

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

ЛАМТЮГОВА СВІТЛАНА МИКОЛАЇВНА



УДК 517.95:519.63

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ  $R$ -ФУНКЦІЙ  
ЗАДАЧ ОБТІКАННЯ ТІЛ В'ЯЗКОЮ НЕСТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент  
**Сидоров Максим Вікторович**,  
доцент кафедри прикладної математики,  
Харківський національний університет радіоелектроніки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
**Литвин Олег Миколайович**,  
завідувач кафедри вищої та прикладної математики,  
Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків);

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Колодяжний Володимир Максимович**,  
професор кафедри прикладної математики,  
Харківський національний автомобільно-дорожній університет.

Захист відбудеться «01» березня 2016 р. о 14<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському національному університеті радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Науки, 14.

Автореферат розісланий «29» січня 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради



Л.В. Колесник

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Дослідження явищ, що спостерігаються в атмосфері і гідросфері, а також вивчення проблем гідро-, аеродинаміки, теплоенергетики, хімічної кінетики, біомедицини за деяких припущень можна проводити в рамках моделі нестисливої в'язкої рідини. Багато задач, які мають практичний інтерес, як правило, описуються рівняннями Нав'є-Стокса, особливістю яких є нелінійність, а також наявність малого параметра при старшій похідній. Крім того, задачі для рівнянь Нав'є-Стокса часто треба розв'язувати в областях складної геометрії, зокрема область течії може бути і нескінченною (задачі обтікання тіл, течії рідини в трубах, каналах тощо).

Важливий клас складають течії, в яких можна знехтувати нелінійними членами і отримати лінійну задачу. Повне знехтування інерційними членами призводить до так званих рівнянь повзучої течії або рівнянь Стокса. Проте для задачі обтікання циліндричного тіла нескінченною в'язкою нестисливою рідиною не існує розв'язку рівнянь Стокса (парадокс Стокса). У цьому випадку користуються наближенням Озеена. Основні результати по теоретичному обґрунтуванню коректності початково-крайових і крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса і лінеаризацій цих рівнянь отримані Дж. Серрнім, О.О. Ладиженською, Ж.-Л. Ліонсом, В. Гіро, Р. Темамом, М.Д. Копачевським, С.Г. Крейном та іншими.

З розвитком комп'ютерної техніки при дослідженні задач гідродинаміки все активніше використовується математичне моделювання та обчислювальний експеримент. Існує безліч чисельних методів, які застосовуються для розрахунку в'язких течій. Найбільш вживаними є метод скінченних різниць і метод скінченних елементів, але при їх реалізації перехід до нової області (особливо складної геометрії) супроводжується генеруванням нової сітки, а часто і заміною складних ділянок межі геометрично простими, складеними, наприклад, з відрізків прямих. Крім того, в більшості випадків при чисельному розв'язанні задач обтікання умови на нескінченності зносяться на деякий контур, розташований на деякій скінченній відстані від тіла, що призводить до додаткових похибок в наближеному розв'язку.

Точно врахувати геометричну і аналітичну інформацію, що входить в постановку крайової задачі, можна, скориставшись конструктивним апаратом теорії  $R$ -функцій академіка НАН України Рвачова В.Л. Метод  $R$ -функцій в задачах гідродинаміки використовувався Колосовою С.В., Максименко-Шейко К.В., Сидоровим М.В., Слесаренко А.П., Суворовою І.Г., Цукановим І., Шапіро В., Чжаном С., Шейко Т.І., але, в основному, розглядалися задачі розрахунку течій ідеальної рідини, або ж в'язкої у скінченних областях чи за наявності гвинтової симетрії, магніто-гідродинамічних течій, задачі теплообміну в трубах складного перерізу. Задачі обтікання тіл в'язкою рідиною з використанням методу  $R$ -функцій не розглядалися, хоча вони становлять важливий клас прикладних задач. Отже, розробка нових та розвиток існуючих методів математичного моделювання стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною на основі методу  $R$ -функцій є актуальною науковою задачею.

**Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетної теми “Розробка моделей, методів та інструментальних засобів структурної і параметричної оптимізації інженерних мереж з витоками” (ДР № 0111U002624, 2011 – 2013 рр.), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень дисертаційної роботи є розробка методів математичного моделювання і чисельного аналізу стаціонарного обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною на основі методу  $R$ -функцій.

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі задачі:

- розробка методу розрахунку повільного обтікання циліндричних тіл (лінеаризація Озеєна) і тіл обертання (лінеаризація Стокса) на основі методу  $R$ -функцій;
- подальший розвиток ітераційного методу чисельного аналізу стаціонарних течій, які описуються нелінійними рівняннями, в частині його застосування до задач обтікання циліндричних тіл і тіл обертання;
- розробка методу розрахунку масообміну циліндричних тіл і тіл обертання з рівномірним поступальним потоком на основі методу  $R$ -функцій;
- застосування розроблених чисельних методів до розв'язання тестових задач розрахунку обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною при різних числах Рейнольдса і Пекле.

*Об'єктом дослідження* є стаціонарні гідродинамічні процеси обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною, які описуються лінійними (лінеаризації Озеєна або Стокса) або нелінійними рівняннями відносно функції течії і системою рівнянь відносно функції течії і концентрації.

*Предметом дослідження* є математичні моделі стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною і методи їх чисельного аналізу.

*Методи дослідження.* У роботі використовуються методи функціонального аналізу і математичної фізики для теоретичного дослідження запропонованих методів; математичний апарат теорії  $R$ -функцій для побудови нормалізованих рівнянь меж областей, в яких розглядаються течії, та для побудови структур розв'язку крайових задач обтікання тіл; проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна і метод послідовних наближень для апроксимації компонент структури; квадратурні формули Гаусса для чисельного інтегрування; чисельні методи для розв'язання систем лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Проведені в дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

- вперше розроблено метод розрахунку повільного обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною (наближення Озеєна і Стокса), заснований на сумісному використанні структурного методу (методу  $R$ -функцій) і проєкційного методу Бубнова-Гальоркіна, що дозволило точно враховувати як крайові умови на межі тіл, які обтікаються, так і умови на нескінченності; цей метод легко

модифікується при переході до областей іншої форми та подає наближений розв'язок у аналітичному вигляді, що спрощує його використання у подальших розрахунках;

– набув подальшого розвитку ітераційний чисельний метод розрахунку задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною: вихідна нелінійна задача замінена послідовністю лінійних крайових задач, для розв'язання яких на кожному кроці ітераційного процесу розроблено чисельний алгоритм на основі методів  $R$ -функцій і Бубнова-Гальоркіна; цей метод відрізняється від відомих тим, що дозволяє звести розгляд задач обтікання до задач в скінченній області, прилеглий до тіла, причому умови на нескінченності враховуються точно; для побудованого ітераційного процесу отримано умови збіжності;

– вперше розроблено чисельний метод розрахунку масообміну циліндричних тіл і тіл обертання з рівномірним поступальним потоком, заснований на сумісному використанні методів  $R$ -функцій і Бубнова-Гальоркіна, при цьому алгоритм не змінюється при зміні геометрії області, а структура розв'язку точно враховує як крайові умови на межі тіла, що обтікається і з поверхні якого відбувається масообмін, так і умови на нескінченності.

**Практичне значення отриманих результатів.** Розроблені в дисертаційній роботі методи розв'язання задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною дозволяють здійснювати ефективно чисельне моделювання течій в'язкої нестисливої рідини з урахуванням масообміну. Запропоновані методи є більш універсальними у порівнянні з багатьма відомими, оскільки перехід від однієї області до іншої враховується лише зміною рівняння межі. Крім того, запропоновані методи точно враховують як геометрію області, так і всі крайові умови, в тому числі і умову на нескінченності. Отримані результати дозволяють проводити обчислювальні експерименти при математичному моделюванні різних фізико-механічних, біологічних, хіміко-технологічних течій. Розроблені засоби математичного моделювання впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки в дисциплінах “Вибрані глави математичної фізики”, “Конструктивні засоби математики”, “Теорія  $R$ -функцій та її застосування” і “Чисельні методи” при проведенні лабораторних робіт, практичних занять, у курсовому і дипломному проектуванні.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дисертаційної роботи отримані особисто дисертантом та опубліковано в роботах [1 – 30]. У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати. У роботах [1, 9, 11, 13] автором на основі методу  $R$ -функцій побудовано метод розв'язання лінеаризованої (за Стоксом) задачі обтікання вісесиметричних тіл та проведено обчислювальний експеримент для задачі обтікання еліпсоїда обертання. В статті [6] автором запропоновано і обґрунтовано ітераційний метод розв'язання нелінійної стаціонарної задачі обтікання вісесиметричних тіл. У роботах [2, 7, 26] автором на основі методу  $R$ -функцій побудовано метод розв'язання лінеаризованої (за Озеєном) і нелінійної задачі обтікання циліндричних тіл та проведено обчислювальний експеримент для задачі обтікання кругового, еліптичного циліндрів і циліндра з твірною  $x^8 + y^8 = 1$  при різних числах Рейнольдса. У роботах [3,

20] автором запропоновано метод розв'язання задачі масообміну тіла обертання з рівномірним поступальним потоком в'язкої нестисливої рідини та проведені обчислювальні експерименти для сфери і еліпсоїда обертання при різних числах Рейнольдса і Пекле.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи були апробовані на: Міжнародній молодіжній науковій конференції “Гагаринские чтения” (Москва, 2010 р.; 2012 – 2014 рр.); Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010 р.; 2012 р.); IV науковій конференції для студентів та аспірантів “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” (Харків, 2010 р.); XXII-й відкритій науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України (Львів, 2011 р.); Міжнародному молодіжному форумі “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке” (Харків, 2012 – 2015 рр.); XXXVI науково-технічній конференції викладачів, аспірантів і співробітників Харківської національної академії міського господарства (Харків, 2012 р.); Міжнародній студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики (Львів, 2012 р.; 2013 р.); 2nd international scientific conference of students and young scientists “Theoretical and applied aspects of cybernetics” (Київ, 2012 р.); Одинадцятій Всеукраїнській науково-технічній конференції “Математичне моделювання та інформаційні технології” (Одеса, 2012 р.); VII Міжнародній науково-технічній конференції молодих фахівців, аспірантів і студентів “Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем” (Пенза, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозиумі “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” (Херсон, 2013 р.); Міжнародній науково-технічній конференції “Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях” (Харків, 2014 р.); XXXV науково-технічній конференції викладачів, аспірантів та співробітників Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова (Харків, 2014 р.); наукових семінарах кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, 2012, 2014 рр.), кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова (Харків, 2013 р.), кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2015 р.).

**Публікації.** Основні результати за темою дисертаційної роботи опубліковані в 30 друкованих роботах, з яких: 6 статей – у наукових фахових виданнях згідно з переліком фізико-математичних наук, 2 статті – у закордонних наукових виданнях, 1 стаття – у інших виданнях; 21 тези доповідей, опублікованих у матеріалах наукових конференцій, 16 з яких є міжнародними.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація містить вступ, шість розділів, висновки по роботі, 6 додатків (на 61 с.), 68 рисунків (на 38 с.), 9 таблиць (на 5 с.) та список використаних джерел з 208 найменувань (на 23 с.). Повний обсяг дисертації складає 273 сторінки, з них 146 сторінок основного тексту.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступній частині** обґрунтовано актуальність теми дисертації, показано її наукову спрямованість, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, які пот-

рібно розв'язати для її досягнення. Надано стислу характеристику результатів дослідження, ступеня їх апробації та опублікування.

В **першому розділі** розглянуто основні відомі математичні моделі стаціонарних течій в'язкої рідини. Наведено огляд літератури для зовнішніх течій в'язкої рідини та задач обтікання тіл, ускладнених масообміном, а також огляд існуючих методів їх чисельного аналізу. Наведено основні відомості про  $R$ -функції та огляд робіт, у яких розглядалися задачі гідродинаміки із застосуванням методу  $R$ -функцій. Також у розділі обґрунтовується необхідність розробки нових методів математичного моделювання зовнішнього обтікання тіл в'язкою рідиною з використанням апарату теорії  $R$ -функцій, сформульовано задачі дослідження.

В **другому розділі** розроблено метод розрахунку лінеаризованої за Озесном задачі обтікання циліндричних тіл в циліндричній системі координат. Математична модель має вигляд

$$v\Delta^2\psi + U_\infty A(\Delta\psi) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\psi/\partial\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1}\psi = U_\infty \sin\varphi, \quad (1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $A\zeta = -\partial\zeta/\partial x$ ;  $\psi$  – функція течії;  $U_\infty$  – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Основна складність при побудові методу чисельного аналізу задач обтікання пов'язана з нескінченністю області, в якій розглядається течія. Для побудови обчислювального алгоритму, який би дозволив вести розрахунки в скінченній області, використовується функція

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \leq \omega < M, \\ 1, & \omega \geq M. \end{cases} \quad \text{Якщо за допомогою}$$

конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій побудована досить гладка функція  $\omega$  така, що  $\omega = 0$  – нормалізоване рівняння  $\partial\Omega$ , то функція  $\omega_M = f_M(\omega)$  є такою, що: а)  $\omega_M > 0$  в  $\Omega$ ; б)  $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$ ; в)  $\partial\omega_M/\partial\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = -1$ , де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega$ ; г)  $\omega_M \equiv 1$ , якщо  $\omega_M \geq M$ .

У задачі (1) зробимо заміну  $\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u$ , де  $\psi_0 = U_\infty (r - R^2 r^{-1}) \sin\varphi$ ;  $u$  – нова невідома функція. Зауважимо, що функція  $\omega_M^2 \psi_0$  задовольняє крайовим умовам і умові на нескінченності задачі (1). Тоді функція  $u$  є розв'язком задачі

$$v\Delta^2 u + U_\infty A(\Delta u) = f \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial u/\partial\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} u = 0, \quad (2)$$

де  $f = -v\Delta^2(\omega_M^2 \psi_0) - U_\infty A(\Delta(\omega_M^2 \psi_0))$ . Зауважимо, що  $f \equiv 0$  в області  $\{\omega(r, \varphi) \geq M\}$ .

Нехай  $F$  – клас функцій  $v$ , які мають узагальнені похідні до другого порядку включно і квадратично сумовані в  $\Omega_1$  разом з цими похідними, де  $\Omega_1$  – будь-яка скінченна частина  $\Omega$ ; на межі  $\partial\Omega$  функції  $v$  задовольняють крайовим умовам.

Узагальненим розв'язком задачі (2) назвемо функцію  $u \in F$ , що задовольняє для будь-якої  $v \in F$  інтегральній тотожності

$$\int_{\Omega} (v \Delta u \cdot \Delta v - U_\infty \Delta u \cdot A v + v \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \Delta v - U_\infty \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot A v) d\Omega = 0.$$

Узагальнений розв'язок знайдемо як границю при  $n \rightarrow \infty$  розв'язків  $u_n$  рівняння задачі (2), що розглядається в  $\Omega_n = \{(x, y) \in \Omega \mid 0 < \omega(x, y) < M_n\} \subset \Omega$ . Тут  $\{M_n\}$  – будь-яка зростаюча необмежена зверху послідовність. Отже, послідовність областей  $\{\Omega_n\}$  є монотонним вичерпуванням нескінченної області  $\Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  розглянемо крайові задачі

$$\nu \Delta^2 u_n + U_\infty A(\Delta u_n) = f \text{ в } \Omega_n, u_n|_{\partial\Omega} = 0, \partial u_n / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** При будь-якому виборі досить гладких функцій  $\Phi_1, \Phi_2$  і за умови, що  $\Phi_1 \cdot r^{-1} \rightarrow 0$ , коли  $r \rightarrow +\infty$ , функція вигляду  $u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2$  точно задовольняє крайовим умовам і умові на нескінченності задачі (2).

Апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  шукатимемо у вигляді

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j, \quad (4)$$

де  $\{\varphi_k(r, \varphi)\} = \{r^{-k} \cos k\varphi, r^{-k} \sin k\varphi; k = 1, 2, \dots; r^{2-k} \cos k\varphi, r^{2-k} \sin k\varphi, k = 3, 4, \dots\}$ ,  
 $\{\tau_j(r, \varphi)\} = \{\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, r^j \cos j\varphi, r^j \sin j\varphi, r^{j+2} \cos j\varphi, r^{j+2} \sin j\varphi, j = 1, 2, \dots\}$ .

Тоді наближений розв'язок задачі (3) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна шукатимемо у вигляді  $u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j$ , де  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , – розв'язок системи

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{\nu[\phi_j, \phi_i] + U_\infty (\Delta \phi_j, A\phi_i)\} = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad N = m_1 + m_2,$$

де  $\{\phi_i(r, \varphi)\} = \{\omega_M^2(r, \varphi) \varphi_k(r, \varphi), \omega_M^2(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) \tau_j(r, \varphi)\}$ .

**Теорема 2.** При кожному  $n$  гальоркінські наближення  $u_{n,N}$  при  $N \rightarrow \infty$  збігаються в енергетичній нормі до узагальненого розв'язку задачі (3), при цьому має місце оцінка  $\|u_n\| \leq \frac{C_1}{\nu} \|f\|_{L_2(\Omega_n)}$ .

**Теорема 3.** Послідовність функцій  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  збігається в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв'язку задачі (2).

Проведено обчислювальний експеримент для кругового (тіло 1), еліптичного циліндрів (тіло 2) та циліндра з твірною  $x^8 + y^8 = 1$  (тіло 3) при  $U_\infty = 1$  для різних значень  $M$  та різної кількості координатних функцій. Лінії рівня функції течії для вказаних циліндричних тіл наведено на рис. 1. Отримані результати добре узгоджуються з відомими результатами фізичних експериментів і результатами, отриманими іншими авторами.

Основні результати другого розділу опубліковані в роботах [2, 4, 7, 8, 14–17, 26].

**В третьому розділі** розроблено метод розрахунку нелінійної стаціонарної задачі обтікання циліндричних тіл в циліндричній системі координат. Математична модель має вигляд

$$\nu \Delta^2 \psi = J(\Delta \psi, \psi) \text{ в } \Omega, \psi|_{\partial\Omega} = 0, \partial \psi / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \psi = U_\infty \sin \varphi, \quad (5)$$



де  $J(\Delta\psi, \psi)$  – якобіан функцій  $\Delta\psi$  і  $\psi$ .

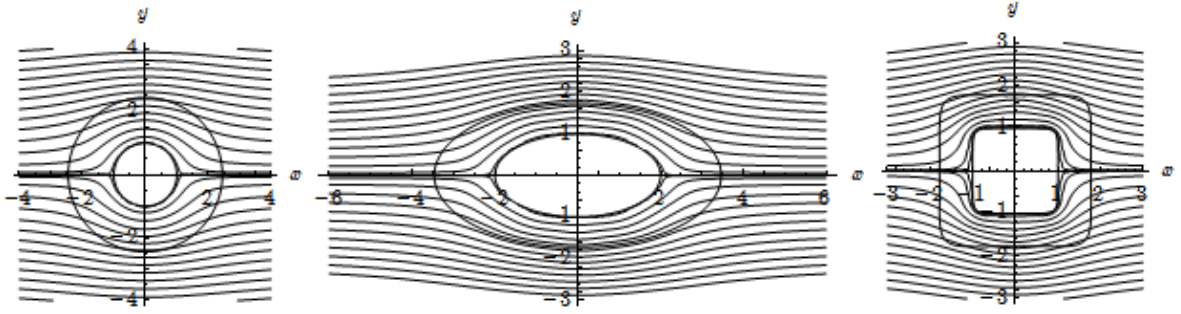


Рисунок 1 – Лінії рівня функції течії  $\psi$

В задачі (5) зробимо заміну  $\psi = u_0 + u$ , де  $u_0$  – розв’язок задачі (1);  $u$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $u$  отримаємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами

$$v\Delta^2 u = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u) + U_\infty A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0, \partial u / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} u = 0. \quad (6)$$

Узагальненим розв’язком задачі (6) назвемо функцію  $u \in F$ , що задовольняє для будь-якої  $v \in F$  інтегральній тотожності

$$v \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_{\Omega} J(u_0 + u, v) \Delta(u_0 + u) \, d\Omega + U_\infty \int_{\Omega} A(u_0) \Delta v \, d\Omega.$$

Нехай початкове наближення  $u_n^{(0)}$  задано. Якщо  $k$ -е наближення  $u_n^{(k)}$  побудовано, то нове  $(k+1)$ -е наближення  $u_n^{(k+1)}$  знаходимо як розв’язок лінійної задачі

$$v\Delta^2 u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) + U_\infty A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega_n, u_n^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \partial u_n^{(k+1)} / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

**Теорема 4.** Послідовні наближення, що формуються за схемою (7), при малих числах Рейнольдса при кожному  $n$  збігаються в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв’язку  $u_n^* \in F$  задачі (6), яка розглядається в обмеженій області  $\Omega_n$ , причому для  $k$ -го наближення оцінка похибки має вигляд  $\|u_n^* - u_n^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|u_n^{(1)} - u_n^{(0)}\|$ .

Умова малості числа Рейнольдса формулюється у вигляді нерівності

$$\frac{1}{v} < \min \left\{ \frac{L}{2c_1 \sqrt{2c^2 c_1^2 (L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}}, \frac{\alpha}{2c_0 (L_0 + L)} \right\},$$

де  $\|u_0\| \leq L_0$ ;  $\|u^{(k)}\| \leq L$ ;  $\alpha < 1$ .

Для апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1^{(k+1)}$  і  $\Phi_2^{(k+1)}$  було використано проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна. Функції  $\Phi_1^{(k+1)}$  і  $\Phi_2^{(k+1)}$  апроксимовано виразами вигляду (4). Проведено обчислювальний експеримент для тіл 1, 2 і 3 при  $U_\infty = 1$  для різних значень  $M$  та різних чисел Рейнольдса. Обчислювальний експеримент показав, що послідовні наближення збігаються при  $Re \leq 10$ . У разі розбіжності послідовних

наближень для розв'язання задачі використано нелінійний метод Гальоркіна. Лінії рівня функції течії для тіл 1, 2 і 3 при різних числах Рейнольдса наведено на рис. 2.

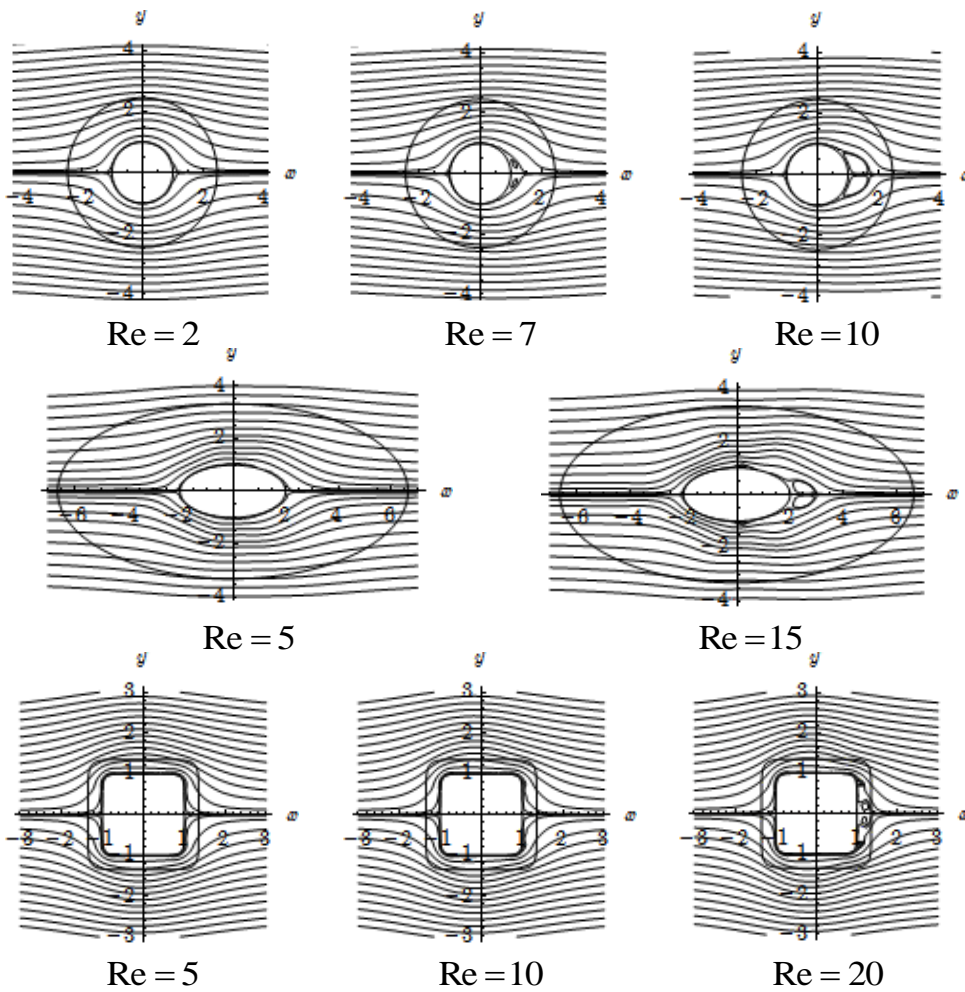


Рисунок 2 – Лінії рівня функції течії  $\psi$

Отримано, що вторинні вихори за тілом в задачі обтікання кругового циліндра з'являються при збільшенні числа Рейнольдса до  $\approx 5$ , в задачі обтікання еліптичного циліндра – до  $\approx 15$ , що добре узгоджується з відомими з літератури результатами фізичних експериментів і результатами, отриманими іншими авторами. Для задачі обтікання тіла 3 отримано, що вихори з'являються при збільшенні числа Рейнольдса до  $\approx 15$ .

Основні результати третього розділу опубліковані в роботах [2, 5, 7, 8, 21–24, 26].

В **четвертому розділі** розроблено метод розрахунку лінеаризованої за Стоксом задачі обтікання тіл обертання. Математична модель має вигляд

$$E^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \psi|_{\partial\Omega} = 0, \partial\psi/\partial\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi \cdot r^{-2} = 0,5U_\infty \sin^2 \theta, \quad (8)$$

де  $E \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$  – оператор Стокса;  $\psi = \psi(r, \theta)$  – функція течії;

$U_\infty$  – незбурена швидкість рідини на нескінченності;  $(r, \theta, \varphi)$  – змінні сферичної системи координат.

В задачі (8) зробимо заміну  $\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u$ , де  $u$  – нова невідома функція;  $\psi_0 = 0,25U_\infty (r - R)^2 (2 + Rr^{-1}) \sin^2 \theta$ . Зауважимо, що функція  $\omega_M^2 \psi_0$  задовольняє крайовим умовам і умові на нескінченності задачі (8). Тоді функція  $u$  є розв'язком задачі

$$E^2 u = f \text{ в } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0, \partial u / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} u = 0, \quad (9)$$

де  $f = -E^2(\omega_M^2 \psi_0)$ . Зауважимо, що  $f \equiv 0$  в області  $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$ .

Узагальненим розв'язком задачі (9) назвемо функцію  $u \in F$ , що задовольняє для будь-якої  $v \in F$  інтегральній тотожності

$$\int_{\Omega} \left[ Eu \cdot E\Phi + E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot E\Phi + \frac{2\text{ctg}\theta + 2\text{ctg}^2\theta + 4r}{r^2} \cdot Eu \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{2\text{ctg}\theta + 2\text{ctg}^2\theta + 4r}{r^2} \cdot E(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right] d\Omega = 0.$$

Узагальнений розв'язок знайдемо як границю при  $n \rightarrow \infty$  розв'язків  $u_n$  рівняння задачі (9), що розглядається в  $\Omega_n = \{(r, \theta) \in \Omega \mid 0 < \omega(r, \theta) < M_n\} \subset \Omega$ .

В областях  $\Omega_n$  розглянемо крайові задачі

$$E^2 u_n = f \text{ в } \Omega_n, u_n|_{\partial\Omega} = 0, \partial u_n / \partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

**Теорема 5.** При будь-якому виборі досить гладких функцій  $\Phi_1, \Phi_2$  і за умови, що  $\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$ , коли  $r \rightarrow +\infty$ , функція вигляду  $u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2$  точно задовольняє крайовим умовам і умові на нескінченності задачі (9).

Апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  шукатимемо у вигляді (4), де

$$\begin{aligned} \{\varphi_k(r, \theta)\} &= \{r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots\}, \\ \{\tau_j(r, \theta)\} &= \{r J_2(\cos \theta), J_3(\cos \theta), r^j J_j(\cos \theta), r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тоді наближений розв'язок задачі (10) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна шукатимемо у вигляді  $u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j$ , де  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , – розв'язок системи

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (K\phi_j, \phi_i)\} = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad N = m_1 + m_2,$$

$$\begin{aligned} \text{де } K &= -\Delta \left( \frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \Delta - \frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right); \\ \{\phi_i(r, \theta)\} &= \{\omega_M^2(r, \theta) \varphi_k(r, \theta), \omega_M^2(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) \tau_j(r, \theta)\}. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** При кожному  $n$  гальоркінські наближення  $u_{n,N}$  при  $N \rightarrow \infty$  збігаються в енергетичній нормі до узагальненого розв'язку задачі (10), при цьому має місце оцінка  $\|u_n\| \leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)}$ .

**Теорема 7.** Послідовність функцій  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  збігається в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв'язку задачі (9).

Проведено обчислювальний експеримент для еліпсоїда обертання  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  (тіло 4) та тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{(x-1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ,

$\frac{(x+1)^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  (тіло 5) при  $U_\infty = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$  для різних значень  $M$  та різної кількості координатних функцій. Лінії рівня функції течії для вказаних тіл обертання наведено на рис. 3. Отриманий наближений розв'язок задачі обтікання еліпсоїда обертання було порівняно з відомим точним розв'язком цієї задачі. Відносна похибка наближеного розв'язку при  $M = 5$ ,  $m_1 = 18$ ,  $m_2 = 22$  склала 0,82%.

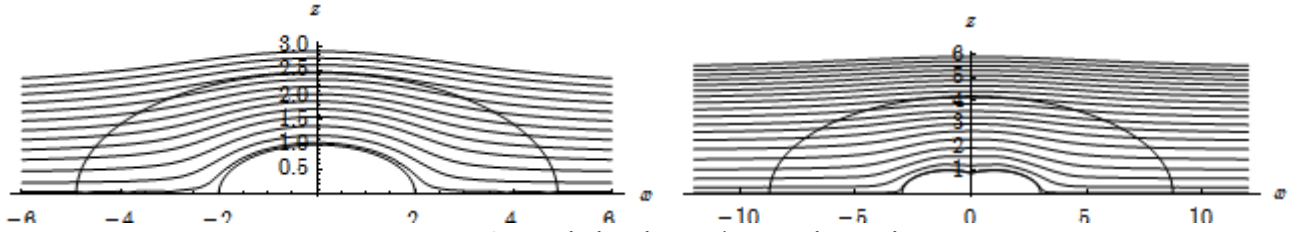


Рисунок 3 – Лінії рівня функції течії  $\psi$

Основні результати четвертого розділу опубліковані в роботах [1, 4, 8, 9, 10–13].

**В п'ятому розділі** розроблено метод розрахунку нелінійної стаціонарної задачі обтікання тіл обертання. Математична модель має вигляд

$$\begin{aligned} \nu E^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E \psi \text{ в } \Omega, \quad (12) \\ \psi|_{\partial \Omega} = 0, \quad \partial \psi / \partial \mathbf{n}|_{\partial \Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi \cdot r^{-2} = 0,5 U_\infty \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

В задачі (12) зробимо заміну  $\psi = u_0 + u$ , де  $u_0$  – розв'язок задачі (8);  $u$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $u$  отримаємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами

$$\begin{aligned} \nu E^2 u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \frac{\partial E(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u) \text{ в } \Omega, \quad (13) \\ u|_{\partial \Omega} = 0, \quad \partial u / \partial \mathbf{n}|_{\partial \Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} u = 0. \end{aligned}$$

Узагальненим розв'язком задачі (13) назвемо функцію  $u \in F$ , що задовольняє для будь-якої  $v \in F$  інтегральній тотожності

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \left( Eu \cdot Ev + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial Eu}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \left( Eu \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial Eu}{\partial r} \right) \right) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} E(u_0 + u) \left( \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr d\theta + \\ + \int_{\Omega} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u) v dr d\theta. \end{aligned}$$

Нехай початкове наближення  $u_n^{(0)}$  задано. Якщо  $k$ -е наближення  $u_n^{(k)}$  побудова-

но, то нове  $(k + 1)$ -е наближення  $u_n^{(k+1)}$  знаходимо як розв'язок лінійної задачі

$$\begin{aligned} \nu E^2 u_n^{(k+1)} = & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \frac{\partial E(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} - \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} \frac{\partial E(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial(u_0 + u_n^{(k)})}{\partial \theta} \right) E(u_0 + u_n^{(k)}) \text{ в } \Omega_n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$u_n^{(k+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \partial u_n^{(k+1)} / \partial \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

**Теорема 8.** Послідовні наближення, що формуються за схемою (14), при малих числах Рейнольдса при кожному  $n$  збігаються в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв'язку  $u_n^* \in F$  задачі (13), яка розглядається в обмеженій області  $\Omega_n$ ,

причому для  $k$ -го наближення оцінка похибки має вигляд  $\|u_n^* - u_n^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|u_n^{(1)} - u_n^{(0)}\|$ .

Умова малості числа Рейнольдса формулюється у вигляді нерівності

$$\frac{1}{\nu} < \min \left\{ \frac{L}{2\sqrt{c_0^2 + 4\tilde{c}_1^2 c_1^4} (1 + \tilde{c}c_1)(L_0^2 + L^2)}, \frac{\alpha}{4(1 + \tilde{c}c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2\tilde{c}_1^2 c_1^4}} \right\},$$

де  $\|u_0\| \leq L_0$ ;  $\|u^{(k)}\| \leq L$ ;  $\alpha < 1$ .

Для апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1^{(k+1)}$  і  $\Phi_2^{(k+1)}$  було використано проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна. Функції  $\Phi_1^{(k+1)}$  і  $\Phi_2^{(k+1)}$  апроксимовано виразами вигляду (4) з координатними функціями вигляду (11). Проведено обчислювальний експеримент для сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (тіло 6), тіла 1 та тіла 2 при  $U_\infty = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$  для різних значень  $M$  та різних чисел Рейнольдса. Обчислювальний експеримент показав, що послідовні наближення збігаються при  $Re \leq 10$ . У разі розбіжності послідовних наближень для розв'язання задачі використано нелінійний метод Гальоркіна. Лінії рівня функції течії для вказаних тіл обертання при різних числах Рейнольдса наведено на рис. 4.

Отримано, що вторинні вихори за тілом в задачі обтікання тіла 6 з'являються при збільшенні числа Рейнольдса до  $\approx 20 - 25$ , в задачі обтікання тіла 1 – до  $\approx 40 - 50$ , що добре узгоджується з відомими з літератури результатами фізичних експериментів і результатами, отриманими іншими авторами. Для тіла 2 при збільшенні числа Рейнольдса до  $\approx 10$  вихори з'являються за тілом і на стику еліпсоїдів.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані в роботах [6, 8, 18, 27, 28].

**У шостому розділі** розроблено метод розрахунку задач масообміну циліндричних тіл та тіл обертання з потоком в'язкої нестисливої рідини.

Для опису процесу масообміну циліндричних тіл з потоком в'язкої нестисливої рідини при малих числах Пекле використовується наближення Озеєна (рівняння 1):

$$\Delta c = \operatorname{Pe} U_\infty \left( \cos \varphi \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ в } \Omega. \quad (15)$$

В загальному випадку математична модель задачі масообміну циліндричних

тіл з потоком в'язкої нестисливої рідини має вигляд (рівняння 2):

$$\Delta c = \frac{\text{Re}}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ в } \Omega, \quad (16)$$

$$c|_{\partial\Omega} = c_0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} c = 0, \quad (17)$$

де  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ;  $c = c(r, \varphi)$  – концентрація;  $c_0$  – задана концентрація на межі тіла;  $\text{Re}$  – число Пекле;  $\psi(r, \varphi)$  – функція течії.

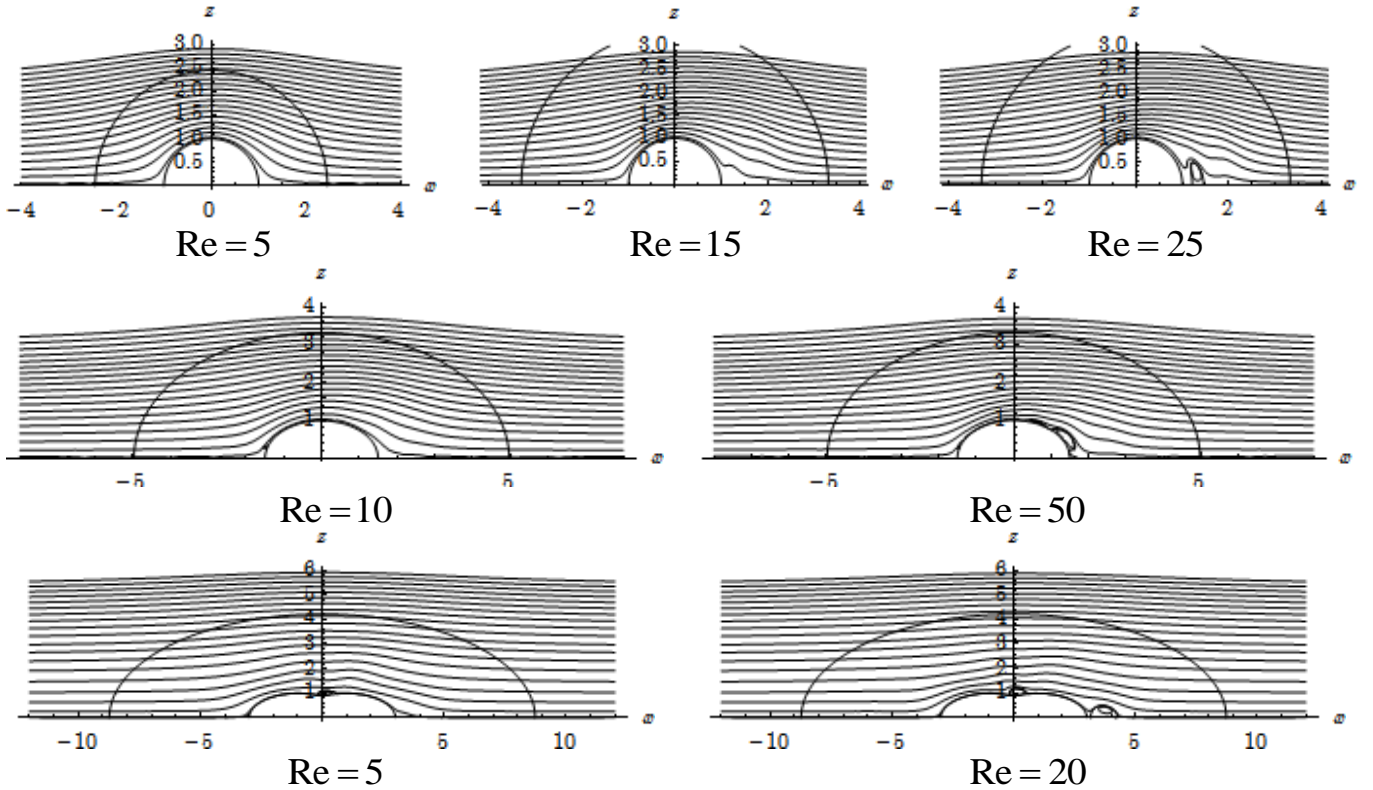


Рисунок 4 – Лінії рівня функції течії  $\psi$

В задачах (15), (17) і (16), (17) зробимо заміну  $c = c_0(1 - \omega_M) + u_l$ , де  $u_l$  – нові невідомі функції,  $l = 1, 2$  – номер рівняння. Тоді для  $u_l$  отримаємо відповідно задачі

$$-\Delta u_l + B_l u_l = F_l \text{ в } \Omega, \quad u_l|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} u_l = 0, \quad (18)$$

$$\text{де } B_1 = \text{Re} U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad B_2 = \text{Re} \cdot J(u_2, \psi); \quad F_1 = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \text{Re} U_\infty \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial x};$$

$$F_2 = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \text{Re} \cdot J(c_0(1 - \omega_M), \psi).$$

В областях  $\Omega_n$  розглянемо крайові задачі

$$-\Delta u_{n,l} + B_l u_{n,l} = F_l \text{ в } \Omega_n, \quad u_{n,l}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (19)$$

**Теорема 9.** При будь-якому виборі досить гладких функцій  $\Phi_1, \Phi_2$  і за умови,

що  $\Phi_1 \rightarrow 0$ , коли  $r \rightarrow +\infty$ , функція вигляду

$$u = \omega_M \Phi_1 + \omega_M (1 - \omega_M) \Phi_2 \quad (20)$$

точно задовольняє крайовим умовам і умові на нескінченності задачі (18).

Апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  шукатимемо у вигляді (4), де  $\{\varphi_k(r, \varphi)\} = \{r^{-k} \cos k\varphi, r^{-k} \sin k\varphi, k \in \mathbf{N}\}$ ,  $\{\tau_j(r, \varphi)\} = \{1, r^j \cos k\varphi, r^j \sin k\varphi, j \in \mathbf{N}\}$ .

Тоді наближений розв'язок задач (19) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна шукатимемо у вигляді  $u_{n,l,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,l,j} \phi_j$ , де  $c_{n,l,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , – розв'язок системи

$$\sum_{j=1}^N c_{n,l,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (B_l \phi_j, \phi_i)\} = (F_l, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad l = 1, 2, \quad N = m_1 + m_2,$$

де  $\{\phi_i(r, \varphi)\} = \{\omega_M(r, \varphi) \varphi_k(r, \varphi), \omega_M(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) \tau_j(r, \varphi)\}$ .

**Теорема 10.** При кожному  $n$  гальоркінські наближення  $u_{n,l,N}$  при  $N \rightarrow \infty$  збігаються в енергетичній нормі до узагальненого розв'язку задач (19), при цьому має місце оцінка  $\|u_{n,l}\| \leq \frac{1}{\gamma} \|F_l\|_{L_2(\Omega_n)}$ .

**Теорема 11.** Послідовності функцій  $\{u_{n,l}\}$ ,  $l = 1, 2$ , при  $M_n \rightarrow \infty$  збігаються в енергетичній нормі до єдиних узагальнених розв'язків задач (18).

Проведено обчислювальний експеримент для тіл 1, 2 та 3 при  $c_0 = 1$  для різних значень  $M$  та різних чисел Рейнольдса і Пекле. При  $Pe = 0,01$  задача не залежить від функції течії, а отже, і від значення числа Рейнольдса. Лінії концентрації для вказаних циліндричних тіл при різних числах Рейнольдса і  $Pe = 10$  наведено на рис. 5.

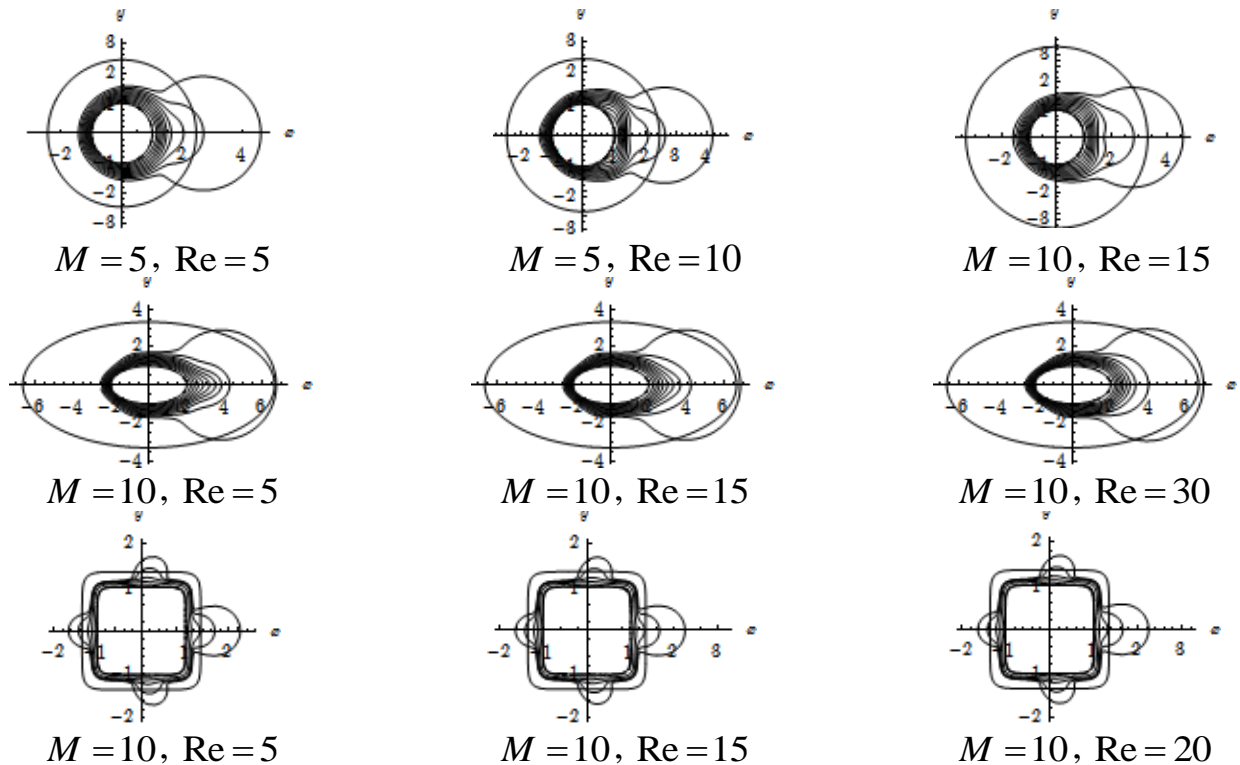


Рисунок 5 – Лінії концентрації

Математична модель задачі масообміну тіл обертання з потоком в'язкої нести-сливої рідини має вигляд

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \text{ в } \Omega, \quad c|_{\partial \Omega} = c_0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} c = 0, \quad (21)$$

де  $\Delta c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)$ ;  $c = c(r, \theta)$  – концентрація;  $c_0$  – за-дана концентрація на межі тіла;  $\text{Pe}$  – число Пекле;  $\psi = \psi(r, \theta)$  – функція течії.

В задачі (21) зробимо заміну  $c = c_0 (1 - \omega_M) + u$ , де  $u$  – нова невідома функція. Тоді для  $u$  отримаємо відповідно задачу

$$-\Delta u + \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = F \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial \Omega} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} u = 0, \quad (22)$$

$$\text{де } F = \Delta(c_0(1 - \omega_M)) - \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(c_0(1 - \omega_M))}{\partial \theta} \right).$$

В областях  $\Omega_n$  розглянемо крайові задачі

$$-\Delta u_n + \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \right) = F \text{ в } \Omega_n, \quad u_n|_{\partial \Omega} = 0. \quad (23)$$

Згідно з теоремою 9 функція  $u(r, \theta)$  із (20) точно задовольняє крайовим умо-вам задачі (22), тобто є структурою розв'язку крайової задачі (22).

Апроксимації невизначених компонент  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  шукатимемо у вигляді (4), де

$$\begin{aligned} \{\varphi_k(r, \theta)\} &= \{r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \\ \{\tau_j(r, \theta)\} &= \{r^j P_j^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, j, j = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Тоді наближений розв'язок задач (23) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна шукатимемо у вигляді  $u_{n,N} = \sum_{j=1}^N c_{n,j} \phi_j$ , де  $c_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , – розв'язок системи

$$\sum_{j=1}^N c_{n,j} \{[\phi_j, \phi_i] + (K\phi_j, \phi_i)\} = (F, \phi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad l = 1, 2, \quad N = m_1 + m_2,$$

$$\text{де } K = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$\{\phi_i(r, \theta)\} = \{\omega_M(r, \theta) \varphi_k(r, \theta), \omega_M(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) \tau_j(r, \theta)\}.$$

**Теорема 12.** При кожному  $n$  гальоркінські наближення  $u_{n,N}$  при  $N \rightarrow \infty$  збі-гаються в енергетичній нормі до узагальненого розв'язку задачі (23), при цьому має

$$\text{місце оцінка } \|u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} \|F\|_{L_2(\Omega_n)}.$$



**Теорема 13.** Послідовність функцій  $\{u_n\}$  при  $M_n \rightarrow \infty$  збігається в енергетичній нормі до єдиного узагальненого розв'язку задачі (22).

Проведено обчислювальний експеримент для тіл 6, 4 та 5 при  $c_0 = 1$  для різних значень  $M$  та різних чисел Рейнольдса і Пекле. Лінії концентрації для вказаних тіл обертання при різних числах Рейнольдса і  $Re = 10$  наведено на рис. 6.

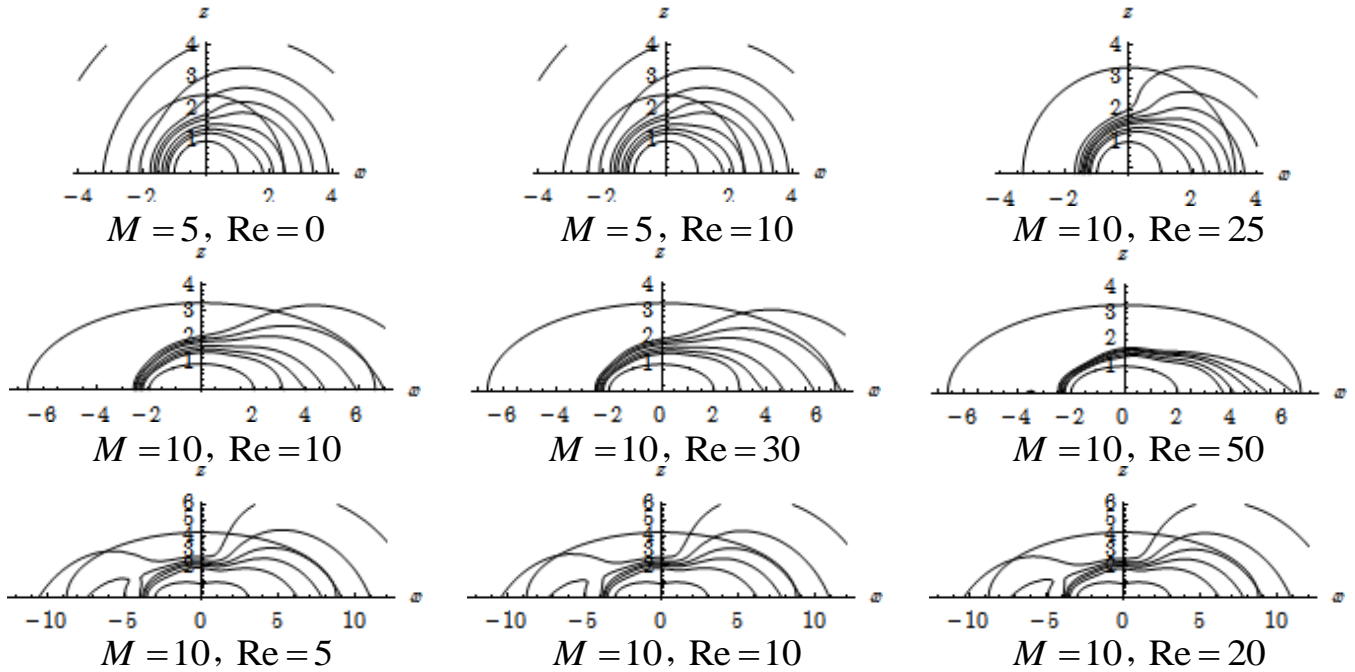


Рисунок 6 – Лінії концентрації

При  $Re = 0$  задача не залежить від функції течії, а відповідно і від значення числа Рейнольдса. Отриманий наближений розв'язок даної задачі обтікання сфери було порівняно з відомим точним розв'язком  $c = 1/r$ . Відносна похибка наближеного розв'язку при  $M = 5$  і  $Re = 0$  склала 0,98%.

Основні результати шостого розділу опубліковані в роботах [3, 19, 20, 25, 29, 30].

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі одержано результати, які в сукупності є подальшим узагальненням і розвитком чисельних методів математичного моделювання стаціонарного обтікання тіл в'язкою рідиною. Результати роботи містять теоретичне обґрунтування методів розв'язання відповідних лінійних і нелінійних задач.

1. Запропоновані в роботі методи застосовані до задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною, які раніше із застосуванням методу  $R$ -функцій не розв'язувалися.

2. Вперше розроблено метод розрахунку повільного обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною, який базується на застосуванні методів  $R$ -функцій і Бубнова-Гальоркіна. Побудовано структури розв'язку крайових задач у відповідності зі структурним методом (методом  $R$ -функцій), які точно задовольняють крайовим умовам на межі тіл, що обтікаються, і умовам на нескінченності, що дозволило звести задачі в нескінченній області до задач в скінченній області. Доведено збіжність гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиних узагальнених

розв'язків задач, які розглядаються в обмежених областях, отримано оцінки розв'язків в енергетичній нормі.

3. На основі методу послідовних наближень побудовано ітераційний чисельний метод розрахунку задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною: розв'язання нелінійних задач зводиться до розв'язання послідовностей лінійних крайових задач, для знаходження розв'язків яких на кожному кроці ітераційного процесу розроблено чисельний алгоритм на основі методів  $R$ -функцій і Бубнова-Гальоркіна. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса, отримано оцінки швидкості збіжності в енергетичній нормі.

4. У разі розбіжності послідовних наближень для апроксимації невизначених компонент структур розв'язку нелінійних стаціонарних задач обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною в циліндричній і сферичній системах координат, запропоновано застосування нелінійного методу Гальоркіна: розв'язання нелінійної задачі зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Вперше розроблено чисельний метод розв'язання стаціонарних задач обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною з урахуванням масопереносу, заснований на апроксимації невизначених компонент у структурі розв'язку крайових задач методом Бубнова-Гальоркіна. Побудовано структуру розв'язку задач у відповідності з методом  $R$ -функцій, яка точно задовольняє крайовим умовам на межі тіл, що обтікаються і з поверхні яких відбувається масообмін, та умові на нескінченності, що дозволило звести задачі в нескінченній області до задач в скінченній області. Доведено збіжність гальоркінських наближень в енергетичній нормі до єдиних узагальнених розв'язків задач, що розглядаються в обмежених областях, отримано оцінки розв'язків в енергетичній нормі.

6. Достовірність отриманих результатів забезпечується строгістю математичних постановок задач з використанням основних положень математичної фізики. Коректність чисельних результатів підтверджується порівнянням з відомими із літератури точними розв'язками, результатами фізичних експериментів та чисельними розв'язками.

7. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки.

8. Отримані результати є теоретичною і практичною основою для розв'язання інженерних задач, які зводяться до моделювання стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною. Також розроблені методи можна використати як складові при реалізації напівдискретних та проєкційних методів розв'язання нестационарних задач.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the  $R$ -function method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // Journal of Engineering Mathematics. – 2015. – V. 91, No. 1. – P. 59–79 (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x, наукометрична база Scopus).

2. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body

applying the  $R$ -functions method and the Galerkin method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // *Econtechmod.* – 2014. – Vol. 3, No. 3. – P. 43–50 (наукометрична база BazTech).

3. Колосова С.В. Об одном методе численного анализа вязких течений, усложненных массообменом (задача обтекания) / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Радиоэлектроника и информатика.* – 2014. – № 1 (64). – С. 25–30 (наукометрична база Scopus).

4. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат / С.Н. Ламтюгова // *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки.* – 2012. – № 1. – С. 112–122.

5. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки.* – 2012. – № 2. – С. 57–65.

6. Колосова С.В. Применение итерационных методов к решению внешних задач гидродинамики / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Радиоэлектроника и информатика.* – 2012. – № 3. – С. 13–17.

7. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат / С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* – 2014. – № 1105, вип. 24. – С. 111–121.

8. Ламтюгова С.Н. Применение итерационных методов к расчету обтекания тел стационарным потоком вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // *Радиоэлектроника и информатика.* – 2015. – № 2. – С. 49–56.

9. Ламтюгова С.М. Застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини / С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Відбір і обробка інформації.* – 2012. – № 36 (112). – С. 56–62.

10. Ламтюгова С.Н. Об одном методе решения внешних задач гидродинамики вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // *Научные труды Международной молодежной научной конференции “XXXVI Гагаринские чтения” в 9 томах.* – Москва: МАТИ, 2010. – Т. 5. – С. 110–111.

11. Колосова С.В. Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса / С.В. Колосова, С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Матеріали XIII міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука.* – Київ: НГУУ “КП”, 2010. – Т. 2. – С. 150.

12. Ламтюгова С.М. Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса / С.М. Ламтюгова // *Тезиси докладів IV наукової конференції для студентів і аспірантів “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях”.* – Х: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2010. – С. 27–29.

13. Ламтюгова С.М. Застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини / С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров // *Матеріали XXII-ї*

відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України. – Львів, 2011. – С. 241–244.

14. Ламтюгова С.Н. Численный анализ внешних течений вязкой жидкости (приближение Озеена) методом  $R$ -функций / С.Н. Ламтюгова // Материалы 16-го Международного молодежного форума “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке”. – Харьков: ХНУРЭ, 2012. – Т. 10. – С. 155–156.

15. Ламтюгова С.М. Чисельний аналіз зовнішніх течій в'язкої рідини (наближення Озеена) методом  $R$ -функцій / С.М. Ламтюгова // Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – Київ: НГУУ “КПІ”, 2012. – Т. 1. – С. 268.

16. Ламтюгова С.М. Про застосування методу  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх течій в'язкої рідини в наближенні Озеена / С.М. Ламтюгова // Тезиси докладов XXXVI научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковской национальной академии городского хозяйства. – Харьков: ХНАГХ, 2012. – С. 231–232.

17. Ламтюгова С.Н. Об одной внешней задаче гидродинамики вязкой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции “XXXVIII Гагаринские чтения” в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2012. – Т. 5. – С. 84–85.

18. Ламтюгова С.М. Застосування методів послідовних наближень та  $R$ -функцій до розрахунку зовнішніх вісесиметричних в'язких течій / С.М. Ламтюгова // Тези доповідей П'ятнадцятої Всеукраїнської (Десятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики “СНКПМІ-2012” – Львів: ЛНУ, 2012. – С. 229–231.

19. Lamtyugova S.N. The  $R$ -functions method application to solving mass transfer problems / S.N. Lamtyugova // Theoretical and applied aspects of cybernetics. Proceedings of the 2nd international scientific conference of students and young scientists. – Kyiv: Bukrek. – P. 108–111.

20. Колосова С.В. Численный анализ задач массообмена методом  $R$ -функций / С.В. Колосова, С.Н. Ламтюгова // Тези доповідей Одинадцятої Всеукраїнської науково-технічної конференції “Математичне моделювання та інформаційні технології” (ММІТ-2012). – Одеса, 2012. – С. 100–101.

21. Ламтюгова С.Н. Применение методов последовательных приближений и  $R$ -функций к решению задачи обтекания цилиндрического тела / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции “XXXIX Гагаринские чтения” в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2013. – Т. 5. – С. 80–82.

22. Ламтюгова С.Н. Численный анализ нелинейной стационарной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Материалы 17-го Международного молодежного форума “Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.”. – Харьков: ХНУРЭ, 2013. – Т. 7. – С. 138–139.

23. Ламтюгова С.М. Застосування методів послідовних наближень та  $R$ -функцій до чисельного аналізу обтікання еліптичного циліндра в'язкою рідиною / С.М. Ламтюгова // Тези доповідей Шістнадцятої всеукраїнської (Одинадцятої між-

народної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики “СНКПМІ-2013”. – Львів, 2013. – С. 83–85.

24. Ламтюгова С.Н. Применение методов  $R$ -функций и последовательных приближений к расчету стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Сборник статей VII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов “Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем”. – Россия, г. Пенза, 2013. – С. 65–71.

25. Ламтюгова С.Н. Численный анализ вязких течений, усложненных массообменом, методом  $R$ -функций / С.Н. Ламтюгова // Труды XVI Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” (МДОЗМФ-2013). – Херсон, 2013. – С. 226–229.

26. Ламтюгова С.Н. Применение метода  $R$ -функций к численному анализу задач обтекания в цилиндрической системе координат / С.Н. Ламтюгова, М.В. Сидоров // Труды международной научно-технической конференции “Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях”. – Харьков, 2014. – С. 232–235.

27. Ламтюгова С.Н. Применение методов  $R$ -функций и Галеркина к решению нелинейной стационарной задачи обтекания в сферической системе координат / С.Н. Ламтюгова // Научные труды Международной молодежной научной конференции “XL Гагаринские чтения” в 9 томах. – Москва: МАТИ, 2014. – Т. 5. – С. 130–132.

28. Ламтюгова С.Н. О нелинейной стационарной задаче обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Тезисы докладов XXXV научно-технической конференции преподавателей, аспирантов и сотрудников Харьковского национального университета городского хозяйства им. А.Н. Бекетова – Харьков, 2014. – С. 189–190.

29. Ламтюгова С.Н. Численный анализ задачи массообмена тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Материалы 18-ого Международного молодежного форума “Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.”. – Харьков: ХНУРЭ, 2014. – Т. 7. – С. 110–111.

30. Ламтюгова С.Н. Численный анализ задачи массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости / С.Н. Ламтюгова // Материалы 19-ого Международного молодежного форума “Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.”. – Харьков: ХНУРЭ, 2015. – Т. 7. – С. 68–69.

## АНОТАЦІЯ

**Ламтюгова С.М. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні мето-

ди. – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2016.

Дисертація присвячена розробці методів математичного моделювання і чисельного аналізу обтікання циліндричних тіл і тіл обертання в'язкою нестисливою рідиною на основі методу  $R$ -функцій. Для математичного моделювання стаціонарного повільного обтікання тіл (лінійні задачі) запропоновано новий чисельний метод, заснований на сумісному використанні методів  $R$ -функцій і Бубнова-Гальоркіна. Алгоритм розробленого метода не змінюється при зміні геометрії області, а структура розв'язку точно враховує як крайові умови на межі тіла, так і умову на нескінченності. Для математичного моделювання стаціонарного обтікання тіл (нелінійні задачі) отримав подальший розвиток чисельний метод, заснований на сумісному використанні методів  $R$ -функцій, послідовних наближень і Бубнова-Гальоркіна. Крім того, запропоновано використання нелінійного методу Гальоркіна для апроксимації невизначених компонент структури у разі розбіжності ітераційного процесу. Для розрахунку масообміну тіл з рівномірним поступальним потоком вперше розроблено чисельний метод, заснований на апроксимації невизначених компонент у структурі розв'язку крайових задач методом Бубнова-Гальоркіна. Запропоновані чисельні методи проілюстровані обчислювальними експериментами.

**Ключові слова:** в'язка рідина, задача обтікання, рівняння Стокса, рівняння Озеена, рівняння Нав'є-Стокса, функція течії, метод  $R$ -функцій, метод послідовних наближень, метод Бубнова-Гальоркіна, математичне моделювання.

## АННОТАЦИЯ

**Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование и численный анализ методом  $R$ -функций задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена разработке методов математического моделирования и численного анализа обтекания цилиндрических тел и тел вращения вязкой несжимаемой жидкостью на основе метода  $R$ -функций. Течения вязкой жидкости описываются линейными (приближения Озеена и Стокса) либо нелинейными уравнениями четвертого порядка относительно функции тока и системой уравнений относительно функции тока и концентрации.

Для математического моделирования стационарного медленного обтекания тел (линейные задачи) вязкой несжимаемой жидкостью предложен новый численный метод, основанный на совместном применении методов  $R$ -функций и Бубнова-Галеркина. Алгоритм разработанного метода не изменяется при изменении геомет-

рии области, а структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственным обобщенным решениям задач, получены оценки решений в энергетической норме.

Для математического моделирования стационарного обтекания тел (нелинейные задачи) вязкой несжимаемой жидкостью получил дальнейшее развитие численный метод, основанный на совместном использовании методов  $R$ -функций и последовательных приближений: решение исходных нелинейных задач сводится к решению последовательностей линейных краевых задач, для решения которых на каждом шаге итерационного процесса разработан численный алгоритм на основании метода Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость построенных итерационных процессов при малых числах Рейнольдса, получены оценки скорости сходимости в энергетической норме. Кроме того, предложено использование нелинейного метода Галеркина для аппроксимации неопределенных компонент структуры в случае расходимости итерационного процесса: решение исходных нелинейных задач сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений.

Для расчета массообмена тел с равномерным поступательным потоком впервые разработан численный метод, основанный на аппроксимации неопределенных компонент в структуре решения краевых задач методом Бубнова-Галеркина. Доказана сходимость галеркинских приближений в энергетической норме к единственным обобщенным решениям задач, получены оценки решений в энергетической норме.

Предложенные численные методы проиллюстрированы многочисленными вычислительными экспериментами. Полученные приближенные решения сравнивались с известными из литературы точными решениями, результатами физических экспериментов и приближенными решениями, полученными другими авторами, что подтверждает достоверность полученных результатов.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, задачи обтекания, уравнение Стокса, уравнение Озеена, уравнения Навье-Стокса, функция тока, метод  $R$ -функций, метод последовательных приближений, метод Бубнова-Галеркина, математическое моделирование.

## ABSTRACT

**Lamtyugova S.N. Mathematical modeling and numerical analysis of problems of flow past bodies by viscous incompressible fluid using the R-functions method.** – The manuscript.

The thesis for the candidate of physical and mathematical sciences degree on a specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2016.

The thesis is devoted to the development of methods of mathematical modeling and numerical analysis of flow around cylindrical bodies and bodies of revolution by viscous incompressible fluid on the basis of the R-functions method. For the mathematical model-

ing of steady slow flow past bodies (linear problems), a new numerical method, based on the joint use of the  $R$ -functions and Bubnov-Galerkin method, has been suggested. The algorithm of developed method does not change with change in the area geometry; in addition, the structure of the solution accurately takes into account the boundary conditions at the boundary of the streamlined body and the condition at infinity. For the mathematical modeling of steady flow past bodies (nonlinear problems), a method, based on the combined use of the  $R$ -functions, the successive approximations and the Bubnov-Galerkin method, was further developed. Besides, a numerical method, based on the use of nonlinear Galerkin method for approximation of undefined components in the structure in case if iterative process diverges, has been suggested. For the calculation of mass transfer of bodies with uniform translation flow, a numerical method, based on the approximation of undefined components in the structure of the solution of boundary value problems by the Bubnov-Galerkin method, has been developed for the first time. The proposed numerical methods are illustrated by computational experiments.

**Key words:** viscous fluid, flow past bodies, Stokes equation, Oseen equation, Navier-Stokes equations, stream function,  $R$ -functions method, successive approximations method, Bubnov-Galerkin method, mathematical modeling.



Підп. по друку 08.12.2015  
Друк на різнографі  
Зам. № 9854

Формат 60×84 1/16  
Ум. друк. арк. 0,9  
Тираж 100 прим.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет міського господарства  
імені О.М. Бекетова, вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014