду багатогранника P. Подібно до способу формування E з E^+, він утворюється з багатогранника $\overline{P}$ відображенням останнього відносно всіх координатних площин та їх комбінацій, у результаті чого підсистема (B.13) перетворюється на модульне обмеження (4.43), а (B.12) зникає. Система (4.43) не містить надлишкових обмежень, інакше, в силу симетрії, це означало би наявність надлишкових обмежень у системі (B.13). $\square$

Доведення. (теореми 4.12) До довільної $\mathcal{PS}\ E$, що індукована G, зокрема до $E = E_{nk}(G)$, застосовна формула (2.121), яку можна узагальнити так:

$$\|x - a\mathbf{e}\|_\alpha \underset{E}{=} \|g - a\mathbf{e}\|_\alpha, \tag{B.14}$$

де $a \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in [1, \infty)$. При $\alpha = 1$ (B.14) задає кусково-лінійну поверхню, описану навколо E. У інших випадках (B.14) задаватиме строго опуклу поверхню з сім'ї (4.46). □

Доведення. (теореми 4.14) Перепишемо рівняння (4.21), (4.48) у формі

$$x^T\mathbf{e} - g^T\mathbf{e} = 0,\ \|x - a\mathbf{e}\|^2 - \|g - a\mathbf{e}\|^2 = 0 \tag{B.15}$$

та скомбінуємо наступним чином:

$$\lambda(\|x - a\mathbf{e}\|^2 - \|g - a\mathbf{e}\|^2) + (1-\lambda)(x^T\mathbf{e} - g^T\mathbf{e})^2 = 0, \text{ де } \lambda \in (0,1). \tag{B.16}$$

За побудовою (B.16) є сім'єю еліпсоїдів, описаних навколо $E_{nk}(G)$. □

Доведення. (насл. 4.6) Вибираючи у (B.15) $a = \mathbf{0}$, маємо $x^T\mathbf{e} - m = 0$, $\|x\|^2 - m = 0$, відповідно (B.16) перетворюється на

$$\lambda(\|x\|^2 - m) + (1-\lambda)(x^T\mathbf{e} - m)^2 = 0, \text{ де } \lambda \in (0,1).$$

Зокрема, при виборі $\lambda = 0.5$ рівняння описаного еліпсоїда матиме вигляд (4.118). □

Доведення. (теореми 4.15) Для побудови строго опуклої поверхні, описаної навколо E, скористаємося тим, що $E^n_{n+1,k}(G) \simeq E_{n+1,k}(G)$ [369].

Згідно з (4.21), (4.46),

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \underset{E_{n+1,k}(G)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} g_i; \tag{B.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |x_i - a|^\alpha \underset{E_{n+1,k}(G)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} |g_i - a|^\alpha. \tag{B.18}$$

Виключимо x_{n+1} із (B.18) за допомогою (B.17), (4.55). У результаті даного лінійного перетворення утворилася поверхня (4.55), описана навколо E, що є строго опуклою $\forall\alpha \in (1,\infty)$, відповідно, множина $E^n_{n+1,k}(G)$ є SLS. $\square$

Доведення. (леми 4.3) Оскільки $E = B_n(m_1,m_2) \subseteq B_n$, усі поверхні, наведені у прикл. 2.1, є описаними навколо E. Зокрема, (2.119) набуває вигляду: $\|x - \frac{1}{2}\mathbf{e}\|_\alpha \underset{E}{=} \|\mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{e}\|_\alpha = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|_\alpha = \frac{n^{1/\alpha}}{2}$, $\alpha \in (1,\infty)$. $\square$

Доведення. (леми 4.4) З леми 4.3 слідує, що $B_n(m_1,m_2) \subset S_{\sqrt{n}/2}(0.5{\cdot}\mathbf{e})$. Крім того, за теоремою 4.2, багатогранник $PB_n(m_1,m_2)$ повновимірний, отже, за теоремою 3.7 виконана умова (3.96), яка набуває вигляду (4.59). $\square$

Доведення. (леми 4.5) Для $E = B_n(m_1,m_2)$ рівняння описаного еліпсоїда (2.109) має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - 0.5)^2}{b_i^2} = const,$$

де $const \underset{x\in E}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{0.5^2}{b_i^2} = \frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i^2}$. $\square$

Доведення. (теореми 4.18) У силу включення (3.19), на $E^e_n(G)$ розповсюджуються результати теорем 4.12-4.14, отже, $E^e_n(G)$ належить класам PSpSs, PESs, PSsSs. Згідно з теоремою 4.2, при переході від $E_n(G)$ до $E^e_n(G)$ розмірність $\mathcal{C}_b$-множини не зменшилась, отже, за лемою 3.1 $S^{\min}$ для $E_n(G)$ і $E^e_n(G)$ ідентичні. $\square$

Доведення. (теореми 4.19) Доведення аналогічно теоремі 4.18 і розповсюджує результати теореми 4.17 з класу $B_n(m_1,m_2)$ на клас B^h_n. $\square$

Доведення. (теореми 4.20) (3.83) задає сім'ю сильно опуклих при $\alpha \in (1,\infty)$ суперсфер, описаних навколо $E^{\pm}_{nk}(G)$, отже, умова (4.60) виконана. $\square$

Доведення. (насл. 4.7) $\forall x \in E^{\pm}_{nk}(G)$ $\|x\| = \|g\|$, тобто E вписана у гіперсферу (4.49). Згідно з теоремою 4.2, E – повновимірна $\mathcal{C}_b$-множина, отже, описана гіперсфера для неї визначена єдиним чином, і вона задана параметрами (4.61). $\square$

Доведення. (теореми 4.22) Доведення від супротивного проведемо в два етапи. Припустимо існує ще один клас $\mathcal{C}_b$-множини розміщень (далі *Клас 3*) вигляду:

$$E^n_{\eta' k'}(G') = vert\ \Pi^n_{\eta' k'}(G'). \tag{B.19}$$

Виключивши умови (2.59), $\eta = n+1$, що характеризують Класи 1, 2, Множина (B.19) з Класу 3 має задовольняти обмеження:

$$k' > 2,\ \eta' > n+1.$$

Етап 1. Нехай E – множина, що належить одночасно Класам 1, 2, тобто $E = E^n_{n+1,2}(G)$. Сформуємо з E множину E' вигляду (B.19) додаванням у $n+1$-елементну мультимножину E.IM єдиного елемента $e' \in (e_1, e_2)$. Нехай G'=E'.IM, $\mathcal{A}'$=E'.GS= $\{e_1, e', e_2\}$: $\eta' = n+2$, $k' = 3$,

$$G' = \{g'_i\}_{i \in J_{\eta'}} = \{e_1^{\eta_1}, e', e_2^{\eta_2}\} = \left\{e_1^{\eta_1}, e', e_2^{n-\eta_1+1}\right\}. \tag{B.20}$$

Покажемо, що E' – не є VLS. Розглянемо $\Pi' = conv\ E'$ та $x' \in E'$: $x' = (g'_i)_{i \in J_{n+1} \setminus \{1\}}$. Згідно з (B.20)

$$x' = \left(e_1^{\eta_1 - 1}, e', e_2^{n-\eta_1}\right). \tag{B.21}$$

Покажемо, що

$$x' \notin vert\ \Pi'. \tag{B.22}$$

Скористаємося критерієм вершини загального багатогранника розміщень (див. теорему 4.21). Зафіксуємо точку $x \in E^n_{\eta' k'}(G')$, проведемо упорядкування її координат за неспаданням і визначимо параметри r', s' :

$$\begin{aligned} &x_i = g_i,\ i \in J^0_{r'},\ x_{r'+1} > g_{r'+1}; \\ &x_{n-i'+1} = g_{\eta-i'+1},\ i' \in J^0_{s'},\ x_{n-s'} < g_{\eta-s'}. \end{aligned} \tag{B.23}$$

r', s' пов'язані з параметрами r, s, заданими у (4.64), (4.65), наступним чином: $r' \geq r,\ s' \geq s,\ s' + r' \geq s + r$. Оскільки координати точки x' упорядковані за неспаданням, (B.23) можна застосувати безпосередньо до x', G', E'. Звідси маємо $r' = \eta_1 - 1, s' = n - \eta_1$, отже, $n > s' + r' \geq s + r$, тобто умова (4.64), що x' – вершина Π', не виконана, отже, має місце (B.22).

Таким чином, показано, що додавання одного елемента в мультимножину, що індукує вершинно розташовану множину розміщень $E^n_{n+1,k}(G)$, приводить до формування $\mathcal{C}_b$-множини розміщень E', що вже не є вершинно розташованою. При цьому, разом із точкою (B.21), усі е–конфігурації перестановок, індуковані мультимножиною $\left\{e_1^{\eta_1-1}, e', e_2^{n-\eta_1}\right\}$, не є вершинами Π'.

Етап 2. Тепер розглянемо довільну множину $E = E^n_{\eta k}(G)$ із Класу 3. По аналогії з (B.20), введемо в розгляд підмультимножину G', що породжується трьома числами:

$$G' = \left\{e_1^{\eta'_1}, e', e_k^{\eta'_k}\right\}, \text{ де } \eta' = |G'| \leq n+2, k' = 2, e' = e_j,\ 1 < j < k.$$

Розглянемо допоміжну $\mathcal{C}_b$-множину розміщень, індуковану G':

$$E' = E^{n'}_{\eta' 3}(G'),\ n' = \eta' - 2. \tag{B.24}$$

Якщо $n' = n$, приходимо до попереднього випадку, згідно з яким (B.24) – не є VLS, відповідно, E – також, адже $E' \subseteq E$.

Припустимо тепер, що $n' < n$. Як було показано на Етапі 1, $y' = = \left(e_1^{\eta'_1-1}, e', e_k^{\eta'_k-1}\right) \notin vert\ \Pi^{n'}_{\eta' 3}(G')$, отже, y' представляється опуклою лінійною комбінацією інших точок E'.Це означає, що $\exists\ J, \exists\ \alpha_j > 0, j \in J$:

$\sum\limits_{j\in J}\alpha_j = 1$, $Y = \left\{y^j\right\}_{j\in J} \subseteq vert\ \Pi^{n'}_{\eta' 3}\left(G'\right)$, $y' = \sum\limits_{j\in J}\alpha_j y_j$.

Сформуємо $G'' \subseteq G : \ G' \subset G''$, $|G''| = n+2$, $G'' = G' \cup \{g_{j_i}\}_{i\in J_{n-n'}}$. Нехай $x' = (y', \overline{g})$, $x^j = \left(y^j, \overline{g}\right)$, $j \in J$, де $\overline{g} = (g_{j_i})_{i\in J_{n-n'}}$. За побудовою $\{x^j\}_{j\in J} \subseteq E$, а x' представляється опуклою лінійною комбінацією $x' = \sum\limits_{j\in J}\alpha_j x^j$ інших точок E, а саме $x' \notin vert\ \Pi^n_{\eta k}\left(G\right)$. Звідси слідує, що E – не є VLS. $\square$

Доведення. (теореми 4.29) Спочатку сформуємо множину суміжних вершин багатогранника P точок E^+, а потім розповсюдимо результат на усю E.

Введемо позначення $N_{M,\widehat{P}}\left(x\right)$ для множини вершин до заданої точки x – вершини деякого багатогранника $\widehat{P}$ – серед точок множини $M \subseteq vert\ \widehat{P}$, а позначення $\mathcal{R}_{M,\widehat{P}}\left(x\right)$ – для кількості таких вершин:

$$N_{M,\widehat{P}}\left(x\right) = \left\{y \in M : y \overset{\widehat{P}}{\leftrightarrow} x\right\}, \mathcal{R}_{M,\widehat{P}}\left(x\right) = \left|N_{M,\widehat{P}}\left(x\right)\right|.$$

Так, $N_{E,P}\left(x\right)$, $\mathcal{R}_{E,P}\left(x\right)$ буде околом та степенем вершини багатогранника P, а $N_{E^+,P}\left(x\right)$ включатиме суміжні вершини P серед точок E^+.

Випадок 4.1. Розглянемо довільну точку $x \in E^+$. Проведемо розбиття множини $N_{E,P}\left(x\right)$:

$$N_{E,P}\left(x\right) = N_{E^+,P^+}\left(x\right) \cup N_{E\backslash E^+,P}\left(x\right). \tag{B.25}$$

Перша його складова – це множина вершин багатогранника P^+, суміжних з x, і це є $N_{E,P^+}\left(x\right) = N_{E^+,P^+}\left(x\right)$. Друга містить решту суміжних до x вершин P. За теоремою 4.23, $N_{E,P^+}\left(x\right)$ включатиме e–конфігурації перестановок, що утворені з x $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-транспозиціями ($i \in J_{\kappa-1}$), а їх кількість визначається за формулою (4.66):

$$\mathcal{R}_{E,P^+}\left(x\right) = \mathcal{R}_{E^+,P^+}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{\kappa-1} n_i n_{i+1}. \tag{B.26}$$

Щоб сформувати $N_{E\backslash E^+,P}\left(x\right)$, скористаємося теоремою 4.25, адже x є вершиною обох багатогранників $\overline{P}$ та P.

Здійснимо розбиття $N_{\overline{E},\overline{P}}(x)$ на дві частини:

$$N_{\overline{E},\overline{P}}(x) = N_{E^+,P^+}(x) \cup N_{\overline{E}\setminus E^+,\overline{P}}(x)\,, \tag{B.27}$$

остання з яких містить точки, утворені з x заміною найменшої координати e_1 нулем. Число таких суміжних вершин дорівнюватиме кратності e_1, отже, $\mathcal{R}_{\overline{E}\setminus E^+,\overline{P}}(x) = n_1$. Продовжуючи ребра $[x, y]$ симетрично точкам $y \in N_{\overline{E}\setminus E^+,\overline{P}}(x)$, точка x породжуватимемо n_1 точок E шляхом зміни знака однієї координати, рівної e_1, на протилежний. Це і буде шукана множина $N_{E\setminus E^+,P}(x)$. Отже,

$$\mathcal{R}_{E\setminus E^+,P}(x) = n_1. \tag{B.28}$$

У цілому маємо, що у Випадку 4.1 для довільної $x \in E^+$ множина $N_{E,P}(x)$ утворюється з x суміжною транспозицією або заміною знака мінімальної за абсолютною величиною координати на протилежний.

З (B.27) маємо:

$$\mathcal{R}_{E,P}(x) = \mathcal{R}_{E^+,P^+}(x) + \mathcal{R}_{E\setminus E^+,P}(x)\,. \tag{B.29}$$

Підстановка виразів (B.26), (B.28) у (B.29) дає таке: $\mathcal{R}_{E,P}(x) = n_1 + \sum\limits_{i=1}^{\kappa-1} n_i n_{i+1}$. Те саме стосується решти точок E^+, тобто в цьому випадку вірна формула:

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm II}(G)) = n_1 + \sum_{i=1}^{\kappa-1} n_i n_{i+1},$$

яка, з урахуванням (4.4), набуває форму (4.70).

Нехай тепер x – довільна точка E. Крім абсолютних значень координат x, при побудові $N_{E,P}(x)$ будуть враховуватися і знаки координат x. Для x і суміжних до неї вершин ці знаки співпадатимуть, за винятком максимум однієї координати, абсолютна величина якої e_1.

Отже, враховуючи симетрію E, у Випадку 4.1, для вершини x критерій суміжності вершин багатогранника P виглядає таким чином: $\forall x \in E$ множина $N_{E,P}(x)$ включає точки, утворені з x двома шляхами: а) Способом 4.1, тобто заміною в x двох координат $x_i, x_j, i \neq j$, абсолютні значення яких є послідовними елементами $\mathcal{A}$ – основи G – значеннями $sgn\, x_i \cdot |x_j|, sgn\, x_j \cdot |x_i|$ відповідно; б) Способом 4.2, тобто зміною знака координати, рівної за модулем e_1, на протилежний. При цьому степінь регулярності довільної вершини P визначається за формулою (4.70).

Випадок 4.2. Знову розглянемо точку $x \in E^+$. Множина суміжних до неї вершин також представимо у вигляді (В.25). Але, на відміну від Випадку 4.1 і в силу (В.8), формула (В.26) перетвориться на таку:

$$\mathcal{R}_{E,P^+}(x) = \sum_{i=0}^{\kappa-1} n_i n_{i+1}. \tag{B.30}$$

Щодо $N_{E \setminus E^+,P}(x)$, то, оскільки мінімальна координата x – нуль, для довільної точки $y \in N_{E^+,P'}(x)$ ребра $[x, y]$ вироджуються у точку x, від якої ребра прямують як в область $\mathbb{R}^n_+$, так і в області

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{n,i}_{\leq 0} = \left\{x' \in \mathbb{R}^n : \ x_i^{'} \leq 0; \ x_j^{'} \geq 0, \ j \neq i\right\}, \\ &\text{де } \ i \in I^x = \{i \in J_n : \ x_i = 0\}. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Для довільного $i \in I^x$ кількість таких ребер, що прямують в область $\mathbb{R}^{n,i}_{\leq 0}$, рівна n_1. Вони утворюються з x $0 \leftrightarrow e_1$-транспозицією координат x_i, x_j, де $j \notin I^x$, із подальшою зміною знака x_i на протилежний. Оскільки, відповідно до кратності нульового елемента, число областей вигляду (В.31) – n_0, а загальна кількість одержаних таким чином суміжних з x вершин у суміжних до $\mathbb{R}^n_+$ областях:

$$\mathcal{R}_{E\setminus E^{+},P}\left(x\right)=n_0n_1. \tag{B.32}$$

Підставляючи (В.30), (В.32) у (В.29), маємо $\mathcal{R}_{E,P}\left(x\right)=n_0n_1+\sum\limits_{i=0}^{\kappa-1}n_in_{i+1}$, тобто формула

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm I}\left(G\right))=2n_0n_1+\sum\limits_{i=1}^{\kappa-1}n_in_{i+1},$$

вірна $\forall x\in E^{+}$, а з урахуванням (4.4) вона набуває вигляду (4.69). У силу симетрії E і P ця формула буде вірною для всіх точок E. При цьому критерій суміжності вершин P виглядатиме таким чином: для довільної $x\in E$ множина $N_{E,P}\left(x\right)$ включає точки, утворені з x одним з двох способів: а) заміною в x двох координат $x_i,x_j,i\neq j$, абсолютні значення яких є послідовними елементами $\mathcal{A}$, значеннями $sgn\,x_i\cdot\left|x_j\right|,sgn\,x_j\cdot\left|x_i\right|$ відповідно, тобто Способом 4.1; б) Способом 4.3, а саме транспозицією нульової координати і координати, рівної за модулем e_1, із подальшою зміною знака ненульової координати на протилежний. У результаті маємо $\forall x_i,x_j{:}x_i=0$, $\left|x_j\right|=e_1$ нові значення цих координат $x_i=-sgn\,x_j\cdot e_1$, $x_j=0$. Степінь регулярності вершин P визначається за формулою (4.69). $\square$

Доведення. (насл. 4.33) Нехай κ визначено з (4.4). У силу теореми 4.2, способу формування $E_{nk}^{\pm}\left(G\right)$ з $E_{nk}\left(G\right)$, а також того факту, що степінь регулярності $\mathcal{R}'$ вершини відповідного $\mathcal{C}_b$–багатогранника перестановок P^{+} можна знайти за формулою (4.66). Крім того, вірна оцінка $\mathcal{R}'\geq n-1$, звідки одержуємо:

– у Випадку 4.1 $\mathcal{R}'=\sum\limits_{i=1}^{\kappa-1}n_in_{i+1}$, а формула (В.30) може бути переписана у вигляді $\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm}\left(G\right))=n_1+\mathcal{R}'$, звідки видно, що $\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm}\left(G\right))=n\Leftrightarrow n_1=1$, $\mathcal{R}'=n-1$, тобто відповідний $\Pi_{nk}\left(G\right)$ – простий (див. теорему 4.30);

– у Випадку 4.2 $\mathcal{R}'=\sum\limits_{i=0}^{\kappa-1}n_in_{i+1}$, і формула (В.33) переписується у вигляді $\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm}\left(G\right))=n_0n_1+\mathcal{R}'$, звідки слідує $\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm}\left(G\right))=n\Leftrightarrow n_0n_1=1$, $\mathcal{R}'=n-1$, тобто $\Pi_{nk}\left(G\right)$ – простий і $n_0=n_1=1$.

Таким чином, формула (4.73) виражає умови простоти $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$. $\square$

Доведення. (теореми 4.33) Розглянемо точку $g \in E$. Діаметрально протилежною до неї буде точка $g' = (g_n, g_{n-1}, ..., g_1)$, кількість інверсій у якій дорівнює C_n^2. Точка $g' \in E$, коли вона містить парну кількість інверсій, тобто C_n^2 має бути парним. Так само, і для інших точок $x = (x_1, ..., x_n) \in E$ виконання умови $n(n-1) \equiv 0 \mod 4$ забезпечує, що $y = (x_n, ..., x_1) \in E$. Друга умова – це умова (4.75) центральної симетричності $E_n(G)$, підмножиною якої є E. $\square$

Доведення. (теореми 4.35) Визначимо рівневість $E = B_n^{\pm}(m)$ у напрямку нормалей до гіперграней, що непаралельні координатним площинам. У силу симетрії, достатньо знайти $m_{(\mathbf{e})}(E)$. $h(x) \underset{x \in E}{\in} \{-m, -m+2, ..., m-2, m\}$, звідки видно, що $m_{(\mathbf{e})}(E) = m+1$. $PB_n^{\pm}(m)$ має також гіперграні, паралельні координатним площинам при $m \in J_{n-1} \backslash \{1\}$, і за цими напрямками E – трирівнева. Таким чином, (4.79) має місце. $\square$

Доведення. (теореми 4.47) Включення $E^N \subseteq \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_{nk}}(\overline{n})$ слідує з побудови E^N та виконано (2.55), адже

$$\forall x \in E^N \, \mathbf{x}_j \in B_k(1), j \in J_n; \; \mathbf{x}'_i \in B_n(n_i), i \in J_k, \tag{B.33}$$

Припустимо, що включення $E^N \supseteq \mathbf{B_{kn}}(\mathbf{e}) \cap \mathbf{B'_{nk}}(\overline{n})$ не виконане. Це може статися лише у випадку, коли $\exists x^0 \in E^N$, у якій не виконана (4.98) або (4.99). Перше не може статися, адже за побудовою E^N – множина перестановок одиничних векторів. Друге також неможливо, оскільки при перестановці векторів порядок слідування координат не міняється, отже, сума відповідних їх координат залишається незмінною. $\square$

Доведення. (теореми 4.52) Зважаючи на заув. 4.11, для доведення даної теореми достатньо показати, що для множин перших трьох класів у (4.94) існує описаний еліпсоїд, відмінний від гіперсфери.

Нехай множина $E^N = \mathcal{E}_{nk}(G)$. Скористаємося її представленням (4.95), звідки слідує її належність до двох множин, кожна з яких є декартовим добутком множин множин класу $B_n(m)$. Згідно з насл. 4.6, $B_n(m)$ – PES. З іншого боку, декартовий добуток PESs є PES (див. насл. 2.5 у [369]), відповідно $\mathbf{B_n}(\mathbf{e}), \mathbf{B'_m}(\overline{n})$, а E^N – PES як підмножина PESs.

$\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^e$ – PESs як окремий випадок та підмножина E^N. □

Доведення. (теореми 4.53) $P^N = \mathcal{P}_{nk}(G)$ задано у просторі $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Ранг матриці системи (4.98), (4.99) дорівнює $n + m - 1$, звідки $\dim \mathcal{P}_{nk}(G) \leq n$ $\leq \cdot m - n - m + 1$.

З іншого боку, точка $a^{\min}$ у представленні $\hat{E}^N = \hat{E}_{nk}(G)$ за побудовою задовольняє обмеження-рівності (4.98), (4.99) строго, а обмеження-нерівності (4.108), (4.109) – нестрого, отже, $a^{\min} \in int\, P$. Звідси слідує, що $\dim \mathcal{P}_{nk}(G) \geq n \cdot m - n - m + 1$. У сукупності маємо (4.120). □

Доведення. (тверд. 4.11) ($\mathcal{P}_{nk}^{\pm}(G)$.IHR) не містить жодного рівняння, а точка $x^0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ задовольняє усі його обмеження як строгі нерівності, отже, розмірність багатогранника збігається із розмірністю простору, у якому його визначено. □

Доведення. (теореми 4.54) По кожній координаті E^N – дворівнева, а усі гіперграні P^N паралельні координатним площинам, отже, $lev\, E^N = 2$. □

Доведення. (теореми 4.54) Нехай $E^N = \mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$, вона належить $\mathcal{T}$Ss і є трирівневою по кожній координаті. Враховуючи те, що кожна подвійна нерівність (4.111) визначає пару гіперграней, звідси маємо оцінку:

$$lev\, E^N \geq 3. \tag{B.34}$$

Враховуючи (4.112) та центральну симетрію P^N, для визначення рівневості E^N у напрямках нормалей до решти гіперграней достатньо обмежитися нормалями до

$$\begin{aligned} &\alpha: \ \sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 1; \\ &\beta_i: \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le n_i, \ i \in J_m. \end{aligned} \tag{B.35}$$

(далі $\overline{n}_\alpha$, $\overline{n}_{\beta_i}$, $i \in J_m$).

$m_{\overline{n}_\alpha} = 2$, адже при заміні знаку ненульової координати вектора-стовпця X, міняє знак. Таким чином, $1, -1$ – єдині значення, що набуває $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{i1}$ на E. Зафіксуємо i у (B.35), функція $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ на E^N набуває значення $\{-n_i, -n_i + 2, ..., n_i - 2, n_i\}$, кількість яких дорівнює $n_i + 1$. Таким чином, $m_{\overline{n}_{\beta_i}} = n_i + 1$, $i \in J_m$. Враховуючи це та переходячи до максимуму знайдених величин, отримуємо формулу (B.34). □

Доведення. (теореми 4.39)

Для $E_n^e(G)$ та B_n^h запропонуємо $MLP(E_n^e(G), c)$, $MLP(B_n^e, c)$, виходячи зі способу їх формування з множин $E_n(G)$, B_n. Неважко бачити, що у багатограннику $\Pi_n(G)$ усі $n-1$ вершин, суміжних до парної e–конфігурації перестановок, є непарними e–конфігураціями перестановок і навпаки. Те саме стосується гіперкуба PB_n й напівкуба PB_n^h: у багатограннику PB_n кожний парний булевий вектор має n суміжних вершин, що є непарними булевими векторами, і навпаки.

Крім того, степінь регулярності вершини поліноміальна за n згідно з (4.67), (4.68). Зазначені особливості дозволяють запропонувати єдиний поліноміальний алгоритм розв'язання $LP(E, c)$ для $E \in \{E_n^e(G), B_n^h\}$ [369], ґрунтуючись на тому, що її надмножина $E' \in \{E_n(G), B_n\}$ – WDS, і, тим самим, довести дану теорему.

Схема розв'язання $LP(E, c)$ $(E = E_n^e/B_n^h)$.

Крок 1. Розв'язати $LP(E', c)$ на добре описаній власній надмножині $E' \supset E$. Якщо $x^{lin,E'} \in E$, задачу $LP(E, c)$ розв'язано, а саме $x^{lin,E} = x^{lin,E'}$,

$z^{lin,E} = z^{lin,E'}$, інакше перейти до Кроку 2.

Крок 2. Знайти множину $N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)$ суміжних вершин з $x^{lin,E'}$ у багатограннику $P' = convE'$, обрати мінімальне зі значень $c^T x$ із досягнутих у цьому околі: $z^{lin,E} = \min\limits_{x \in N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)} c^T x,\ x^{lin,E} = \arg\min\limits_{x \in N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)} c^T x.$

При застосуванні до вказаних двох класів $\mathcal{C}_b$-множин, цей алгоритм перетворюється на $MLP(E_n^e(G), c)/MLP(B_n^e, c)$, де $E = E_n(G)/B_n$ відповідно. $\square$

Доведення теореми 4.41 ґрунтується на такі лемі.

Лема B.1. Якщо функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+$ – сепарабельна: $f(x) = f_1(x_1, ..., x_{n_1}) \circ f_2(x_{n_1+1}, ..., x_{n_1+n_2}) \circ ... \circ f_L(x_{n-n_L+1}, ..., x_n)$, де $\circ \in \{+, *\}$, $f_l : \mathbb{R}^{n_l} \to \mathbb{R}^1_+$, $l \in J_L$, то розв'язок задачі оптимізації $x^* = \arg\min\limits_{x \in E \subseteq \mathbb{R}^n} f(x)$, $z^* = f(x^*)$ може бути знайдено наступним чином:

$$x^* = \prod_{l=1}^{L} x^{*l}, z^* = z^{*1} \circ z^{*2} \circ ... \circ z^{*L}, \tag{B.36}$$

$$\text{де } x^{*l} = \arg\min_{x^l \in E^l \subseteq \mathbb{R}^{n_l}} f_l(x),\ z^{*l} = f(x^{*l}), \tag{B.37}$$

$$E^l = \{x^l \in E(I_l) \subset \mathbb{R}^{n_l}\},\ l \in J_L,$$

$E(I_l)$ визначено з (2.81), I_l задовольняє (3.8), $l \in J_L$.

Доведення. (теореми 4.41) Згідно з умовою, розв'язки (B.37) допоміжних лінійних задач можуть бути знайдені за поліноміальний час. Лінійна функція сепарабельна, тому, за лемою B.1, розв'язок лінійної задачі на E вигляду (3.10) може бути знайдений за формулою (B.36), яка набуває вигляду:

$$x^* = \prod_{l=1}^{L} x^{*l}, z^* = \sum_{l=1}^{L} z^{*l}. \tag{B.38}$$

Для застосування (B.38) здійснюється L кроків, на кожний з яких потрібен поліноміальний час. Отже, в цілому, час на відшукання (B.38) буде поліноміальним за n. $\square$

Доведення. (теореми 4.42) Ми встановили, що усі множини (3.14), (3.15) є WDSs. Крім того, (3.14) – PSpSs, а серед (3.15) більшість також PSpSs. Виключенням є лише $E^n_{\eta,k}(G)$ для $k > 2$. Тож, згідно з насл. 4.1, для даних $\mathcal{C}_b$-множин, що є WDSs та PSpSs, задача пошуку y^* еквівалентна $LP(E, a-x)$, де a – центр описаної навколо E гіперсфери, x – точка, з якої здійснюється проектування. □

Доведення. (насл. 4.20) Полікомбінаторні $\mathcal{C}_b$-множин, що породжені поліедрально-сферичними множинами з сім'ї (3.14), (3.15), є також PSpSs згідно з теоремою 3.9. Крім того, вони є WDSs згідно з насл. 4.18. У відповідності із насл. 4.1, Задача 4.13 для них розв'язується за поліноміальний час.

Якщо полікомбінаторна $\mathcal{C}_b$-множина E задовольняє умови наслідку, при цьому серед породжуючих її множин є $\overline{E}^n_k(G)$, $k > 2$, для розв'язання Задачі 4.13 можна скористатися сепарабельністю функції $\|y^* - x\|^2$, лемою В.1, теоремою 4.42 та насл. 4.19. □

В.4 Додатки до розділу 5

Доведення. (теореми 5.6) Нехай E – дворівнева множина. Зафіксуємо $F \in \mathbf{F}$, тоді:

$$\exists\, b_F \in \mathbb{R}^1 : \ H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b_F\} \in \mathbf{H}.$$

Згідно з тверд. 2.5, окрім значення b_F, функція $h(x) = \overline{n}_F^T x$ набуває ще одного значення на E. Позначимо його b'_F, а відповідну йому гіперплощину – H'_F. У результаті маємо: $\forall F \in \mathbf{F}\ \exists b_F, b'_F$, $b_F \neq b'_F$, $H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b_F\}$, $H'_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b'_F\}$, $E^1(\overline{n}_F) \subset H_F$; $E^2(\overline{n}_F) \subset H'_F$, зокрема,

$$\forall\, x \in E, \forall\, F \in \mathbf{F} \quad \overline{n}_F^T x \in \{b_F, b'_F\}. \tag{B.39}$$

Введемо позначення $a_F = \frac{b_F + b'_F}{2}$, $\delta_F = \frac{|b_F - b'_F|}{2}$ і перепишемо (B.39) у вигляді:

$$|\overline{n}_F^T x - a_F| \underset{E}{=} \delta_F,\ F \in \mathbf{F}. \tag{B.40}$$

Враховуючи, що $\delta_F > 0$, $\forall\, F \in \mathbf{F}$, (B.40) представимо в еквівалентній формі, поділивши кожне з рівнянь (B.40) на відповідне δ_F і отримавши (8.14), де $\overline{n}_F'^T = \frac{\overline{n}_F}{\delta_F}$, $a_F' = \frac{a_F}{\delta_F}$.

Зокрема, для $\kappa = 1$ (8.14) перетворюється на (5.46). Подібним чином діємо з системою (2.95), представляючи її у формі:

$$|\overline{a}_i'' x - a_{i0}''|^\kappa = 0,\ i \in J_{n''}. \tag{B.41}$$

Зафіксувавши деяке $\kappa \in \mathbb{R}^1_{>0}$, додамо усі рівняння (8.14) і (B.41), отримавши (5.47), де $f_0(x,\kappa)$ визначено з (5.45).

Функція $f_0(x,\kappa)$ є неопуклою при $\kappa \in (0,1)$ і опуклою при $\kappa \geq 1$, зокрема, сильно опуклою, отже, і строго опуклою, при $\kappa \in (1,\infty)$, що забезпечується виглядом функції, способом її побудови та обмеженістю області $S^\kappa = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f_0(x,\kappa) - |\mathbf{F}| = 0\}$.

Таким чином, для фіксованого $\kappa \in (1,\infty)$, функція $f_0(x,\kappa) - |\mathbf{F}|$ є строго опуклою і набуває нульового значення на E. А це означає, що S^κ є строго опуклою поверхнею, відповідно, E дозволяє PSR з участю S^κ. $\square$

Доведення. (насл. 5.6). Як описаний еліпсоїд можна вибрати поверхню S^2 із сім'ї (5.48). Так, якщо у (2.95) $n'' = 0$, її рівнянням буде: $\sum\limits_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F'^T x - a_F')^2 = |\mathbf{F}|$. Перепишемо його у вигляді:

$$x^T \left(\sum_{F\in\mathbf{F}} \overline{n}_F' \overline{n}_F'^T \right) x - 2 \left(\sum_{F\in\mathbf{F}} a_F' \overline{n}_F'^T \right) x + \sum_{F\in\mathbf{F}} a_F'^2 = |\mathbf{F}| \tag{B.42}$$

і представимо у формі (2.109), отримавши (5.49). При $n'' > 0$ у (B.42) з'являється ще один опуклий квадратичний доданок. За побудовою, сформована поверхня є обмеженою, квадратичною та опуклою, отже, вона є еліпсоїдом. $\square$

Доведення. (теореми 5.7) Рівняння поверхонь S^2, S^4 має вигляд (5.61), (5.62).

Зафіксуємо $x^* \in S^2$ і покажемо, що $f_0(x^*,4) \geq f_0(x^*,2)$, а також $\forall\, x^* \in S^2 \setminus E \quad f_0(x^*,4) > f_0(x^*,2)$. З урахуванням (5.61), маємо:

$$f_0(x^*,4) \geq |\mathbf{F}|, \tag{B.43}$$

$$\forall\, x^* \in S^2 \setminus E \quad f_0(x^*,4) > |\mathbf{F}|. \tag{B.44}$$

Сформуємо множину $I \subseteq J_{|\mathbf{F}|}$ таку, що $I = \{F_i \in \mathbf{F} : \overline{n}'^T_{F_i} x - a'_{F_i} \geq 1\}$, а також введемо у розгляд величини:

$$\Delta_i = \overline{n}'^T_{F_i} x^* - a'_{F_i} - 1,\ i \in I;\ \delta'_i = 1 - \overline{n}'^T_{F_i} x^* + a'_{F_i},\ i \notin I, \tag{B.45}$$

які, як видно, задовольняють обмеження:

$$\Delta_i \geq 0,\ i \in I;\ \delta'_i \in (0, 0.5],\ i \notin I. \tag{B.46}$$

У позначеннях (B.45), умова (5.61) набуває вигляду

$$\sum_{i \in I} (1 + \Delta_i)^2 + \sum_{i \notin I} (1 - \delta_i)^2 = |\mathbf{F}| \tag{B.47}$$

$$\text{або} \quad 2 \sum_{i \notin I} \delta_i = 2 \sum_{i \in I} \Delta_i + \sum_{i \in I} \Delta_i^2 + \sum_{i \in I} \delta_i^2. \tag{B.48}$$

Перейдемо до розгляду функції (5.62): $f_0(x^*,4) = \sum\limits_{i \in I} (1 + \Delta_i)^4 + $ $+ \sum\limits_{i \notin I} (1 - \delta_i)^4$. Спростимо даний вираз:

$$f_0(x^*,4) = |\mathbf{F}| + 4 \sum_{i \in I} \Delta_i + 6 \sum_{i \in I} \Delta_i^2 + 4 \sum_{i \in I} \Delta_i^3 + \sum_{i \in I} \Delta_i^4 -$$
$$- 4 \sum_{i \notin I} \delta_i + 6 \sum_{i \notin I} \delta_i^2 - 4 \sum_{i \notin I} \delta_i^3 + \sum_{i \notin I} \delta_i^4$$

і представимо у формі:

$$f_0(x^*,4)=|\mathbf{F}|+4\sum_{i\in I}\Delta_i+6\sum_{i\in I}\Delta_i^2+4\sum_{i\in I}\Delta_i^3+\sum_{i\in I}\Delta_i^4-$$
$$-2(2\sum_{i\in I}\Delta_i+\sum_{i\in I}\Delta_i^2+\sum_{i\in I}\delta_i^2)+6\sum_{i\notin I}\delta_i^2-4\sum_{i\notin I}\delta_i^3+\sum_{i\notin I}\delta_i^4.$$

Звідси, з урахуванням (B.48), маємо:

$$f_0(x^*,4)=|\mathbf{F}|+\sum_{i\in I}\Delta_i^2(4+4\Delta_i+\Delta_i^2)+\sum_{i\notin I}\delta_i^2(4-4\delta_i+\delta_i^2). \qquad \text{(B.49)}$$

Застосуємо (B.46) до виразів у дужках у (B.49), отримуючи:

$$4+4\Delta_i+\Delta_i^2\geq 0,\ i\in I;\ 4-4\delta_i+\delta_i^2=4(1-\delta_i)+\delta_i^2\geq\delta_i^2,\ i\notin I.$$

Далі, застосовуючи ці оцінки до (B.49), маємо:

$$f_0(x^*,4)\geq|\mathbf{F}|+\sum_{i\notin I}\delta_i^4\geq 0. \qquad \text{(B.50)}$$

Отже, умова (B.43) виконана. Щоб показати вірність (B.44), відзначимо, що $\forall\, x^*\in S^2\setminus E \quad |I|<n$, інакше (B.47) перетворилося би на рівність $\sum_{F_i\in\mathbf{F}}(1+\Delta_i)^2=|\mathbf{F}|$, вірну лише при $\Delta_i \underset{F_i\in\mathbf{F}}{=} 0$, тобто виключно для $x^*\in E$. $\forall\, x^*\in S^2\setminus E$ оцінку (B.50) можна посилити до $f_0(x^*,4)\geq|\mathbf{F}|+\sum_{i\notin I}\delta_i^4>0$ і довести таким чином вірність (B.44). $\square$

Доведення. (леми 5.8). Нехай $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A\succ\{0\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbf{0}$. Розв'яжемо задачу $c^Tx\to extr$ при $x\in El(A,a)\}$, де $El(A,a)$ – еліпсоїд, визначений матрицею A та центром a.

Мета полягає у розв'язанні такої задачі:

$$c^Tx\to extr \text{ при } (x-a)^TA(x-a)\leq 1. \qquad \text{(B.51)}$$

Застосуємо до (B.51) метод множників Лагранжа. Лагранжиан – $F(x,\lambda)=c^Tx+\lambda(x-a)^T(x-a)$. Диференціюючи його по x, маємо:

$\nabla F_x = c - 2\lambda(x - a) = \mathbf{0}$. При $\lambda = 0$, приходимо до $c = \mathbf{0}$, що протирічить умові теореми. Отже, $\lambda > 0$. Крім того,

$$x^* = a + \frac{1}{2\lambda^*}A^{-1}c, \tag{B.52}$$

Оскільки $\lambda > 0$, оптимальний розв'язок досягається на границі області. Підставимо (B.52) у рівняння еліпсоїда, отримавши $(\frac{1}{2\lambda}A^{-1}c)^T A(\frac{1}{2\lambda}A^{-1}c) = 1$. Звідси $\lambda^2 = \frac{1}{4}(A^{-1}c)^T A(A^{-1}c) = \frac{1}{4}c^T(A^{-1})^T AA^{-1}c = \frac{1}{4}c^T A^{-1}c$, у силу симетричності A. Оскільки $A \succ 0$, $c \neq \mathbf{0}$, то $c^T A^{-1}c > 0$, звідки

$$\lambda^* = \tfrac{1}{2}(c^T A^{-1}c)^{0.5}.$$

Підстановка λ^* у (B.52) дає:

$$\begin{gathered} x^* = a + \tfrac{1}{2\lambda^*}A^{-1}c = a + \tfrac{A^{-1}c}{\sqrt{c^T A^{-1}c}}, \\ z^* = c^T x^* = c^T a + \tfrac{c^T A^{-1}c}{\sqrt{c^T A^{-1}c}} = c^T a + \sqrt{c^T A^{-1}c}, \end{gathered}$$

Нехай $\mathrm{extr} = \max$. $A^{-1} \succ 0$ як і A, звідки слідує, що $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A^{-1})$. Звідси

$$x^{\max} = a + \frac{A^{-1}c}{\sqrt{\|c\|_2^2 \lambda_{\max}(A^{-1})}} = a + \frac{A^{-1}c}{\|c\|_2\sqrt{\lambda_{\max}(A^{-1})}}, \tag{B.53}$$

$$z^{\max} = c^T a + \|c\|_2\sqrt{\lambda_{\max}(A^{-1})}. \tag{B.54}$$

Враховуючи зв'язок $\lambda_i(A^{-1}) = 1/\lambda_i(A)$, $i \in J_n$, між власними значеннями A, A^{-1}, маємо $\lambda_{\max}(A^{-1}) = 1/\lambda_{\min}(A)$. Отже, (B.53), (B.54) перетворюються на

$$\begin{gathered} x^{\max} = a + \tfrac{A^{-1}c\sqrt{\lambda_{\min}(A)}}{\|c\|_2}, \\ z^{\max} = c^T a + \|c\|_2/\sqrt{\lambda_{\min}(A)}. \end{gathered} \tag{B.55}$$

Якщо $\mathrm{extr} = \min$, робимо заміну $c \to -c$, звідки

$$x^{\min} = a - \frac{A^{-1}c\sqrt{\lambda_{\min}(A)}}{\|c\|_2},$$
$$z^{\min} = -(-c^T a + \|c\|_2/\sqrt{\lambda_{\min}(A)}) = c^T a - \|c\|_2/\sqrt{\lambda_{\min}(A)}. \qquad (B.56)$$

$\lambda_{min}(A)$ може бути знайдено за поліноміальний час, отже, еліпсоїд – WDS. $\square$

Доведення. (теореми 5.2) Вибір $f \in \overline{\Phi}(E)$ забезпечує виконання таких умов – $f(x) \underset{E^1}{=} 0$, $\exists x^0 \in E \backslash E^1$: $f(x^0) \neq 0$. Оскільки за умовою виконана (5.30), остання умова посилюється до $f(x) \underset{E\backslash E^1}{\neq} 0$, тобто (5.29) справджується. $\square$

Доведення. (леми 5.1) За означенням, функція $f(x)$ симетрична, якщо вона не змінює значення при довільній перестановці координат точок $x \in \mathbb{R}^n$. Нехай G є E.IM, а $x^0 \in E$. Множина X^0, що об'єднує точки, які отримуються з x^0 у результаті перестановок її координат, є загальною $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок, що індукована мультимножиною $G = \{x^0\}$, а саме $X^0 = E_{nk}(G)$, де $|S(G)| = k$. Крім того, $f(x) \underset{x \in X^0}{=} f(x^0)$, а оскільки X^0 – множина всіляких е–конфігурацій перестановок, індукованих G, має місце включення $E \subseteq X^0$, відповідно,

$$f(x) \underset{E}{=} f(x^0). \qquad (B.57)$$

У силу довільності вибору симетричної функції $f(x)$, умова (B.57) виконується для всіх симетричних функцій. $\square$

Доведення. (леми 5.2) З леми 5.1 слідує, що

$$\Phi_n^{sym}(G) \subseteq \Phi(E_{nk}(G)). \qquad (B.58)$$

Припустимо, що (B.58) виконується як строге включення, тоді існує несиметрична неперервна функція $f(x)$, що набуває на $E_{nk}(G)$ постійного значення. Останнє означає, що $f(x)$ не змінює значення при довільній перестановці координат $x = g$, отже, вона є симетричною за означенням. Це протиріччя доводить (5.31). $\square$

Доведення. (леми 5.4) Нехай $E = E^{\pm}_{nk}(G)$, де $G \geq 0$. Згідно з (B.8) множина

$$E^{+} = E \cap \mathbb{R}^{n}_{+} \tag{B.59}$$

є $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок $E_{nk}(G)$, що породжує E. Оскільки $E_{nk}(G) \subset E^{\pm}_{nk}(G)$, має місце включення $\Phi(E^{\pm}_{nk}(G)) \subset \Phi(E_{nk}(G)) = \Phi^{sym}_{n}(G)$.

За побудовою, $E = E^{\pm}_{nk}(G)$ володіє просторовою симетрією, а саме

$$\forall\, x \in E^{+},\ \forall\, y \in B'_n \in E,\ x \circ y \in E. \tag{B.60}$$

У той же час Φ^{e}_{n} об'єднує ті функції, які не змінюють значення в точці x при зміні знаків будь-яких її координат:

$$\forall f(x) \in \Phi^{e}_{n},\ \forall x \in \mathbb{R}^{n},\ \forall\, y \in B'_n \qquad f(x \circ y) = f(x).$$

Щоб (B.60) виконувалося на E, з $\Phi(E^{+})$ необхідно виділити парні і такі, що набувають значення нуль на E, звідки маємо (5.33), (5.34). $\square$

Доведення. (леми 5.4) Нехай $E = B'_n$. У даному випадку множина (B.59) – $E^{+} = \{\mathbf{e}\}$, симетрія відносно координатних площин також має місце, тому умова (B.60) також вірна і спрощується до $\forall\, y \in B'_n$, $\mathbf{e} \circ y \in E$. Це означає, що довільна $f \in \Phi^{e}_{n}$ є постійною на E, а саме $\Phi(B'_n) \supseteq \Phi^{e}_{n}(\{\mathbf{e}\})$. Те, що $\Phi(B'_n) \backslash \Phi^{e}_{n}(\{\mathbf{e}\}) = \emptyset$ доводиться аналогічно теоремі 5.2. Таким чином, має місце (5.36), (5.36). $\square$

Доведення. (насл. 5.4) Скористаємося теоремою 5.1, а саме формулою (5.28), і врахуємо, що афінне перетворення

$$\varphi :\ B'_n \to B_n \tag{B.61}$$

задається формулою $B'_n = 2B_n - \mathbf{e}$. Згідно з (5.36), маємо: $\Phi(B_n) = \{f(2x - \mathbf{e}) - f(2\mathbf{e} - \mathbf{e}) : f(x) \in \Phi_n^e\}$, тобто має місце (5.37). $\square$

Доведення. (леми 5.5) Нехай $f : f(x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = -f(x)$, $i \in J_n$. Її квадрат $f^2(x)$ буде функцією, парною по усіх підмножинах координат x, і такою, що, згідно з теоремою 5.4, набуває на $E = B_n'^h$ постійного значення $a \in \mathbb{R}^1_+$. Відповідно $f(x) \underset{E}{\in} \{\pm\sqrt{a}\}$. Покажемо, що $f(x) \underset{E}{=} f(-\mathbf{e})$. $-\mathbf{e}$ є образом точки $\mathbf{0} \in B_n^h$ при перетворенні (B.61), отже, $-\mathbf{e} \in B_n'^h$.

Нехай $x \in E$. За критерієм суміжності вершин PB_n^h, адаптованим до $B_n'^h$ (див. теорему 4.27), маємо, що $N_P(x)$ складається з тих бінарних векторів, що відрізняються від x двома координатами. Відповідно, $f(y) \underset{y \in N_P(x)}{=} \underset{y \in N_P(x)}{=} -(-f(x)) = f(x)$. Зважаючи на те, що $-\mathbf{e} \in B_n'^h$, маємо $f(x) \underset{E}{=} f(-\mathbf{e})$. $\square$

Доведення. (леми 5.7) Нехай f є знакопочережною, тобто змінює знак при будь-якій $x_i \leftrightarrow x_j$-транспозиції ($i \neq j$), але не змінює абсолютного значення. У такому випадку $f^2(x)$ буде незнакопочережною, тобто залишатиметься незмінною при будь-якій транспозиції координат x. Нехай $a \in \mathbb{R}^1_+ : f^2(x) \underset{E}{=} a$, де $E = E_n(G)$, тоді $f(x) \underset{E}{\in} \{\pm\sqrt{a}\}$. Нехай $a' \in \mathbb{R}^1$: $a' = f(g)$. Покажемо, що $f(x) \underset{E}{=} a'$. Згідно з критерієм суміжності вершин $E_n(G)$ (див. тверд. 4.1), маємо – $N_{\Pi_n(G)}(x)$ містить ті e–конфігурації перестановок без повторень, що відрізняються від x двома транспозиціями сусідніх елементів G. Звідси слідує, що $f(y) \underset{y \in N_{\Pi_n(G)}(x)}{=} f(x)$. З іншого боку, $g \in E$, звідки $f(x) \underset{E}{=} f(g)$. $\square$

Доведення. (тверд. 5.1) За побудовою і в силу (5.71), (5.72), функція (5.73) буде такою, що

$$f_0(x) = 0 \Leftrightarrow f_j(x) = 0,\ j \in I. \tag{B.62}$$

Об'єднуючи (B.62) із (5.74), отримуємо систему (5.3). За означенням, разом (5.4) вона є f–представленням E. $\square$

В.5 Додатки до розділу 6

Доведення. (теореми 6.1) Умову (6.13) можна представити у формі:

$$(x - g_1) \cdot ... \cdot (x - g_n) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{B.63}$$

Дійсно, розв'язання рівняння (В.63) по змінній x передбачає знаходження сукупності $x_1, ..., x_n$ його коренів, яка в точності утворюють мультимножину G, забезпечуючи, тим самим, виконання умови (6.13).

Перепишемо рівняння (В.63) у термінах його коренів, скориставшись формулою Вієта [44]: $x^n - (g_1 + ... + g_n)\, x^{n-1} + (g_1 g_2 + ... + g_{n-1} g_n)\, x^{n-2} + ... +$ $+ (-1)^n g_1 \cdot g_2 \cdot ... g_n {=} 0$.

У результаті маємо систему з n рівнянь (6.14), розв'язком якої буде множина n дійсних чисел $x_1, ..., x_n$ вигляду (6.13) й тільки вони. З іншого боку, розглядаючи кожне з рівнянь системи (6.14) як рівняння поверхні в $\mathbb{R}^n$, отримуємо, що повним розв'язком цієї нелінійної системи буде в точності загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок $E_{nk}(G)$. Відповідно, ($E_{nk}(G)$.SR1), задане системою (6.14) – це строге поліноміальне f–представлення цієї $E_{nk}(G)$, степінь і порядок якого збігаються з розмірністю простору й дорівнюють n.

Використаємо вираз (7.42) для елементарного симетричного поліному [306] і перепишемо ($E_{nk}(G)$.SR1) у формі:

$$u_j(x) = u_j(g)\,,\ j \in J_n. \tag{B.64}$$

Відзначимо, що для великих розмірностей використання ($E_{nk}(G)$.SR1) стає проблематичним через трудомісткість обчислення функцій (7.42).

Побудуємо ще одне f–представлення $E_{nk}(G)$ на базі ($E_{nk}(G)$.SR1), що ґрунтується на відомих співвідношеннях елементарних симетричних поліномів (7.42) зі степеневими сумами [306]:

$$q_j\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^j,\ j\in J_n^0, \tag{B.65}$$

відображених тотожностями Ньютона-Жирарда (Newton-Girard identities) [35, 217]:

$$q_j\left(x\right)=j\cdot\left(-1\right)^{-j+1}h_j\left(x\right)+\sum_{i=1}^{j-1}\left(-1\right)^{i-j+1}q_i\left(x\right)\cdot h_{j-i}\left(x\right),\ j\in J_n. \tag{B.66}$$

Застосовуючи рекурентно формулу (B.66) до обох частин рівнянь (B.64), одержуємо $q_j\left(x\right)=q_j\left(g\right)$, $j\in J_n$, або, враховуючи (B.65), це є (6.15).

Подібно до (6.14), система рівнянь (6.15) може бути розглянута у двох контекстах: перший – як система для визначення множини розв'язків рівняння (B.63); другий – як система, що задає множину поверхонь у просторі $\mathbb{R}^n$, у перетині яких утворюється в точності множина $E_{nk}\left(G\right)$. Таким чином, знайдене ще одне f представлення (6.15) множини $E_{nk}\left(G\right)$ – ($E_{nk}\left(G\right)$.SR2). Як і ($E_{nk}\left(G\right)$.SR1), воно строге, поліноміальне, а його степінь і порядок рівні n. Воно має очевидні переваги в порівнянні з ($E_{nk}\left(G\right)$.SR1), такі, як простота функцій, що входять до нього, його опуклість в ортанті $\mathbb{R}^n_+$ тощо. □

Доведення. (теореми 6.3) Якщо виділити у G мультимножину $\mathcal{G}\subset G$, $|\mathcal{G}|=n$, $|S(\mathcal{G})|=\kappa$, то (6.19) є строгим f–представленням множини $E_{n\kappa}(\mathcal{G})\subset E=E^n_{\eta k}\left(G\right)$. Враховуючи декомпозицію (3.24), умову (6.19) достатньо об'єднати з

$$n_i\in J^0_{\eta_i},\ \ \sum_{i=1}^{k}n_i=n, \tag{B.67}$$

щоб задати E. Для того, щоб аналітично задати решітку $\prod\limits_{i=1}^{k}J^0_{n_i}$, скористаємося ($Grid$.SR1), у результаті чого (B.67) перетворюється на (6.20), а у цілому одержується ($E^n_{\eta k}\left(G\right)$.ESR1). □

Доведення. (теореми 6.2) Введемо в розгляд $G'=\left\{g_1^{'},...,g_n^{'}\right\}=\left\{e_1^{'n_1},...,e_k^{'n_k}\right\}$: $g_i^{'}=\xi\left(g_i\right)$, $i\in J_n$, і здійснимо заміну змінних:

$$x_i^{'}=\xi\left(x_i\right),\ g_i^{'}=\xi\left(g_i\right),\ i\in J_n;\ e_j^{'}=\xi\left(e_j\right),\ j\in J_k, \tag{B.68}$$

у (6.18), (6.18). У результаті одержимо дві системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{'j}=\sum_{i=1}^{n} g_i^{'j},\ j\in J_n; \tag{B.69}$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} x_i^{'}=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} g_i^{'},\ j\in J_n. \tag{B.70}$$

Відповідно до теореми 6.2, система (B.69) являє собою ($E_{nk}\left(G'\right)$.SR2), а (B.70) – ($E_{nk}\left(G'\right)$.SR1). Враховуючи те, що система (6.18), (6.18) формується системи (B.69), (B.70) замінами змінних, оберненими до (B.68), а саме:

$$x_i=\xi^{-1}\left(x_i^{'}\right),\ g_i=\xi^{-1}\left(g_i^{'}\right),\ i\in J_n;\ e_j=\xi^{-1}\left(e_j^{'}\right),\ j\in J_k,$$

маємо: $x'\in E_{nk}\left(G'\right)\Leftrightarrow x\in E_{nk}\left(G\right)$. Отже, (6.18), (6.18) – це записані в термінах координат e–конфігурації x f–представлення ($E_{nk}\left(G'\right)$.SR1), ($E_{nk}\left(G'\right)$.SR2). $\square$

Доведення. (теореми 6.5) Нехай x^* – екстремаль задачі (5.57), тобто $x^*\in X^*=X^{\min}\cup X^{\max}$, де $X^{\min}$, $X^{\max}$ знайдені з (5.59), (5.60). Введемо позначення $I=\{i\in J_n:\ x_i^*\neq 0\}$, $m=|I|$, звідки

$$m\in J_n. \tag{B.71}$$

Нехай також

$$I^-,I^+\subseteq I:\ \forall i\in I^-\quad x_i^*<0;\ \forall i\in I^+\quad x_i^*>0;\ m'=\left|I^-\right|, \tag{B.72}$$

тоді $I^-\cup I^+=I,\ I^-\cap I^+=\varnothing,\ |I^+|=m-m',\ |\overline{I}|=n-m.$

Об'єднуючи (B.71) із (B.72), отримуємо, що

$$\mathcal{M}=\left\{(m',m):\ m'\in J_m^0,\ m\in J_n\right\}\ - \tag{B.73}$$

область зміни параметрів m', m.

Проведемо попередній аналіз, чи може система (5.50), (5.51), де

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_1} - 1 = 0; \tag{B.74}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_2} - b = 0, \tag{B.75}$$

$b \in \mathbb{R}^1$ – параметр, задавати дотичне представлення деякої дискретної множини. Скористаємося умовою (5.54) і отримуємо, що для того, щоб $y \in S_1 \cap S_2$ була точкою дотику поверхонь (B.74), (B.75), необхідно виконання умови $\nabla f_1(y) = j_1 x^{j_1-1}|_y = j_1 y^{j_1-1} \propto \nabla f_2(y) = j_2 x^{j_2-1}|_y = j_2 y^{j_2-1}$ або

$$\exists k(y) \neq 0 : \; \nabla f_1(y) = k(y) \cdot \nabla f_2(y) \Leftrightarrow j_1 y^{j_1-1} = k(y) \cdot j_2 y^{j_2-1}. \tag{B.76}$$

З урахуванням (6.22), умова (B.76) означає, що $\forall i \in J_n$ координата y_i задовольняє одну з умов: а) $y_i^{j_2-j_1} = \frac{j_1}{k(y)\cdot j_2}$, якщо $k(y) \neq 0$; б) $y_i = 0$, якщо $k(y) = 0$. Першу з них можна представити у вигляді – якщо $k(y) \neq 0$, то

$$y_i = \begin{cases} \pm \left(\dfrac{j_1}{k(y)\cdot j_2}\right)^{\frac{1}{j_2-j_1}}, \; k(y) > 0, \text{ якщо } \exists\, l \in \mathbb{N} : \; j_2 - j_1 = 2l; \\ \left(\dfrac{j_1}{k(y)\cdot j_2}\right)^{\frac{1}{j_2-j_1}}, \text{ якщо } \exists\, l \in \mathbb{N} : \; j_2 - j_1 = 2l + 1. \end{cases} \tag{B.77}$$

Ці умови означають, що в результаті дотику поверхонь (B.74), (B.75) можуть формуватися $\mathcal{C}$–множини, що породжуються щонайбільше трьома числами – нулем і двома ненульовими елементами, рівними за абсолютною величиною і протилежними за знаком. Більш того, якщо $j_2 - j_1$ – непарне, ця $\mathcal{C}$–множин породжується двома числами, одне з яких 0.

Введемо позначення

$$\Delta = \left(\frac{j_1}{|k(y)| \cdot j_2}\right)^{\frac{1}{j_2-j_1}} \tag{B.78}$$

і перепишемо умову (В.77):

$$\forall\, i \in I \quad y_i = \begin{cases} \pm\,\Delta, \text{ якщо } \exists\, l \in \mathbb{N}:\; j_2 - j_1 = 2l; \\ \Delta, \text{ якщо } \exists\, l \in \mathbb{N}:\; j_2 - j_1 = 2l+1,\; k(y) > 0; \\ -\,\Delta, \text{ якщо } \exists\, l \in \mathbb{N}:\; j_2 - j_1 = 2l+1,\; k(y) < 0. \end{cases} \tag{В.79}$$

Перейдемо безпосередньо до обґрунтування існування дотичних представлень $\mathcal{C}$–множин вигляду (В.74), (В.75).

До розв'язання задачі (5.57), (В.74), (В.75) застосуємо метод множників Лагранжа. (6.21) еквівалентна задачі оптимізації Лагранжіана:

$$H(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_2} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_1}\right) \to extr, \tag{В.80}$$

стаціонарні точки якого визначаються з системи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x_i} = j_2 x_i^{j_2-1} - \lambda\cdot j_1 x_i^{j_2-1} = 0,\; i \in J_n; \\ &\text{де } \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_1} = 0. \end{aligned} \tag{В.81}$$

Згідно з (6.22), (В.81), стаціонарна точка (x^*, λ^*) функції (В.80) задовольняє умову: $\forall i \in J_n\; x_i^{*(j_1-1)}(j_2 x_i^{*(j_2-j_1)} - \lambda^* j_1) = 0$.

Звідси слідує:

$$x_i^* \in \{0, \pm\Delta^*\},\; i \in J_n, \tag{В.82}$$

$$\text{де } \Delta^* = \left(\tfrac{|\lambda^*| j_1}{j_2}\right)^{\frac{1}{j_2-j_1}}, \tag{В.83}$$

а також

$$\frac{|\lambda^*| j_1}{j_2} = \Delta^{*(j_2-j_1)} \Rightarrow |\lambda^*| = \Delta^{*(j_2-j_1)} \frac{j_2}{j_1}. \tag{В.84}$$

(В.82) узгоджується із (В.79) і показує, що для виконання умови $\Delta = \Delta^*$, де Δ, Δ^* задані виразами (В.78) і (В.83), необхідно вибирати

$k(x^*) = \frac{1}{\lambda^*}$, де λ^* задовольняє умову (B.84).

Отже, $\forall i \in J_n$

$$x_i^* = \begin{cases} \Delta^*, \text{ якщо } i \in I^+, \\ -\Delta^*, \text{ якщо } i \in I^-, \\ 0, \text{ якщо } i \in \bar{I}. \end{cases} \tag{B.85}$$

Підставимо (B.83), (B.85) у (B.74), (B.80):

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{i \notin I} 0^{j_1} + \sum_{i \in I^-} (-\Delta^*)^{j_1} + \sum_{i \in I^+} \Delta^{*j_1} = \sum_{i \in I^-} (-1)^{j_1} \Delta^{*j_1} + \sum_{i \in I^+} \Delta^{*j_1} = \\ = (m'(-1)^{j_1} + (m - m'))\Delta^{*j_1}; \end{aligned} \tag{B.86}$$

$$H(x^*, \lambda^*) = (m'(-1)^{j_2} + (m - m'))\Delta^{*j_2}. \tag{B.87}$$

Залежно від парності та непарності j_1, j_2, формули (B.86), (B.87) набувають вигляду:

$$\text{якщо} \quad j_1 = 2l_1 \quad m \cdot \Delta^{*j_1} = 1; \tag{B.88}$$

$$\text{якщо} \quad j_1 = 2l_1 + 1 \quad (m - 2m') \cdot \Delta^{*j_1} = 1; \tag{B.89}$$

$$\text{при} \quad j_2 = 2l_2 \quad H(x^*, \lambda^*) = m \cdot \Delta^{*j_2}; \tag{B.90}$$

$$\text{при} \quad j_2 = 2l_2 + 1 \quad H(x^*, \lambda^*) = (m - 2m') \cdot \Delta^{*j_2}. \tag{B.91}$$

Крім того, з (B.89) слідує, що для непарних j_1 вірно:

$$m' < \frac{m}{2}. \tag{B.92}$$

Розглянемо послідовно Випадки 6.4.1-6.4.4, враховуючи парність і додатність $j_2 - j_1$ у Випадках 6.4.1, 6.4.2 і непарність $j_2 - j_1$ у Випадках 6.4.3 та 6.4.4.

Випадок 6.4.1: З (B.88), (B.90) отримуємо:

$$\Delta^* = m^{-\frac{1}{j_1}},\ H(x^*, \lambda^*) = m \cdot m^{-\frac{j_2}{j_1}} = m^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}, \tag{B.93}$$

отже, задача (B.80) зведена до оптимізації функції змінної m: $h^*(m) = m^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}$, яка є спадною і досягає мінімуму у допустимої області (B.71) при $m = n$, а максимуму – при $m = 1$. Звідси

$$z^{\min} = h^*(n) = n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}, \tag{B.94}$$

$$z^{\max} = h^*(1) = 1. \tag{B.95}$$

Для величини Δ^* використовуватимемо позначення $\Delta^{\min}$ у задачі мінімізації і $\Delta^{\max}$ – у задачі максимізації. Тепер з (B.82), (B.84), (B.93) маємо:

$$\Delta^{\min} = n^{-\frac{1}{j_1}}, \tag{B.96}$$

$$\lambda^{\min} = \tfrac{j_2}{j_1}(\Delta^{\min})^{j_2-j_1} = \tfrac{j_2}{j_1} n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}, \tag{B.97}$$

$x_i^{\min} \in \{\pm\Delta^{\min}\},\ i \in J_n.$

Звідси, враховуючи (B.94), отримуємо (6.27). Аналогічно,

$$\Delta^{\max} = 1, \tag{B.98}$$

$$\lambda^{\max} = \tfrac{j_2}{j_1}(\Delta^{\max})^{j_2-j_1} = \tfrac{j_2}{j_1}, \tag{B.99}$$

$\exists i^0 \in J_n : x^{\max} \in \{\pm\Delta^{\max}\mathbf{e}_{i^0}\} = \{\pm\mathbf{e}_{i^0}\}$. Отже, з урахуванням (B.95), отримуємо (6.28).

Випадок 6.4.2: З (B.89), (B.91) маємо:

$$\begin{aligned} &\Delta^* = (m - 2m')^{-\frac{1}{j_1}}, \\ &H(x^*, \lambda^*) = (m - 2m') \cdot (m - 2m')^{-\frac{j_2}{j_1}} = (m - 2m')^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}. \end{aligned} \tag{B.100}$$

Задача зведена до оптимізації функції від m, m':

$h^*(m,m') = (m-2m')^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}} \to extr$ в області (B.73), (B.92), що має вигляд

$$\mathcal{M}' = \left\{(m',m): \ m' \in J^0_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}, \ m \in J_n\right\}, \tag{B.101}$$

і зображена на рис. B.1 разом зі своєю опуклою оболонкою $\mathcal{D}' = conv\mathcal{M}'$.

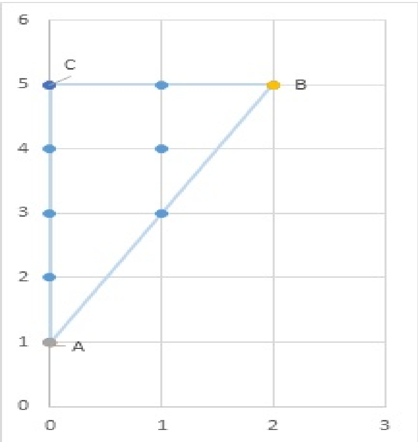

Рис. B.1: $\mathcal{M}'$, $\mathcal{D}'$ $(n=5)$

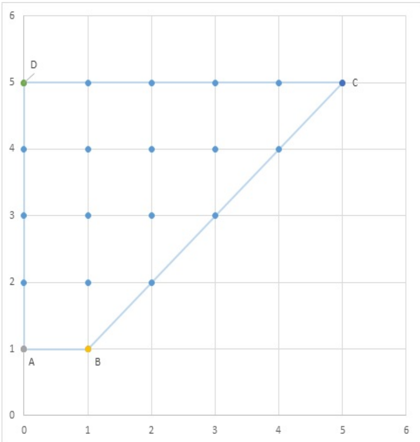

Рис. B.2: $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}$ $(n=5)$

$$\frac{\partial h^*}{\partial m} = -\frac{j_2-j_1}{j_1}(m-2m')^{-\frac{j_2}{j_1}}, \frac{\partial h^*}{\partial m'} = 2\frac{j_2-j_1}{j_1}(m-2m')^{-\frac{j_2}{j_1}},$$

звідки видно, що $\frac{\partial h^*}{\partial m}, \frac{\partial h^*}{\partial m'} \neq 0$ в області $\mathcal{D}'$, тобто стаціонарних точок всередині неї немає. Обмежимо область пошуку розв'язку границею області $\mathcal{D}' = \triangle ABC$.

Введемо додаткову змінну $m'' = m - 2m'$, для якої, згідно з (B.92), вірно:

$$m'' = m - 2m' \in J_m. \tag{B.102}$$

У результаті задача (B.80) зводиться до оптимізації функції від m'':

$$h'(m'') = (m'')^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}} \to extr. \tag{B.103}$$

Аналогічно Випадку 6.4.1, для функції (B.103) маємо: $h'(m'')$ спадає в області (B.102), досягаючи мінімуму і максимуму при $m'' = m$, $m'' = 1$

відповідно, тобто: $\min\limits_{m''\in J_m} h'(m'') = h'(m) = m^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}$, $\max\limits_{m''\in J_m} h'(m'') = h'(1) = 1$.

У термінах m, m', умова $m'' = m$ еквівалентна $m' = 0$, тобто мінімум досягається на відрізку $[A, C]$; $m'' = 1$ виконується при $m = 2m' + 1$, тобто максимум досягається на $[A, B]$. Таким чином, на $[A, C]$ маємо $m' = 0$,

$$h^*(m, m') = h^*(m, 0) = m^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}. \tag{B.104}$$

Функція (B.104) – спадна і досягає мінімуму в точці $B\,(0, n)$, а максимуму – у $A\,(0, 1)$, звідки

$$\min_{\partial\mathcal{D}'} h^*(m, m') = \min_{[A,C]} h^*(m, m') = h^*(n, 0) = n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}. \tag{B.105}$$

При цьому $C\,(0, n) \in \mathcal{M}$, отже, $z^{min} = h^*(n, 0) = n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}$. Водночас на $[A, B]$ $m' = \frac{m-1}{2}$, $h^*(m, m') = h^*\left(m, \frac{m-1}{2}\right) = 1$. На всьому $[A, B]$ функція h^* – константа, звідки випливає, що всі цілочисельні точки на відрізку $[A, B]$ – точки її максимуму:

$$\max_{\partial\mathcal{D}'} h^*(m, m') = \max_{[A,B]} h^*(m, m') = 1. \tag{B.106}$$

Враховуючи, що $C = (0, n) \in \mathcal{M}'$, а також $[A, C] \cap \mathcal{M}' \neq \emptyset$, з (B.105), (B.106) отримуємо:

$$h^{\min} = h^*(n, 0) = n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}, \tag{B.107}$$

$$h^{\max} = 1. \tag{B.108}$$

При цьому максимум досягається для всіх пар вигляду $(m, m') = (2m' + 1, m')$, що розташовані в області $\mathcal{D}'$. Як видно з (B.101), кількість точок максимуму дорівнює $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

У позначеннях (B.102), вирази (B.100) переписуються у вигляді:

$\Delta^* = m''^{-\frac{1}{j_1}},\ H(x^*, \lambda^*) = m''^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}$. З (В.107), (В.108) слідує:

$$m''^{\min} = n,\ m''^{\max} = 1, \tag{В.109}$$

відповідно $\Delta^{\min} = n^{-\frac{1}{j_1}},\ z^{\min} = H(x^{\min}, \lambda^{\min}) = n^{-\frac{j_2-j_1}{j_1}}$.

Отримано в точності формули (В.94), (В.96), звідки слідує, що $\lambda^{\min}$ визначається за (В.97). При цьому, за умови (В.109), формула (6.27) перетворюється на (6.29), тобто мінімум досягається в єдиній точці.

Крім того, з (В.109) маємо: $\Delta^{\max} = 1,\ z^{\max} = H(x^{\max}, \lambda^{\max}) = 1$, а це в точності (В.95), (В.98), звідки випливає, що $\lambda^{\max}$ визначається з (В.99). При цьому точки $X^{\max}$ мають, згідно з (В.109), на одну додатну координату більше, ніж від'ємних: $\forall x^{\max} \in X^{\max} \quad x_i^{\max} \in \{0, \pm\Delta^{\max}\} = \{0, \pm 1\}\,,\ i \in J_n$; $|I^-| = |I^+| - 1$. $X^{\max}$ складається з трійкових $\mathcal{C}_b$-множин перестановок і має вигляд (6.30).

Випадки 6.4.3, 6.4.4. З (В.88), (В.91) отримуємо:

$$\Delta^* = m^{-\frac{1}{j_1}},\ H(x^*, \lambda^*) = (m - 2m') \cdot m^{-\frac{j_2}{j_1}}. \tag{В.110}$$

Дослідимо поведінку функції

$$h^*(m, m') = (m - 2m') \cdot m^{-\frac{j_2}{j_1}}. \tag{В.111}$$

Стаціонарні точки h^* визначимо з умов:

$$\frac{\partial h^*}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(m^{1-\frac{j_2}{j_1}} - 2m' \cdot m^{-\frac{j_2}{j_1}}\right) = \left(1 - \frac{j_2}{j_1}\right) m^{-\frac{j_2}{j_1}} + 2m'\frac{j_2}{j_1} m^{-\frac{j_2}{j_1}-1} =$$
$$= m^{-\frac{j_2}{j_1}-1}\left(\left(1 - \frac{j_2}{j_1}\right) m + 2m'\frac{j_2}{j_1}\right) = 0,\ \frac{\partial h^*}{\partial m'} = -2m^{-\frac{j_2}{j_1}} = 0,$$

звідки видно, що $\frac{\partial h^*}{\partial m'} \neq 0$ в допустимій області (В.73), отже стаціонарні точки всередині $\mathcal{D}$ відсутні.

Розглянемо Випадок 6.4.3. Розв'язок задачі шукаємо на границі чотирикутника $ABCD$, показаного на рис. В.2. Функція (В.111) спадає за m' при фіксованому m, тому пошук максимуму обмежимо відрізком $[A, D]$, мінімуму – $[B, C]$. На $[A, D]$ маємо,

$$m' = 0,\ h^*(m, m') = h^*(m, 0) = m^{1-\frac{j_2}{j_1}}, \tag{B.112}$$

звідки

$$\max_{[A,D]} h^*(m, m') = h^*(1, 0) = 1. \tag{B.113}$$

На $[B, C]$ виконано $m' = m$, т.е.

$$h^*(m, m') = h^*(m, m) = -m^{1-\frac{j_2}{j_1}}, \tag{B.114}$$

отже,

$$\min_{[B,C]} h^*(m, m') = h^*(1, 1) = -1. \tag{B.115}$$

В цілому, (В.113), (В.115) дає:

$$h^{min} = h^*(1, 1) = -1, \tag{B.116}$$

$$h^{\max} = h^*(1, 0) = 1. \tag{B.117}$$

Оскільки в обох випадках $m = 1$, то, згідно з (В.110),

$$\Delta^{\min} = \Delta^{\max} = 1. \tag{B.118}$$

В силу (В.84), (В.118) і того, що у задачі максимізації $m' = 0$, а у задачі мінімізації $m' = 1$, маємо:

$$\lambda^{\min} = -\frac{j_2}{j_1},\ \exists i_0 \in J_n :\ x^{\min} = \mathbf{e}_{i_0}; \tag{B.119}$$

$$\lambda^{\max} = \frac{j_2}{j_1},\ \exists i_0 \in J_n:\ x^{\max} = \mathbf{e}_{i_0}. \tag{B.120}$$

З (B.116), (B.117), (B.119), (B.120) слідує, що повний розв'язок задачі (5.57), (6.21) задається формулами (6.32), (6.33).

Перейдемо до розгляду Випадку 6.4.4. Пошук точок екстремуму обмежуємо границею області $\mathcal{D}$. Як у попередньому випадку, функція (B.111) спадна за m' при фіксованому m, тому точки максимуму шукаємо на $[A, D]$, а мінімуму – на $[B, C]$. На $[A, D]$ виконано (B.112), але, в силу (6.26), $h^*(m, 0) = m^{1-\frac{j_2}{j_1}}$ зростає і досягає максимуму при $m = n$: $h^{\max} = h^*(n, 0) = n^{1-\frac{j_2}{j_1}}$.

На $[B, C]$ виконано (B.114), при цьому функція $h^*(m, m) = -m^{1-\frac{j_2}{j_1}}$ спадає і досягає мінімуму при $m = n$, тобто

$$h^{\min} = h^*(n, n) = -n^{1-\frac{j_2}{j_1}}. \tag{B.121}$$

В обох випадках $m = n$ і, в силу (B.110),

$$\Delta^{\min} = \Delta^{\max} = n^{-\frac{1}{j_1}}.$$

Далі, в силу (B.84), (B.118) і того, що у задачі максимізації $m' = 0$, мінімізації $-m' = n$,

$$\lambda^{\min} = -\frac{j_2}{j_1} n^{\frac{j_1 - j_2}{j_1}},\ x^{\min} = -\mathbf{n}^{-\frac{1}{j_1}},\ i \in J_n;$$
$$\lambda^{\max} = \frac{j_2}{j_1} n^{\frac{j_1 - j_2}{j_1}},\ x^{\max} = \mathbf{n}^{-\frac{1}{j_1}},\ i \in J_n.$$

З (B.121)-(B.122) слідує, що існує єдиний розв'язок задачі максимізації і єдиний – мінімізації та має місце (6.34). $\square$

В.6 Додатки до розділу 7

Доведення. (теореми 7.1) Припустимо, що (7.6) не виконане. За побудовою це можливо лише у випадку, коли права частина (7.6) (далі E'') задає власну підмножину E. А це означає, що $\exists x^0 \in E' \backslash E''$, $\exists i \in J_{\mu'}$: $\phi_i(x^0) = 0, \Phi_i(x^0) \neq 0$ або $\exists i' \in J_\mu \backslash J_{\mu'}$: $\phi_{i'}(x^0) \leq 0, \Phi_{i'}(x^0) > 0$. У першому випадку отримаємо протиріччя, адже за умовою $\phi_i(x) \underset{E}{=} 0$ та виконано (7.5). У другому також приходимо до протиріччя, адже, виходячи з умови, $\Phi_{i'}(x^0)$ зберігатиме значення на E, отже, $\Phi_{i'}(x^0) \underset{E}{\leq} 0$, зокрема, $\Phi_{i'}(x^0) \underset{E''}{\leq} 0$. □

Доведення. (насл. 7.1) За умовою, для E існує функція $f_1(x)$ – строго опукла і така, що E лежить на поверхні (7.9).

Поверхня S – строго опукла, відповідно, E складається лише з крайніх точок, відповідно, умова (1.47) виконується автоматично для усіх $x \in S$. □

Доведення. (теореми 7.3) $F(x)$ побудуємо у формі $F(x) = \Phi(x) + f_1(x)$, де $f_1(x)$ – визначено з (7.9), $\Phi(x)$ – f.СЕ, яке існує згідно з насл. 7.3. Побудована функція $F(x)$ є строго опуклою як сума опуклої та строго опуклої функцій, а також, очевидно, задовольняє (1.43). □

Доведення. (теореми 7.4) Сформуємо $F(x)$ так само, як і у теоремі 7.4. За умовою $f_1(x)$ – сильно опукла, тобто існує $\rho > 0$ – параметр її сильної опуклості. Побудована $F(x)$ задовольняє (1.43), є сильно опуклою як сума сильно опуклої та опуклої функцій, параметр її сильної опуклості не менше за $\rho > 0$. □

Доведення. (теореми 7.6)

За умовою сильної опуклості $f_1(x)$:

$$\forall\, x \in K\ \lambda^1_{min}(x) = \min_{i \in J_n} \lambda_i(\nabla^2 f_1(x)) > \rho, \tag{В.122}$$

де $\{\lambda_i(G(x))\}_{i \in J_n}$ – множина власних значень матричної функції $G(x)$,

$x \in \mathbb{R}^n$. У силу (7.10), (7.11), $\nabla^2 f(x) \in \mathbf{C}(X)$, відповідно і $\{\lambda_i(f(x))\}_{i\in J_n} \subset \mathbf{C}(X)$. Крім того, за умовою X – компакт, тобто ці функції обмежені на X, отже, існує $M(K) > 0$:

$$\forall x \in X,\ \forall i \in J_n \quad |\lambda_i(f(x))| \le M(K). \tag{B.123}$$

Враховуючи $X \subseteq [0,1]^n$, з (B.123) слідує:

$$\forall x \in X,\ \forall y \in \mathbb{R}^n:\ \|y\| = 1 \quad |y^T\nabla^2 f(x)y| \le |\lambda_{max}(x)| \le M(K), \tag{B.124}$$

де $\lambda_{max}(x) = \max\limits_{i\in J_n} \lambda_i(\nabla^2 f(x))$.

Перейдемо до розгляду поведінки $\nabla^2 F(x,\mu)$ на множині K, де виконані обидві умови (B.122), (B.124), до того ж вона опукла.

Виберемо

$$\mu^*(K) = \frac{M(K)}{\rho}, \tag{B.125}$$

тоді для довільних x, y: $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$, маємо:

$$\begin{aligned} &y^T\nabla^2 F(x,\mu)y = y^T(\nabla^2 f(x) + \mu\nabla^2 f_1(x))y = \\ &= y^T\nabla^2 f(x)y + \mu y^T\nabla^2 f_1(x)y \ge -M(K) + \min_{i\in J_n} \lambda_i(\nabla^2 f_1(x)) = \\ &= -M(K) + \mu\lambda_{min}(x) > -M(K) + \mu^*(K)\rho = -M + \frac{M(K)}{\rho}\rho = 0. \end{aligned} \tag{B.126}$$

Це означає, що гессіан $\nabla^2 F(x,\mu) \succ 0$ на K, отже, функція (1.49) строго опукла на K. □

Доведення. (теореми 7.7) Функція $F(x,\mu)$ вигляду (1.49) – строго опукла в силу теореми 7.6 та задовольняє (1.43) у силу Умови 7.2. □

Доведення. (насл. 7.5) Виберемо $\mu' = \mu^* + \frac{\rho'}{\rho}$, де μ^* задано формулою (B.125). Здійснюючи у (B.126) заміну $\mu^* \to \mu'$, маємо: $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$, $\forall\, x \in K$ $y^T\nabla^2 F(x,\mu)y = -M + \mu\lambda_{min}(\nabla^2 f_1(x)) > -M + \mu'\rho = -M + \frac{M+\rho'}{\rho}\rho = \rho'$. □

Доведення. (теореми 7.8) Запишемо функцію (7.13) у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{2}((f^1(x) + f^2(x))^2 - (f^1(x))^2 - (f^2(x))^2) \underset{E}{=} \\
&\underset{E}{=} \frac{1}{2}((F_+^{1,1}(x) + F_+^{2,1}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)) = \\
&= \frac{1}{2}((F^{1,1}(x) + F^{2,1}(x))_+^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)) = (F^{1,1}(x) \cdot F^{2,1}(x))_+ \\
&+ \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (F^{2,1}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)).
\end{aligned}
$$

□

Доведення. (теореми 7.9) Перепишемо вираз (7.15) у формі: $f(x) = f^1(x)(M-$

$-f^3(x)) - M \cdot f^1(x) \geq 0$. У позначеннях $f^2(x) = M - f^3(x)$ він набуває форму $f^2(x) \underset{K}{\geq} 0$. Застосуємо (7.14) до побудови $F(x)$:

$$
\begin{aligned}
&F(x) = (F^{1,1}(x) \cdot F^{2,1}(x))_+ + \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (F^{2,1}(x))^2 - \\
&- \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)) - M \cdot \tilde{F}^{1,1}.
\end{aligned}
$$

Повертаючись до $f^3(x)$ і враховуючи, що $F^{2,1}(x) = M - \tilde{F}^{3,1}(x)$, $-(f^2(x))^2 = 2M \cdot f^3(x) - (f^3(x))^2 - M^2$, відповідно, $-\tilde{F}^{2,2}(x) = 2M \cdot F^{3,1}(x) - -\tilde{F}^{3,2}(x) - M^2$, одержуємо формулу (7.16). □

Доведення. (теореми 7.10) Розглянемо функцію $f^{1-3}(x) = |f^1(x) - f^3(x)|$ і покажемо, що функція (7.18) є розв'язком Задачі 7.2.1 для неї. Спочатку перевіримо умову (1.43), яка в даному випадку набуває вигляду:

$$
F^{1-3}(x) \underset{E}{=} f^{1-3}(x). \tag{B.127}
$$

Виберемо довільну $x \in E$. Якщо $f^1(x) \geq f^3(x) \Rightarrow f^{1-3}(x) = f^1(x) - -f^3(x) \Rightarrow F^{1-3}(x) = \max\{f^1(x) - f^3(x), f^3(x) - f^1(x)\} = f^1(x) - f^3(x) = = f^{1-3}(x)$. Аналогічно, якщо $f^1(x) < f^3(x) \Rightarrow f^{1-3}(x) = f^3(x) - f^1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow F^{1-3}(x) = f^3(x) - f^1(x) = f^{1-3}(x)$. Отже, умова (B.127) виконана.

$F^{1-3}(x)$ визначена на K як максимум двох опуклих функцій, що визначені на K. Звідси слідує, що $F^{1-3}(x)$ – шукане СЕ функції $f^{1-3}(x)$.

Запишемо функцію (7.15) у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}((f^1(x) - f^3(x))^2 - (f^1(x))^2 - (f^3(x))^2) = \\ &= \frac{1}{2}((f^{1-3}(x))^2 - (f^1(x))^2 - (f^3(x))^2) \underset{E}{=} \\ &\underset{E}{=} \frac{1}{2}((F^{1-3}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)). \end{aligned} \tag{B.128}$$

У правій частині (B.128) стоїть опукла функція, адже $(F^{1-3}(x))^2$ опукла як квадрат невід'ємної опуклої функції. Отже, формула (7.17) вірна. $\square$

Доведення. (тверд. 7.1)

$$f(x) = x_i^{k_i} x_j^{k_j} = \frac{1}{2}((x_i^{k_i} + x_j^{k_j})^2 - x_i^{2k_i} - x_j^{2k_j}).$$

Перепишемо цей вираз у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) \underset{E}{=} \tfrac{1}{2}((x_i^{k_i} + x_j^{k_j})^2 + (-x_i^{2k_i} + \|x\|_{2k_i}^{2k_i} - r_{2k_i}^{2k_i}) + (-x_j^{2k_j} + \|x\|_{2k_j}^{2k_j} - r_{2k_j}^{2k_j})) = \\ = x_i^{k_i} x_j^{k_j} + \tfrac{1}{2}(\|x\|_{2k_i}^{2k_i} + \|x\|_{2k_j}^{2k_j} - r_{2k_i}^{2k_i} - r_{2k_j}^{2k_j}) = F(x). \end{aligned}$$

Отримано (7.21). За побудовою $F(x)$ – опукла та є продовженням $f(x)$. $\square$

Доведення. (теореми 7.11) Функцію (7.22) представимо у формі:

$$f(x) = bx + c + \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| f_{ii} + 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} |a_{ij}| f_{ij}, \tag{B.129}$$

де $f_{ij} = sgn(a_{ij}) x_i x_j$ $(1 \le i \le j \le n)$.

$F(x)$ побудуємо у формі:

$$F(x) = bx + c + \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| F_{ii} + 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} |a_{ij}| F_{ij}, \tag{B.130}$$

де F_{ij} – розв'язок Задачі 7.2.1 для f_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$.

x_i^2 не потребує уопуклювання, отже,

$$F_{ii} = f_{ii} = x_i^2 \text{ для } i \in J_n : \ a_{ii} \geq 0. \tag{B.131}$$

$$\begin{aligned} f_{ii} = -x_i^2 \underset{E}{=} -x_i^2 + (x - x^0)^2 - r^2 = -x_i^2 + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - 2xx^0 + \\ + x^{02} - r^2 = \sum_{i' \in J_n \setminus \{i\}} x_{i'}^2 - 2xx^0 + x^{02} - r^2 = F_{ii}. \end{aligned} \tag{B.132}$$

У правій частині (B.132) стоїть опукла функція, що є f_{ii}.CE, отже,

$$\forall\, i \in J_n : \ a_{ii} < 0 \quad F_{ii} = f_{ii} + ((x - x^0)^2 - r^2). \tag{B.133}$$

Для побудови F_{ij}, $i < j$ скористаємося засобом, представленим у теоремі 7.8:

$$\begin{aligned} f_{ij} = \pm x_i x_j = \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 - x_i^2 - x_j^2) \underset{E}{=} \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 - x_i^2 - x_j^2 \\ + (x - x^0)^2 - r^2) = \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 + \sum_{i' \in J_n \setminus \{i,j\}} x_{i'}^2 - 2xx^0 + x^{02} - r^2). \end{aligned} \tag{B.134}$$

У правій частині (B.134) опукла функція, яку використаємо як f_{ij}.CE, $i < j$:

$$F_{ij} = f_{ij} + \frac{1}{2}((x - x^0)^2 - r^2), \ i, j \in J_n : \ a_{ij} \neq 0. \tag{B.135}$$

Підстановка (7.25), (B.131), (B.133), (B.135) у (B.130) дає:

$$F(x) = bx + \sum_{a_{ii}>0} |a_{ii}| f_{ii} + \sum_{a_{ii}<0} |a_{ii}|(f_{ii} + (x - x^0)^2 - r^2) +$$
$$+ 2 \sum_{i,j=1,i<j}^{n} |a_{ij}|(f_{ij} + \frac{1}{2}((x - x^0)^2 - r^2) = bx + \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| f_{ii} +$$
$$+ 2 \sum_{i,j=1,i<j}^{n} |a_{ij}| f_{ij} + ((x - x^0)^2 - r^2)(\sum_{a_{ii}<0} |a_{ii}| + \sum_{i,j=1,i<j}^{n} |a_{ij}|) =$$
$$= f(x) + (-d_A^- + \frac{1}{2}(\|A\|_1 - d_A^+ - d_A^-))((x - x^0)^2 - r^2).$$

У позначеннях (7.24) цей вираз можна переписати у формі (7.23). □

Доведення. (теореми 7.12) Умову (B.129) представимо у вигляді

$$f(x) = bx + c + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in J_l} |a_{ii}| f_{ii} + 2 \sum_{l,l'=1,l \le l'}^{L} \sum_{i \in J_l, j \in J_{l'}, i<j}^{n} |a_{ij}| f_{ij} =$$
$$= bx + c + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in J_l} |a_{ii}| f_{ii} + 2 \sum_{l=1}^{L} \sum_{i,j \in J_l, i<j}^{n} |a_{ij}| f_{ij} + \tag{B.136}$$
$$+ 2 \sum_{l,l'=1,l<l'}^{L} \sum_{i \in J_l, j \in J_{l'}}^{n} |a_{ij}| f_{ij}.$$

Для функції (B.136), розв'язок Задачі 7.2.1 побудуємо у формі:

$$F(x) = bx + c + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_l} |a_{ii}| F_{ii}^l + 2 \sum_{l=1}^{L} \sum_{i,j \in J_l, i<j} |a_{ij}| F_{ij}^l +$$
$$+ 2 \sum_{l,l'=1,l<l'}^{L} \sum_{i \in J_l, j \in J_{l'}} |a_{ij}| F_{ij}^{ll'}, \tag{B.137}$$

де F_{ij}^l – f_{ij}.CE ($i, j \in J_l$, $i \le j$, $l \in J_L$); $F_{ij}^{ll'}$ – f_{ij}.CE ($i \in J_l, j \in J_{l'}$, $l, l' \in J_L, l < l'$). До побудови $F_{ij}^l(x)$ застосуємо (B.131), (B.133), (B.135), у результаті чого маємо:

$$F_{ij}^l(x) = \begin{cases} f_{ij}(x),\ i = j,\ a_{ii} \ge 0; \\ f_{ij}(x) + \varphi_l(x),\ i = j,\ a_{ii} < 0; \\ f_{ij}(x) + \frac{1}{2}\varphi_l(x),\ i \ne j; \end{cases} \quad (i, j \in I_l,\ l \in J_L). \tag{B.138}$$

$F_{ij}^{ll'}(x)$ $(i \in J_l, j \in J_{l'},\ l, l' \in J_L, l < l')$ побудуємо подібно до (B.134).

$$f_{ij} = \pm x_i x_j = \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 - x_i^2 - x_j^2) \underset{E}{=} \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 +$$
$$+ (-x_i^2 + (x^l - x^{l0})^2 - r^{l2}) + (-x_j^2 + (x^{l'} - x^{l'0})^2 - r^{l'2})) =$$
$$= \frac{1}{2}((x_i \pm x_j)^2 + \sum_{i' \in I_l \setminus \{i\}} x_{i'}^{l2} - 2x^l x^{l0} + x^{l02} - r^{l2} +$$
$$+ \sum_{i' \in I_{l'} \setminus \{j\}} x_{i'}^{l'2} - 2x^{l'} x^{l'0} + x^{l'02} - r^{l'2} = F_{ij}^{ll'}(x).$$

У позначеннях (7.30) отримуємо:

$$F_{ij}^{ll'}(x) = f_{ij}(x) + \frac{1}{2}((x^l - x^{0l})^2 - r^l) + (x^{l'} - x^{0l'})^2 - r^{l'})) = f_{ij}(x) +$$
$$\frac{1}{2}(\varphi_l(x) + \varphi_{l'}(x))\ (i \in I_l,\ j \in I_{l'},\ l, l' \in J_L,\ l < l'). \tag{B.139}$$

Підставляємо (B.138), (B.139) у (B.137) і остаточно одержуємо:

$$F(x) = bx + c + \sum_{l=1}^{L} (\sum_{i \in I_l} |a_{ii}| f_{ii} + \varphi_l(x) \sum_{i \in I_l, a_{ii} < 0} |a_{ii}| +$$
$$+ \sum_{i,j \in J_l, i<j} (|a_{ij}| f_{ij} + |a_{ij}| \varphi_l(x))) +$$
$$+ \sum_{l,l'=1, l<l'}^{L} \sum_{i \in J_l, j \in J_{l'}} |a_{ij}| (f_{ij}(x) + \frac{1}{2}(\varphi_l(x) + \varphi_{l'}(x))) =$$
$$= f(x) + \sum_{l=1}^{L} \varphi_l(x) \sum_{i \in I_l} \frac{1}{2}(\|A_l\|_1 - d_{A_l}^{+} + d_{A_l}^{-}) + \sum_{l,l'=1, l<l'}^{L} \frac{1}{2} \|A_{ll'}\|_1 (\varphi_l(x) + \varphi_{l'}(x)),$$

що у точності є виразом (7.28) у позначеннях (7.29). □

Доведення. (теореми 7.13) Рівність $\prod_{i=1}^{n} x_i \underset{E'}{=} \prod_{i=1}^{n} g_i$ у позначеннях (7.42) має вигляд $u_n(x) = u_n(g)$, а після логарифмування –

$$\sum_{i \in J_n} \ln\ x_i = \ln\ u_n(g). \tag{B.140}$$

Здійснимо перетворення над $p_l(x)$ у формі (7.38), враховуючи (7.41), (B.140):

$$\begin{gathered} f(x) = p_l(x) = a \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} l_j \ln x_j\right\} \underset{E_{nk}(G)}{=} a \exp\{-\sum_{j=1}^{n} (\mu - l_j) \ln x_j + \\ + \mu \cdot \ln\ u_n(g)\} = a \cdot \ln^{\mu} u_n(g) \prod_{j=1}^{n} x_j^{l_j - \mu} = F(x). \end{gathered} \tag{B.141}$$

Функція $-\sum\limits_{j=1}^{n} (\mu - l_j) \ln x_j$ є опуклою у $\mathbb{R}^n_{>0}$, відповідно, і функція $F(x)$ у правій частині (B.141) є опуклою у цьому ортанті як монотонно зростаюча опукла функція від опуклої. До того ж, $F(x)$ є продовженням $f(x)$ з множини E', отже, це є CE цього моному на $\mathbb{R}^n_{>0}$. □

B.7 Додатки до розділу 8

Доведення. (теореми B.7) Нехай на VLS E розв'язується ECOP1. Здійснимо еквівалентні перетворення цієї задачі. З цією метою представимо блок її обмежень-рівностей у вигляді

$$f_i^2(x) \leq 0,\ -f_i^2(x) \leq 0,\ i \in I^2. \tag{B.142}$$

Для функції $f(x)$ і функцій, що стоять у лівих частинах обмежень-нерівностей ECOP1 та (B.142), побудуємо опуклі продовження на $K = \mathbb{R}^n$, які існують згідно з насл. 7.1. Отримаємо C'ECOP, у якій $F(x)$ – є $f(x)$.CE; $F_i^1(x)$ – є $f_i^1(x)$.CE, $i \in I^1$; $F_i^2(x)$ – $f_i^2(x)$.CE, $F_i^3(x)$ – $-f_i^2(x)$.CE, $i \in I^2$. При цьому областю продовжень виступає E, а областю, на яку продовження відбуваються, – це $\mathbb{R}^n$.

За означенням продовження функції, разом із (1.43), виконується

$$F_i^1(x) \underset{E}{=} f_i^1(x),\ i \in I^1; F_i^2(x) \underset{E}{=} f_i^2(x), F_i^3(x) \underset{E}{=} -f_i^2(x),\ i \in I^2,$$

що свідчить про справедливість включення допустимої області E' задачі

ECOP1 у допустиму область E'' задачі C'ECOP, отже, $E' \subseteq E''$. Еквівалентність вихідної ECOP1 побудованій C'ECOP передбачає, що $E' = E''$. Припустимо, що це не виконано, отже, $E' \supset E''$, тобто $\exists\, x^0 \in E$, $\exists\, i \in I^1$ або $\exists\, j \in I^2$, такі, що хоч одна з таких умов виконана:

$$f_i^1(x^0) > 0,\ F_i^1(x^0) \leq 0, \tag{B.143}$$

$$f_j^1(x^0) \neq 0,\ F_j^2(x^0) \leq 0,\ F_j^3(x^0) \leq 0. \tag{B.144}$$

Скористаємося означенням продовжень функцій. Умова (B.143) еквівалентна $f_i^1(x^0) > 0,\ f_i^1(x^0) \leq 0$, тобто дісталися протиріччя. Умова (B.144) еквівалентна $f_j^1(x^0) \neq 0,\ f_j^2(x^0) \leq 0,\ f_j^2(x^0) \leq 0$, яка також не виконана для жодної точки. Отже, $E' \supseteq E''$, звідки слідує $E' = E''$ та еквівалентність C'ECOP та ECOP1. □

Наведемо короткий огляд математичних моделей ECOPs, представлених у роботах [80, 181, 182, 184, 302, 312, 334–337, 342, 345–347] у термінах задач на множинах e–конфігурацій, а також ECO-методів, що застосовувані до їх розв'язання.

У [334] запропоновано математичну модель розміщення виробництва як лінійну умовну ECOP на загальній $\mathcal{C}_b$-множини перестановок E (далі Задача B.7.1). У системі обмежень виділяються «регулярні» обмеження, коефіцієнти яких набувають значення 0,1. Пропонується ітераційна процедура аналізу H–представлення $P = convE$ та додаткових обмежень з метою зменшення допустимої області поліедральної релаксаційної задачі, зведення задачі до оптимізації на $\mathcal{C}_b$-множини поліперестановок, що є власною підмножиною E, та скорочення кількості додаткових обмежень. До задачі, що сформувалася після уточнення, пропонується застосовувати метод посилення обмежень [310, 370] для одержання допустимого розв'язку і скорочення області пошуку з подальшим застосуванням МКВ [261, 292, 363].

Крім того, до Задачі В.7.1 можна застосувати PSpMs, як B&B.PSpM, так і GPSpM [185, 186], метод поверхнево-комбінаторних відсікань SCCM [314]. Крім того, додаткові обмеження можна запустити у штрафну функцію зі штрафами типу $(b-ax)_+^2$ та застосувати метод штрафних функцій, де на кожному кроці розв'язок допоміжної опуклої задачі шукається модифікованим методом умовного градієнта [186, 330, 331].

У [337] запропоновано ряд математичних моделей задач виконання програмного пакету за мінімальний час (ЗВПП) як задач одновимірного та двовимірного упакування. Для ЗВПП у декілька потоків достатньої потужності побудована математична модель являє собою умовну лінійну задачу на $\mathcal{C}$–множині E, що утворюється у перетині $\mathcal{C}_b$-множин перестановок та поліСполучень. До її розв'язання пропонується також застосовувати МКВ. Враховуючи, що E – є PSpS та PES, до розв'язання ECOPs на ній також можна застосувати як SCCM, PSMs (B& B.PSM і GPSM), зокрема, застосовуваними є PSpMs.

У [345, 346] розглянуто задачі розміщення прямокутних модулів на чіпі з різними критеріями оптимальності. Задачі формулюються як задачі частково-булевої оптимізації з лінійною або опуклою кусково-лінійною цільовою функцією та додатковими лінійними обмеженнями. Пропонується застосувати до їх розв'язання узагальнення МКВ із $\mathcal{C}$–множини перестановок на булеві $\mathcal{C}$–множини, а також зведення вихідної задачі до задачі нелінійного програмування за допомогою застосування до булевих змінних f–представлення (B_n.SR1) із подальшим використанням методів глобальної оптимізації. У термінах e–конфігурацій, допустима область сукупності булевих змінних являє собою $\mathcal{C}_b$-множину булевих полірозміщень E з додатковими регулярними обмеженнями. Компонентами E як декартова добутку $\mathcal{B}$Ss є множини, комбінаторно ізоморфні $E' = E'' \cup \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 \leq \leq 1, x_3 + x_4 \leq 1\}$, де $E'' = E_{52}^4(\{0^3, 1^2\})$, при цьому множина E' задає усі можливі взаєморозташування пари модулів на чіпі. Досліджуються властивості E' та $P' = convE'$, незвідне H–представлення якого має вигляд: $P' = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \ x_1 + x_2 \leq 1, x_3 + x_4 \leq 1, x^T e \geq 1\}$, та пропонується метод розв'язання поставленої задачі на основі їх використання. E' є дворівневою та повновимірною $\mathcal{C}$–множиною, отже, її біквадратне дотичне f–представлення існує згідно з теоремою (5.7). Те саме можна сказати і про усю множину E, що є також повновимірною 2LS як декартовий добуток повновимірних 2LSs [369]. Відповідно, до розв'язання ECOP на E можуть бути застосовані усі підходи, наведені у п. 8.2.

У [312] пропонується математична модель такої задачі: вирішується питання про модифікацію комп'ютерного кластера, заданого топологією у вигляді геометричного графа, шляхом додавання допоміжних з'єднань між вузлами та з метою збільшення ефективності роботи кластера. Як базову топологію обрано граф гіперкуба Q_n, а оновленої топології – повний граф K_n, об'єднаний із $n-1$ графами Джонсона $K_n(m)$ розрізів гіперкуба площиною $x^T e = m$, $m \in J_{n-1}$ (далі граф $\mathcal{G}_n$). Досліджено властивості $\mathcal{G}_n$ та проаналізовано доцільність переходу до відповідної топології залежно від відстаней між компонентами кластера та вартості їх з'єднань.

У [184] запропоновано математичну модель оптимізації роботи телекомунікаційної мережі (далі Задача B.7.2) як двокритеріальної умовної квадратичної задачі на C_b-множині, що є декартовим добутку C_b-множин $E' = E_{nk}(G)$ та $E'' = B_N$. До розв'язання Задачі B.7.2 пропонується застосовувати PSpM після попереднього уопуклювання цільових функцій. Будуються опуклі квадратичні продовження цільових функцій та квадратичних обмежень, що використовують поліедрально-сферичність E', E'' та здійснюється перехід до C'ECOP на базі теореми 8.1. У роботі [302] також досліджуються властивості множини $E = E' \times E''$ та екстремальні властивості квадратичних функцій на ній, а також представлені окремі випадки Задачі B.7.2, що дозволяють постановку як задач умовної лінійної оптимізації на множині E', та пропонуються графові підходи до її розв'язання на основі побудови структурного графу $\mathcal{G}'$ даної ECOP [286].

У роботах [80, 180, 183] запропоновано багатошарову модель соціальної мережі як зваженого графу з атрибутами вершин та ребер, метою розгляду якої є рекурсивне виявлення кластерів (Community Detection Problem, CDP) на основі визначення найважливіших атрибутів, закладених в основу формування мережі. CDP традиційно ставиться як COP на графі [180], цільовою функцією якої є модулярність (a modularity) або провідність (a conductance). Відповідна ECOP у обох випадках являє собою UBQP, відповідно, в силу дворівневості B_n, до її розв'язання застосовувані усі підходи, викладені у п. 8.2 після уопуклювання, яке можна здійснити, наприклад, за формулою (7.32). Інші підходи до розв'язання CDP-проблеми як ECOP наведені у [80]. $\mathcal{C}_b$-множиною CDP є $\mathcal{C}_b$-множина B_n

У [181] представлено ряд моделей задачі капітального бюджетування (a capital-budgeting problem, CBP) (далі *Задача B.7.3*) як лінійні умовні ECOPs на $\mathcal{B}$S, на $\mathbb{Z}$S та на $\mathcal{C}_b$-множині сполучень, у результаті чого виникають три $\mathcal{C}_b$-множини цієї задачі, дві з яких нами не розглядалися. Показано підходи до розв'язання Задачі B.7.3 залежно від обраної моделі та вигляду f–представлення допустимої $\mathcal{C}$–множини, що використовується при її приведенні до CECOP. Крім цього, досліджено особливості використання у даному випадку PSpM та SCCM.

У COP-постановках задач про призначення, допустимою множиною є $\mathcal{E}_c$-множина перестановок P_n або $\mathcal{M}_b$-множина $\Pi_n^M(G)$ матриць перестановок, а у ECOP-постановках – $\mathcal{C}_b$-множина $\mathcal{E}_n$ матриць перестановок. Особливості застосування PSpM для задач даного класу викладено у [315].

У роботах [182, 316] представлено моделі розміщення кругових та кругоподібних об'єктів, в основу яких покладено математичну модель, наведену у п. 8.4. Так у [182] розглядається VLSI-задача, метою якої є вибір плати найменшої собівартості при фіксованому пакеті модулів за умови, що чіпи: а) прямокутні або квадратні та дозволяють ортогональні повороти

(Сім'я 1); б) квадратні, восьмикутні та дозволяють повороти на 45^0, зокрема, ортогональні повороти (Сім'я 2). Для моделювання модулів Сім'ї 2 як об'єктів розміщення використовується: а) можливість їх представлення суперпозицією абсолютної та максимальної норм; б) той факт, що вони є кулями у певному нормованому просторі; в) належність їх до класу загальних $\mathcal{C}_b$–багатогранників перестановок зі знаком. Об'єкти та область розміщення характеризуються $m = 2$-ма метричними характеристиками, які утворюють кортеж за умови, якщо ортогональні повороти не допускаються, або множину перестановок елементів цього кортежу, якщо допускаються. В останньому випадку задача моделюється як ECOP на $\mathcal{P}$S E, прообраз якої відомий як е-множина перестановок перестановок або композиція перестановок [254, 279]. E представляє собою об'єднання $\mathcal{C}_b$-множин поліперестановок, з іншого боку – як об'єднання $\mathcal{C}_b$-множин перестановок векторів, тобто є $\mathcal{C}_b$-множиною згідно заув. (3.10). Цей новий клас $\mathcal{C}_b$-множин представляє особливий інтерес для дослідження у силу зазначеної їх властивості у моделюванні GDPs.

У [316] розглядається випадок розміщення однопараметричних об'єктів, що є кулями у деякому метричному просторі, відповідно, допустимою областю побудованої ECOP є числова $\mathcal{C}_b$-множина $E_{nk}(G)$. У [336, 342] представлено лінійні ECOP-моделі одновимірного та двовимірного упакування, допустимими областями яких є $\mathcal{B}$Ss та $\mathcal{P}$Ss, та запропоновано методи їх розв'язання з урахуванням специфіки задач.

У [184, 335] представлено різні версії математичної моделі побудови меню закладу громадського харчування як лінійної умовної ECOP на булевій $\mathcal{C}_b$-множині. Частина обмежень задачі є регулярними, що дозволяє її формулювання як задачі лінійної оптимізації на булевій $\mathcal{C}_b$-множині полірозміщень із додатковими лінійними обмеженнями. У силу лінійності та поліноміальної кількості обмежень у (E.PSpR), до розв'язання даної задачі пропонується використовувати метод посилення обмежень для пошуку наближеного розв'язку або SCCM для PSpSs для точного її розв'язання.

C ДОДАТОК. Акти впроваджень

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор
Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський
авіаційний інститут»
д-р техн. наук, професор

_____________ М.В. Нечипорук

«___» _________ 2018р.

Акт

впровадження результатів дисертаційної роботи
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Пічугіної Оксани Сергіївни у науково-дослідницьку роботу
Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Ми, що підписалися нижче, декан факультету систем управління літальними апаратами к.т.н., доцент Заболотний О.В., заступник декана факультету систем управління літальними апаратами з наукової роботи к.т.н., доцент Яшина О.С., завідувач кафедри інформатики, д.т.н., професор Чухрай А. Г., склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Пічугіної Оксани Сергіївни впроваджені у науково-дослідницьку роботу кафедри інформатики, а саме:

– Загальна методика формулювання оптимізаційних комбінаторних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій;

– Підходи до моделювання дискретних задач у термінах неперервних змінних, що використовують неперервні функціональні представлення множин евклідових комбінаторних конфігурацій;

– Підходи до декомпозиції та розкладань комбінаторних множин, що ґрунтуються на аналізі геометричних особливостей їх образів після зануренні в арифметичний евклідів простір і які можна використати при побудові та перегляді дерев розв'язків;

– Методики зведення задач комбінаторної оптимізації до задач на вершинно розташованих множинах;

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 | Підпис / Печатка | Л.В. Колесник

– Методи побудови неперервних релаксацій задач комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах, що ґрунтуються на використанні опуклих продовжень функцій;

– Математичні моделі практичних задачах геометричного проектування та оптимального планування як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Результати проведеного наукового дослідження дозволили підвищити ефективність методів оптимізації складних систем, розширити класи складних задач, що розв'язуються за придатний час, покращити якість інформаційних технологій підтримки прийняття рішень.

Декан факультету систем управління літальними апаратами, к.т.н., доцент	О.В. Заболотний
Заступник декана факультету систем управління літальними апаратами з наукової роботи, к.т.н., доцент	О.С. Яшина
Завідувач кафедри інформатики, д.т.н., професор	А.Г. Чухрай

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 $\dfrac{\text{Підпис}}{\text{Печатка}}$ Л.В. Колесник

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної роботи
Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський
авіаційний інститут»
д-р техн. наук, професор
_______________________ В.М. Павленко

«10» травня 2018р.

Акт
впровадження результатів дисертаційної роботи
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
Пічугіної Оксани Сергіївни у навчальний процес
Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Ми, що підписалися нижче, голова методичної комісії факультету систем управління літальними апаратами к.т.н., доцент Анікін А. М., завідувач кафедри інформатики д.т.н., професор Чухрай А. Г., к.т.н., доцент кафедри інформатики Скоб Ю.О., склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Пічугіної Оксани Сергіївни впроваджені у навчальний процес Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» при викладанні наступних дисциплін:

- «Дискретна математика»;
- «Математичні моделі і методи у дослідженні операцій і логістиці»;
- «Математичні моделі природничих процесів»;
- «Моделювання соціально-економічних процесів»;
- «Методи оптимізації та дослідження операцій»;
- «Теорія оптимальних систем».
- «Теорія графів»;

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 Підпис / Печатка Л.В. Колесник

При викладанні наведених дисциплін використовують:

- підходи до математичного моделювання комбінаторних задач за допомогою евклідових комбінаторних конфігурацій;
- графи комбінаторних многогранників та графи, що будуються на їх основі;
- методи евклідової комбінаторної оптимізації, що використовують досліджені алгебро-топологічні, тополого-метричні та екстремальні властивості множин евклідових комбінаторних конфігурацій;
- математичні моделі практичних задач у термінах евклідових комбінаторних конфігурацій.

Результати дисертаційної роботи О.С. Пічугіної було використано при підготовці навчально-методичного посібника «Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів», впровадженого у навчальний процес. Результати даної роботи впроваджені у програму курсових та дипломних робіт бакалаврів і магістрів за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» та 113 «Прикладна математика».

Голова методичної комісії
Факультету систем управління
літальними апаратами
к.т.н., доцент — А. М. Анікін

Завідувач кафедри інформатики,
д.т.н., професор — А. Г. Чухрай

Науковий секретар кафедри інформатики,
к.т.н., доцент — Ю. О. Скоб

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 — Підпис / Печатка — Л.В. Колесник

Затверджую
Проректор з наукової та міжнародної роботи
Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка
____________________________С.П. Сівіцька
«[illegible]» червня 2018 р.

Довідка про впровадження
результатів дисертаційної роботи
Пічугіної Оксани Сергіївни
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук на тему
«Математичне моделювання евклідових комбінаторних конфігурацій»

Даною довідкою підтверджую, що результаті наукових досліджень за темою дисертаційної роботи Пічугіної Оксани Сергіївни «Математичне моделювання евклідових комбінаторних конфігурацій» було впроваджено у науково-дослідницькій роботі кафедри прикладної математики, інформатики і математичного моделювання (нині кафедри вищої та прикладної математики), що виконувалася за рахунок коштів загального фонду державного бюджету №59/03 «Методи відсікання в евклідовій комбінаторній оптимізації та розвиток її теорії» (державний реєстраційний номер 0205U000797): розділ 2 "Подальше дослідження властивостей комбінаторних многогранників та їх застосування у розв'язанні умовних і параметричних задач оптимізації. Практичні застосування", розділ 8 "Алгоритмізація методів комбінаторної оптимізації. Оцінка ефективності", розділ 9 "Програмна реалізація алгоритмів евклідової комбінаторної оптимізації".

В рамках виконаних робіт в якості виконавця автором досліджено нові властивості евклідових комбінаторних множин, розроблено методи евклідової комбінаторної оптимізації, створено обчислювальні алгоритми, проведено числові експерименти та побудовано математичні моделі практичних задач.

Завідувач кафедри вищої та прикладної
математики, доктор фізико-математичних
наук, професор

Сєров М.І.

Інформація вірна
Провідний фахівець НДЧ Чурса Ю.В

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 Підпис / Печатка Л.В. Колесник

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Ректор Харківського національного
університету радіоелектроніки,

_______________ Семенець В.В.

"15" 11 ______ 2018

АКТ

про впровадження результатів докторської дисертації докторанта кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки
Пічугіної Оксани Сергіївни на тему «Математичне моделювання евклідових комбінаторних конфігурацій»"

У період з __14 жовтня____ по __16 жовтня__2018 р. комісія у складі: голови комісії Тевяшева А.Д., зав.каф. прикладної математики (ПМ), д.т.н., проф., членів комісії: Долгоброд О.Г. – відповідального виконавця д/б теми №293-4, с.н.с., та Матвієнко О.І., м.н.с., провела роботу з аналізу представлених матеріалів досліджень та склала цей акт, що підтверджує використання результатів дисертації О.С. Пічугіної у роботі НДЧ ХНУРЕ за д/б темою №293 «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку», № держреєстрації 0115U001522, розділ 4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста».

Оскільки НДЧ кафедри ПМ ХНУРЕ веде роботи по розробці методології математичного моделювання техніко-економічних систем, що забезпечують їх стійкий розвиток, особливий інтерес представляє розділ дисертаційної роботи, де представлено математичні моделі практичних задач як задач оптимізації на евклідових комбінаторних конфігураціях та які можуть застосовуватися до вирішення проблем забезпечення стійкості розвитку міст. Застосування евклідових комбінаторних конфігурацій як засобу моделювання проблем життєдіяльності ЖКГ міста дозволяє побудову адекватних моделей за рахунок закладеної у їх формуванні можливості врахування специфіки цих задач, таких як стохастичність та дискретно-неперервність.

Впроваджено наступні наукові результати дисертаційної роботи:

- Математичну модель розвитку ЖКГ як задачу оптимізації на евклідових комбінаторних конфігурацій перестановок та булевих векторів, вихідна та результуюча множини яких частково змінюються

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 — Підпис / Печатка — Л.В. Колесник та мають стохастичний характер;

- Неперервні постановки цієї моделі, що ґрунтуються на використанні побудованих у дисертацій неперервних функціональних представлень допустимих областей. Це дозволило застосовувати в комплексі нелінійне та дискретне програмування у стратегічному плануванні стійкого розвитку та функціонування підприємств ЖКГ міста.

Акт складено для пред'явлення до Спеціалізованої Вченої Ради із захисту дисертацій. Акт не може бути підставою для фінансових розрахунків, премій та інших винагород.

Голова комісії:
Зав.каф. Прикладної математики, професор, д.т.н.____________ А.Д. Тевяшев

Члени комісії:

Відповідальний виконавець д/б теми №293-4, с.н.с ________ О.Г. Долгоброд

К.т.н. ____ О.І. Матвієнко

Згідно з оригіналом.

Вчений секретар спецради Д 64.052.02 $\frac{\text{Підпис}}{\text{Печатка}}$ Л.В. Колесник

D ДОДАТОК. Список позначень

J_n	$\{1, ..., n\}$
J_n^0	$\{0, ..., n\}$
$\{x\}$	$\{x_1, ..., x_n\}$ для $x = (x_i)_{i\in J_n}$
(X)	$(x_1, ..., x_n)$ для $X = \{x_i\}_{i\in J_n}$
$\mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{e}$	одинична матриця, матриця з одиниць, вектор з одиниць відповідної розмірності
$\mathbf{E}(k)$	одиничний базис у $\mathbb{R}^k$ – $\mathbf{E}(k) = \{\mathbf{e}_j\}_{j\in J_k}$
Π	$\mathcal{E}_c$-множина
Π^M	$\mathcal{M}$-множина
E, E^N	числова та векторна $\mathcal{C}$-множини
P, P^N	опукла оболонка E, E^N
B, A	вихідна та результуюча множини для Π
χ, ψ	відображення B/J_n у A
π, x	c-конфігурація/ e-конфігурація – $x = \varphi(\pi)$
$n = \|B\|$	потужність вихідної множини для Π; розмірність простору, у якому задана E
$\mathbf{A}$	результуюча множина Π з векторів розмірності m
$N = m\dot{n}$	розмірність простору, у якому задана E^N
d_E	розмірність P/E
$\mathbf{V}$	$vert(P)$
G	індукуюча мультимножина для E, $\eta = \|G\|$ ($G = \{g_1, ..., g_\eta\}$, де $g_i \leq g_{i+1},\ i \in J_{\eta-1}$)
$\mathcal{A}$	твірна множина для E – $\mathcal{A} = S(G)$, $k = \|\mathcal{A}\|$ ($\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_k\}$, де $e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1}$)
$\tilde{A}$, $\mathcal{A}^N$	індукуюча мультимножина та твірна множина для E^N, $\eta^N = \|\tilde{A}\|$, $k^N = \|\mathcal{A}^N\|$;

T	комбінаторний тип $\mathcal{C}$-множини
$E(a,r)$	PSpS $E \subset S_r(a)$
$\widehat{E}(\hat{a},\hat{r})$	PSpS $E \subset S_{\hat{r}}(\hat{a})$
$\hat{a},\hat{r}$	центр і радіус PSpS E
S^0	описана навколо E сфера з центром у початку координат
S^{min}	описана сфера мінімального радіуса $S^{min} = S_{\hat{r}}(\hat{a})$
$\mathbb{Z}\mathbf{S}/\mathbb{Q}\mathbf{S}$	цілочисельна/раціонально-значна $\mathcal{C}$-множина
$\mathbb{U}(\Delta)\mathbf{S}$	рівномірно-розподілено значна $\mathcal{C}$-множина з кроком Δ
$\mathcal{P}\mathbf{S}/\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина перестановок/розміщень
$\mathcal{S}\mathbf{S}$	спеціальна $\mathcal{C}$-множина
$\mathcal{B}\mathbf{S}/\mathcal{B}'\mathbf{S}/\mathcal{T}\mathbf{S}$	булева/бінарна/трійкова $\mathcal{C}$-множина
$\mathcal{S}\mathcal{P}\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина перестановок зі знаком
$\mathcal{S}\mathcal{P}\mathbf{S}^I$,$\mathcal{S}\mathcal{P}\mathbf{S}^{II}$	$\mathcal{S}\mathcal{P}$S I-го та II-го типу
$\overline{\mathcal{P}}\mathbf{S}/\overline{\mathcal{P}\mathcal{P}}\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина поліперестановок/полірозміщень
$\mathcal{R}^-\mathbf{S}/\mathcal{R}^+\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина без повторень/із повтореннями
$\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbf{S}/\mathcal{O}\mathcal{P}\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина парних/непарних перестановок
$\mathcal{E}\mathcal{B}\mathbf{S}/\mathcal{O}\mathcal{B}\mathbf{S}$	$\mathcal{C}$-множина парних/непарних булевих векторів
$E_{nk}(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок
$E^{\pm}_{nk}(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок зі знаком
$E^n_{\eta k}(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина розміщень
$E_n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина перестановок без повторень
$E^{\pm}_n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина перестановок зі знаком без повторень
$E^n_k(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина розміщень без повторень
$\overline{E}^n_k(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина розміщень з необмеженими повтореннями
$E^e_n(G)/E^o_n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина парних/непарних перестановок
$P^{[..]}_{[.]}(.)/\Pi^{[..]}_{[.]}(.)$	для множини $E^{[..]}_{[.]}(.)$ – $\mathcal{E}_c$-множина, що є її прообразом/ $\mathcal{C}_b$-многогранник $conv(E^{[..]}_{[.]}(.))$
B_n/PB_n	булева $\mathcal{C}_b$-множина, булевий $\mathcal{C}_b$-багатогранник
B'_n/PB'_n	бінарна $\mathcal{C}_b$-множина, бінарний $\mathcal{C}_b$-багатогранник

$B_n(m)$	$\mathcal{C}_b$-множина булевих перестановок
$PB_n(m)$	$\mathcal{C}_b$-багатогранник булевих перестановок
$B_n(m_1, m_2)$	$\mathcal{C}_b$-множина булевих розміщень $(0 \le m_1 < m_2 \le n)$
$PB_n(m_1, m_2)$	$\mathcal{C}_b$-багатогранник булевих розміщень $(0 \le m_1 < m_2 \le n)$
$B_n^{\pm}(m)$	$\mathcal{C}_b$-множина трійкових перестановок зі знаком
$PB_n^{\pm}(m)$	$\mathcal{C}_b$-багатогранник трійкових перестановок зі знаком
$B_n^h/\overline{B}_n^h$	$\mathcal{C}_b$-множина парних/непарних булевих векторів (булева парна/непарна $\mathcal{C}$-напівмножина)
$PB_n^h/\overline{PB}_n^h$	$\mathcal{C}_b$-багатогранник парних/непарних булевих векторів
$E_{\overline{n}\overline{k}}(G)/E_{\overline{\eta}\overline{k}}^{\overline{n}}(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина поліперестановок/полірозміщень, $\overline{n} = (n_l)_{l \in J_L}$, $\overline{k} = (k_l)_{l \in J_L}$, $\overline{\eta} = (\eta_l)_{l \in J_L}$
$E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок векторів
$E_{G^N}(N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина перестановок векторів без повторень
$E_{N2}(G^N, \mathbf{A})$	спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок векторів
$E_N^e(G^N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина парних перестановок векторів
$E_N^o(N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина непарних перестановок векторів
$E_{\eta^N k^N}^N(G^N, \mathbf{A})$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів
$\overline{E}_{k^N}^N(G^N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів без повторень
$E_{k^N}^N(G^N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів з необмеженими повтореннями
$E_{\eta^N 2}^N(G^N, \mathbf{A})$	спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів
$E_{Nk^N}^{\pm}(G^N, \mathbf{A})$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок зі знаком векторів
$E_N^{\pm}(G^N, \mathbf{A})$	$\mathcal{C}_b$-множина перестановок векторів зі знаком без повторень
$E_{N2}^{\pm I}(G^N, \mathbf{A})$	спеціальна $\mathcal{C}_b$-множина перестановок зі знаком векторів
$B_N(G^N, \mathbf{A})$	булева $\mathcal{C}_b$-множина перестановок векторів
$B_{\eta^N}^N(G^N, \mathbf{A})$	булева $\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів
$\overline{B}_N(G^N, \mathbf{A})$	булева $\mathcal{C}_b$-множина розміщень векторів із необмеженими повтореннями
$B_N^h(G^N, \mathbf{A})$	парна $\mathcal{C}_b$-напівмножина

$\overline{B}_N^h(G^N, \mathbf{A})$	непарна $\mathcal{C}_b$-напівмножина
$\Pi_{nk}^M(G)$, Π_{nk}^M	загальна $\mathcal{M}_b$-множина матриць перестановок
$\Pi_n^M(G)$,Π_n^M	$\mathcal{M}_b$-множина матриць перестановок
$\Pi_{\eta k}^{nM}(G)$	загальна $\mathcal{M}_b$-множина матриць розміщень
$\Pi_k^{nM}(G)$	$\mathcal{M}_b$-множина матриць розміщень
$\Pi_{nk}^{\pm M}(G)$	$\mathcal{M}_b$-загальна множина матриць перестановок зі знаком
$\Pi_n^{\pm M}(G), \Pi_n^{\pm M}$	$\mathcal{M}_b$-множина матриць перестановок зі знаком
$\mathcal{E}_{nk}(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина матриць перестановок
$\mathcal{E}_n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина матриць перестановок
$\mathcal{E}_{\eta k}^n(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина матриць розміщень
$\mathcal{E}_k^n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина матриць розміщень
$\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$	$\mathcal{C}_b$-загальна множина матриць перестановок зі знаком
$\mathcal{E}_n^{\pm}(G)$	множина матриць перестановок зі знаком
$\mathcal{E}_n^e$	$\mathcal{C}_b$-множина матриць парних перестановок
$S_{\eta k}^n(G)$	загальна $\mathcal{C}_b$-множина сполучень
$S_k^n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина сполучень без повторень
$\overline{S}_k^n(G)$	$\mathcal{C}_b$-множина розміщень з необмеженими повтореннями
$\mathcal{C}$**-множина**	множина е-конфігурацій
$\mathcal{E}_c$**-множина**	множина с-конфігурацій
$\mathcal{C}_b$**-множина**	базова множина е-конфігурацій
$\mathcal{M}_b$**-множина**	базова множина комбінаторних матриць
Π', E'	допустима область COP та ECOP
E, E'	у ECOP2 – $\mathcal{C}_b$-множина і $\mathcal{C}$-множина: $E' \subseteq E$
$lev(E)/lev'(E)$	рівневість E, рівневість E за координатами
$lev(P)$	рівневість P
$E.\mathbf{D}$	декомпозиція E
$\mathcal{F}$	сім'я функцій, що задає f-представлення E
$\langle\mathcal{F}\rangle$	ідеал, що породжується $\mathcal{F}$
$\Phi(E)$	сім'я функцій, що набуває значення 0 така, що $\mathcal{F} \subseteq \Phi(E)$

$\overline{G}$	середнє арифметичне елементів G
Σ_G^k	сума k-х степенів елементів G, $\Sigma_G = \Sigma_G^1$
$N_P(x)$	множина суміжних вершин $x \in vert\ P$
$\mathcal{R}_P(x)$	степінь регулярності $x \in vert\ P$ – $\mathcal{R}_P(x) = \|N_P(x)\|$
$\mathcal{R}_P$	степінь регулярності вершин P
f-представлення	неперервне функціональне представлення $\mathcal{C}$-множини
(E.**PSR)**	поліедрально-поверхневе f-представлення E
(E.**SR)**/**(**E.**UR)**	строге/нестроге f-представлення E
(E.**MR)**/**(**E.**IR)**	змішане/незвідне f-представлення E
(E.**IIR)**/**(**E.**TR)**	незвідне/пересічне/дотичне f-представлення E

E ДОДАТОК. Список скорочень

e-конфігурація	евклідова комбінаторна конфігурація
c-конфігурація	комбінаторна конфігурація (конфігурація за К. Бержем)
e-множина	евклідова комбінаторна множина
s-множина	образ e-множини у евклідовому просторі (спеціальна комбінаторна множина)
GS	твірна множина
IS	індукуюча множина
ECO	евклідова комбінаторна оптимізація
GP	геометричний дизайн
DP	задача прийняття рішення
CDP	комбінаторна DP
ECDP	евклідова CDP
ES	повний перебір
COP	задача комбінаторної оптимізації
MCOP/UCOP	багатокритеріальна/безумовна COP
FP	задача пошуку допустимого розв'язку
ECOP	евклідова COP, задача ECO
ECOP1	ECOP у формі задачі математичного програмування
ECOP2	ECOP1, прямі обмеження якої задають належність розв'язку $\mathcal{C}_b$-множині
CECOP	неперервна постановка ECOP
C'ECOP	CECOP з опуклими цільовою функцією і функціональними обмеженнями
PC	точкова конфігурація
FPC	скінченна PC
PBP	задача оптимізації на перестановках

BP	булева задача оптимізації
TSP	задача комівояжера
ETSP	евклідова TSP
TSP(ECO)	постановка TSP як ECOP
LAP	лінійна задача про призначення
QAP	квадратична задача про призначення
BaP	задача про небаланс
VLS	вершинно розташована $\mathcal{C}$-множина
SLS	поверхнево розташована $\mathcal{C}$-множина
PSS	поліедрально-поверхнева $\mathcal{C}$-множина
SpLS/ELS/SsLS	сферично/еліпсоїдально/суперсферична SLS
PSpS/PES/PSsS	поліедрально-сферично/еліпсоїдально/суперсферична $\mathcal{C}$-множина
2LS	дворівнева $\mathcal{C}$-множина
PSM	поліедрально-поверхневий метод розв'язання ECOPs на PSSs
PSpM	поліедрально-сферичний метод розв'язання ECOPs на PSpSs
B&B PSM	PSM гілок та меж
B&B PSpM	PSpM гілок та меж
GPM/ GPSpM	жадібний PSM/PSpM
МППО	метод послідовного під'єднання обмежень
МКВ	метод комбінаторних відсікань оптимізації на VLSs
SCCM	метод поверхнево-комбінаторних відсікань оптимізації на PSSs
SCCM	метод поверхнево-комбінаторних відсікань оптимізації на PSSs
CE, f.CE	опукле продовження, опукле продовження f
SYM	метод Стояна–Яковлева опуклих продовжень поліномів

	з комбінаторних множин
MSYM	модифікований SYM
SAT	задача здійснимості булевих формул
k**-SAT,SNFSAT**	спеціальні випадки SAT
MWIS	задача про максимальну зважену незалежну множину вершин графа
MISP	задача про максимальну незалежну множину вершин графа
UBQP	безумовна булева квадратична задача
WDS	добре описана $\mathcal{C}$-множина
WPS	$\mathcal{C}$-множина, що дозволяє ефективне проектування на неї