Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

ПІЧУГІНА ОКСАНА СЕРГІЇВНА

Підпис

УДК 519.87

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки та Національному аерокосмічному університеті ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Міністерство освіти і науки України.

Науковий консультант:	доктор фізико-математичних наук, професор **Яковлев Сергій Всеволодович,** професор кафедри математичного моделювання та штучного інтелекту, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Козін Ігор Вікторович**, професор кафедри економічної кібернетики, Запорізький національний університет;
	доктор фізико-математичних наук, професор **Новожилова Марина Володимирівна,** завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова;
	доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Стецюк Петро Іванович,** завідувач відділу методів негладкої оптимізації, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Захист відбудеться «25» квітня 2019 р. о 13^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки, за адресою: 61166, Харків, пр. Науки 14 і на сайті спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 за електронною адресою: http://nure.ua/branch/d-64-052-02.

Автореферат розісланий «23» березня 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 *Підпис* Л. В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Суттєве ускладнення реальних задач, що потребують вирішення на даний момент, висувають нові вимоги до їх математичного моделювання і адаптації до застосування наявного математичного апарату. Це викликає необхідність введення нових математичних об'єктів, які б дозволили формалізувати ці задачі, враховуючи їх дискретно-неперервний та екстремальний характер. Такі об'єкти, з одного боку, мають відображати комбінаторні структури, що виділяються в задачах, а з іншого, – мають сполучати комбінаторні простори, що при цьому виникають, з неперервними, такими, як евклідів простір, для того, щоб весь арсенал сучасної теорії оптимізації став застосовним до розв'язання поставлених задач.

Так, класичними математичними об'єктами, що подають комбінаторні структури у формі відображень, є конфігурації за К. Бержем. Крім цього, в рамках виділення комбінаторної структури в задачах геометричного проектування свого часу Ю. Г. Стояном були введені евклідові комбінаторні множини (е-множини) як математичні об'єкти, розв'язання екстремальних задач на яких можливе шляхом оптимізації на образах е-множин у евклідовому просторі. Згодом дослідження екстремальних комбінаторних задач на образах е-множин виділилося у напрямок «евклідова комбінаторна оптимізація» (ECO), яка займається комплексним дослідженням властивостей образів е-множин, заданих на них функцій, розробленням на їх основі методів оптимізації та проблемами моделювання реальних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Таким чином, для вирішення проблем моделювання екстремальних комбінаторних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації актуальним є введення нових математичних об'єктів, що поєднують конфігурації за К. Бержем з е-множинами, а також пошук нових інструментальних засобів розв'язання цих задач методами нелінійної, зокрема дискретної, оптимізації. Тому важливим є як подальший розвиток евклідової комбінаторної оптимізації у зазначених напрямках, так і поєднання її з класичною теорією оптимізації. Все це приводить до необхідності вирішення актуальної проблеми розроблення загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, відображених у евклідів простір.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в період з 2013 р. по 2018 р. на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки та кафедрі інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут». Дисертаційну роботу виконано відповідно до плану науково-дослідних робіт Харківського національного університету радіоелектроніки та наказу Міністерства освіти і науки України в рамках держбюджетної теми № 293 «Розробка методології і математичних моделей соціально-економічних систем при реалізації їх стійкого розвитку», розділ №293-4 «Розробка математичних моделей і методів управління стійким розвитком ЖКГ міста» (№ ДР 0115U001522), в якій дисертант був одним із співвиконавців. У рамках виконаних робіт як виконавця автором досліджено нові властивості евклідових комбінаторних множин, розроблено методи евклідової комбінаторної оптимізації, побудовано математичні моделі практичних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Мета та задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є математичне моделювання комбінаторних конфігурацій при їх відображеннях у евклідів простір та дослідження екстремальних задач на евклідових комбінаторних конфігураціях.

Досягнення мети роботи пов’язано із постановкою та розв’язанням таких задач:

– аналіз підходів до відображення комбінаторних конфігурацій в евклідів простір та виділення нових математичних об’єктів – евклідових комбінаторних конфігурацій, що є результатом даного відображення;

– аналіз і класифікація екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій залежно від вигляду допустимої області та заданих на ній функцій;

– формування типології множин евклідових комбінаторних конфігурацій та дослідження алгебро-топологічних і тополого-метричних властивостей різних класів таких множин;

– аналіз і побудова аналітичних моделей множин евклідових комбінаторних конфігурацій;

– дослідження властивостей функцій, заданих на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій, включаючи пошук шляхів побудови опуклих продовжень та оцінки мінімумів функцій для спеціальних класів множин і функцій;

– побудова та дослідження математичних моделей екстремальних комбінаторних задач як оптимізаційних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій та;

– розроблення методології дослідження екстремальних задач на множинах евклідових комбінаторних конфігурацій та її реалізація на модельних задачах.

Об’єктом дослідження є процес математичного моделювання комбінаторних конфігурацій.

Предметом дослідження є властивості екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, відображених у евклідів простір.

Методи досліджень. У роботі використані методи комбінаторного аналізу, моделювання, теорії множин, функціонального аналізу (для формалізації понять е-конфігурацій і C-множин та їх дослідження), методи декомпозиції, комбінаторного аналізу, моделювання, теорії множин (для проведення структурного аналізу C-множин), методи евклідової і афінної геометрії, декомпозиції, поліедральної комбінаторики (для здійснення геометричного аналізу C-множин), методи алгебраїчної геометрії, алгебраїчної комбінаторики, загальної алгебри, евклідової комбінаторної оптимізації, функціонального аналізу (для викладення теорії f-представлень), методи комбінаторного і функціонального аналізу, опуклого програмування, теорії алгоритмів (для дослідження поведінки функцій на C-множинах, формалізації положень із розвитку теорії опуклих продовжень функцій), методи моделювання, функціонального аналізу, евклідової комбінаторної оптимізації, нелінійного, зокрема опуклого та дискретного, програмування, поліедральної комбінаторики, алгебраїчної комбінаторики, математичної логіки (для демонстрації сфери застосування е-конфігурацій, викладення загальної методології дослідження екстремальних комбінаторних задач та її реалізації для модельних прикладів).

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Вперше виділено клас евклідових комбінаторних множин ($\mathcal{E}_C$-множин), що утворюють спеціальний клас множин конфігурацій за К. Бержем, породжених векторами однакової розмірності, які дозволяють будувати математичні моделі, еквівалентні широкому класу практичних задач.

2. Вперше описано нові математичні об'єкти – евклідову комбінаторну конфігурацію (e-конфігурацію) та множину e-конфігурацій ($\mathcal{C}$-множину), що дозволяють застосування інструментарію відображень та властивостей евклідова простору у математичному моделюванні образів $\mathcal{E}_C$-множин.

3. Вперше здійснено структурну та геометричну класифікацію $\mathcal{C}$-множин, яка комплексно використовує конструктивні особливості їх формування, специфіку відображень та властивості евклідова простору у моделюванні цих множин, що дозволяє розширити математичний апарат, застосовуваний до розв'язання екстремальних задач на $\mathcal{E}_C$-множинах.

4. Вперше виділено клас базових $\mathcal{C}$-множин ($\mathcal{C}_b$-множин), комбінаторну структуру яких можна виразити засобами C-A. З його допомогою здійснено систематизацію наявних відомостей із теорії комбінаторних конфігурацій та e-множин і доповнено ці результати. Виділено ряд нових класів $\mathcal{C}_b$-множин, досліджено алгебро-топологічні та тополого-метричні їх властивості. Це дозволяє розвинути ЕСО в напрямку вивчення властивостей образів e-множин і можливостей їх застосування у розв'язанні екстремальних задач як у комбінаторних, так і у евклідових постановках.

5. Вперше систематизовано, доповнено та адаптовано до $\mathcal{C}$-множин основні положення теорії оцінок мінімумів функцій на образах e-множин. Досліджено поведінку та обґрунтовано властивості лінійних, квадратичних та опуклих функцій на різних класах $\mathcal{C}_b$-множин. Ці результати розвивають ЕСО у напрямку вивчення екстремальних властивостей функцій, заданих на $\mathcal{C}_b$-множинах, та є необхідною складовою організації схем аналізу варіантів розв'язання екстремальних задач на відповідних $\mathcal{C}$-множинах.

6. Вперше запропоновано єдиний підхід до аналітичного опису $\mathcal{C}$-множин як способу їх математичного моделювання шляхом побудови їх неперервних функціональних представлень (f-представлень), запропоновано типологію, методи побудови та перетворень f-представлень. Це дозволяє будувати еквівалентні математичні моделі екстремальних задач на $\mathcal{C}$-множинах як задач нелінійного програмування.

7. Вперше побудовано f-представлення скінченних точкових конфігурацій як математичні моделі ряду $\mathcal{C}_b$-множин, що дозволило запропонувати нові інструментальні засоби оптимізації на цих множинах методами нелінійного програмування.

8. Теорія опуклих продовжень набула подальшого розвитку у таких напрямках як: побудова загальної методології формування опуклих продовжень із поліедрально-сферичних множин; адаптація теорії опуклих продовжень до $\mathcal{C}$-множин як областей продовжень; розроблення нових підходів до побудови опуклих продовжень з образів e-множин; розширення класів продовжуваних функцій; створення єдиної методології побудови продовжень функцій на базі використання f-представлень

C-множин, що є областями продовжень; поєднання моделювання C-множин із побудовою f-представлень відповідних C_b-множин та продовженнями функцій з них. Це дозволяє розвинути ЕСО у напрямках дослідження поведінки функцій на образах е-множин, поєднання теорії опуклих продовжень та f-представлень з можливістю формування еквівалентних моделей екстремальних комбінаторних задач, у яких беруть участь опуклі функції.

9. Вперше запропоновано та теоретично обґрунтовано концепцію побудови еквівалентних математичних моделей екстремальних комбінаторних задач, яка доводить можливість застосування опуклого програмування у процесі їх розв'язанні.

10. Вперше побудовано ряд евклідових постановок модельних задач як задач оптимізації на C-множинах. Серед них задачі геометричного проектування, формування евклідових постановок яких ґрунтується на виділенні комбінаторної структури нової природи, використанні е-конфігурацій як математичних моделей геометричних об'єктів складної структури та f-представлень відповідних C-множин як математичних моделей виділених комбінаторних структур.

11. Досліджені властивості екстремальних задач на C-множинах використані при вдосконаленні та створенні нових інструментальних засобів евклідової комбінаторної оптимізації.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертації, є важливими як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Вони розвивають теорію евклідової комбінаторної оптимізації в основних її напрямках – розширення класу евклідових комбінаторних множин і дослідження властивостей їх образів у евклідовому просторі, дослідження екстремальних властивостей функцій, заданих на них, розроблення нових методів оптимізації, адаптація та вдосконалення існуючих підходів, математичне моделювання практичних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації.

Впровадження результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи впроваджено у наукову роботу та у навчальний процес університетів України, що підтверджується відповідними актами:

– Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» (акти впровадження від 03.05.2018 р. та 10.05.2018 р.);

– Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (акт впровадження від 12.06.2018 р.);

– Харківський національний університет радіоелектроніки (акт впровадження від 15.11.2018 р.).

Результати роботи використовувалися в лекційних курсах, курсових і дипломних (ОКР магістра та бакалавра) роботах студентів факультету систем управління літальних апаратів Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 113 «Прикладна математика». Вони також використані при виконанні фундаментальних держбюджетних тем (номер держреєстрації 0115U001522).

Особистий внесок здобувача. У роботах, написаних у співавторстві, у [25] автору належать постановка двопараметричної задачі ЕСО (ЕСОР) та методи розв'язання однопараметричних лінійних задач на образах е-множин (s-множинах) перестановок і розміщень; у [5, 25] – постановка задачі двопараметричної оптимізаційної задачі на s-множині та методи розв'язання однопараметричних лінійних задач на s-множинах перестановок і розміщень; у [4] – конструктивний метод побудови опуклого продовження поліномів із множин поліперестановок та оцінка його обчислювальної складності; у [28, 36] – математичні моделі задачі розташування модулів на чіпі і ECO-метод її розв'язання; у [37] – частина, що стосується поліедрально-сферичної оптимізації; у [1] – систематизація та розвиток результатів дослідження тополого-метричних властивостей образів e-множин (s-множин) перестановок, вивчення властивостей графів їх багатогранників; у [31] – метод штрафних функцій розв'язання задач ECO (ECOPs) із використанням опуклих продовжень функцій; у [12] – введення поняття f-представлення s-множини, основна термінологія з f-представлень, побудова f-представлень загальної s-множин перестановок; у [9] – аналітичний метод побудови опуклого продовження квадратичної функції з булевої множини B_n, поліедрально-сферичний метод гілок та меж (B&B PSpM) квадратичної оптимізації на дворівневих поліедрально-сферичних множинах (PSpSs); узагальнення B&B PSpM на поліедрально-поверхневі множини і довільну цільову функцію; у [8] – основні положення теорії f-представлень s-множин; у [14] – дослідження образу множини матриць Π_n перестановок як PSpS, аналітичний вигляд опуклого продовження квадратичних функцій із Π_n; у [29] – математична модель харчового меню як ECOP та ECO-підходи до її розв'язання; у [38] – математична модель людської комунікації у соціальних мережах як ECOP на B_n; у [15] – основні підходи до побудови f-представлень вершинно-розташованих множин та їх реалізація для окремих класів s-множин; у [19] – математична модель однієї задачі оптимізації телекомунікаційних мереж як ECOP на s-множині перестановок і B_n із опуклими цільовою функцією функціональними обмеженнями; у [18] – концепція застосування опуклого програмування у ECOPs на PSpSs на базі використання опуклих продовжень; у [40] – основні підходи до поліедрально-сферичної оптимізації та дослідження її специфіки для деяких класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [17] – введення поняття e-конфігурації, постановка задачі оптимізації на множині e-конфігурацій; у [2] – введення поняття $\mathcal{E}_c$-, $\mathcal{C}$- і $\mathcal{C}_b$-множин, геометричний аналіз $\mathcal{C}$-множин і окремих класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [3] – формалізація основних положень теорії f-представлень $\mathcal{C}$-множин і її реалізація для окремих класів $\mathcal{C}_b$-множин; у [20] – методи побудови опуклих продовжень поліномів із загальної $\mathcal{C}_b$-множини перестановок; у [43] – виділення ряду класів PSpSs на основі структурного аналізу $\mathcal{C}$-множин та дослідження їх властивостей як поліедрально-сферичних точкових конфігурацій; у [20] – математична модель задачі кластерного аналізу у багатошаровій мережі як квадратична ECOP і метод її розв'язання, що ґрунтується на побудові опуклих продовжень. Роботи [6, 7, 11, 13, 16, 22-24, 26, 27, 30, 32-35, 39, 41, 42, 44-46] опубліковано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на 44 наукових конференціях, серед яких: The Southwestern Ontario Graduate Mathematics and Statistics Conference (Guelph, Canada, 2014), Conference on Graph Theory, Matrix Theory and Interactions (Kingston, Canada, 2014), Conference on

Optimization, Transportation and Equilibrium in Economics (Toronto, Canada, 2014), The 2014 CMS Winter Meeting (Hamilton, Canada, 2014), Statistical and Computational Challenges in Networks and Cybersecurity Workshop (Montreal, Canada, 2015), The 2015 AMMCS-CAIMS Congress (Waterloo, Canada, 2015), Industrial-Academic Workshop on Optimization in Finance and Risk Management (Toronto, Canada, 2015), 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (Kyiv, Ukraine, 2016), 6th Polish Combinatorial Conference (Bedlewo, Poland, 2016), The 14th ESICUP Meeting (Liege, Belgium, 2017), 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering Kyiv, Ukraine, 2017), 4th International Scientific-Practical Conference «Problems of Infocommunications, Science and Technology» (Kharkiv, Ukraine, 2017), International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics and Optimization (Prague, Czech Republic, 2018), 29th European Conference On Operational Research (Valencia, Spain, 2018), International Conference on Innovations in Engineering, Technology and Sciences (Karnataka, India, 2018), IX International Conference Optimization and Applications (Petrovac, Montenegro, 2018), IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (Kyiv, Ukraine, 2018). Результати роботи обговорювалися на наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (2013-2017 рр.), відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України (2016 р.), кафедрі інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського (2018 р.). У повному обсязі робота доповідалася на 20-му міжнародному науково-практичному семінарі «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кропивницький, Україна, 13-14 квітня 2018 р.) та на 7-ій міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи та технології» (Коблево, Україна, 10-15 вересня 2018 р.).

Публікації. Матеріали дисертації достатньо повно викладені у 46 наукових роботах [1-46]. З них – 3 монографії [1-3], 30 статей у наукових фахових виданнях [4-33] (із них 15 статей у виданнях іноземних держав або виданнях, що включені у провідні міжнародні наукометричні бази [5, 8-12, 15, 16, 20, 21, 26, 30-33], 16 статей у виданнях, уключених МОН України до переліку фахових видань з фізико-математичних наук [4-8, 13, 14, 16-20, 22-24], і 4 статті у інших виданнях [25, 27-29]), а також 13 тез і матеріалів міжнародних конференцій [34-46].

Структура роботи. Дисертаційна робота є рукописом і складається зі вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел з 381 найменування і п'яти додатків. Повний обсяг роботи становить 484 сторінки, обсяг основного тексту становить 327 сторінок, обсяг додатків становить 85 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність вибору теми дисертації, розкрито суть і стан проблеми, сформульовано мету та задачі дослідження, вибрано методи дослідження і означено наукову новизну отриманих результатів. Вказано теоретичне та практичне значення роботи, а також зазначено сферу впровадження її результатів. Наведено відомості про особистий внесок здобувача, апробацію роботи, публікації та зв'язок роботи з науковими програмами.

У **першому розділі** наведено аналітичний огляд літератури, присвяченої основним питанням, які виникають у математичному моделюванні задач евклідової комбінаторної оптимізації (ECOP) і при побудові евклідових постановок практичних і теоретичних задач, метою яких є оптимізація одного або декількох критеріїв. Наведено ряд задач комбінаторної оптимізації (COP), їх комбінаторні та евклідові постановки, у тому числі неперервні, тобто ті, що формулюють COP у термінах неперервних декартових змінних.

Продемонстровано поширеність задач, що моделюються як оптимізаційні на перестановках і булевих конфігураціях, а також на комбінаторних конфігураціях, що складаються з числових векторів однієї розмірності. Показано переваги евклідових постановок COPs, вузькість класу задач із такими постановками і актуальність його розширення шляхом винайдення нових класів задач і типів допустимих комбінаторних областей у просторі (скінченних точкових конфігурацій, FPCs). Для двох класів задач – SAT (задача здійснимості булевих формул) і MWIS (задача про максимальну зважену незалежну множину вершин графа) дано огляд неперервних постановок і методів розв’язання цих задач, що використовують ці постановки, разом із їх порівняльним аналізом. Наведено історичний огляд теорії комбінаторних конфігурацій та огляд сучасного стану теорії ECO. Показано перспективність поєднання цих двох напрямків теоретичних досліджень і розширення класу е-множин шляхом розгляду множин комбінаторної природи, заданих числовою інформацією. Дано огляд теорії опуклих продовжень та оцінок мінімумів функцій, заданих на FPCs, і питань, що залишаються відкритими.

Дано огляд понять ECO, необхідних для подальшого викладення. Так, е-множиною є довільна сукупність елементів, які характеризуються однаковою скінченною кількістю компонент і відрізняються або складом, або порядком слідування цих компонент. Це дозволяє розглядати е-множину $\mathcal{P}$ як сукупність упорядкованих вибірок об’єму n з деякої множини, здійснити її бієктивне відображення (занурення) у $\mathbb{R}^n$ з урахуванням вигляду цієї множини та отримати образ $\mathcal{E}$ множини $\mathcal{P}$ в евклідовому просторі (s-множину). Відповідно, пара $\mathcal{E}$ і $\mathcal{P}$ пов’язана так:

$$\exists \varphi, \exists \mathcal{N} \in \mathbb{N}: \ \mathcal{E} = \varphi(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}, \ \ \mathcal{P} = \varphi^{-1}(\mathcal{E}), \tag{1}$$

де $\mathcal{N} = n$.

Дані, наведені у розділі 1, опубліковано в роботах [2, 3, 5, 7-10, 14, 15, 18-20, 25, 26, 33, 35, 40, 43].

Другий розділ присвячено введенню понять е-конфігурацій та множин е-конфігурацій, їх класифікації та встановленню зв'язку з множинами комбінаторних конфігурацій та е-множинами.

Конфігурації розглядатимемо за К. Бержем, а саме під конфігурацією будемо розуміти відображення $\psi: B \to A$ деякої вихідної множини B елементів довільної природи у скінченну абстрактну результуючу множину $A = \{a_1, ..., a_k\}$ певної структури при виконанні заданого набору обмежень Λ.

Далі як B розглядатимемо скінченну множину $B = \{b_1, ..., b_n\}$ і називатимемо конфігурацію за К. Бержем комбінаторною, а під результатом дії ψ розумітимемо упорядковану послідовність π елементів з A:

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_{j_1} & \dots & a_{j_n} \end{pmatrix} = \left\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n} \right\rangle, \tag{2}$$

де $j_i \in J_k = \{1,...,k\}$, $i \in J_n$, яку називатимемо с-конфігурацією.

Введемо у розгляд множину $\varPi$ с-конфігурацій вигляду (2) ($\mathcal{E}_c$-множину), що породжуються всілякими комбінаторними конфігураціями для заданих A, B, $\varLambda$. $\varPi$ повністю визначається кортежем $\left\langle \varPsi, A, B, \varLambda \right\rangle$, де $\varPsi$ – множина допустимих відображень B у A. З огляду на вигляд с-конфігурації (2), не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $B = J_n$, відповідно, ця четвірка перетворюється на трійку $\left\langle \varPsi, A, \varLambda \right\rangle$.

Виділимо клас с-конфігурацій, результуючою множиною яких є

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}, \tag{3}$$

де

$$\mathbf{a}_l = \left(a_{1l}, ..., a_{ml}\right)^T \in \mathbb{R}^m,\ l \in J_k. \tag{4}$$

Відповідно, $\varPi$ визначатиметься трійкою $\left\langle \varPsi, \mathbf{A}, \varLambda \right\rangle$ і складатиметься з с-конфігурацій, компонентами яких є вектори з $\mathbf{A}$, відповідно $\forall \pi \in \varPi\ \ \exists j_i\left(\pi\right) \in J_k$, $i \in J_n$:

$$\pi = \left\langle \mathbf{a}_{j_1(\pi)}, \mathbf{a}_{j_2(\pi)}, ..., \mathbf{a}_{j_n(\pi)} \right\rangle. \tag{5}$$

Знайдемо множину $\mathcal{A}$ різних координат векторів з $\mathbf{A}$, виділивши основу $S(.)$ із мультимножини координат векторів (4):

$$\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_K\} = S(\{a_{ij}\}_{i \in J_m,\, j \in J_k}), e_i < e_{i+1}, i \in J_{K-1}.$$

Виберемо у (1) $\mathcal{N} = N = m \cdot n$, $\mathcal{P} = \varPi$, $\mathcal{E} = E \subset \mathbb{R}^N$ і задамо відображення φ таким чином, що кожній конфігурації π вигляду (5) поставимо у відповідність мультимножину $\tilde{A}(\pi) = \{\alpha_i(\pi)\}_{i \in J_N} = \left\{a_{1j_1(\pi)}, ..., a_{1j_n(\pi)}, ..., a_{mj_1(\pi)}, ..., a_{mj_n(\pi)}\right\}$ та точку $x = \left(x_1, ..., x_N\right) \in \mathbb{R}^N$ за таким правилом: а) задамо бієктивне відображення φ_1 між множинами $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}' \subset \mathbb{R}^1$: $\mathcal{A}' = \varphi_1(\mathcal{A}) = \{\varphi_1(e_i)\}_{i \in J_K}, |\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|$; б) здійснимо певне упорядкування мультимножини $\tilde{A}(\pi)$ (відображення φ_2) і розглянемо результат як вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Він формується за правилом: $x_i = \varphi_1(\alpha_{\beta_i}(\pi)), i \in J_N$, де $\beta = (\beta_i)_{i \in J_N}$ – деяка перестановка множини J_N, та є результатом відображень φ_1,

φ_2 (відображення $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$) і таким, що

$$x = \varphi(\pi),\ \pi = \varphi^{-1}(x), \tag{6}$$

причому φ забезпечує бієкцію між довільними с-конфігураціями вигляду (5), що задовольняють умову $S(\tilde{A}(\pi)) \subseteq \mathcal{A}$, та точками $x = (x_i)_{i \in J_N} \in \mathbb{R}^N$, що задовольняють умову $S(\{x\}) \subseteq \mathcal{A}'$, де $\{x\} = \{x_i\}_{i \in J_N}$.

У результаті для пари E, Π виконуватиметься умова (1), яка набуває вигляду:

$$E = \varphi(\Pi), \Pi = \varphi^{-1}(E). \tag{7}$$

Означення. *Евклідовою комбінаторною конфігурацією* (е-конфігурацією) назвемо відображення:

$$\varphi : (\psi, \mathbf{A}, \Theta) \to \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

де $\mathbf{A}$ – результуюча множина вигляду (3), (4); $\psi : J_n \to \mathbf{A}$; Θ – система обмежень на вигляд відображень φ, ψ.

Результат цього відображення, який ми також називатимемо е-конфігурацією, повністю визначається кортежем

$$\langle \varphi, \psi, \mathbf{A}, \Theta \rangle, \tag{9}$$

є вектором x розмірності N, що задовольняє умову (6), та є образом с-конфігурації (5) у $\mathbb{R}^N$ при заданих відображеннях φ, ψ.

Залежно від вибору φ, зокрема від способу упорядкування мультимножини $\tilde{A}(\pi)$, можна отримати різні е-конфігурації, такі, як

$$\begin{gathered} x = vec(\pi^M) = (a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}, a_{2j_1}, ..., a_{2j_n}, ..., a_{mj_1}, ..., a_{mj_n})^T, \\ x = vec(\pi^{MT}) = (a_{1j_1}, ..., a_{mj_1}, a_{1j_2}, ..., a_{mj_2}, ..., a_{1j_n}, ..., a_{mj_n})^T, \end{gathered} \tag{10}$$

де $vec(.)$ – оператор векторизації матриці $\pi^M = (a_{lj_i})_{l \in J_m, i \in J_n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, що відповідає с-конфігурації $\pi = \langle \mathbf{a}_{j_1}, ..., \mathbf{a}_{j_n} \rangle$. Такі матриці утворюють множину $\Pi^M = \{\pi^M \in \mathbb{R}^{m \times n}\}_{\pi \in \Pi}$, між якою є бієкція як з E, так і з Π, тобто

$$\exists \xi : \Pi^M = \xi(\Pi), \Pi = \xi^{-1}(\Pi^M). \tag{11}$$

Надалі будемо використовувати відображення φ відповідно до (10), що передбачає, що φ_1 – тотожне відображення, і не накладатимемо ніяких інших обмежень на вигляд цього відображення. У результаті маємо $\Theta = \Lambda$, внаслідок чого формули (8), (9) набувають відповідно вигляду

$$\varphi : (\psi, \mathbf{A}, \Lambda) \to \mathbb{R}^N \tag{12}$$

і $\langle \varphi, \psi, \mathbf{A}, \Lambda \rangle$. Об'єднавши результати відображень (12) для заданих φ і $\psi \in \Psi$, отримуємо множину е-конфігурацій E ($\mathcal{C}$-множину E).

E повністю визначається четвіркою $\langle \varphi, \Psi, A, \Lambda \rangle$ і є образом $\mathcal{E}_c$-множини Π у $\mathbb{R}^N$. Зворотне також вірно, адже за конструкцією π можна відтворити за координатами x. Отже, формула (7) вірна, звідки слідує, що і (1) виконана для пари E, Π. Таким чином, E є s-множиною, що відповідає е-множині Π.

$\mathcal{C}$-множини утворюють підклас s-множин, що є результатом відображення у простір $\mathbb{R}^{nm}$ $\mathcal{E}_c$-множин, які задовольняють умову існування $m \in \mathbb{N}$, такого, що їх результуючою множиною є множина вигляду (3), (4). Відповідно, $\mathcal{E}_c$-множини є спеціальним класом е-множин, що є прообразами $\mathcal{C}$-множин. У свою чергу, спеціальним класом $\mathcal{C}$-множин є той, для якого вектори (4) мають єдину координату. У такому разі результуюча множина може вважатися числовою і має місце: $K = k, N = n$; $\mathbf{a}_j = a_j = a_{j1} \in \mathbb{R}^1$, $j \in J_k$, формула (10) перетворюється на $x = vec(\pi^M) = (a_{j_1}, ..., a_{j_n})^T$, а результуюча множина $A = \mathbf{A}$ є такою:

$$A = \{a_1, ..., a_k\} \subset \mathbb{R}^1. \tag{13}$$

Виділимо цей випадок окремо, використовуючи для випадку $m = 1$ термін «числова $\mathcal{C}$-множина», а для випадку $m > 1$ – «векторна $\mathcal{C}$-множина». Але зазначимо, що поділ на числові та векторні $\mathcal{C}$-множини є умовним, адже будь-яка векторна $\mathcal{C}$-множина є числовою $\mathcal{C}$-множиною у просторі $\mathbb{R}^N$, на яку накладено додаткові обмеження, які закладаються у Λ, на те, що відповідне розбиття її координат на підвектори розмірності m приводить до формування множини векторів з $\mathbf{A}$ виключно.

Перейдемо до дослідження класу $\mathcal{C}$-множин як скінченних множин точок евклідова простору. Нехай E – числова $\mathcal{C}$-множина, задана як скінченна точкова конфігурація (FPC) у просторі $\mathbb{R}^n$, де $n > 1$:

$$E = \{x^i\}_{i \in J_{n_E}} \subseteq \mathbb{R}^n, x^i = (x_{ij})^T_{j \in J_n}, i \in J_{n_E}, n_E > 1. \tag{14}$$

$G = \bigcup\limits_{i \in J_{n_E}} \{x_{ij}\}_{j \in J_n}$ назвемо мультимножиною, що індукує E (індукуючою мультимножиною, E.IM), а її основу $S(G)$ – твірною множиною (E.GS) множини E. При цьому вважатимемо, що $\mathcal{A} = S(G)$, інакше множини $\mathbf{A}$, $\mathcal{A}$ скорочуємо шляхом видалення елементів $\mathbf{A}$, що не беруть участь у формуванні допустимих с-конфігурацій, відповідно, і е-конфігурацій. Зобразимо E.IM, E.GS у формі

$$G=\left\{g_1,...,g_\eta\right\},\ g_i\le g_{i+1},\ i\in J_{\eta-1};\mathcal{A}=\left\{e_1,...,e_k\right\},\ e_i<e_{i+1},\ i\in J_{k-1},\tag{15}$$

звідки $G=\{e_i^{\eta_i}\}_{i\in J_k}$, де $[G]=(\eta_i)_{i\in J_k}$ – первинна специфікація G; η_i – кратність e_i у G, $i\in J_k$. При цьому буде виконано

$$k,n,n_E>1.\tag{16}$$

Для векторних $\mathcal{C}$-множин, у (14)-(16) потрібна заміна $n\to N, k\to\kappa$, де $\kappa\ge k$.

Виходячи з способу формування $\mathcal{C}$-множин та їх суті як скінченних множин в евклідовому просторі, їх дослідження проводитимемо у двох напрямках:

– аналіз $\mathcal{A},G,n$ (конструктивний аналіз, C-A);

– аналіз алгебро-топологічних і тополого-метричних властивостей E (геометричний аналіз, G-A).

Перший важливий крок дослідження стосується класифікації $\mathcal{C}$-множин, адже це визначає способи їх математичного моделювання, відповідно і шляхи розв'язання екстремальних задач на них. Здійснимо C-A і G-A способів класифікації за суттєвими їх ознаками (типології) $\mathcal{C}$-множин.

C-A-типологія $\mathcal{C}$-множин стосується компонент трійки

$$\left\langle\mathcal{A},G,n\right\rangle.\tag{17}$$

$\mathcal{A}$-A-типологія: а) $\mathcal{A}\subset\mathbb{Z}$ – E – цілочислова $\mathcal{C}$-множина ($\mathbb{Z}$S); б) $\mathcal{A}\subset\mathbb{Q}$ – E – раціонально значна $\mathcal{C}$-множина ($\mathbb{Q}$S); в) $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^1_{>0}$ – E – додатно значна $\mathcal{C}$-множина ($\mathbb{R}_{>0}$S); $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^1_+$ – E – невід'ємно значна $\mathcal{C}$-множина ($\mathbb{R}_+$S) тощо.

Поєднуючи деякі з цих ознак, формуємо інші класи $\mathcal{C}$-множин, такі, як, булеві $\mathcal{C}$-множини ($\mathcal{B}$S)$:\mathcal{A}=\{0,1\}$; бінарні $\mathcal{C}$-множини ($\mathcal{B}'$S)$:\mathcal{A}=\{-1,1\}$; трійкові $\mathcal{C}$-множини ($\mathcal{T}$ S): $\mathcal{A}=\{-1,0,1\}$ і т.п.

Продовжимо $\mathcal{A}$-A-класифікацію, накладаючи обмеження на частини $\mathcal{A}$, а саме на твірні множини окремих координат точок E. Так, E називатимемо множиною спеціальних е-конфігурацій ($\mathcal{S}$S), якщо $\max\limits_{j\in J_n} k_j=2$, де $k_j=|\mathcal{A}_j|, \mathcal{A}_j=S(\{x^i\}_{i\in J_{n_E}})$, $j\in J_n$. Відповідно, спеціальними класами $\mathbb{Z}\mathcal{S}$S будуть $\mathcal{B}$S, $\mathcal{B}'$S.

G/n-A-типологія: E назвемо множиною е-конфігурацій:

– перестановок ($\mathcal{P}$ S), якщо $\eta=n$;

– розміщень ($\mathcal{PP}$S), якщо $\eta>n$.

$G/\mathcal{A}$-A-типологія: E назвемо множиною е-конфігурацій:

– без повторень ($\mathcal{R}^-$S), якщо $\eta=k$;

– із повтореннями ($\mathcal{R}^+$S), якщо $\eta>k$.

Відповідно, усі $\mathcal{C}$-множини розбиваємо на класи $\mathcal{P}$Ss і $\mathcal{PP}$Ss, так само на класи $\mathcal{R}^-$Ss і $\mathcal{R}^+$Ss. Комбінація цих ознак приводить до подальшого розбиття класу

$\mathcal{C}$-множин на $\mathcal{PR}^{-}$Ss, $\mathcal{PR}^{+}$Ss, $\mathcal{PPR}^{-}$Ss, $\mathcal{PPR}^{+}$Ss і виділення нових класів $\mathcal{C}$-множин, таких, як спеціальні, булеві, бінарні, трійкові $\mathcal{C}$-множини перестановок і розміщень тощо.

Подальше розбиття класу $\mathcal{C}$-множин та окремих його підкласів здійснимо накладанням додаткових обмежень на елементи $\mathcal{C}$-множин або $\mathcal{E}_c$-множин, що є їхніми прообразами. Наведемо деякі з них.

1. Полікомбінаторні $\mathcal{C}$-множини: $\mathcal{C}$-множину E називатимемо полікомбінаторною, якщо існує розбиття множини координат її елементів і розбиття E.IM, такі, що $\mathcal{C}$-множини, породжені цим розбиттям координат, індукуються різними елементами даного розбиття E.IM. У позначеннях

$$E(I)=\{(x_{ij})_{j\in I}\}_{i\in J_{n_E}}, I\subset J_n, \tag{18}$$

для сім'ї $\mathcal{C}$-множин, породжених різними наборами координат точок E, це означає, що існують $I\subset J_n, J\subset J_\eta$, такі, що $E(I)$.IM=$\{g_i\}_{i\in J}$, $E(J_n\setminus I)$.IM=$\{g_i\}_{i\in J_\eta\setminus J}$. Зокрема, полікомбінаторна $\mathcal{C}$-множина E буде $\mathcal{C}$-множиною поліперестановок ($\overline{\mathcal{P}}$S), якщо $E(I)$ та $E(J_n\setminus I)$ – $\mathcal{P}$Ss, $\mathcal{C}$-множиною розміщень ($\overline{\mathcal{PP}}$Ss), якщо серед $E(I)$, $E(J_n\setminus I)$ є хоч одна $\mathcal{PP}$S.

2. $\mathcal{C}$-множини парних або непарних перестановок – це множини e-конфігурацій перестановок без повторень з парною/непарною кількістю інверсій.

3. $\mathcal{C}$-множини парних або непарних булевих векторів – це множини булевих e-конфігурацій з парною/непарною сумою координат.

4. $\mathcal{C}$-множини перестановок зі знаком: якщо $\mathcal{C}$-множина E вигляду (14) є $\mathcal{PP}$S такою, що $E.\mathrm{IM}=G_E$, при цьому $E'=\{y^i\}_{i\in J_{n_E}}$, де $y^i=(|x_{ij}|)^T_{j\in J_n}, i\in J_{n_E}$, є $\mathcal{P}S$ з E'.IM, E'.GS вигляду (15), де $|E'.\mathrm{GS}|>1$, то E називатимемо множиною e-конфігурацій перестановок зі знаком ($\mathcal{SP}$S), що індукується G_E та породжується G. Відповідно, для G буде виконано $G\subset\mathbb{R}^1_+$, $|G|=n$, $|S(G)|=k>1$. Залежно від того, чи виконана умова $G\subset\mathbb{R}^1_{>0}$, здійснимо подальше розбиття $\mathcal{SP}$Ss на два класи, а саме, якщо $G\subset\mathbb{R}^1_{>0}$, E буде $\mathcal{SP}$S 2-го типу ($\mathcal{SP}^{II}$S), інакше 1-го типу ($\mathcal{SP}^{I}$S).

Разом із трійкою (17) ключовою характеристикою $\mathcal{C}$-множин є їх комбінаторний тип T. Як буде показано далі, властивості $\mathcal{P}$Ss і $\mathcal{PP}$s, $\mathcal{SP}^{I}$Ss і $\mathcal{SP}^{II}$Ss суттєво відрізняються, тому від (17) перейдемо до розгляду четвірки $\langle\mathcal{A},G,n,T\rangle$, де $T\in\mathbf{T}$, $\mathcal{T}$ – сім'я комбінаторних типів $\mathcal{C}$-множин, зокрема, $\{\mathcal{P},\mathcal{PP},\mathcal{S},\mathcal{SP},\mathcal{B},\mathcal{T}\}\subset\mathbf{T}$. Кожна така четвірка задає сім'ю $\mathcal{C}$-множин, у якій виділимо таку множину E, що об'єднує усі множини цієї сім'ї, і назвемо *базовою* $\mathcal{C}$-множиною даної сім'ї.

Така множина E також може бути визначена через e-конфігурації, що є її елементами. Нехай $\mathcal{C}$-множина E об'єднує всі e-конфігурації комбінаторного типу T для заданої мультимножини $G_E=E$.IM. Назвемо її *базовою* $\mathcal{C}$*-множиною* ($\mathcal{C}_b$-множиною) для e-конфігурацій типу T і мультимножини G_E, що їх індукує.

Так, множини $E_{nk}(G)=\{x\in\mathbb{R}^n:\{x\}=G\}, E_{\eta k}^n(G)=\{x\in\mathbb{R}^n:\{x\}\subset G\}$ називатимемо загальними $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок і розміщень, індукованими мультимножиною G вигляду (15), множину $E_{nk}^{\pm}(G)=\{x\in\mathbb{R}^n:\{x\}\subseteq G_E,\{|x_i|\}_{i\in J_n}=G\}$, де

$$G_E=-G\cup G, \tag{19}$$

назвемо загальною $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок зі знаком, що породжена G вигляду (15) та індукована G_E вигляду (19).

При $n>k$ ці три класи являють собою $\mathcal{C}_b$-множини перестановок (розміщень, перестановок зі знаком) із повтореннями, а при $n=k$ – $\mathcal{C}_b$-множини $E_n(G)$, $E_k^n(G)$, $E_n^{\pm}(G)$ перестановок (розміщень, перестановок зі знаком) без повторень. У свою чергу, за ознакою $e_1=0$ чи $e_1>0$ клас $E_{nk}^{\pm}(G)$ розбивається на загальні $\mathcal{C}_b$-множини $E_{nk}^{\pm I}(G)$, $E_{nk}^{\pm II}(G)$ перестановок зі знаком 1-го та 2-го типу відповідно. Виконання умови $k=2$ буде характеризувати спеціальні $\mathcal{C}_b$-множини. Так, множини $E_{n2}(G)$, $E_{\eta k}^n(G)$, $E_{n2}^{\pm I}(G)$ будуть спеціальними $\mathcal{C}_b$-множинами перестановок, розміщень і перестановок зі знаком відповідно. У свою чергу, їх спеціальними класами є $B_n=\{0,1\}^n$, $B'_n=\{-1,1\}^n$, $T_n=\{-1,0,1\}^n$ – булева, бінарна, трійкова $\mathcal{C}_b$-множини відповідно, $B_n(m)=E_{n2}(\{0^{n-m},1^m\})$ $(m\in J_{n-1})$, $B_n(m_1,m_2)=E_{\eta 2}^n(\{0^{n-m_1},1^{m_2}\})$ – булеві $\mathcal{C}_b$-множини перестановок і розміщень ($0\le m_1<m_2\le n$), а також $B_n^{\pm}(m)=E_{n2}^{\pm I}(\{0^{n-m},1^m\})$ – трійкова $\mathcal{C}_b$-множина перестановок зі знаком ($m\in J_{n-1}$).

Зазначимо, що деякі $\mathcal{E}_c$-множини, що є прообразами наведених вище $\mathcal{C}_b$-множин при відображенні φ, відомі у літературі е-множини. Так, $P_{\eta k}^n(G)=\varphi^{-1}(E_{\eta k}^n(G))$ – загальна е-множина розміщень, $P_n(G)=\varphi^{-1}(E_n(G))$ – е-множина перестановок без повторень тощо.

$\mathcal{C}$-множину E, що індукується мультимножиною G, назвемо *базовою полікомбінаторною* $\mathcal{C}$*-множиною* (полікомбінаторною $\mathcal{C}_b$-множиною) типу $T\in\mathcal{T}$, якщо існує розбиття $\{G^l\}_{l\in J_L}$, мультимножини G і розбиття $\{I_l\}_{l\in J_L}$ множини J_n на $L>1$ підмножин, такі, що множини $E(I^l)$, $l\in J_L$, сім'ї (18) є $\mathcal{C}_b$-множинами комбінаторного типу T, індукованими мультимножинами G^l, $l\in J_L$, відповідно.

Опуклі оболонки $\mathcal{C}$-множин називатимемо $\mathcal{C}$-багатогранниками, а $\mathcal{C}_b$-множин – $\mathcal{C}_b$-багатогранниками. Так, у позначеннях $\Pi_{[..]}^{[.]}=conv\,E_{[..]}^{[.]}$, застосованих до $E_{nk}(G)$, $E_{\eta k}^n(G)$, $E_{nk}^{\pm}(G)$, маємо, що $\Pi_{nk}(G)=conv E_{nk}(G)$ є загальним $\mathcal{C}_b$-багатогранником перестановок. Аналогічно $\Pi_{\eta k}^n(G)$, $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ – це загальні

$\mathcal{C}_b$-багатогранники розміщень і перестановок зі знаком тощо.

Наведемо типологію векторних $\mathcal{C}$-множин. Нехай $\mathcal{E}_c$-множина Π індукується множиною $A = \mathbf{A}$, де $m > 1$. Здійснимо відображення Π у евклідів простір двома способами, а саме розглянемо векторну $\mathcal{C}$-множину

$$E^N = \{x^N \in \mathbb{R}^N : x^N - \text{е-конфігурація вигляду } (12)\}$$

і числову $\mathcal{C}$-множину E вигляду

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : x - \text{е-конфігурація вигляду } \phi : (\psi, A, \Lambda) \to \mathbb{R}^n\},$$

де A має вигляд (13).

Нехай $G^N = E^N$.IM, $\mathcal{A}^N = E^N$.GS, $\eta^N = |G^N|$, $k^N = |\mathcal{A}^N|$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $E^N - \mathbb{R}_{>0}$S.

Задамо відображення $\zeta : E^N \to E$, таке, що

$$E = \zeta(E^N), E^N = \zeta^{-1}(E). \tag{20}$$

З цією метою встановимо бієкцію між множинами $\mathbf{A}$ та $A \subset \mathbb{R}^1$, задавши функцію $\vartheta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, таку, що

$$a_l = \vartheta(\mathbf{a}_l), \mathbf{a}_l = \vartheta^{-1}(a_l), l \in J_k. \tag{21}$$

Пов'язавши результуючі множини E та E^N за допомогою (21), забезпечуємо виконання умови (20) при виборі ζ у формі:

$$\forall\, x^N \in E^N \to x = \zeta(x^N) = (\vartheta(\mathbf{x}_1), ..., \vartheta(\mathbf{x}_n)) \in E, \tag{22}$$

де $x^N = vec(X)$, $X \in \Pi^M$ – матриця, задана своїми вектор-стовпцями:

$$X = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n), \text{ де } \mathbf{x}_j = (x_{ij})_{i \in J_m}^T, j \in J_n.$$

Класифікацію векторних $\mathcal{C}$- і $\mathcal{C}_b$-множин проведемо за типом числової $\mathcal{C}$-множини E у парі E^N, E вигляду (20). Так, якщо E є $\mathcal{C}/\mathcal{C}_b$-множиною комбінаторного типу T, E^N називатимемо $\mathcal{C}/\mathcal{C}_b$-множиною цього типу, додаючи слово «векторів» або векторною $\mathcal{C}_b$-множиною типу T. У позначеннях також зазначатимемо множину $\mathbf{A}$, якою E^N породжується. Так, якщо E^N, E задовольняють умову (20), а $E = E_{nk}(G)$, то E^N буде загальною $\mathcal{C}_b$-множиною $E^N = E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$ перестановок векторів (загальною векторною $\mathcal{C}_b$-множиною перестановок), що породжується множиною векторів $\mathbf{A}$, індукується числовою мультимножиною G^N і генерується множиною $\mathcal{A}^N$ потужності k^N. Відповідно, усі підмножини E^N будуть $\mathcal{C}$-множинами перестановок векторів, що індуковані G^N, породжені $\mathbf{A}$ та генеровані $\mathcal{A}^N$. Аналогічно вводяться загальні векторні $\mathcal{C}_b$-множини розміщень, перестановок зі знаком та їх спеціальні підкласи – спеціальні, булеві, трійкові, з повтореннями та без повторень, а також відповідні векторні $\mathcal{C}$-множини.

Зауваження 1. Існує тісний зв'язок між комбінаторним типом векторних і числових $\mathcal{C}$-множин. Так, векторна $\mathcal{C}$-множина перестановок є також числовою $\mathcal{C}$-множиною перестановок, векторна $\mathcal{C}$-множина розміщень – числовою $\mathcal{C}$-множиною розміщень тощо. Між тим, жодна з векторних $\mathcal{C}_b$-множин не є числовою $\mathcal{C}_b$-множиною з числа введених вище, адже окрім обмежень на $G^N, \mathcal{A}^N, N$, для векторних множин потрібним є виконання умови $\mathbf{x}^j \in \mathbf{A}, j \in J_n$.

Серед векторних булевих $\mathcal{C}$-множин виділимо спеціальний клас, коли їх результуючою множиною є вектори одиничного базису $\mathbf{E}(m) = \{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_m} \subset \mathbb{R}^m$. Їх особливістю є те, що відповідна множина матриць (11) також булева, а сума елементів векторів стовпців цих матриць дорівнює одиниці, звідки слідує, що

$$\Pi^M \subset B_{m \times n}, \forall X \in \Pi^M \quad \mathbf{x}_j \in \mathbf{E}(m), j \in J_n, \forall\, X \in \Pi^M \quad x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}} \in E,$$

де $g_{\mathcal{A}} = (e_1, ..., e_k)^T$; $B_{m \times n}$ – множина булевих матриць порядку $m \times n$; $k = m$. У результаті цього має місце

$$X \in \Pi^M \Leftrightarrow x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}} \in E, \tag{23}$$

що дозволяє встановити бієкцію не тільки між елементами відповідних E, Π^M, E^N таким чином: $x = X^T$, $x^N = vec(X)$. Відповідно, ζ у (22) набуває вигляду $x = \zeta(x^N) = X^T \cdot g_{\mathcal{A}} = vec^{-1}(x^N)$, де $vec^{-1}(.)$ – операція, обернена до $vec(.)$ перетворення вектору $\mathbb{R}^N$ у матрицю порядку $m \times n$.

Класифікацію таких множин матриць і векторних множин е-конфігурацій також проведемо за типом відповідної числової $\mathcal{C}$-множини E. Так, якщо $E = E_{nk}(G)$, множину Π^M називатимемо загальною базовою множиною $\Pi^M_{nk}(G)$ матриць перестановок, а множину E^N – загальною множиною $\mathcal{E}_{nk}(G)$ е-конфігурацій матриць перестановок (загальною $\mathcal{C}_b$-множиною матриць перестановок). Якщо $E = E^n_{\eta k}(G)$, Π^M буде загальною базовою множиною $\Pi^{nM}_{\eta k}(G)$ матриць розміщень, а E^N – загальною $\mathcal{C}_b$-множиною $\mathcal{E}^n_{\eta k}(G)$ матриць розміщень. Аналогічно $\mathcal{E}^{\pm}_{nk}(G)$ є загальною $\mathcal{C}_b$-множиною матриць перестановок зі знаком, що відповідає $E^{\pm}_{nk}(G)$. Спеціальними їх класами будуть $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина матриць перестановок (без повторень) та $\mathcal{E}_k^n = \mathcal{E}_k^n(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина матриць розміщень (без повторень). Також зазначимо, що $\mathcal{E}_{nk}(G)$, $\mathcal{E}_{\eta k}^n(G)$, $\mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G)$ є спеціальними класами $E_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$, $E^N_{\eta^N k^N}(G^N, \mathbf{A})$, $E^{\pm}_{Nk^N}(G^N, \mathbf{A})$, які виділено нами, щоб підкреслити особливості їх моделювання та широку сферу використання у математичному моделюванні задач комбінаторної оптимізації. Зокрема, це стосується COPs на перестановках і розміщень завдяки відображеному у формулі (23) зв'язку між ними та $\mathcal{E}_c$-множинами перестановок і розміщень. Це підтверджується тим фактом, що сім'ї $\mathcal{E}_{nk}(G)$ належить множина $\mathcal{E}_n$, що є образом в евклідовому просторі множини Π_n^M матриць перестановок порядку n, відомої широким колом застосувань і специфікою, що визначається її належністю множині булевих матриць і її зв'язку з конфігураціями перестановок.

Перейдемо до *G-A-класифікації* $\mathcal{C}$-множин. Занурення множини Π у евклідів простір дозволяє, разом з $\mathcal{C}$-множиною E вигляду (14), розглядати багатогранник

$$P = conv\ E \tag{24}$$

та гіперповерхню S, описану навколо нього.

Виділимо три основні типи $\mathcal{C}$-множин як FPCs, що пов'язують їх із P і S.

Означення. E назвемо *вершинно розташованою* $\mathcal{C}$-множиною (VLS), якщо $E = vert\ P$.

Означення. Множину E назвемо поверхнево розташованою $\mathcal{C}$-множиною (SLS), якщо існує функція $f(x)$, що є строго опуклою на опуклій множині $\mathcal{K} \supseteq E$, і такою, що $f(x) \underset{E}{=} 0$.

Означення. Множину E назвемо *поліедрально-поверхневою* $\mathcal{C}$-множиною (PSS), якщо існує гіперповерхня S, така, що виконано:

$$E = P \cap S. \tag{25}$$

Вираз (25) назвемо *поліедрально-поверхневим представленням* E (PSR), якщо

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} - \tag{26}$$

повна строго опукла гіперповерхня, тобто функція $f(x)$ у виразі (26) – строго опукла на опуклій множині $\mathcal{K} \supseteq C = conv\,S$, відповідно $S = \partial C$ – границя C. При цьому E називатимемо $\mathcal{C}$-множиною, що дозволяє PSR. Так, PSS E завжди дозволяє PSR, якщо $f(x)$ – строго опукла у $\mathbb{R}^n$. Виділимо три таких класи PSSs залежно від вигляду строго опуклих описаних поверхонь, на яких у подальшому зосередимо основну увагу при моделюванні введених раніше класів $\mathcal{C}_b$-множин. Отже, PSS E: а) сферично розташована (SSpS), якщо $\exists r > 0, a \in \mathbb{R}^n$: $S = S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \|_2 = r\}$; б) суперсферично розташована (SSsS), якщо

$\exists r > 0, a \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 1$: $S = S_r(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \|_\alpha = r\}$; в) еліпсоїдально розташована (SES), якщо $\exists A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T, A \succ 0, a \in \mathbb{R}^n$: $S = El(a, A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \|_A = 1\}$, де $\| x \|_A = (x-a)^T A(x)$.

PSR, що зображує PSpS/PSsS/PES E, називатимемо поліедрально-сферичним (PSpR), поліедрально-суперсферичним (PSsR) і поліедрально-еліпсоїдальним (PER) представленням відповідно.

Взаємозв'язок класів VLSs, SLSs і PSSs встановлюється теоремою.

Теорема 1. Такі три твердження еквівалентні: а) множина E – VLS; б) множина E – SLS; в) множина E – PSS.

Таким чином, для встановлення вершинної розташованості E достатньо знайти сильно опуклу функцію, що набуває на ній постійного значення. Як виявляється, для більшості $\mathcal{C}$-множин знайти таку функцію можливо, здійснюючи лише С-А.

Крім того, введемо в розгляд клас $\mathcal{C}$-множин, що стосується їх розкладання по гіперплощинах, паралельних гіперграням P. Нехай $\mathbf{F}$ – множини гіперграней P, а $\mathbf{H}$ – множина опорних гіперплощин до них.

Означення. $\mathcal{C}$-множина E називається $lev(E)$-рівневою, якщо для будь-якої гіперграні $F_1 \in \mathbf{F}$ і відповідної опорної гіперплощини $H_1 \in \mathbf{H}$ існує сім'я $\{H_i\}_{i \in J_{lev(E)} \setminus \{1\}}$ гіперплощин, паралельних із H_1, таких, що всі точки E лежать на гіперплощинах $\{H_i\}_{i \in J_{lev(E)}}$.

Означення. Багатогранник P називається $lev(P)$-рівневим, якщо $\forall F_1 \in \mathbf{F}$ і для відповідної $H_1 \in \mathbf{H}$ існує сім'я $\{H_i\}_{i \in J_{lev(P)} \setminus \{1\}}$ гіперплощин, паралельних з H_1, така, що множина $\mathbf{V} = vert\, P$ лежить на гіперплощинах $\{H_i\}_{i \in J_{lev(P)}}$.

Серед багаторівневих множини особливу увагу зосередимо на дворівневих $\mathcal{C}$-множинах (2LSs) у силу їх широкої сфери застосувань, належності до класу VLSs, еквівалентності понять 2LS і дворівневого багатогранника, зв'язку 2LSs із $\mathcal{B}$Ss та іншим особливостям. Серед них той факт, що обчислювальна складність розв'язання напіввизначеної релаксації лінійної задачі на 2LS, заданої системою рівнянь, лінійно залежить від n.

У даному розділі запропоновано метод математичного моделювання $\mathcal{C}$-множин як відображення $\mathcal{E}_c$-множин у евклідів простір.

Дані, наведені у розділі 2, опубліковано в роботах [2, 3, 10, 16, 17, 20, 22, 23, 32, 44-46].

У **третьому розділі** досліджуються властивості і взаємозв'язок класів $\mathcal{C}$-множин, зокрема, розглянуто питання виділення класів еквівалентності серед $\mathcal{C}_b$-множин і шляхи представлення $\mathcal{C}$-множин за допомогою інших, зокрема способи утворення нових класів $\mathcal{C}_b$-множин. Серед розглянутих шляхів – лінійні перетворення, теоретико-множинні операції, підйом у простір більшої розмірності і т.д. Головна увага приділяється вивченню множин, утворених у результаті об'єднання $\mathcal{C}$- і $\mathcal{C}_b$-множин, тобто питанням декомпозиції $\mathcal{C}$- і $\mathcal{C}_b$-множин, при цьому розглянуто С-А- і G-A декомпозиційні підходи. Крім того, досліджено властивості PSpSs і VLSs і шляхи переходу від розгляду довільної FPC до PSpS і VLS.

Дві $\mathcal{C}$-множини E, E' називатимемо комбінаторно ізомофними і позначатимемо $E \simeq E'$, якщо між елементами E, E' існує бієкція, а їх опуклі оболонки – $P = conv\, E, P' = conv\, E'$ – є комбінаторно еквівалентними многогранниками:

$$E \simeq E' \Leftrightarrow \exists \tau : E' = \tau(E),\ E = \tau^{-1}(E');\ P \cong P'. \tag{27}$$

Так, наприклад, (27) має місце, якщо $E, E' \subset \mathbb{R}^n$, а τ – невироджене афінне перетворення.

Аналіз властивостей FPCs, утворених у результаті невироджених афінних перетворень над $\mathcal{C}$-множинами, дозволив установити взаємозв'язки наведених вище класів $\mathcal{C}_b$-множин і, враховуючи (16), обмежити їх розгляд і дослідження такими класами:

$$\mathcal{P}Ss : B_n(m), m \in J_{n-1}; E_{nk}(G), 3 \le k < n; E_n(G) \text{ та } E_n^e(G), n \ge 3; \tag{28}$$

$$\mathcal{PP}Ss : B_n; B_n(m_1, m_2), 0 \le m_1 < m_2 \le n; E_{\eta k}^n(G), k < \eta, n < \eta < k \cdot n;$$

$$E_k^n(G), 2 \le n < k; T_n; \bar{E}_k^n(G), k > 3; B_n^{\pm}(m), m \in J_{n-1}; B_n^h; \tag{29}$$

$$E_{nk}^{\pm}(G), 3 \le k < n; E_n^{\pm I}(G), n \ge 3; E_n^{\pm II}(G);$$

$$\bar{\mathcal{P}}Ss : E_{\bar{n}\bar{k}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{n_l k_l}(G^l); \overline{\mathcal{PP}}Ss : E_{\bar{\eta}\bar{k}}^{\bar{n}}(G) = \bigotimes_{l=1}^{L} E_{\eta_l k_l}^{n_l}(G^l), \tag{30}$$

де $E_{\bar{n}\bar{k}}(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина розміщень із необмеженими повтореннями з G: $|G| = k \cdot n$, $E_n^e(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множина парних перестановок, B_n^h – $\mathcal{C}_b$-множина парних булевих векторів, $E_{\bar{n}\bar{k}}(G)$ і $E_{\bar{\eta}\bar{k}}^{\bar{n}}(G)$ – $\mathcal{C}_b$-множини поліперестановок і полірозміщень, $\bar{n} = (n_l)_{l \in J_L}$, $\bar{k} = (k_l)_{l \in J_L}$, $\bar{\eta} = (\eta_l)_{l \in J_L}$, $L \ge 2$.

Разом із лінійними перетвореннями теоретико-множинні операції над $\mathcal{C}$-множинами – це ще один шлях формування нових класів $\mathcal{C}$-множин. Залежно від типу множини, що одержується у результаті таких операцій, встановлюється зв'язок між $\mathcal{C}$-множинами різних типів. Так, подання $\mathcal{C}$-множини об'єднанням інших $\mathcal{C}$-множин того самого або іншого комбінаторного типу – це декомпозиція цієї множини.

Якщо $\mathcal{C}$-множина E вигляду (14) задана у формі:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}^i, \text{ де } \mathcal{E} = \{\mathcal{E}^i\}_{i \in J_{n_{\mathcal{E}}}}, \mathcal{E}^i \subset E, i \in J_{n_{\mathcal{E}}},$$

це означає, що здійснено декомпозицію E (E.D) по $n_{\mathcal{E}} \ge 2$-ох підмножинах, що є складовими сім'ї $\mathcal{E}$.

Так, для деяких $\mathcal{C}_b$-множин сімей (28), (29) мають місце такі декомпозиції на інші $\mathcal{C}_b$-множини:

$$B_n(m_1,m_2)=\bigcup_{m=m_1}^{m_2} B_n(m);\, B_n=\bigcup_{m=0}^{n} B_n(m);\, B_n^h=\bigcup_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor} B_n(2m);$$

$$E_{\eta k}^n(G)=\bigcup_{\mathcal{G}\subset G,|\mathcal{G}|=n} E_{nk_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G});\, T_n=\bigcup_{m=0}^{n} B_n^{\pm}(m),\, E_{nk}^{\pm}(G)=\bigcup_{y\in B_n'} E_{nk}(y,G);$$

$$E_{nk}^{\pm}(G)=\bigcup_{y\in B_n'} E_{nk}(y,G),\ \text{де}\ E_{nk}(y,G)=y^{\circ}E_{nk}(G);$$

$$E_{nk}^{\pm}(G)=\bigcup_{\mathcal{G}\subset\overline{\mathcal{G}}} E_{nk_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G}),\ \text{де}\ \overline{\mathcal{G}}=\{\mathcal{G}=\{g_{j_i}\}_{i\in J_n}\subset G_E:\{|g_{j_i}|\}_{i\in J_n}=G\}.$$

Тут $B_n(0)=B_n^{\pm}(0)=\mathbf{0}$, $B_n(n)=\mathbf{e}$, $B_n^{\pm}(n)=B_{n'}$, $A\circ B$ – добуток Адамара множин $A,B\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}$ – вектор з одиниць, а G_E задовольняє умову (19).

Аналіз цих та інших способів декомпозицій $\mathcal{C}$-, $\mathcal{C}_b$-множин дозволив сформулювати основні задачі, що переслідуються при виборі шляху декомпозиції: а) декомпозиція на непорожні власні підмножини E (якісна декомпозиція); б) декомпозиція E на попарно непересічні підмножини (декомпозиція-розбиття); в) декомпозиція на множини однакової потужності (збалансована декомпозиція), зокрема на комбінаторно ізоморфні $\mathcal{C}$-множини; г) декомпозиція на $\mathcal{C}$-множини меншої розмірності, комбінаторно ізоморфні $\mathcal{C}$-множинам певного типу (декомпозиція-редукція), де розмірність $\mathcal{C}$-множини E – це величина $d_E=dim\, conv\, E$.

Наведено ряд підходів до декомпозиції $\mathcal{C}_b$-множин, що ґрунтується на С-А, серед яких E-декомпозиції і покриття на базі декомпозицій G, $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}_j$ ($j\in J_n$). Ці підходи застосовано до декомпозиції $\mathcal{C}_b$-множин (28), (29), відмітною особливістю яких є їх є те, що вони якісні, у більшості випадків – збалансовані, є розбиттями та декомпозиціями-редукціями. Вони охоплюють як традиційні декомпозиційні підходи, в основі яких лежить фіксація груп змінних і розкладання за сім'ями площин, паралельних гіперграням P, так і принципово нові підходи, що є результатом застосування С-А.

Типологію декомпозицій $\mathcal{C}$-множин, що ґрунтуються на G-A, проведено залежно від того, до якого класу належать множини сім'ї $\mathcal{E}$, у результаті чого виділяються декомпозиції на VLSs (E.VLS-D), SLSs, PSSs (E.PSS-D), 2LSs, і на множини, які дозволяють PSRs.

Існує тісний зв'язок між G-A-декомпозиціями та кількістю рівнів розкладання $\mathcal{C}$-множин за окремою функцією або напрямком, а також за множинами функцій або напрямків.

Нехай функція $h(x):E\to\mathbb{R}^1$ така, що $\forall\, x\in E \quad h(x)\in\mathbf{h}_E$, де $\mathbf{h}_E=\{h_i\}_{i\in J_{m_{h(x)}}}$,

$h_i < h_{i+1}, i \in J_{m_{h(x)}-1}; \forall\, i \in J_{m_{h(x)}}\ \exists\, y^i \in E : h(y^i) = h_i$.

Сформуємо множину функцій $f_i(x) = h(x) - h_i, i \in J_{m_{h(x)}}$, та введемо у розгляд сім'ю дійсних різноманіть, на яких ці функції набувають нульового значення:

$$\mathcal{S}^i = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f_i(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ h(x) = h_i\}, i \in J_{m_{h(x)}}. \tag{31}$$

Будемо говорити, що множина E розкладається за різноманіттями (31), заданими функцією $h(x)$ та є $m_{h(x)}$-рівневою множиною за функцією $h(x)$. Залежно від вигляду $h(x)$ це буде розкладання по лінійних, лінійно зв'язних різноманіттях тощо.

Ясно, що кількість рівнів розкладання $\mathcal{C}$-множин і властивості утворених у результаті декомпозиції $\mathcal{C}$-множин

$$\mathcal{E}^i = \{x \in E : h(x) = h_i\} = \mathcal{S}^i \cap E, i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{32}$$

суттєво залежать від вибору функції $h(x)$. У зв'язку з цим розглянуто такі питання: а) які властивості мають утворені $\mathcal{C}$-множини сім'ї (32) залежно від вигляду множини E та функції $h(x)$; б) як знайти допустимі точки цих множин; в) яким чином вибрати функцію $h(x)$, щоб зменшити або збільшити число компонент розкладань, отримати декомпозицію того чи іншого типу тощо. При цьому головний акцент зроблено на розкладаннях $\mathcal{C}$-множини за вкладеними гіперсферами та паралельними гіперплощинами, у результаті чого здійснюється E.PSS-D на PSpSs і на $\mathcal{C}$-множини меншої розмірності відповідно.

При виборі у (32) як $h(x)$ лінійної функції $h(x) = \overline{n}^T x$, де $\overline{n} \neq \mathbf{0}$, E називатимемо $m_{h(x)} = m(\overline{n}, E)$-рівневою у напрямку вектора $\overline{n}$, а якщо при цьому $\exists i \in J_n$, $\exists a \in \mathbb{R}^1 :\ h(x) = x_i - a$ – $m_{h(x)}$-рівневою за координатою x_i. Так, у термінах розкладання E у напрямку нормалі $\overline{n}_F$ до гіперграні $F \in \mathbf{F}$, величини $lev(E)$, $lev(P)$ можна задати у формі $lev(E) = \max\limits_{F \in \mathbf{F}} m(\overline{n}_F, E)$, $lev(P) = \max\limits_{F \in \mathbf{F}} m(\overline{n}_F, \mathbf{V})$.

Поняття багаторівневості $\mathcal{C}$-множини за однією функцією узагальнено на сім'ю функцій. Нехай $\mathcal{H}(x) = \{h_j(x)\}_{j \in J}$, $|J| \geq 1$. Розглянемо розкладання E за кожною з функцій сім'ї $\mathcal{H}(x)$ і знайдемо величину $lev(E, \mathcal{H}) = \max\limits_{h(x) \in \mathcal{H}(x)} m_{h(x)}$. $\mathcal{C}$-множину E називатимемо $lev(E, \mathcal{H})$-рівневою за сім'єю функцій $\mathcal{H}(x)$. Так, при виборі $\mathcal{H}(x) = \{x_j\}_{j \in J_n}$ E називатиметься $lev(E, \mathcal{H})$-рівневою за координатами.

Для $\mathcal{C}$-множин результатом перетворень і теоретико-множинних операцій знов є $\mathcal{C}$-множина. Виникає питання, чи справедливо це міркування для $\mathcal{C}_b$-множин.

Якщо $E^1, ..., E^L$ – $\mathcal{C}_b$-множини, будемо вважати, що множина E, отримана: а) у результаті теоретико-множинних операцій, таких, як перетин, об'єднання, взяття декартова добутку та прямої суми (Спосіб 3.1); б) у результаті їх перетворень (лінійних і нелінійних) (Спосіб 3.2); в) якщо E є елементом розбиття $\mathcal{C}_b$-множини на комбінаторно-ізоморфні підмножини (Спосіб 3.3).

Вибір саме цих способів обумовлений проведеним порівнянням результатів зазначених вище операцій для введених нами $\mathcal{C}_b$-множин. Аналіз показав, що, якщо ввести розгляд лише $\mathcal{C}_b$-множину розміщень, усі наведені вище $\mathcal{C}_b$-множини можуть бути одержані Способами 3.1-3.3.

Перейдемо до дослідження класу PSpSs. Нехай E – PSpS така, що $E \subset S_r(a)$. Для того, щоб підкреслити, що у E.PSR бере участь рівняння $S_r(a)$, використовуватимемо позначення $E(a,r)$, а якщо рівняння $S_{\hat{r}}(\hat{a})$ описаної навколо E гіперсфери мінімального радіуса – $\hat{E}(\hat{a},\hat{r})$, при цьому вектор $\hat{a}$ і величину $\hat{r}$ називатимемо центром і радіусом PSpS E відповідно.

Для PSpS E сформульовано та розв'язано такі задачі: а) визначення, чи FPC E є PSpS (задача ідентифікації); б) пошук параметрів a,r подання E як PSpS (задача визначення параметрів), у тому числі параметрів представлення $\hat{E}(\hat{a},\hat{r})$ (задача визначення центра і радіуса PSpS); в) пошук шляхів декомпозиції PSpS (задача декомпозиції PSpS), а також довільної $\mathcal{C}$-множини на PSpSs (задача декомпозиції на PSpSs); г) пошук шляхів для FPC E поставити у взаємно-однозначну відповідність PSpS, можливо шляхом розширення координат точок E додатковими координатами (задача перетворення E у PSpR).

Так, у рамках розв'язання задачі ідентифікації виділено декілька класів PSpSs, серед яких симплексні $\mathcal{C}$-множини, тобто ті, потужність яких – $d_E + 1$.

Теорема 2. Якщо E – симплексна $\mathcal{C}$-множина, є $\mathcal{P}$S, $\mathcal{S}$S або $\mathcal{SP}$S, то вона є PSpS.

У ході розгляду задачі декомпозиції встановлено, що для PSpS E задача декомпозиції за вкладеними гіперсферами з одним центром еквівалентна розкладанню за паралельними гіперплощинами, при цьому параметри PSpSs, одержаних у ході цієї декомпозиції, легко визначаються за параметрами E як PSpS. Наведено декілька способів розв'язання задачі перетворення E у PSpS, у тому числі тих, що ґрунтуються на застосуванні теореми 2.

Від PSpSs, перейдемо до розгляду класу VLS у цілому, а саме дослідимо, які існують шляхи моделювання FPC E, що не є VLS, за допомогою VLS/VLSs (*Задача 3.1*).

Нехай E – $\mathcal{C}$-множина, що не є VLS. Перший шлях моделювання – це E.VLS-D. Вище у даному розділі було вказано шляхи, що стосуються декомпозиції E на декілька VLSs, а саме, C-A-підхід – це здійснення E.D на основі покриття $G = E$.IM n-елементними мультимножинами, що приводить до розбиття E на $\mathcal{P}$Ss, які за теоремою 2 є PSpSs, отже, і VLSs. Водночас, G-A рекомендує проводити E.D за допомогою розкладання E по вкладених строго опуклих поверхнях, у перетині E з якими утворюються VLSs. Окрім декомпозиційних, пропонується ряд способів, які стосуються підйому E у розширений простір. Серед них зазначені вище шляхи перетворення E у PSpS у просторі більшої розмірності, а також перехід до розгляду $\mathcal{B}$Ss у просторі більшої розмірності.

Таким чином, при розгляді $\mathcal{C}$-множин, не обмежуючи загальності, можна вважати, що розглядаються VLSs, а якщо це не так, здійснюється перехід до розгляду VLS/VLSs.

Зазначимо, що усі вирішені у даному розділі задачі вказують підходи до математичного моделювання $\mathcal{C}$-множин, у даному випадку вони стосуються їх моделювання за допомогою інших $\mathcal{C}$-множин.

Дані, наведені у розділі 3, опубліковано в роботах [1-3, 10, 20, 24, 37, 40, 43-45].

У **четвертому розділі** досліджено властивості $\mathcal{C}_b$-множин і $\mathcal{C}_b$-багатогранників, а також екстремальні властивості заданих на них функцій.

Нехай множина E є однією з базових множин e-конфігурацій (28)-(30) або

$$\mathcal{E}_{nk}(G), \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{\eta k}^n(G), \mathcal{E}_k^n, \mathcal{E}_{nk}^{\pm}(G), \tag{33}$$

а P – відповідний $\mathcal{C}_b$-багатогранник (24).

У рамках C-A $\mathcal{C}_b$-множин і пов'язаних із ними геометричних структур розглянуто такі задачі:

– *Задача 4.1* – побудова H-представлення P, у т.ч. незвідного (*Задача 4.2*) і компактного розширеного, тобто лінійного опису P, заданому у просторі $\mathbb{R}^{n'}$, де $n' > n$, і містить поліноміальну за n кількість обмежень та (*Задача 4.3*).

– *Задача 4.4* – дослідження E на поверхневу розташованість.

– *Задача 4.5* – визначення, чи дозволяє E поліедрально-поверхневе представлення.

– *Задача 4.6* – пошук критерію вершини багатогранника P.

– *Задача 4.7* – пошук критерію суміжності вершин P, зокрема, виявлення, чи всі вершини P мають однаковий степінь регулярності.

Розв'язання Задачі 4.7 передбачає формулювання ознаки, за якою довільній $x \in \mathbf{V}$ ставиться у відповідність її окіл $N_P(x) = \{y \in \mathbf{V} : y \leftrightarrow x\}$ точок, з'єднаних із нею ребром $(x, y) \in edges\, P$. Величина $\mathcal{R}_P(x) = |N_P(x)|$ є степенем вершини x. Якщо $\exists \mathcal{R}(P) \in \mathbb{N}: \ \forall x \in \mathbf{V} \ \ \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}_P(x)$, величина $\mathcal{R}(P)$ є степенем регулярності вершин P.

– *Задача 4.8* – виділення класу *простих* $\mathcal{C}_b$-багатогранників, тобто тих, для яких $\mathcal{R}(P) = d_E$.

– *Задача 4.9* – дослідження симетрії E и P, зокрема, встановлення, чи є P кулею у деякому нормованому просторі.

– *Задача 4.10* – дослідження багаторівневості E у цілому, за координатами, окремими напрямками, окремими функціями і сім'ями функцій, зокрема, виділення підкласу 2LSs.

– *Задача 4.11* – дослідження комбінаторної ізоморфності $\mathcal{C}_b$-множин і комбінаторної еквівалентності $\mathcal{C}_b$-багатогранників.

У ході розв'язання Задач 4.1-4.11 виникають і потребують розв'язання різні задачі перечислення для множини E; для її підмножин, таких, як $\mathbf{V}$, $N_P(x)$, $\mathcal{R}_P(x)$, де $x \in E$; для всього класу $\mathcal{C}_b$-множин, куди належить E та P, наприклад, для класів еквівалентності C_b-багатогранників і комбінаторної ізоморфності C_b-множин. В останньому випадку виникають задачі перечислення класів еквівалентності C_b-множин і C_b-багатогранників заданої розмірності та перечислення елементів цих класів.

У рамках дослідження екстремальних властивостей функцій, заданих на C_b-множинах, розглянуто такі задачі:

– *Задача 4.12* – встановити, чи є C_b-множина E добре описуваною.

Множина E називається добре описуваною (WDS), якщо лінійна задача: знайти

$$LP(E,c):\ z^{lin,E} = \min_{x\in E} \mathrm{c}^T x,\ x^{lin,E} = \arg\min_{x\in E} \mathrm{c}^T x$$

ефективно (тобто за поліноміальний час) розв'язувана.

Розв'язання Задачі 4.12 передбачає розв'язання $LP(E,c)$ в явному вигляді або пошук поліноміального алгоритму розв'язання цієї задачі.

– *Задача 4.13* – задача проектування на C_b-множину, тобто пошуку $y^* = \Pr_E x$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Це нелінійна ECOP, яка в окремих випадках ефективно розв'язувана. Так, якщо E – PSpS така, що $E \subset S_r(x^0)$, то $y^* = arg\min_{y\in E}(a-x)\cdot y$. Відповідно, якщо до того ж E – WDS, то Задача 4.13 розв'язується за поліноміальний час.

– *Задача 4.14* – пошук нижніх оцінок функцій, заданих на C_b-множинах.

Вивчення множин (28)-(30), (33) (Сім'я 5.1) відбувається у двох напрямах: а) конкретизація властивостей спеціальних класів C_b-множин, таких, як C_b-множина перестановок без повторень, спеціальні C_b-множини перестановок і розміщень, C_b-множини матриць перестановок і перестановок із повтореннями і т. ін.; б) дослідження C_b-множин, що є результатом розбиття E на комбінаторно еквівалентні підмножини (це стосується множин $E_n^e(G)$, B_n^h); в) дослідження нових властивостей C_b-множин перестановок і розміщень; г) дослідження властивостей нових класів множин, таких, як C_b-множина перестановок зі знаком та її спеціальні класи, а також множини сім'ї (33) за виключенням $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{nk}(G)$.

Наведемо розв'язки Задач 4.1-4.13 для класу $E_{nk}^{\pm}(G)$, використовуючи такі позначення: $E = E_{nk}^{\pm}(G), E^I = E_{nk}^{\pm I}(G), E^{II} = E_{nk}^{\pm II}(G)$, $P = \Pi_{nk}^{\pm}(G) = convE_{nk}^{\pm}(G)$,

Щоб об'єднати E^I, E^{II} в єдиному класі C_b-множин перестановок зі знаком, мультимножину G, що їх породжує, зобразимо у формі:

$$G = \left\{e_0^{n_0}, e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_\kappa}\right\}:\ |G| = n, 0 = e_0 < e_1 < \dots < e_\kappa,\ \text{де } n_0 = 0 \text{ для } E = E^{II},$$

$$\kappa = \begin{cases} k-1, \text{ якщо } E = E^I; \\ k, \text{ якщо } E = E^{II}. \end{cases} \tag{34}$$

Лема 1 [R. Sanyal]. Система обмежень

$$\sum_{i\in I'} x_i - \sum_{j\in J'} x_j \le \sum_{i\in I'\cup J'} g_{n-i+1},\ I', J' \subseteq J_n : I'\cap J' = \varnothing, I'\cup J' \ne \varnothing, \qquad (35)$$

є H-представленням $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.

Теорема 3. Багатогранник $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$ задається незвідною системою обмежень:

$$\sum_{j\in\omega} \left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n, |\omega| \in \bar{I}, \qquad (36)$$

де

$$\bar{I} = J_n \setminus I,\ I = \overline{2, n_\kappa} \cup \overline{n-n_0, n-1}, \qquad (37)$$

κ визначено з (34).

$\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.IHR одержується з (36) розкриттям знака модуля усіма можливими способами. Його явну форму запишемо на базі теореми 3 і леми 1.

Наслідок 1. $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.IHR має вигляд (35), при цьому $|I'\cup J'| \in \bar{I}$, де $\bar{I}$ визначено з (37).

Теорема 4. Множина $E^{\pm}_{nk}(G)$ є PSsS, вписаною у сім'ю строго опуклих суперсфер

$$S_{r(\alpha)}(\mathbf{0}) : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\alpha} = r^{\alpha}(\alpha) \text{ радіуса } r(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} |g_i|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \qquad (38)$$

де $\alpha \in (1, \infty)$ – параметр.

Зокрема, $E^{\pm}_{nk}(G)$ є PSsS такою, що $E^{\pm}_{nk}(G) \subset S_{|g|}(\mathbf{0})$, де $g = (g_i)_{i\in J_n}$.

Наслідок 2. $E^{\pm}_{nk}(G)$ дозволяє побудову PSsR вигляду (35), (37), (38).

Наслідок 3. $E^{\pm}_{nk}(G)$ є VLS.

Теорема 5 (Критерій суміжності й степінь регулярності вершин $P = \Pi^{\pm}_{nk}(G)$). Якщо $E = E^{II}$, для довільної точки $x \in E$ суміжні з нею вершини багатогранника P утворюються з x заміною максимум двох координат x_i, x_j, абсолютні значення яких є послідовними елементами $\mathcal{A}$, значеннями $sgn\, x_i \cdot \left|x_j\right|, sgn\, x_j \cdot \left|x_i\right|$ (Спосіб 4.1) або зміною знака координати x, абсолютна величина якої e_1, на протилежний.

Якщо $E = E^{I}$, суміжні з $x \in E$ вершини P відрізняються від x не більше, ніж двома координатами, і формуються з неї Способом 4.1 або транспозицією нульової координати та координати з абсолютним значенням e_1 з подальшою зміною знака цієї ненульової координати на протилежний.

Степінь вершини $\mathcal{C}_b$-багатогранників перестановок зі знаком:

$$\mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm I}(G)) = 2n_0 n_1 + \sum_{i=1}^{k-2} n_i n_{i+1}, \mathcal{R}(\Pi_{nk}^{\pm II}(G)) = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}.$$

Наслідок 4. Загальний багатогранник перестановок зі знаком $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ простий тоді і тільки тоді, коли первинна специфікація мультимножини, що породжує $E_{nk}^{\pm}(G)$, задовольняє умови $n_0 \in \{0,1\}$, $n_1 = 1$, $\min\{n_i, n_{i+1}\} = 1, i \in J_{\kappa-1} \setminus \{1\}$.

Твердження 1. $\Pi_{nk}^{\pm}(G) = \{x : \| x \|_{E_{nk}^{\pm}(G)} \le 1\}$, де

$$\| x \|_{E_{nk}^{\pm}(G)} = \max_{\nu \in J_n} \frac{\| x \|_{[\nu]}}{\Sigma_{G,\nu}^{max}}, \ \Sigma_{G,\nu}^{max} = \sum_{i=1}^{\nu} g_{n-i+1}, \ \| x \|_{[\nu]} = \max_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = \nu} \sum_{j \in \omega} |x_j|, \nu \in J_n.$$

Для спеціального класу $B_n^{\pm}(m)$ серед множин $E_{nk}^{\pm}(G)$ має місце така теорема.

Теорема 6. При $n \ge 2$ $lev(B_n^{\pm}(m)) = m+1$.

Теорема 7. Серед $\mathcal{C}_b$-множин перестановок дворівневим є клас $E_{n2}(G)$, зокрема $B_n(m)$. Серед $\mathcal{C}_b$-множин розміщень – 2LSs-класи $\bar{E}_{n2}(G)$ та $\bar{E}_{n+1,2}(G)$ – і лише вони. Серед $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком дворівневими є лише множина $B_n^{\pm}(1)$ та комбінаторно ізоморфні з нею множини. E_3^e – єдина дворівнева $\mathcal{C}_b$-множина парних перестановок. Дворівневі $\mathcal{C}_b$-множини парних булевих векторів – це B_2^e і B_3^e – і лише вони.

Теорема 8. Для фіксованого n число кількість $M_n(E_{nk}^{\pm}(G))$ класів комбінаторної ізоморфності $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком визначається за формулою: $M_n(E_{nk}^{\pm}(G)) = 2^n - 1$, у тому числі, $M_n(E_{nk}^{\pm I}(G)) = 2^{n-1} - 1$, $M_n(E_{nk}^{\pm II}(G)) = 2^{n-1}$.

Множина $E_{nk}^{\pm}(G)$ є WDS, що встановлюється такою теоремою.

Теорема 9. $x_{i_j}^{lin, E_{nk}^{\pm}(G)} = sgn\left(c_{i_j}\right) \cdot g_j, \, j \in J_n; \, z^{lin, E_{nk}^{\pm}(G)} = \sum_{j=1}^{n} |c_{i_j}| \, g_j$,

де $\left\{i_j\right\}_{j \in J_n} = J_n, \ \left|c_{i_j}\right| \ge \left|c_{i_{j+1}}\right|, \, j \in J_{n-1}$.

Наслідок 5. Для довільної $x \in \mathbb{R}^n$

$$y = Pr_{E_{nk}^{\pm}(G)} x = sgn\left(x_{i_j}\right) \cdot g_j, \, j \in J_n, \text{ де } \left\{i_j\right\}_{j \in J_n} = J_n, \ \left|x_{i_j}\right| \le \left|x_{i_{j+1}}\right|, \, j \in J_{n-1}.$$

Зауваження 2. Для решти $\mathcal{C}_b$-множин (28)-(30) наявні результати, що стосуються розв'язків Задач 4.11-4.13, систематизовані та доповнені. Деякі з цих задач розв'язані для множин сім'ї (33). Зокрема, встановлено таке:

– Сім'я 5.1 складається з WDSs;

– Сім'я 5.1, з якої виключені $E^{n}_{\eta k}(G)$, де $k>2$, та $E^{\overline{n}}_{\overline{\eta}\overline{k}}(G)$, що не є $\mathcal{S}$S, (Сім'я 5.2) складається з PSpSs;

– Сім'я 5.1, з якої виключені $E^{n}_{\eta k}(G)$, $E^{\overline{n}}_{\overline{\eta}\overline{k}}(G)$, де $k>2$, $\eta>n+1$ (Сім'я 5.3), містить VLSs;

– множини сім'ї (28) – $n-1$-вимірні, сім'ї (29) – повновимірні.

Звідси, зокрема слідує, що для множин (28) їх представлення $E(a,r)$ як PSpSs визначено неоднозначно, тому для них також шукається їх центр та радіус. У той же час для PSpSs сім’ї (29) зображення їх як PSpS єдине, а саме $E(a,r)=\hat{E}(\hat{a},\hat{r})$.

Нехай $E\subset\mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$-множина, $\varphi: E\to\mathbb{R}^1$, $K\supseteq E$ – опукла множина, $\Phi: K\to\mathbb{R}^1$ – опукле продовження φ з E на K (це означає, що Φ є такою функцією, що $\Phi(x)\underset{E}{=}\varphi(x)$, тобто $\forall x\in E\ \ \Phi(x)=\varphi(x)$), то мають місце такі теореми.

Теорема 10. $\forall\, x\in K \quad \min\limits_{y\in E}\ \varphi(y)\ge\Phi(x)-(\overline{\nabla}\Phi(x),x)+\min\limits_{y\in E}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\nabla}_i\Phi(x)y_i$, де $\overline{\nabla}\Phi(x)=(\overline{\nabla}_i\Phi(x))_{i\in J_n}$ – субградієнт функції $\Phi(x)$ у точці x.

Теорема 11. Якщо $\Phi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на K, то

$$\min_{x\in E}\ \varphi(x)\ge\Phi(y^*)+\rho\min_{x\in E}\|\, x-y^*\,\|^2,\ \text{де}\ y^*=\arg\min_{y\in K}\Phi(y).$$

Теорема 12. Якщо $\Phi\left(x\right)$ сильно опукла з параметром $\rho>0$ на K, то $\forall x\in K$

$$\min_{y\in E}\ \ \varphi(y)\ge\Phi(x)-\frac{1}{4\rho}\left\|\overline{\nabla}\Phi(x)\right\|^2+\rho\min_{y\in E}\left\|y-x+\frac{1}{2\rho}\overline{\nabla}\Phi(x)\right\|^2.$$

Теорема 13. Якщо $y^{**}\in E$ задовольняє умову $\min\limits_{x\in E}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\nabla}_i\varphi(x)x_i=(\overline{\nabla}\Phi(y^{**}),y^{**})$, то $y^{**}=\arg\min\limits_{x\in E}\varphi(x)$.

Можливість застосування теорем 10-13 до пошуку нижніх оцінок мінімумів функцій на $\mathcal{C}$-множині E передбачає, що Задачі 4.12, 4.13 на E ефективно розв'язувані (Умова 5.1), а також, що існують опуклі продовження цих функцій та відомі ефективні конструктивні способи побудови цих продовжень (Умова 5.2). Згідно із зауваженням 2 Умова 5.1 виконана для $\mathcal{C}_b$-множин Сім'ї 5.2. У Сім'ї 5.3 є ще один клас VLSs, до якого можна застосувати деякі з наведених оцінок. Це множина $E^{n}_{n+1,k}(G)$, яка є ELS і WDS, отже, до неї застосовні результати теорем 10, 13. Дослідження виконання Умови 5.2 потребує подальшого розгляду.

У даному розділі розглянуто питання моделювання $\mathcal{C}_b$-множин як перетину багатогранника з гіперповерхнею, а також моделювання $\mathcal{C}$-множин за допомогою $\mathcal{C}_b$-множин, що є їх надмножинами. Для застосування даного способу для $\mathcal{PP}$Ss, що не є VLSs, потребується попереднє розв'язання Задачі 3.1.

Дані, наведені у розділі 4, опубліковано в роботах [1-3, 10, 14-16, 18, 20, 23, 30, 40-42].

У **розділі 5** наведено теорію неперервних функціональних представлень $\mathcal{C}$-множин, головною метою якої є побудова їх аналітичних описів для подальшого використання у неперервних постановках ECOPs.

Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$-множина вигляду (14), а

$$\mathcal{F} = \{f_j(x)\}_{j \in J_m} \text{ – сім'я неперервних функцій.} \tag{39}$$

Означення. Зображення $\mathcal{C}$-множини E за допомогою функціональних залежностей:

$$f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'}, \tag{40}$$

$$f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'}, \tag{41}$$

назвемо *неперервним функціональним представленням* (f-представленням) E.

Якщо для E має місце представлення (40), (41), а

$$f_j : K \to \mathbb{R}^1 \text{ - неперервні, } j \in J_m, \tag{42}$$

де $K \subset \mathbb{R}^n, K \supseteq E$, будемо говорити, що (40), (41) є f-представленням E на K.

Систему (40) назвемо строгою частиною, систему (41) – нестрогою частиною, m – порядком, окремі співвідношення – компонентами f-представлення.

Класифікацію f-представлень здійснимо: а) за виглядом функцій у сім'ї (39) – лінійні і нелінійні, диференційовані, гладкі, опуклі, поліноміальні, тригонометричні і т.п.; б) за співвідношенням параметрів m, m', m'', а саме систему (40), (41) назвемо *строгим* f-представленням E (E.SR), якщо $m' = m, m'' = 0$; *нестрогим* (E.UR) – якщо $m' = 0, m'' = m$; *змішаним* (E.MR), якщо $m'(m - m') > 0$; в) за наявністю надлишкових обмежень. Так, систему обмежень (40), (41) будемо називати *незвідним* f-представленням множини E (E.IR), якщо виключення будь-якого з його обмежень приводить до задання власної надмножини E.

Поняття E.IR узагальнює поняття H-представлення багатогранника на довільну точкову конфігурацію, зокрема, на $\mathcal{C}$-множину. Серед E.IRs особливу увагу приділимо двом класам, перший з яких геометрично зображує $\mathcal{C}$-множину перетином n гіперповерхонь, другий – перетином двох поверхонь. А саме, двокомпонентне незвідне E.SR (E.ISR) назвемо *дотичним* (E.TR), якщо множина E збігається з множиною точок дотику поверхонь S_1, S_2, де $S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) = 0\}, j = 1,2$, а

n-компонентне E.ISR назвемо *пересічним* (E.IIR).

Аналітичне зображення PSR множини E рівнянням строго опуклої описаної навколо E поверхні S і H-представлення P є прикладом E.MR, яке ми називаємо поліедрально-поверхневим f-представленням E (E.PSR). Залежно від вигляду S, що бере участь у PSR, E.PSR може бути поліедрально-сферичним (E.PSpR), поліедрально-суперсферичним (E.PSsR), поліедрально-еліпсоїдальним (E.PER) f-представленням тощо. f-представлення множини E – це її аналітичний опис у просторі, у якому вона задана. Якщо ж множина $E \subset \mathbb{R}^n$ аналітично зображується в деякому розширеному просторі, цей опис будемо називати *розширеним f-представленням* множини E (E.ER).

Нехай E – деяка $\mathcal{C}$-множина, і перед нами стоїть задача побудови її f-представлення (Задача 5.1).

Якщо накладається обмеження, що сім'я (39) складається виключно з поліномів, до побудови f-представлень E застосовуваний апарат дійсної алгебраїчної геометрії (RAG). Так, задача знаходження E.SR є задачею пошуку її аналітичного зображення як алгебраїчної множини (дійсного різноманіття, RV), у той час як задача побудови E.MR та E.UR є задачею пошуку зображення E як алгебраїчної напівмножини. Тому загальні підходи до побудови f-представлень $\mathcal{C}$-множин та їх перетворень викладено з використанням засобів RAG, які узагальнюються з кільця $\mathbb{R}[x_1,...,x_n]$ дійсних многочленів n змінних на кільце $\mathbf{C}(K)$ неперервних на $K \subseteq \mathbb{R}^n$ функцій.

Нехай шукається сім'я функцій (39), (42) така, що (40) є f-представленням E, тобто Задача 5.1 розв'язується для випадку $m' = m$ (Задача 5.1.1) і в результаті формується E.SR на $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Сформулюємо Задачу 5.1.1 у термінах AVs та ідеалів, що генеруються ними. У нашому випадку, як AVs виступають $\mathcal{C}$-множини, а множини неперервних функцій, що набувають на них значення 0, – як ідеали, що ними генеруються. Так, для $\mathcal{C}$-множини E ідеалом функцій, що визначають її як RV, буде множина функцій (ідеал, що генерується RV E): $I(E) = \{f(x) \in \mathbf{C}(K) : f(x) \underset{E}{=} 0\}$. Довільна сім'я функцій $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(K)$, з одного боку, породжує ідеал функцій

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{ \sum_{f_i \in \mathcal{F}} f_i(x) \cdot g_i(x), \forall g_i(x) \in \mathbf{C}(K), i \in J_{|\mathcal{F}|} \} \subset \mathbf{C}(K),$$

а з іншого – індукує точкову конфігурацію $E'(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \forall f_i \in \mathcal{F}\}$ – нуль-множину сім'ї $\mathcal{F}$, при цьому $\mathcal{F}$ є генератором (базисом) RV $E'(\mathcal{F})$. Відповідно, Задача 5.1.1 – це задача пошуку скінченної сім'ї $\mathcal{F}$ такої, що $E = E'(\mathcal{F})$ або

$$I(E) = \langle \mathcal{F} \rangle, \tag{43}$$

отже, це задача пошуку генератора E як RV такого, що $|\mathcal{F}| = m$.

Залежно від вигляду та кількості компонент у $\mathcal{F}$, а також можливості їх скорочення без втрати властивості отриманої сім'ї породжувати саме E, генератори можуть бути скінченними та нескінченними, поліноміальними, гладкими, незвідними та звідними тощо, а задача пошуку генератору E із тими чи іншими властивостями є задачею пошуку E.SR відповідного вигляду.

Для $\mathcal{C}_b$-множини E пропонується підхід до розв'язання Задачі 5.1.1, який полягає у: а) проведенні C-A і G-A з виділення сім'ї функцій $\Phi(E) \subseteq I(E) \subset \mathbf{C}(K)$, які набувають на E нульового значення (Задача 5.2); б) виділення з $\Phi(E)$ сім'ї $\mathcal{F}$ вигляду (39), що забезпечує виконання умови (43). В ході розв'язання Задачі 5.2 ставиться допоміжна задача побудови якомога ширшої сім'ї $\Phi(E)$ для того, щоб другий етап був здійсненний (Задача 5.3), а також щоб Задачу 5.2 для $\mathcal{C}_b$-множини $E' \subset E$ можна було розв'язати доповненням $\Phi(E)$ множиною функцій, які набувають нульового значення на E' та ненульового на E.

У термінах ідеалів, ці етапи представляються як задачі пошуку $\Phi(E) \subset \mathbf{C}(K)$, $\mathcal{F} \subseteq \Phi(E)$ таких, що для Задача 5.1.1 виконана умова $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \Phi(E) \rangle$, для Задачі 5.2 – $\Phi(E) \subseteq I(E)$, $\langle \Phi(E) \rangle = I(E)$, для Задачі 5.3 – $\forall E' \subset E \langle \Phi(E') \rangle \supset \langle \Phi(E) \rangle$.

Для $\mathcal{C}_b$-множин

$$E_{nk}(G), E_{nk}^{\pm}(G), B_n^{'} \tag{44}$$

отримано такі результати.

Лема 2.

$$I(E_{nk}(G)) \supseteq \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \right\rangle, \tag{45}$$

де $\Phi_n^{sym}(G) = \{ f(x) - f(g), f \in \Phi_n^{sym} \}$, Φ_n^{sym} – кільце неперервних симетричних функцій n змінних.

Лема 3.

$$I(B_n') \supseteq \left\langle \Phi_n^{e}(\{\mathbf{e}\}) \right\rangle, \tag{46}$$

де $\Phi_n^e(G) = \{ f(x) - f(g) : f(x) \in \Phi_n^e \}$, $G = \{g_i\}_{i \in J_n}$, $g = (g_1, ..., g_n)$, Φ_n^e – множина функцій n змінних, парних за кожною координатою.

Лема 4.

$$I(E_{nk}^{\pm}(G)) \supseteq \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \cap \Phi_n^{e}(G)) \right\rangle. \tag{47}$$

Таким чином, $\Phi(E_{nk}(G)) = \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \right\rangle, \Phi(B_n') = \left\langle \Phi_n^{e}(\{\mathbf{e}\}) \right\rangle$, $\Phi(E_{nk}^{\pm}(G)) = = \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \cap \Phi_n^{e}(G)) \right\rangle$ – розв'язки Задачі 5.2. Обґрунтовано, що вони є і розв'язками Задачі 5.3.

$\mathcal{C}_b$-множини $E_n^e(G)$, B_n^h формуються з $E_n(G)$, B_n Способом 3.3, саме тому для розв'язання Задач 5.1.1, 5.2 вони потребують доповнення $\Phi(E)$ новими класами функцій. Для $E_n^e(G)$, B_n^h, а також для інших $\mathcal{C}_b$-множин, що є власними підмножинами (44), їх спеціальних класів та комбінаторно ізоморфних до них множин, розв'язок Задачі 5.1.1 можна знайти на основі такої теореми.

Теорема 14. Нехай E – $\mathcal{C}$-множина, для якої виконана умова (43) та $E^1 \subset E$. Якщо $f \in \bar{\Phi}(E) = \Phi(E^1) \setminus \Phi(E)$: $f(x) \underset{E \setminus E^1}{\neq} 0$, то $E^1 = E'^1(\mathcal{F}^1)$, де $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F} \cup \{f\}$.

Для $\mathcal{C}_b$-множини E, отриманої з $\mathcal{C}_b$-множин $E^1,...,E^L$ Способами 3.1, 3.2, розв'язки цих двох задач можна знайти за розв'язками Задач 5.1.1, 5.2 для $E^1,...,E^L$ на основі такої теореми.

Теорема 15. Нехай $E^1, E^2 \subset \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}$-множини такі, що $E^l = E'^l(\mathcal{F}^l)$, де $\mathcal{F}^l = \{f_1^l,..., f_{m^l}^l\}$, $f_i^l \in \mathbf{C}(K)$, $i \in J_{m^l}$, $l = 1,2$. Тоді має місце: а) якщо $E = E^1 \cap E^2$, то $E = E'(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2)$; б) якщо $E = E^1 \cup E^2$, то $E = E'(\{f_i^1 \cdot f_j^2\}_{i \in J_{m^1}, j \in J_{m^2}})$; в) якщо $E = \varphi(E^1)$, де $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – невироджене лінійне перетворення, то $E = E'(\{f_i^1 \circ \varphi\})_{i \in J_{m^1}}$.

Теорема 15 вірна для довільної пари $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$ генераторів множин E^1, E^2, і в разі їх скінченності вони дають розв'язок Задачі 5.1.1. Застосована до $\Phi(E^1), \Phi(E^2)$, ця теорема дає розв'язок Задачі 5.2, до $I(E^1), I(E^2)$ – дозволяє знайти $I(E)$.

Для моделювання $\mathcal{C}_b$-множин за допомогою f-представлень пропонується схема (SR.Scheme) розв'язання Задачі 5.1.1, що ґрунтується на С-А та полягає у пошукові аналітичної форми обмежень на $G, \mathcal{A}, n$.

Викладено деякі підходи до пошуку URs та MRs $\mathcal{C}_b$-множин (Задача 5.1.2), при цьому особливу увагу приділено питанням формування E.PSRs на основі H-представлення P. З цією метою досліджено питання формування еквівалентних та релаксаційних моделей $\mathcal{C}$-множин у формі f-представлень.

Так, для дворівневих $\mathcal{C}$-множин, E.PERs будуються на базі згортки двосторонніх обмежень P.

Теорема 16. Довільна 2LS E дозволяє побудову E.PSR, у якому бере участь рівняння строго опуклої поверхні з сім’ї

$$S^{\kappa} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_0(x,\kappa) - |\mathbf{F}| = 0\}, \kappa \in (1,\infty), \tag{48}$$

де $f_0(x,\kappa) = \sum_{F \in \mathbf{F}} |\bar{n}_F^T x - a_F|^{\kappa}, \bar{n}_F^T x, a_F : |\bar{n}_F^T x - a_F| = 1, F \in \mathbf{F}$.

Так, H-представлення P з рівнянням $f_0(x,2) = 0$ є E.PER.

Викладемо декілька підходів до побудови дотичних f-представлень. Особливий інтерес до них пояснюється тим, що за умови опуклості функцій, що беруть у ньому участь, TRs – f-представлення мінімального порядку.

Наведемо загальну схему побудови дотичних f-представлень $\mathcal{C}$-множини E (TR.Scheme1). Дотичне представлення будуватимемо у формі

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0. \tag{49}$$

1. Обираємо диференційовані на E функції $f_1(x), f_2(x)\in\Phi(E)$, $f_1(x)\neq f_2(x)$ такі, що S_1, S_2 є гіперповерхнями.

2. Перевіряємо виконання необхідної умови дотику S_1, S_2: $\forall x\in E\ \ \exists k(x)\neq 0$ таке, що $\nabla f_2(x)\underset{E}{=}k(x)\cdot\nabla f_1(x)$.

3. Якщо дана умова виконана, перевіряємо, чи дійсно E є множиною точок дотику S_1, S_2, оптимізуючи по одній поверхні функцію, що визначає другу поверхню. З цією метою методом множників Лагранжа розв'язуємо задачу оптимізації:

$$f_1(x)\underset{x\in S_2}{\to} extr. \tag{50}$$

Тоді система рівнянь (49) буде E.TR, якщо виконано одну з умов: $X^{1\min}=E, Z^{1\min}=0$ або $X^{1\max}=E, Z^{1\max}=0$, де

$$X^{1\min}=Arg\min_{x\in S_2} f_1(x),\ Z^{1\min}\underset{x\in X^{1\min}}{=} f_1(x);$$
$$X^{1\max}=Arg\max_{x\in S_2} f_1(x),\ Z^{1\max}\underset{x\in X^{1\max}}{=} f_1(x).$$

Ще одна схема (TR.Scheme2) є способом побудови TRs 2LSs.

Теорема 17. Якщо E – повномірна 2LS, то рівняння поверхонь S^2, S^4 з сім'ї (48) є її дотичним f-представленням.

Третій метод побудови дотичних f-представлень (TR.Scheme3) застосовуваний у випадку, якщо рівняння (49) можна зобразити в термінах деякої норми, тобто:

$$\exists\|\,.\,\|_{(\alpha)}, \exists\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^1_+ : f_1(x)=\|x\|_{(\alpha_1)}-1;\ f_2(x)=\|x\|_{(\alpha_2)}-1. \tag{51}$$

Теорема 18. Якщо існує функція $\|\,.\,\|_{(\alpha)}$ строго монотонна по α, така, що функції $f_1(x), f_2(x)\in\Phi(E)$ задовольняють умову (51), то пара рівнянь (49) є (E.TR).

У даному розділі розглянуто питання математичного моделювання $\mathcal{C}$-множин за допомогою f-представлень.

Дані, наведені у розділі 5, опубліковано в роботах [2, 3, 8- 12, 14-16, 20, 22, 23, 32, 39, 40, 41].

У **шостому розділі** теорія f-представлень $\mathcal{C}$-множин була застосована до побудови f-представлень деяких класів $\mathcal{C}_b$-множин.

Так, на основі застосування SR.Scheme до $E_{nk}(G)$ було отримано такі f-представлення даної $\mathcal{C}_b$-множини.

Теорема 19. Кожна із систем рівнянь

$$(E_{nk}(G).\mathrm{SR1}): \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} x_i = \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} g_i,\ j\in J_n,$$

$$(E_{nk}(G).\mathrm{SR2}): \sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{n} g_i^j,\ j\in J_n,$$

є строгим f-представленням $E_{nk}(G)$.

На базі цієї теореми отримано такі SRs множини $E_{nk}^{\pm}(G)$, $G\subset\mathbb{R}_+^n$:

$$(E_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{SR1}): \sum_{i=1}^{n} |x_i|^j = \sum_{i=1}^{n} g_i^j,\ j\in J_n;$$

$$(E_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{SR2}): \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} |x_i| = \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} g_i;$$

$$(E_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{SR3}): \sum_{i=1}^{n} x_i^{2j} = \sum_{i=1}^{n} g_i^{2j},\ j\in J_n;$$

$$(E_{nk}^{\pm}(G).\mathrm{SR4}): \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} x_i^2 = \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} g_i^2,\ j\in J_n.$$

Аналітичний опис $\mathcal{C}_b$-множини $E_{\eta k}^n(G)$ сформовано на базі ($E_{nk}(G)$.SR1) та декомпозиції $E_{\eta k}^n(G) = \bigcup_{\mathcal{G}\subset G, |\mathcal{G}|=n} E_{nk_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G})$ цієї $\mathcal{PP}$S по $\mathcal{P}$Ss.

Теорема 20. Система рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{k} n_i e_i^j,\ j\in J_n;\ \prod_{j=0}^{\eta_i} (n_i - j) = 0,\ i\in J_k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

є розширеним f-представленням множини $E_{\eta k}^n(G)$ ($E_{\eta k}^n(G)$.ESR).

Твердження 2. Довільне $E_n(G)$.SR, доповнене рівнянням $\prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) = \prod_{1\le i<j\le n} (g_j - g_i)$, є строгим f-представленням $E_n^e(G)$.

Будь-яке B_n.SR, доповнене рівнянням

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i + 1) = 2^n \alpha_n,\ \text{де}\ \alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\ n \mod 2 \equiv 0, \\ -1, & \text{якщо}\ n \mod 2 \equiv 1, \end{cases}$$

є строгим f-представленням B_n^h.

З урахуванням зв'язку (7) множини $E_{nk}(G)$ із відображенням φ отримано узагальнення теореми 19, що обґрунтовує існування неполіноміальних $E_{nk}(G)$.SRs і дає їх аналітичний вигляд.

Теорема 21. Якщо $\chi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – бієктивне відображення, то кожна із систем рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i)^j = \sum_{i=1}^{n} \chi(g_i)^j,\ j \in J_n;\quad \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} \chi(x_i) = \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} \chi(g_i),\ j \in J_n,$$

задає строге f-представлення $E_{nk}(G)$.

Досліджено питання виділення з $E_{nk}(G)$.SRs незвідних f-представлень. Так, встановлено, що при $k > 2$ ($E_{nk}(G)$.SR1) – незвідне, тобто це $E_{nk}(G)$.IIR. Звідність f-представлення ($E_{n2}(G)$.SR1) продемонстровано виділенням з нього дотичних f-представлень множини $E_{n2}(G)$. З цією метою було розглянуто допоміжну задачу

$$f(x) \underset{x \in S}{\to} extr, \text{ де } f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_2}, S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^{j_1} - 1 = 0\},\ j_1, j_2 \in J_n \setminus \{1\}, j_1 < j_2.$$

У результаті було встановлено, що $B_n^{'}$, B_n, $B_n^{\pm}(1)$ дозволяють TRs вигляду:

$$(B_n^{'}.\mathrm{TR}(j_1, j_2)) : f_1(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_1} - n = 0, f_2(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_2} - n = 0;$$

$$(B_n.\mathrm{TR}(j_1, j_2)) : f_l(x) = \sum_{i \in J_n} \left(\frac{x_i - 0.5}{2} \right)^{j_l} - \frac{n}{2^{j_l}} = 0,\ l = 1, 2;$$

$$(B_n^{\pm}(1).\mathrm{TR}(j_1, j_2)) : f_1(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_1} - 1 = 0, f_2(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_2} - 1 = 0,$$

де j_1, j_2 – парні, що є ілюстрацією застосування TR.Scheme1. Множина $B_n(1)$ має такі дотичні f-представлення:

$$(B_n(1).\mathrm{TR}(j_1, j_2)) : f_1(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_1} - 1 = 0, f_2(x) = \sum_{i \in J_n} x_i^{j_2} - 1 = 0,$$

де j_1 – парне, j_2 – непарне.

Вигляд знайдених SRSs множин (44) демонструє, що обернені до (45)-(47) включення також вірні і має місце такий результат:

Теорема 22.

$$I(E_{nk}(G)) = \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \right\rangle, I(B_n') = \left\langle \Phi_n^e(\{\mathbf{e}\}) \right\rangle, I(E_{nk}^{\pm}(G)) = \left\langle \Phi_n^{sym}(G) \right\rangle \cup \left\langle \Phi_n^e(G)) \right\rangle.$$

Ілюстрацією застосування TR.Scheme2 є таке біквадратне TR множини $B_n(m-1,m)$, $m \in J_n$:

$$f_0(x,2) = \sum_{i=1}^{n}(2x_i - 1)^2 + (2\sum_{i=1}^{n} x_i - m + 1)^2 - n - 1 = 0,$$

$$f_0(x,4) = \sum_{i=1}^{n}(2x_i - 1)^4 + (2\sum_{i=1}^{n} x_i - m + 1)^4 - n - 1 = 0.$$

Прикладом використання TR.Scheme3 є сім'ї ($B_{n'}.\mathrm{TR}(j_1, j_2)$), ($B_n(1).\mathrm{TR}(j_1, j_2)$) для $1 < j_1 < j_2 < \infty$.

Розглянуто питання побудови дотичних f-представлення множин, що одержуються у результаті теоретико-множинних операцій над $\mathcal{C}_b$-множинами з відомими TRs. Так, встановлено, що дотичне f-представлення декартова добутку множин B_{n_1}' і $B_{n_2}^{\pm}(1)$ існує у формі, що встановлюється такою теоремою.

Теорема 23. Для довільних $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ дотичним f-представленням множини $E = B_{n_1'} \times B_{n_2}^{\pm}(1)$ є система рівнянь:

$$\left(-1+\sqrt{5}\right)\sum_{i=1}^{n_1} x_i^4 + \left(3-\sqrt{5}\right)\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 = \left(-1+\sqrt{5}\right)n_1 + \left(3-\sqrt{5}\right),$$

$$\left(-1+\sqrt{5}\right)\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \left(3-\sqrt{5}\right)\sum_{j=1}^{n_2} y_j^4 = \left(-1+\sqrt{5}\right)n_1 + \left(3-\sqrt{5}\right).$$

Крім цього, досліджено питання побудови f-представлень для решти $\mathcal{C}_b$-множин сімей (28)-(30).

Для $\mathcal{C}_b$-множини матриць перестановок та їх узагальнень (33) f-представлення знайдено комбінацією кількох чинників – властивостей їх генераторів, представлення за допомогою теоретико-множинних операцій над множинами класу $B_n(m)$. Розширені f-представлення сім'ї (33) побудовано з використанням співвідношення (23) у формі зв'язуючого рівняння $x = X^T \cdot g_{\mathcal{A}}$, доповненого f-представленням відповідної числової $\mathcal{C}_b$-множини з сімей (28), (29). Подібний підхід пропонується використовувати до побудови розширених f-представлень інших векторних $\mathcal{C}_b$ -множин, де (22) бере участь як зв'язуюче рівняння. Таким чином, Задача 5.1 вирішена для усіх введених вище $\mathcal{C}_b$ -множин як числових, так і векторних.

У даному розділі розглянуто питання побудови математичних моделей $\mathcal{C}_b$-множин у формі f-представлень.

Дані, наведені у розділі 6, опубліковано в роботах [2, 3, 7-12, 14-16, 20, 22, 23, 32, 39-41].

У **сьомому розділі** отримала розвиток теорія опуклих продовжень функцій.

Означення. $F(x)$ є *продовженням* функції $f: E \to \mathbb{R}^1$ з $E \subset \mathbb{R}^n$ на $E' \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо $F: E' \to \mathbb{R}^1$, $F(x) \underset{E}{=} f(x)$.

Типологію продовжень функції здійснимо:

– *за виглядом функції* $F(x)$: неперервні, неперервно диференційовані, опуклі/угнуті (строго/сильно опуклі/угнуті) в разі опуклості E', поліноміальні і т.д.;

– *за областю дії продовження*. Продовження $F(x)$ функції $f(x)$ з множини E назвемо *строгим*, якщо виконано умову $F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in E$; *розширеним* продовженням функції f з E на $E' = E'^1 \times E'^2$, якщо $E' \subseteq E'^1$, $\exists n_2 \ge 1: E'^2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, а також $f(x) \underset{(x,y)\in E \times E'^2}{=} F(x,y)$.

Основні розглянуті у даному розділі питання – існування продовжень заданого типу з $\mathcal{C}$-множин певного класу (Задача 7.1) та пошук конструктивних способів побудови опуклих/угнутих продовжень із E на опуклу множину $K \supset E$ (Задача 7.2).

У рамках дослідження Задачі 7.1, фундаментальні теореми С. В. Яковлева про існування опуклих, у т.ч. сильно опуклих продовжень, будь-якої функції з довільної VLS E на $E' = P$ були узагальнені у кількох напрямках. Серед них отримання необхідної та достатньої умови існування опуклого продовження функції $f(x)$ (далі CE, f.CE), умов існування f.CE з $\mathcal{C}$-множини, що не є VLS; розширення області дії опуклого продовження на власну надмножину багатогранника P. Зокрема, для VLS E обґрунтовано існування f.CE з E на $E' \subseteq \mathbb{R}^n$, а для $\mathcal{C}$-множини E, що дозволяє PSR, – існування строго опуклого продовження на $E' = C$. Крім цього, досліджені умови існування строго та сильно опуклих продовжень із SLS E, вписаної у сильно опуклу поверхню $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0\}$, у формі

$$F(x,\mu) = f(x) + \mu f_1(x). \tag{52}$$

Теорема 24. Нехай E – SLS, описана поверхня S навколо якої задана сильно опуклою на $X_1 \supset E$ функцією $f_1(x) \in \mathbf{C}^2(X_1)$, а функція $f(x) \in \mathbf{C}^2(X)$, де $X \supset E$ – компакт. Тоді для довільного опуклого компакту $K \subseteq X \cap X_1$ $\exists \mu^*(K) > 0$ таке, що $\forall \mu > \mu^*(K)$ функція $F(x,\mu)$ вигляду (52) є строго опуклим двічі неперервно диференційованим продовженням f з E на K.

Перейдемо до Задачі 7.2. Спочатку наведемо ітераційні конструктивні підходи до побудови f.CEs, які використовують вигляд функції f та зводяться до побудови опуклих та угнутих продовжень функцій, простіших за f.

Нехай $\mathcal{C}$-множина E – область продовження f, а $K \supset E$ – опукла область дії цього продовження; $F(x)$, $F^{[.],k}(x)$ – CEs функцій $f(x)$ і $(f^{[.]}(x))^k$ відповідно; $\tilde{F}^{[.],k}(x)$ – угнуті продовження $(f^{[.]}(x))^k$; $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$.

Теорема 25. Для функції $f: E \to \mathbb{R}^1$ такої, що $f(x) = f^1(x) \cdot f^2(x)$, де $f^1(x), f^2(x) \underset{K}{\geq} 0$, f.CE існує у формі

$$F(x) = (F^{1,1}(x) \cdot F^{2,1}(x))_+ + \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (F^{2,1}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{2,2}(x)).$$

Теорема 26. Якщо $f: E \to \mathbb{R}^1$ має вигляд: $f(x) = -f^1(x) \cdot f^3(x)$, де $f^1(x), f^3(x) \underset{K}{\geq} 0$, та $\exists M > 0: f^3(x) \underset{K}{\leq} M$, то f.CE існує у формах:

$$F(x) = (F^{1,1}(x)(M - \tilde{F}^{3,1}(x)))_+ + \frac{1}{2}((F^{1,1}(x))^2 + (\tilde{F}^{3,1}(x))^2 -$$
$$-\tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)) + M(F^{3,1}(x) - \tilde{F}^{1,1}(x) - \tilde{F}^{3,1}(x));$$
$$F(x) = \frac{1}{2}((F^{1-3}(x))^2 - \tilde{F}^{1,2}(x) - \tilde{F}^{3,2}(x)),\ F^{1-3}(x) = \max\{F^1(x) - \tilde{F}^3(x), F^3(x) - \tilde{F}^1(x)\}.$$

Так, теореми 25, 26 застосовні в ітераційних схемах побудови CEs поліномів з $E \subset \mathbb{R}^n_+$, але продовження, отримані при цьому, взагалі кажучи, не є гладкими. Між тим, є клас $\mathcal{C}$-множин та функцій, для яких прийоми, закладені у цих теоремах дозволяють винайдення f.CE у тому ж класі функцій, що і f. Це відноситься до опуклих продовжень квадратичних функцій з PSpS E.

Теорема 27. f.CE для $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$, де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A = A^T, b \in \mathbb{R}^n$, із PSpS $E \subset S_r(x^0)$ існує у формі (52), де $f_1(x) = (x - x^0)^2 - r^2$,

$$\mu = \frac{1}{2}(\| A \|_1 - d_A^+ + d_A^-),\ \| A \|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|,\ d_A^+ = \sum_{a_{ii}>0} |a_{ii}|,\ d_A^- = \sum_{a_{ii}<0} |a_{ii}|.$$

Дана теорема відображає єдиний підхід до побудови CEs квадратичних функцій з PSpSs, причому $F(x,\mu)$ є строгим f.CE з $S_r(x^0)$ і нестрогим із E. Строгі f.CEs можливо побудувати лише з залученням усіх компонент f-представлень E.

Для деяких класів $\mathcal{C}_b$-множин було винайдено спеціальні методи побудови опуклих продовжень. Наведемо два з них.

Теорема 28. Для $f(x) = p_l(x) = a\prod_{j=1}^{n} x_i^{l_j}$, $l_j \in \mathbb{Z}_+, l = \sum_{j=1}^{n} l_j$, де $a > 0$, f.CE з

$E = E_{nk}(G)$, індукованої $G \subset \mathbb{R}^1_{>0}$, в ортант $\mathbb{R}^n_{>0}$ існує у формі:

$$F(x) = a \cdot ln^{\mu} u_n(g) \prod_{j=1}^{n} x_j^{l_j - \mu}, \text{ де } \mu = \max_{i \in J_n} l_i,\ u_j(g) = \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} g_i,\ j \in J_n.$$

Якщо $a < 0$, побудова f.CE зводиться до застосування теореми 28 та такої властивості мономіальних симетричних поліномів на E: $-p_l(x) \underset{E}{=} - P_l(g) + \sum_{y \in \Pi \setminus \langle l_1,\dots,l_n \rangle} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j}$, де $\Pi = \Pi_{n,|S(\mathcal{L})|}(\mathcal{L})$ – загальна $\mathcal{E}_c$-множина перестановок, індукована мультимножиною $\mathcal{L} = \{l_j\}_{j \in J_n}$.

Теорема 29. Опукле продовження полінома $f(x) = P_l(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{il_i}(x)$, де $l = \max_{i \in J_m} l_i$, $p_{il_i}(x) = a_i \prod_{j \in I_i} x_j^{l_{ij}}$, $l_i = \sum_{j \in I_i} l_{ij}$, $I_i \subseteq J_n$, $i \in J_m$, із $E = B_n$ існує у формі:

$$F(x) = \sum_{i \in J_m, a_i > 0} a_i \Big(\sum_{j \in I_i} x_j - |I_j| + 1 \Big)_+ + \sum_{i \in J_m, a_i < 0} a_i \min_{j \in I_i} x_j.$$

Разом з результатами розділу 4, які стосуються оцінок мінімумів функцій, даний розділ присвячений здебільшого дослідженню поведінки функцій, заданих на $\mathcal{C}$-множинах. Але, як буде показано далі, продовження, зокрема опуклі, відіграють суттєву роль у побудові еквівалентних формулювань ECOPs.

Дані, наведені у розділі 7, опубліковано в роботах [2-5, 9, 10, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 31, 34, 42].

Восьмий розділ присвячений різноманітним застосуванням е-конфігурацій, зокрема математичному моделюванню модельних задач у термінах е-конфігурацій, серед яких задачі геометричного проектування та комбінаторної оптимізації, а також інструментальним засобам розв'язання задач оптимізації, що використовують досліджені властивості $\mathcal{C}$-множин. Це стосується як особливостей застосування відомих підхрдів, так і нових прийомів, які виникли у ході дослідження.

COP розглянемо у такій постановці: знайти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi'} \phi(\pi),\ \Pi' = \{\pi \in \Pi : \varphi_i(\pi) \le 0, i \in J_m\},$$

де Π – $\mathcal{E}_c$-множина, Π' – допустима область COP.

ECOP розглянемо у такій постановці: знайти

$$x^* = \arg \min_{x \in E'} f(x), \text{ де } E' = \{x \in E : f_i^1(x) \le 0, i \in I^1;\ f_i^2(x) = 0, i \in I^2\},$$

E – $\mathcal{C}_b$-множина, E' – $\mathcal{C}$-множина, а $\phi(\pi^*) = f(x^*)$. Це означає, що ECOP є евклідовою постановкою COP, отже її розв'язання зводиться до розв'язання ECOP.

Розв'язавши для E Задачу 5.2 і застосовувавши одержане f-представлення у зображенні $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i^1(x) \le 0,\ i \in I^3;\ f_i^2(x) = 0,\ i \in I^4\}$, одержуємо постановку ECOP як задачі нелінійного програмування вигляду: знайти

$$x^* = \arg\min_{x \in E'} f(x),\ \text{де}\ E' = \{ f_i^1(x) \le 0, i \in I^1 \cup I^3;\ f_i^2(x) = 0, i \in I^2 \cup I^4\},$$

яку ми називаємо неперервною постановкою ECOP (CECOP).

Якщо E – VLS, ECOP дозволяє неперервну постановку, у якій замість залучених у ній функцій, беруть участь їх опуклі продовження з E на опуклу $K \supset E$.

Теорема 30. ECOP на VLS E еквівалентна задачі (далі ECOP1): знайти

$$x^* = \arg\min_{x \in E} F(x),\ \text{де}\ F_i^1(x) \le 0, i \in I^1; F_i^2(x) \le 0, F_i^3(x) \le 0, i \in I^2,$$

$F(x)$ – f.CE; $F_i^1(x)$ – f_i^1.CE, $i \in I^1$; $F_i^2(x)$ – f_i^2.CE, $i \in I^2$; $F_i^3(x)$ – це $-f_i^2$.CE, $i \in I^2$, з E на K.

Дана теорема означає, що поліедральна релаксація ECOP1 є задачею опуклого програмування, відповідно до її розв'язання застосовні методи опуклої оптимізації.

Інструментальні засоби, що ґрунтуються на результатах роботи у розв'язанні задач комбінаторної оптимізації, демонструються на прикладі розв'язання ECOP без додаткових обмежень на $\mathcal{C}$-множині E, яка є 2LS та WDS, а $f \in \mathbf{C}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$. E є PES, тому ECOP1 існує у формі знайти $x^* = \arg\min_{x \in E} F(x)$, де $F(x)$ має вигляд (52), а $f_1\left(x\right) = 0$ – рівняння еліпсоїда. Так, на основі використання E.PER та розбитті E по парах множин, що є 2LSs, WDSs і PESs, ECOP1 зводиться до розв'язання послідовності неперервних релаксацій трьох типів на на P, S і на опуклому тілі C, дві з яких є задачами опуклого програмування. Відповідно, до розв’язання ECOP1 застосована група поліедрально-поверхневих методів і метод поліедрально-поверхневих відсікань. E дозволяє строге квадратичне f-представлення, тому ще один підхід до розв’язання ECOP1 полягає у його використанні у CECOP з $F(x)$ як цільовою функцією та подальшого її розв'язання як класичної задачі на умовний екстремум методами нелінійного програмування.

Показано зв'язок строгих f-представлень $\mathcal{C}$-множин із продовженнями функцій (у тому числі строгими та розширеними) та розповсюдженість їх використання у методах нелінійного програмування, таких, як метод штрафних функцій, метод множників Лагранжа, розширений метод множників Лагранжа, метод Лагранжевих релаксацій тощо. Тим самим підкреслюється важливість розв’язання задачі побудови f-представлень, особливо строгих, для нових класів FPCs, у тому числі для $\mathcal{C}_b$-множин.

На прикладі SAT, MWIS, безумовної булевої задачі (UBCP), задачі розміщення та інших модельних задач показано можливості використання результатів роботи, що стосуються е-конфігурацій та їх властивостей, f-представлень $\mathcal{C}$-множин та опуклих продовжень із них, у формуванні евклідових постановок задач комбінаторної оптимізації. Введено ряд нових класів $\mathcal{C}_b$-множин, що виникають у задачах комбінаторної оптимізації, та на прикладі MWIS продемонстровано особливості їх математичного моделювання за допомогою f-представлень.

Розглянуто таку задачу розміщення (РР): нехай множина об'єктів із відомими метричними характеристиками розміщуються в області з фіксованими параметрами розміщення. Необхідно знайти параметри розміщення об'єктів і метричні характеристики області розміщення, при яких досягається екстремум заданої функції, при цьому об'єкти розміщення попарно не перетинаються та розташовані в області розміщення. Побудовано частково комбінаторну СОР даної задачі як задачі на загальній $\mathcal{E}_c$-множині перестановок векторів і відповідну ECOP як задачі оптимізації на загальній $\mathcal{C}_b$-множині перестановок векторів. Таким чином, у РР виділено новий вид комбінаторної структури, який стосується перестановок.

Наведено області практичного застосування задач оптимізації на числових $\mathcal{C}_b$-множинах $E_{nk}(G)$, $E_{\eta k}^{n}(G)$, B_n, $B_n(m)$ та ін., а також на відповідних векторних $\mathcal{C}_b$-множинах.

Дані, наведені у розділі 8, опубліковано в роботах [2, 6, 9-11, 13, 18-23, 27-31, 33, 36, 38, 41, 42, 45].

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного в дисертаційній роботі дослідження вирішено важливу наукову проблему вироблення загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій шляхом їх відображення у евклідів простір. Вона полягає у відображенні допустимої множини комбінаторних конфігурацій у евклідів простір, формуванні евклідової постановки екстремальної задачі, застосуванні запропонованої типології до визначення типу отриманої задачі евклідової комбінаторної оптимізації як екстремальної задачі на множині е-конфігурацій та, залежно від класу отриманої задачі, подальшого її розв'язання відповідними методами, що комплексно використовують досліджені алгебро-топологічні та тополого-метричні властивості множин е-конфігурацій, теорію їх неперервних функціональних представлень, теорію опуклих продовжень та оцінок мінімумів функцій, а також наявний на даний момент апарат математичного програмування. У процесі вирішення поставлених завдань з розроблення даної методології одержано ряд нових наукових результатів.

1. У роботі проведено аналіз сучасного стану теорії конфігурацій та евклідової комбінаторної оптимізації, перспектив використання евклідових, у тому числі неперервних, постановок задач комбінаторної оптимізації та застосування теорії нелінійного, зокрема дискретного, програмування до розв’язання екстремальних комбінаторних задач. У результаті проведеного дослідження вперше виділено спеціальний

клас е-множин ($\mathcal{E}_C$-множин), що складаються з комбінаторних конфігурацій, породжених векторами. Встановлено, що $\mathcal{E}_C$-множини є математичними моделями допустимих областей чисельних практичних задач, зокрема задач геометричного проектування, що формалізують їх у термінах відображень.

2. Вперше введено нові математичні об'єкти – евклідову комбінаторну конфігурацію (е-конфігурацію) як відображення скінченної множини комбінаторного характеру у точку евклідова простору та множину е-конфігурацй ($\mathcal{C}$-множину) – та досліджено їх властивості. Це дало можливість поєднати структурні властивості $\mathcal{E}_C$-множин та геометричні особливості $\mathcal{C}$-множин у математичному моделюванні допустимих областей екстремальних комбінаторних задач, а зберігання усієї інформації про комбінаторні конфігурації у $\mathcal{C}$-множинах дозволило розширити клас евклідових постановок задач комбінаторної оптимізації та використати $\mathcal{C}$-множини у побудові еквівалентних математичних моделей численних задач практичного та теоретичного змісту.

3. Виділено фундаментальні характеристики $\mathcal{C}$-множин, такі, як індукуюча мультимножина, твірна множина та розмірність простору, у якому ці множини задано. Ці характеристики покладено в основу напрямку дослідження $\mathcal{C}$-множин – конструктивного аналізу (C-A), який став головним інструментом типології та моделювання $\mathcal{C}$-множин, зокрема побудови їх аналітичних описів. Дослідження $\mathcal{C}$-множин як скінченних точкових конфігурацій виділено як окремий напрямок – геометричний аналіз (G-A), присвячений вивченню алгебро-топологічних властивостей $\mathcal{C}$-множин та їх опуклих оболонок. У комплексі C-A і G-A стали інструментом поєднання екстремальних задач на $\mathcal{E}_C$-множинах із задачами евклідової комбінаторної оптимізації на $\mathcal{C}$-множинах і задачами дискретного програмування, а також з нелінійним, зокрема дискретним, програмуванням як засобом їх розв'язання, який з'явився після відображення в евклідів простір.

4. Вперше виділено клас базових $\mathcal{C}$-множин ($\mathcal{C}_b$-множин), а серед них – числові та векторні $\mathcal{C}_b$-множини, та встановлено їх зв'язок із відомими комбінаторними та евклідовими комбінаторними множинами. Дослідження алгебро-топологічних та тополого-метричних властивостей множин набуло подальшого розвитку для таких класів, як загальні $\mathcal{C}_b$-множини перестановок і розміщень; $\mathcal{C}_b$-множини парних перестановок і парних булевих векторів, поліперестановок і полірозміщень, матриць перестановок і перестановок з повтореннями. Вперше досліджено властивості загальних $\mathcal{C}_b$-множин перестановок зі знаком, матриць розміщень і перестановок зі знаком. Це розвиває теорію ЕСО у напрямку дослідження властивостей образів $\mathcal{E}_C$-множин, служить підґрунтям для вдосконалення існуючих і розроблення нових спеціальних методів ЕСО, а результати, що стосуються аналітичних описів $\mathcal{C}_b$-багатогранників та описаних поверхонь, служать основою поліедрально-поверхневих аналітичних описів $\mathcal{C}_b$-множин.

5. Теоретичні відомості про поведінку лінійних, квадратичних і функцій на образах е-множин було вперше систематизовано, адаптовано до $\mathcal{C}$-множин і доповнено для введених вперше класів $\mathcal{C}_b$-множин. З їх допомогою теорія оцінок мінімумів функцій, заданих на образах е-множин, дістала подальшого розвитку для $\mathcal{C}$- і

$\mathcal{C}_b$-множин, що дозволило її використання у методах ЕСО, як точних, так і наближених з оцінкою точності.

6. Вперше запропоновано та розроблено теорію неперервних функціональних представлень (f-представлень) $\mathcal{C}$-множин як інструмент їх математичного моделювання аналітичними засобами, дослідження поведінки заданих на них функцій, побудови неперервних постановок ECOPs, а також як засіб моделювання $\mathcal{E}_c$-множин, що є їх прообразами. Теорія f-представлень є одним з головних елементів методології дослідження екстремальних задач, яка встановлює їх зв'язок із задачами нелінійного програмування.

7. Теорія f-представлень була застосована до побудови аналітичних описів виділених класів $\mathcal{C}_b$-множин, у тому числі вперше було запропоновано та застосовано метод побудови f-представлень, що ґрунтується на С-А $\mathcal{C}_b$-множин. У поєднанні з тим фактом, що f-представлення є засобом формулювання екстремальних комбінаторних задач у формі задач нелінійної оптимізації, це відкриває перспективи застосування нелінійного програмування до задач, що моделюються як задачі оптимізації на $\mathcal{C}$-множинах.

8. Дістала подальшого розвитку та була адаптована до $\mathcal{C}$-множин як областей продовження теорія опуклих продовжень функцій. Розвиток відбувався у напрямках: а) вирішення проблеми існування опуклих продовжень різних типів у областях, що є власними надмножинами опуклих оболонок $\mathcal{C}$-множин; б) систематизації, вдосконалення, узагальнення відомих і пошуку нових конструктивних методів побудови опуклих продовжень залежно від вигляду продовжуваної функції, множини е-конфігурацій, що є областю продовження, та опуклої множини, на яку продовження відбувається; в) введення нових класів продовжень, формування їх типології, визначення сфери застосування та встановлення зв'язку між різними класами продовжень. Разом із встановленим тісним зв'язком між продовженнями з $\mathcal{C}$-множин і строгими f-представленнями цих множин, між опуклими продовженнями та можливістю застосування теорії оцінок мінімумів, а також продовжень із багатьма інструментальними засобами нелінійної, у тому числі опуклої, оптимізації це дозволяє свідчити про теорію продовжень функцій як про невід'ємну частину загальної методології дослідження екстремальних комбінаторних задач.

9. Теорія опуклих продовжень була застосована до побудови еквівалентної математичної моделі екстремальної задачі на $\mathcal{E}_c$-множині як задачі оптимізації на вершинно розташованій $\mathcal{C}_b$-множині з опуклими цільовою функцією та додатковими обмеженнями. Це обґрунтовує можливість застосування апарату опуклого програмування та теорії оцінок мінімумів функцій у розв'язанні задач комбінаторної оптимізації, а теорії продовжень функцій у моделюванні $\mathcal{C}$-множин та формуванні еквівалентних математичних моделей екстремальних комбінаторних задач.

10. Наведено математичні моделі ряду модельних задач, у тому числі геометричного проектування та теорії графів як задач оптимізації на множинах е-конфігурацій, та запропоновано підходи до їх розв'язання. Вони ґрунтуються на сумісному використанні досліджених властивостей множин е-конфігурацій, зокрема їх f-представлень, а також продовжень заданих на них функцій, та дозволяють одержувати точні або наближені з оцінкою точності розв'язки цих задач мето-

дами нелінійного, зокрема дискретного та опуклого, програмування.

11. Досліджені властивості екстремальних задач на $\mathcal{C}$-множинах використані при вдосконаленні та створенні нових інструментальних засобів евклідової комбінаторної оптимізації. Розроблено методологію їх використання залежно від класу екстремальної задачі. Обґрунтовано, що вибір підходів до оптимізації згідно із запропонованою методологією дозволяє поліпшити відомі на даний момент чисельні результати, що стосуються розглянутих модельних задач.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації

Монографії

1. Пичугина О., Брус А. Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников: Классификация. Применение в оптимизации и теории геометрических графов: монография. Saarbriicken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 144 с. ISBN: 978-3-659-64672-0.

2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков: Константа, 2017. 404 с. ISBN: 978-966-342391-3.

3. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография. Харьков: Золотая миля, 2018. 312 с. ISBN: 978-966-1685-72-6.

Статті

4. Валуйская О. А., Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 2. С. 121-129.

5. Валуйська О. О., Ємець О. О., Пічугіна О. С. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 4. С. 94-101. [Входить до міжнародних наукометричних баз zbMath, Google Scholar].

6. Пічугіна О. С. Математичне моделювання практичних задач у вигляді лінійних задач на переставленнях та їх розв’язання із застосуванням властивостей комбінаторних многогранників // Математические машины и системы. 2007. Т. 1. № 3. С. 185-195.

7. Пічугіна О. С. Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв’язанні практичних задач оптимізації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2010. № 4. С. 176-189.

8. Pichugina O. S., Yakovlev S. V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. no. 6. P. 921-930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMath, WorldCat, Google Scholar].

9. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. Cham : Springer. 2016. P. 689-700. DOI: 10.1007/978-3-

319-30379-6_62 [Входить до міжнародних наукометричних баз AMS Mathscinet, Springer Link, zbMATH, CrossRef, WorldCat, Google Scholar].

10. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. 2016. Vol. 4. no. 2. P. 129-152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103 [Входить до міжнародних наукометричних баз Web of Science, CrossRef, Ingenta Connect, WorldCat, Index Copernicus].

11. Pichugina O. Combinatorial approaches to the capital-budgeting problem // Econtechmod. 2016. Vol. 5. no. 4. P. 29-36. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, Yadda].

12. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2016. Т. 79. № 1. С. 27-38. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, ResearchBib, WorldCat, Google Scholar].

13. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах Евклидовой комбинаторной оптимизации // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2016. № 13. С. 144-160.

14. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика. 2016. № 1. С. 143-154.

15. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization // IOSR Journal of Mathematics. 2017. Vol. 13. no. 2. P. 12-25. DOI: 10.9790/5728-1302051225 [Входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, CrossRef, Google Scholar].

16. Пичугина О. С. Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Системні дослідження та інформаційні технології. 2017. № 4. С. 74-96. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.07 [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, WorldCat, Google Scholar].

17. Яковлев С. В., Пичугина О. С. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Питання прикладної математики і математичного моделювання. 2017. № 17. С. 258-264.

18. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. № 15. С. 152-158.

19. Пічугіна О. С., Колєчкіна Л. М. Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129-144.

20. Yakovlev S. V., Pichugina O. S. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. no. 1. C. 99-109. DOI: 10.1007/s10559-018-0011-6 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, AMS Mathscinet, Web of Science, Springer Link, ACM Digital Library, zbMATH, WorldCat, Google Scholar].

21. Farzad B., Pichugina O., Koliechkina L. Multi-Layer Networks: Origin,

Community Detection, Applications // International Journal of Computers. Vol. 12. P. 92-104, 2018. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, NSD].

22. Пичугина О. С. Математическое моделирование комбинаторных конфигураций и применение в задачах оптимизации // Математичні машини і системи. № 1. С. 123-137.

23. Пичугина О. С. Функционально-аналитические представления множеств евклидовых комбинаторных конфигураций в задачах оптимизации // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1. С. 1-9.

24. Пичугина О. С. Полиэдрально-сферические конфигурации: особенности и применение // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. № 17. С. 90-107.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації

Статті

25. Валуйская О. А., Пичугина О. С. Линейная условная и параметрическая оптимизация на евклидовых комбинаторных множествах и ее применение в экономике // Вісник Харківського державного політехнічного університету. 2000. № 92. С. 15-18.

26. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень поліномів на комбінаторних множинах // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки. 2010. Т. 1. № 2. С. 141-150. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, DOAJ].

27. Пічугіна О. С. Комбінаторні підходи до розв’язання задачі мінімізації часу виконання програмного пакету // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. 2010. № 7. С. 121-126.

28. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Задача розташування прямокутних модулів на чіпі та поліедральний підхід до її розв’язання // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. 2012. № 7. С. 135-141.

29. Pichugina O. S., Kolechkina L. N. On a diet menu modelling // Information technologies in economy research. 2016. № 2. С. 44-49.

30. Пичугина О. С. Одно обобщение гиперкуб-топологии сети передачи данных // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. 2016. Т. 80. № 6. С. 214-221. [Входить до міжнародних бібліометричних і наукометричних баз даних: Index Copernicus, Google Scholar, ICiteFactor, Infobase Index].

31. Пичугина О. С., Яковлев С. В. Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2016. № 1. С. 18-26. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar, OAJI, Scholar Steer, CiteFactor, I2OR].

32. Пичугина О. С. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций: проблемы и перспективы // Science Review. 2018. Т. 1. № 2. С. 10-15. [Входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, Google Scholar].

33. Пичугина О. С. Выпуклые продолжения функций на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций // Scientific pages. 2018. № 13. С. 8-18. [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, GIF, ResearcBib].

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

34. Пичугина О. С. Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения // Problems of Computer Intellectualization. 2012. С. 125-132.

35. Пічугіна О. С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на одному класі розміщень та його застосування // Матеріали одинадцятого міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кіровоград: КНТУ, 2011. С. 138-146.

36. Пічугіна О. С., Дяченко В. Г. Програмна реалізація однієї задачі розташування прямокутних модулів на чіпі // Збірник наукових праць за матеріалами V Всеукраїнського науково-практичного форуму установ НАН України та ВНЗ України. Полтава: ПНТУ, 2012. С. 90-95.

37. Пичугина О. С., Прохоренко А. Ю. Новые подходы к ортогональному проектированию в полиэдрально-сферической оптимизации на комбинаторных множествах // Материалы 4-ой международной научной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». Т. 2. Кишинеу: Еврика, 2014. С. 378-386.

38. Pichugina O., Farzad B. Human Communication Network Model // ICT in Education, Research and Industrial Applications. Kiev: http://ceur-ws.org, 2016. P. 33-40. [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Semantic Scholar, dblp, Google Scholar].

39. Пичугина О. С. Обобщенная задача построения функциональных представлений и продолжений с них и ее применение в оптимизации // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Структурні зміни у суспільстві та економіці під впливом комунікацій та інформації». Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 285-290.

40. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv: KPI, 2017. P. 1167-1174. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100436 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

41. Pichugina O. Placement problems in chip design: Modeling and optimization // 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). Kharkiv: KNURE, 2017. P. 465-473. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246440 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, IEEE Xplore, Semantic Scholar, WorldCat, Google Scholar].

42. Пічугіна О. С. Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання : матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції. Івано-Франківськ: п. Голіней О. М., 2017. С. 445-451.

43. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On Optimization Problems on the Polyhedral-Spherical Configurations with their Properties // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC). Kyiv: KPI, 2018. P. 94-100. DOI: 10.1109/SAIC.2018.8516801 [Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, IEEE Xplore, WorldCat, Google Scholar].

44. Пічугіна О. С. Комбинаторные конфигурации: подходы к моделированию и применение // Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семіна-

ру «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». Кропивницький: ЛА НАУ, 2018. С. 138-146.

45. Пічугіна О. С. Методи декомпозиції множин евклідових комбінаторних конфігурацій і застосування у оптимізації // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XXXIII международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире» г. Киева. 2018. № 6 (31). С. 60-75.

46. Пічугіна О. С. Неперервні формулювання задач комбінаторної оптимізації // Матеріали 7-ої міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології (ІСТ-2018)». Харків-Коблево: ХНУРЕ, 2018. С. 123-127.

АНОТАЦІЯ

Пічугіна О.С. Моделювання евклідових комбінаторних конфігурацій. – Рукопис. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2018.

Дисертаційна робота присвячена питанню формалізації задач комбінаторного характеру як задач на скінченних точкових конфігураціях. У ній представлено новий погляд на комбінаторні конфігурації та на його основі запропоновано інноваційні підходи до моделювання цих конфігурацій та застосування в області оптимізації. У роботі вирішено важливу наукову проблему вироблення загальної методології дослідження екстремальних задач на множинах комбінаторних конфігурацій, що полягає у відображенні допустимої множини комбінаторних конфігурацій у евклідів простір, формуванні евклідової постановки екстремальної задачі, застосуванні запропонованої типології до визначення типу отриманої задачі евклідової комбінаторної оптимізації як екстремальної задачі на множині е-конфігурацій та, залежно від класу отриманої задачі, подальшого її розв'язання відповідними методами, що комплексно використовують досліджені алгебро-топологічні та тополого-метричні властивості множин е-конфігурацій, запропоновану теорію їх неперервних функціональних представлень, теорію опуклих продовжень та оцінок мінімумів функцій, а також наявний на даний момент апарат математичного програмування.

Ключові слова: комбінаторна конфігурація, евклідова комбінаторна конфігурація, перестановка, розміщення, екстремальна комбінаторна задача, евклідова комбінаторна множина, евклідова комбінаторна оптимізація, опукле продовження, неперервне функціональне представлення, комбінаторний багатогранник, поліедрально-поверхнева множина, декомпозиція, релаксація.

АННОТАЦИЯ

Пичугина О.С. Моделирование евклидовых комбинаторных конфигураций. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные

методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Министерство образования и науки Украины, Харьков, 2018.

Диссертация посвящена вопросу формализации задач комбинаторного характера как задач на конечных точечных конфигурациях. В ней представлен новый взгляд на комбинаторные конфигурации и на его основе предложены инновационные подходы к моделированию этих конфигураций и применению в области оптимизации. В работе решена важная научная проблема разработки общей методологии исследования экстремальных задач на множествах комбинаторных конфигураций, состоящая в отображении допустимого множества комбинаторных конфигураций в евклидово пространство, формировании евклидовой постановки экстремальной задачи, применении предложенной типологии к определению типа полученной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации как экстремальной задачи на множестве е-конфигураций и, в зависимости от класса полученной задачи, дальнейшего ее решения соответствующими методами, комплексно использующими исследованные алгебро-топологические и тополого-метрические свойства множеств е-конфигураций, предложенную теорию их непрерывных функциональных представлений, теорию выпуклых продолжений и оценок минимумов функций, а также имеющийся на данный момент аппарат математического программирования.

Ключевые слова: комбинаторная конфигурация, евклидова комбинаторная конфигурация, перестановка, размещение, экстремальная комбинаторная задача, евклидово комбинаторное множество, евклидова комбинаторная оптимизация, выпуклое продолжение, непрерывное функциональное представление, комбинаторный многогранник, полиэдрально-поверхностное множество, декомпозиция, релаксация.

ABSTRACT

Pichugina O.S. Modeling of Euclidean combinatorial configurations. – Qualifying scientific work on the manuscript rights.

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science in Physics and Mathematics in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – The Kharkiv National University of Radioelectronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The thesis is dedicated to formalization of extreme problems of a combinatorial nature as optimization problems on finite point configurations in Euclidean space. It presents a new perspective on combinatorial configurations as mathematical objects underlying innovative approaches to modeling the configurations and their applications in optimization.

The steady increase in complexity of the modern real-world problems, that need solving today, puts forward the new requirements for their mathematical modeling and adaptation for the application of existing mathematical tools. This necessitates the introduction of new mathematical objects, allowing formalization of these problems, given their discrete-continuous and extreme nature. Such objects, on one hand, should reflect the combinatorial structures that can be singled out in these problems, and on the other hand, should establish a connection between the combinatorial spaces arising in this case and the continuous spaces, such as Euclidean, in order to make the whole arsenal of contemporary theoretical optimization tools applicable to solving the extreme combinatorial problems.

The goal of this work is to develop a general methodology for studying extreme problems on combinatorial configuration sets mapped into Euclidean space. To achieve this goal, the following tasks were solved in the thesis:

– analysis of the approaches to the mapping of combinatorial configurations into Euclidean space is performed, and, based on the analysis, new mathematical objects – Euclidean combinatorial configurations (e-configurations) – are singled out as a result of this mapping;

– a mathematical object – an e-configuration set – is singled out, establishing a connection between combinatorial and Euclidean spaces by combining two mathematical objects – K. Berge's configuration and Euclidean combinatorial set;

– a typology of e-configuration sets is offered, based on their structural and geometrical features;

– the analysis is carried out for extreme problems on e-configurations' sets, and a typology is proposed, based on the type of admissible domain and functions defined on it;

– the class of basic e-configuration sets is distinguished, combinatorial structure of which is amenable to formalization;

– algebraic topological and metric topological properties of numerous classes of basic e-configuration sets are investigated;

– a theory of continuous functional representations of e-configuration sets as a new scientific direction is formed, in the scope of which a typology and methods for constructing analytic models of e-configuration sets are developed and applied to modeling of many basic e-configuration sets;

– in the scope of developing the theory of convex extensions and function minima estimation, the properties of functions defined on e-configurations sets are investigated, including finding new approaches to constructing convex extensions and bounds of functions' minima for special classes of e-configuration sets and functions defined on them;

– a number of models of extreme combinatorial and discrete optimization problems as Euclidean combinatorial optimization problems on e-configurations are constructed, their properties are investigated, and approaches to their solution, combining classic optimization methods with Euclidean combinatorial optimization techniques, are proposed.

The result of the research conducted in this thesis is the solution to an important scientific problem of developing a general methodology for studying extreme problems on a combinatorial configuration set. The methodology consists of the mapping of an admissible combinatorial configuration set into Euclidean space, defining the Euclidean formulation of the extreme problem, applying the developed typology to determine the type of the obtained Euclidean combinatorial optimization problem as an extreme problem on an e-configurations set. The final step is, depending on the problem type, its solution by relevant methods, comprehensively using derived algebraic topological and metric topological properties of e-configuration sets, the theory of continuous functional representation, of convex extensions and minima estimation, as well as classical and modern optimization.

Keywords: combinatorial configuration, Euclidean combinatorial configuration, permutation, partial permutation, extreme combinatorial problem, Euclidean combinatorial set, Euclidean combinatorial optimization, convex extension, continuous functional representation, combinatorial polytope, polyhedral-surfaced set, decomposition, relaxation.

Підписано до друку 15.01.2019 р. Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Віддруковано на різографі.
Умовн. др. арк. 1,9. Тираж 100 прим. Заказ 017

Віддруковано ФОП Лисенко І.Б.
61070, Харків -70, вул. Чкалова 17, моторний корпус, к.147.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджовачів видавничох продукціх ДК №2607 від 11.09.06 р.